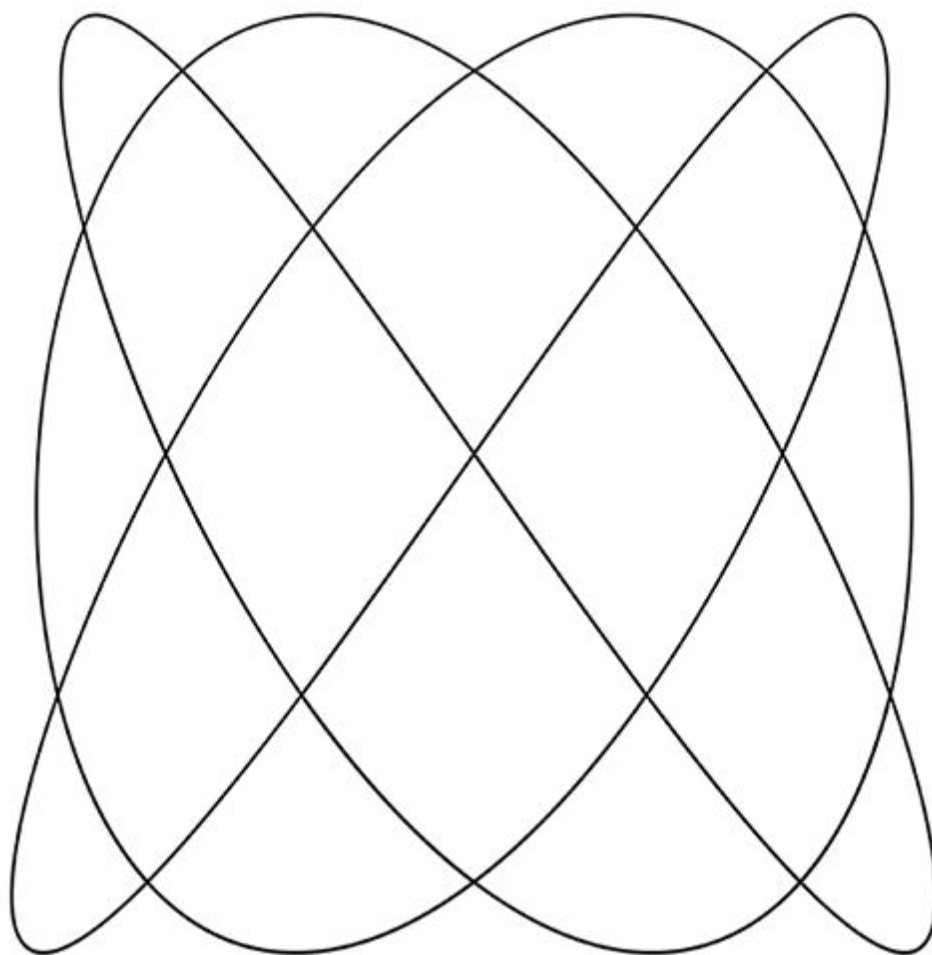


Елисеев Д.

Рассказы о математике с примерами на языках Python и C.



Версия текста 1.0. (с) 2017

Введение

Как сказал еще Галилей, “Книга природы написана на языке математики”, и с этим сложно не согласиться. Математика это универсальный язык науки, это базовые принципы, на которых построена вся Вселенная. $2+2=4$ независимо от того, верим мы в это или нет, знаем мы это или нет, существуем мы вообще или нет, и это будет верно не только для нас, но и для жителя Альфы Центавра.

Из этого следует важное правило: математические законы нельзя придумать, их можно только открыть. Треугольник подчинялся теореме Пифагора еще до того, как Пифагор открыл и сформулировал известную теорему. Число Пи было вычислено в древнем Китае, но его значение было таким всегда - еще до того как появился не только Китай, но и наша планета Земля.

Именно поэтому я надеюсь, что кто-то из читателей с помощью этой книги *откроет* для себя в математике что-то новое. Увы, в представлении большинства, математика - это достаточно скучная наука, вероятно так ее преподают в школе. Если кто-то с помощью этой книги найдет для себя что-то новое, можно считать что время было потрачено не зря.

Эта книга не задачник, а скорее сборник рассказов о тех или иных математических вопросах. Т.к. математические примеры без цифр бессмысленны, “практическая” часть дается на языках программирования Python и Си.

Номер версии в заголовке указан неслучайно. Эта книга не закончена, и по мере появления каких-то новых интересных вопросов она будет дополняться. Желаящие также могут присылать свои истории или задачи по адресу dmitryelj@gmail.com, наиболее интересные из них будут включены в текст. Обо найденных неточностях также просьба писать на этот адрес.

Книга распространяется бесплатно в электронном виде. Печатную версию желающие могут сделать себе самостоятельно. В архиве также приложены все файлы программ. Наличие новой версии можно проверить на странице <http://dmitryelj.spb.ru/math.htm>.

Приятного чтения.

Елисеев Дмитрий

История версий текста:

04.2017 - 1.0

1. Основы языков Python и Си

Математика немыслима без расчетов и примеров вычислений. Примеры в данной книге иллюстрируются фрагментами кода на языке Python. Этот язык удобен тем, что он очень прост и подходит для начинающих, поэтому кратко рассмотрим как им пользоваться.

Для использования языка Python нужно установить интерпретатор языка с сайта <https://www.python.org/downloads/> или воспользоваться онлайн-версией, например на странице <https://repl.it/languages/python3>. Все примеры из книги работоспособны с любой версией языка Python, 2.7 или 3.

Для запуска программы необходимо:

- Сохранить файл в Блокноте с любым именем и расширением .py, например test1.py (удобно также создать папку в корне диска C, например C:\PythonApps).
- Открыть консоль (нажать Win+R и набрать cmd), в консоли набрать команду (без кавычек) "python путь_к_файлу.py", например "python C:\PythonApps\test1.py".

Как более удобный вариант, можно скачать бесплатную среду разработки PyCharm community edition, и редактировать и запускать файлы в ней. Скачать PyCharm можно со страницы <https://www.jetbrains.com/pycharm/download/>.

Для запуска программы на языке Си, ее сначала надо сохранить файле с расширением .c, и выполнить команду "gcc имя_файла.c". Будет создан exe-файл, который можно запустить.

Минимальная программа на Си выглядит так:

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    printf("Hello world\n");
    return 0;
}
```

Рассмотрим простые примеры использования.

Объявление и вывод переменных

Python: достаточно ввести имя и значение.

```
x = 3
y = 10
print("x=", x)
print(x+y)
```

В отличие от языка C++, тип переменной будет определен автоматически, указывать его не нужно. Кстати, его можно узнать, введя print (type(x)).

Си: необходимо указать тип и значение переменной.

```
int x = 3;
```

```
int y = 10;
printf("x=%d\n", x);
printf("%d\n", x+y);
```

Циклы

В отличие от того же C++ или Java, циклы задаются отступами, что после других языков программирования может быть непривычным. Часть кода, находящаяся внутри цикла, будет выполнена заданное количество раз.

Python

Вывод чисел от 1 до 9:

```
for p in range(1,10):
    print (p)
```

Вывод чисел от 1 до 9 с шагом 2:

```
for p in range(1,10,2):
    print (p)
```

Cu

Вывод чисел от 1 до 9:

```
for(int i=1; i<10; i++) {
    printf("%d\n", i);
}
```

Вывод чисел от 1 до 9 с шагом 2:

```
for(int i=1; i<10; i+=2) {
    printf("%d\n", i);
}
```

Массивы

Массив это линейный набор чисел, с которыми удобно выполнять однотипные операции, например вычисление суммы или среднего арифметического.

Python

Объявляем массив чисел:

```
values = [1,2,3,5,10,15,20]
```

Добавляем элемент в массив:

```
values.append(7)
```

Выводим массив на экран:

```
print(values)
```

Выводим элементы массива построчно:

```
for p in values:
    print(p)
```

Это же можно сделать с помощью индексов (нумерация элементов массива начинается с 0):

```
for i in range(0,len(values)):
    print (values[i])
```

Си: Динамические массивы поддерживаются только в C++, статические массивы создаются так:

```
int values[7] = { 1,2,3,5,10,15,20 };
for(int i=0; i<7; i++) {
    printf("%d\n", values[i]);
}
```

При желании можно слегка схитрить, если максимальный размер массива заранее известен.

```
int values[255] = { 1,2,3,5,10,15,20 }, cnt = 7;
for(int i=0; i<cnt; i++) {
    printf("%d\n", values[i]);
}
values[cnt] = 7;
cnt++;
```

Можно пользоваться динамическим распределением памяти, хотя это немного сложнее:

```
int *valuesArray = (int*)malloc(10*sizeof(int));
valuesArray[0] = 1;
valuesArray[1] = 3;
valuesArray[2] = 15;
valuesArray = (int*)realloc(valuesArray, 25*sizeof(int));
valuesArray[20] = 555;
valuesArray[21] = 777;
for(int i=0; i<25; i++) {
    printf("%d\n", valuesArray[i]);
}
free(valuesArray);
```

Важно заметить, что неинициализированные значения массива, например valuesArray[16], будут содержать “мусор”, некие значения которые были до этого в памяти. Си достаточно низкоуровневый язык, и такие моменты нужно учитывать. Хорошим тоном является инициализация всех переменных при их описании. Вот такой код формально не содержит ошибок:

```
int x;
printf("x=%d\n", x);
```

Однако при его запуске выведется значение 4196608, или 0, или 32, результат непредсказуем. В большой программе такие ошибки может быть сложно найти, тем более что проявляться они могут не всегда.

Арифметические операции

Сложение, умножение, деление:

```
x1 = 3
x2 = (2*x1*x1 + 10*x1 + 7)/x1
```

Возведение в степень:

```
x3 = x1**10
print (x1,x2,x3)
```

Переменную также можно увеличить или уменьшить:

```
x1 += 1
x1 -= 10
print (x1)
```

Остаток от деления:

```
x2 = x1 % 6
print (x2)
```

Подсчитаем сумму элементов массива:

```
values = [1,2,3,5,10,15,20]
sum = 0
for p in values:
    sum += p
print (sum)
```

Для более сложных операций необходимо подключить модуль math. Вычисление квадратного корня:

```
import math

print (math.sqrt(x3))
```

Условия задаются отступами, аналогично циклам:

```
print (x1)
if x1 % 2 == 0:
    print("x1 четное число")
else:
    print("x1 нечетное число")
```

Python может делать вычисления с большими числами, что достаточно удобно:

```
x1 = 12131231321321312312313131124141
print (10*x1)
print (math.sqrt(x1))
```

Можно вывести даже факториал числа 1024, что не сделает ни один калькулятор:

```
print(math.factorial(1024))
```

В Си вычисление суммы элементов массива выглядит так:

```
int sum = 0;
for(int i=0; i<cnt; i++) {
    sum += values[i];
}
```

```
printf("Sum=%d\n", sum);
```

Пожалуй, этого не хватит чтобы устроиться на работу программистом, но вполне достаточно для понимания большинства примеров в книге. Теперь вернемся к математике.

2. Математические фокусы

Для “разминки” рассмотрим несколько фокусов, имеющих отношение к числам. Никаких особых сложностей в них нет, но их знание поможет развеселить или удивить знакомых знанием математики.

Умножение в уме числа на 11

Рассмотрим простой пример:

$$26 \cdot 11 = 286$$

Сделать это в уме просто, если взять сумму чисел и поместить в середину:

$$26 \cdot 11 = 2 \ [2+6] \ 6$$

Аналогично $43 \cdot 11 = 473$, $71 \cdot 11 = 781$ и так далее.

Чуть длиннее расчет, если сумма чисел больше либо равна 10. Но и тогда все просто: в середину кладется младший разряд, а 1 уходит в старший разряд:

$$47 \cdot 11 = [4] \ [4+7=11] \ [7] = [4+1] \ [1] \ [7] = 517$$

$$94 \cdot 11 = [9] \ [9+4=13] \ [4] = [10] \ [3] \ [4] = 1034$$

Возведение в квадрат числа, оканчивающегося на 5

Подсчитать это тоже просто. Если число рассмотреть как пару NM, то первая часть результата - это число N, умноженное на (N+1), вторая часть числа - всегда 25.

$$35^2 = [3 \cdot 4] \ [25] = 12 \ 25$$

Аналогично:

$$25^2 = [2 \cdot 3] \ 25 = 625 \quad 85^2 = [8 \cdot 9] \ 25 = 7225 \text{ и так далее.}$$

Отгадывание результата

Попросим человека загадать любое число. Например 73. Затем чтобы еще больше запутать отгадывающего, попросим сделать следующие действия:

- удвоим число (146)
- прибавляем 12 (158)
- разделим на 2 (79)
- вычтем из результата исходное число ($79 - 73 = 6$)

В конце мы отгадываем, что результат - 6. Суть в том, что число 6 появляется независимо от того, какое число загадал человек.

Математически, это доказывается очень просто:

$$(2 \cdot n + 12) / 2 - n = n + 6 - n = 6, \text{ независимо от значения } n.$$

Отгадывание чисел

Есть другой фокус с отгадыванием чисел. Попросим человека загадать трехзначное число, числа в котором идут в порядке уменьшения (например 752). Попросим человека выполнить следующие действия:

- записать число в обратном порядке (257)
- вычесть его из исходного числа ($752 - 257 = 495$)
- к ответу добавить его же, только в обратном порядке ($495 + 594$)

Получится число 1089, которое “фокусник” и объявляет публике.

Математически это тоже несложно доказать.

- Любое число вида abc в десятичной системе счисления представляется так:
 $abc = 100*a + 10*b + c$.
- Разность чисел abc - cba:
 $100*a + 10*b + c + 100 - 100*c - 10*b - a = 100*a - 100*c - (a - c) = 100*(a-c) - (a-c)$
- Т.к. по условию $a - c > 0$, то результат можно записать в виде:
 $100*(a-c) - (a-c) = 100*(a-c) - 100 + 90 + 10 - (a-c) = 100*(a-c-1) + 10*9 + (10-a+c)$
Мы узнали разряды числа, получающегося в результате:
 $a_1 = a-c-1, b_1 = 9, c_1 = 10-a+c$
- Добавляем число в обратном порядке:
 $a_1b_1c_1 + c_1b_1a_1 = 100*(a-c-1) + 10*9 + (10-a+c) + 100*(10-a+c) + 10*9 + a-c-1$

Если раскрыть все скобки и сократить лишнее, в остатке будет 1089.

3. Число Пи

Вобьем в стену гвоздь, привяжем к нему веревку с карандашом, начертим окружность. Как вычислить длину окружности? Сегодня ответ знает каждый школьник - с помощью числа Пи. Число Пи - несомненно, одна из основных констант мироздания, значение которой было известно еще в древности. Оно используется везде, от кройки и шитья до расчетов гармонических колебаний в физике и радиотехнике.

Сегодня достаточно нажать одну кнопку на калькуляторе, чтобы увидеть его значение: $\pi = 3.1415926535...$ Однако, за этими цифрами скрывается многовековая история. Что такое число Пи? Это отношение длины окружности к ее диаметру. То что это константа, не зависящая от самой длины окружности, знали еще в древности. Но чему она равна? Есть ли у этого числа какая-то внутренняя структура, неизвестная закономерность? Узнать это хотели многие. Самый простой и очевидный способ - взять и измерить. Примерно так вероятно и поступали в древности, точность разумеется была невысокой. Еще в древнем Вавилоне значение числа Пи было известно как $25/8$. Затем **Архимед** предложил первый математический метод вычисления числа Пи, с помощью расчета вписанных в круг многоугольников. Это позволяло вычислять значение не «напрямую», с циркулем и линейкой, а математически, что обеспечивало гораздо большую точность. И наконец в 3-м веке нашей эры китайский математик **Лю Хуэй** придумал первый итерационный алгоритм — алгоритм, в котором число вычисляется не одной формулой, а последовательностью шагов (итераций), где каждая последующая итерация увеличивает точность. С помощью своего метода Лю Хуэй получил Пи с точностью 5

знаков: $\pi = 3.1416$. Дальнейшее увеличение точности заняло сотни лет. Математик из Ирана **Джамшид ибн Мас'уд ибн Махмуд Гияс ад-Дин ал-Каши** в 15-м веке вычислил число Пи с точностью до 16 знаков, а в 17-м веке голландский математик **Лудольф** вычислил 32 знака числа Пи. В 19-м веке англичанин **Вильям Шенкс**, потратив 20 лет, вычислил Пи до 707 знака, однако он так и не узнал, что в 520-м знаке допустил ошибку и все последние годы вычислений оказались напрасны (в итерационных алгоритмах хоть одна ошибка делает все дальнейшие шаги бесполезными).

Что мы знаем о числе Пи сегодня? Действительно, это число весьма интересно:

- Число Пи является иррациональным: оно не может быть выражено с помощью дроби вида m/n . Это было доказано только в 1761 году.
- Число Пи является трансцендентным: оно не является корнем какого-либо уравнения с целочисленными коэффициентами. Это было доказано в 1882 году.
- Число Пи является бесконечным.
- Интересное следствие предыдущего пункта: в числе Пи можно найти практически любое число, например свой собственный номер телефона, вопрос лишь в длине последовательности которую придется просмотреть. Можно подтвердить, что так и есть: скачав архив с 10 миллионами знаков числа Пи, я нашел в нем свой номер телефона, номер телефона квартиры где я родился, и номер телефона своей супруги. Но разумеется, никакой "магии" тут нет, лишь теория вероятности. Можно взять любую другую случайную последовательность чисел такой же длины, в ней также найдутся любые заданные числа.

И наконец, перейдем к формулам вычисления Пи, т.к. именно в них можно увидеть красоту числовых взаимосвязей - то, чем интересна математика.

Формула Лю-Хуэя (3й век):

$$\pi \approx 3 \cdot 2^8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}}}$$

Формула Мадхавы-Лейбница (15 век):

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

Формула Валлиса (17 век):

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots = \frac{\pi}{2}$$

Формула Мэчина (18 век):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

Попробуем вычислить число Пи по второй формуле. Для этого напомним простую программу на языке Python:

```
sum = 0.0
sign = 1
for p in range(0,33):
    sum += 4.0*sign/(1+2*p)
    print (p,sum)
    sign = -sign
```

Запустим программу в любом онлайн-компиляторе языка Питон (например <https://repl.it/languages/python3>). Получаем результат:

Шаг	Значение
0	4.0
1	2.666666666666667
2	3.466666666666667
3	2.8952380952380956
4	3.3396825396825403
5	2.9760461760461765
6	3.2837384837384844
7	3.017071817071818
8	3.2523659347188767
9	3.0418396189294032
10	3.232315809405594
11	3.058402765927333
12	3.2184027659273333
13	3.0702546177791854
14	3.208185652261944
15	3.079153394197428
16	3.200365515409549
17	3.0860798011238346
18	3.1941879092319425
19	3.09162380666784
20	3.189184782277596
21	3.0961615264636424
22	3.1850504153525314
23	3.099944032373808
24	3.1815766854350325
25	3.1031453128860127
26	3.1786170109992202
27	3.1058897382719475
28	3.1760651768684385
29	3.108268566698947
30	3.1738423371907505
31	3.110350273698687
32	3.1718887352371485

Как можно видеть, сделав 32 шага алгоритма, мы получили лишь 2 точных знака. Видно что алгоритм работает, но количество вычислений весьма велико. Как известно, в 15м веке индийский астроном и математик Мадхава использовал более точную формулу, получив точность числа Пи в 11 знаков:

$$\pi = \sqrt{12} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$$

Попробуем воспроизвести ее в виде программы, чтобы примерно оценить объем вычислений.

Первым шагом необходимо вычислить $\sqrt{12}$. Возникает резонный вопрос - как это сделать? Оказывается, уже в Вавилоне был известен метод вычисления квадратного корня, который сейчас так и называется "вавилонским". Суть его в вычислении $\sqrt{S}$ по простой формуле:

$$x_0 \approx \sqrt{S},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{S}{x_n} \right)$$

Здесь x_0 - любое приближенное значение, например для $\sqrt{12}$ можно взять 3.

Запишем формулу в виде программы:

```
from decimal import Decimal

print ("Квадратный корень:")
number = Decimal(12)
result = Decimal(3)
for p in range(1,9):
    result = (result + number/result)/Decimal(2)
    difference = result**2 - number
    print (p, result, difference)
sqrt12 = result
```

Результаты весьма интересны:

Шаг	Значение	Погрешность
1	3.5	0.25
2	3.464285714285714	0.00127
3	3.464101620029455	3.3890E-8
4	3.464101615137754	2.392873369E-17

Результат: $\sqrt{12} = 3.464101615137754$

Как можно видеть, сделав всего 4 шага, можно получить $\sqrt{12}$ с достаточной точностью, задача вполне посильная даже для ручных расчетов 15 века.

Наконец, запрограммируем вторую часть алгоритма - собственно вычисление Пи.

```
sum = Decimal(1)
sign = -1
for p in range(1,32):
```

```

sum += Decimal(sign)/Decimal((2*p+1)*(3**p))
sign = -sign
print(p, sqrt12*sum)
print("Result:", sqrt12*sum)

```

Результаты работы программы:

Шаг	Значение
1	3.079201435678004077382126829
2	3.156181471569954179316680000
3	3.137852891595680345522738769
4	3.142604745663084672802649458
5	3.141308785462883492635401088
6	3.141674312698837671656932680
7	3.141568715941784242161823554
8	3.141599773811505839072149767
9	3.141590510938080099642754230
10	3.141593304503081513121460820
11	3.141592454287646300323593597
12	3.141592715020379765581606212
13	3.141592634547313881242713430
14	3.141592659521713638451335328
15	3.141592651733997585128216671
16	3.141592654172575339199092210
17	3.141592653406165187919674184
18	3.141592653647826046431202391
19	3.141592653571403381773710565
20	3.141592653595634958372427485
21	3.141592653587933449530974820
22	3.141592653590386522717511595
23	3.141592653589603627019680710
24	3.141592653589853940610143646

Уже на 24м шаге мы получаем искомые 11 знаков числа Пи. Задача явно требовала больше времени чем сейчас, но вполне могла быть решена в средние века.

Современные формулы не столь просты внешне, зато работают еще быстрее. Для примера можно привести формулу Чудновского:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

Для сравнения, те же 24 итерации по этой формуле дают число Пи со следующей точностью:

```

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089
986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652
71201909145648566923460348610454326648213393607260249.

```

Если сделать 100 итераций и вычислить 1000 знаков Пи, то можно увидеть так называемую “точку Фейнмана”:

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089
986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502
841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652
712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748
815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330
572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912
279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392
171762931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371
787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344
181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594
553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171
776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066
13001927876611195909216420207

Это последовательность “999999”, находящаяся на 762м знаке от начала. Желаящие могут поэкспериментировать дальше самостоятельно с помощью программы на языке Python:

```
from math import factorial
from decimal import *

def chudnovsky(n):
    pi = Decimal(0)
    k = 0
    while k < n:
        pi += (Decimal(-1)**k)*(Decimal(factorial(6*k))/((factorial(k)**3)*(factorial(3*k))) *
(13591409 + 545140134*k)/(640320**(3*k)))
        k += 1
        print("Шаг: {} из {}".format(k, n))
    pi = pi * Decimal(10005).sqrt()/4270934400
    pi = pi**(-1)
    return pi

# Требуемая точность (число знаков)
N = 1000
getcontext().prec = N

val = chudnovsky(N/14)
print(val)
```

Эта программа не оптимизирована, и работает довольно-таки медленно, но для ознакомления с сутью алгоритма этого вполне достаточно. Кстати, с помощью формулы Чудновского два инженера Александр Йи и Сингеру Кондо в 2010 году объявили о новом мировом рекорде вычисления Пи на персональном компьютере: 5 трлн знаков после запятой. Компьютеру с 12 ядрами, 97Гб памяти и 19 жесткими дисками потребовалось 60 дней для выполнения расчетов.

На этом мы закончим с числом Пи, хотя с ним конечно, связано куда больше интересных фактов. Например 3 марта (т.е. 03.14) отмечается международный “день числа Пи”, ну а другие факты читатели могут поискать самостоятельно.

4. Вычисление радиуса Земли

О том, что Земля круглая сегодня знает каждый школьник, и никого не удивить таким видом планеты из космоса.

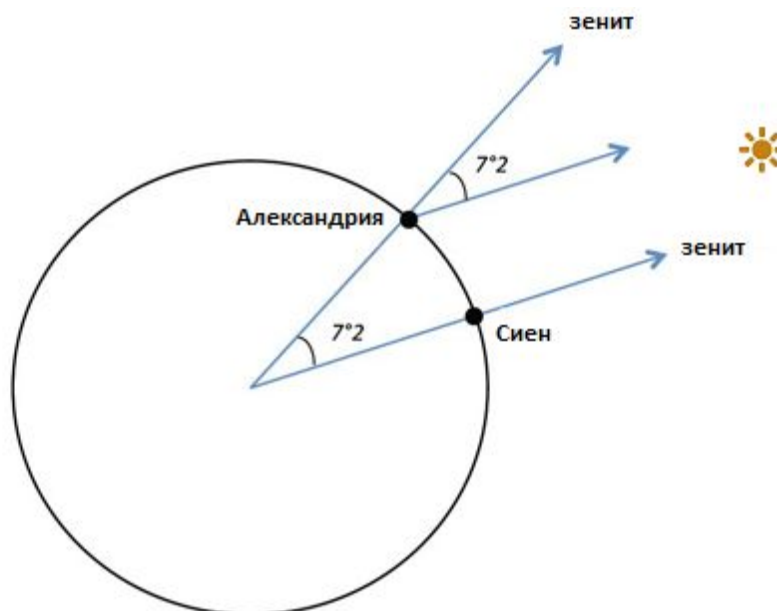


Однако в историческом плане, увидеть планету свысока мы смогли совсем-совсем недавно. Как же мог греческий ученый Эратосфен измерить радиус Земли, в 240 году до нашей эры? Оказывается мог, используя 2 научных “инструмента” - транспорт и верблюда, ну и разумеется, математику.

Эратосфен жил в Александрии - крупнейшем городе того времени, центром науки и искусств древнего мира. В Александрии по преданию, находился маяк высотой 120 метров - даже сегодня такое сооружение не просто построить, а в то время маяк считался одним из 7 чудес света. Эратосфен же был не только ученым, но и хранителем Александрийской библиотеки, содержащей до 700000 книг.

Читая труды по географии, Эратосфен нашел интересный факт - в городе Сиене в день летнего солнцестояния Солнце стоит так высоко, что предметы в полдень не отбрасывают тени. Другой может и не обратил бы на это внимание, но Эратосфен не зря интересовался и математикой и астрономией. Он знал что в его городе Александрии тень в этот же день имеет другой угол. Эратосфен дождался солнцестояния, измерил угол солнечных лучей и получил величину 7,2 градуса.

Что это значит? Объяснение данному факту могло быть только одно - Земля круглая, и угол падения солнечных лучей в разных точках Земли в одно время различается.



Картинка с сайта physicsforme.com

Дальше, как говорится, дело техники. Зная примерное расстояние между Сиеном и Александрией (которое было известно из времени в пути каравана верблюдов) и угол, легко получить длину всей окружности. К чести Эратосфена, его результат отличается от сегодняшнего всего лишь на 1%. Так, задолго до эпохи авиации и воздухоплавания, человек впервые смог измерить радиус планеты, даже при этом не отрываясь от нее. Увидеть настоящую кривизну Земли сумели лишь пилоты стратостатов в начале 20 века, более чем через 2000 лет после описанного опыта.

Разумеется, повторить подобный эксперимент сегодня легко может любой школьник. Нужно лишь сделать простейший угломер из транспортира и отвеса, и с помощью знакомых в другом городе, сделать измерения высоты Солнца в двух точках в одно и то же время.

5. Простые числа

Каждый знает, что простые числа — такие числа, которые делятся только на единицу и самих себя. Но так ли они просты, как кажутся, и актуальны ли сегодня? Попробуем разобраться.

То, что существуют числа, которые не делятся ни на какое другое число, люди знали еще в древности. Последовательность простых чисел имеет следующий вид:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 ...

Доказательство того, что этих чисел бесконечно много, дал еще **Евклид**, живший в 300 г до н.э. Примерно в те же годы уже известный нам греческий математик **Эратосфен**, придумал довольно-таки простой алгоритм получения простых чисел, суть которого была в последовательном вычеркивании чисел из таблицы. Те оставшиеся числа, которые ни на что не делились, и были простыми. Алгоритм

называется «решето Эратосфена» и за счет своей простоты (в нем нет операций умножения или деления, только сложение) используется в компьютерной технике до сих пор.

Видимо, уже во время Эратосфена стало ясно, что какого-либо четкого критерия, является ли число простым, не существует — это можно проверить лишь экспериментально. Существуют различные способы для упрощения процесса (например, очевидно, что число не должно быть четным), но простой алгоритм проверки не найден до сих пор, и скорее всего найден не будет: чтобы узнать, простое число или нет, надо попытаться разделить его на все меньшие числа.

Это несложно записать в виде программы на языке Python:

```
import math

def is_prime(n):
    if n % 2 == 0 and n > 2:
        return False
    for i in range(3, int(math.sqrt(n)) + 1, 2):
        if n % i == 0:
            return False
    return True

# Вывод всех простых чисел от 1 до N
N = 100
for p in range(1, N, 2):
    if is_prime(p): print(p)

# Вывод результата, является ли заданное число простым
print(is_prime(2147483647))
```

Желающие могут поэкспериментировать с программой самостоятельно.

Подчиняются ли простые числа каким-либо законам? Да, и они довольно любопытны. Так, например, французский математик Мерсенн еще в 16 веке обнаружил, что много простых чисел имеет вид $2^N - 1$, эти числа названы **числами Мерсенна**. Еще незадолго до этого, в 1588 году, итальянский математик Котальди обнаружил простое число $2^{19} - 1 = 524287$ (по классификации Мерсенна оно называется M19). Сегодня это число кажется весьма коротким, однако даже сейчас с калькулятором проверка его простоты заняла бы не один день, а для 16 века это было действительно огромной работой. На 200 лет позже математик **Эйлер** нашел другое простое число $2^{31} - 1 = 2147483647$. Необходимый объем вычислений каждый может представить сам. Он же выдвинул гипотезу, названную позже «проблемой Эйлера», или «бинарной проблемой Гольдбаха»: каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Например, можно взять 2 любых четных числа: 123456 и 888777888. С помощью компьютера можно найти их сумму в виде двух простых чисел: $123456 = 61813 + 61643$ и $888777888 = 444388979 + 444388909$. Интересно здесь то, что точное доказательство этой теоремы не найдено до сих пор, хотя с помощью компьютеров она была проверена до чисел с 18 нулями.

Существует и другая теорема, называемая теоремой Ферма-Эйлера, открытая в 1640 году, которая говорит о том, что если простое число имеет вид $4k+1$, то оно может быть представлено в виде суммы квадратов других чисел. Так, например, в нашем примере простое число $444388909 = 4 \cdot 111097227 + 1$. И действительно, с помощью компьютера можно найти, что $444388909 = 19197 \cdot 19197 + 8710 \cdot 8710$. Теорема была доказана Эйлером лишь через 100 лет.

И наконец Бернхардом Риманом в 1859 году была выдвинута так называемая «Гипотеза Римана» о количестве распределения простых чисел, не превосходящих некоторое число. Эта гипотеза не доказана до сих пор, она входит в список семи «проблем тысячелетия», за решение каждой из которых Математический институт Клэя в Кембридже готов выплатить награду в один миллион долларов США.

Так что с простыми числами не все так просто. Есть и удивительные факты. Например, в 1883 г. русский математик **И.М.Первушин** из Пермского уезда доказал простоту числа $2^{61} - 1 = 2305843009213693951$. Даже сейчас компьютеру с запущенной вышеприведенной программой требуется несколько минут на проверку данного числа, а на то время это была поистине гигантская работа.

Кстати интересно, что существуют люди, обладающие уникальными способностями мозга — так например, известны аутисты, способные находить в уме (!) 8-значные простые числа. Как они это делают, непонятно. Такой пример описывается в книге известного врача-психолога Оливера Сакса “Человек, который принял жену за шляпу”. По некоторым предположениям, такие люди обладают способностью “видеть” числовые ряды визуально, и пользуются методом “решета Эратосфена” для определения, является ли число простым или нет.

Еще одна интересная гипотеза была выдвинута **Ферма**, который предположил, что все числа вида

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

являются простыми. Эти числа называются “числами Ферма”. Однако, это оказалось верным только для 5 первых чисел: $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$. В 1732 году **Эйлер** опроверг гипотезу, найдя разложение на множители для F_5 : $F_5= 641 \cdot 6700417$. Существуют ли другие простые числа Ферма, пока неизвестно до сих пор. Такие числа растут очень быстро (для примера, $F_7=340282366920938463463374607431768211457$), и их проверка является непростой задачей даже для современных компьютеров.

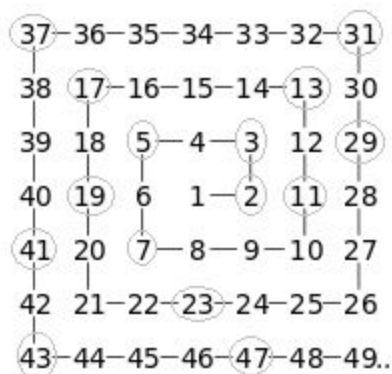
Актуальны ли простые числа сегодня? Еще как! Простые числа являются основой современной криптографии, так что большинство людей пользуются ими каждый день, даже не задумываясь об этом. Любой процесс аутентификации, например, регистрация телефона в сети, банковские платежи и прочее, требуют криптографических алгоритмов. Суть идеи тут крайне проста и лежит в основе алгоритма **RSA**, предложенного еще в 1975 году. Отправитель и получатель совместно выбирают так называемый «закрытый ключ», который хранится в надежном месте. Этот ключ представляет собой, как, наверное, читатели уже догадались,

простое число. Вторая часть — «открытый ключ», тоже простое число, формируется отправителем и передается в виде произведения вместе с сообщением открытым текстом, его можно опубликовать даже в газете. Суть алгоритма в том, что не зная «закрытой части», получить исходный текст невозможно.

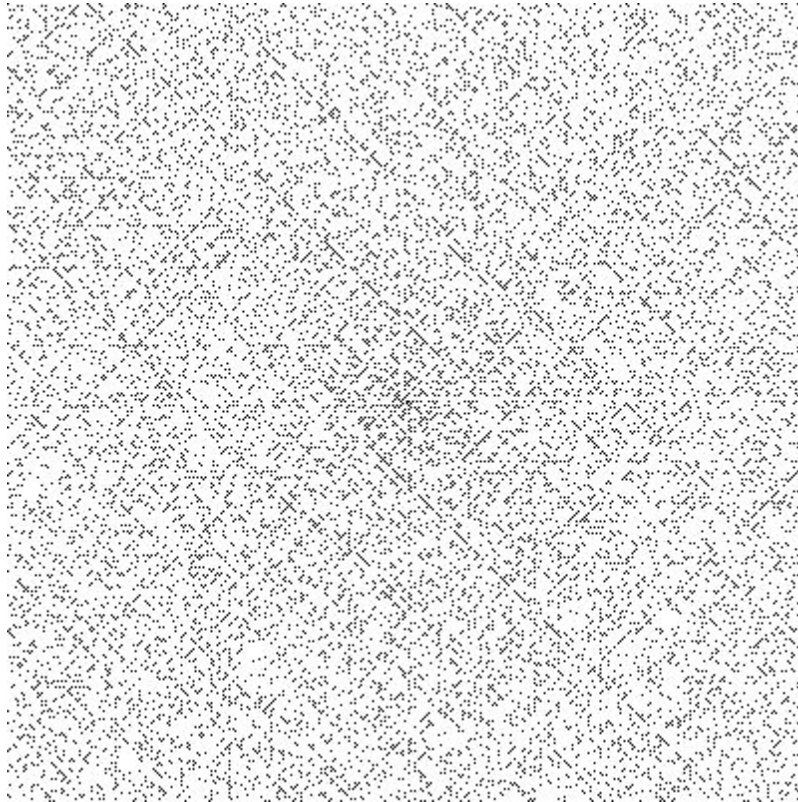
К примеру, если взять два простых числа 444388979 и 444388909, то «закрытым ключом» будет 444388979, а открыто будут передано произведение 197481533549433911 ($444388979 \cdot 444388909$). Лишь зная вторую половинку, можно вычислить недостающее число и расшифровать им текст.

В чем хитрость? А в том, что произведение двух простых чисел вычислить несложно, а вот обратной операции не существует — если не знать первой части, то такая процедура может быть выполнена лишь перебором. И если взять действительно большие простые числа (например, в 2000 символов длиной), то декодирование их произведения займет несколько лет даже на современном компьютере (к тому времени сообщение станет давно неактуальным). Гениальность данной схемы в том, что в самом алгоритме нет ничего секретного — он открыт и все данные лежат на поверхности (и алгоритм, и таблицы больших простых чисел известны). Сам шифр вместе с открытым ключом можно передавать как угодно, в любом открытом виде. Но не зная секретной части ключа, которую выбрал отправитель, зашифрованный текст мы не получим. Для примера можно сказать, что описание алгоритма RSA было напечатано в журнале в 1977 году, там же был приведен пример шифра. Лишь в 1993 году при помощи распределенных вычислений на компьютерах 600 добровольцев, был получен правильный ответ.

В завершение темы простых чисел, приведем вид так называемой «спирали Улама». Математик **Станислав Улам** открыл ее случайно в 1963 году, рисуя во время скучного доклада на бумаге числовую спираль и отмечая на ней простые числа:



Как оказалось, простые числа образуют вполне повторяющиеся узоры из диагональных линий. В более высоком разрешении изображение выглядит так (картинка с сайта <http://ulamspiral.com>):



В общем, можно предположить что далеко не все тайны простых чисел раскрыты и до сих пор.

6. Совершенные числа

Еще одно удивительное свойство мира чисел было доказано еще **Евклидом**: если число вида $2^p - 1$ является простым (уже известное нам число Мерсенна), то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ является **совершенным**, т.е. равно сумме всех его делителей.

Рассмотрим пример для $p=13$:

$2^{13} - 1 = 8191$. Как показывает приведенная ранее программа, 8191 - действительно простое число.

$2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33550336$.

Чтобы найти все делители числа и их сумму, напомним небольшую программу:

```
def is_perfect(n):
    sum = 0
    for i in range(1, int(n/2)+1):
        if n % i == 0:
            sum += i
            print(i)
    print("Сумма", sum)
    return sum == n

is_perfect(33550336)
```

Действительно, 33550336 делится на числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8191, 16382, 32764, 65528, 131056, 262112, 524224, 1048448, 2096896, 4193792, 8387584, 16775168. И сумма этих чисел равна искомому 33550336.

Совершенные числа встречаются довольно-таки редко, их последовательность согласно Википедии, образует вид:

```
6,  
28,  
496,  
8128,  
33 550 336,  
8 589 869 056,  
137 438 691 328,  
2 305 843 008 139 952 128,  
2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176,
```

Кстати, еще Эйлер доказал, что все совершенные числа имеют только вид $2^{p-1}(2^p-1)$. А вот нечетных совершенных чисел пока не обнаружено, но и не доказано что их не существует. Интересно проверить этот факт практически. Совершенное число 137438691328 обнаружил еще немецкий математик Иоганн Мюллер в 16 веке. Сегодня такое число несложно проверить на компьютере.

Во-первых, слегка оптимизируем приведенную выше программу. Как нетрудно видеть, если число N делится нацело на P, то мы “автоматом” сразу находим и второй делитель N/P. Например, если 10 делится нацело на 2, то оно делится и на 10/2=5. Это позволяет заметно сократить число вариантов перебора. Во-вторых, используем тип чисел Decimal, позволяющий использовать большие числа. Обновленная программа выглядит так:

```
from decimal import *  
  
def is_perfect(n):  
    s = Decimal(1)  
    p = Decimal(2)  
    while p < n.sqrt()+1:  
        if n % p == 0:  
            s += p  
            if p != n/p: s += n/p  
        p += 1  
    return s == n  
  
print(is_perfect(Decimal('137438691328')))
```

Запускаем, программа работает - число '137438691328' действительно является совершенным. Оно делится на 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524287, 1048574, 2097148, 4194296, 8388592, 16777184, 33554368, 67108736, 134217472, 268434944, 536869888, 1073739776, 2147479552, 4294959104, 8589918208, 17179836416, 34359672832 и

68719345664, сумма этих чисел равна 137438691328. Однако, на моем компьютере проверка “совершенности” данного числа заняла ... 54 секунды. Это конечно быстро по сравнению с 16м веком, но совершенно недостаточно чтобы проверить все числа, хотя бы до миллиарда. Значит пора использовать более тяжелую артиллерию - перепишем программу на языке Си. Все-таки Python это интерпретатор, и работает заметно медленнее. Получаемый код не намного сложнее:

```
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <stdbool.h>
#include <stdint.h>

bool isPerfect(unsigned long long int n)
{
    unsigned long long int sum = 1, i;
    for(i=2; i<=sqrt(n)+1; i++)
    {
        if (n%i==0) {
            sum += i;
            if (i != n/i) {
                sum += n/i;
            }
        }
    }
    return sum == n;
}

int main()
{
    unsigned long long int n = 137438691328LL;
    bool res = isPerfect(n);
    printf("%d\n", res);

    return 0;
}
```

Компилируем программу с помощью компилятора gcc, запускаем получившийся exe-файл: время выполнения меньше секунды, уже гораздо лучше. Теперь несложно поменять функцию main для перебора всех чисел от 1 до 200000000000. В код также добавлен вывод промежуточных результатов каждые 1000000 итераций, чтобы видеть ход выполнения программы.

```
int main()
{
    unsigned long long int MAX = 200000000000LL;
    unsigned long long int p;
    for (p=1; p<MAX; p++) {
        if (isPerfect(p))
            printf("%llu ", p);
        if (p % 1000000 == 0)
            printf("***%llu,%llu*", 100*p/MAX, p);
    }
}
```

Увы, прогноз относительно скорости расчетов оказался слишком оптимистичным. Примерно за час работы программы, было перебрано лишь 100млн вариантов, а для

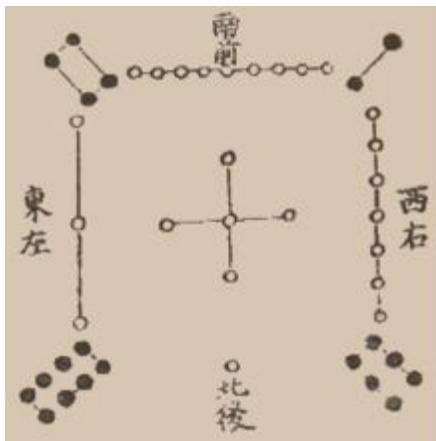
перебора всех 200млрд понадобился бы не один день. Желаящие могут продолжить процесс самостоятельно, однако с уверенностью можно сказать что в диапазоне от 1 до 100000000 действительно нет совершенных чисел кроме 6, 28, 496, 8128 и 33550336.

Проверка числа 2 305 843 008 139 952 128 является непростой задачей даже для современного домашнего компьютера - во-первых, в языке C/C++ нет встроенных типов данных для столь большого числа, а во-вторых, число вариантов перебора весьма велико.

Разумеется, выше было приведено самое простое решение “в лоб”, можно оптимизировать и саму программу, например разбить вычисление на несколько процессорных ядер, однако данная задача выходит за рамки этого материала. Немного про параллельные вычисления будет рассказано в конце книги.

7. Магический квадрат

Еще одна старинная математическая головоломка - магический квадрат. Магическим называют квадрат, заполненный неповторяющимися числами так, что суммы чисел по горизонталям, вертикалям и диагоналям одинаковы. Такие квадраты известны давно, самым старым из известных является магический квадрат Ло Шу, изображенный в Китае в 2200г до нашей эры. Если подсчитать количество точек, то можно перевести квадрат в современный вид, изображенный справа.

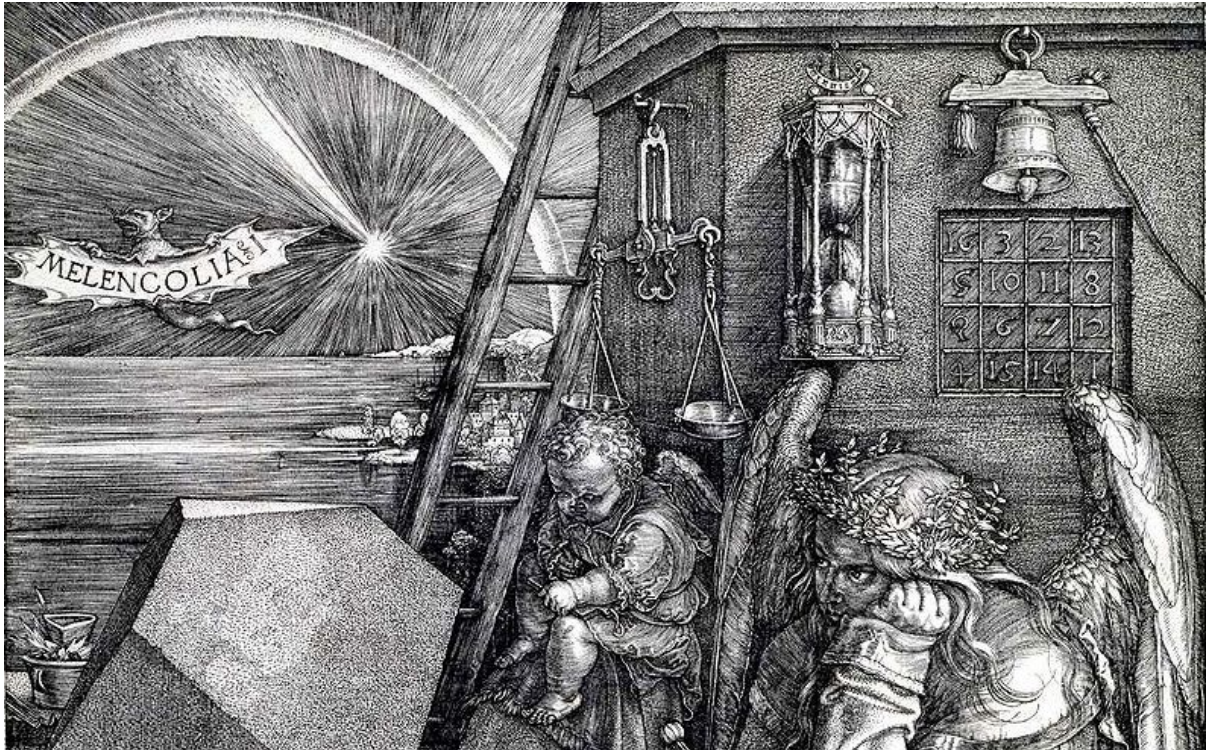


4	9	2
3	5	7
8	1	6

Магический квадрат 4x4 был обнаружен в индийских надписях 11 века:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

И наконец, известный квадрат 4x4, изображенный на гравюре немецкого художника Дюрера “Меланхолия”. Этот квадрат изображен не просто так, 2 числа 1514 указывают на дату создания гравюры.



Как можно видеть, уже математики прошлого умели строить магические квадраты разной размерности. Интересно рассмотреть их свойства.

Сумма чисел магического квадрата размера $N \times N$ зависит только от N , и определяется формулой:

$$M(n) = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Это несложно доказать, т.к. сумма всех чисел квадрата равна сумме ряда $1..N^2$. Действительно, для квадрата Дюрера $M(4) = 34$, что можно посчитать на картине. Для квадратов разной размерности суммы равны соответственно: $M(3) = 15$, $M(4) = 34$, $M(5) = 65$, $M(6) = 111$, $M(7) = 175$, $M(8) = 260$, $M(9) = 369$, $M(10) = 505$.

Напишем программу для построения магических квадратов размерности N . Первый подход будет “в лоб”, напрямую. Создадим массив, содержащий все числа от 1 до N^2 и получим все возможные перестановки этого массива. Их число довольно-таки велико, и составляет $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N = N!$ вариантов. Также для каждого массива необходимо проверить, является ли он “магическим”, т.е. выполняется ли требование равенства сумм.

Для получения всех перестановок воспользуемся алгоритмом, описанным здесь - <https://prog-cpp.ru/permutation/>.

Код программы приведен ниже:

```
def swap(arr, i, j):
    arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

def next_set(arr, n):
    j = n - 2
    while j != -1 and arr[j] >= arr[j + 1]: j -= 1

    if j == -1:
        return False
    k = n - 1
    while arr[j] >= arr[k]: k -= 1
    swap(arr, j, k)
    l = j + 1
    r = n - 1
    while l < r:
        swap(arr, l, r)
        l += 1
        r -= 1
    return True

def is_magic(arr, n):
    for i in range(0, n):
        sum1 = 0
        sum2 = 0
        sum3 = 0
        sum4 = 0
        for j in range(0, n):
            sum1 += arr[i*n + j]
            sum2 += arr[j*n + i]
            sum3 += arr[j*n + j]
            sum4 += arr[(n-j-1)*n + j]
        if sum1 != sum2 or sum1 != sum3 or sum1 != sum4 or sum2 != sum3 or sum2 != sum4 or sum3 != sum4:
            return False
    return True

def show_squares(n):
    N = n*n
    arr = [i+1 for i in range(N)]

    cnt = 0
    while next_set(arr, N):
        if is_magic(arr, n):
            print(arr)
            cnt += 1

    return cnt

# Требуемая размерность
cnt = show_squares(3)
print("Число вариантов:", cnt)
```

Программа выдала 8 вариантов для N=3, время вычисления составило 2 секунды:

[2, 7, 6, 9, 5, 1, 4, 3, 8]	[6, 1, 8, 7, 5, 3, 2, 9, 4]
[2, 9, 4, 7, 5, 3, 6, 1, 8]	[6, 7, 2, 1, 5, 9, 8, 3, 4]
[4, 3, 8, 9, 5, 1, 2, 7, 6]	[8, 1, 6, 3, 5, 7, 4, 9, 2]
[4, 9, 2, 3, 5, 7, 8, 1, 6]	[8, 3, 4, 1, 5, 9, 6, 7, 2]

Действительно, как известно, существует только 1 магический квадрат 3x3:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Остальные являются лишь его поворотами или отражениями (очевидно что при повороте квадрата его свойства не изменятся).

Теперь попробуем вывести квадраты 4x4. Запускаем программу... и ничего не видим. Как было сказано выше, число вариантов перебора для 16 цифр равняется 16! или 20922789888000 вариантов. На моем компьютере полный перебор такого количества занял бы 1089 дней!

Однако посмотрим на магический квадрат еще раз:

X11	X12	X13	X14
X21	X22	X23	X24
X31	X32	X33	X34
X41	X42	X43	X44

Суммы всех элементов по горизонтали и вертикали равны. Из этого мы легко можем записать равенство его членов:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$$

И наконец, общая сумма: т.к. квадрат заполнен числами 1..16, то если сложить все 4 строки квадрата, то получаем $4S = 1 + \dots + 16 = 136$, т.е. $S=34$ (что соответствует приведенной в начале главы формуле).

Это значит, что мы легко можем выразить последние элементы через предыдущие:

$$x_{14} = S - x_{11} - x_{12} - x_{13}$$

$$x_{24} = S - x_{21} - x_{22} - x_{23}$$

$$x_{34} = S - x_{31} - x_{32} - x_{33}$$

$$x_{41} = S - x_{11} - x_{21} - x_{31}$$

$$x_{42} = S - x_{12} - x_{22} - x_{32}$$

$$x_{43} = S - x_{13} - x_{23} - x_{33}$$

$$x_{44} = S + x_{14} - x_{14} - x_{24} - x_{34}$$

Что это дает? Очень многое. Вместо перебора 16 вариантов суммарным количеством $16! = 20922789888000$ мы должны перебрать лишь 9 вариантов, что дает $9! = 362880$ вариантов, т.е. в 57657600 раз меньше! Как нетрудно догадаться, мы фактически выразили крайние строки квадрата через соседние, т.е. уменьшили размерность поиска с 4×4 до 3×3 . Это же правило будет действовать и для квадратов большей диагонали.

Обновленная программа выглядит более громоздко (в ней также добавлены проверки на ненулевые значения и проверки на уникальность элементов), зато расчет происходит в разы быстрее. Здесь также используется возможность работы со множествами в языке Python, что легко позволяет делать перебор нужных цифр в цикле:

`set(range(1,16+1))` - множество чисел [1..16]

`set(range(1,16+1)) - set([x11])` - множество чисел [1..16] за исключением x_{11} .

Также добавлена простая проверка на минимальность суммы: очевидно, что сумма всех элементов не может быть меньше чем $16+1+2+3 = 22$.

```
digits = set(range(1,16+1))
cnt = 0
for x11 in digits:
    for x12 in digits - set([x11]):
        for x13 in digits - set([x11, x12]):
            for x14 in digits - set([x11, x12, x13]):
                s = x11 + x12 + x13 + x14
                if s < 22: continue
                for x21 in digits - set([x11, x12, x13, x14]):
                    for x22 in digits - set([x11, x12, x13, x14, x21]):
                        for x23 in digits - set([x11, x12, x13, x14, x21, x22]):
                            x24 = s - x21 - x22 - x23
                            if x24 <= 0 or x24 in [x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23]: continue
                            for x31 in digits - set([x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24]):
                                for x32 in digits - set([x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24, x31]):
                                    for x33 in digits - set([x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24, x31, x32]):
                                        x34 = s - x31 - x32 - x33
                                        x41 = s - x11 - x21 - x31
                                        x42 = s - x12 - x22 - x32
                                        x43 = s - x13 - x23 - x33
                                        x44 = s - x14 - x24 - x34
                                        if x34 <= 0 or x41 <= 0 or x42 <= 0 or x43 <= 0 or x44 <= 0: continue

                                data = [x11, x12, x13, x14, x21, x22, x23, x24, x31, x32, x33, x34, x41, x42, x43, x44]
                                if len(data) != len(set(data)): continue
                                if is_magic(data, 4):
                                    print data
```

```
cnt += 1
```

```
print cnt
```

В результате, программа проработала всего лишь около часа (вместо 3х лет!), всего было выведено 7040 квадратов размерностью 4x4. Разумеется, большинство из них являются поворотами или отражениями друг друга, было доказано что уникальных квадратов всего 880.

Вспомним магический квадрат Дюрера, в нижнем его столбце есть цифры 1514, соответствующие году создания гравюры. С помощью программы можно решить еще одну задачу: посмотреть сколько всего возможно квадратов с такими цифрами. Здесь число вариантов перебора еще меньше, т.к. еще 2 цифры фиксированы. Оказывается, помимо “авторского”, возможны всего 32 варианта, например:

1 15 14 4	2 15 14 3
5 11 8 10	5 10 7 12
12 6 9 7	11 8 9 6
16 2 3 13	16 1 4 13

Интересно, что верхний ряд помимо цифр 15 и 14 может содержать либо 1,4 либо 2,3, других вариантов нет. Разные варианты содержат лишь перестановки этих цифр.

Если же говорить о квадратах большей размерности, то число вариантов перебора для них получается слишком большим. Так для квадрата 5x5, даже если выразить крайние члены через соседние, получаем 4x4 остающихся клеток, что даст нам те же самые 16! вариантов перебора. Разумеется, в реальности такие квадраты не строили методом полного перебора, существует множество алгоритмов их построения, например метод Франклина, Россера, Рауз-Болла, желающие могут поискать их самостоятельно. В архиве с книгой приложен файл “07 - magic5.cpp” для расчета квадратов 5x5 на C++, но автору так и не хватило терпения дождаться результатов.

И наконец, можно вспомнить так называемые “пандиагональные” магические квадраты. Это квадраты, в которых учитываются суммы также “косых” диагоналей, которые получаются если вырезать квадрат из бумаги и склеить его в тор. Желающие могут добавить в программу вывод таких квадратов самостоятельно.

8. Магический квадрат из простых чисел

Существует еще одна разновидность магического квадрата - составленного из простых чисел. Пример такого квадрата показан на рисунке:

29	131	107
167	89	11
71	47	149

Приведенную выше программу легко модифицировать для такого расчета: достаточно лишь заменить множество `digits = set(range(1,16+1))` на другое, содержащее простые числа.

Для примера будем искать квадраты среди трехзначных простых чисел от 101 до 491. Заменяем в предыдущей версии программы строку `digits = set([1,2,3,4,5,6,7,8,9])` на

```
primes = [ 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163,  
          167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251,  
          257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,  
          353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443,  
          449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491 ]  
digits = set(primes)
```

Таких квадратов нашлось 40, например:

233	167	389
419	263	107
137	359	293

Сумма чисел равна вполне красивому числу 789.

Т.к. число вариантов перебора больше, программа работает дольше. Время поиска составило 724с для Python-версии и 316с для программы на C++.

T = 316.00s = C++

T = 724.4s = Python

Если же рассматривать минимально возможный квадрат из простых чисел, то его сумма равняется тоже вполне “красивому” числу 111:

7	61	43
73	37	1
31	13	67

Примером квадрата 4x4 может быть квадрат с также “красивой” суммой 222:

97	41	73	11
17	47	83	75
59	79	13	71

49	55	53	65
----	----	----	----

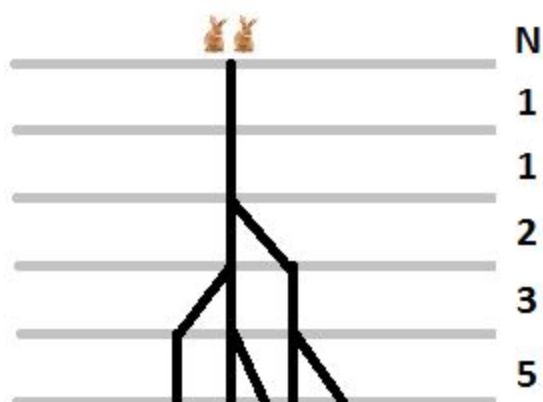
9. Числа Фибоначчи

Возьмем 2 числа: 0 и 1. Следующее число рассчитаем как сумму предыдущих чисел, затем повторим процесс.

Мы получили последовательность, известную как числа Фибоначчи:

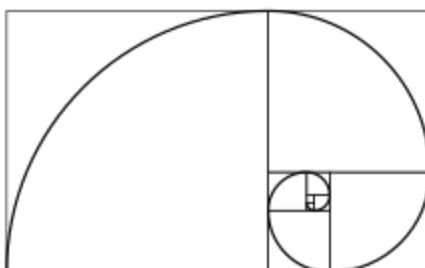
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Эта последовательность была названа в честь итальянского математика 12 века **Леонардо Фибоначчи**. Фибоначчи рассматривал задачу роста популяции кроликов. Если предположить, что новорожденная пара кроликов 1 месяц растет, через месяц начинает спариваться, и затем через каждый месяц дает потомство, то количество пар кроликов несложно подсчитать:



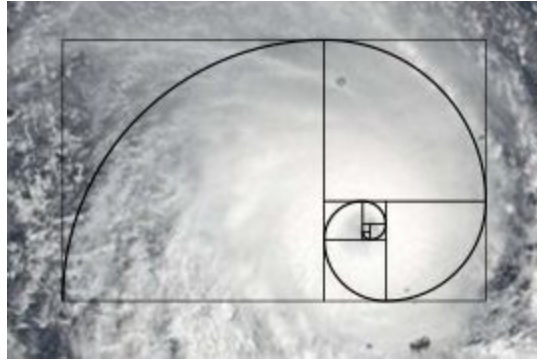
Как можно видеть, число пар образует как раз те самые числа Фибоначчи. Сама последовательность Фибоначчи кажется простой. Но чем она интересна? Пример с кроликами не случаен - эти числа действительно описывают множество природных закономерностей:

- Множество растений имеют количество лепестков, равное одному из чисел Фибоначчи. Количество листьев на стебле также может описываться этим законом, например у тысячелистника.
- Другое известное изображение - спираль Фибоначчи, которая строится по похожему принципу соотношения размеров прямоугольников:



Это изображение также часто встречается в природе, от раковин моллюсков, до формы атмосферного циклона или даже спиральной галактики.

Для примера достаточно взять фотографию циклона из космоса, и наложить обе картинки вместе:



- Если взять и разделить друг на друга 2 любых соседних члена последовательности, например $233/377$, получится число 0,618. Случайно это или нет, но это число - то самое “золотое сечение”, считающееся наиболее эстетичной пропорцией.

Числа Фибоначчи несложно вывести в программе на языке Python:

```
from decimal import *

def printNumbers(n):
    i1 = Decimal(0)
    i2 = Decimal(1)
    for p in range(1, n+1):
        print("F({}) = {}".format(p, i2))
        fib = i1 + i2
        i1 = i2
        i2 = fib

getcontext().prec = 100

N = 100
printNumbers(N)
```

Интересно заметить, что растет последовательность Фибоначчи весьма быстро, уже $F(300) = 222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600$.

10. Высота звуков нот

Еще в древности человек заметил, что натянутая струна порождает колебания звука. Во времена Пифагора было замечено, что струны издают мелодичный звук, если их длина соотносится как небольшие целые числа (1:2, 2:3, 3:4 и т. д.). Звук от струны длиной $2/3$ дает чистую квинту, $3/4$ струны дает кварту а половина струны - октаву.

Рассмотрим струну с условной длиной = 1. Будем умножать длину струны на $3/2$, если полученное число больше 2, разделим еще на 2.

1

$$3/2 = 1,5$$

$$1.5 * 3/2 = 2.25, 2.25/2 = 1,125 = 9/8$$

$$9/8 * 3/2 = 1,6875 = 27/16$$

Похожий ряд, если его упорядочить по возрастанию, называется пифагоровым строем:

“до” - 1

“ре” - 9/8

“ми” - 81/64

“фа” - 4/3

“соль” - 3/2

“ля” - 27/16

“си” - 243/128

“до” - 2

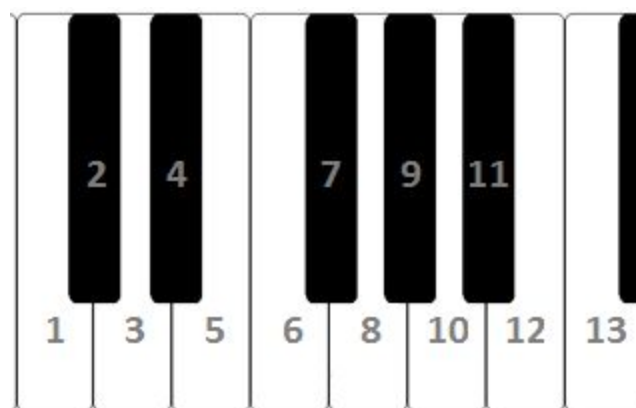
Он также называется квинтовым, т.к. ноты получались увеличением на квинту, т.е. на 3/2. Считается, что этот строй использовался еще при настройке лир в древней Греции, и сохранился вплоть до средних веков. Названия нот разумеется, были другие - современные названия придумал только через 1000 лет итальянский теоретик музыки **Гвидо д’Ареццо** в 1025 г..

Разумеется, в древней Греции никто не знал про частоту колебаний звука, зато древние греки были хорошими геометрами, и проблем с умножением и делением у них не было. Современная теория колебаний струны появилась гораздо позже, работы **Эйлера** и **Д’Аламбера** были написаны в 1750х годах.

Как математически определяются частоты звуков нот? Сейчас мы знаем, что октава (от “до” до “до” следующей октавы) - это умножение частоты на 2 (или укорочение струны в 2 раза). Для остальных нот с 18 века используется так называемый “хорошо темперированный строй”: октава делится на 12 равных промежутков, а последовательность частот образует геометрическую прогрессию.

$$f(i) = f_0 \cdot 2^{i/12}$$

Для одной октавы получаются следующие коэффициенты: 1,0594, 1,1224, 1,1892, ..., 2. На клавиатуре они отображаются всем известным образом, образуя 12 полутонов:



Таким образом, если знать частоту любой ноты, все остальные легко рассчитываются по вышеприведенной формуле.

Очевидно, что “базовая” частота может быть любой. Традиционно принято например, что частота камертона ноты “Ля” 440Гц. Остальные ноты первой октавы:

ДО	261.6	ДО#	277
РЕ	293.7	РЕ#	311
МИ	329.6		
ФА	349.2	ФА#	370
СОЛЬ	392	СОЛЬ#	415
ЛЯ	440	ЛЯ#	466
СИ	494		

Интересно заметить, что квинта в этой системе имеет соотношение частот $2^{7/12} = 1.49$, что чуть-чуть отличается от “пифагорейского” чистого тона с соотношением 1.5. На слух “современная квинта” имеет небольшие биения 0,5Гц, соответствующие разности частот 392 - 392.4. До сих пор есть любители исполнения старинной музыки в квинто-терцевом строе, называемым “чистым”. В 18м же веке дебаты между приверженцами “старого” и “нового” строя были довольно-таки острыми. Впрочем, преимущества равномерно темперированного строя в виде четкого соотношения между частотами нот и возможности транспонирования музыки в любую другую тональность “без потери качества” оказались решающими. Сейчас “чистый строй” имеет лишь историческое значение, и используется лишь иногда для исполнения старинных произведений.

И традиционно, программа на языке Python, выводящая частоты полутонов в обе стороны от ноты “Ля”:

```
import math

freqLa = 440
for p in range(-32,32):
    freq = freqLa*math.pow(2, p/12.0)
    print p,freq
```


11. Вращение планет

Еще в древней Греции ученые знали, что планеты движутся по небу, но каким образом? Сотни лет господствовала геоцентрическая система мира - в центре была Земля, вокруг которой по окружностям двигались Луна, планеты (на то время их было известно 5) и Солнце:

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.



Такая система казалась вполне логичной и интуитивно понятной (даже сейчас люди говорят что солнце “всходит” и “заходит”), однако не объясняла астрономам почему планеты движутся по небу неравномерно, и временами даже в обратную сторону. Вот так, к примеру, выглядит перемещение по небу планеты Марс, что никак не укладывается в теорию движения по кругу:

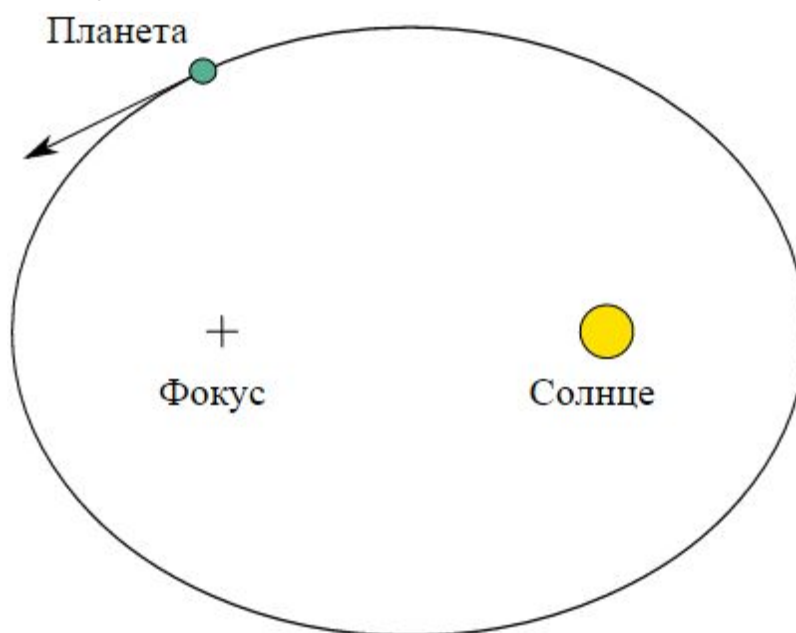


Впрочем геоцентрическая система просуществовала более 1500 лет, только в 16м веке Коперник издал свой труд «О вращениях небесных сфер», где описывал вращение планет по круговым орбитам вокруг Солнца. Однако проблемой было то, что и при этой схеме фактические движения планет не совпадали с расчетными.

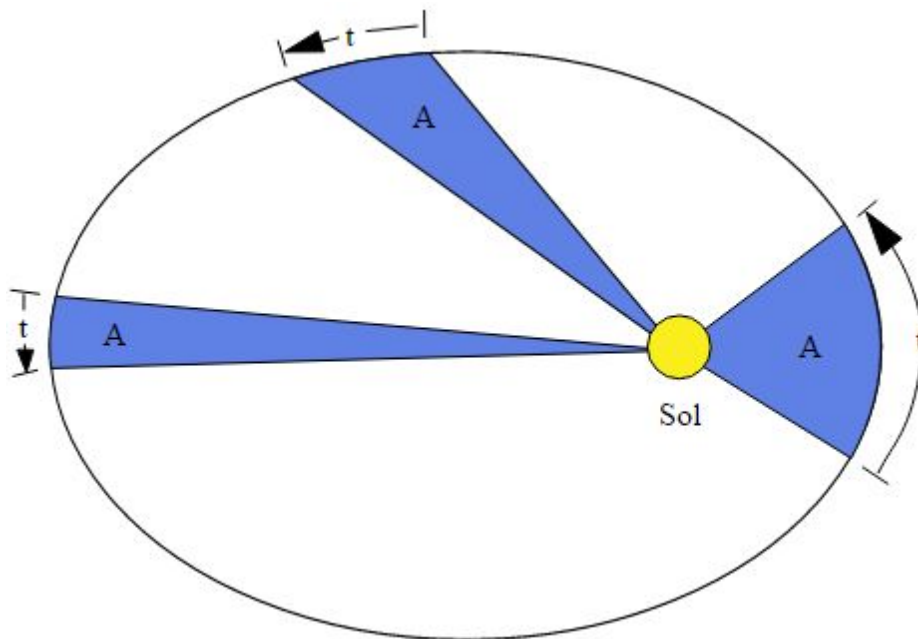
Объяснить это не мог никто, пока в 1600 году немецкий математик Иоганн Кеплер не стал изучать многолетние результаты наблюдений, сделанные астрономом Тихо Браге. Кеплер был великолепным математиком, но и у него ушло несколько лет чтобы понять суть и вывести законы, которые и сейчас называются законами Кеплера.

Как оказалось, движение планет подчиняется 3м математическим законам:

- 1) Планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов эллипса находится Солнце



- 2) Планеты движутся неравномерно: скорость планеты увеличивается при движении к Солнцу и уменьшается в обратном направлении. Но за равные промежутки времени вектор движения описывает равные площади: площади участков “А” одинаковы:

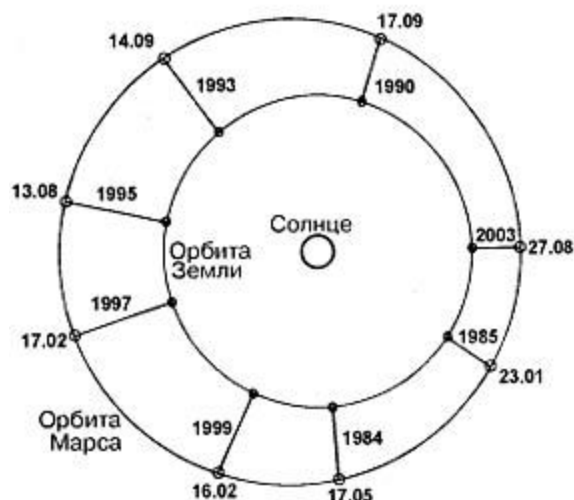


- 3) Квадраты периодов обращений планеты пропорциональны кубу расстояний до орбиты:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

Кеплер считал, что весь мир подчиняется гармонии, и что солнечная система больше похожа на часовой механизм, чем на божественное творение. Найденные им законы не только красивы и гармоничны, но и совпали с реальными наблюдениями (уже позже выяснилось, что законы Кеплера могут быть выведены из законов Ньютона и закона всемирного тяготения, желающие могут найти доказательства в Википедии).

Что касается Марса, то его орбита более вытянутая, чем орбита Земли, чем и объясняется разница как в скорости движения, так и в яркости планеты. Картинка с сайта журнала “Наука и жизнь”:



Кстати, эта картинка хорошо объясняет, почему только некоторые годы благоприятны для запуска космических кораблей к Марсу - те годы, в которые расстояние между планетами минимально.

12. Парадоксы теории вероятности

На интуитивном уровне понимание теории вероятности довольно-таки просто. Возьмем кубик с 6 гранями, подбросим и посмотрим какая грань выпала. Интуитивно ясно, что вероятность выпадения 1 грани из 6 будет $1/6$. Действительно, вероятностью называют отношение числа равновероятных событий к числу всех возможных вариантов:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Какова вероятность что выпадут 2 цифры подряд? Она равна произведению вероятностей: $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$.

Вроде все просто, однако несмотря на простоту, есть довольно-таки много задач, где математика не всегда совпадает с бытовым "здоровым смыслом". Рассмотрим несколько таких парадоксов.

Дети мистера Смита

Эту задачу описывал Мартин Гарднер. Известно что у мистера Смита двое детей, и один из них мальчик. Какова вероятность, что второй из них тоже мальчик? Интуитивно кажется, что вероятность пола ребенка всегда равна $1/2$, но не все так просто.

Рассмотрим возможные варианты семей с двумя детьми:

- мальчик-мальчик
- мальчик-девочка
- девочка-мальчик
- девочка-девочка

Исходя из списка вариантов, ответ понятен. Вариант “девочка-девочка” по условию не подходит. Всего остается 3 варианта семей где есть мальчик (М+М, М+Д, Д+М), значит вероятность что второй ребенок окажется мальчиком, равна $1/3$.

Бросание кубика

Вернемся к бросанию кубика. Допустим, мы бросили кубик 5 раз, и все разы выпала цифра “3”. Какова вероятность, что мы бросим кубик еще раз, и выпадет снова цифра “3”?

Ответ прост. Интуитивно кажется, что вероятность такого события очень мала. Но в реальности кубик не имеет какой-либо встроенной “памяти” на предыдущие события. Какие бы числа не выпадали до текущего момента, вероятность нового числа также равна $1/6$ (а вот если говорить о вероятности выпадения такой серии “в целом”, то она действительно равна $1/(6*6*6*6*6) = 1/46656$).

Кстати, такая вероятность это много или мало? Интуитивно кажется что мало, и в принципе оно так и есть. Одному человеку пришлось бы бросать кубик каждые 10 секунд 4 дня, чтобы дожидаться выпадения 6 цифр подряд. Однако если рассматривать большие числа, то такие вероятности становятся неожиданно большими. Например, если 6 раз кубик бросят все 5 миллионов жителей Петербурга, то 6 цифр подряд выпадут примерно у 100 человек - довольно-таки значительное количество. Это на самом деле важный момент: даже довольно-таки маловероятные события гарантированно произойдут, если речь идет о большом числе попыток. Это важно при прогнозировании таких событий как ДТП, аварии, катастрофы, и прочие негативные явления, которые в большом городе увы, не редкость. По этой же причине редкие заболевания эффективнее лечить в большом городе - редкая болезнь, встречающаяся 1 раз на 100000 человек, может практически не встречаться в небольшом городе и у врачей не будет опыта борьбы с ней, а в мегаполисе таких больных наберется в несколько раз больше.

Парадокс Монти Холла

Этот известный парадокс хорошо описан в Википедии.

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Интуитивно кажется, что если автомобиль спрятан за одной из дверей, то вероятность его найти равна $1/3$, и смена двери ничего не даст. Однако это неверно.

Принцип прост: если игрок изначально правильно указал дверь с автомобилем (а вероятность этого действительно $1/3$), то замена двери приведет его к проигрышу.

Однако в обоих других случаях изначального выбора **неверной** двери (а вероятность этого $\frac{2}{3}$) смена двери приведет к выигрышу. Таким образом, смена двери приведет к выигрышу с вероятностью $\frac{2}{3}$ вместо $\frac{1}{3}$.

Парадокс дней рождений

Допустим, в организации работает 24 человека. Какова вероятность что хотя бы двое отмечают день рождения в один и тот же день? Интуитивно кажется, что эта вероятность весьма мала и будет равна $24/365$, но и в этом случае интуиция ошибается. В реальности, мы должны рассматривать *количество пар*, которые могут образовать данные люди. Это число довольно-таки велико, например, если обозначить 5 человек как ABCDE, то количество возможных пар будет 10 (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE), а для группы из 24 человек возможно 276 пар.

Для точного расчета воспользуемся принципом произведения вероятностей. Вероятность того, что для 2х людей день рождения *не* совпадет, равна $364/365$. Для 3х человек вероятность что все дни не совпадут, равна произведению $364/365 * 363/365$, и так далее. Для n-человек формула приведена в Википедии:

$$\bar{p}(n) = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$$

(n! - обозначение факториала, $n! = 1*2*...*(n-1)*n$)

Нужная нам вероятность обратного события равна обратной величине:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n)$$

Вывести все значения несложно с помощью программы на Python:

```
import math

def C(n):
    return 1000 - 1000*math.factorial(365)/(math.factorial(365-n)*365**n)

for n in range(3,50):
    print("{} - {}".format(n, 0.1*C(n)))
```

365! это очень большое число, поэтому здесь использованы целочисленные вычисления языка Python, уже затем значение было переведено в проценты.

В результате получаем следующую таблицу:

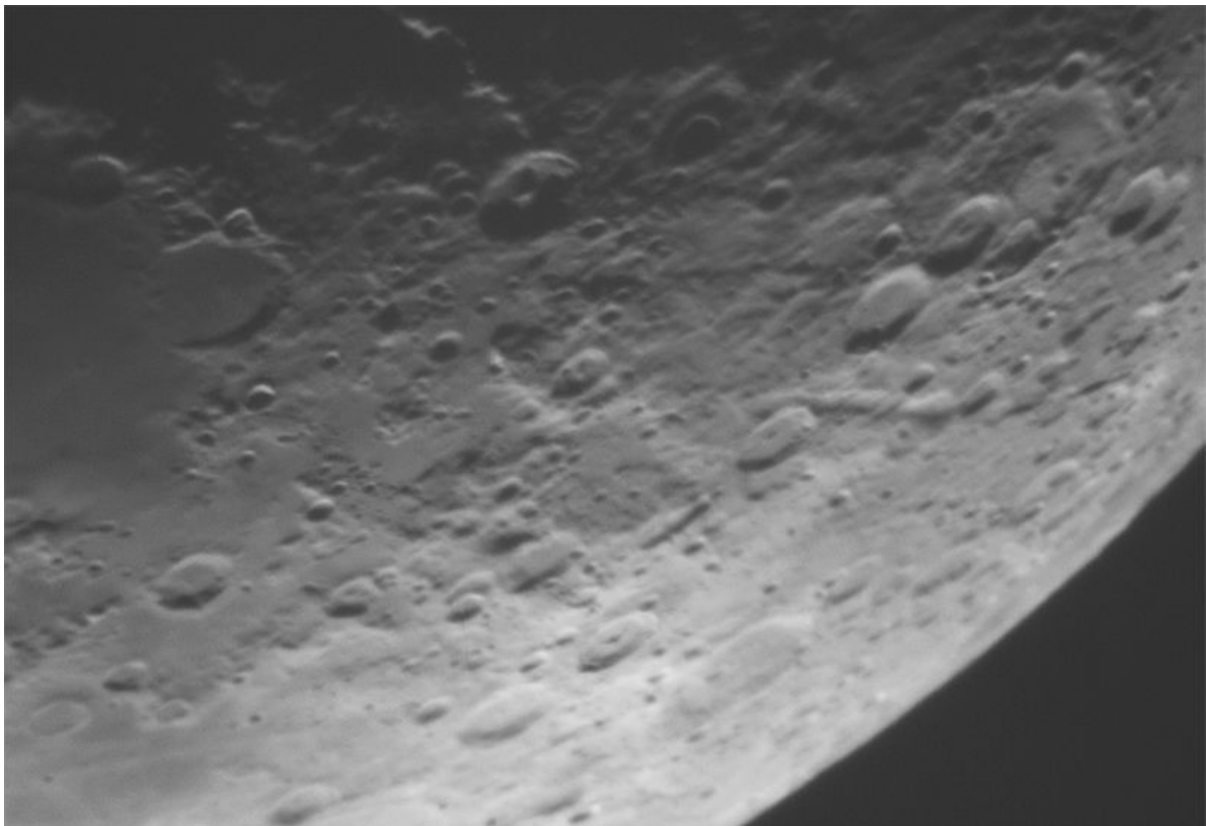
3	0.0082	4	0.0163	5	0.0271
6	0.0404	7	0.0562	8	0.0743
9	0.0946	10	0.1169	11	0.1411
12	0.1670	13	0.1944	14	0.2231
15	0.2529	16	0.2836	17	0.3150
18	0.3469	19	0.3791	20	0.4114
21	0.4436	22	0.4756	23	0.5072

24	0.5383	25	0.5686	26	0.5982
27	0.6268	28	0.6544	29	0.6809
30	0.7063	31	0.7304	32	0.7533
33	0.7749	34	0.7953	35	0.8143
36	0.8321	37	0.8487	38	0.8640
39	0.8782	40	0.8912	41	0.9031
42	0.9140	43	0.9239	44	0.9328
45	0.9409	46	0.9482	47	0.9547
48	0.9605	49	0.9657	50	0.9703

Как видно из таблицы, уже при количестве сотрудников 50 человек, хотя бы 1 день рождения почти гарантированно совпадет (вероятность 97%), а для 24 человек получаем вероятность равную 0.538, т.е. более 50%.

13. Поверхность Луны

Посмотрим на фотографию поверхности Луны. Эта фотография была сделана в телескоп с балкона:



Что мы видим? Очевидно, лунную поверхность, покрытую кратерами, оставшимися от предыдущих столкновений метеоритов с Луной.

Казалось бы, причем здесь математика? При том, что столкновение с метеоритом - случайное событие, его частота подчиняется теории вероятности. На Луне нет атмосферы, нет эрозии и ветра, поэтому лунная поверхность - идеальная "книга", в

которой записаны события последних десятков тысяч лет. Изучая поверхность Луны, можно подсчитать какого размера объекты падали на ее поверхность.

Исследование поверхности Луны камерами высокого разрешения ведется и сейчас. Было подсчитано, что за последние 7 лет на Луне образовались не менее 220 новых кратеров. Это важно еще и потому, что данные подсчеты помогут оценить опасность для Земли.

Есть ли кратеры на Земле? Разумеется есть. Данная фотография сделана вовсе не на Луне или на Марсе, а в США:



Так называемый Аризонский кратер возник около 50тыс лет назад после падения метеорита диаметром 50 метром и весом 300 тысяч тонн. Диаметр кратера составляет более километра. В Сибири находится кратер Попигай размером 100км, он был открыт в 1946 году.

Разумеется, такие большие кратеры довольно-таки редки. Последнее же падение крупного метеорита было по историческим меркам весьма недавно, всего лишь около 100 лет назад. В 1908г в тунгусской тайге упал метеорит, мощность взрыва оценивалась от 10 до 50 мегатонн. По отзывам, взрывная волна обогнула земной шар, а световые явления в атмосфере были столь сильны, что в Лондоне ночью можно было читать газету. Лишь по случайности падение метеорита пришлось на малонаселенные районы Сибири - если бы удар был чуть раньше или позже, такой мощности хватило бы, чтобы полностью уничтожить город размером с Санкт-Петербург. Совсем же недавно, в 2013 году, метеорит размером около 20 метров разрушился в атмосфере, а его многочисленные обломки упали в районе Челябинска. Пострадало примерно 1500 человек, в основном от выбитых ударной волной стекол. По оценкам NASA суммарная мощность составила до 400 килотонн.

Увы, то, что для определенного района Земли может быть катастрофой, для космоса совершенно заурядный момент. Это лишь вопрос времени, достаточно посмотреть на поверхность Луны. По одной из гипотез, 66 миллионов лет назад наша планета столкнулась с большим астероидом, в результате чего было уничтожено 75% видов живых существ, в том числе и динозавры. Поэтому задача наблюдения и прогнозирования астероидной опасности должна быть в обязательном списке дел для человечества, если мы не хотим повторить их судьбу.

14. Так ли случайны случайные числа?

В каждом языке программирования существует функция генерации случайных чисел. Они используются в различных областях, от игр до криптографии или генерации паролей.

На языке Python вывести случайное число можно так:

```
import random
print(random.randint(0,9))
```

Но как это работает? Задача вывода действительно *случайного* числа далеко не так проста как кажется. Чтобы вывести что-то на компьютере, это что-то надо сначала запрограммировать. Но очевидно, что задать формулой случайный, хаотический процесс, невозможно - по определению формула и хаос противоречат друг другу. Именно поэтому числа на самом деле являются псевдослучайными - они лишь похожи на случайные, а в реальности являются результатом вполне конкретного алгоритма.

Одним из наиболее популярных и простых алгоритмов, является линейный конгруэнтный метод (linear congruential generator). Его формула проста:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$$

Рассмотрим пример реализации на языке Python:

```
x = 123456789

m = 2**31 - 1
for p in range(10):
    x = (1103515245*x + 12345) % m
    print(x)
```

Программа действительно выводит числа, которые вполне похожи на случайные: 295234770, 465300796, 1475666158, 588454008, 929838277, 50298429, 1089988954, 698778454, 2010473888, 36125306. Как нетрудно догадаться, при повторном запуске программы числа будут одни и те же. Чтобы числа не повторялись, такой генератор обычно инициализируют значением текущего системного времени.

Увы, такой генератор имеет определенные недостатки: во-первых, его последовательность рано или поздно начинает повторяться, во-вторых, он не

является криптостойким - зная текущее значение, можно вычислить следующее, что к примеру, может позволить злоумышленнику узнать “случайно” сгенерированный пароль по его первым буквам.

Существуют другие алгоритмы генерации псевдослучайных чисел, например на основе простых чисел Мерсенна (Mersenne Twister generator). Существуют также аппаратные генераторы случайных чисел, например такая функция присутствует в процессорах Intel. Есть даже сайт <https://www.random.org>, с помощью которого можно сгенерировать случайную последовательность чисел. По заверениям авторов, они используют 3 радиоприемника, настроенных на частоту шума атмосферных помех.

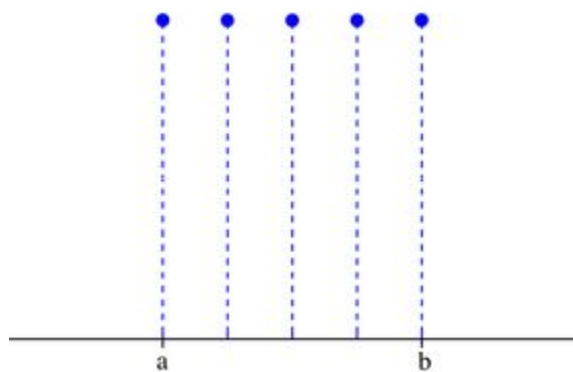
Разумеется, в большинстве обычных программ, например при написании компьютерной игры, “качеством” случайных чисел можно пренебречь, встроенные алгоритмы вполне неплохи. Но при разработке специализированного ПО, где вопрос криптостойкости имеет значение, стоит уже обратить внимание на то, насколько надежен применяемый алгоритм.

15. Распределение случайных величин

С теорией вероятности связан еще один интересный момент - законы распределения случайных величин. Огромное количество процессов в реальности подчиняются всего лишь нескольким законам распределения.

Равномерное распределение

Возьмем игральный кубик и бросим его много раз. Очевидно, что вероятность выпадения каждого числа одинакова. На графике это можно изобразить примерно так:



Другим примером может быть время ожидания автобуса. Если человек пришел на остановку в случайное время, то период ожидания может быть любым, от нуля до максимума интервала движения.

Нормальное распределение

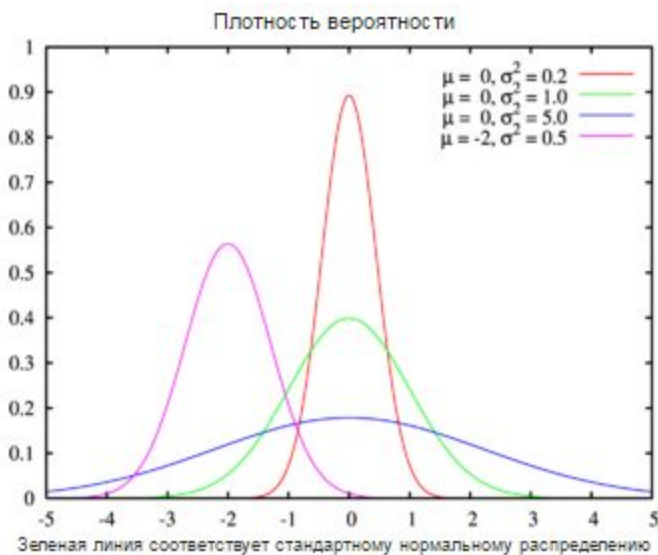
Возьмем группу людей, например в 100 человек, и измерим их рост. Очевидно, что будет некоторое количество людей небольшого роста, некоторое количество высоких людей, совсем мало очень высоких, и совсем мало очень низких. Такое

распределение естественно для многих объектов, не только людей, потому оно и называется *нормальным*.

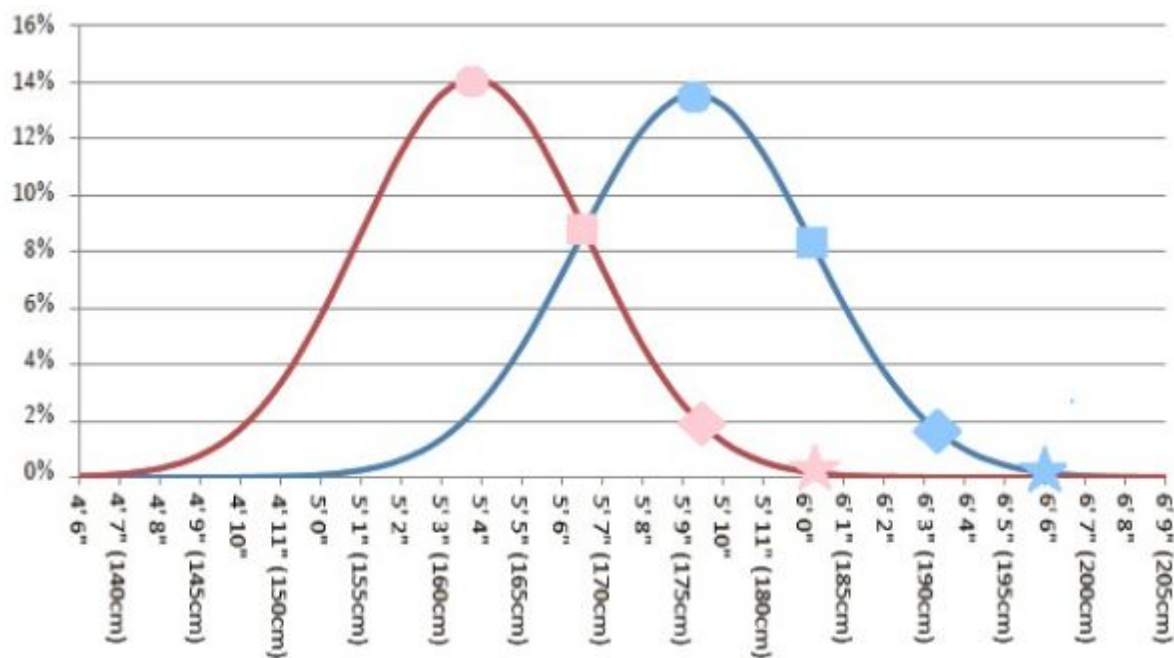
Формула нормального распределения совпадает с формулой Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Подбирая коэффициенты, можно получить разные виды распределения.



Касаясь роста людей, согласно сайту <http://tall.life>, график роста для мужчин и женщин имеет следующий вид:



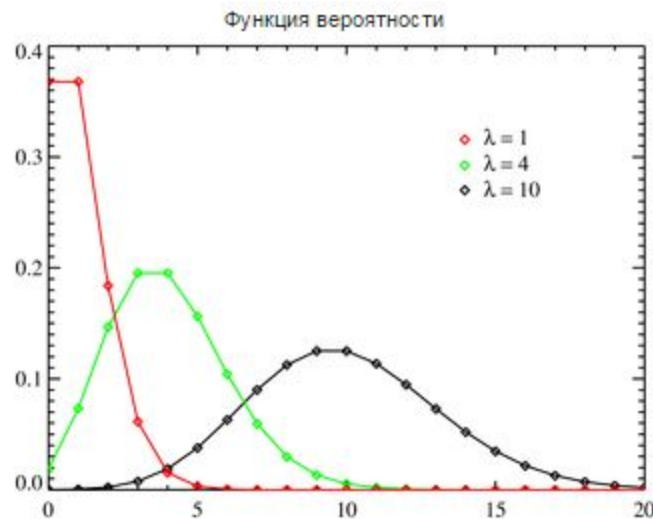
Распределение Пуассона

Следующий вид распределения не менее интересен. Рассмотрим события, происходящие с некоторой известной интенсивностью независимо друг от друга, например приход покупателей в магазин. Допустим, в магазин приходит в среднем 10 покупателей в минуту. Какова вероятность, что в какой-то момент времени в магазин придет 20 покупателей?

Вероятность таких событий описывается распределением Пуассона:

$$P = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

График распределения имеет примерно такой вид (в нашем примере $\lambda=10$):



Этим же распределением описываются различные случаи, от вероятности неисправностей (если 0.01% телевизоров имеют неисправность, какова вероятность что в партии из 20 штук окажется 2 неисправных телевизора), до скорости роста колоний в чашке Петри.

Вернемся к нашему примеру с 20 покупателями. В интернете можно найти таблицы значений Пуассона для $\lambda=10$. По ним можно найти, что вероятность прихода сразу 20 человек составляет 0,19%.

16. Измерение скорости света

С бытовой точки зрения, скорость света практически мгновенна. Действительно, свет за секунду может обогнуть Землю 8 раз, а за 2 секунды пролетает расстояние от Земли до Луны. Поэтому до 17 века про реальную скорость света никто не знал. Как же ее вычислили?

Сегодня опыт по измерению скорости света можно провести даже в школе - достаточно длинного куска кабеля, генератора импульсов и осциллографа. Действительно, задержка сигнала в куске кабеля длиной 50м, будет равна $50/300000000$, или 0.16нс - величина которую покажет даже дешевый осциллограф с максимальной частотой 10-20МГц. Но как же это сделали в 17 веке, когда не было не

то что осциллографов, даже до появления лампы накаливания было еще 200 лет ожидания? Помогли астрономия, геометрия, и разумеется, математика.

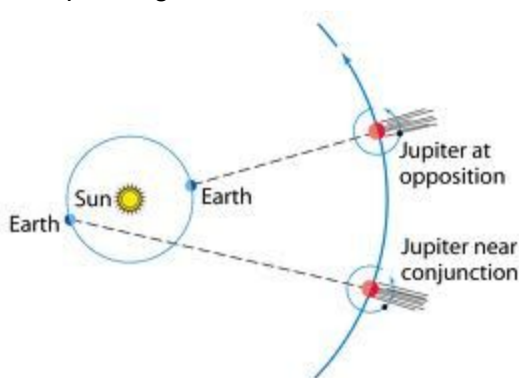
Говоря точнее, помогло наблюдение Юпитера и его спутников. Спутники Юпитера были открыты еще Галилеем, увидеть их может каждый, даже с балкона в небольшой телескоп. С увеличением около 300х они видны примерно так:



Период вращения спутников Юпитера невелик, и составляет примерно 2 дня. Уже в 17м веке измерение времени было достаточно точным (маятниковые часы изобрел голландский физик и математик Гюйгенс в 1657г), чтобы датский астроном Олаф Ремер в 1676 году обнаружил расхождение расчетного и реального положения спутника примерно в 16 минут (величина, которую трудно не заметить даже при технологиях 17 века).

Для измерения орбит спутников Юпитера Ремер использовал момент, когда спутник входит в тень Юпитера - момент, который можно измерить довольно-таки точно. Как догадался Ремер, запаздывание во времени было связано с движением Земли по орбите.

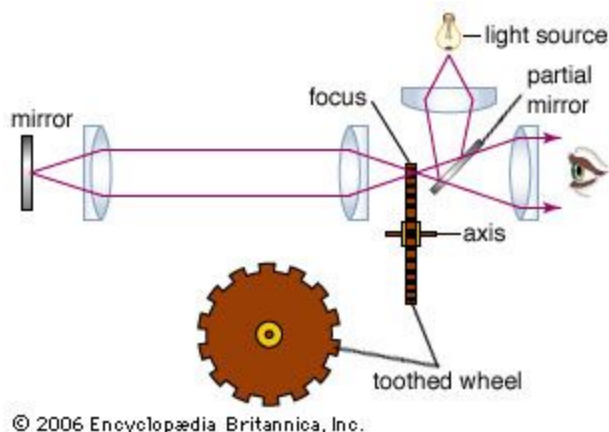
Картинка с сайта <http://www.speed-light.info>:



В момент второго измерения расстояние до Юпитера больше примерно на диаметр орбиты Земли (период обращения Юпитера вокруг Солнца - 12 лет, что гораздо больше земного). Это и приводило к тому, что свет от Юпитера приходил с большим запаздыванием, чем при первом измерении. Сделав подсчеты, Ремер получил значение скорости света в 220000км/с. В то время конечность скорости света казалась настолько невероятной, что после публикации во французской академии наук далеко

не все поверили молодому ученому. Разумеется, последующие измерения подтвердили правильность метода.

Более точное значение было получено лишь через 200 лет, французский физик Луи Физо с помощью зубчатого колеса и двух зеркал получил значение в 312000км/с. Расстояние между зеркалами было 8,6км, одно зеркало было расположено в доме отца Физо недалеко от Парижа, второе зеркало было расположено на Монмартре. Физо нашел такую скорость вращения колеса, при котором луч света проходящий через зубец колеса затемнялся, что означало что запаздывание света соответствует скорости вращения колеса.



17. Можно ли своими глазами увидеть прошлое?

С предыдущим вопросом связан простой забавный факт. Можно ли лично своими глазами увидеть событие, происходящее например, миллион лет назад? Да, и это очень просто сделать - достаточно посмотреть на небо.

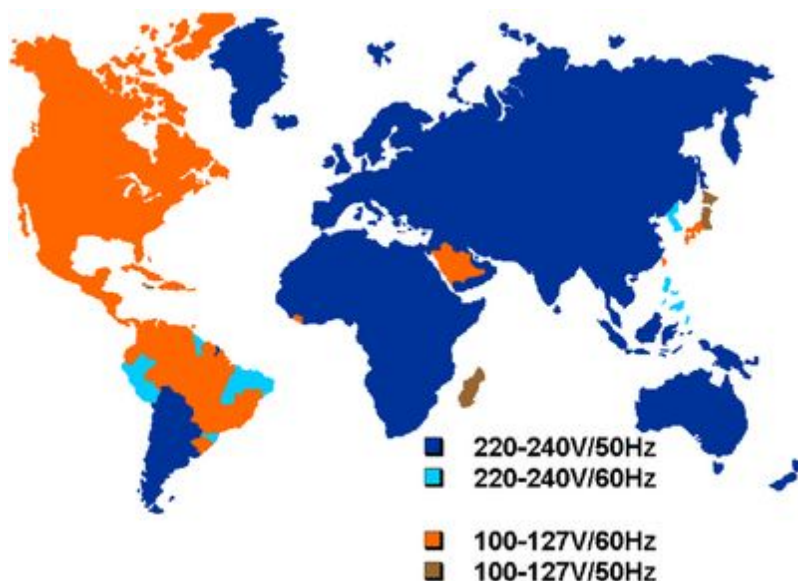
Как наверное читатели уже догадались, все дело в скорости света. Расстояние от Земли до Солнца составляет 150млн километров, свет преодолевает его за 8 минут. Таким образом, когда мы смотрим на небо, мы видим Солнце так, как оно было 8 минут назад. Смотря на Юпитер, мы видим его с запаздыванием примерно в полчаса. Расстояние до других звезд гораздо больше. Сириус мы видим таким, каким он был 8 лет назад, звезда Вега имеет расстояние в 25 световых лет, столько нужно свету чтобы долететь до Земли. Туманность Андромеды мы видим с запаздыванием в 2.5 миллиона лет - время сопоставимое с периодом жизни мамонтов и первобытных людей. Если бы там висело гигантское зеркало, в котором отражалась бы Земля, гипотетически можно было бы их увидеть, хотя такого размера телескоп конечно же физически невозможен.

А если серьезно, то данный факт запаздывания света очень помогает астрономам изучать историю Вселенной - наблюдая удаленные галактики, находящиеся на расстоянии миллиардов световых лет, мы видим их *в прошлом* - их свет шел до нас эти самые миллиарды лет. И таким образом, чем мощнее телескоп, тем дальше *во времени* он позволяет заглянуть, тем самым, позволяя видеть то время, когда и галактики и звезды еще были молодыми.

С другой стороны, в запаздывании света есть и большой минус. Даже если будут созданы космические корабли, способные долететь до другой звезды, обмениваться сообщениями с космонавтами придется с тем же запаздыванием. К примеру, радиосообщение до Сириуса дойдет до получателя через 8,6 лет, и столько же придется ждать ответа. Уже сейчас теоретически можно поговорить по телефону с астронавтами на МКС (в 2015 году британский астронавт Тим Пик ошибся номером, и удивил неизвестную женщину вопросом “Здравствуйте, это Земля?”), а вот для Марса время задержки составит около 15 минут - так что поговорить по телефону или по Скайпу с марсианской колонией было бы невозможно.

18. Сколько вольт в электросети?

Глупый вопрос, подумают многие. Каждый школьник в России знает что напряжение в сети 220 вольт (в США каждый школьник знает что напряжение в сети 110 вольт). Полезно привести такую картинку:



Кстати, в 90е годы, когда поездки за границу только становились доступными, некоторые привозили американскую электронику, но работала она зачастую не долго, из-за того что сетевое напряжение отличается в 2 раза. А сейчас даже чуть больше, по российскому стандарту 2003 года, напряжение в сети должно составлять 230В. Предельно допустимым отклонением считается 10%, т.е. значения 210-250В в принципе возможны.

Но вопрос заголовка не в этом. Будем для простоты считать напряжение равным “условным” 220 вольт. Однако подключим осциллограф к электросети, и увидим примерно такую картинку:



Что это значит? Где “наши” 220 вольт?

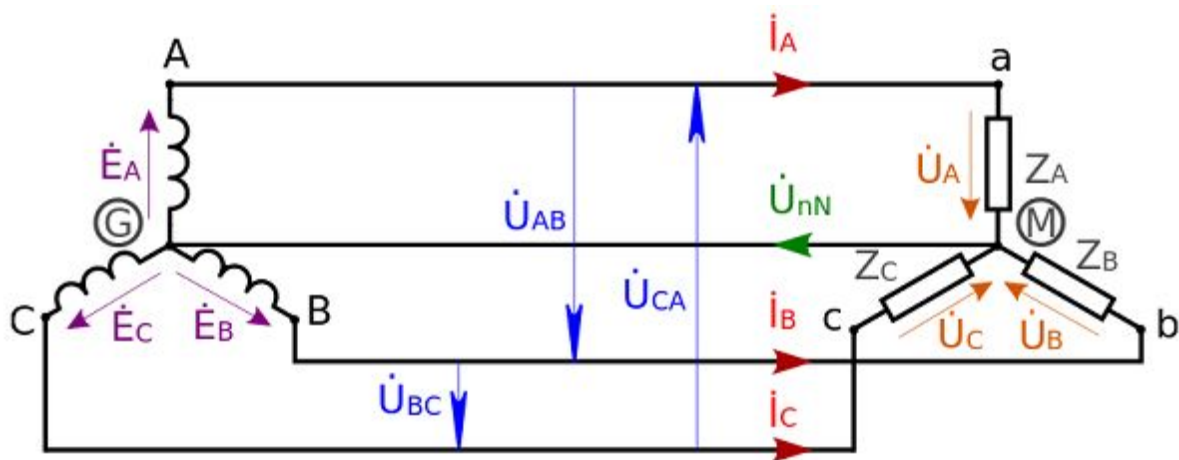
Все просто (хотя и не совсем). Ток в сети переменный - он меняет свое направление с частотой 50 раз в секунду. В отличие к примеру, от батарейки - если на ней написано 1.5 вольт, это значит что на ней действительно 1.5 вольт и направление тока не меняется. Но вернемся к розетке. Ток в нее подается не просто так, а с целью выполнения какой-либо работы. Как измерить работу переменного тока, который в разные моменты времени движется то в одну, то в другую сторону? Для этого было введено понятие действующего напряжения - величины *постоянного тока*, способного выполнить ту же работу (например нагрев спирали электроплитки). Напряжение, которое показывает осциллограф - называется амплитудным. Эти величины связаны простой формулой:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

220 умноженное на $\sqrt{2}$, дает как раз 310В. Разумеется, обычный тестер откалиброван в “бытовых” единицах, в режиме измерения переменного тока он покажет 220В. А если выпрямить напряжение, например диодным мостиком, то тестер покажет как раз 310В постоянного тока.

И еще немного про переменный ток. Откуда берется напряжение в 380 вольт? Ток от трансформатора подается по 3м фазам: это 3 линии, напряжение в которых сдвинуто на разный угол друг относительно друга.

Картинка из Википедии:



Нулевой провод - общий. В квартиры подается напряжение с одной из фаз, значением в стандартные 220 вольт. Это напряжение называется фазным. Если же используется 3х-фазная сеть целиком, то напряжение между двумя фазами, например в точках а и с на рисунке, составляет как раз 380 вольт. Это напряжение называется линейным.

Математически, оба напряжения связаны простой формулой:

$$U_L = \sqrt{3} \times U_F$$

Действительно, $220 \times \sqrt{3} = 380$.

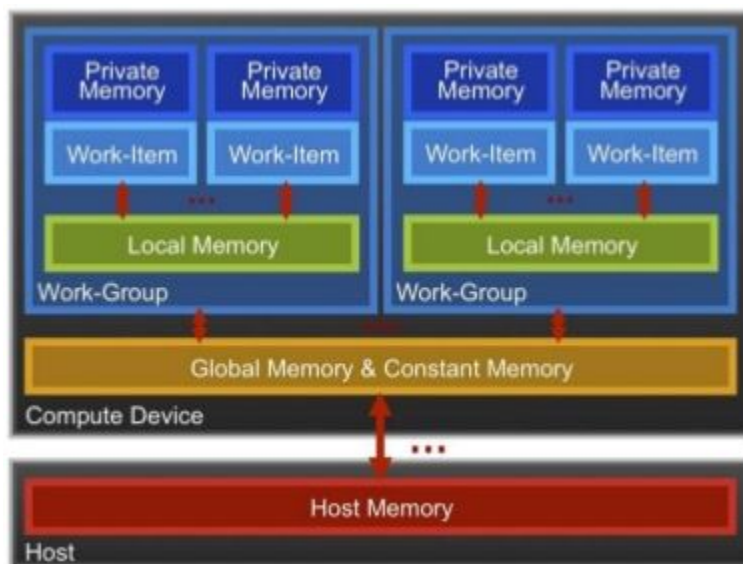
Кстати, обрыв нулевого провода в доме - серьезная неисправность, из-за чего в квартиры может быть подано линейное напряжение, составляющее те самые 380В. Такой случай произошел лично с автором, причем ущерб оказался невелик, перегорели лишь настенные электронные часы и несколько блоков питания. Но при отсутствии в доме людей это может привести и к пожару, такие случаи не редкость. Так что тем, у кого в квартире старая проводка, рекомендуется установить в электрощиток устройство защиты от перенапряжения, его цена невелика, и явно дешевле ремонта в квартире.

19. Приложение 1 - Вычисления с помощью видеокарты

Еще 20 лет назад, во времена процессоров 80386, пользователям приходилось покупать математический сопроцессор, позволяющий быстрее выполнять вычисления с плавающей точкой. Сейчас такой сопроцессор покупать уже не надо - благодаря прогрессу в игровой индустрии, даже встроенная видеокарта компьютера имеет весьма неплохую вычислительную мощность. Например, даже бюджетный видеочип Intel Graphics 4600 имеет 20 вычислительных блоков, что превышает количество ядер “основного” процессора. Разумеется, каждое ядро GPU по отдельности слабее CPU, но здесь как раз тот случай, когда количество дает преимущество над качеством. Вычисления с помощью GPU сейчас очень популярны - от майнинга биткоинов до научных расчетов, диапазон ценовых решений также различен, от “бесплатной” встроенной видеокарты до NVIDIA Tesla ценой более 100тыс рублей. Поэтому интересно посмотреть, как же это работает.

Есть две основные библиотеки для GPU-расчетов - NVidia CUDA и OpenCL. Первая обладает большими возможностями, однако работает только с картами NVIDIA. Библиотека OpenCL работает с гораздо большим числом графических карт, поэтому мы рассмотрим именно ее.

Основной принцип GPU-расчетов - параллельность вычислений. Данные, хранящиеся в “глобальной памяти” (global & constant memory) устройства, обрабатываются модулями (каждый модуль называется “ядром”), каждый из которых работает параллельно с другими. Модуль имеет и свою собственную память для промежуточных данных (private memory). Так это выглядит в виде блок-схемы:



Таким образом, если задача может быть разбита на небольшие блоки, параллельно обрабатывающие небольшой фрагмент блока данных, такая задача может эффективно быть решена на GPU.

Рассмотрим пример: необходимо проверить, какие числа в массиве являются простыми. Массив может быть большим, например миллион элементов. Такая задача

идеальна для распараллеливания: каждое число может быть проверено независимо от предыдущего.

Для решения такой задачи с помощью OpenCL необходимо выполнить ряд шагов.

1. Написать код микроядра (kernel):

Этот код будет запускаться непосредственно на графических процессорах видеокарты. Код пишется на языке C. В данном примере мы для упрощения храним код прямо в виде строки в программе.

```
const char *KernelSource = "\n" \
    "__kernel void primes(                \n" \
    "  __global unsigned int* input,        \n" \
    "  __global unsigned int* output)      \n" \
    "{                                     \n" \
    "  unsigned int i = get_global_id(0);   \n" \
    "  //printf(\"Task-%d\\n\", i);         \n" \
    "  output[i] = 0;                       \n" \
    "  unsigned int val = input[i];         \n" \
    "  for(unsigned int p=2; p<=val/2; p++) { \n" \
    "    if (val % p == 0)                   \n" \
    "      return;                           \n" \
    "  }                                     \n" \
    "  output[i] = 1;                       \n" \
    "}"                                     \n" \
    "\n";
```

Суть кода проста. Массив input хранит числа, которые нужно проверить, функция get_global_id возвращает индекс задачи, которую выполняет данное ядро. Мы берем число с нужным индексом, проверяем его на простоту, и записываем 0 или 1 в зависимости от результата, в массив output.

2. Инициализировать подготовку вычислений:

```
int gpu = 1;
clGetDeviceIDs(NULL, gpu ? CL_DEVICE_TYPE_GPU : CL_DEVICE_TYPE_CPU, 1,
    &device_id, NULL);
cl_context context = clCreateContext(0, 1, &device_id, NULL, NULL, &err);
cl_command_queue commands = clCreateCommandQueue(context, device_id, 0, &err);
```

На этом этапе можно выбрать где будут производиться вычисления, на основном процессоре или на GPU. Для отладки удобнее основной процессор, окончательные расчеты быстрее на GPU.

3. Подготовить данные

```
#define DATA_SIZE 1024
cl_uint *data = (cl_uint*)malloc(sizeof(cl_uint) * DATA_SIZE);
cl_uint *results = (cl_uint*)malloc(sizeof(cl_uint) * DATA_SIZE);
```

4. Загрузить данные и программу из основной памяти в GPU

```
cl_program program = clCreateProgramWithSource(context, 1, (const char **) &
    KernelSource, NULL, &err);
```

```

    clBuildProgram(program, 0, NULL, NULL, NULL, NULL);
    cl_kernel kernel = clCreateKernel(program, "primes", &err);
    cl_mem output = clCreateBuffer(context, CL_MEM_WRITE_ONLY, sizeof(cl_uint) * count,
    NULL, NULL);

    clEnqueueWriteBuffer(commands, input, CL_TRUE, 0, sizeof(cl_uint) * count, data, 0, NULL,
    NULL);
    clSetKernelArg(kernel, 0, sizeof(cl_mem), &output);

    clGetKernelWorkGroupInfo(kernel, device_id, CL_KERNEL_WORK_GROUP_SIZE,
    sizeof(local), &local, NULL);

```

5. Запустить вычисления на GPU и дождаться их завершения

```

    global = DATA_SIZE;
    clEnqueueNDRangeKernel(commands, kernel, 1, NULL, &global, &local, 0, NULL, NULL);
    clFinish(commands);

```

6. Загрузить результаты обратно из GPU в основную память

```

    clEnqueueReadBuffer( commands, output, CL_TRUE, 0, sizeof(cl_uint) * count, results, 0,
    NULL, NULL );

```

7. Освободить данные

```

    free(data);
    free(results);
    clReleaseMemObject(input);
    clReleaseMemObject(output);
    clReleaseProgram(program);
    clReleaseKernel(kernel);
    clReleaseCommandQueue(commands);
    clReleaseContext(context);

```

Как можно видеть, процесс довольно-таки громоздкий, но оно того стоит. Для примера, проверка простоты 250000 чисел заняла на процессоре Core i5 около 6 секунд. И всего лишь 0.5 секунд заняло выполнение вышеприведенного кода на встроенной видеокарте. Для дешевого нетбука с процессором Intel Atom этот же код выполнялся 34 секунды на основном процессоре, и 6 секунд на GPU. Т.е. разница весьма прилична.

Разумеется, еще раз стоит повторить, что “игра стоит свеч” лишь в том случае, если задача хорошо распараллеливается на небольшие блоки, в таком случае выигрыш будет заметен.

Владельцы видеокарт NVIDIA (особенно игровых и достаточно мощных) могут также посмотреть в сторону библиотеки NVIDIA CUDA, расчеты с ее помощью должны быть еще быстрее.

20. Приложение 2 - Быстродействие языка Python

Язык Python очень удобен своей краткостью и лаконичностью, возможностью использования большого количества сторонних библиотек. Однако, один из его минусов, который может быть ключевым для математических расчетов - это быстродействие. Python это интерпретатор, он не создает exe-файл, что разумеется, сказывается на скорости выполнения программы.

Рассмотрим простой пример: рассчитаем сумму квадратов чисел от 1 до 1000000. Также выведем время выполнения программы.

Программа на языке Python выглядит так:

```
import time
start_time = time.time()

s = 0
for x in range(1,1000001):
    s += x*x

print("Sum={}, T={}s".format(s, time.time() - start_time))
```

Результаты работы:

Sum = 333333833333500000, T = 0.47s

Учитывая, что чисел всего миллион, не так уж и быстро. Попробуем ускорить программу, для этого по возможности используем функции встроенных библиотек. Они зачастую написаны на C, и работают быстрее.

```
import time
start_time = time.time()

l = range(1000001)
s = sum(x*x for x in l)

print("Sum = {}, T = {}s".format(s, time.time() - start_time))
```

Результаты работы:

Sum = 333333833333500000, T = 0.32s

Быстрее, но лишь чуть-чуть. К тому же, данный код хранит весь массив в памяти, что неудобно.

И наконец, призываем “тяжелую артиллерию”: напомним программу на языке C. Код выглядит так:

```
#include <stdio.h>
#include <time.h>

int main()
```

```

{
    clock_t start = clock();

    unsigned long long int sum = 0, i;
    for(i=1; i<1000001; i++) {
        sum += i*i;
    }

    clock_t end = clock();
    printf("Sum = %llu, T = %fs", sum, (float)(end - start)/CLOCKS_PER_SEC);
    return 0;
}

```

Как можно видеть, он ненамного сложнее python-версии. Перед запуском программы, ее надо скомпилировать, выполнив команду **C:\GCC\bin\gcc.exe "Appendix-2 - speedTest.c" -o"Appendix-2 - speedTest"**. Результат очевиден: T = 0.007 секунд. И еще чуть-чуть: добавляем флаг оптимизации по скорости, выполнив команду **C:\GCC\bin\gcc.exe "Appendix-2 - speedTest.c" -o"Appendix-2 - speedTest" -O3**. Результат: 0.0035 секунд, разница в быстродействии более 100 раз!

Увы, в более сложных задачах такого прироста реально не бывает (в последнем примере очень короткий код, который видимо полностью помещается в кеш-памяти процессора), но на некоторое улучшение быстродействия можно рассчитывать. Хотя переписывание программы - это крайний случай, сначала целесообразно поискать стандартные библиотеки, которые возможно уже решают данную задачу. К примеру, следующий код на языке Python, вычисляет сумму элементов массива за 0.1с:

```

a = range(1000001)
s = 0
for x in a:
    s += x
print(s)

```

Можно использовать встроенную функцию **sum**:

```

a = range(1000001)
s = sum(a)
print(s)

```

Данный код выполняется за 0.02 секунды, т.е. в 5 раз быстрее первого варианта. Но разумеется, если заранее известно, что задача состоит в обработке большого набора чисел (например поиск простых чисел или магических квадратов), то может быть более целесообразным сразу писать программу на C или C++, в принципе это не намного сложнее, а работать программа будет быстрее.

Заключение

На этом данная книга закончена, хотя надеюсь, что не навсегда - по возможности и по мере появления новых идей, новые главы будут дописываться. Автор надеется, что хоть немного удалось познакомить читателей с увлекательным миром математики и программирования.

Продолжение следует.

Обо найденных неточностях или дополнениях просьба писать на электронную почту dmitryelj@gmail.com. Наличие новой версии можно проверить на странице <http://dmitryelj.spb.ru/math.htm>.