

Графы и топология  
С. К. Ландо

1 июня 2018 г.

Графы — универсальный способ кодирования информации. Они удобны для представления разнообразных сведений об объектах и связях между ними. В нашем курсе мы будем смотреть на графы, в первую очередь, с точки зрения топологии. Несмотря на то, что графы существенно *дискретны*, а топология изучает свойства объектов, не меняющиеся при *непрерывных* преобразованиях, графы служат “одномерными объектами” топологии. На их примере можно изучить работу целого ряда топологических понятий. Да и вообще, любой изучаемый топологией объект допускает конечное описание, а значит, с ним можно работать в дискретных терминах.

Для манипуляций с графами разработано множество компьютерных программ. В частности, практически любая система символьной математики — будь то Maple, Mathematica или что-нибудь еще — имеет встроенные пакеты работы с графами. Зачастую мы будем использовать для иллюстрации результаты работы системы Mathematica.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Терминология графов</b>	<b>5</b>
1.1	Пример: квадрирование квадрата . . . . .	6
1.2	Определения . . . . .	7
1.3	Пути и циклы . . . . .	8
1.4	Типы графов . . . . .	8
1.4.1	Деревья и леса . . . . .	9
1.4.2	Циклические графы . . . . .	9
1.4.3	Полные графы . . . . .	9
1.4.4	Двудольные графы . . . . .	9
1.4.5	$n$ -мерный куб . . . . .	10
1.5	Подграфы . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Способы представления графов</b>	<b>11</b>
2.1	Дополнительные понятия . . . . .	12
2.2	Набор ребер . . . . .	13
2.3	Матрица инцидентности . . . . .	13
2.4	Матрица смежности . . . . .	14
2.5	Матрица Кирхгофа . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Изоморфизм графов. Простейшие инварианты</b>	<b>17</b>
3.1	Определение изоморфизма . . . . .	18
3.2	Классы изоморфизма графов . . . . .	18
3.3	Простейшие инварианты графов . . . . .	19
3.4	Как проверять изоморфизм графов? . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Полиномиальные инварианты</b>	<b>23</b>
4.1	Хроматическая функция . . . . .	24
4.2	Многочлен Абеля . . . . .	26
4.3	Многочлен паросочетаний . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Соотношения удаления-стягивания и теорема Татта</b>	<b>29</b>
5.1	Соотношение удаление-стягивание для хроматической функции	30
5.2	Немного о топологии графа . . . . .	31
5.3	Многочлен Пенроуза* . . . . .	33

5.4	Соотношения Татта . . . . .	35
5.5	Теорема Татта . . . . .	36
5.6	Доказательство теоремы Татта* . . . . .	37
5.7	Новые примеры инвариантов Татта . . . . .	39
5.8	Задачи . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Статистические модели инвариантов</b>	<b>45</b>
6.1	Спинорные модели . . . . .	46
6.1.1	Пример: спинорная модель для хроматического много- члена . . . . .	47
6.1.2	Модель Поттса . . . . .	47
6.1.3	Модель Изинга . . . . .	48
6.2	Реберная статистика . . . . .	48
6.3	Биномиальность инвариантов . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Группа автоморфизмов графа</b>	<b>51</b>
7.1	Автоморфизмы графов . . . . .	52
7.2	Автоморфизмы деревьев . . . . .	54
7.3	Автоморфизмы графов с петлями и кратными ребрами . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Перечисление графов</b>	<b>58</b>
8.1	Помеченные графы и группа автоморфизмов . . . . .	59
8.2	Перечисление помеченных деревьев . . . . .	61
8.3	Леса и многочлены Абеля . . . . .	67
8.4	Обращение функции и суммирование по деревьям * . . . . .	69
8.5	Задачи . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Топологические характеристики графов</b>	<b>74</b>
9.1	Топологическая эквивалентность простых графов . . . . .	75
9.2	Топологическая эквивалентность графов с петлями и кратны- ми ребрами . . . . .	77
9.3	Гомотопическая эквивалентность . . . . .	78
9.4	Фундаментальная группа и первые гомологии связного графа	79
<b>10</b>	<b>Поверхности</b>	<b>82</b>
10.1	Поверхности . . . . .	83
10.2	Комбинаторные поверхности . . . . .	84
10.3	Эйлерова характеристика комбинаторной поверхности . . . . .	86
<b>11</b>	<b>Классификация двумерных поверхностей</b>	<b>89</b>
11.1	Сфера с ручками . . . . .	90
11.2	Формулировка теорем классификации связных компактных двумерных поверхностей . . . . .	90
11.3	Доказательство теорем классификации . . . . .	93

<b>12 Планарные и сферические графы</b>	<b>98</b>
12.1 Планарные графы . . . . .	99
12.2 Сферические графы . . . . .	100
12.3 Группа симметрий сферического графа . . . . .	101
12.4 Перечисление корневых плоских деревьев . . . . .	103
<b>13 Графы на поверхностях</b>	<b>107</b>
13.1 Изображение графа на поверхности . . . . .	108
13.2 Кодирование графа на поверхности . . . . .	109
13.3 Двойственность . . . . .	111
<b>14 Гомологии поверхностей</b>	<b>113</b>
14.1 Гомологии поверхностей с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ . . . . .	114
14.2 Гомологии и эйлерова характеристика . . . . .	117
14.3 Ориентации, ориентируемость и гомологии с коэффициентами в других группах . . . . .	118

# Глава 1

## Терминология графов

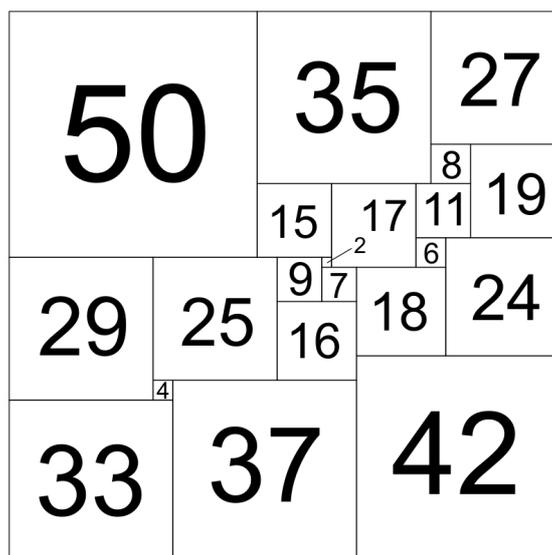


Рис. 1.1: Минимальное квадрирование квадрата

По существу, каждый граф представляет собой набор вершин, некоторые из которых соединены ребрами. Однако эта картинка имеет многообразные модификации, и чтение литературы по графам может оказаться затруднительным в силу того, что за столетия изучения графов была развита весьма изощренная терминология, и не всегда понятно, о каких графах и каких их свойствах в действительности идет речь. Поэтому на первой лекции мы дадим строгие определения некоторых простейших понятий, а на протяжении последующих лекций будем потихоньку вводить новые определения.

## 1.1 Пример: квадрирование квадрата

Задача квадрирования прямоугольника состоит в том, чтобы разбить его на попарно непересекающиеся квадраты, никакие два из которых не равны друг другу. На рис. 1.1 приведено минимальное квадрирование квадрата, т.е. квадрирование, состоящее из минимально возможного числа квадратов (на рисунке их 21). Задача поиска минимального квадрирования квадрата долго не поддавалась решению — пока не было предложено описание квадрирований с помощью графов. Это описание устроено следующим образом.

Каждому горизонтальному отрезку квадрирования (включая верхнюю и нижнюю стороны квадратируемого прямоугольника) сопоставляется вершина графа. Каждому квадрату квадрирования соответствует ребро, соединяющее отрезок, содержащий верхнюю сторону квадрата, с отрезком, содержащим его нижнюю сторону. Ребро можно ориентировать сверху вниз и написать на нем длину стороны квадрата. Полученный в результате граф называется *диаграммой Смита* квадрирования.

*Замечание 1.1.1.* Приводимые здесь рисунки взяты из статьи *Квадрирование квадрата* в русской Wikipedia.

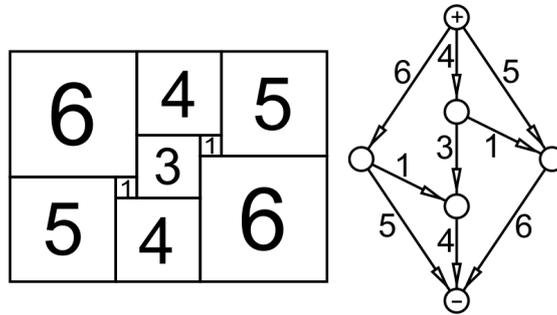


Рис. 1.2: Разбиение прямоугольника на квадраты и его диаграмма Смита

**Задача 1.1.** Проверьте, что в каждой вершине диаграммы Смита, за исключением вершин, отвечающих горизонтальным сторонам исходного прямоугольника, сумма чисел, написанных на ребрах, входящих в эту вершину, равна сумме чисел на ребрах, выходящих из нее.

**Задача 1.2.** \* Докажите, что нельзя кубировать куб, т.е. разбить его на попарно различные меньшие кубы. **Указание:** Предположим противное. Тогда основание куба представляет собой квадрированный квадрат. Рассмотрите наименьший из квадратов квадрирования и те кубы, которые прилегают к верхней грани куба, нижней гранью которого является этот наименьший квадрат.

## 1.2 Определения

**Определение 1.2.1.** *Граф* это конечное множество *вершин*, и некоторое конечное множество *ребер*, т.е. неповторяющихся пар различных вершин.

Часто графы, описываемые этим определением, называют *простыми*. Существует множество других видов графов, но нам они понадобятся скоро.

Для графа  $G$  множество его вершин обозначается через  $V(G)$ , а множество его ребер — через  $E(G)$ . Граф можно себе представлять в виде пары  $G = (V(G), E(G))$ , состоящей из множества его вершин и множества его ребер.

**Пример 1.2.2.** Например,  $G_1 = (\{1, 2, a\}, \{\{1, a\}, \{a, 2\}\})$  имеет три вершины  $1, 2, a$  и два ребра  $\{1, a\} = \{a, 1\}$  и  $\{2, a\} = \{a, 2\}$ . Как обычно, мы заключаем элементы множества в фигурные скобки.

**Определение 1.2.3.** Две вершины, образующие ребро, называются *концами* этого ребра. *Валентностью* (или *порядком*) вершины графа называется количество ребер, для которых эта вершина является концом.

Например, в графе  $G_1$  из примера 1.2.2 вершины 0 и 1 имеют валентность 1, а вершина  $a$  имеет валентность 2.

**Задача 1.3.** Докажите, что число вершин нечетной валентности в графе четно.

Например, в графе  $G_1$  из примера 1.2.2 две вершины нечетной валентности.

**Задача 1.4.** Докажите, что не существует графа с набором валентностей вершин  $\{7, 6, 5, 4, 3, 3, 2\}$  и  $\{6, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ .

## 1.3 Пути и циклы

**Определение 1.3.1.** *Простым путем* длины  $\ell$  в графе называется последовательность его вершин  $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ , в которой все вершины попарно различны и любые две последовательные вершины  $v_{i-1}, v_i$  соединены ребром.

Простой путь длины  $\ell$  содержит  $\ell$  ребер и  $\ell + 1$  вершин. Вершина  $v_0$  называется *началом* пути, а вершина  $v_\ell$  — его *концом*, и говорят, что путь *соединяет* свое начало  $v_0$  со своим концом  $v_\ell$ . Вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}$  называются *внутренними*, или *промежуточными*, вершинами простого пути. Каждая вершина образует простой путь длины нуль; она является его началом и концом.

**Определение 1.3.2.** Граф называется *связным*, если для любой пары вершин в нем существует соединяющий их простой путь.

**Задача 1.5.** Докажите, что если в графе  $G$  с  $|V(G)|$  вершинами больше, чем

$$\binom{|V(G)| - 1}{2} = \frac{1}{2}(|V(G)| - 1)(|V(G)| - 2)$$

ребер, то он связан.

*Простой цикл* в графе определяется так же, как и простой путь, но начало и конец в нем должны совпадать.

**Задача 1.6.** Дайте формальное определение простого цикла.

Простой цикл в простом графе имеет длину не меньше 3.

## 1.4 Типы графов

Графы, встречающиеся при решении определенного круга задач, зачастую принадлежат к тому или иному типу графов. Графы одного типа обладают похожими свойствами. В этом разделе мы определяем несколько типов графов и рассматриваем их простейшие свойства.

### 1.4.1 Деревья и леса

**Определение 1.4.1.** Граф, не имеющий простых циклов, называется *лесом*. Связный граф, не имеющий простых циклов, называется *деревом*.

Скажем, граф  $G_1$  из примера 1.2.2 является деревом.

*Задача 1.7.* Приведите пример дерева с 7 вершинами.

*Задача 1.8.* Докажите, что в любом дереве число вершин на 1 превышает число ребер.

### 1.4.2 Циклические графы

*Циклический граф*  $C_n$  — это граф, состоящий из одного цикла длины  $n$ , и не имеющий других вершин и ребер.

### 1.4.3 Полные графы

**Определение 1.4.2.** *Полный граф* — это граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром.

*Задача 1.9.* Сколько ребер имеет полный граф с  $n$  вершинами?

### 1.4.4 Двудольные графы

**Определение 1.4.3.** Граф  $G$ , множество вершин  $V(G)$  которого можно разбить на два непересекающиеся подмножества  $V(G) = U \sqcup W$  так, что всякое ребро соединяет некоторую вершину из  $U$  с некоторой вершиной из  $W$ , называется *двудольным*, а подмножества вершин  $U$  и  $W$  — его *долями*. Двудольный граф с долями  $U, W$  называется *полным двудольным графом*, если в нем всякая вершина из  $U$  соединена ребром с каждой вершиной из  $W$ .

*Задача 1.10.* Сколько ребер имеет полный двудольный граф с долями, содержащими  $m$  вершин и  $n$  вершин?

*Задача 1.11.* Докажите, что максимальное число ребер в двудольном графе на  $2n$  вершинах не превосходит  $n^2$ .

*Задача 1.12.* Докажите, что множество вершин  $V(G)$  в связном двудольном графе  $G$  допускает единственное разбиение на доли (с точностью до перестановки долей).

*Задача 1.13.* Докажите, что всякий цикл в двудольном графе имеет четную длину.

*Задача 1.14.* Докажите, что если в графе всякий цикл имеет четную длину, то этот граф — двудольный.

### 1.4.5 $n$ -мерный куб

$n$ -мерный куб это граф, вершины которого — все возможные последовательности из 0 и 1 длины  $n$ ; две вершины соединены ребром, если соответствующие им последовательности отличаются ровно в одной позиции.

*Пример 1.4.4.* 1-мерный куб это отрезок (пара вершин, соединенных ребром); 2-мерный куб это цикл длины 4; 3-мерный куб это граф, состоящий из ребер обычного куба.

*Задача 1.15.* Сколько вершин в  $n$ -мерном кубе? Сколько ребер в  $n$ -мерном кубе?

*Задача 1.16.* Докажите, что  $n$ -мерный куб является двудольным графом при любом значении  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

## 1.5 Подграфы

Новые графы можно конструировать из уже изученных. Один из простейших, и поэтому наиболее полезных, способов конструирования новых графов — рассмотрение подграфов.

**Определение 1.5.1.** Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф. Граф  $H = (V(H), E(H))$  называется *подграфом* графа  $G$ , если  $V(H) \subset V(G)$  и  $E(H) \subset E(G)$ , т.е. если множество вершин графа  $H$  является подмножеством множества вершин графа  $G$ , и множество ребер графа  $H$  является подмножеством множества ребер графа  $G$ .

**Определение 1.5.2.** Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф,  $U \subset V(G)$  — подмножество его множества вершин. Подграфом графа  $G$ , *индуцированным подмножеством вершин  $U$* , называется граф  $G|_U = (U, E|_U(G))$ , где через  $E|_U(G)$  обозначено множество тех ребер графа  $G$ , оба конца которых лежат в  $U$ .

*Задача 1.17.* Приведите пример графа и подграфа в нем, не являющегося индуцированным.

*Задача 1.18.* Докажите, что каждый индуцированный подграф полного графа является полным графом.

*Задача 1.19.* Докажите, что каждый подграф двудольного графа является двудольным графом.

*Задача 1.20.* Докажите, что каждый индуцированный подграф полного двудольного графа является полным двудольным графом.

*Задача 1.21.* Придумайте двудольный граф, который не является подграфом  $n$ -мерного куба ни при каких  $n$ .

## Глава 2

# Способы представления графов

Изображение графов мелом на доске чрезвычайно полезно и информативно. Однако в некоторых ситуациях оно мало пригодно — например, если граф велик или для автоматической обработки графа. Поэтому как в теоретических построениях, так и на практике используются разнообразные способы формализованного представления графов. Различные представления оказываются эффективными в различных ситуациях. Автоматизированные системы символьного манипулирования математическими объектами содержат утилиты для перевода из одного представления в другое.

## 2.1 Дополнительные понятия

Чтобы слушатели могли почувствовать, какие представления оказываются более, а какие менее эффективными для решения различных задач, дадим еще некоторые определения характеристик графа, позволяющие эти задачи формулировать.

**Определение 2.1.1.** Говорят, что две вершины  $u, v \in V(G)$  принадлежат одной компоненте связности графа  $G = (V(G), E(G))$ , если в  $G$  существует простой путь из  $u$  в  $v$ .

*Задача 2.1.* Докажите, что если вершины  $u$  и  $v$  принадлежат одной компоненте связности графа  $G = (V(G), E(G))$ , и  $v$  и  $w$  также принадлежат одной компоненте связности, то  $u$  и  $w$  тоже принадлежат одной компоненте связности графа  $G$ . Воспользовавшись этим, докажите, что все множество вершин  $V(G)$  графа  $G$  допускает разбиение на попарно непересекающиеся непустые подмножества  $V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_c$ , обладающее следующими свойствами:

- всякий индуцированный подграф  $G|_{V_i}$ ,  $i = 1, \dots, c$ , является связным;
- всякое ребро графа  $G$  соединяет вершины одного подмножества  $V_i$ .

Докажите, что такое разбиение единственно (с точностью до перенумерации подмножеств  $V_i$ ).

**Определение 2.1.2.** Подграфы  $G|_{V_i}$ ,  $i = 1, \dots, c$ , существование которых доказано в предыдущей задаче, называются *компонентами связности* графа  $G$ , а число  $c$  этих компонент — числом компонент связности.

Если граф  $G$  связан, то его разбиение на компоненты связности имеет вид  $V(G) = V_1$ , и число компонент связности в нем равно 1.

**Определение 2.1.3.** Пусть  $u, v$  — две вершины в связном графе  $G$ . *Расстоянием между вершинами  $u, v$*  называется длина кратчайшего простого пути, соединяющего  $u$  и  $v$  в  $G$ . *Диаметром* графа  $G$  называется максимум расстояний между его вершинами.

*Задача 2.2.* Найдите диаметр

- полного графа на  $n$  вершинах;
- полного двудольного графа с долями размеров  $m$  и  $n$ ;
- цикла на  $n$  вершинах;
- $n$ -мерного куба.

*Задача 2.3.* Найдите а) максимально возможный диаметр; б) минимально возможный диаметр дерева на  $n$  вершинах при всех значениях  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Определение 2.1.4.** *Остовным деревом* в связном графе  $G$  называется его подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

*Задача 2.4.* Найдите количество остовных деревьев

- в дереве на  $n$  вершинах;
- в цикле на  $n$  вершинах.

## 2.2 Набор ребер

Стандартное определение графа как набора вершин и набора ребер  $G = (V(G), E(G))$  вполне годится и для его компьютерного представления. До недавнего времени такое представление считалось неэффективным, однако с развитием компьютерных мощностей оно вполне используется для представления небольших графов (до нескольких десятков тысяч вершин, с несколькими сотнями тысяч ребер).

*Задача 2.5.* Дан граф  $G = (\{1, 5, a, X, 9, n, t, 2, M\}, \{\{1, X\}, \{a, 2\}, \{a, M\}, \{a, n\}, \{t, X\}, \{5, 1\}, \{1, t\}, \{2, n\}, \{t, 5\}\})$ . Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр каждой компоненты связности графа.

## 2.3 Матрица инцидентности

Для определения матрицы инцидентности графа  $G = (V(G), E(G))$  мы должны занумеровать его вершины числами от 1 до  $|V(G)|$  и его ребра числами от 1 до  $|E(G)|$ . Получившаяся матрица инцидентности зависит от выбора нумерации.

**Определение 2.3.1.** *Матрицей инцидентности* графа  $G$  с  $|V(G)|$  занумерованными вершинами и  $|E(G)|$  занумерованными ребрами называется  $|V(G)| \times |E(G)|$ -матрица, у которой в клетке на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, если вершина с номером  $i$  является концом ребра с номером  $j$ , имеющим меньший номер,  $-1$ , если вершина с номером  $i$  является концом ребра с номером  $j$ , имеющим больший номер, и 0, если вершина с номером  $i$  не является концом ребра с номером  $j$ .

В частности, в каждом столбце матрицы инцидентности стоит ровно одна единица, одна  $-1$ , а количество нулей в ее  $i$ -й строке равно валентности вершины с номером  $i$ .

*Задача 2.6.* Дана матрица инцидентности графа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр каждой компоненты связности графа.

*Задача 2.7.* Докажите, что в матрице  $M(G)M(G)^t$  на диагонали стоят валентности вершин графа  $G$ .

Здесь через  $M(G)^t$  обозначена  $|E(G)| \times |V(G)|$ -матрица, транспонированная к  $M(G)$ . Напомним, что произведение  $AB$  матрицы  $A$  размером  $k \times \ell$  и матрицы  $B$  размером  $m \times n$  определено только в том случае, если  $\ell = m$ . В этом случае в клетке на пересечении  $i$ -строки и  $j$ -го столбца матрицы  $AB$  стоит сумма

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{i\ell}b_{\ell j}$$

попарных произведений соответствующих элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и  $j$ -ой строки матрицы  $B$ .

## 2.4 Матрица смежности

Для определения матрицы смежности графа  $G = (V(G), E(G))$  достаточно занумеровать числами от 1 до  $|V(G)|$  его вершины — нумеровать ребра нет необходимости. Получившаяся матрица смежности зависит от выбора нумерации.

**Определение 2.4.1.** Матрицей смежности графа  $G$  с  $|V(G)|$  занумерованными вершинами называется квадратная  $|V(G)| \times |V(G)|$ -матрица, у которой в клетке на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, если вершина с номером  $i$  соединена вершиной с номером  $j$ , и 0 в противном случае.

В частности, количество единиц в  $i$ -м столбце матрицы смежности равно валентности вершины с номером  $i$ , и то же самое справедливо для ее  $i$ -строки. Кроме того, матрица смежности простого графа симметрична —

если в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит 1, то то же самое справедливо и для клетки на пересечении  $j$ -го столбца и  $i$ -ой строки.

*Задача 2.8.* Дана матрица смежности графа

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите а) количество компонент связности графа и число вершин в каждой компоненте; б) длину самого длинного простого цикла; в) диаметр графа.

*Задача 2.9.* Докажите, что в матрице  $A^2(G)$  на диагонали стоят валентности вершин графа  $G$ .

*Задача 2.10.* Докажите, что в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца матрицы  $A^2(G)$ ,  $i \neq j$  стоит количество простых путей длины 2 из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$ .

*Задача 2.11.* Придумайте способ подсчитывать количество простых путей данной длины  $k$  из вершины с номером  $i$  в вершину с номером  $j$  с помощью матрицы смежности графа.

## 2.5 Матрица Кирхгофа

*Матрица Кирхгофа*, называемая также *матрицей Лапласа*, похожа на матрицу смежности графа. Она также квадратная, симметричная размерами  $|V(G)| \times |V(G)|$ , и если, при  $i \neq j$  вершина с номером  $i$  не соединена ребром с вершиной с номером  $j$ , то в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца стоит 0. Однако вместо единиц в матрице смежности, означающих наличие ребер, в матрице Кирхгофа на тех же местах стоят  $-1$ , а в каждой диагональной клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца в матрице Кирхгофа стоит валентность вершины с номером  $i$ . Матрицу Кирхгофа графа  $G$  с занумерованными вершинами мы будем обозначать через  $K(G)$ .

*Пример 2.5.1.* Вот как выглядит матрица Кирхгофа графа с пятью вершинами:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Задача 2.12.* Нарисуйте граф, заданный матрицей Кирхгофа из примера 2.5.1. Занумеруйте его вершины таким образом, чтобы указанная матрица действительно была матрицей Кирхгофа этого графа с выбранной нумерацией вершин.

*Задача 2.13.* Докажите, что для любого простого графа  $G$  с выбранной нумерацией вершин и ребер справедливо равенство

$$K(G) = M(G)M(G)^t.$$

В частности, произведение в правой части этого равенства не зависит от выбора нумерации ребер графа  $G$ .

Как нетрудно видеть, сумма элементов матрицы Кирхгофа в любой строке (а, значит, и в любом столбце) равна 0. Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.5.2.** *Определитель матрицы Кирхгофа любого графа равен 0.*

Действительно, векторы-столбцы в матрице Кирхгофа линейно зависимы — их сумма равна нулевому вектору.

Гораздо более содержательной и полезной является, однако, следующая теорема.

**Теорема 2.5.3** (Матричная теорема о деревьях). *Определитель матрицы  $K_i(G)$  размером  $(|V(G)| - 1) \times (|V(G)| - 1)$ , получаемой из матрицы Кирхгофа вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца, не зависит от выбранного номера  $i$ . Он равен количеству остовных деревьев в графе  $G$ .*

*Задача 2.14.* Подсчитайте количество остовных деревьев в графе из примера 2.5.1 двумя способами — непосредственно и с помощью матричной теоремы о деревьях. Сравните результаты.

## Глава 3

# Изоморфизм графов. Простейшие инварианты

В исходном определении графа  $G = (V(G), E(G))$  множество его вершин  $V(G)$  играет крайне существенную роль — два графа с разными множествами вершин непременно оказываются различными. С другой стороны, ясно, скажем, что два полных графа на  $n$  вершинах отличаются друг от друга несущественно, независимо от того, каковы множества их вершин: любые численные характеристики этих графов, определение которых не опирается на множество вершин графа, оказываются одинаковыми. Да и представляя граф в матричной форме — вне зависимости от того, будет ли это матрица инцидентности, смежности или Кирхгофа, — мы должны прежде всего занумеровать вершины графа, а при нумерации память о том, что из себя представляет множество вершин, теряется.

Понятие изоморфизма графов позволяет нам не различать графы, имеющие одинаковую структуру. С другой стороны, инварианты графов позволяют нам в некоторых случаях убедиться, что два графа не изоморфны: если инвариант принимает на двух графах различные значения, то эти два графа не могут быть изоморфны.

### 3.1 Определение изоморфизма

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два графа. Отображение  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  множества вершин графа  $G$  в множество вершин графа  $H$  называется *изоморфизмом* графа  $G$  на граф  $H$ , если выполняются следующие условия:

- отображение  $f$  является взаимно-однозначным, т.е. оно переводит различные вершины графа  $G$  в различные вершины графа  $H$ , и в каждую вершину графа  $H$  переходит какая-то вершина графа  $G$ ;
- всякие две вершины  $f(u), f(v)$  графа  $H$  соединены в  $H$  ребром в том и только в том случае, если вершины  $u, v$  графа  $G$  соединены ребром в  $G$ .

Одним из ключевых свойств изоморфизма является его обратимость: если  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  — взаимно-однозначное отображение, то у него есть обратное отображение  $f^{-1} : V(H) \rightarrow V(G)$ , и если  $f$  является изоморфизмом графа  $G$  на граф  $H$ , то  $f^{-1}$  является изоморфизмом графа  $H$  на граф  $G$ .

*Задача 3.1.* Установите изоморфизм между парой графов на рис. 3.1.

### 3.2 Классы изоморфизма графов

Для некоторых классов графов один или несколько числовых параметров однозначно определяют класс изоморфизма графов с этими параметрами. Так, все полные графы на  $n$  вершинах изоморфны друг другу. Поэтому для классов изоморфизма можно вводить простые обозначения. Так,

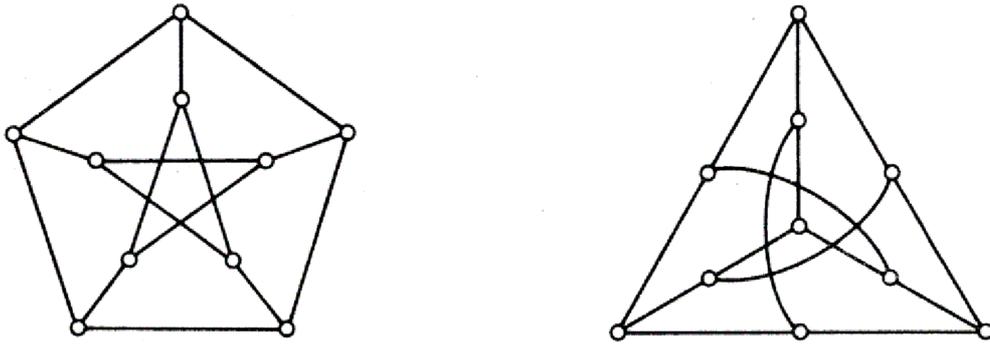


Рис. 3.1: Изоморфные графы

- класс изоморфизма полных графов на  $n$  вершинах обозначается  $K_n$ ;
- класс изоморфизма полных двудольных графов с долями величины  $n$  и  $m$  обозначается  $K_{n,m}$ ;
- класс изоморфизма циклов длины  $n$  обозначается  $C_n$ .

При  $n = 1, 2, 3$  имеется соответственно 1, 2, 4 классов изоморфизма графов с  $n$  вершинами. Ясно, что для описания классов изоморфизма графов с  $n$  вершинами достаточно знать классы изоморфизма связных графов с  $1, 2, 3, \dots, n$  вершинами. Поэтому обычно таблицы графов содержат только связные графы.

**Задача 3.2.** Нарисуйте все классы изоморфизма простых связных графов с 4 и 5 вершинами.

### 3.3 Простейшие инварианты графов

**Определение 3.3.1.** Пусть  $F$  — функция на графах, т.е. отображение, сопоставляющее каждому графу какое-нибудь значение. Такая функция называется *инвариантом* графов, если на любых двух изоморфных графах она принимает одинаковые значения.

Понятие инварианта распространено в математике очень широко. Его общий смысл — “что-то, что не меняется при разрешенных преобразованиях”. Так, в топологии инвариант топологического пространства — это величина, которая не меняется при гомеоморфизмах.

Инварианты не всегда подходят для установления изоморфизма графов — графы с одинаковыми значениями инвариантов могут оказаться неизоморфными друг другу. Однако они отлично работают для доказательства того, что два графа неизоморфны.

Мы уже знаем несколько простейших инвариантов графов. Это

- количество вершин в графе;
- количество ребер в графе;
- является ли граф связным или несвязным;
- количество компонент связности в графе;
- набор валентностей вершин в графе;
- диаметр графа;
- длина минимального простого цикла в графе;
- количество остовных деревьев в графе;
- является ли граф деревом;
- является ли граф двудольным.

*Задача 3.3.* Докажите, что каждая из упомянутых здесь величин действительно является инвариантом графов.

Докажем для примера, что инвариантом является диаметр графа.

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два изоморфных графа, и  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  — отображение множества вершин графа  $G$  в множество вершин графа  $H$ , устанавливающее изоморфизм между графами. Тогда для любых двух вершин  $u, v \in V(G)$  графа  $G$  расстояние между ними в графе  $G$  совпадает с расстоянием между вершинами  $f(u), f(v) \in V(H)$  в графе  $H$ . Действительно, любой простой путь  $(u, v_1, \dots, v_{\ell-1}, v)$  длины  $\ell$ , соединяющий в графе  $G$  вершины  $u$  и  $v$ , переходит при отображении  $f$  в простой путь  $(f(u), f(v_1), \dots, f(v_{\ell-1}), f(v))$  длины  $\ell$ , соединяющий вершины  $f(u)$  и  $f(v)$  в графе  $H$ . Поэтому расстояние между вершинами  $f(u)$  и  $f(v)$  в  $H$  не больше расстояния между вершинами  $u$  и  $v$  в  $G$ . Обратное неравенство следует из того, что изоморфизм  $f$  обратим.

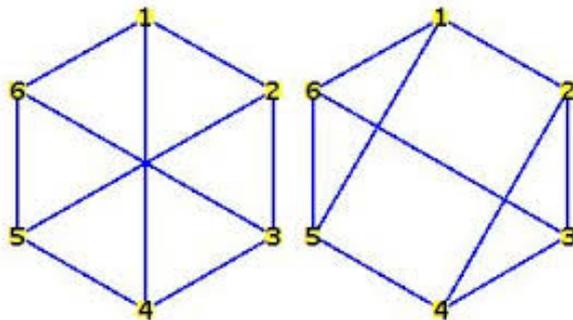
Диаметр графа, представляющий собой наибольшее расстояние между его вершинами, является инвариантом графа, так как набор расстояний между вершинами для двух изоморфных графов одинаков.

*Задача 3.4.* Используя инварианты из приведенного списка, докажите, что графы на рис. 3.2 не изоморфны друг другу.

*Задача 3.5.* Приведите пример пары не изоморфных друг другу деревьев, для которых все инварианты из приведенного списка принимают одинаковые значения.

*Задача 3.6.* Среди трех графов на рис. 3.3 два изоморфны, а третий не изоморфен им. Найдите изоморфную пару графов, установите изоморфизм и докажите неизоморфность третьего графа первым двум.

*Задача 3.7.* Разбейте графы на рис. 3.4 на классы попарно изоморфных друг другу.



2. Two of the following graphs  $F$ ,  $G$  and  $H$  are isomorphic to each other. For the two graphs which are isomorphic, give an isomorphism between them and show that it is indeed an isomorphism. For the other graph, give a reason that it is not isomorphic to the two which are isomorphic.

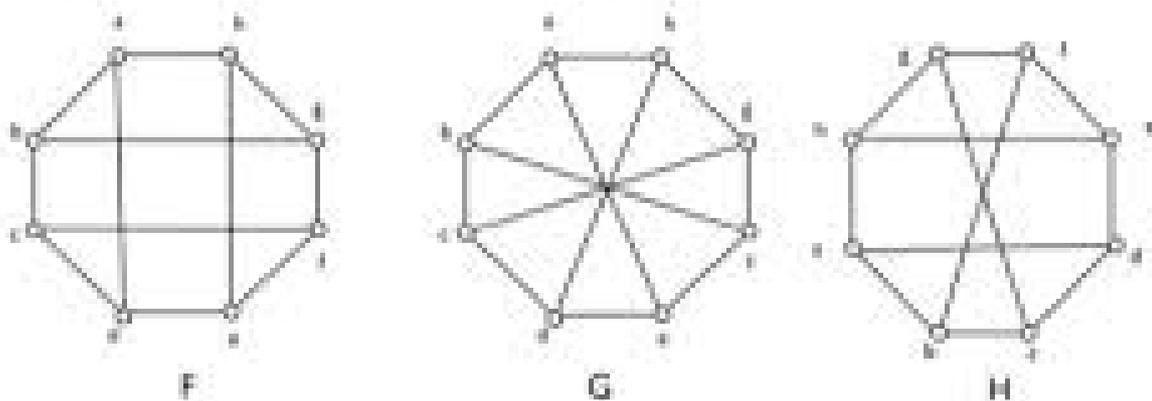


Рис. 3.3: Три графа

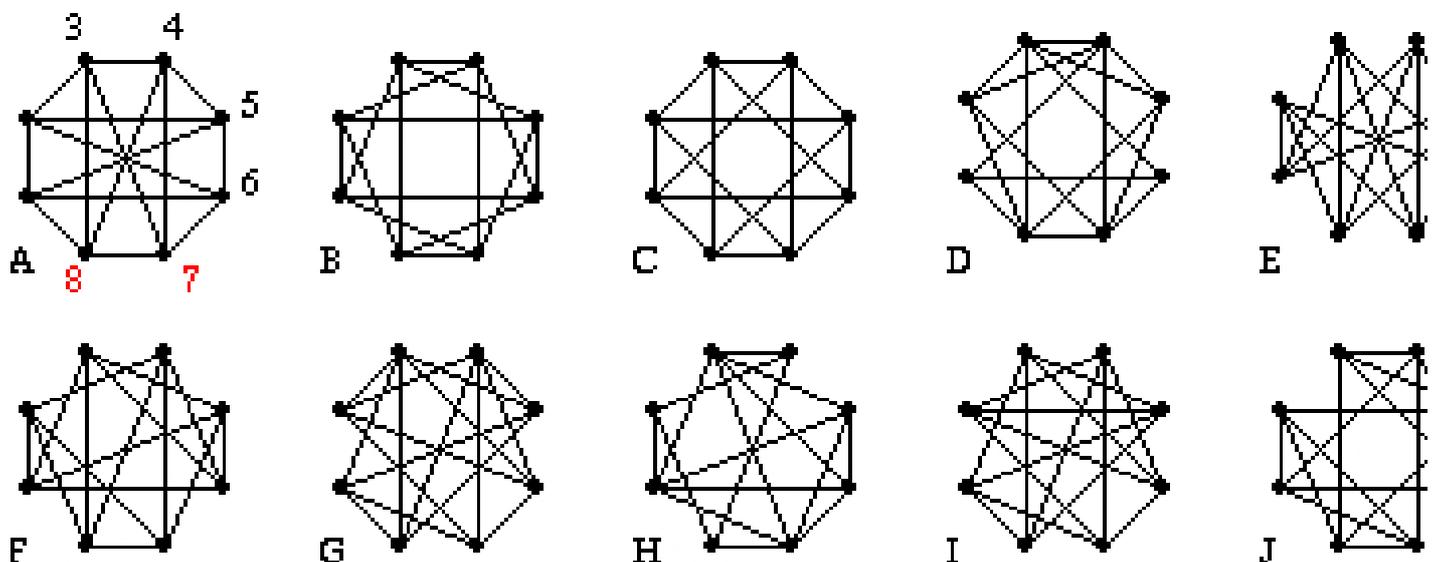


Рис. 3.4: Какие из этих графов попарно изоморфны?

*Задача 3.8.* Придумайте свои инварианты графов и докажите, что они действительно являются инвариантами.

Поскольку придумать инвариант графов несложно, встает вопрос: как сравнивать инварианты? Какие из них лучше, какие хуже? Такая постановка вопроса приводит к следующим естественным требованиям к инварианту:

- инвариант должен быть легко вычислимым (скажем, за полиномиальное по числу вершин время);
- инвариант должен различать как можно больше неизоморфных графов;

и соответствующим “критериям качества”: один инвариант лучше другого, если он

- быстрее вычисляется;
- различает больше графов.

К сожалению, первое требование трудно выполнимо. Второе же допускает дальнейшую формализацию, и мы не раз к нему вернемся.

### 3.4 Как проверять изоморфизм графов?

Задача проверки изоморфизма графов имеет очевидное решение. Если  $G = (V(G), E(G))$  и  $H = (V(H), E(H))$  — два графа, причем  $|V(G)| = |V(H)|$ , то достаточно перебрать все возможные взаимно однозначные отображения из  $V(G)$  в  $V(H)$  и проверить для каждого из них, является ли оно изоморфизмом, т.е. устанавливает ли оно взаимно-однозначное отображение множества ребер.

Подобный перебор является вычислительно сложным — количество взаимно-однозначных отображений из множества  $V(G)$  в множество  $V(H)$  равно факториалу  $|V(G)|!$  количества элементов в множестве вершин. Уже на графах с несколькими сотнями вершин подобный перебор не доступен современным компьютерам за разумное время. Существенно более эффективные алгоритмы известны только в ситуациях, когда рассматриваемые графы обладают какими-то специальными свойствами или принадлежат каким-то специальным классам графов. Например, проверять изоморфизм деревьев можно за полиномиальное по числу их вершин время. Вопрос о существовании алгоритма проверки изоморфизма графов общего вида за полиномиальное по числу их вершин время является одним из ключевых вопросов современной теории алгоритмической сложности.

## Глава 4

# Полиномиальные инварианты



Рис. 4.1: Две различные раскраски двувёршинного графа без ребер

Рассматривавшиеся нами до сих пор инварианты графов являются числовыми — количество вершин в графе или его диаметр, или число остовных деревьев в нем. Значения таких инвариантов оказываются совпадающими на многих различных графах, поэтому их различительная сила не очень велика. Бóльшую различительную силу имеют инварианты, принимающие полиномиальные значения. На каждом графе значение такого инварианта является многочленом, и вместо одного числового инварианта мы получаем одновременно несколько таких инвариантов — коэффициентов многочлена.

В этой главе мы приведем примеры полиномиальных инвариантов.

## 4.1 Хроматическая функция

Рассмотрим важный и нетривиальный пример полиномиального инварианта. Пусть  $c$  — натуральное число. Обозначим через  $\chi_G(c)$  число правильных раскрасок вершин графа  $G$  в  $c$  цветов. Это функция от переменной  $c$ , и мы будем называть ее *хроматической функцией* графа  $G$ . Под *правильной раскраской* мы понимаем сопоставление цвета каждой вершине графа таким образом, что любые две соседние (т.е. соединенные ребром) вершины окрашены в различные цвета.

Например, вершины графа допускают правильную раскраску в один цвет ( $c = 1$ ) в том и только в том случае, если в графе нет ребер, т.е. он состоит из  $n$  не связанных между собою вершин. Заметим, что в этом случае мы можем красить каждую вершину произвольно в любой из  $c$  цветов — раскраска все равно будет правильной, а значит,  $\chi_G(c) = c^n$ . Обратите внимание на то, что две раскраски вершин двувёршинного графа, изображенные на рис. 4.1, мы считаем *различными*. Другими словами, зафиксировав граф  $G$ , мы помечаем его вершины и считаем различными любые две раскраски, в которых хотя бы одна вершина окрашена в различные цвета.

Для графа из двух вершин, соединенных ребром, имеем  $\chi_G(c) = c(c - 1)$ . Действительно, если мы окрасим первую вершину в один из  $c$  цветов, то для окраски второй вершины мы можем использовать один из оставшихся  $c - 1$  цветов. Аналогично, для полного графа на 3 вершинах (трех вершин, попарно соединенных ребрами)  $\chi_{K_3}(c) = c(c - 1)(c - 2)$ . Эти утверждения несложно обобщить на некоторые графы с бóльшим числом вершин.

**Утверждение 4.1.1.** (i) Справедливо равенство

$$\chi_{K_n}(c) = c(c - 1)(c - 2) \dots (c - n + 1),$$



Рис. 4.2: Граф-цепочка  $A_n$

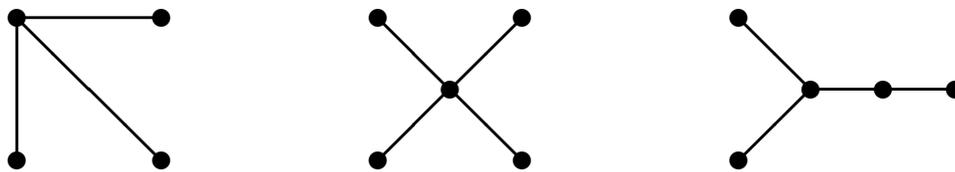


Рис. 4.3: Деревья с 4 и 5 вершинами

где  $K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах, т.е. граф, в котором все вершины соединены ребрами попарно.

(ii) Справедливо равенство

$$\chi_{A_n}(c) = c(c - 1)^{n-1},$$

где  $A_n$  — цепочка на  $n$  вершинах (см. рис. 4.2).

Заметим, что если граф  $G$  представляется в виде несвязного объединения двух графов  $G = G_1 \sqcup G_2$ , то  $\chi_G(c) = \chi_{G_1}(c)\chi_{G_2}(c)$ . Это очень важное свойство, и мы остановимся на нем подробнее.

*Несвязное объединение* двух графов — это граф, множество вершин и множество ребер которого являются несвязным объединением множеств вершин и ребер этих графов. Множество компонент связности несвязного объединения двух графов является объединением множеств их компонент связности. То, что хроматическая функция несвязного объединения двух графов является произведением хроматических функций этих графов, очевидно: правильная раскраска каждого из графов автоматически дает правильную раскраску их объединения и наоборот. В дальнейшем нас очень часто будут интересовать именно такие инварианты графов, значения которых на несвязных объединениях графов равны произведению значений на каждом из объединяемых графов. Заметим, что значение такого инварианта на *пустом* графе следует полагать равным 1.

**Задача 4.1.** Воспользовавшись задачей 1.12, докажите, что для связного графа  $G$  выполняется равенство  $\chi_G(2) = 2$ , если граф  $G$  двудолен, и  $\chi_G(2) = 0$  в противном случае.

**Задача 4.2.** Вычислите значение хроматической функции на деревьях, изображенных на рис. 4.3.

**Задача 4.3.** Вычислите значение хроматической функции на графах с рис. 4.4.



Рис. 4.4: Два графа с 4 вершинами

**Утверждение 4.1.2.** Хроматическая функция графа биномиальна, т.е. для любого графа  $G$  справедливо равенство

$$\chi_G(x + y) = \sum_{V(G)=U \sqcup W} \chi_{G|_U}(x) \chi_{G|_W}(y);$$

здесь суммирование в правой части ведется по всем упорядоченным разбиениям множества вершин  $V(G)$  графа  $G$  на два непересекающихся подмножества, а через  $G|_U$  обозначен подграф в  $G$ , индуцированный подмножеством  $U$  множества его вершин.

Действительно, будем красить вершины графа  $G$  в цвета из множества  $X \sqcup Y$ , причем множество  $X$  состоит из  $|X| = x$  цветов, а множество  $Y$  состоит из  $|Y| = y$  цветов. Тогда каждая правильная раскраска множества вершин графа  $G$  определяет его разбиение на два непересекающихся подмножества: подмножество  $U$ , состоящее из вершин, покрашенных в цвета из множества  $X$ , и подмножества  $W$ , состоящее из вершин, покрашенных в цвета из множества  $Y$ . При этом раскраски обоих индуцированных графов  $G|_U$  и  $G|_W$  являются правильными. Суммируя по всем правильным раскраскам множества вершин  $U$  в цвета из множества  $X$  и множества вершин  $W$  в цвета из множества  $Y$ , мы получаем утверждение.

## 4.2 Многочлен Абеля

Коэффициенты многочлена Абеля перечисляют корневые остовные леса в графе. *Остовным лесом* в данном графе  $G$  называется подграф, содержащий все вершины графа  $G$  и не имеющий циклов. В частности, остовное дерево — это связный остовный лес. Каждый остовный лес состоит из одного или нескольких деревьев — своих компонент связности.

Определим *многочлен Абеля*  $A_G(x)$  графа  $G$  как многочлен переменной  $x$ , коэффициент которого при мономе  $x^k$  равен числу корневых остовных лесов из  $k$  деревьев в графе  $G$ . Под *корневым остовным лесом* мы понимаем остовный лес, в каждом дереве которого одна из вершин объявлена *корнем*.

Приведем примеры вычисления многочлена Абеля для нескольких графов.

*Пример 4.2.1.* Многочлен Абеля графа, состоящего из одной вершины, равен  $x$ .

*Пример 4.2.2.* Многочлен Абеля графа  $K_2$ , состоящего из двух вершин, соединенных ребром, равен  $A_{K_2}(x) = x^2 + 2x$ . Действительно, в этом графе два остовных подграфа (один из них содержит единственное ребро, другой не содержит). Оба этих остовных подграфа являются лесами. Первый подграф состоит из одного дерева на двух вершинах, и корень в этом дереве можно выбрать двумя способами. Поэтому этот подграф дает вклад  $2x$  в многочлен Абеля. В свою очередь, второй остовный подграф состоит из двух деревьев, в каждом из которых одна вершина, и корень поэтому можно выбрать единственным способом. Вклад этого подграфа в многочлен Абеля, тем самым, равен  $x^2$ .

*Задача 4.4.* Проверьте выполнение равенств

$$\begin{aligned} A_{A_3}(x) &= x^3 + 4x^2 + 3x \\ A_{K_3}(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x. \end{aligned}$$

*Задача 4.5.* Докажите следующие свойства многочлена Абеля:

- многочлен Абеля  $A_G(x)$  с  $n$  вершинами имеет степень  $n$  и коэффициент при  $x^n$  в нем равен 1;
- свободный член многочлена Абеля любого непустого графа равен 0;
- если в графе  $G$   $k$  компонент связности, то  $A_G(x)$  делится на  $x^k$  и не делится на  $x^{k+1}$ ;
- $A_{G \sqcup H}(x) = A_G(x)A_H(x)$ ;
- коэффициент при  $x^{n-1}$  (второй коэффициент) в многочлене Абеля равен удвоенному количеству ребер в графе;
- подобно хроматическому многочлену, многочлен Абеля биномиален, т.е.

$$A_G(x+y) = \sum_{V(G)=U \sqcup W} A_{G|_U}(x)A_{G|_W}(y)$$

для любого графа  $G$ .

*Задача 4.6.* Найдите многочлены Абеля графов с рисунков 4.2, 4.3, 4.4.

### 4.3 Многочлен паросочетаний

Пусть  $G = (V(G), E(G))$  — граф. *Паросочетанием* длины  $\ell$  в графе  $G$  называется набор попарно различных ребер  $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ , никакие два из которых не имеют общих концов. Если в графе  $G$  четное число вершин,  $|V(G)| = 2n$ , то в нем могут быть паросочетания длины  $n$ . Такое паросочетание называется *совершенным*. В графе с нечетным числом вершин совершенных паросочетаний нет.

**Определение 4.3.1.** Многочленом паросочетаний графа  $G$  называется многочлен

$$M_G(y) = m_0(G)y^{|V(G)|} - m_1(G)y^{|V(G)|-2} + m_2(G)y^{|V(G)|-4} + \dots,$$

где через  $m_0, m_1, m_2, \dots$  обозначены количество паросочетаний в графе  $G$  длины соответственно  $0, 1, 2, \dots$ .

Так, многочлен паросочетаний цепочки из двух вершин равен

$$M_{A_2}(y) = y^2 - 1,$$

а многочлен паросочетаний полного графа на 3 вершинах имеет вид

$$M_{K_3}(y) = y^3 - 3y.$$

Очевидно, что многочлен паросочетаний обладает следующими свойствами:

- степень многочлена паросочетаний равна числу вершин в графе, а его старший коэффициент равен 1;
- многочлен паросочетаний является четным (содержит только мономы четной степени), если число вершин в графе четно, и нечетным (содержит только мономы нечетной степени), если число вершин в графе нечетно;
- второй коэффициент в многочлене паросочетаний равен взятому со знаком  $-$  числу ребер в графе.

*Задача 4.7.* Докажите, что многочлен паросочетаний является мультипликативным,  $M_{G \sqcup H} = M_G M_H$ .

*Задача 4.8.* Вычислите многочлен паросочетаний цепочки на  $n$  вершинах.

*Задача 4.9.* Найдите многочлены паросочетаний графов с рисунков 4.2, 4.3, 4.4.

*Задача 4.10.* Вычислите многочлен паросочетаний полного двудольного графа  $K_{3,2}$ .

*Задача 4.11.* \* Докажите, что многочлен паросочетаний

- $M_{K_n}(y)$  полного графа  $K_n$  равен многочлену Эрмита  $H_n(y)$ , определяемому равенством

$$H_n(y) = (-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} e^{-\frac{y^2}{2}};$$

Первые многочлены Эрмита имеют вид

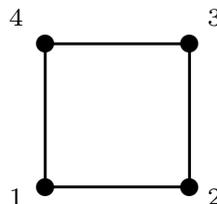
$$H_1(y) = y; \quad H_2(y) = y^2 - 1; \quad H_3(y) = y^3 - 3y; \quad H_4(y) = y^4 - 6y^2 + 3;$$

- $M_{K_{n,m}}(y)$  полного двудольного графа  $K_{m,n}$  равен  $n! L^{(n-m)}(y^2)$ , где многочлен Лагерра  $L^{(a)}(y)$  определяется равенством

$$L_n^{(a)}(y) = \frac{y^{-a} e^y}{n!} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y} y^{n+a}).$$

## Глава 5

# Соотношения удаления-стягивания и теорема Татта

Рис. 5.1: Граф  $C_4$  с занумерованными вершинами

Многие инварианты графов легко определить, однако их практическое вычисление затруднено. В этой главе мы объясняем, как можно — относительно эффективно — вычислять хроматическую функцию. Способ вычисления основан на том, что хроматическая функция удовлетворяет соотношению удаления-стягивания, которое позволяет вычислять ее рекуррентно, постепенно упрощая граф. Это же свойство хроматической функции позволяет доказать, что ее значение на каждом графе в действительности является многочленом.

## 5.1 Соотношение удаление-стягивание для хроматической функции

Вычислим хроматическую функцию для графа  $C_4$  (квадрата), решив тем самым одну из задач предыдущей главы. Занумеруем его вершины в циклическом порядке (см. рис. 5.1) и будем раскрашивать их последовательно. Первую вершину можно раскрасить в  $c$  цветов. Вторую — в  $c - 1$  цветов. Третью — тоже в  $c - 1$  цветов: ее цвет должен отличаться от цвета второй вершины. С четвертой вершиной дело обстоит сложнее. Ее цвет должен отличаться и от цвета третьей, и от цвета первой вершины. Разделим всевозможные окраски четвертой вершины в цвет, отличный от цвета третьей вершины, на две группы: те, в которых цвет четвертой вершины отличен от цвета первой, и те, в которых эти два цвета совпадают. Первая группа дает правильные раскраски квадрата, а вторая — правильные раскраски треугольника. Действительно, если первая и четвертая вершина покрашены в один и тот же цвет, то мы можем склеить их в одну, получив из квадрата треугольник. Тем самым, мы доказали равенство

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{C_3}(c) = c(c-1)^3 - c(c-1)(c-2) = c(c-1)(c^2 - 3c + 3).$$

Здесь  $A_4$  — цепочка на четырех вершинах, а  $C_3 = K_3$  — треугольник.

На самом деле, в приведенном рассуждении нигде не использовалась структура графа  $C_4$ . Оно годится для произвольного графа. Пусть  $G$  — граф,  $e \in E(G)$  — ребро в нем. Обозначим через  $G'_e$  граф  $G$  с выкинутым ребром  $e$ , а через  $G''_e$  — этот же граф, в котором ребро  $e$  стянуто в точку (и, следовательно, два конца ребра  $e$  стали новой вершиной нового графа, а число вершин в нем на 1 меньше, чем в  $G$ ). Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 5.1.1.** *Хроматическая функция удовлетворяет равенству*

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c) \quad (5.1)$$

для любого графа  $G$  и любого ребра  $e$  в нем.

Тем самым, хроматическую функцию графа можно вычислять последовательно: оба графа в правой части равенства (5.1) устроены проще, чем граф в его левой части. У первого из них меньше ребер, а у второго — меньше и вершин, и ребер. Заметим, однако, что сложность такого вычисления экспоненциальна. Действительно, на каждом шаге мы получаем два графа вместо одного, т.е. на шаге с номером  $k$  мы получим  $2^k$  графов (некоторые из которых могут оказаться изоморфными). Важно также отметить, что — несмотря на свободу выбора ребра на каждом шаге — результат вычисления, в силу инвариантности хроматической функции, не зависит от выбираемых ребер.

*Замечание 5.1.2.* Хроматическую функцию можно определить также и для графов, содержащих петли и кратные ребра. При этом для графа с петлями она оказывается тождественно равной нулю (поскольку у таких графов правильные раскраски вершин отсутствуют). Хроматическая функция графа с кратными ребрами совпадает с хроматической функцией того же графа, в котором каждое кратное ребро заменено обычным однократным ребром. Такое определение согласуется с теоремой 5.1.1. Действительно, если в графе есть кратные ребра, то, выбирая любое из этих ребер в качестве ребра  $e$  и применяя к нему формулу (5.1), мы получаем в правой части формулы тот же граф, в котором кратность ребра уменьшилась на 1, а также граф с петлей, хроматическая функция для которого равна нулю.

Во всех просчитанных нами примерах хроматическая функция оказывается многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1. Теорема 5.1.1 позволяет распространить это утверждение на произвольные графы.

**Следствие 5.1.3.** *Хроматическая функция любого графа является многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1.*

Действительно, хроматическая функция графа на  $n$  вершинах, не имеющего ребер, равна  $c^n$ , что составляет базу индукции. Теорема 5.1.1 обеспечивает шаг индукции: согласно предположению индукции хроматический многочлен графа  $G'_e$  это многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом 1, а хроматический многочлен графа  $G''_e$  это многочлен степени  $n - 1$ . Их разность является многочленом степени  $n$  со старшим коэффициентом 1.

## 5.2 Немного о топологии графа

Граф — одномерный объект, поэтому его топология довольно проста. Однако она не совсем пуста. Так, графы, — как и произвольные топологические пространства, — представляются в виде несвязного объединения своих

компонент связности. Разумеется, в первую очередь интерес представляет топология связных графов.

Граф называется *эйлеровым*, если валентность всех вершин в нем четна. Остовный подграф в графе называется *эйлеровым подграфом*, если он является эйлеровым графом. Например, в треугольнике  $C_3$  есть два эйлеровых подграфа: пустой набор ребер и набор, состоящий из всех трех ребер, т.е. сам граф  $C_3$ .

Заметим, что всякий эйлеров подграф разбивается в объединение простых циклов, не имеющих общих ребер (отдельная вершина также образует такой цикл; длина его равна 0). Действительно, возьмем какой-нибудь простой цикл, содержащийся в данном эйлеровом подграфе. Такой цикл всегда существует (докажите!). Выкинув ребра, входящие в выбранный цикл, мы снова получаем эйлеров подграф, поскольку количество ребер, проходящих через каждую вершину, остается четным.

**Задача 5.1.** Приведите пример эйлерова графа, ребра которого можно разбить на простые циклы тремя различными способами.

Рассмотрим векторное пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  над полем  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  вычетов по модулю 2, натянутое на все ребра графа как на образующие. Любое подмножество в множестве  $E(G)$  всех ребер графа  $G$  можно считать вектором в этом пространстве. Координата такого вектора, соответствующая ребру  $e$ , равна нулю, если ребро  $e$  не входит в подмножество, и равна 1 в противном случае. Наоборот, каждому вектору однозначно сопоставляется набор ребер графа. Размерность пространства  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  равна  $|E(G)|$  — числу ребер в графе.

Множество  $\mathcal{C}(G)$  всех эйлеровых подграфов в  $G$  образует векторное подпространство в этом пространстве. Действительно, рассмотрим два эйлеровых подграфа и произвольную вершину графа. В сумме над  $\mathbb{Z}_2$  этих эйлеровых подграфов ребра, проходящие через выбранную вершину, аннигилируются попарно. Поэтому число неаннигилировавших ребер четно. Размерность векторного пространства эйлеровых циклов в графе  $G$  обозначается  $b_1(G)$  и называется *первым числом Бетти*, или *цикломатическим числом*.

Ученым языком, это число равно числу образующих в первой группе гомологий графа. Число компонент связности в графе называют также *нулевым числом Бетти*; оно обозначается через  $b_0(G)$ . Это — число образующих нулевой группы гомологий.

**Теорема 5.2.1** (Эйлер). *Первое число Бетти связного графа равно*

$$b_1(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1.$$

Это утверждение можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа.

Для доказательства теоремы Эйлера заметим, во-первых, что если граф  $G$  — дерево, то величины слева и справа от знака равенства равны 0. Действительно, непустых эйлеровых подграфов в дереве нет, а число ребер в нем

больше числа вершин на 1. Наоборот, если цикломатическое число данного связного графа равно 0, то этот граф — дерево. Действительно, любой простой цикл в графе — эйлеров подграф в нем.

Пусть теперь теорема Эйлера доказана для всех связных графов с цикломатическим числом  $k$ . Возьмем граф  $G$ , в котором  $|E(G)| - |V(G)| + 1 = k + 1$ . Выкинув из него произвольное ребро  $e$ , стирание которого не нарушает связности графа, мы получим граф с цикломатическим числом  $k$ . Рассмотрим в  $\mathcal{C}(G)$  подпространство эйлеровых подграфов, не содержащих ребро  $e$ . Это подпространство совпадает с пространством  $\mathcal{C}(G'_e)$  эйлеровых подграфов в графе  $G'_e$ , поэтому его размерность равна  $k$ .

С другой стороны, поскольку выкидывание ребра  $e$  не нарушает связности графа  $G$ , через  $e$  проходит хотя бы один цикл, а значит,  $e$  содержится хотя бы в одном эйлеровом подграфе. Сумма над  $\mathbb{Z}_2$  любых двух таких эйлеровых подграфов не содержит  $e$ , следовательно, лежит в  $\mathcal{C}(G'_e)$ . Тем самым, пространство  $\mathcal{C}(G)$  является прямой суммой пространств  $\mathcal{C}(G'_e)$  и одномерного векторного пространства, натянутого на произвольный вектор, представленный циклом, содержащим ребро  $e$ . Поэтому его размерность равна  $k + 1$ , и теорема Эйлера доказана.  $\square$

### 5.3 Многочлен Пенроуза\*

Вот еще один, по-видимому, чрезвычайно важный, инвариант графов.

Для любого разбиения множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  на два непересекающихся подмножества  $V(G) = V_1 \sqcup V_2$  подмножество всех ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , называется *коциклом* в  $G$ . В  $\mathcal{C}_3$  коциклы — это пустое подмножество ребер, а также все пары ребер. Обозначим через  $\mathcal{K}(G)$  множество всех коциклов.

В пространстве  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  есть невырожденное скалярное произведение со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ : скалярное произведение двух наборов ребер равно четности числа элементов в пересечении этих наборов.

**Теорема 5.3.1** (Веблен, 1912). *Множество коциклов  $\mathcal{K}(G)$  является векторным подпространством в  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$ , ортогональным подпространству эйлеровых подграфов  $\mathcal{C}(G)$  относительно этого скалярного произведения:*

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{K}^\perp(G), \quad \mathcal{K}^\perp(G) = \mathcal{C}(G).$$

Для доказательства теоремы Веблена заметим, во-первых, что любой коцикл пересекается с любым эйлеровым подграфом по четному числу ребер. Действительно, пусть коцикл сопоставлен разбиению множества вершин графа на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ . Разобьем эйлеров подграф в объединение циклов, не имеющих общих ребер. В каждом цикле число ребер, соединяющих вершины из  $V_1$  с вершинами из  $V_2$ , четно — если идти по циклу в выбранном направлении, то число переходов из  $V_1$  в  $V_2$  равно числу переходов из  $V_2$  в  $V_1$ . Поэтому четно и число таких ребер в

эйлеровом подграфе, а значит, скалярное произведение эйлерова подграфа и коцикла равно нулю.

Количество способов, которыми множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, равно  $2^{|V(G)|-1}$ . Поэтому множество всех коциклов состоит из  $2^{|V(G)|-1}$  элементов. С другой стороны, согласно формуле Эйлера, подпространство, ортогональное пространству эйлеровых подграфов, имеет размерность  $|V(G)| - 1$ , а значит оно состоит из  $2^{|V(G)|-1}$  элементов. Поскольку оно содержит множество всех коциклов, оно просто совпадает с ним. Теорема Веблена доказана.  $\square$

Например, как мы видели, размерность пространства циклов в  $C_3$  равна 1, а размерность пространства коциклов равна 2. Сумма этих размерностей равна 3 — числу ребер в  $C_3$ .

*Замечание 5.3.2.* Не следует думать, что пространство  $\mathbb{Z}_2^{E(G)}$  является прямой суммой подпространства эйлеровых подграфов и подпространства коциклов, несмотря на дополнительность размерностей этих подпространств. Например, для графа  $C_4$  — цикла на четырех вершинах — сумма всех ребер является одновременно циклом и коциклом. Поэтому подпространство эйлеровых подграфов, состоящее из пустого множества ребер и суммы всех ребер, лежит в пространстве коциклов,  $\mathcal{C}(C_4) \subset \mathcal{K}(C_4)$ . В общем случае, подпространство эйлеровых подграфов и подпространство коциклов могут пересекаться по подпространству положительной размерности.

Для подмножества  $E' \subset E(G)$  множества ребер в  $G$  рассмотрим подпространство

$$B_G(E') = \{C \in \mathcal{C}(G), C \cap E' \in \mathcal{K}(G)\} \subset \mathbb{Z}_2^{E(G)}.$$

*Многочленом Пенроуза* графа  $G$  называется многочлен от одной переменной (которую принято обозначать  $\lambda$ ), определяемый равенством

$$P_G(\lambda) = \lambda \sum_{E' \subset E(G)} (-1)^{|E'|} \lambda^{\dim B_G(E')}.$$

*Пример 5.3.3.* Вычислим многочлен Пенроуза графа  $C_4$ , цикла на четырех вершинах. В этом графе четыре ребра, поэтому вычисление многочлена  $P_{C_4}$  требует перебора всех  $2^4 = 16$  подмножеств в множестве ребер. Мы будем пересекать с каждым из этих подмножеств одномерное пространство циклов, состоящее из пустого набора ребер и множества всех ребер. В свою очередь, размерность пространства коциклов равна  $|V(C_4)| - 1 = 3$ , и оно состоит из пустого набора ребер, набора всех ребер и всех пар ребер.

Для пустого подмножества ребер пересечение с ним любого цикла является коциклом, поэтому вклад пустого подмножества в многочлен Пенроуза равен  $\lambda^1 = \lambda$ .

Вклад любого подмножества из одного ребра равен  $-\lambda^0 = -1$ , поскольку пересечение цикла с таким подмножеством является коциклом только, если исходный цикл пуст. Всего таких подмножеств четыре, поэтому их суммарный вклад равен  $-4$ .

Размерность пространства коциклов, являющихся результатом пересечения пространства циклов с любым подмножеством из двух ребер равна единице. Таких подмножеств шесть, поэтому их суммарный вклад равен  $6\lambda$ .

Суммарный вклад подмножеств из трех ребер равен  $-4$ .

Вклад подмножества, состоящего из всех четырех ребер, равен  $\lambda$ .

Суммируя все вклады, получаем

$$P_{C_4}(\lambda) = 8\lambda(\lambda - 1).$$

## 5.4 Соотношения Татта

Мы показали, что хроматический многочлен графа  $\chi_G(c)$  удовлетворяет соотношению

$$\chi_G(c) = \chi_{G'_e}(c) - \chi_{G''_e}(c)$$

для любого ребра  $e$  в графе  $G$ . Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет *W-функцией* всякий инвариант графов  $f$ , удовлетворяющий соотношению

$$f(G) = f(G'_e) + f(G''_e) \quad (5.2)$$

для любого графа  $G$  и любого ребра  $e$  в нем. Изменение знака  $-$  на  $+$  не играет существенной роли: хроматический многочлен несложно модифицировать так, чтобы он удовлетворял соотношению (5.2). Для этого достаточно умножить его на  $(-1)^{|V(G)|}$ , где  $|V(G)|$  — число вершин в  $G$ , т.е. рассмотреть модифицированный хроматический многочлен  $\tilde{\chi}_G(c) = (-1)^{|V(G)|}\chi_G(c)$ . Мы будем называть равенство (5.2) *соотношением Татта*.

Соотношение Татта мы будем рассматривать уже не для простых графов, а для графов с петлями и кратными ребрами. *Петлей* в графе называется ребро с совпадающими концами. Ребро, не являющееся петлей, называется *звенком*. Если какие-то две вершины в графе соединены несколькими (более чем одним) ребрами, то эти ребра мы называем *кратными*. Как мы уже отмечали, хроматический многочлен можно определить и для таких, непростых, графов, причем для выбранного продолжения соотношения (5.2) продолжают выполняться.

Помимо соотношений Татта хроматический многочлен удовлетворяет также соотношению

$$f(G) = f(G_1)f(G_2) \quad (5.3)$$

в случае, если граф  $G$  является несвязным объединением графов  $G_1$  и  $G_2$ . Татт называет *W-функции*, удовлетворяющие соотношению (5.3), *V-функциями*, а мы будем называть их также *инвариантами Татта*. Для того, чтобы равенства (5.2) и (5.3) имели смысл, необходимо, чтобы в области значений инварианта  $f$  были определены сложение и умножение. Поэтому мы всегда будем предполагать, что эта область значений представляет собой некоторое фиксированное коммутативное кольцо  $K$ . В случае хроматического многочлена кольцо  $K$  является кольцом многочленов от одной

переменной  $c$ ,  $K = \mathbb{Z}[c]$ . Наша задача — доказать теорему Татта, дающую полное описание инвариантов Татта.

*Пример 5.4.1* (сложность графа). Приведем еще один важный пример  $W$ -функции. Напомним, что *остовным деревом* графа  $G$  называется поддерево в нем, содержащее все вершины графа  $G$ . *Сложностью* графа называется число остовных деревьев в нем. Обозначим сложность графа  $G$  через  $C(G)$ . Очевидно, что сложность несвязного графа равна нулю. Сложность графа удовлетворяет соотношению Татта (5.2). Действительно, все остовные деревья в графе  $G$  разбиваются на два класса: не содержащие данное ребро  $e$  и содержащие это ребро. Остовные деревья первого типа находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $G'_e$ , а остовные деревья второго типа — в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа  $G''_e$ .

## 5.5 Теорема Татта

Оба графа в правой части соотношения Татта “проще” графа в его левой части: в них меньше звеньев. Поэтому, применяя соотношение Татта последовательно, мы можем свести вычисление любой  $W$ -функции к ее вычислению на графах без звеньев. Такое вычисление можно понимать как замену любого графа формальной линейной комбинацией графов без звеньев с целыми неотрицательными коэффициентами.

Всякий граф без звеньев является несвязным объединением одновершинных графов с несколькими петлями. Поэтому для задания  $W$ -функции достаточно определить ее на таких графах. Для задания  $V$ -функции достаточно определить ее на одновершинных графах с произвольным количеством петель: на несвязных объединениях таких графов значение  $V$ -функции будет произведением ее значений на связных компонентах.

*Пример 5.5.1.* Хроматический многочлен однозначно определяется условиями (5.2), (5.3) и тем, что на одновершинном графе без петель он равен  $c$ , а на одновершинном графе с одной и более петлей он равен нулю.

Сложность графа однозначно определяется условием (5.2) и тем, что она равна 1 на любом одновершинном графе и 0 на несвязном объединении двух и более одновершинных графов.

Принципиальное значение поэтому имеет следующий вопрос: верно ли, что  $W$ -функция может принимать *любое* значение на несвязном объединении одновершинных графов (соответственно, верно ли что  $V$ -функция может принимать любое значение на одновершинных графах). Другими словами, последовательность упрощений графа с помощью соотношения Татта всегда приводит к линейной комбинации графов без звеньев. Однако таких последовательностей много — верно ли, что результат не зависит от выбранной последовательности?

Например, для графа на рис. 5.2 есть две различные возможности выбрать ребро, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью при-

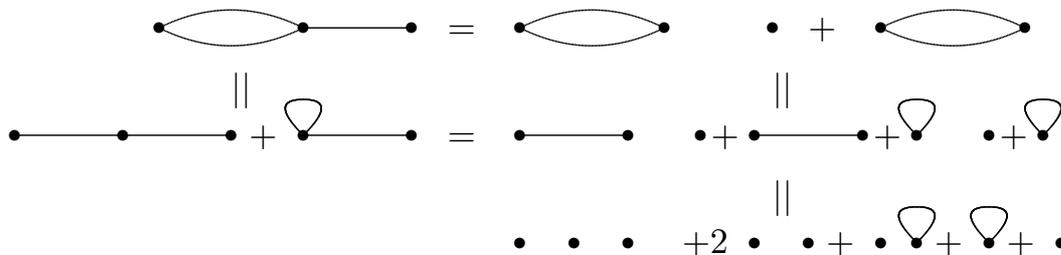


Рис. 5.2: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

ходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

**Теорема 5.5.2** (Татт). *Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует  $W$ -функция (соотв.,  $V$ -функция), принимающая такие значения.*

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

## 5.6 Доказательство теоремы Татта\*

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной  $V$ -функции*. Так мы называем  $V$ -функцию со значениями в кольце многочленов  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  от бесконечного числа переменных, такую, что любую другую  $V$ -функцию со значением в произвольном кольце  $K$  можно получить подстановкой вместо переменных  $s_i$  подходящих элементов кольца  $K$ . Заметим, что элементами кольца  $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$  являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных  $s_i$  с целыми коэффициентами.

Такую функцию можно построить следующим образом. Напомним, что *остовным подграфом* графа называется всякий его подграф, содержащий все его вершины. Тем самым, у каждого графа  $G$  ровно  $2^{|E(G)|}$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_G(s_0, s_1, \dots) = \sum_{E' \subset E(G)} s_0^{i_0(G(E'))} s_1^{i_1(G(E'))} \dots \tag{5.4}$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам  $E'$  множества ребер  $E(G)$ ; через  $G(E')$  обозначен соответствующий остовный подграф, а  $i_m(G(E'))$  — число связных компонент в  $G(E')$  с первым числом Бетти  $m$  (т.е.,  $i_0(G(E'))$  — число деревьев среди связных компонент,  $i_1(G(E'))$  — число связных компонент с одним простым циклом и т.д.).

**Лемма 5.6.1.** *Функция  $U_G$  является инвариантом Татта, т.е.*

$$U_G = U_{G'_e} + U_{G''_e}$$

для любого графа  $G$  и любого звена  $e$  в нем.

Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции  $U_G$ .

*Пример 5.6.2.* Пусть  $G = C_3$  — граф-треугольник. Тогда у него  $2^3 = 8$  остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию  $U_{C_3}$  равен  $s_0^3$ . Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому  $3s_0^2$ . Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен  $3s_0$ . Наконец, сам граф  $C_3$  состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен  $s_1$ . Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

**Доказательство леммы 5.6.1** Фиксируем граф  $G$  и звено  $e$  в нем. Остовные подграфы графа  $G$ , не содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $G'_e$ . При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения  $i_0, i_1, \dots$  совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа  $G$ , содержащие ребро  $e$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа  $G''_e$ . При этом соответствии в каждом остовном подграфе в  $G''_e$  стягивается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его связных компонент. Лемма доказана.  $\square$

Покажем теперь, что придавая различные значения переменным  $s_i$  мы можем превратить  $U$  в  $V$ -функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Обозначим одновершинный граф с  $n$  петлями через  $X_n$ . Выпишем значения функции  $U$  на  $X_n$ . Имеем

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2;$$

вообще

$$U(X_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_j.$$

Действительно, в графе  $X_n$  имеется  $2^n$  остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из  $k$  петель равно  $\binom{n}{k}$ , и его цикломатическое число равно  $k$ .

Из этих равенств мы можем выразить  $s_i$ :

$$s_0 = U(X_0), s_1 = U(X_1) - U(X_0), \dots, s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \dots$$

Тем самым, для произвольного набора значений  $U(X_j) = t_j$ , мы можем восстановить значения  $s_i$ , а значит и значение функции  $U$  на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$

Теорема Татта доказана.  $\square$

Проверим проведенное выше вычисление значения функции  $U$  на графе  $C_3$ . Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0^3} + 3U_{X_0^2} + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

## 5.7 Новые примеры инвариантов Татта

Результаты предыдущего раздела означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив в универсальную функцию  $U_G$  произвольные значения вместо параметров  $s_i$ , либо указав значения инварианта на графах  $X_n$ , — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот что получается при некоторых специальных подстановках.

*Пример 5.7.1* (ребра). Если мы положим в универсальном инварианте  $U$  все  $s_i = 1$ , то получим  $V$ -функцию, принимающую на графе  $G$  значение  $2^{|E(G)|}$ .

*Пример 5.7.2* (дихроматический многочлен и дихромат). Дихроматический многочлен  $Q_G(t, z)$  зависит от двух переменных, и определяется подстановкой  $s_k = tz^k$  в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе  $X_n$  равно

$$Q_{X_n}(t, z) = t(1+z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.

Подстановка  $t = -c$ ,  $z = -1$  превращает дихроматический многочлен в хроматический.

*Дихромат* графа  $G$  определяется формулой

$$\chi_G(x, y) = (x-1)^{-b_0(G)} Q_G(x-1, y-1),$$

или

$$\chi_G(x, y) = (x-1)^{-b_0(G)} \sum_{E' \subset E(G)} (x-1)^{b_0(E')} (y-1)^{b_1(E')}.$$

*Пример 5.7.3* (поточковый многочлен). Подстановка  $z = -m$ ,  $t = -1$  превращает дихроматический многочлен в *поточковый*, который мы обозначим через  $F_G(m)$ :

$$F_G(m) = Q_G(-1, -m).$$

Объясним причину такого названия. Обозначим через  $\mathbb{Z}_m$  группу вычетов по модулю  $m$ . *Цепью* над  $\mathbb{Z}_m$  в графе  $G$  называется формальная линейная

комбинация ребер графа  $G$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}_m$ , т.е. элемент группы  $\mathbb{Z}_m^{E(G)}$ . Ориентируем ребра графа  $G$  произвольным образом. Тогда *границей* цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа  $G$ , в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется *циклом*, если у нее нулевая граница (т.е. коэффициенты границы при каждой вершине равны нулю). Понятие эйлерова подграфа совпадает с понятием цикла над  $\mathbb{Z}_2$ . При этом выбор ориентации графа не важен, так как в группе  $\mathbb{Z}_2$  всякий элемент совпадает со своим противоположным.

Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид  $a_1e_1 + a_2e_2$ , где символами  $e_1, e_2$  обозначены (ориентированные) ребра графа, а  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$ . Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами  $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$  в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами  $a_1 - a_2, a_2 - a_1$ , если ориентации ребер противоположны. Если оба ребра ориентированы одинаково, то циклы имеют вид  $ae_1 - ae_2$ , а если ориентация ребер противоположна, то циклы имеют вид  $ae_1 + ae_2$ .

**Утверждение 5.7.4.** *Значение многочлена  $F_G(m)$  при целом  $m \geq 2$  равно числу всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$  в произвольной ориентации ребер графа  $G$ , умноженному на  $(-1)^{b_1(G)+1}$ .*

Всюду ненулевой цикл можно понимать как “поток” в графе, а его коэффициенты при ребрах как “величину тока” вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим прежде всего, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Ясно, что такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Проверим теперь, что число всюду ненулевых циклов над  $\mathbb{Z}_m$ , умноженное на  $(-1)^{b_1(G)}$ , является  $V$ -функцией. Мультипликативность числа всюду ненулевых циклов очевидна. Умножение на  $(-1)^{b_1(G)}$  не меняет этого свойства, поскольку при несвязном объединении графов их цикломатические числа складываются.

Фиксируем граф  $G$ , ориентацию в нем и ребро  $e \in G$ . Для проверки соотношения Татта заметим, что всякому всюду ненулевому циклу в графе  $G''_e$  можно сопоставить цикл в графе  $G$ . Действительно, рассмотрим цепь в  $G$ , отвечающую выбранному циклу в  $G''_e$ , и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру  $e$  в  $G$  коэффициент, равный, с точностью

до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру  $e$ . Эти два значения отличаются знаком, и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра  $e$ . Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в  $G''_e$  задает цикл в  $G'_e$ . Тем самым, число всюду ненулевых циклов в  $G$  равно разности числа всюду ненулевых циклов в  $G''_e$  и  $G'_e$ . Цикломатические числа графов  $G$  и  $G''_e$  совпадают, а цикломатическое число графа  $G'_e$  меньше их на единицу. Поэтому после умножения числа всюду ненулевых циклов на  $(-1)^{b_1(G)}$  получаем функцию, удовлетворяющую соотношению Татта.

Осталось проверить ее совпадение с функцией  $F$  на графах  $X_n$ . Но мы знаем, что

$$F_{X_n}(m) = -(1 - m)^n,$$

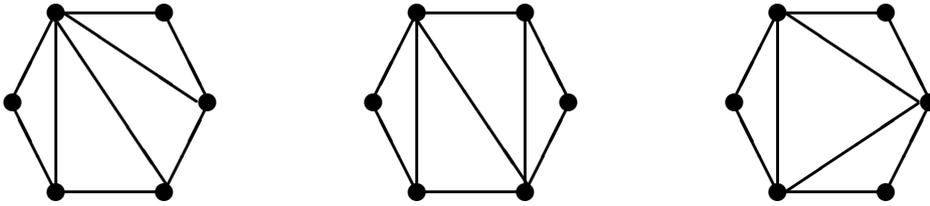
что после умножения на  $(-1)^{b_1(V(G))+1} = (-1)^{n+1}$  в точности равно  $(m - 1)^n$  — числу всюду ненулевых циклов в  $X_n$  над  $\mathbb{Z}_m$  (поскольку любая расстановка ненулевых элементов группы  $\mathbb{Z}_m$  на петлях графа  $X_n$  является циклом), что и требовалось.  $\square$

*Пример 5.7.5 (эйлеровость).* Вот  $V$ -функция со значениями в  $\mathbb{Z}_2$ , выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется *эйлеровым*, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение  $V$ -функции  $\varepsilon$  равным 1 на всех графах  $X_n$ . Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе  $G$  равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является *топологической* характеристикой — она не меняется при стягивании ребра. Поэтому если граф  $G$  эйлеров, то граф  $G''_e$  тоже эйлеров для любого ребра  $e \in E(G)$ , а граф  $G'_e$  неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф  $G$  неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра  $e$ , то и оба графа  $G'_e$  и  $G''_e$  неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра  $e$ , то оба графа  $G'_e$  и  $G''_e$  эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G'_e) + \varepsilon(G''_e).$$

Заметим также, что эйлеровость графа совпадает с числом всюду ненулевых циклов в нем с коэффициентами в группе  $\mathbb{Z}_2$ . Действительно, единственный способ приписать всем ребрам графа ненулевые значения в  $\mathbb{Z}_2$  состоит в том, чтобы сопоставить каждому ребру значение 1. В результате мы получим цикл в том и только в том случае, если в каждой вершине сходится четное число ребер, т.е. если наш граф — эйлеров. Тем самым, этот пример является частным случаем предыдущего.

Рис. 5.3: Различные триангуляции цикла  $C_6$ 

## 5.8 Задачи

**Задача 5.2.** Рассуждая по индукции, найдите  $\chi_{C_n}(c)$  для произвольного цикла длины  $n$ .

**Задача 5.3.** Пусть  $G$  — граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из  $G$  добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа  $G$  умножением на  $c - 1$ .

**Задача 5.4.** Пользуясь теоремой 5.1.1, подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на  $n$  вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены “попарно непересекающиеся диагонали”, разбивающие их на треугольники, см. рис. 5.3. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

**Задача 5.5.** Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена  $\chi_G(c)$  графа  $G$  с  $n$  вершинами (коэффициент при  $c^{n-1}$ ) равен числу ребер в  $G$ , взятому со знаком минус.

**Задача 5.6.** Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются — коэффициент при  $c^k$  имеет знак  $(-1)^{n-k}$  или равен нулю.

**Задача 5.7.** Дайте доказательство теоремы Татта, основанное на том, что операции удаления/стягивания двух различных звеньев в графе коммутируют между собой.

**Задача 5.8.** Ориентацией графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно  $|\chi_G(-1)|$  — модулю значения хроматического многочлена в точке  $-1$ . Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа  $A_2 = K_2$  имеем  $\chi_{A_2}(-1) = 2$ , и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь,  $\chi_{K_3}(-1) = -6$ , и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими. Для доказательства воспользуйтесь тем, что количество ациклических ориентаций удовлетворяет соотношению Татта (предварительно доказав этот факт).

*Задача 5.9.* Подсчитайте первое число Бетти а) для деревьев; б) для циклов  $C_n$ ; в) для полных графов  $K_n$ ; г) для триангуляций (см. задачу 5.4).

*Задача 5.10.* \* Вычислите многочлен Пенроуза для всех графов с не более, чем 4 вершинами.

*Задача 5.11.* \* Докажите, что многочлен Пенроуза связного графа, в котором есть *перешеек* (ребро, при выкидывании которого граф становится несвязным) равен нулю.

*Задача 5.12.* Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность связного графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины  $n$ ?

*Задача 5.13.* Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

*Задача 5.14.* Докажите, что потоковый многочлен любого дерева тождественно равен 0. Докажите, что это справедливо и для любого графа, имеющего вершину валентности 1.

*Задача 5.15.* Понятие цикла над группой  $\mathbb{Z}_m$  можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над  $\mathbb{Z}_m$ , но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с  $m$  элементами.

*Задача 5.16.* Остовный подграф графа  $G$  на  $2n$  вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или *1-фактором*, если он состоит из  $n$  ребер, никакие два из которых не имеют общих концов. Например, в квадрате  $C_4$  два совершенных паросочетания, а в полном графе  $K_4$  их три. Рассмотрим  $V$ -функцию, значение которой на графе  $X_n$  равно

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n + 1).$$

Докажите, что значение этой  $V$ -функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа  $K_4$  — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта  $U$  на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^4 + 6s_0^3 + 15s_0^2 + 4s_0s_1 + 16s_0 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа  $K_4$ . Например, в множестве его ребер имеется  $\binom{6}{3} = 20$  трехреберных подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник  $C_3$ , объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из трех компонент связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен  $4s_0s_1 + 16s_0^3$ . Вычисление остальных слагаемых еще проще.

Воспользовавшись выражениями для  $s_n$

$$\begin{aligned} s_0 &= t_0, & s_1 &= t_1 - t_0, \\ s_2 &= t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 &= t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{aligned}$$

через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.

*Задача 5.17.* Подсчитайте число совершенных паросочетаний в а) цепочках  $A_n$ ; б) циклах  $C_n$ ; в) полных графах  $K_n$ ; г) в триангуляциях (см. задачу 5.4).

*Задача 5.18.* Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.

*Задача 5.19.* Добавьте в таблицу всех связных графов с  $\leq 5$  вершинами значения всех введенных выше инвариантов графов.

## Глава 6

# Статистические модели инвариантов

Определения многих инвариантов графов пришли из физики. Точнее говоря, из той области физики, которая называется статистической физикой. Как правило, статистическая физика занимается однородными объектами сложной природы — кристаллами. С точки зрения графов кристаллы (решетки) образуют весьма специальный класс графов. Несмотря на это, определения физически значимых величин допускают перенос на произвольные графы.

Статистический характер определяемых инвариантов предполагает, что граф может находиться во множестве различных состояний, и инвариант определяется суммированием некоторой величины (“энергии”) по всем возможным состояниям.

## 6.1 Спинорные модели

Пусть  $G$  — граф,  $e \in E(G)$  — ребро в этом графе, и каждый конец этого ребра покрашен в один из  $c$  цветов. Пусть  $W$  — симметричная  $c \times c$ -матрица,

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1c} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{c1} & w_{c2} & \dots & w_{cc} \end{pmatrix}.$$

Сопоставим ребру  $e$  значение  $w_{i,j}$ , где  $i, j$  — цвета, в которые покрашены концы ребра  $e$ .

*Пример 6.1.1.* Пусть

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая спинорная функция перечисляет независимые подмножества в графе  $G$ . (Подмножество вершин  $V' \subset V(G)$  графа  $G$  называется *независимым*, если никакие две вершины из  $V'$  не соединены ребром.) Действительно, рассмотрим раскраску множества вершин  $V(G)$  графа  $G$  в два цвета. Такая раскраска дает вклад 1 в статистическую сумму, если и только если подмножество вершин, окрашенных цветом 2, является независимым; в противном случае вклад раскраски равен 0. Поэтому суммарный вклад всех раскрасок равен количеству независимых подмножеств в  $V(G)$ .

Количество независимых подмножеств можно сделать более тонким инвариантом графов, разбив подмножества в соответствии с их величиной.

**Определение 6.1.2.** *Многочленом независимости* графа  $G$  называется многочлен

$$I_G(q) = \sum_k i_k(G) q^k$$

где  $i_k$  — количество независимых множеств из  $k$  вершин в  $V(G)$ .

Очевидно, многочлен независимости является мультипликативным:  $I_{G \sqcup H} = I_G I_H$ .

**Задача 6.1.** Найдите многочлен независимости для (а) полного графа  $K_n$ ; (б) 1-слойной решетки порядка  $n$ .

### 6.1.1 Пример: спинорная модель для хроматического многочлена

Сопоставим ребру  $e$  величину, равную 1, если его концы покрашены в различные цвета, и равную 0 в противном случае. Рассмотрим теперь отображение множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  в множество  $S_c = \{1, 2, \dots, c\}$  цветов, состоящее из  $c$  цветов. По такому отображению  $f$  (“раскраске множества вершин”) поставим на каждое ребро  $e$  число  $e_f$ , равное 0 или 1, в зависимости от того, покрашены ли концы ребра  $e$  в один цвет или различные цвета. Сопоставим отображению  $f$  число  $A_f$ , равное произведению чисел  $e_f$  по всем ребрам  $e$  графа  $G$ :

$$A_f = \prod_{e \in E(G)} e_f.$$

Ясно, что значение хроматического многочлена графа в точке  $c$  равно сумме чисел  $A_f$  по всем раскраскам  $f$  вершин графа,

$$\chi_G(c) = \sum_{f: V(G) \rightarrow S_c} A_f = \sum_{f: V(G) \rightarrow S_c} \prod_{e \in E(G)} e_f.$$

Это равенство можно воспринимать как “статистическое определение” хроматического многочлена. Раскраску вершин графа мы воспринимаем как “состояние” графа (представляющую собой совокупность состояний его вершин). Каждому состоянию  $f$  графа мы сопоставляем некоторую величину (число  $A_f$ ), и суммируем эти величины по всем возможным состояниям. Симметричная квадратная матрица, описывающая эту спинорную модель, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В ней по диагонали стоят нули, а вне диагонали — единицы. Подобная интерпретация восходит к модели Поттса, к описанию которой мы и переходим.

### 6.1.2 Модель Поттса

В модели Поттса мы рассматриваем раскраски вершин графа в  $c$  цветов и сопоставляем каждому ребру графа одно из чисел  $a$  или  $b$  в зависимости от того, окрашены ли концы этого ребра в один цвет или в разные цвета. Другими словами, в модели Поттса в матрице  $W$  спинорной модели стоят

одинаковые элементы по диагонали, и одинаковые элементы вне диагонали:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Модель Поттса порождает хроматический многочлен, если положить  $a = 0, b = 1$ . Иногда под моделью Поттса понимают более частную ситуацию, в которой  $a \neq 0, b = 1/a$ .

### 6.1.3 Модель Изинга

Модель Поттса превращается в модель Изинга в случае, если число цветов  $s$  равно 2. Изначально модель Изинга предназначена для описания ферромагнетиков. Атомы в таком ферромагнетике (обычно представляемом как двумерная квадратная решетка) могут находиться в одном из двух состояний (спинов) — иметь спин  $+1$  или  $-1$ . Состояние решетки — выбор спина каждого из составляющих ее атомов. При совпадении спинов на концах ребра решетки энергия связи этого ребра считается равной  $-L$ , если же спины противоположны, то энергия равна  $L > 0$ . Энергия состояния — сумма энергий всех ребер графа. Вероятность, с которой кристалл находится в данном состоянии, считается пропорциональной экспоненте энергии.

## 6.2 Реберная статистика

Построенный нами на предыдущей лекции универсальный инвариант Татта  $U$  определялся как сумма некоторых мономов, каждый из которых соответствовал некоторому остовному подграфу, т.е. подмножеству множества ребер графа. Суммирование ведется по всем подмножествам в множестве ребер. Тем самым, этот инвариант можно рассматривать как статсумму. Действительно, каждое из ребер графа  $G$  может находиться в одном из двух состояний: оно либо входит в остовный подграф, либо не входит в него. Тем самым, суммирование по подмножествам множества ребер можно интерпретировать как суммирование по всем возможным состояниям.

В универсальном инварианте  $U$  выбранному состоянию соответствует моном  $\prod_{cc(E')} s_{i(cc(E'))}$ , где умножение идет по всем компонентам связности  $cc(E') \in CC(G|_{E'})$  остовного подграфа  $E'$ , а через  $i(cc(E'))$  обозначено цикломатическое число графа  $cc(E')$ . Как следствие, любой мультипликативный инвариант графов, удовлетворяющий соотношению Татта, представляется в виде суммы некоторых величин, отвечающих остовным подграфам. Посмотрим, что это за величины, на примерах известных нам инвариантов Татта.

**Теорема 6.2.1.** *Модифицированный хроматический многочлен допускает представление в виде*

$$\tilde{\chi}_G(c) = \sum_{E' \subset E(G)} \prod_{cc(E')} (-1)^{i(cc(E'))} c.$$

Например, для цикла на 3 вершинах (треугольника) имеем

$$\chi_{C_3}(c) = (-c)^3 + 3c^2 - 3c + c = -c^3 + 3c^2 - 2c = -\chi_{C_3}(c).$$

**Задача 6.2.** Вычислите с помощью теоремы 6.2.2 хроматический многочлен (а) цикла на 4 вершинах  $C_4$ ; (б) полного графа на 4 вершинах  $K_4$  и проверьте совпадение результатов с уже вычисленными нами значениями.

**Теорема 6.2.2.** *Потоковый многочлен допускает представление в виде*

$$F_G(m) = \sum_{E' \subset E(G)} \prod_{cc(E')} (m - 2)^{i(cc(E'))}.$$

### 6.3 Биномиальность инвариантов

**Теорема 6.3.1.** *Хроматический многочлен удовлетворяет уравнению*

$$\chi_G(x + y) = \sum_{I \subset V(G)} \chi_{G|_I}(x) \chi_{G|_{V(G) \setminus I}}(y).$$

Здесь через  $G|_I$  обозначен подграф в  $G$ , индуцированный подмножеством вершин  $I \subset V(G)$ .

Действительно, пусть  $X$  — множество цветов, состоящее из  $x$  цветов,  $Y$  — множество цветов, состоящее из  $y$  цветов. Хроматический многочлен в левой части равенства перечисляет правильные раскраски вершин графа  $G$  в цвета из множества  $X \sqcup Y$ . Каждая такая раскраска разбивает множество вершин графа на два подмножества — подмножество вершин  $I$ , состоящее из вершин, окрашенных в цвета из множества  $X$ , и дополнительное к нему подмножество, состоящее из вершин, окрашенных в цвета из множества  $Y$ . Эта раскраска определяет правильную раскраску вершин графа  $G|_I$  в цвета из множества  $X$  и правильную раскраску вершин графа  $G|_{V(G) \setminus I}$  в цвета из множества  $Y$ . Таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между правильными раскрасками множества вершин графа  $G$  в цвета из множества  $X \sqcup Y$  и правильными раскрасками пар дополнительных друг к другу подмножеств множества вершин — первого в цвета из множества  $X$  и второго — в цвета из множества  $Y$ , что и доказывает теорему.

Если  $G$  — граф без ребер, то тем же свойством обладает любой его подграф. Для такого графа на  $n$  вершинах утверждение теоремы сводится к биномиальному равенству

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Если же  $G$  — полный граф на  $n$  вершинах, то мы получаем менее известное равенство

$$(x+y)(x+y-1)\dots(x+y-n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x-1)\dots(x-n+1)y(y-1)\dots(y-n+k+1)$$

Это равенство утверждает, что последовательность многочленов

$$1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots, x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1), \dots$$

как и последовательность многочленов  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  является биномиальной.

Еще одним примером биномиальных инвариантов графов служат многочлены Абеля.

**Теорема 6.3.2.** *Многочлен Абеля удовлетворяет уравнению*

$$A_G(x+y) = \sum_{I \subset V(G)} A_{G|_I}(x) A_{G|_{V(G) \setminus I}}(y).$$

Здесь через  $G_I$  обозначен подграф в  $G$ , индуцированный подмножеством вершин  $I \subset V(G)$ .

Для доказательства рассмотрим остовный лес в графе  $G$ . Такой лес дает вклад в коэффициент при  $(x+y)^k$  в многочлене Абеля в левой части равенства, где  $k$  — количество деревьев в лесе. Эти  $k$  деревьев распределяются по двум подмножествам вершин  $I$  и  $V(G) \setminus I$ . В множество  $I$  попадет  $i$  деревьев, а в множество  $V(G) \setminus I$  —  $(k-i)$  деревьев могут  $\binom{k}{i}$  способами; такое распределение дает вклад в коэффициент при  $x^i y^{k-i}$  в правой части равенства, совпадающий с вкладом исходного остовного леса в коэффициент при  $(x+y)^k$ . Приняв во внимание то, что всякой паре остовных лесов в графах  $G|_I$  и  $G|_{V(G) \setminus I}$  однозначно сопоставляется остовный лес в  $G$ , мы получаем доказательство теоремы.

## Глава 7

# Группа автоморфизмов графа

Всякий граф изоморфен сам себе — тождественное отображение множества его вершин на себя осуществляет изоморфизм. Однако зачастую оказывается, что этот изоморфизм не единственный, т.е. у графа есть нетривиальные симметрии. Изоморфизмы графа на себя называются *автоморфизмами*. Множество всех автоморфизмов графа образует группу — подгруппу в группе перестановок всех его вершин. Эта группа является инвариантом графа. Однако вычислять этот инвариант сложно, и даже если мы его вычислили, им трудно пользоваться: сложно проверить, являются ли две данные группы изоморфными. В то же время гораздо более грубый инвариант графов — количество его автоморфизмов, т.е. количество элементов в этой группе, — оказывается и легче вычислимым, и, как мы увидим, чрезвычайно полезным при перечислении графов.

## 7.1 Автоморфизмы графов

Любая перестановка множества вершин полного графа  $K_n$  на  $n$  вершинах задает автоморфизм этого графа. Тем самым, группа автоморфизмов полного графа  $K_n$  совпадает с группой  $S_n$  перестановок  $n$ -элементного множества. Она содержит  $n!$  элементов. Группа автоморфизмов любого графа с  $n$  вершинами является подгруппой в группе  $S_n$ . Согласно теореме Лагранжа, утверждающей, что *порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы*, порядок группы автоморфизмов графа делит  $n!$ . Напомним, что *порядком* группы называется число элементов в ней.

Несложно найти порядок группы автоморфизмов цепочки на  $n$  вершинах  $A_n$ , а также саму эту группу. Действительно, если  $n = 1$ , то в группе один элемент — тождественный автоморфизм. Если же  $n \geq 2$ , то группа автоморфизмов состоит из двух элементов — тождественного автоморфизма и отражения относительно середины цепочки. Поскольку единственная группа из двух элементов это группа  $\mathbb{Z}_2$  вычетов по модулю 2, эта группа и является группой автоморфизмов цепочки  $A_n$  при  $n \geq 2$ .

Очевидно, что любой автоморфизм графа сохраняет валентность его вершин — вершина валентности  $k$  может перейти только в вершину валентности  $k$ . Так, в цепочке  $A_n$  ее конечная вершина может перейти только в конечную вершину, а внутренняя — во внутреннюю. Это наблюдение помогает уточнить утверждение о том, что порядок группы автоморфизмов графа делит факториал числа его вершин.

**Теорема 7.1.1.** Пусть в графе  $G$  с  $n$  вершинами имеется  $n_0$  вершин валентности 0,  $n_1$  вершин валентности 1, ...,  $n_n$  вершин валентности  $n$ ,  $n = n_0 + n_1 + \dots + n_n$ . Тогда порядок группы автоморфизмов графа  $G$  является делителем числа  $n_0!n_1!\dots n_n!$ .

Действительно, группа автоморфизмов такого графа является подгруппой в произведении групп  $S_{n_0} \times S_{n_1} \times \dots \times S_{n_n}$ .

**Задача 7.1.** Докажите, что при  $n = n_0 + n_1 + \dots + n_n$ ,  $n_i \geq 0$ , число  $n!$  делится на произведение факториалов  $n_0!n_1!\dots n_n!$ .

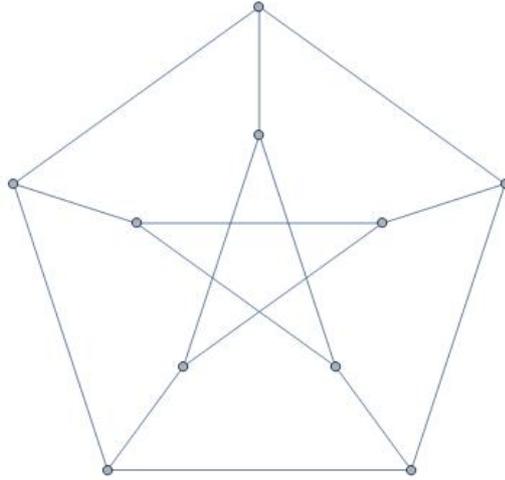


Рис. 7.1: Граф Петерсена

Впрочем, подобного рода улучшение не всегда приводит к более точным оценкам порядка группы автоморфизмов графа. Так, в графе  $C_n$ , цикле на  $n$  вершинах,  $n \geq 3$ , все вершины имеют валентность 2, поэтому в нем  $n_2 = n$ , а все остальные  $n_i = 0$ . В то же время, группа автоморфизмов графа  $C_n$  состоит из  $2n$  элементов: всякий элемент в ней является либо сдвигом вершин по циклу (таких сдвигов  $n$  штук), либо композицией такого сдвига и отражения цикла относительно диаметра, проходящего через вершину (таких композиций еще  $n$  штук). Если  $n$  достаточно велико, то порядок  $2n$  группы автоморфизмов гораздо меньше, чем  $n!$ , хотя, конечно, и делит это число. Группа автоморфизмов графа  $C_n$  имеет специальное название — она называется *группой диэдра* порядка  $n$ .

Вот еще один способ подсчитать количество автоморфизмов цикла  $C_n$ . Отметим какую-нибудь вершину в цикле. Его автоморфизм однозначно определяется тем, в какую вершину он переводит отмеченную и две соседние с ней; для каждого выбора образа отмеченной вершины есть ровно два автоморфизма с таким образом.

**Задача 7.2.** Найдите порядок группы автоморфизмов графов (а) квадрата с диагональю; (б) ребер куба; (в) ребер  $n$ -мерного куба; (г) ребер додекаэдра; (д) графа Петерсена, см. рис. 7.1.

**Задача 7.3.** Докажите, что любой автоморфизм связного двудольного графа либо переводит каждую его долю в себя, либо меняет две доли местами. Последнее возможно только, если размеры долей одинаковы.

**Задача 7.4.** Найдите порядок группы автоморфизмов (а) полного двудольного графа  $K_{m,n}$  при  $m \neq n$ ; (б) полного двудольного графа  $K_{n,n}$ . Проверьте, что найденный Вами порядок группы автоморфизмов графа  $K_{2,2}$  совпадает с порядком группы автоморфизмов цикла  $C_4$  (эти два графа изоморфны).

Граф называется *вершинно-транзитивным*, если для любой пары его вершин существует автоморфизм графа, переводящий первую вершину во

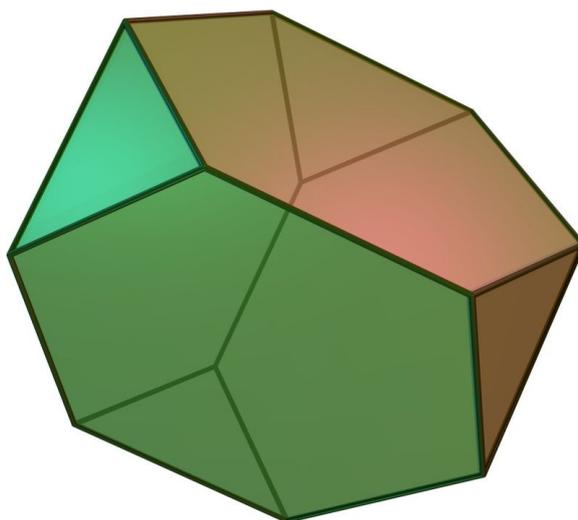


Рис. 7.2: Усеченный тетраэдр

вторую. Цикл представляет собой пример вершинно-транзитивного графа. Разумеется, вершинно-транзитивный граф регулярен — все его вершины имеют одинаковую валентность.

*Задача 7.5.* Проверьте, что усеченный тетраэдр (см. рис. 7.2) является вершинно-транзитивным. Найдите порядок группы его автоморфизмов.

## 7.2 Автоморфизмы деревьев

Вычислять группы автоморфизмов деревьев проще, чем группы автоморфизмов произвольных графов. Начнем с вычисления порядков групп автоморфизмов некоторых семейств деревьев.

*Задача 7.6.* Найдите порядок группы автоморфизмов звезды на  $n$  вершинах.

*Замечание 7.2.1.* Обратите внимание на то, что звезда на  $n$  вершинах представляет собой полный двудольный граф  $K_{1,n-1}$ .

*Задача 7.7.* Найдите порядок группы автоморфизмов (а) деревьев серии  $D_n$  на  $n$  вершинах,  $n \geq 5$ , см. рис. 7.3; (б) деревьев серии  $T_{p,q,r}$ ; деревья этой серии имеют  $p + q + r + 1$  вершин и представляют собой одну вершину, к которой приклеено три цепочки — длиной  $p + 1$ ,  $q + 1$ ,  $r + 1$  соответственно.

Обратите внимание на то, что дерево  $D_n$  изоморфно дереву  $T_{1,1,n-3}$  при  $n = 4, 5, 6, \dots$

Теперь мы уже знаем порядки групп автоморфизмов некоторых деревьев и серий деревьев. При вычислении порядка группы автоморфизмов произвольного дерева большую пользу может оказать следующее утверждение.

**Теорема 7.2.2.** *Всякий автоморфизм дерева либо имеет неподвижную вершину, либо меняет местами концы некоторого ребра.*

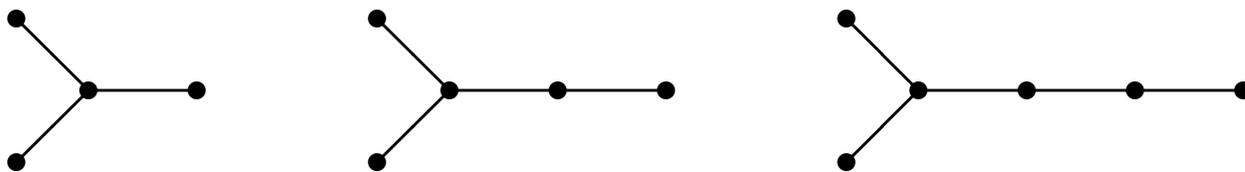


Рис. 7.3: Графы  $D_4, D_5, D_6$

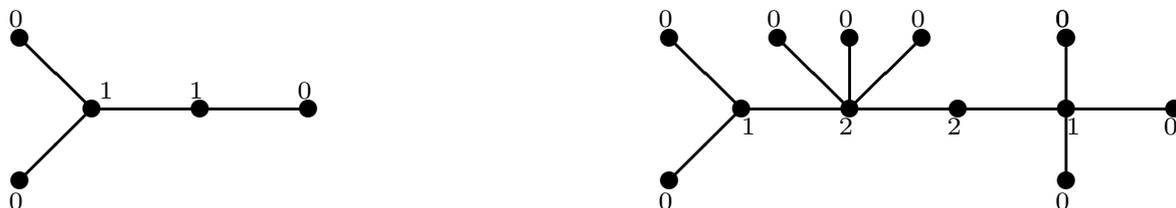


Рис. 7.4: Высоты вершин в различных деревьях

Это утверждение не означает, конечно, что, скажем, неподвижная вершина единственна. Вполне может оказаться, что неподвижных вершин много.

**Задача 7.8.** Докажите, что подграф в дереве, индуцированный множеством неподвижных вершин автоморфизма, является связным (т.е. деревом, а не лесом).

Для доказательства теоремы введем понятие *высоты* вершины в дереве. Скажем, что все листья имеют высоту 0. Сотрем все листья и идущие в них ребра. Скажем, что все листья в оставшемся дереве имеют высоту 1. Будем повторять эту процедуру пока не исчерпаем все вершины исходного дерева (последней может быть стерта единственная оставшаяся вершина). На рис. 7.4 приведены деревья, возле каждой вершины которых указана ее высота. Очевидно, что высота вершины сохраняется при автоморфизме дерева (и, более общим образом, при изоморфизме деревьев).

Посмотрим на вершины максимальной высоты в данном дереве. Таких вершин может быть одна или две. Действительно, все вершины максимальной высоты являются последними стираемыми листьями, причем в последнем стираемом дереве листьями должны быть все вершины. Но это означает, что в дереве либо одна, либо две вершины.

Если вершина максимальной высоты одна, то любой автоморфизм дерева оставляет ее на месте. Если же вершин максимальной высоты две, то они соединены ребром, и любой автоморфизм дерева либо оставляет каждую из них на месте, либо меняет их местами, что и доказывает теорему.

Теорему можно переформулировать таким образом: у всякого дерева есть *центр* (представляющий собой либо вершину, либо “сердину ребра”). Доказанная теорема позволяет искать порядок группы автоморфизмов дерева. Ориентируем ребра дерева от его центра. Каждая вершина вместе с выходящими из нее ребрами порождает корневое поддерево дерева. Порядок группы автоморфизмов дерева равен произведению факториалов количеств изоморфных корневым поддеревам, каждой вершины.

*Задача 7.9.* Найдите центры деревьев с рис. 7.4.

*Задача 7.10.* Найдите центры (а) звезды на  $n$  вершинах; (б) цепочек  $A_n$ ; (в) деревьев серии  $D_n$ ; (г) деревьев серии  $T_{p,q,r}$ .

*Задача 7.11.* Найдите порядки групп автоморфизмов деревьев с рис. 7.4.

### 7.3 Автоморфизмы графов с петлями и кратными ребрами

В отличие от случая простых графов, у графов с петлями и кратными ребрами есть нетривиальные автоморфизмы, оставляющие на месте все вершины графа. Так, в графе с 2 вершинами, соединенными  $m$  ребрами, мы можем переставлять эти ребра между собой произвольным образом. Меняя две вершины графа местами, мы также получим автоморфизм графа. Поэтому у такого графа  $2 \cdot m!$  автоморфизмов, половина из которых оставляет его вершины на месте.

Аналогично, у графа с одной вершиной и  $m$  петлями  $2^m \cdot m!$  автоморфизмов: у каждой петли есть нетривиальный автоморфизм, меняющий ее концы местами, и  $m$  петель мы можем переставить произвольно  $m!$  способами.

Для подсчета порядка группы автоморфизмов графа с петлями и кратными ребрами можно воспользоваться следующими соображениями. Автоморфизмы простого графа  $G$  можно описывать как такие одновременные перенумерации строк и столбцов матрицы смежности  $A(G)$  графа  $G$ , которые не меняют эту матрицу. Определим *матрицу смежности  $A(G)$  графа  $G$ , имеющего, возможно, петли и/или кратные ребра*, как матрицу, на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца которой стоит число ребер, соединяющих вершину номер  $i$  с вершиной номер  $j$ , при  $i \neq j$ , а при  $i = j$  — число петель с концами в вершине номер  $j$ . (Как и в случае матрицы смежности простого графа, мы предполагаем, что вершины графа  $G$  занумерованы числами от 1 до количества вершин в графе.) Для простого графа такое определение матрицы смежности совпадает с данным нами ранее, а если в графе есть петли и/или кратные ребра, то среди ее диагональных элементов могут встречаться ненулевые, и элементы матрицы не обязательно лежат в множестве  $\{0, 1\}$ , а могут быть и больше 1.

Теперь, чтобы сосчитать количество автоморфизмов графа  $G$ , нужно подсчитать количество одновременных перенумераций строк и столбцов матрицы смежности  $A(G)$ , сохраняющих эту матрицу, и умножить его на произведение следующих величин:

- для каждого наддиагонального элемента матрицы смежности  $A(G)$  — на факториал этого элемента;
- для каждого диагонального элемента матрицы смежности  $A(G)$  — на факториал этого элемента и на 2 в степени, равной этому элементу.

Множители, отвечающие наддиагональным элементам, соответствуют возможным перестановкам кратных ребер (мы ограничиваемся наддиагональными элементами, чтобы учитывать каждую такую перестановку 1 раз), а множители, отвечающие диагональным элементам, подсчитывают автоморфизмы петель в каждой вершине.

## Глава 8

# Перечисление графов

Вопрос о том, сколько существует простых графов с данным числом вершин, представляет существенный интерес не только сам по себе, но и с точки зрения приложений — например, мы хотели бы уметь оценивать время работы компьютерной программы, которая вычисляет те или иные параметры графов. У этого вопроса есть множество вариаций: можно фиксировать не только количество вершин, но и количество ребер в графе, можно перечислять графы, принадлежащие некоторым классам (например, деревья), можно заменять простые графы графами с петлями и кратными ребрами и т.д.

Однако принципиальная граница в перечислительных задачах проходит не по конкретным их формулировкам. Граница разделяет эти задачи на два больших класса в соответствии с тем, принимают ли условия задачи группу автоморфизмов графа во внимание. Задачи, не учитывающие группу автоморфизмов, как правило, оказываются безнадежными: их решения крайне редко выражаются простыми явными формулами, позволяющими эффективно подсчитывать перечисляющие значения для больших значений параметров, анализировать асимптотики этих значений, применять их для построения других теорий. Так, не существует и, по-видимому, не может существовать никакой разумной формулы для количества связных графов на  $n$  вершинах и количества деревьев на  $n$  вершинах. При малых значениях  $n$  эти величины можно найти тем или иным методом, однако никто не знает точно, чему равны соответствующие значения, скажем, при  $n = 200$ .

Напротив, учет группы симметрий графа зачастую приводит к простым легко анализируемым формулам. Именно задачи второго типа находят многочисленные применения в физических теориях. Учет симметрий обычно выражается как подсчет *помеченных* графов:  $n$  вершин графа помечаются числами от 1 до  $n$ , и два графа считаются изоморфными, если отображение множества вершин первого графа в множество вершин второго графа, сохраняющее их номера, является изоморфизмом. Как мы увидим, количество связных помеченных графов и деревьев на  $n$  вершинах несложно подсчитывается не только при  $n = 200$ , но и при  $n = 2000$ . Поскольку случайный граф не имеет нетривиальных автоморфизмов, т.е. его группа автоморфизмов состоит из 1 элемента, явные формулы для количества помеченных графов дают и асимптотику для числа непомеченных графов.

Отметим, что те же самые наблюдения остаются справедливыми и при перечислении не только графов, но и любых объектов со сложной внутренней структурой: учет симметрий приводит к обозримым ответам, тогда как отказ от этого учета делает задачи практически не решаемыми.

## 8.1 Помеченные графы и группа автоморфизмов

При  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  существует, соответственно, 1, 1, 2, 4, 11, 34, 156 простых графов с  $n$  вершинами. Количество связных графов при этом оказыва-

ется равным 0, 1, 1, 2, 6, 21, 112. Эти последовательности можно продолжить — существуют компьютерные программы, перечисляющие графы, однако их работа требует значительных вычислительных ресурсов, и значения элементов этих последовательностей известны лишь при не очень больших значениях параметра  $n$ .

Посмотрим теперь на простые графы с помеченными вершинами. Ограничимся всеми графами — как мы увидим, зная количества помеченных графов, мы можем эффективно подсчитывать и помеченные связные графы. Вершины графа с  $n$  вершинами мы помечаем числами от 1 до  $n$ .

Имеется единственный способ пометить вершину графа с 1 вершиной. То же справедливо и для каждого из двух графов с двумя вершинами. Для графов с 3 вершинами ситуация меняется — количество способов пометить вершины такого графа зависит от выбора графа. Вершины графа без ребер, как и вершины полного графа  $K_3$ , можно пометить единственным образом. Напротив, цепочку  $A_3$  и граф, представляющий собой несвязное объединение вершины и отрезка, можно пометить тремя способами.

**Задача 8.1.** Пусть  $G$  — простой граф,  $\overline{G}$  — его дополнение, т.е. граф с теми же вершинами, что и  $G$ , две вершины которого соединены ребром в том и только в том случае, когда они не соединены ребром в  $G$ . Докажите, что количества различных способов пометить вершины графа  $G$  и графа  $\overline{G}$  совпадают.

Тем самым, мы можем посмотреть на начало последовательности количеств графов с  $n$  помеченными вершинами:

0	1	2	3	4	5
1	1	2	8	64	1024

**Теорема 8.1.1.** Количество графов с  $n$  помеченными вершинами равно  $2^{n(n-1)/2}$ .

Действительно, рассмотрим полный граф  $K_n$  с  $n$  помеченными вершинами. Остовные подграфы графа  $K_n$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с помеченными графами на  $n$  вершинах (произвольный граф с  $n$  помеченными вершинами однозначно определяет остовный подграф в полном графе с помеченными вершинами). В графе  $K_n$  ровно  $2^{n(n-1)/2}$  остовных подграфов — в точности столько, сколько подмножеств в множестве его ребер, что и доказывает теорему.

Количество способов пометить вершины данного графа тесно связано с порядком группы его автоморфизмов:

**Утверждение 8.1.2.** Количество различных способов пометить вершины графа  $G$  с  $n$  вершинами равно

$$\frac{n!}{|\text{Aut}(G)|}.$$

Действительно, рассмотрим все  $n!$  пометок вершин графа  $G$ . Всякий автоморфизм графа  $G$  задает перестановку множества пометок, превращающую помеченный граф в изоморфный ему. Поэтому количество различных

пометок равно количеству различных орбит действия группы автоморфизмов графа  $G$  на множестве пометок  $\{1, 2, \dots, n\}$ , т.е. числу, указанному в утверждении.

Зная последовательность количеств помеченных графов, мы можем восстановить количества помеченных связных графов. Наиболее эффективный и компактный способ записи формул пересчета состоит в использовании производящих функций. Пусть

$$F^\circ(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^\circ}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \dots + \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}x^n + \dots$$

степенной ряд, коэффициент при  $x^n/n!$  в котором есть количество  $f_n^\circ = 2^{n(n-1)/2}$  помеченных графов на  $n$  вершинах. Пусть также

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

степенной ряд, коэффициент при  $x^n/n!$  в котором есть количество  $f_n$  связных помеченных графов на  $n$  вершинах. Тогда справедливо следующее утверждение

**Теорема 8.1.3.** *Функции  $F^\circ$  и  $F$  связаны соотношением*

$$F = \log F^\circ = (F^\circ - 1) - \frac{1}{2}(F^\circ - 1)^2 + \frac{1}{3}(F^\circ - 1)^3 - \frac{1}{4}(F^\circ - 1)^4 + \dots$$

Зная значения чисел  $f_n^\circ$ , мы можем использовать выписанное соотношение на функции  $F^\circ$  и  $F$  как чрезвычайно эффективный способ подсчета чисел  $f_n$ . Кроме того, это соотношение является весьма общим: функция, перечисляющая помеченные объекты всегда является экспонентой функции, перечисляющей связные помеченные объекты. Мы не будем давать точную формулировку этого утверждения в общем случае, однако его стоит иметь в виду как один из основополагающих перечислительных принципов.

Доказательство утверждения вытекает из обычного мультиномиального тождества.

Отметим также, что знание числа помеченных графов на  $n$  вершинах дает нам хорошую асимптотику числа непомеченных графов: число непомеченных графов на  $n$  вершинах близко к

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}.$$

## 8.2 Перечисление помеченных деревьев

На рис. 8.1 приведены все деревья с  $n \leq 5$  вершинами.

Задача перечисления деревьев, подобно задаче перечисления графов, не имеет хорошего решения. Возникающие при ее решении трудности обязаны



Рис. 8.1: Деревья с  $n \leq 5$  вершинами

своим происхождением как раз различным симметриям у различных деревьев. Мы займемся более простой задачей — перечислением деревьев с помеченными вершинами. Сопоставим каждой вершине дерева одно из чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  так, чтобы разным вершинам соответствовали разные числа. На рис. 8.2 изображены все помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами.

Зная порядок группы автоморфизмов дерева, мы можем без труда подсчитать количество различных пометок его вершин. Так, число различных способов пометить цепочку на 4 вершинах равно  $4!/2 = 12$ , а число способов пометить звезду на 4 вершинах равно  $4!/3! = 4$ , поэтому всего существует  $12 + 4 = 16$  различных помеченных деревьев с 4 вершинами.

Последовательность чисел помеченных деревьев с  $n$  вершинами начинается так: 1, 1, 3, 16, ..., см. рис. 8.2.

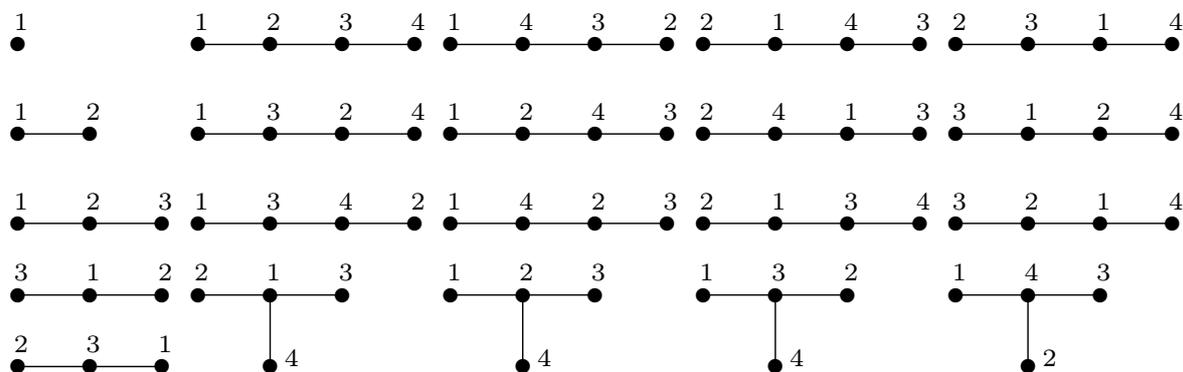


Рис. 8.2: Помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами

**Теорема 8.2.1** (Кэли<sup>1</sup>). Число помеченных деревьев с  $n$  вершинами равно  $n^{n-2}$ .

Обозначим через  $T_n$  число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами, т. е. число помеченных деревьев, в которых одна из вершин выделена и названа *корнем*. Ясно, что число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами в  $n$  раз больше числа помеченных деревьев с  $n$  вершинами: в качестве корня можно выбрать любую из  $n$  различных вершин. Поэтому из теоремы Кэли сразу же вытекает

<sup>1</sup>Эту теорему обнаружил и доказал немецкий математик Карл Вильгельм Бортхардт в 1860 г. Английский математик Кэли в своей заметке 1889 г., сославшись на работу Бортхардта, усилил его теорему, после чего исходный результат также стали называть теоремой Кэли.

**Следствие 8.2.2.** Число помеченных корневых деревьев с  $n$  вершинами есть  $T_n = n^{n-1}$ .

Мы дадим два различных подсчета количества помеченных деревьев. Первый из них принадлежит Прюферу (1918) и состоит в сопоставлении каждому дереву некоторого кода.

Возьмем какое-нибудь дерево с  $n$  вершинами, помеченными различными числами от 1 до  $n$ . Мы сопоставим дереву последовательность длины  $n - 2$  из букв  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Последовательность строится индуктивно. Возьмем в дереве лист с минимальным номером и возьмем в качестве первой буквы последовательности  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой этот лист соединен. Затем удалим выбранный лист. Второй буквой будет  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и будем повторять эту операцию до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность букв длины  $n - 2$ .

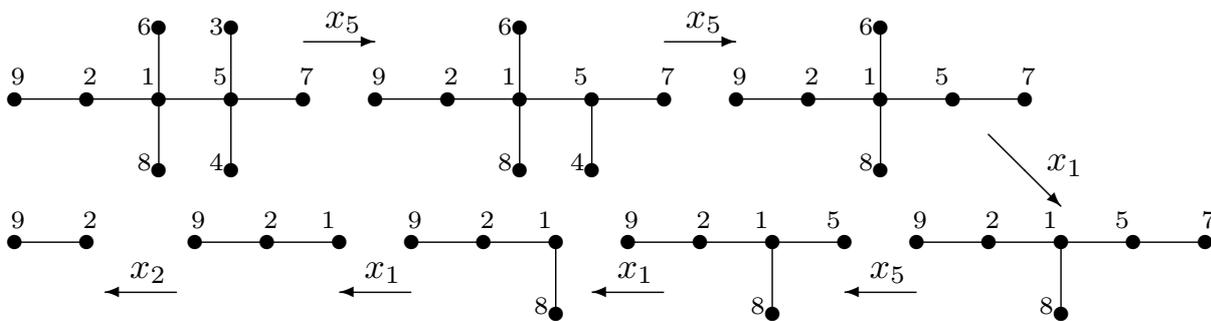


Рис. 8.3: Построение кода Прюфера помеченного дерева. Дерево на рисунке имеет код  $x_5x_5x_1x_5x_1x_1x_2 = x_5^2x_1x_5x_1^2x_2$

На рис. 8.3 изображена последовательность удаления вершин в дереве с помеченными вершинами и соответствующая этому дереву последовательность букв — его код Прюфера.

Наоборот, по любой последовательности букв длины  $n - 2$  можно восстановить помеченное дерево. Валентность любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная, индекс которой является номером этой вершины, встречается в последовательности. В частности, вершины, номера которых не встречаются в качестве индекса, — листья дерева. Взяв первый элемент последовательности, проведем ребро, соединяющее лист с минимальным номером и вершину, в которой стоит индекс этого первого элемента. Затем первый элемент последовательности стираем и повторяем процедуру для новой последовательности (с учетом того, что один лист уже использован, а валентность вершины с номером, равным индексу первого элемента последовательности, уменьшилась на 1). Последнее ребро соединяет две вершины, валентности которых еще не заполнены.

Рассмотрим, например, как строится помеченное дерево по последовательности  $x_2^2x_4x_2x_7^2$ . Количество букв в этой последовательности равно  $n - 2 = 6$ , поэтому в дереве  $n = 8$  вершин. Пять из этих вершин — листья; это

вершины с пометками 1, 3, 5, 6 и 8 — теми, которые не представлены в последовательности. Вершина с пометкой 2 имеет валентность 4, с пометкой 4 — валентность 2, а с пометкой 7 — валентность 3.

Наименьший номер листа равен 1, а первая буква в последовательности —  $x_2$ , поэтому первое ребро дерева соединяет вершины с номерами 1 и 2. После стирания первой буквы последовательности остается последовательность  $x_2x_4x_2x_7^2$ . Буква с наименьшим номером, не входящая в эту последовательность, это  $x_3$ , поэтому очередное ребро соединяет  $x_3$  и  $x_2$ , а после вычеркивания первой буквы остается последовательность  $x_4x_2x_7^2$ . Следующее ребро  $x_5x_4$ , а последовательность  $x_2x_7^2$ . Теперь наименьший номер вершины, не входящей в последовательность и не выступавшей листом, это  $x_4$ . Мы соединяем ее ребром с вершиной  $x_2$ . Остается последовательность  $x_7^2$ . Соединяем вершину  $x_2$  (она еще не была листом) с  $x_7$  и оставляем последовательность  $x_7$ . Теперь соединяем  $x_6$  с  $x_7$ . Нужную валентность имеют все вершины полученного графа, за исключением  $x_7$  и  $x_8$ , валентность каждой из которых на единицу меньше предписанной. Их мы и соединяем ребром, завершая построение дерева.

Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между помеченными деревьями на  $n$  вершинах и упорядоченными мономами в разложении выражения  $(x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$ . В частности, подставляя значения  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , получаем формулу Кэли.

Второй подсчет числа помеченных деревьев требует рассмотрения производящей функции для этих чисел. Попробуем найти экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n s^n = \frac{1}{1!} s + \frac{2}{2!} s^2 + \frac{9}{3!} s^3 + \frac{64}{4!} s^4 + \dots$$

для числа корневых помеченных деревьев. Эйлер назвал ее *функцией Ламберта*. Заметим, что, в силу утверждения 8.1.2, коэффициент  $T_n/n!$  в этом ряде можно понимать как результат суммирования по всем (непомеченным) деревьям величин, обратных к количеству их автоморфизмов.

Выкинем из дерева корень. Тогда оно распадется на несколько деревьев, число которых равно валентности корня. Новые деревья тоже можно считать помеченными: требуется лишь заменить пометки  $\{l_1, \dots, l_i\}$ ,  $l_1 < \dots < l_i$  на пометки  $\{1, \dots, i\}$ , сохраняя их относительный порядок. Корнем нового дерева будем считать вершину, соединенную с корнем исходного дерева. Тем самым каждому корневному помеченному дереву с корнем валентности  $k$  сопоставлено (мульти)множество из  $k$  корневых помеченных деревьев. Мы говорим о мультимножествах, так как среди вновь образованных деревьев могут встречаться одинаковые, а в обычном множестве не может быть двух совпадающих элементов.

Из приведенного описания вытекает, что деревья с корнем валентности  $k$  перечисляются производящей функцией  $s\mathcal{T}^k(s)$ . Действительно, вклад в ко-

эффицент при  $s^{n+1}$  в функции  $s\mathcal{T}^k(s)$  дают в точности элементы вида

$$\frac{\mathcal{T}^{l_1}}{l_1!} \cdots \frac{\mathcal{T}^{l_k}}{l_k!} s^{l_1+\dots+l_k},$$

для которых  $l_1 + \dots + l_k = n$ . Множество пометок  $n$  вершин  $k$  деревьев можно разбить на  $k$  подмножеств из  $l_1, \dots, l_k$  пометок

$$\binom{n}{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdots l_k!}$$

способами. После того как такое разбиение произведено, пометки на всех вершинах дерева с сохранением относительного порядка нумерации восстанавливаются однозначно. Поэтому число помеченных корневых деревьев на  $n+1$  вершинах с корнем валентности  $k$  равно

$$n![s^n]\mathcal{T}^k(s) = \sum_{l_1+\dots+l_k=n} \frac{n!}{l_1! \cdots l_k!} \mathcal{T}_{l_1} \cdots \mathcal{T}_{l_k}.$$

Здесь и ниже символы  $[s^n]$  перед функцией обозначают коэффициент при  $s^n$  в разложении этой функции в ряд по степеням переменной  $s$ . Суммируя функции  $\frac{1}{k!}\mathcal{T}^k$  по всем  $k$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.2.3.** *Экспоненциальная производящая функция  $\mathcal{T}(s)$  для числа помеченных корневых деревьев, перечисляющая их по числу вершин, удовлетворяет уравнению Лагранжа*

$$\mathcal{T}(s) = se^{\mathcal{T}(s)}. \quad (8.1)$$

Уравнение (8.1) имеет единственное решение (докажите!) и позволяет последовательно вычислять коэффициенты функции  $\mathcal{T}(s)$ . Можно, например, подсчитать, что  $T_5 = 625, T_6 = 7776$ . Для того чтобы вывести из него теорему Кэли, достаточно проверить, что функция

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$$

является его решением. Полезно, однако, найти ответ, не предполагая его заранее известным. Для этого нам понадобится следующая

**Теорема 8.2.4** (Лагранж). *Пусть функции  $\varphi = \varphi(s), \varphi(0) = 0$  и  $\psi = \psi(t)$  связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s)). \quad (8.2)$$

Тогда знание функции  $\varphi$  позволяет однозначно восстановить функцию  $\psi$  и наоборот, причем коэффициент при  $s^n$  в функции  $\varphi$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t).$$

Применим эту теорему к уравнению (8.1) на функцию  $\varphi(s) = \mathcal{T}(s)$ . Здесь  $\psi(t) = e^t$ . Получим

$$T_n = n![s^n]\mathcal{T}(s) = n!\frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = (n-1)!\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1},$$

что и является требуемым результатом.

*Доказательство теоремы 8.2.4.* Докажем сначала, что уравнение Лагранжа (8.2) относительно неизвестной функции  $\varphi$  имеет единственное решение. Доказательство носит стандартный характер: коэффициенты функции  $\varphi$  можно последовательно восстановить, зная коэффициенты функции  $\psi$  и уже подсчитанные коэффициенты функции  $\varphi$ . Действительно, пусть

$$\varphi(s) = f_1s + f_2s^2 + f_3s^3 + \dots, \quad f_1 \neq 0, \quad \psi(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots$$

Тогда уравнение (8.2) имеет вид

$$f_1s + f_2s^2 + \dots = p_0s + p_1s(f_1s + f_2s^2 + \dots) + p_2s(f_1s + f_2s^2 + \dots)^2 + \dots$$

Приравнивая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $s$ , мы заключаем, что коэффициент  $f_1$  определяется из равенства  $f_1 = p_0$ , коэффициент  $f_2$  — из равенства  $f_2 = p_1f_1$ , коэффициент  $f_3$  — из равенства  $f_3 = p_1f_2 + p_2f_1^2$  и т. д. Тем самым, мы можем найти все коэффициенты функции  $\varphi$ . Если же коэффициенты разложения функции  $\varphi$  известны и  $f_1 \neq 0$ , то те же самые уравнения позволяют последовательно найти все коэффициенты функции  $\psi$ .  $\square$

Для вывода явного вида преобразования коэффициентов нам понадобится

**Лемма 8.2.5** (преобразование вычета при замене переменной). *Пусть функция  $g(t)$  такова, что  $g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ . Тогда*

$$[s^{-1}]f(s) = [t^{-1}]f(g(t))g'(t).$$

Коэффициент при  $(-1)$ -й степени переменной в разложении функции в ряд Лорана по этой переменной называется *вычетом* этой функции.

Для доказательства леммы рассмотрим разложение

$$f(s) = f_{-N}s^{-N} + f_{-N+1}s^{-N+1} + \dots, \quad g(t) = g_1t + g_2t^2 + \dots$$

При  $n \neq -1$

$$[t^{-1}]g^n(t)g'(t) = [t^{-1}]\frac{1}{n+1}(g^{n+1}(t))' = 0,$$

так как вычет производной любой функции равен нулю. При  $n = -1$

$$[t^{-1}]f_{-1}\frac{1}{g(t)}g'(t) = f_{-1},$$

что и требовалось.

Коэффициент при  $s^n$  в производящей функции  $\varphi$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = [s^{-1}]s^{n+1}\varphi(s).$$

Вычислим последний вычет с помощью леммы 8.2.5. Для этого перепишем уравнение Лагранжа (8.2) в виде подстановки

$$s = \frac{t}{\psi(t)},$$

где  $t = \varphi(s)$ . Тогда, согласно лемме,

$$\begin{aligned} [s^{-1}]s^{-n-1}\varphi(s) &= [t^{-1}]\frac{\psi^{n+1}(t)}{t^n} \cdot \frac{\psi(t) - t\psi'(t)}{\psi^2(t)} = \\ &= [t^{-1}]\left(\frac{\psi^n(t)}{t^n} - \frac{\psi^{n-1}(t)\psi'(t)}{t^{n-1}}\right) = \\ &= [t^{n-1}]\psi^n(t) - \frac{1}{n}[t^{n-2}](\psi^n(t))' = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы закончено.

### 8.3 Леса и многочлены Абеля

Несвязное объединение деревьев называется лесом. Другими словами, *лес* — это простой граф без циклов (в отличие от дерева, не обязательно связный). Каждый лес состоит из нескольких деревьев — своих *компонент связности*. *Корневым лесом* называется лес, в каждой компоненте которого выбран корень.

В предыдущем параграфе мы перечислили помеченные деревья и корневые деревья. Посмотрим теперь, как перечисление помеченных корневых лесов связано с многочленами Абеля  $A_n(x) = x(x+n)^{n-1}$ . Скажем, раскрыв скобки в многочлене Абеля  $A_3$ , получим

$$A_3(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

В то же время существует единственный трехкомпонентный помеченный лес на трех вершинах, 6 двухкомпонентных помеченных лесов на трех вершинах и 9 однокомпонентных помеченных лесов (деревьев) на трех вершинах (проверьте!). Числа 1, 6 и 9 — коэффициенты многочлена  $A_3$ . То же самое верно и для любого многочлена  $A_n$ :

**Теорема 8.3.1.** *Коэффициент при  $x^k$  в многочлене  $A_n$  равен числу помеченных корневых лесов из  $k$  деревьев на  $n$  вершинах.*

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для многочленов Абеля

$$\mathcal{A}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

Теорема будет доказана, если мы докажем следующее утверждение.

**Теорема 8.3.2.** Экспоненциальная производящая функция  $\mathcal{A}$  для многочленов Абеля имеет вид

$$\mathcal{A}(x, s) = e^{x\mathcal{T}(s)},$$

где  $\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$  есть экспоненциальная производящая функция для корневых деревьев на  $n$  вершинах (функция Ламберта).

Для доказательства утверждения вспомним, что последовательность многочленов Абеля биномиальна (см. задачу 4.5), а значит, экспоненциальная производящая функция для нее представляется в виде

$$\mathcal{A}(x, s) = e^{xc(s)}$$

для некоторой функции  $c(s)$ . При этом линейная часть по  $x$  функции  $\mathcal{A}(x, s)$  имеет вид  $xc(s)$ . С другой стороны, из определения многочленов Абеля вытекает, что эта линейная часть равна

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} s^n,$$

т. е.  $c(s) = \mathcal{T}(s)$ .

Мы также можем доказать теорему 8.3.2, не ссылаясь на биномиальность последовательности Абеля и дав, тем самым, новый вывод утверждения о ее биномиальности. Для этого введем обобщенные многочлены Абеля и рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для них.

Мы будем пользоваться двумя дополнительными бесконечными сериями параметров  $t_1, t_2, t_3, \dots$  и  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . Пусть  $M \subset \mathbb{N}$  — конечное (быть может, пустое) подмножество множества натуральных чисел, и пусть  $|M|$  — количество элементов в  $M$ ,  $M = \{i_1, \dots, i_{|M|}\}$ . Положим

$$t_M = t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_{|M|}} = \sum_{i \in M} t_i; \quad \tau_M = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_{|M|}} = \prod_{i \in M} \tau_i.$$

Моном  $\tau_M$  полностью описывает множество  $M$ , и мы будем считать, что  $\tau_i^2 = 0$  для всех  $i$  (другими словами, все элементы множества различны). В частности,

$$\tau_I \tau_J = \begin{cases} \tau_{I \cup J}, & \text{если } I \cap J = \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$A_M(x, t) = x(x + t_M)^{|M|-1}.$$

Ясно, что многочлен  $A_M(x, t)$  превращается в многочлен Абеля  $A_{|M|}(x)$  при подстановке  $t_1 = t_2 = \dots = 1$ .

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, t, \tau) = \sum_{M \subset \mathbb{N}, |M| < \infty} A_M(x, t) \frac{\tau_M}{|M|!}.$$

Теперь теорема 8.3.2 вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 8.3.3.** *Справедливо равенство*

$$\tilde{A}(x, t, \tau) = \exp\left(x \sum t_M^{|M|-1} \tau_M\right). \quad (8.3)$$

*Доказательство.* Сравнивая коэффициенты при  $x^k \tau_M$  в левой и правой частях равенства (8.3), приходим к необходимости проверить, что для любого  $k$ ,  $0 \leq k \leq |M|$ , выполняется равенство

$$\binom{|M| - 1}{k - 1} t_M^{|M|-k} = \sum t_{I_1}^{|I_1|-1} \dots t_{I_k}^{|I_k|-1},$$

где сумма в правой части берется по всем упорядоченным разбиениям множества  $M$  на  $k$  подмножеств. Коэффициент при  $t_{i_1}^{a_1} \dots t_{i_{|M|}}^{a_{|M|}}$  (где  $a_1 + \dots + a_{|M|} = |M| - k$ ) в левой части последнего равенства есть

$$\binom{|M| - 1}{k - 1} \frac{(|M| - k)!}{a_1! \dots a_{|M|}}.$$

Коэффициент при том же мономе в правой части имеет вид

$$\sum \frac{(|I_1| - 1)! \dots (|I_k| - 1)!}{a_1! \dots a_{|M|}}.$$

Тем самым, нам достаточно показать, что

$$\binom{|M| - 1}{k - 1} (|M| - k)! = \sum (|I_1| - 1)! \dots (|I_k| - 1)!,$$

но это равенство, очевидным образом, имеет место: достаточно сравнить коэффициенты при мономе  $t_1^{|M|-k}$ . Доказательство равенства (8.3) завершено.  $\square$

## 8.4 Обращение функции и суммирование по деревьям \*

В этом параграфе мы обсудим явные формулы, выражающие коэффициенты обратной функции через коэффициенты исходной, и их связь с деревьями. Чтобы эта связь была более прозрачной, нам будет удобно обращаться экспоненциальную производящую функцию.

Итак, пусть функция  $B(t)$  имеет вид

$$B(t) = t - \frac{b_2}{2!} t^2 - \frac{b_3}{3!} t^3 - \dots$$

(такой выбор знаков упрощает формулы для коэффициентов обратной функции), и мы хотим найти ряд

$$A(s) = s + \frac{a_2}{2!} s^2 + \frac{a_3}{3!} s^3 + \dots,$$

такой, что  $A(B(t)) = t$  (откуда следует, что и  $B(A(s)) = s$ ). Коэффициенты  $a_i$  ряда  $A$  являются многочленами от коэффициентов  $b_j$  ряда  $B$ ,

$$A(s) = \sum_{k_1} \left( \sum_{k_2, k_3, \dots} A_{k_1, k_2, k_3, \dots} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \dots \right) \frac{s^{k_1}}{k_1!}.$$

Вот как выглядят первые члены разложения обратного ряда:

$$\begin{aligned} A(s) = s + b_2 \frac{s^2}{2!} + (b_3 + 3b_2^2) \frac{s^3}{3!} + (b_4 + 10b_3b_2 + 15b_2^3) \frac{s^4}{4!} + \\ + (b_5 + 15b_4b_2 + 10b_3^2 + 105b_3b_2^2 + 105b_2^4) \frac{s^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Мы хотим найти коэффициенты  $A_{k_1, k_2, k_3, \dots}$  этих многочленов.

**Теорема 8.4.1.** *Коэффициенты  $A_{k_1, k_2, k_3, \dots}$  обратного ряда отличны от нуля, только если выполняется равенство*

$$\sum_{i \geq 2} ik_i = \sum_{i \geq 1} k_i - 1,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\sum_{i \geq 2} (i-1)k_i = k_1 - 1.$$

Эти ненулевые коэффициенты равны

$$A_{k_1, k_2, \dots} = \frac{\left( \sum_{i \geq 1} k_i - 1 \right)!}{\prod_{i \geq 2} (k_i! (i!)^{k_i})}.$$

Коэффициент  $A_{k_1, k_2, \dots}$  равен числу корневых деревьев с корнем валентности больше 1 и с  $k_1$  занумерованными вершинами валентности 1, имеющих  $k_2$  вершин с 2 потомками,  $k_3$  вершин с тремя потомками, ...

Здесь *потомком* внутренней вершины корневого дерева называются все ее соседи, находящиеся дальше от корня, чем она сама. Для корня дерева число его потомков равно его валентности, а для всех остальных вершин оно на единицу меньше валентности. Отметим, что нумерация листьев дерева также разрушает его симметрию, что и делает задачу перечисления деревьев с занумерованными листьями разрешимой.

На рис. 8.4 приведены все корневые деревья, отвечающие разбиению  $1^5 2^2 3^1$ ; они имеют 5 листьев, две вершины с двумя потомками и одну вершину с тремя потомками. Для каждого из этих деревьев указано количество различных нумераций его листьев числами от 1 до 5. Общее количество этих нумераций для всех деревьев равно

$$105 = 20 + 10 + 30 + 30 + 15,$$

что и дает значение коэффициента

$$A_{5,2,1} = 105 = \frac{7!}{2! \cdot (2!)^2 \cdot 1! \cdot (3!)^1}$$

при мономе  $b_2^2 b_3 \frac{s^5}{5!}$  в разложении обратной функции.

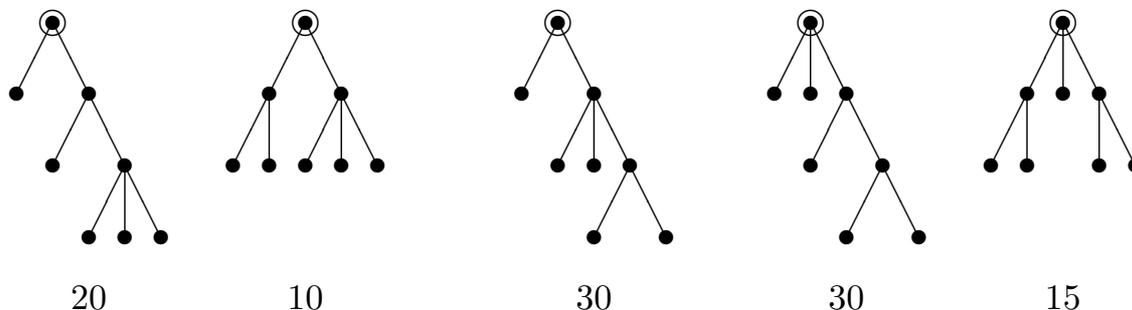


Рис. 8.4: Корневые деревья с пятью листьями, двумя вершинам с двумя потомками и одной вершиной с тремя потомками; для каждого дерева указано количество нумераций листьев

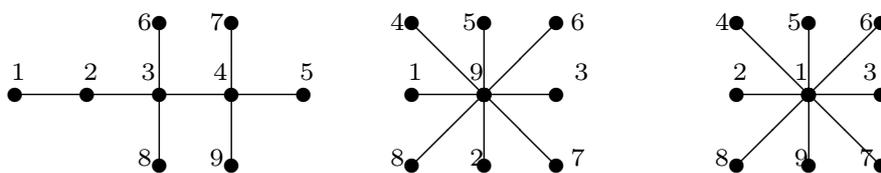
**Доказательство теоремы** мы предлагаем читателю провести самостоятельно.

## 8.5 Задачи

**Задача 8.2.** Нарисуйте помеченные деревья, коды Прюфера которых равны а)  $x_1^2 x_2^3 x_1 x_4$ ; б)  $x_6^4$ ; в)  $x_2^3 x_3 x_1^2$ .

**Задача 8.3.** Выпишите коды Прюфера всех помеченных деревьев с четырьмя вершинами и убедитесь, что каждая последовательность длины два из букв  $x_1, x_2, x_3, x_4$  встречается среди этих кодов ровно один раз.

**Задача 8.4.** Выпишите коды Прюфера помеченных деревьев



**Задача 8.5.** Докажите, что расстановки пометок  $\{1, \dots, n\}$  на графах-звездах с  $n$  вершинами взаимнооднозначно соответствуют кодам Прюфера  $x_1^{n-2}, x_2^{n-2}, \dots$

**Задача 8.6.** Подсчитайте количество графов с  $k$  ребрами и  $n$  вершинами, если (а) графы простые; (б) графам разрешается иметь кратные ребра, но не петли; (в) графам разрешается иметь петли, но не кратные ребра; (г) графам разрешается иметь и петли, и кратные ребра.

**Задача 8.7.** Докажите, что (некорневые) леса на  $n$  помеченных вершинах перечисляются экспоненциальной производящей функцией

$$\exp x \left( 1 \cdot \frac{s}{1!} + 1 \cdot \frac{s^2}{2!} + 3 \cdot \frac{s^3}{3!} + \dots + n^{n-2} \cdot \frac{s^n}{n!} + \dots \right).$$

Выпишите производящие многочлены для числа помеченных лесов на 2, 3, 4 и 5 вершинах.

*Задача 8.8.* Завершите следующее доказательство теоремы Кэли.

Произведение  $nT_n$  перечисляет количество помеченных деревьев на  $n$  вершинах с двумя выделенными вершинами. Мы хотим доказать, что это количество равно  $n^n$ . Соединив первую из выделенных вершин со второй кратчайшим путем, получим последовательность из некоторых чисел между 1 и  $n$ . К некоторым элементам этой последовательности приклеены деревья, помеченные другими числами от 1 до  $n$ .

С другой стороны, рассмотрим все функции из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя. Их ровно  $n^n$  штук. Каждой такой функции  $f$  можно сопоставить ориентированный граф, соединив вершину с номером  $i$  с вершиной с номером  $f(i)$ . Поскольку из каждой вершины выходит ровно одно ребро, этот граф представляет собой набор циклов, к некоторым вершинам которых приклеены деревья. Однако последовательность чисел и набор циклов — это два различных способа записи перестановки.

Тем самым, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством помеченных деревьев с двумя выделенными вершинами и множеством функций из множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя.

Решение следующих двух задач дает еще одно доказательство теоремы Кэли.

*Задача 8.9.* Пусть  $G$  — граф с  $n$  помеченными вершинами. Пространство вещественнозначных функций на множестве вершин графа является  $n$ -мерным вещественным пространством  $\mathbb{R}^n$ . На этом пространстве действует *оператор Лапласа*, переводящий функцию  $f$  в функцию, значение которой в  $i$ -ой вершине равно  $\sum (f(i) - f(j))$ , где суммирование идет по всем вершинам  $j$ , смежным с  $i$ . Действие оператора Лапласа очевидным образом линейно. Он переводит постоянную функцию в 0, поэтому одно из его собственных значений равно 0. Докажите *матричную теорему о деревьях* (теорему Кирхгофа): произведение остальных собственных значений оператора Лапласа, деленное на количество вершин в графе, равно количеству остовных деревьев<sup>2</sup> в  $G$ , умноженному на  $n$ .

*Задача 8.10.* Применив теорему Кирхгофа из предыдущей задачи к полному помеченному графу на  $n$  вершинах, выведите из нее теорему Кэли.

*Задача 8.11.* \* Всякое кубическое уравнение можно сдвигом переменной и растяжением привести к виду

$$z^3 - 3pz - 1 = 0,$$

откуда

$$z(z^3 - 3pz) = z.$$

---

<sup>2</sup> *Остовное дерево* в графе это набор ребер в нем, образующий дерево и проходящий через все его вершины.

Полагая  $\varphi(z) = z$ ,  $\psi(z) = z^3 - 3pz$ , выведите с помощью теоремы Лагранжа формулу для разложения корня этого кубического уравнения, обращающегося в 1 при  $p = 0$ , в ряд по степеням переменной  $p$ .

## Глава 9

# Топологические характеристики графов

В этой главе мы рассмотрим некоторые топологические характеристики графов. Среди этих характеристик топологическая и гомотопическая эквивалентность, фундаментальная группа и группа первых гомологий. Все эти понятия применимы не только к графам, но и к произвольным топологическим пространствам. Их осмысленность и эффективность на примере графов разглядеть трудно. Скажем, вся информация о гомотопической эквивалентности, фундаментальной группе или группе первых гомологий связного графа закодирована уже в одном числе — его эйлеровой характеристике. Однако знакомство с соответствующими определениями помогает получить представление о чем идет речь в случае топологических пространств общего вида.

## 9.1 Топологическая эквивалентность простых графов

Понятие топологической эквивалентности графов может быть выражено как на топологическом, так и на комбинаторном языке.

Пусть  $e$  — ребро в графе. Назовем его *подразбиением* пару ребер, которая получается из  $e$  превращением одной из его внутренних точек в вершину графа. В результате подразделения ребра количество вершин и ребер в графе увеличивается на 1.

Простые графы  $G$  и  $H$  называются *топологически эквивалентными*, если в результате некоторой последовательности подразбиений ребер из графа  $G$  можно получить граф, изоморфный результату некоторой последовательности подразбиений ребер графа  $H$ .

Например, любые два цикла  $C_m$  и  $C_n$ ,  $m, n \geq 3$ , топологически эквивалентны

Приведем некоторые очевидные свойства топологически эквивалентных графов.

- Эйлеровы характеристики топологически эквивалентных графов равны между собой; действительно при подразбиении ребра количество вершин в графе увеличивается на 1, как и количество ребер, т.е. разность количества вершин и количества ребер, а, значит, и эйлерова характеристика, не меняется.
- Наборы валентностей вершин топологически эквивалентных графов совпадают, за исключением, быть может количества вершин валентности 2; действительно, подразбиение ребра не меняет набора валентностей вершин, отличных от 2.
- Топологически эквивалентные графы имеют одинаковое количество компонент связности.

*Задача 9.1.* Приведите пример пары связных графов, имеющих одинаковые наборы валентностей вершин, но не являющихся топологически эквивалентными.

Введение нами определение топологической эквивалентности объясняется тем, что носители топологически эквивалентных графов  $G$  и  $H$  *гомеоморфны*, т.е. существует такое непрерывное отображение из носителя графа  $G$  в носитель графа  $H$ , что обратное к нему отображение тоже непрерывно.

Остановимся на последнем свойстве более подробно. *Носителем* простого графа называется топологическое пространство, полученное в результате склейки отрезков, отвечающих ребрам, по вершинам, в соответствии с комбинаторикой графа. (Мы не будем давать общее определение топологического пространства и склейки; при этом должно быть ясно, что имеется в виду в случае графа.) Носитель графа  $G$  будем обозначать через  $|G|$ .

До сих пор представление ребра графа в виде отрезка было лишь удобным способом наглядно представлять себе граф и изображать его на плоскости. С комбинаторной точки зрения ребро графа — это всего лишь пара его вершин, и в соединении этой пары вершин отрезком нет никакой необходимости. Напротив, при построении носителя графа реализация ребра в виде отрезка является существенной частью определения носителя.

Посмотрим, что понимается под непрерывным отображением носителей. Такое непрерывное отображение — это набор непрерывных отображений ребер, т.е. отрезков, при которых общие концы ребер переходят в одну и ту же точку носителя-образа. В свою очередь, непрерывное отображение ребра это, по сути дела, путь в графе (начало и конец которого не обязаны быть вершинами). Непрерывное отображение ребра обратимо на своем образе, если оно отображает ребро на этот образ взаимно-однозначно. Поскольку при исследовании топологической эквивалентности графов нас интересует лишь существование гомеоморфизма, нам достаточно предъявить образ каждого отрезка при непрерывном отображении. Так, при подразбиении ребра  $e$  мы получаем вместо него пару ребер, объединение которых гомеоморфно ребру  $e$  (гомеоморфизм задается тождественным отображением). Дальнейшие подразбиения ребра  $e$  сохраняют гомеоморфность носителей графов.

Следующее утверждение описывает поведение при гомеоморфизме вершин графа.

**Утверждение 9.1.1.** Пусть  $G, H$  — простые графы,  $f : |G| \rightarrow |H|$  — гомеоморфизм их носителей. Тогда

- вершина графа  $G$ , валентность которой отлична от 2, переходит при  $f$  в вершину той же валентности;
- вершина графа  $G$  валентности 2 переходит при  $f$  в вершину валентности 2 или во внутреннюю точку отрезка;
- внутренняя точка отрезка переходит во внутреннюю точку отрезка или вершину валентности 2.

Для доказательства утверждения посмотрим на *окрестность* вершины графа  $G$ , представляющую собой эту вершину с выходящими из нее

полуинтервалами; количество полуинтервалов равно валентности вершины. Такая окрестность должна гомеоморфно отображаться на окрестность образа выбранной вершины в  $H$ . Это означает, в частности, что при выкидывании самой вершины из ее окрестности в  $G$  мы должны получить столько же компонент связности, сколько при выкидывании ее образа из его окрестности в  $H$ . Выкидывая вершину валентности  $k$  из ее окрестности, мы получаем  $k$  компонент связности. Выкидывая внутреннюю точку ребра из ее окрестности, мы получаем 2 компоненты связности. Поэтому если  $k \neq 2$ , то вершина валентности  $k$  может перейти при гомеоморфизме только в вершину валентности  $k$ . В свою очередь, вершина валентности 2 может перейти во внутреннюю точку отрезка или в вершину валентности 2, а внутренняя точка отрезка переходит либо в вершину валентности 2, либо во внутреннюю точку отрезка.

Операция подразделения ребра обратима — стерев в графе вершину валентности 2 и заменив два входящие в нее ребра одним ребром, мы получаем граф, топологически эквивалентный исходному. Однако бывают ситуации, в которых стирание вершины валентности 2 неприменимо — иначе получающийся в результате граф не будет простым. Например, нельзя стереть ни одну вершину в цикле  $C_3$  (полном графе  $K_3$ ).

Будем выполнять операцию стирания вершины валентности 2 со всеми вершинами валентности 2, пока это возможно. В результате мы получаем граф, в котором стирание любой вершины валентности 2 дает непростой граф.

*Задача 9.2.* Пусть  $G$  — простой граф. Докажите, что последовательное применение к нему операции стирания вершины валентности 2, пока это возможно, приводит к одному и тому же графу, вне зависимости от выбранного порядка стираемых вершин.

*Задача 9.3.* Докажите, что два графа топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда последовательное применение к ним операции стирания вершины валентности 2, пока это возможно, приводит к изоморфным графам.

Это граф с минимальным количеством вершин (и ребер) из данного класса топологической эквивалентности графов. Его естественно считать каноническим представителем данного класса.

## 9.2 Топологическая эквивалентность графов с петлями и кратными ребрами

Топологическая эквивалентность графов с петлями и кратными ребрами определяется так же, как топологическая эквивалентность простых графов: графы  $G$  и  $H$  называются топологически эквивалентными, если существует последовательность подразбиений ребер графа  $G$  и последовательность подразбиений ребер графа  $H$ , приводящие к изоморфным графам. Два гра-

фа  $G$  и  $H$  топологически эквивалентны в том и только в том случае, если их носители  $|G|$  и  $|H|$  гомеоморфны.

*Задача 9.4.* Докажите, что если  $G, H$  — топологически эквивалентные графы, то набор отличных от 2 валентностей вершин в них одинаков.

В отличие от случая простых графов вершину валентности 2 можно стереть в большем количестве ситуаций. Нельзя стереть такую вершину лишь в петле — графе с одной вершиной и одним ребром (иначе получился бы непустой граф без вершин, чего мы не допускаем).

*Задача 9.5.* Докажите, что каждый связный граф (быть может, с петлями и кратными ребрами) топологически эквивалентен либо графу без вершин валентности 2, либо петле.

*Задача 9.6.* Докажите, что данный граф топологически эквивалентен единственному, с точностью до изоморфизма, графу без вершин валентности 2 либо петле.

Этот минимальный граф естественно считать каноническим представителем данного класса топологической эквивалентности графов.

### 9.3 Гомотопическая эквивалентность

Помимо топологической эквивалентности между графами (и, более общим образом, топологическими пространствами) имеется еще один тип эквивалентности, гомотопическая эквивалентность. Гомотопическая эквивалентность является более слабым отношением эквивалентности, чем топологическая эквивалентность. Это означает, что любые два топологически эквивалентных графа эквивалентны и гомотопически. Гомотопическая эквивалентность более естественно выражается на языке графов с петлями и кратными ребрами, чем на языке простых графов (хотя обсуждать гомотопическую эквивалентность простых графов также вполне возможно).

Два связных графа  $G$  и  $H$ , возможно с петлями и кратными ребрами, называются *гомотопически эквивалентными*, если стягивая ребра в  $G$  и в  $H$  можно получить изоморфные графы.

Напомним, что стягивать в графе можно только звено (ребро, не являющееся петлей), и при стягивании ребра его концы становятся новой вершиной, а само ребро удаляется. В результате стягивания ребра в графе могут появиться кратные ребра, даже если их не было в исходном графе, а если стягивается одно из кратных ребер, то остальные ребра, соединяющие те же две вершины, становятся петлями.

При стягивании ребра в связном графе он остается связным, а количество вершин в нем уменьшается на 1, так же, как и количество ребер. Поэтому эйлерова характеристика графа остается неизменной. Тем самым, гомотопически эквивалентные графы имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Согласно следующей теореме, обратное утверждение тоже верно:

**Теорема 9.3.1.** *Два связных графа  $G$  и  $H$  (быть может, с петлями и кратными ребрами) гомотопически эквивалентны в том и только в том*

случае, если у них одинаковые эйлеровы характеристики. Каждый связный граф  $G$  гомотопически эквивалентен графу с одной вершиной и петлями, причем количество петель в этом одновершинном графе равно  $1 - \chi(G)$ , где  $\chi(G)$  — эйлерова характеристика графа  $G$ .

Для доказательства достаточно заметить, что последовательно стягивая все звенья графа, мы получаем связный граф без звеньев. В таком графе одна вершина, а число петель в нем однозначно определяется его эйлеровой характеристикой, которая совпадает с эйлеровой характеристикой исходного графа.

*Задача 9.7.* Докажите, что всякое дерево гомотопически эквивалентно точке.

*Задача 9.8.* Опишите все графы, гомотопически эквивалентные графу с одной вершиной и одной петлей.

*Задача 9.9.* Распределите графы на рис. ?? на классы гомотопически эквивалентных между собой.

## 9.4 Фундаментальная группа и первые гомологии связного графа

Понятие гомотопической эквивалентности обязано своим происхождением тому, что гомотопически эквивалентные топологические пространства имеют много совпадающих топологических характеристик. Среди этих характеристик фундаментальная (первая гомотопическая) группа, высшие гомотопические группы, группы гомологий, кольца когомологий. Мы не собираемся обсуждать их все, ограничившись фундаментальной группой и первыми гомологиями графа.

Путем в топологическом пространстве  $M$ , соединяющим точки  $a, b \in M$ , называется непрерывное отображение  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , для которого  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ . Если  $\gamma_1, \gamma_2$  — два пути, такие, что начало второго совпадает с концом первого, то мы можем рассмотреть конкатенацию этих путей. Это путь  $\gamma_2 \# \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ , который поочередно проходит пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  “с удвоенной скоростью”.

Конкатенацию путей можно рассматривать как операцию на множестве путей. Однако неудобно то, что не любые два пути можно соединить: необходимо, чтобы начало второго пути совпадало с концом первого. Эту трудность легко преодолеть, выбрав точку в  $M$  и рассматривая только пути с началом и концом в этой точке. Любые два таких пути можно конкатенировать. Трудности при этом сохраняются. Построенная операция неассоциативна: результат конкатенации трех путей  $\gamma_3 \# \gamma_2 \# \gamma_1$  зависит, вообще говоря, от того, в каком порядке мы будем выполнять попарные операции,  $(\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1 \neq \gamma_3 \# (\gamma_2 \# \gamma_1)$ . Однако преодолевается и эта трудность: пути нужно заменить классами гомотопных путей.

Два пути  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = \gamma'(0) = \gamma'(1) = A \in M$  называются *гомотопными*, если путь  $\gamma'$  можно непрерывно продеформировать

в  $\gamma$ , оставляя на месте его начало и конец. Нетрудно показать, что пути  $(\gamma_3 \# \gamma_2) \# \gamma_1$  и  $\gamma_3 \# (\gamma_2 \# \gamma_1)$  гомотопны друг другу. Более того, класс гомотопии пути  $\gamma_2 \# \gamma_1$  не зависит от того, какого представителя мы выбрали в классах гомотопии каждого из путей  $\gamma_1, \gamma_2$ . Поэтому конкатенация дает корректно определенную операцию на множестве классов гомотопных путей в  $M$  с фиксированным началом и концом  $A$ , превращая его в группу. Это множество обозначается  $\pi_1(M, A)$  и называется *фундаментальной* (или первой гомотопической) группой пространства  $M$  с базисной точкой  $A$ .

*Задача 9.10.* Класс гомотопии какой пути служит единицей в фундаментальной группе? Какой элемент является обратным для класса данного пути  $\gamma$ ?

В широком классе случаев (к которому принадлежит и случай связных графов) фундаментальные группы данного топологического пространства, отвечающие различным выборам базисной точки, изоморфны между собой. Поэтому иногда говорят о фундаментальной группе топологического пространства, не упоминая о базисной точке.

*Пример 9.4.1.* Фундаментальная группа точки тривиальна, т.е. состоит из одного элемента; это единичный элемент группы. Фундаментальная группа петли  $X_1$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ , группе целых чисел. Класс гомотопии пути с фиксированным началом и концом определяется тем, сколько раз (и в каком направлении) этот путь наматывается на окружность. Фундаментальная группа одновершинника с  $s$  петлями  $X_s$  — это свободная группа с  $s$  образующими,  $\pi_1(X_s) = F_s$ . Каждая из этих  $s$  образующих  $x_1, \dots, x_s$  соответствует пути, обходящему один раз одну из петель в выбранном направлении, и элементы группы  $F_s$  записываются в виде  $x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots$ .

*Задача 9.11.* Объясните, почему стягивание ребра в графе не меняет фундаментальной группы.

Фундаментальная группа топологического пространства — технически сложный инвариант. Это связано с тем, что трудно сравнивать между собой различные описания групп и понимать, задают ли они изоморфные группы или нет. Поэтому вместо фундаментальных групп используют более простые инварианты — первые гомологии. Чтобы слушатели могли составить о них представление, дадим определение первых гомологий. Отметим, что в случае графов проблема сравнения фундаментальных групп не является очень содержательной: фундаментальная группа любого связного графа изоморфна фундаментальной группе графа  $X_s$ , одновершинника с  $s$  петлями, где  $s$  — эйлерова характеристика графа. Другими словами, фундаментальная группа графа является свободной группой с  $s$  образующими.

**Определение 9.4.2.** Группой первых гомологий связного топологического пространства с фундаментальной группой  $\pi_1$  называется факторгруппа  $\pi_1 / [\pi_1, \pi_1]$ . Здесь через  $[\pi_1, \pi_1]$  обозначен коммутант группы  $\pi_1$ , т.е. подгруппа в  $\pi_1$ , порожденная коммутаторами  $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$  пар элементов  $a, b$  в  $\pi_1$ .

Коммутант абелевой (т.е. коммутативной) группы состоит из единичного элемента. Коммутант  $H = [G, G]$  группы  $G$  является нормальной подгруппой, т.е.  $c^{-1}Hc = H$  для любого элемента  $c \in G$ . Фактор-группа  $G/H$  является абелевой группой.

*Задача 9.12.* Докажите, что любая подгруппа группы  $G$ , содержащая ее коммутант, является нормальной в  $G$ .

Фактор-группа свободной группы с  $s$  образующими является свободной абелевой группой с  $s$  образующими, т.е. изоморфна  $\mathbb{Z}^s$ . Тем самым, группа первых гомологий связного графа  $G$  изоморфна  $\mathbb{Z}^{1-\chi(G)}$ , где через  $\chi(G)$  обозначена эйлерова характеристика графа  $G$ . В широком круге наиболее часто встречающихся случаев группа первых гомологий топологического пространства конечно порождена. Всякая абелева конечно порожденная группа изоморфна прямой сумме групп

$$\mathbb{Z}^c \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k},$$

где  $m_1, \dots, m_k$  — некоторые натуральные числа,  $m_i \geq 2$  для  $i = 1, \dots, k$ . Правда, такое представление в виде прямой суммы может оказаться не единственным.

*Задача 9.13.* Приведите пример двух различных наборов чисел  $m_1, \dots, m_k$  и  $m'_1, \dots, m'_{k'}$  (не получающихся друг из друга переупорядочиванием), для которых группы  $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$  и  $\mathbb{Z}_{m'_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m'_{k'}}$  изоморфны между собой.

*Задача 9.14.* Приведите пример двух различных наборов чисел  $m_1, \dots, m_k$  и  $m'_1, \dots, m'_{k'}$  (не получающихся друг из друга переупорядочиванием), для которых группы  $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$  и  $\mathbb{Z}_{m'_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m'_{k'}}$  изоморфны между собой.

*Задача 9.15.* \* Докажите, что всякая конечная абелева группа допускает единственное представление в виде  $\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ , где числа  $m_1, \dots, m_k$  являются степенями простых чисел.

Это утверждение позволяет легко сравнивать между собой конечно порожденные абелевы группы.

Строго говоря, введенное нами определение группы первых гомологий топологического пространства как фактора фундаментальной группы по ее коммутанту определяет *группу первых гомологий с коэффициентами в кольце целых чисел  $\mathbb{Z}$* . Другой вариант того же определения позволяет определить группу первых гомологий с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце. Мы не будем давать это определение, однако хотели бы упомянуть, что введенное нами ранее пространство эйлеровых подграфов в графе  $G$  есть не что иное как группа первых гомологий графа  $G$  с коэффициентами в кольце  $\mathbb{Z}_2$  вычетов по модулю 2. Обратите внимание на то, что группы гомологий связного графа с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  и в  $\mathbb{Z}_2$  очень похожи друг на друга: группа гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  изоморфна  $\mathbb{Z}^{1-\chi(G)}$ , а группа гомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  изоморфна  $\mathbb{Z}_2^{1-\chi(G)}$ . Для более сложных топологических пространств разница может оказаться более существенной.

## Глава 10

# Поверхности

Графы — одномерные объекты (хотя мы и не знаем, что такое размерность, но смысл этого утверждения понятен). В этой главе мы начнем изучение двумерных объектов — поверхностей. Так же, как и графы, поверхности могут выступать как в своей комбинаторной, так и в топологической ипостаси. В топологии изучают объекты любой размерности, иногда даже бесконечномерные. При этом часто используются комбинаторные методы изучения топологических объектов.

## 10.1 Поверхности

Наиболее обыденным примером двумерной поверхности является плоскость. Если мы вырежем в плоскости несколько дырок, то то, что останется, тоже будет поверхностью. Вообще, вырезание дырок из поверхности оставляет ее поверхностью.

Следующим по сложности примером поверхности является сфера. Сферу в трехмерном пространстве с координатами  $(x, y, z)$  можно задать уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Такая сфера является поверхностью шара, заданного неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Если мы аккуратно мнем сферу, не разрывая ее и не склеивая между собой различные ее точки (скажем, если шар, поверхностью которого она является, сделан из пластилина), то с топологической точки зрения она остается сферой. Так, поверхность боба это сфера.

Более общим образом, поверхность в 3-мерном пространстве можно задать уравнением  $F(x, y, z) = 0$  — если функция трех переменных  $F$  достаточно хорошая. Так, уравнение

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

задает, при  $R > r > 0$  в трехмерном пространстве тор с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения  $R$  и с радиусом образующей окружности  $r$ . Впрочем, тор проще задать парой уравнений в четырехмерном пространстве с координатами  $(x, y, z, w)$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1. \end{cases}$$

Как мы увидим впоследствии, тор и сфера топологически неэквивалентны между собой (негомеоморфны).

*Задача 10.1.* Придумайте свои примеры поверхностей.

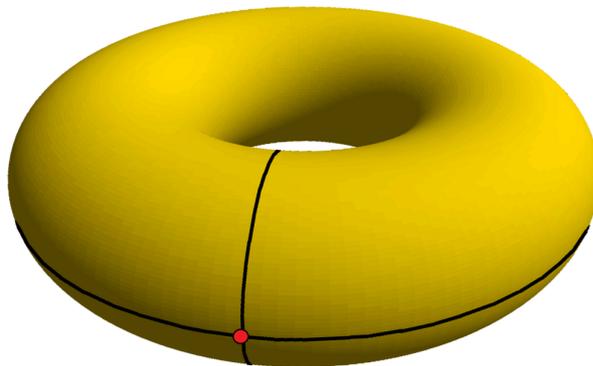


Рис. 10.1: Разрезание тора на квадрат

## 10.2 Комбинаторные поверхности

Возьмем ножницы и разрежем данную нам поверхность на многоугольники. Нас будут интересовать только разрезания на конечное число многоугольников. При этом мы разрешаем сторонам многоугольников быть не только отрезками прямых, но и дугами кривых. Многоугольники, на которые мы разрезаем поверхность, будем считать выпуклыми и правильными; кроме того, мы полагаем, что стороны всех этих многоугольников имеют одинаковую длину.

*Задача 10.2.* Разрежьте сферу на а) 4 треугольника; б) 6 квадратов; в) 6 треугольников; г) 8 треугольников; д) 12 пятиугольников.

*Задача 10.3.* Придумайте поверхность, которую нельзя разрезать на конечное число многоугольников.

Хорошо известно, как разрезать тор на квадрат, см. рис. 10.1.

Если, разрезав поверхность на многоугольники, мы запомнили, какие из сторон этих многоугольников были склеены между собой, то мы можем восстановить исходную поверхность. Правда, для этого еще нужно помнить *направление склейки*: сторону многоугольника со стороной другого многоугольника можно склеить двумя существенно различными способами. Мы будем обозначать склеиваемые стороны одинаковыми буквами и ориентировать их, так, чтобы направление склейки уважало ориентацию склеиваемых сторон.

**Определение 10.2.1.** *Комбинаторной компактной двумерной поверхностью* называется конечный набор правильных многоугольников с ориентированными сторонами, разбитыми на пары.

В этом определении подразумевается, что отрезки склеиваются друг с другом целиком — нельзя склеить часть стороны с частью другой или той

же стороны. Отметим, что общее количество сторон в склеиваемых многоугольниках должно быть четным — иначе их нельзя разбить на пары. Обратите также внимание на то, что разрешается склеивать стороны одного многоугольника между собой.

Стороны многоугольников оставляют след на склеенной из них комбинаторной поверхности. Этот след является графом. Вершины графа — это следы вершин многоугольника, ребра образованы парами склеенных сторон. Среди ребер могут оказаться кратные ребра и петли — мы не требуем, чтобы получившийся граф был простым. Ребра графа можно интерпретировать как разрезы, по которым мы разрезаем поверхность на многоугольники. Поэтому этот граф мы будем называть *разрезающим графом* комбинаторной поверхности.

Поскольку мы допускаем в разрезающих графах петли и кратные ребра, естественно расширить круг склеиваемых многоугольников — помимо правильных  $n$ -угольников при  $n \geq 3$  мы разрешим также участвовать в склейках “правильным 2-угольникам” и “правильным 1-угольникам” (но не “правильным 0-угольникам”).

**Определение 10.2.2.** Комбинаторная поверхность называется *связной*, если связан ее разрезающий граф. Количество компонент связности комбинаторной поверхности — это количество компонент связности разрезающего графа.

*Задача 10.4.* Приведите пример несвязной комбинаторной компактной двумерной поверхности.

**Определение 10.2.3.** *Комбинаторной компактной двумерной поверхностью с краем* называется конечный набор правильных многоугольников с ориентированными сторонами, некоторые из которых разбиты на пары. *Краем* такой поверхности называется след, оставленный на ней сторонами, не входящими ни в какую пару.

Как и в случае комбинаторной поверхности без края, след, оставленный сторонами склеиваемых многоугольников (в том числе, и теми, которые не участвуют в склейке) на поверхности, образует граф. Как и в случае отсутствия края, мы будем называть этот граф *разрезающим*.

*Пример 10.2.4.* По-разному склеивая две противоположные стороны квадрата мы можем получить две различные комбинаторные компактные поверхности с краем. Одна из них называется *цилиндром*, другая — *листом Мебиуса*.

*Задача 10.5.* Сколько компонент связности имеет граница цилиндра? Сколько компонент связности имеет граница листа Мебиуса?

*Задача 10.6.* Задайте параметрически вложение цилиндра а) в трехмерное пространство; б) в плоскость. в) Задайте параметрически вложение листа Мебиуса в трехмерное пространство.

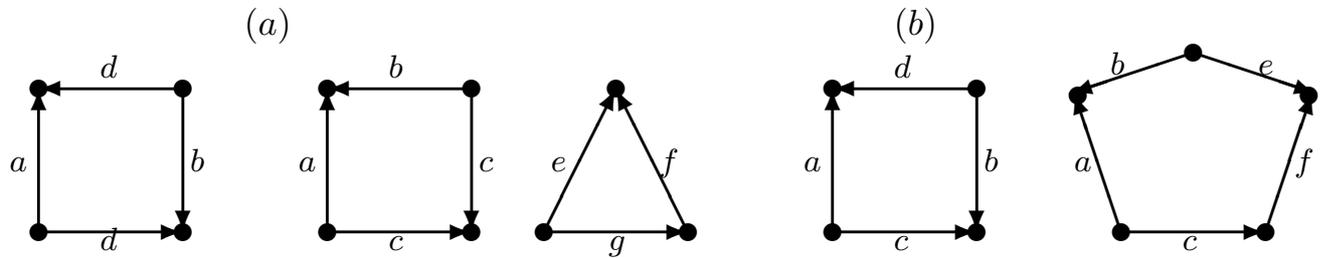


Рис. 10.2: Склейка поверхностей из многоугольников

**Задача 10.7.** Какую поверхность задают следующие отображения прямоугольника  $(s, t) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$  в трехмерное пространство:

$$(a) \begin{cases} x = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) \cos(s) \\ y = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{s}{2}\right)\right) \sin(s) \\ z = \frac{t}{2} \sin\left(\frac{s}{2}\right); \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x = \left(1 - \frac{t}{2} \cos(s)\right) \cos(s) \\ y = \left(1 - \frac{t}{2} \cos(s)\right) \sin(s) \\ z = \frac{t}{2} \sin(s); \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{3s}{2}\right)\right) \cos(s) \\ y = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{3s}{2}\right)\right) \sin(s) \\ z = \frac{t}{2} \sin\left(\frac{3s}{2}\right); \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(-\frac{s}{2}\right)\right) \cos(s) \\ y = \left(1 - \frac{t}{2} \cos\left(-\frac{s}{2}\right)\right) \sin(s) \\ z = \frac{t}{2} \sin\left(-\frac{s}{2}\right)? \end{cases}$$

**Определение 10.2.5.** Компактная комбинаторная поверхность (возможно, с краем) называется *ориентируемой*, если из нее нельзя вырезать лист Мебиуса.

**Задача 10.8.** Постройте неориентируемую комбинаторную компактную поверхность (без края).

**Задача 10.9.** Какие из поверхностей на рис. 10.2 являются ориентируемыми?

### 10.3 Эйлерова характеристика комбинаторной поверхности

Одним из ключевых инвариантов графов является их эйлерова характеристика — разность между числом вершин и числом ребер в графе. Гомотопические свойства связного графа целиком определяются его эйлеровой характеристикой. В свою очередь, эйлерова характеристика комбинаторной поверхности также несет в себе большое количество информации об этой поверхности.

**Определение 10.3.1.** *Эйлеровой характеристикой* комбинаторной поверхности  $S$  (быть может, имеющей край) называется число

$$\chi(S) = |V(S)| - |E(S)| + |F(S)|,$$

где  $|V(S)|$  — количество вершин в разрезающем графе комбинаторной поверхности  $S$ ,  $|E(S)|$  — количество ребер в нем, и  $|F(S)|$  — количество граней, т.е. количество склеиваемых многоугольников.

*Задача 10.10.* Подсчитайте эйлеровы характеристики разрезов сферы из задачи 10.2 и сравните эти эйлеровы характеристики между собой.

*Задача 10.11.* Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра и листа Мебиуса из примера 10.2.4 и сравните эти эйлеровы характеристики между собой.

*Задача 10.12.* Докажите, что эйлерова характеристика комбинаторной компактной ориентируемой поверхности четна.

*Задача 10.13.* Приведите пример комбинаторной компактной неориентируемой поверхности с нечетной эйлеровой характеристикой.

*Задача 10.14.* Вычислите эйлеровы характеристики комбинаторных компактных поверхностей с рис. 10.2.

Ориентируемые и неориентируемые поверхности ведут себя существенно различным образом.

**Теорема 10.3.2.** *Пусть  $S$  и  $S'$  — два разрезания одной поверхности. Тогда их эйлеровы характеристики совпадают,  $\chi(S) = \chi(S')$ .*

Другими словами, эйлерова характеристика — это топологическая характеристика двумерной поверхности, а не выбранного нами разрезания этой поверхности.

Для доказательства определим, во-первых, подразбиение комбинаторной поверхности (быть может, имеющей край). Пусть  $f$  — правильный  $k$ -угольник в комбинаторной поверхности  $S$ . Поставим в центр этого  $k$ -угольника дополнительную вершину и соединим ее отрезками с вершинами  $k$ -угольника. Разрезав  $k$ -угольник по этим отрезкам, получим *подразбиение  $k$ -угольника*. Результат произвольной последовательности подразбиений ребер разрезающего графа и многоугольников, входящих в комбинаторную поверхность  $S$ , будем называть *подразбиением комбинаторной поверхности*.

Очевидно, что подразбиение комбинаторной поверхности имеет ту же эйлерову характеристику, что и исходная комбинаторная поверхность: при подразбиении ребра не меняется число граней и эйлерова характеристика разрезающего графа, а при подразбиении  $k$ -угольника число вершин в разрезающем графе увеличивается на 1, число ребер — на  $k$ , а число граней — на  $k - 1$ , т.е. значение  $|V| - |E| + |F|$  не изменяется.

Для доказательства теоремы осталось показать, что у любых двух разрезов  $S$  и  $S'$  одной поверхности имеется общее подразбиение. Формально

это не вполне верно (например, потому, что дуга из разрезания  $S$  и дуга из разрезания  $S'$  могут иметь бесконечно много точек пересечения). Однако нетрудно доказать, что можно немного изменить разрезание  $S'$ , сохраняя его вершины и не меняя его комбинаторного типа, так, чтобы любые две дуги из различных разбиений пересекались по конечному числу точек. После этого общее подразбиение строится уже легко, что и завершает доказательство теоремы.

*Задача 10.15.* Докажите, что тор и сфера являются различными поверхностями (т.е. негомеоморфны между собой).

## Глава 11

# Классификация двумерных поверхностей

Поверхность можно разрезать на многоугольники многими различными способами. В этой главе мы обсудим, как по двум наборам склеиваемых многоугольников понять, совпадают ли склеенные из них поверхности. Для этой цели мы докажем теорему о классификации двумерных поверхностей.

## 11.1 Сфера с ручками

Пусть  $M$  — многоугольник. Разбив некоторые стороны многоугольника на пары и указав направления склейки, мы получим комбинаторную компактную двумерную поверхность (быть может, с краем). Если среди склеиваемых пар есть хотя бы одна, в которой стороны склеиваются со скручиванием на поворот, то склеенная поверхность является неориентируемой — из нее можно вырезать лист Мебиуса. Если две стороны пары не имеют общих вершин, то это делается вырезанием четырехугольника, вершинами которого являются 4 конца выбранной пары сторон.

*Задача 11.1.* Пусть две склеиваемые со скручиванием на поворот стороны многоугольника имеют общий конец. Как можно вырезать из поверхности лист Мебиуса в этом случае?

Напротив, если ни одна из пар склеиваемых сторон многоугольника не скручивается на поворот, то полученная в результате поверхность ориентируема. Неориентируемость поверхности проверить легко — достаточно показать, как вырезать из нее лист Мебиуса. Доказать ориентируемость несколько сложнее — нам нужно доказывать, что не существует способа вырезать лист Мебиуса. Доказывать несуществование чего-либо обычно непросто (попробуйте доказать, например, что не существует единорога).

Для доказательства обратим внимание на то, что поверхность листа Мебиуса нельзя покрасить в два цвета так, чтобы при переходе через край листа цвет менялся. Если же среди склеиваемых пар сторон многоугольника  $M$  нет таких, которые склеиваются со скручиванием на поворот, то мы можем покрасить две поверхности многоугольника в разные цвета, и склеенная поверхность будет раскрашена в два цвета так, что при переходе через границу любого разреза цвет будет меняться.

Склеивая стороны квадрата по схеме  $abab$  с сохранением ориентированности, мы получаем тор. Несколько торов можно склеить вместе по схеме  $a_1b_1a_1b_1 \dots a_nb_na_nb_n$ . Получающаяся в результате поверхность называется *сферой с  $n$  ручками*, см. рис. 11.1.

## 11.2 Формулировка теорем классификации связанных компактных двумерных поверхностей

Лист Мебиуса можно представить как результат склейки противоположных сторон квадрата — склейка осуществляется со скручиванием на поворот. Что происходит с листом Мебиуса при разрезании его по средней линии?

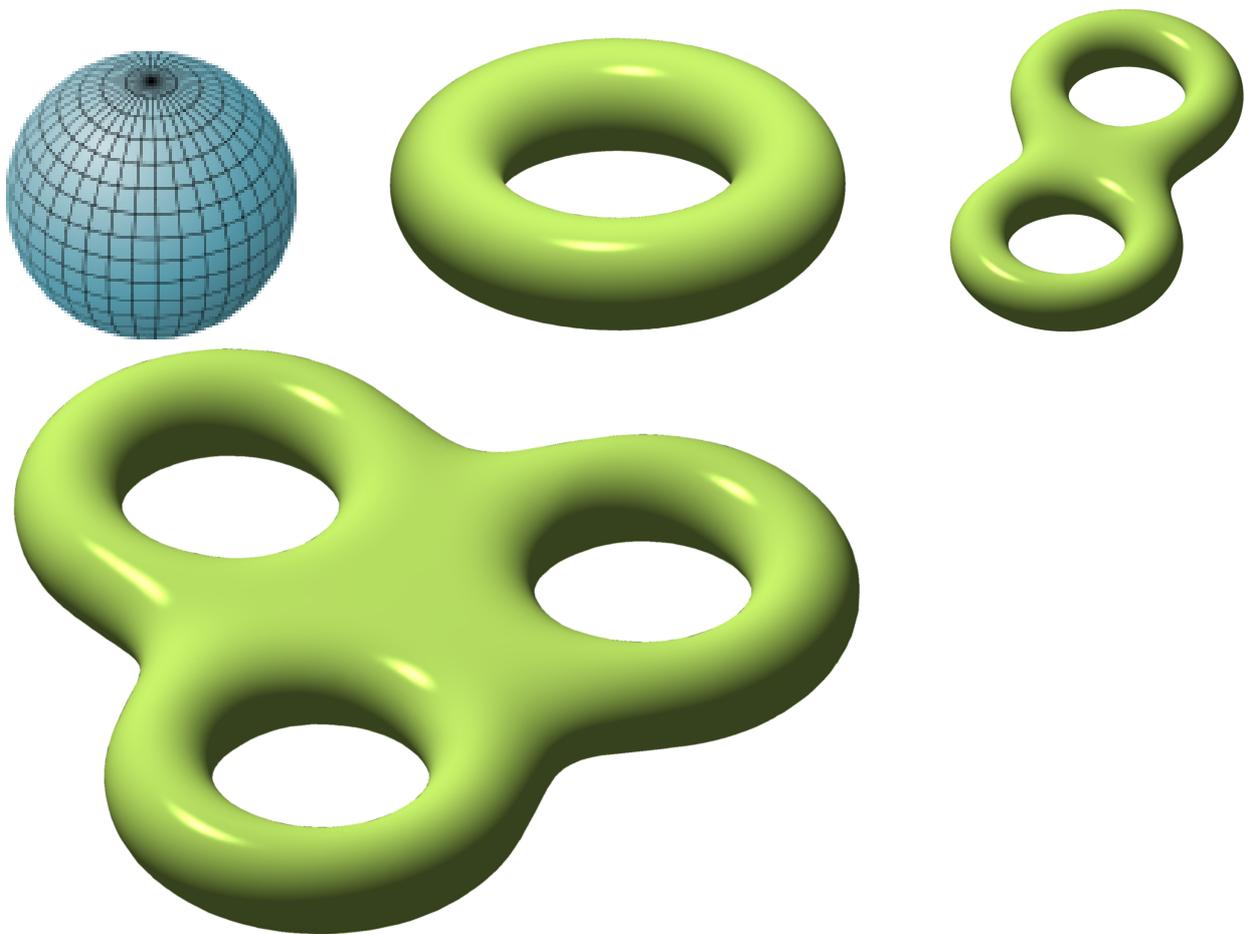


Рис. 11.1: Сферы с  $n = 0, 1, 2, 3$  ручками

Для ответа на этот вопрос разрежем квадрат по отрезку, соединяющему середины склеиваемых сторон, и приклеим одну из половинок квадрата к другой вдоль половинки бывшей стороны. Мы увидим, что в результате квадрат превратился в прямоугольник, две противоположные стороны которого склеены, но уже без скручивания, т.е. в цилиндр. Отметим, что две граничные окружности этого цилиндра — это бывшая граничная окружность листа Мебиуса и добавленная к ней окружность разреза. Если мы осуществим эту операцию с бумажным листом Мебиуса, то увидим, что получится результат склейки противоположных сторон прямоугольника с полным оборотом. Но с топологической точки зрения этот результат не отличается от цилиндра — поверхность та же самая, только она нестандартным образом вложена в 3-мерное пространство!

*Задача 11.2.* Какие поверхности получатся, если разрезать лист Мебиуса вдоль отрезков, отстоящих от несклеиваемых в листе сторон квадрата на  $1/3$  стороны квадрата?

Подобные процедуры разрезания и склейки сторон применимы к любой поверхности. Мы воспользуемся ими для доказательств теорем классификации. Отметим, во-первых, что любую связную поверхность, которую можно склеить из нескольких многоугольников, можно склеить и из одного многоугольника. Действительно, если поверхность склеена из нескольких многоугольников и связна, то стороны каких-то двух различных многоугольников склеиваются между собой. Возьмем два таких многоугольника и склеим их по этим сторонам — получим вместо двух один многоугольник, причем поверхность, склеиваемая из нового набора многоугольников совпадает с исходной. Будем повторять эту процедуру, пока не останется один многоугольник.

Далее мы будем рассматривать склейки поверхностей из одного многоугольника. Некоторые стороны этого многоугольника разбиты на пары. Если мы предполагаем, что поверхность ориентируема, то для ее склейки достаточно знать это разбиение на пары — нет необходимости выбирать ориентации склеиваемых попарно сторон. Записанную по циклу последовательность букв, в которой каждая буква встречается дважды, определяющую разбиение сторон  $2n$ -угольника на пары, будем называть *схемой склейки*. Схема склейки однозначно определяет получающуюся в результате склейки ориентируемую поверхность.

**Теорема 11.2.1.** *Всякая связная ориентируемая компактная поверхность (без края) без края либо является сферой, либо ее можно склеить из  $4n$ -угольника по схеме  $a_1b_1a_1b_1a_2b_2a_2b_2 \dots a_nb_na_nb_n$ . Число  $n$  однозначно определяется исходной поверхностью.*

Склеюку ориентируемой поверхности по схеме, описываемой в этой теореме, мы будем называть *стандартной*. Как мы знаем, при  $n = 1$  результат склейки по стандартной схеме является тором. При  $n = 2$  ориентируемая поверхность, являющаяся результатом склейки 8-угольника по стандартной схеме называется *кренделем*, или *двойным тором*.

*Задача 11.3.* Вычислите эйлерову характеристику ориентируемой поверхности, получаемой из  $4n$ -угольника склейкой по стандартной схеме.

**Теорема 11.2.2.** *Всякую связную неориентируемую компактную поверхность (без края) можно склеить из  $2n$ -угольника по схеме  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n$ , причем каждые две склеиваемые стороны склеиваются с полюборотом. Число  $n$  однозначно определяется исходной поверхностью.*

Склеюку неориентируемой поверхности по схеме, описываемой в этой теореме, мы будем называть *стандартной*. Результат склейки по стандартной схеме неориентируемой поверхности при  $n = 1$  называется *проективной плоскостью*, при  $n = 2$  — *бутылкой Кляйна*. Неориентируемые поверхности без края не допускают вложения в трехмерное пространство без самопересечений, поэтому их трудно реалистично изображать.

*Задача 11.4.* Вычислите эйлерову характеристику неориентируемой поверхности, получаемой из  $2n$ -угольника склейкой по стандартной схеме.

*Задача 11.5.* Склеим противоположные стороны  $2n$ -угольника попарно так, чтобы получить ориентируемую поверхность (т.е. без скручивания). К какой стандартной форме приводится эта поверхность?

*Задача 11.6.* Склеим противоположные стороны  $2n$ -угольника попарно со скручиванием каждой пары на полюборота. К какой стандартной форме приводится эта поверхность?

*Задача 11.7.* К каким стандартным формам приводятся поверхности, склеиваемые в соответствии с рис. 10.2?

### 11.3 Доказательство теорем классификации

Пусть нам задан многоугольник, стороны которого разбиты на пары, и мы склеиваем ориентируемую поверхность из этого многоугольника. Если две склеиваемые стороны идут подряд, то мы можем их склеить, уменьшив тем самым число сторон в многоугольнике. Предположим теперь, что идущих подряд склеиваемых сторон нет. Тогда в многоугольнике обязательно есть перемежающиеся пары склеиваемых сторон  $a \dots b \dots a \dots b \dots$ . Действительно, достаточно в качестве  $a$  взять пару склеиваемых сторон на наименьшем расстоянии друг от друга (т.е. с наименьшим количеством сторон между ними; если таких пар склеиваемых сторон несколько, то можно выбрать любую из них).

Если все четыре стороны перемежающейся пары идут подряд, по схеме  $abab \dots$ , то мы ничего не делаем и переходим к следующей перемежающейся паре. Такую последовательность из двух перемежающихся склеиваемых пар сторон будем называть *ручкой*. Если же стороны перемежающейся пары идут не подряд, то воспользуемся последовательностью разрезов и склеиваний, изображенной на рис. 11.3. Эта последовательность позволяет выделить ручку, не увеличивая число сторон многоугольника и не затрагивая

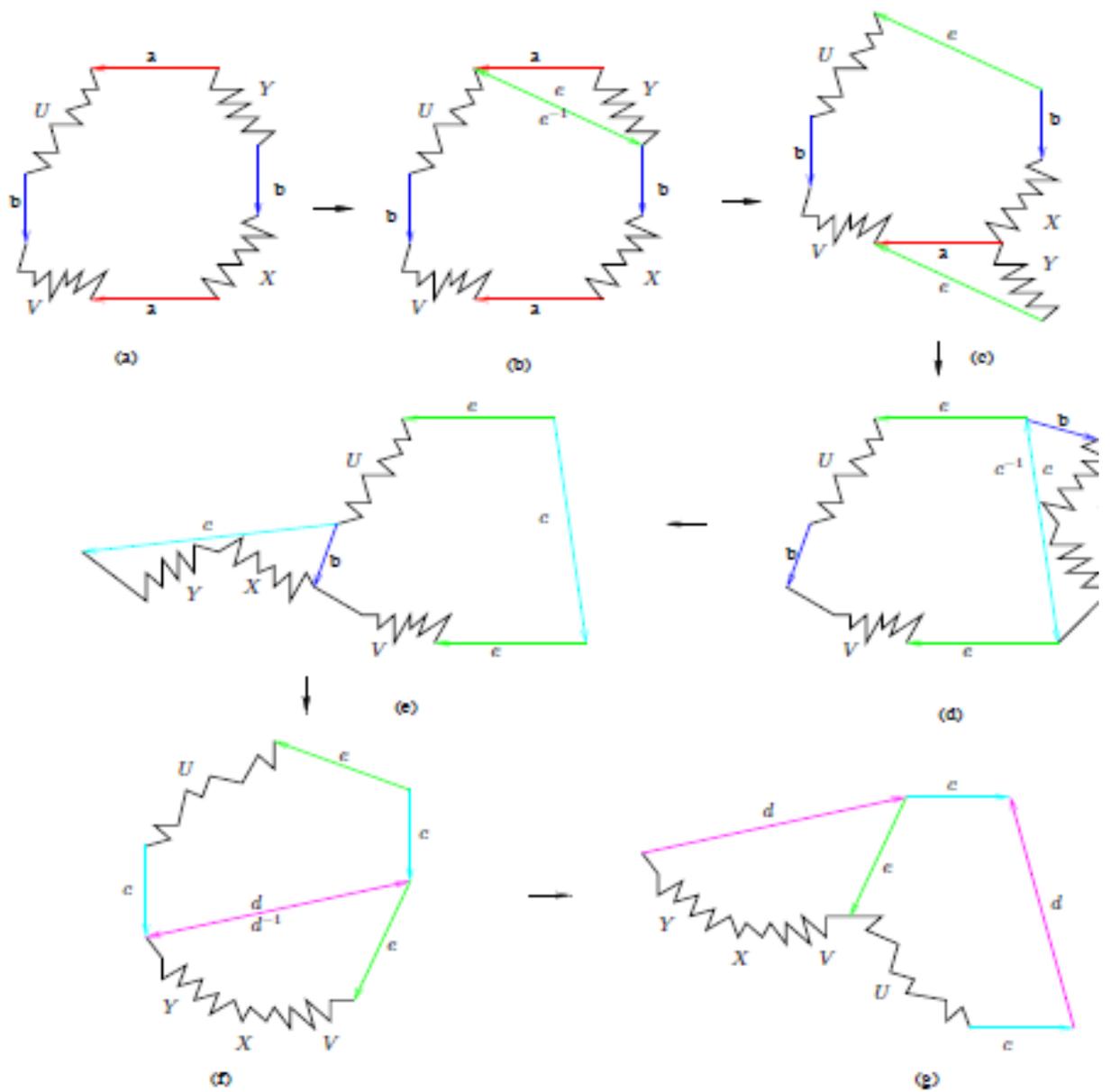


Рис. 11.2: Собираение ручки из перемежающихся склеиваемых сторон

уже собранные ручки. С оставшейся частью многоугольника повторяется та же процедура, что и выше.

Чтобы проверить, что ориентируемые поверхности, склеенные из  $4n$ -угольника по стандартной схеме, различны при различных значениях  $n$ , вычислим эйлерову характеристику такой поверхности. Все вершины  $4n$ -угольника при стандартной склейке склеиваются в одну, поэтому эйлерова характеристика равна

$$|V| - |E| + |F| = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n.$$

При разных значениях  $n$  эйлеровы характеристики различны, а значит, не могут совпадать и поверхности с этими эйлеровыми характеристиками. Отметим, что эйлерова характеристика ориентируемой поверхности обязательно четна; эйлерова характеристика связной поверхности может принимать значения  $2, 0, -2, -4, \dots$

Не только эйлерова характеристика  $2 - 2n$  связной ориентируемой поверхности является ее значимой характеристической величиной, но и само число  $n$  — число ручек. Его называют *родом* ориентируемой поверхности (и часто обозначают символом  $g$  — первой буквой слова genus, род). Понятие рода, т.е. количества ручек, также корректно определено и для ориентируемых поверхностей с краем. Всякая такая поверхность единственным образом представляется в виде ориентируемой поверхности некоторого рода  $g$ , из которой вырезано некоторое количество дырок.

*Задача 11.8.* Придумайте стандартную схему склейки для ориентируемых поверхностей с краем и докажите, что всякая ориентируемая поверхность с краем реализуется с помощью вашей схемы, причем единственным образом.

Для доказательства теоремы классификации неориентируемых поверхностей, во-первых, как и выше, устраним все пары склеиваемых с сохранением ориентируемости соседних сторон и склеим все ручки. Поскольку поверхность неориентируема, в многоугольнике остаются пары сторон, склеиваемых со скручиванием на поворот. Соберем такие стороны в пары соседей, см. рис. 11.3. Для окончания доказательства покажем, как такую пару соседних сторон и ручку заменить тройкой пар соседних сторон, склеиваемых со скручиванием на поворот, см. рис. 11.4.

*Задача 11.9.* Вычислите эйлерову характеристику неориентируемой поверхности, полученной стандартной склейкой  $2n$ -угольника. Воспользовавшись результатом вычисления, докажите, что при разных значениях  $n$  результат склейки различен.

*Задача 11.10.* Какая поверхность получается в результате склейки по границе листа Мебиуса и диска?

*Задача 11.11.* Какая поверхность получается в результате склейки по границе двух листов Мебиуса?

*Задача 11.12.* Придумайте стандартную схему склейки для неориентируемых поверхностей с краем и докажите, что всякая неориентируемая поверхность с краем реализуется с помощью вашей схемы, причем единственным образом.

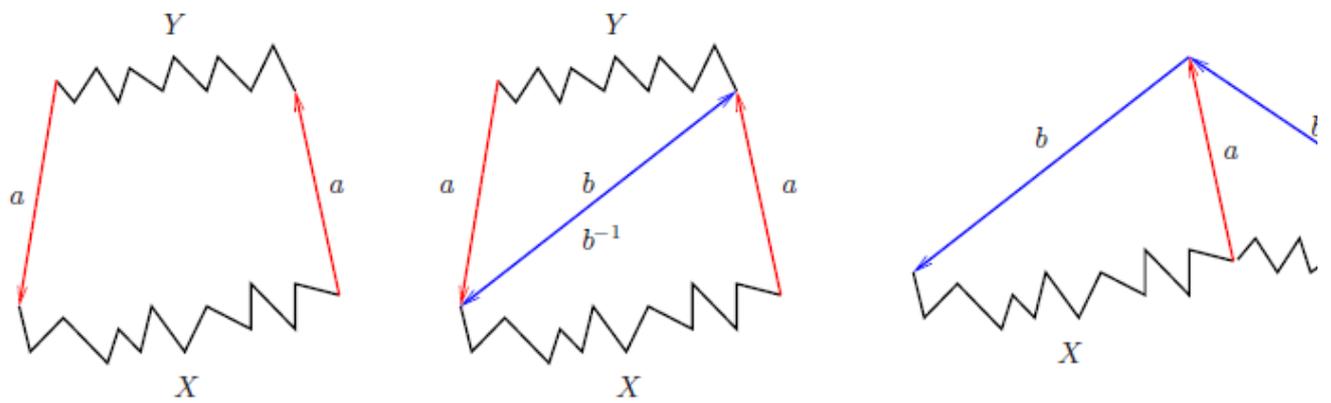


Рис. 11.3: Собираение пары склеиваемых с полуоборотом сторон

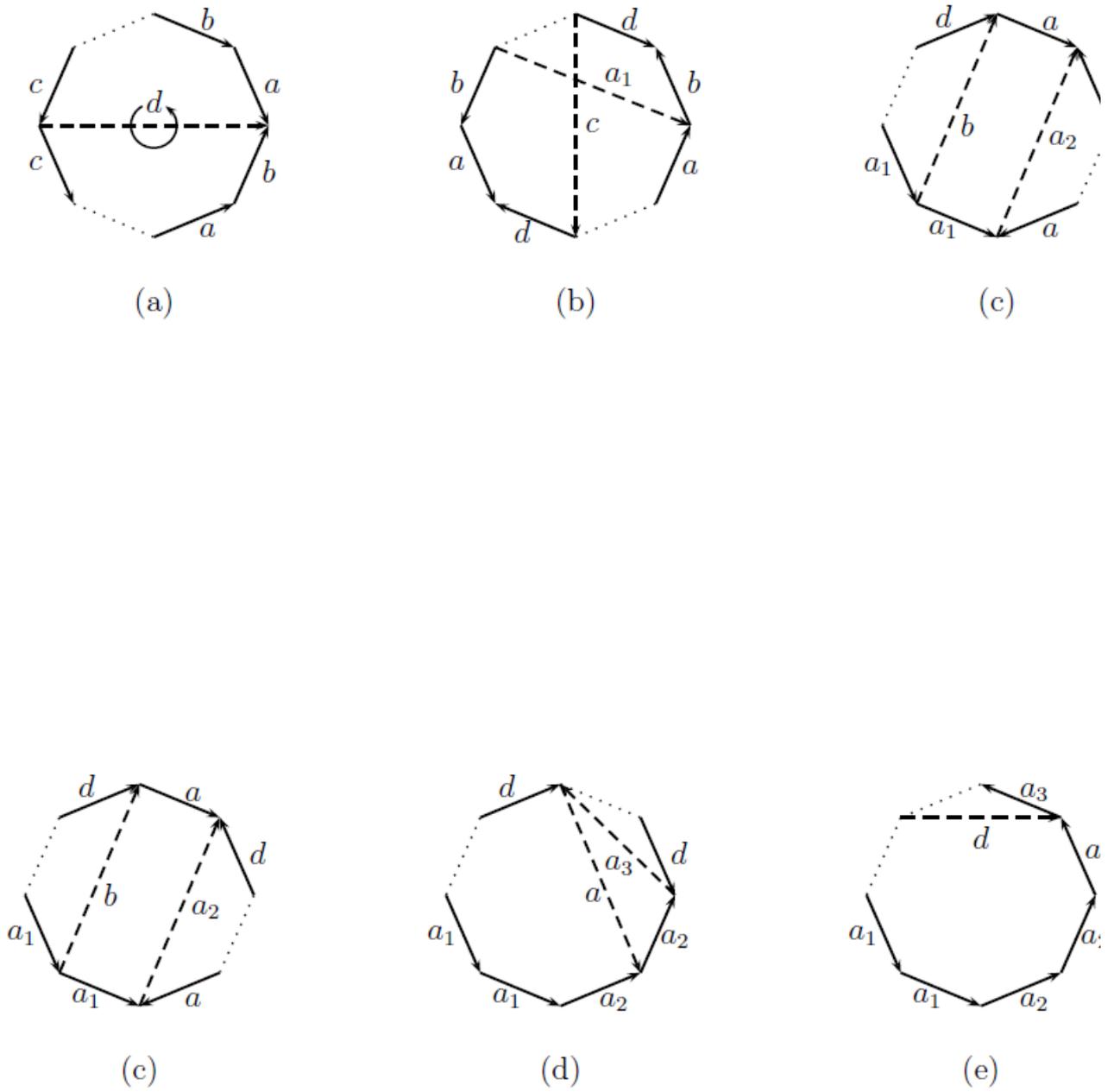


Рис. 11.4: Преобразование ручки к стандартной схеме склейки неориентируемой поверхности

## Глава 12

# Планарные и сферические графы

Разрезая поверхность на многоугольники, мы, тем самым, получаем граф — разрезающий граф. Естественно спросить себя, какие графы могут быть разрезающими для данной поверхности. В этой главе мы обсудим простейший — и уже глубоко нетривиальный — случай: графы, разрезающие ориентируемую поверхность рода 0, т.е. сферу. Выкинув из сферы точку, не лежащую на разрезающем графе, мы превращаем сферу в диск, или, что с топологической точки зрения то же самое, в плоскость. Поэтому графы, которые можно нарисовать на сфере, можно нарисовать и на плоскости, и их часто называют планарными

## 12.1 Планарные графы

Пусть  $G$  — связный граф. Граф  $G$  называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы общими точками его ребер служили только вершины графа. Другими словами, связный граф является планарным, если он служит разрезающим графом для некоторой склейки сферы.

Примеры планарных графов придумать нетрудно. Например, планарными являются все деревья и все графы, образованные вершинами и ребрами выпуклых многогранников.

*Задача 12.1.* Пусть графы  $G, H$  планарны. Докажите, что граф  $G \vee H$ , полученный отождествлением какой-либо вершины в  $G$  с какой-нибудь вершиной в  $H$ , планарен.

Придумать непланарный граф. тоже несложно. Однако не так просто доказать, что придуманный вами граф непланарен. Простейшие запреты дает эйлерова характеристика.

**Утверждение 12.1.1.** *Полный граф на 5 вершинах  $K_5$  не планарен.*

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Предположим, что граф  $K_5$  планарен и рассмотрим его изображение на сфере. Разрежем сферу по этому графу. Пусть она разрезается на  $F$  многоугольников. Учитывая, что эйлерова характеристика сферы равна 2, получаем

$$2 = |V(K_5)| - |E(K_5)| + F = 5 - 10 + F = F - 5.$$

Отсюда  $F = 7$ . Но каждый многоугольник разрезания должен содержать не меньше 3 сторон, поскольку в графе  $K_5$  нет петель и кратных ребер. Принимая во внимание, что суммарное количество сторон всех многоугольников равно удвоенному количеству ребер в графе, мы заключаем, что

$$3F \leq 20,$$

в противоречии с полученным нами равенством  $F = 7$ . Утверждение доказано.

*Задача 12.2.* Докажите, что не является планарным полный двудольный граф  $K_{3,3}$  с равными долями величины 3 и 3.

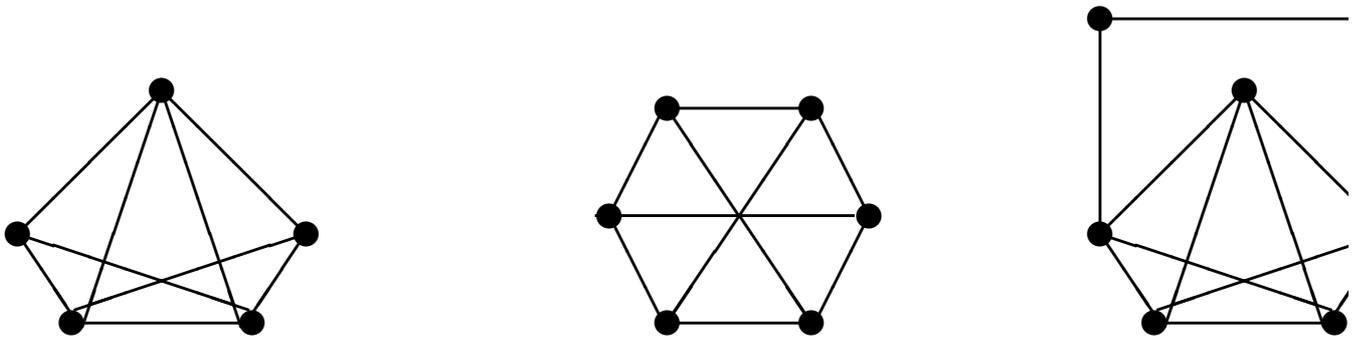


Рис. 12.1: Какие из изображенных связных графов планарны?

*Задача 12.3.* Докажите, что всякое подразбиение непланарного графа является непланарным графом.

*Задача 12.4.* Какие из графов на рис. 12.1 являются планарными?

Понятие планарности естественным образом применимо как к простым графам, так и к графам с петлями и кратными ребрами.

*Задача 12.5.* Докажите, что граф с петлями и кратными ребрами является планарным в том и только в том случае, если планарен простой граф, полученный из него удалением петель и заменой всех кратных ребер одинаковыми.

Математики выработали целый ряд критериев для проверки того, является ли данный связный граф планарным. Исторически одним из первых критериев было следующее утверждение.

**Теорема 12.1.2** (Куратовский, Понтрягин). *Связный граф является планарным в том и только в том случае, если среди его подграфов нет подграфов, изоморфных подразбиению графа  $K_5$  или графа  $K_{3,3}$ .*

Мы не приводим доказательства этой теоремы.

Знаменитая гипотеза о 4 красках утверждает, что каждый планарный граф допускает правильную раскраску вершин в 4 цвета. Единственное известное доказательство этой гипотезы использует компьютерный перебор большого числа случаев. Возможно, отсутствие изящного доказательства указывает на то, что гипотеза о 4 красках лишена глубокого математического смысла.

## 12.2 Сферические графы

Пусть  $G$  — связный планарный граф (быть может, с петлями и кратными ребрами). Результат вложения графа  $G$  в сферу мы называем *сферическим графом*. При этом может оказаться, что граф  $G$  допускает различные вложения в сферу, т.е. ему соответствуют различные сферические графы. Два сферических графа мы называем *одинаковыми*, если они задают две одинаковые схемы склейки двух одинаковых наборов многоугольников. Другими

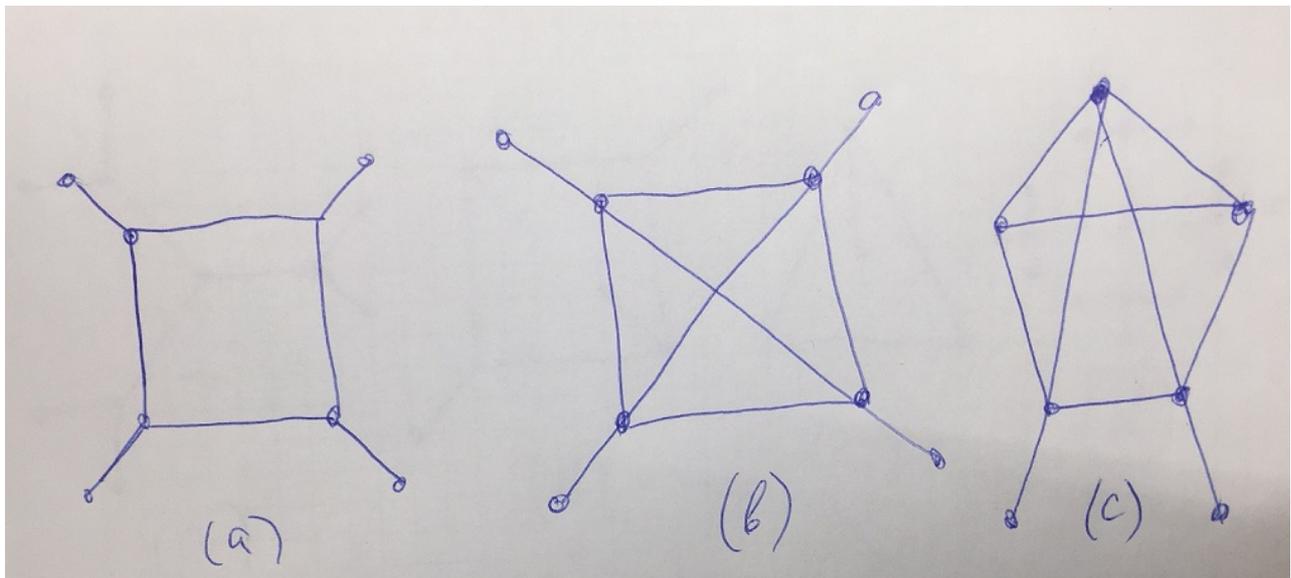


Рис. 12.2: Планарные графы

словами, мы не различаем два сферических графа в случае, если существует гомеоморфизм сферы, переводящий первый граф во второй.

Подчеркнем различие между понятиями планарного графа и сферического графа: планарный граф — это (абстрактный) граф, допускающий вложение в сферу, а сферический граф — это планарный граф с уже заданным вложением в сферу. Помимо сферических графов, можно рассматривать *плоские графы*, т.е. заданные вложения планарных графов в плоскость. Каждый сферический граф можно превратить в плоский, выбрав одну из граней вложения (ту, в которую мы помещаем “бесконечность” — для плоского графа это “внешняя” грань). Это можно сделать разными способами, и в некоторых случаях выбор различных граней у сферического графа приводит к неизоморфным плоским графам. Поскольку нас интересуют в первую очередь компактные поверхности, мы не будем уделять много внимания плоским графам (плоскость некомпактна), сосредоточившись на сферических (сфера компактна).

**Задача 12.6.** Укажите для каждого графа с рис. 12.2 по крайней мере три различных вложения в сферу.

### 12.3 Группа симметрий сферического графа

Как уже говорилось выше, один и тот же планарный граф может иметь различные вложения в сферу, т.е. он может быть разрезающим графом для различных сферических графов. У каждого сферического графа имеется своя *группа автоморфизмов*, т.е. группа непрерывных преобразований сферы, переводящих граф в себя. Точнее говоря, таких групп две — группа автоморфизмов, сохраняющих ориентацию сферы, и группа всех автоморфизмов сферического графа. Для объяснения того, чем отличаются эти две группы, мы должны обсудить прежде, что такое ориентация.

Понятие ориентации является одним из важнейших в топологии. Ранее мы разделили все поверхности на два класса — ориентируемые (те, из которых нельзя вырезать ленту Мебиуса) и неориентируемые (те, из которых ленту Мебиуса можно вырезать). (Отметим в скобках, что такое разделение имеет смысл для поверхностей любой размерности, большей 1. Для “поверхностей размерности 1”, т.е. кривых, оно бессмысленно, однако и рассматриваемые нами двумерные поверхности, и трехмерные, и поверхности большего числа измерений бывают как ориентируемые, так и неориентируемые. Также стоит отметить, что понятие ориентируемости глобально, а не локально: маленькая окрестность любой точки ориентируема, даже если вся поверхность неориентируема. Например, ориентируема маленькая окрестность любой точки на листе Мебиуса.)

На неориентируемой поверхности ориентацию задать невозможно. А вот на всякой связной ориентируемой поверхности существует две различные ориентации. В рассматриваемом нами случае двумерных поверхностей *ориентацией* называется согласованный выбор направления поворота “против часовой стрелки” во всех точках поверхности. Под “согласованностью” здесь мы понимаем требование, согласно которому в близких точках поверхности (например, в точках одного многоугольника разрезания) выбранные направления поворота должны быть одинаковыми. Если мы выбрали такое направление поворота в одной точке связной ориентируемой поверхности, то во всех остальных точках согласованное направление поворота определяется однозначно. Действительно, чтобы определить направление поворота “против часовой стрелки” в любой другой точке поверхности, достаточно соединить эту точку путем с выбранной нами и “протащить циферблат вдоль выбранного пути”. Ориентируемость поверхности гарантирует, что продолженная ориентация не будет зависеть от пути, соединяющего две точки.

Ориентируемая поверхность, на которой выбрана одна из двух возможных ориентаций, называется *ориентированной*. Ориентируемость играет принципиальную роль и в казалось бы далеких от топологии областях. Так, например, корректно определить интегрирование можно только на ориентируемой поверхности.

*Задача 12.7.* Покажите, что на листе Мебиуса невозможен согласованный выбор направления поворота “против часовой стрелки” во всех его точках.

Примером преобразования сферы, обращающего ориентацию, является отражение сферы относительно какой-либо плоскости, проходящей через центр сферы (и пересекающей ее, тем самым, по экватору).

Группа сохраняющих ориентацию автоморфизмов сферического графа является подгруппой в группе автоморфизмов соответствующего графа. Согласно теореме Лагранжа, это означает, в частности, что порядок группы сохраняющих ориентацию автоморфизмов сферического графа делит порядок группы автоморфизмов графа. Напротив, группа всех — как сохраняющих, так и не сохраняющих ориентацию — автоморфизмов сферического графа может не оказаться подгруппой в группе автоморфизмов графа. Так происходит потому, что не сохраняющий ориентацию автоморфизм сфери-

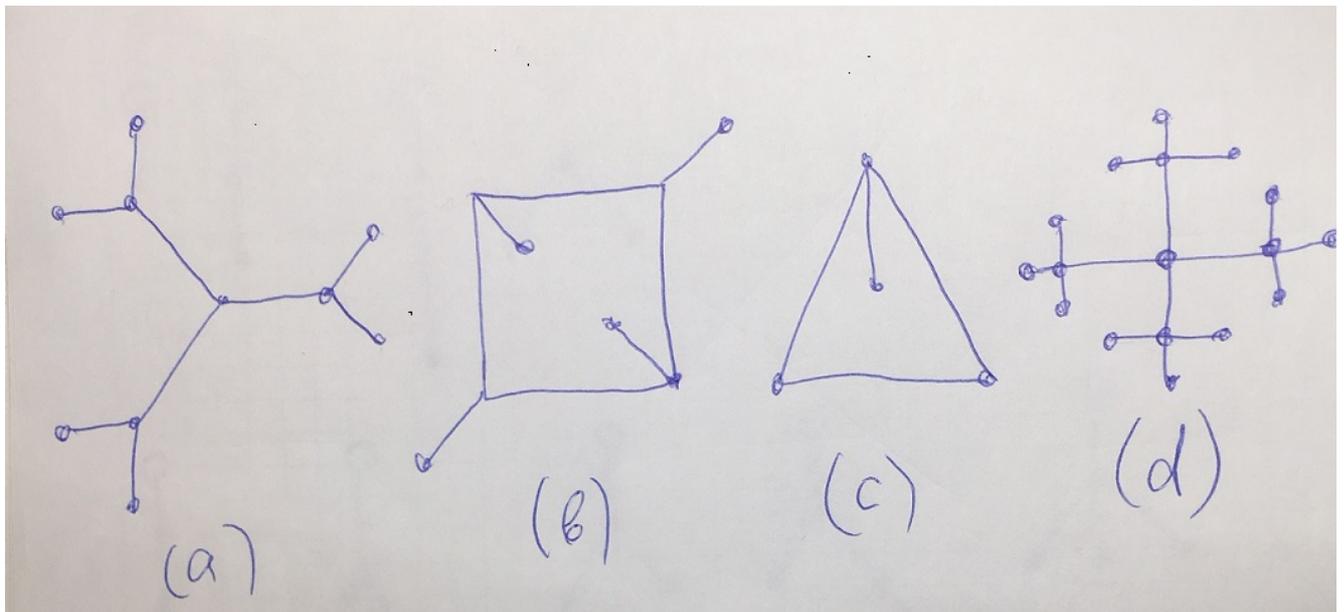


Рис. 12.3: Сферические графы

ческого графа может действовать на сам граф тождественным образом. Простейшим примером такого действия является действие отражения сферы относительно экватора на граф, состоящий из одной вершины и одной петли, представленный экватором и точкой на нем.

*Задача 12.8.* Докажите, что список графов, на которых меняющее ориентацию отображение сферы может действовать тождественно, исчерпывается цепочками на  $n$  вершинах  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , и циклами на  $n$  вершинах  $C_n$ ,  $n \geq 1$ .

*Задача 12.9.* Для каждого из сферических графов на рис. 12.3 вычислите порядок группы а) ориентированных автоморфизмов; б) всех автоморфизмов.

## 12.4 Перечисление корневых плоских деревьев

Очевидно, что всякое дерево можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не имели точек пересечения и самопересечения, отличных от вершин. (При этом ребра можно изображать даже в виде отрезков прямой, что нам, впрочем, не понадобится в дальнейшем.) Другими словами, всякое дерево является планарным графом. Однако одно и то же дерево можно изображать на плоскости (или, точнее, на сфере) по-разному (см. рис. 12.4).

Разрезая сферу по вложенному в нее дереву, мы получаем один многоугольник, число сторон которого равно удвоенному числу ребер в дереве. Поэтому понятие сохраняющего ориентацию автоморфизма сферического дерева можно переформулировать следующим образом.

**Определение 12.4.1.** Два вложения дерева с  $|E|$  ребрами в сферу называются эквивалентными, если они задаются совпадающими, с точностью

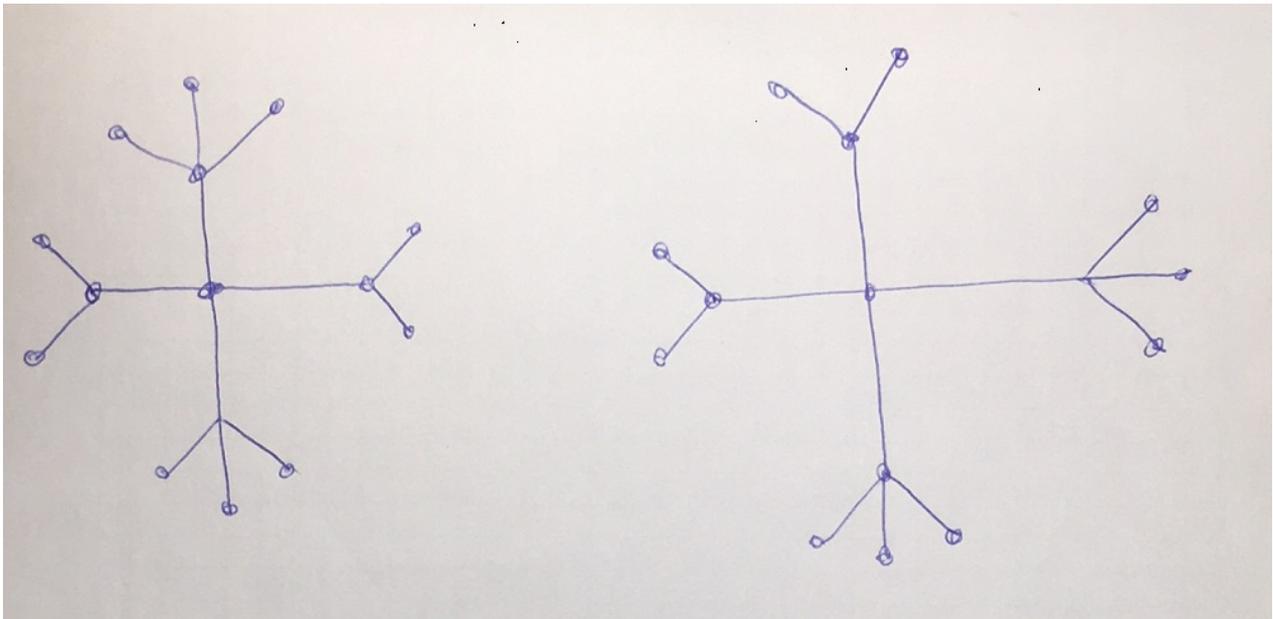


Рис. 12.4: Различные относительно сохраняющих ориентацию автоморфизмов вложения одного дерева в сферу

до поворота, склейками  $2|E|$ -угольника. Класс эквивалентности вложений деревьев называется *плоским деревом*.

Перечисление плоских деревьев остается по-прежнему сложной задачей — различные плоские деревья могут иметь различные порядки симметрии. Для разрушения этой симметрии выберем в дереве *висячий* корень (т.е. вершину валентности 1, *лист*). Ясно, что сохраняющее ориентацию сферы преобразование, переводящее данное плоское дерево с  $n$  вершинами ( $n \geq 2$ ) и фиксированным висячим корнем в себя может быть только тождественным. На рис. 12.5 изображены плоские деревья с висячим корнем с  $n$  вершинами ( $2 \leq n \leq 5$ ). Деревья изображаются растущими от корня вниз. Начало последовательности  $1, 1, 2, 5, \dots$  заставляет подозревать, что плоские деревья с висячим корнем перечисляются числами Каталана. (Последовательность *чисел Каталана* встречается при решении разнообразных комбинаторных задач. Она задается рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_n c_0 + c_{n-1} c_1 + \dots + c_0 c_n$$

и начальным условием  $c_0 = 1$ . Например,  $c_4 = c_3 c_0 + c_2 c_1 + c_1 c_2 + c_0 c_3 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 14$ .)

**Теорема 12.4.2.** *Число плоских корневых деревьев с висячим корнем, имеющих  $n + 2$  вершин, равно  $n$ -му числу Каталана  $c_n$ .*

**Доказательство.** В корневом дереве каждой вершине можно сопоставить целое число, равное расстоянию (числу ребер) между этой вершиной и корнем — *уровень* этой вершины. Сам корень имеет уровень 0, ближайшие к нему вершины — уровень 1 и т.д.

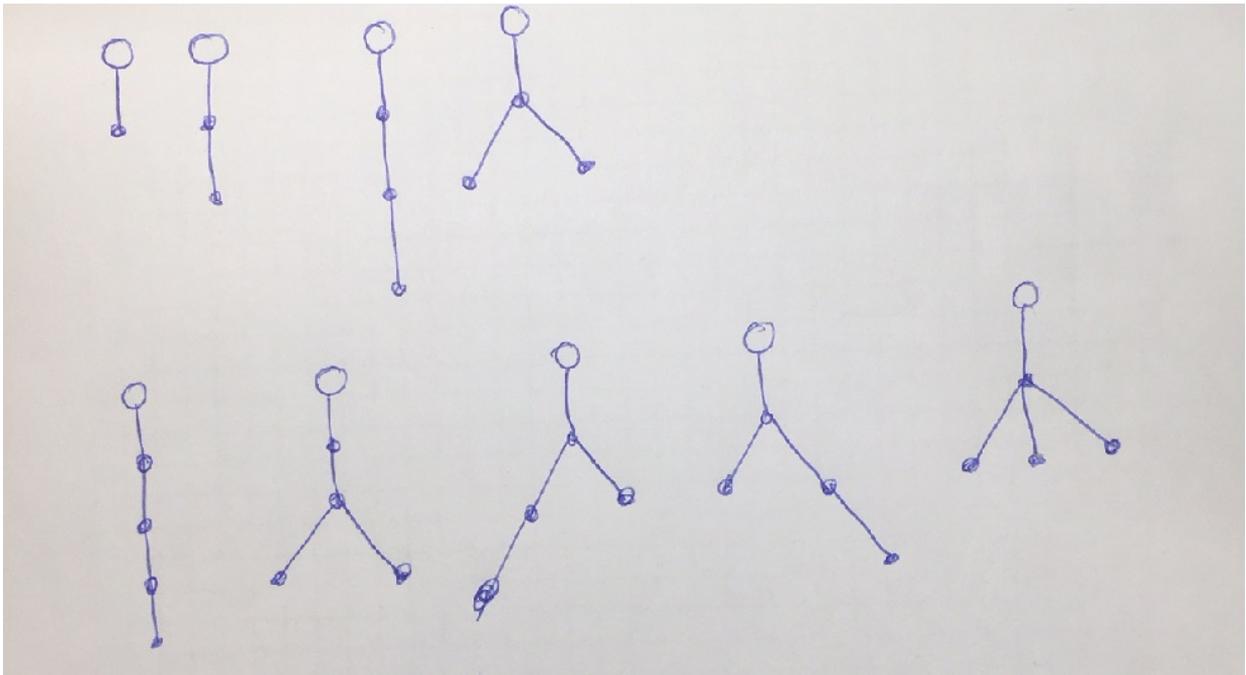


Рис. 12.5: Плоские деревья с висячим корнем и  $n + 1$  вершинами ( $n \leq 4$ )

Обозначим число плоских деревьев с висячим корнем (в процессе доказательства такой объект мы будем называть просто деревом), имеющих  $n + 2$  вершины, через  $p_n$ . Тогда  $p_0 = p_1 = 1$ . Для  $n > 1$  сопоставим каждому дереву с  $n + 3$  вершинами два дерева, первое из которых является поддеревом исходного, растущим из самого левого ребра, выходящего из вершины первого уровня, а второе — оставшимся поддеревом исходного дерева (см. рис. 12.6). Копия вершины первого уровня исходного дерева становится корнем первого дерева пары. Если в первом дереве  $k + 2$  вершин, то во втором дереве  $n - k + 2$  вершин. Наоборот, имея два дерева с  $k + 2$  и с  $n - k + 2$  вершинами, мы можем сопоставить им дерево с  $n + 3$  вершинами, подклеив корень первого дерева слева к вершине первого уровня исходного дерева.

Таким образом,

$$p_{n+1} = p_0 p_n + p_1 p_{n-1} + \cdots + p_n p_0,$$

и плоские деревья с висячим корнем перечисляются числами Каталана.  $\square$

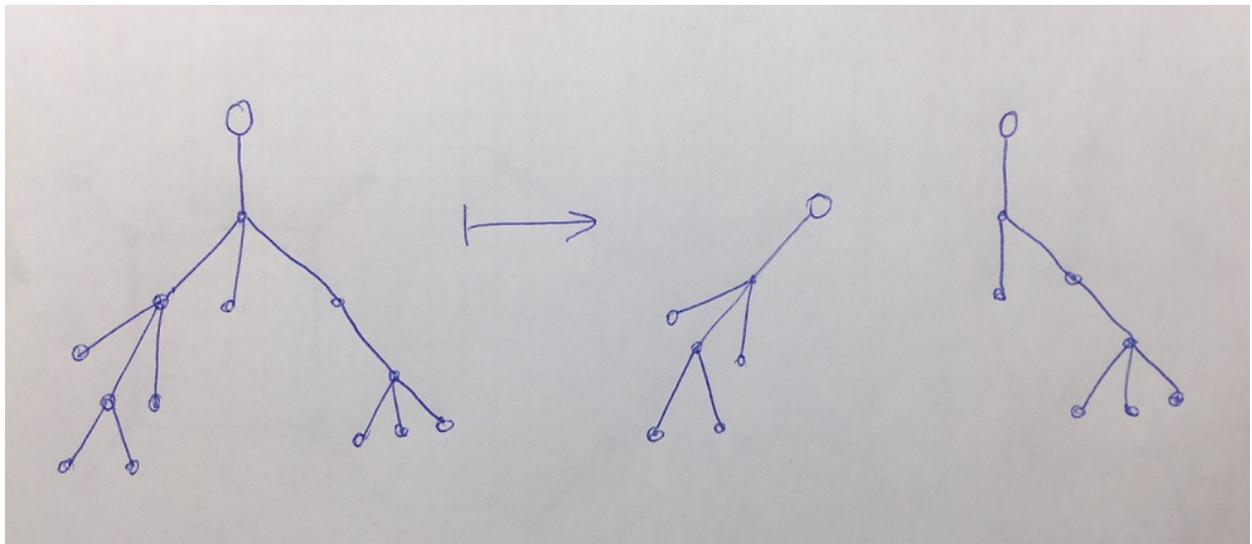


Рис. 12.6: Сопоставление плоскому дереву с висячим корнем пары таких же деревьев

## Глава 13

# Графы на поверхностях

Связный граф, который нельзя нарисовать на сфере — непланарный граф — можно нарисовать на другой поверхности. Поверхность при этом можно выбрать ориентируемой или неориентируемой. Кроме того, один и тот же граф зачастую можно нарисовать на разных поверхностях (т.е. он может выступать разрезающим графом для различных поверхностей). Вопрос о выборе простейшей поверхности, на которой можно нарисовать данный граф, является вычислительно сложным — и, как правило, не очень интересным. Гораздо более продуктивным оказывается вопрос о количестве графов с теми или иными параметрами (скажем, с данным набором валентностей вершин), которые можно нарисовать на данной поверхности. Как и раньше, соответствующая перечислительная задача становится разрешима, если мы подсчитываем графы с весом, обратным пропорциональным порядку группы их автоморфизмов.

### 13.1 Изображение графа на поверхности

Понятие сферического графа без существенных изменений обобщается на граф на произвольной поверхности.

Пусть связная поверхность  $S$  склеена из многоугольников. Границы многоугольников склеиваются в разрезающий граф на поверхности  $S$ : вершины многоугольников превращаются в вершины графа, а стороны — в ребра графа. При этом в каждой вершине графа может склеиться несколько вершин многоугольников, а в каждом ребре склеивается ровно две стороны многоугольников. (Если мы склеиваем из многоугольников поверхность с границей, то некоторые стороны многоугольников не имеют пар. Эти стороны образуют границу склеенной поверхности; сейчас мы не будем рассматривать этот случай.)

Как мы видели, один и тот же планарный граф может быть по-разному изображен на сфере — ему сопоставляются различные сферические графы. Но некоторые планарные графы могут быть изображены и на других поверхностях. Так, граф  $X_2$ , представляющий собой вершину с парой петель, можно изобразить на сфере (в виде знака  $\infty$ ), а можно — на торе. Во втором случае одна из петель становится параллелью, вторая — меридианом тора, и эти две петли пересекаются по одной точке — вершине. Такое вложение графа в тор соответствует получению тора путем склейки противоположных сторон квадрата.

Нетрудно, однако, видеть, что граф  $X_2$  нельзя вложить ни в какую ориентируемую поверхность рода, большего 1. Мы уже использовали эйлерову характеристику для доказательства того, что некоторые графы не являются планарными: эйлерова характеристика сферы, равная 2, может оказаться слишком большой, чтобы ее можно было реализовать данным графом. Точно так же можно пользоваться эйлеровой характеристикой, чтобы доказывать отсутствие вложения графа в поверхность большого рода — в этом случае эйлерова характеристика оказывается слишком маленькой. В частности, допустим, что граф  $X_2$  вкладывается в поверхность рода  $g$ ; обо-

значим число многоугольников при этом вложении через  $F$ . Тогда должно выполняться равенство

$$2 - 2g = 1 - 2 + F,$$

т.е.  $F = 3 - 2g$ . При  $g > 1$  число справа отрицательно, поэтому вложение графа  $X_2$  в ориентируемую поверхность рода  $g$  при  $g > 1$  невозможно.

Подчеркнем, что граф  $X_2$ , разумеется, можно нарисовать на ориентируемой поверхности произвольного рода  $g$  — но при  $g > 1$  он не будет разбивать эту поверхность на многоугольники. А мы разрешаем только такие вложения графа в поверхность, которые разбивают ее на многоугольники. Это же требование должно соблюдаться и при вложении графа в неориентируемую поверхность.

*Пример 13.1.1.* Для построения примера вложения графа в проективную плоскость представим проективную плоскость как круг, пары противоположных точек границы которого отождествлены между собой (т.е. как двуугольник, противоположные стороны которого склеены с обращением ориентации). Разместим единственную вершину графа в центре круга и проведем через нее два диаметра. При отождествлении пар противоположных точек границы круга два диаметра превращаются в две петли. Эти две петли разбивают проективную плоскость на два двуугольника. Тем самым, мы построили вложение графа  $X_2$  в проективную плоскость с  $|F| = 2$  гранями. Проверим, что эйлерова характеристика склеенной поверхности совпадает с эйлеровой характеристикой проективной плоскости:

$$|V| - |E| + |F| = 1 - 2 + 2 = 1,$$

что и требовалось.

*Задача 13.1.* Для каждого из графов  $K_4$ ;  $K_5$ ;  $K_6$ ;  $K_7$ ;  $K_8$ ;  $K_{2,3}$ ;  $K_{3,3}$ ;  $K_{4,3}$ ; графа (b) с рис. 12.3; постройте его вложение в а) проективную плоскость; б) тор; в) бутылку Клейна или докажите, что такого вложения не существует.

## 13.2 Кодирование графа на поверхности

В начале нашего курса мы обсуждали способы кодирования графов. Граф можно представлять в виде множества пар вершин и множества пар ребер, в виде матрицы смежности, целым рядом других способов. Несмотря на то, что ни один из этих способов не дает подходов к эффективной проверке изоморфности графов (или к задаче перечисления классов изоморфизма), подобное представление оказывается достаточно удобным для компьютерной обработки графов.

Графы на поверхностях также допускают удобные компьютерные представления. В качестве такого представления графа может выступать, например, набор многоугольников с занумерованными сторонами, разбитыми на пары (причем для каждой пары сторон мы должны указать, каким именно из двух возможных способов мы склеиваем стороны, входящие в пару).

Уточним и формализуем это представление для случая графов на ориентированных поверхностях. Пусть граф  $G$  вложен в ориентируемую поверхность  $S$ , т.е. изображен на поверхности  $S$  без пересечений и самопересечений ребер и разбивает ее на многоугольники. Разобьем каждое ребро графа  $G$  на две половины — такие половины называются *полуребрами*. Из каждой вершины графа выходит столько полуребер, какова валентность этой вершины (даже если некоторые пары этих полуребер образуют петли).

Зафиксируем ориентацию на поверхности  $S$ . Эта ориентация задает циклический порядок на всех полуребрах, исходящих из одной вершины: полуребра, выходящие из вершины, образуют “звездочку”, и для каждого полуребра этой звездочки мы знаем, какое полуребро следует за ней “против часовой стрелки”.

**Лемма 13.2.1.** *Пусть  $G$  — произвольный граф, для каждой вершины которого задан некоторый циклический порядок выходящих из нее полуребер. Тогда этот циклический порядок реализуется при некотором вложении графа  $G$  в некоторую ориентированную поверхность  $S$ , причем как поверхность  $S$ , так и вложение графа  $G$  в нее восстанавливаются по циклическому порядку однозначно.*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, как восстановить вложение графа в поверхность по заданному циклическому порядку полуребер в вершинах. Пусть  $D$  — множество полуребер графа  $G$ ,  $|D| = 2|E(G)|$  (число полуребер в графе обязано быть четным). Ребра графа  $G$  задаются разбиением элементов множества  $D$  на пары. Такое разбиение можно понимать как перестановку элементов множества  $D$ , причем в представлении этой перестановки в виде произведения независимых циклов все циклы имеют длину 2; количество этих циклов равно  $|E(G)|$ . Мы будем обозначать эту перестановку  $\alpha : D \rightarrow D$ .

В свою очередь, циклический порядок полуребер в вершинах также можно понимать как перестановку множества  $D$ . Эта перестановка переводит всякое полуребро в то полуребро, которое следует за ним при повороте в положительном направлении.

Пусть теперь  $\sigma : D \rightarrow D$  — произвольная перестановка. Если эта перестановка соответствует некоторому графу на поверхности, то вершины этого графа находятся во взаимно-однозначном соответствии с циклами в разложении перестановки  $\sigma$  в произведение независимых циклов. Каждый такой цикл задает и циклический порядок выходящих из данной вершины полуребер. Тем самым, две перестановки  $\alpha$  и  $\sigma$  элементов множества  $D$  задают граф  $G$  и циклический порядок полуребер в каждой его вершине.

Для восстановления вложения графа  $G$  осталось восстановить грани вложения. Обратим внимание на то, что композиция перестановок  $\sigma \circ \alpha : D \rightarrow D$  переводит каждое полуребро вложенного графа в полуребро, следующее за ним вдоль грани, примыкающей к выбранному полуребру справа. Тем самым, грани вложения графа  $G$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с циклами в разложении перестановки  $\sigma \circ \alpha : D \rightarrow D$  в произведение непересекающихся циклов, что и позволяет их однозначно восста-

новить. Поскольку разбиение на непересекающиеся циклы перестановки и обратной к ней совпадают, удобно обозначить через  $\varphi$  перестановку, обратную к  $\sigma \circ \alpha$ ; тогда  $\varphi \circ \sigma \circ \alpha = \text{id}$  — тождественная перестановка.

Тем самым, вложение графа в поверхность можно задавать в виде тройки  $(D, \alpha, \sigma)$ , где  $D$  — конечное множество с четным числом элементов,  $\alpha : D \rightarrow D$  — перестановка этого множества, все циклы в разложении которой в произведение непересекающихся циклов имеют длину 2,  $\sigma : D \rightarrow D$  — произвольная перестановка этого множества. Обратите внимание на то, что поверхность склейки не обязана быть связной. Она будет связной только, если связным оказывается склеенный из множества полуребер граф  $G$ . В свою очередь, граф будет связным, если и только если подгруппа в группе перестановок элементов множества  $D$ , порожденная перестановками  $\alpha$  и  $\sigma$ , действует на множестве  $D$  *транзитивно*; это условие означает, что для любых двух элементов множества  $D$  существует элемент в подгруппе перестановок, переводящий первый из них во второй.

*Задача 13.2.* Нарисуйте вложенные графы, отвечающие следующим парам перестановок (перестановки представлены в виде произведения независимых циклов): а)  $(D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6), \sigma = (1, 3, 5, 6)(2)(4))$ ; б)  $(D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6), \sigma = (1, 5, 3, 6)(2)(4))$ .

### 13.3 Двойственность

Каждому связному графу на поверхности (т.е., разрезающему графу некоторой склейки многоугольников) естественным образом сопоставляется другой граф на той же самой поверхности, двойственный к исходному. Для построения двойственного графа возьмем в каждой из граней исходного графа по точке — вершине будущего двойственного графа. Каждому ребру исходного графа соответствует ребро в двойственном графе. Это ребро соединяет вершины, отвечающие граням, инцидентным ребру исходного графа; оно однократно пересекает ребро исходного графа и не пересекает других его ребер. Если к данному ребру с обеих сторон примыкает одна и та же грань, то в двойственном графе ему соответствует петля.

Другими словами, каждой грани исходного графа соответствует звезда полуребер в вершине двойственного графа, причем циклический порядок полуребер звезды совпадает с циклическим порядком сторон границы многоугольника. Наоборот, грани двойственного графа отвечают вершинам исходного графа: звезде полуребер в вершине отвечает многоугольник, циклический порядок сторон которого совпадает с циклическим порядком полуребер в звезде. Тем самым, при замене вложенного графа двойственным к нему ребра графа остаются ребрами, а вершины и грани меняются местами.

Как нетрудно видеть, справедливо следующее утверждение, которое и обосновывает употребление термина “двойственность”.

**Теорема 13.3.1.** *Граф на поверхности, двойственный данному графу, есте-*

ственным образом отождествляется с данным графом.

*Пример 13.3.2.* Граф, двойственный графу, образованному вершинами и ребрами правильного многогранника, является графом, образованным вершинами и ребрами правильного многогранника. Так, граф, двойственный кубу, это октаэдр и наоборот. Аналогично, двойственны друг другу додекаэдр и икосаэдр. Двойственным же тетраэдру также оказывается тетраэдр.

*Задача 13.3.* Докажите, что порядок группы автоморфизмов данного графа на поверхности совпадает с порядком группы автоморфизмов двойственного к нему графа.

*Задача 13.4.* Пусть вложенный граф задан тройкой  $(D, \alpha, \sigma)$ , состоящей из конечного множества и пары его перестановок, и пусть  $\varphi \circ \alpha \circ \sigma = \text{id}$ . Докажите, что тройка  $(D, \alpha, \varphi)$  задает вложенный граф, двойственный к исходному, т.е. для двойственного графа перестановка  $\alpha$  остается неизменной, а перестановки  $\sigma$  и  $\varphi$  меняются ролями.

*Задача 13.5.* Для каждого вложения из задачи 13.1 постройте двойственный граф.

*Задача 13.6.* Граф на поверхности называется *самодвойственным*, если он совпадает со своим двойственным (подобно графу вершин и ребер тетраэдра на сфере). Для каждого  $n \geq 2$  постройте на сфере самодвойственный граф с  $n$  вершинами.

*Задача 13.7.* Пусть на ориентируемой поверхности рода  $g$  задан самодвойственный граф с  $n$  вершинами. Чему равно число ребер такого графа?

## Глава 14

# Гомологии поверхностей

Графы на поверхностях можно использовать для вычисления новых для нас топологических характеристик поверхностей — их гомологий. Гомологии — один из наиболее активно используемых в топологии инвариантов топологических пространств. Они позволяют сопоставить нелинейному объекту — поверхности — гораздо более просто устроенные линейные объекты — векторные пространства, обеспечивая, тем самым, и возможность компьютерного сравнения поверхностей.

Для определения гомологий поверхности нам достаточно иметь поверхность и граф на ней. При этом — и это главный содержательный результат — гомологии зависят только от выбранной поверхности, но не от выбранного на ней графа. Для определения (и вычисления) гомологий более многомерных, чем поверхности, топологических объектов, для этих объектов приходится вводить (многомерные) аналоги графов на них. Но в нашем курсе мы этим заниматься не будем.

Идейно понятие гомологий базируется на том естественно-научном наблюдении, что “у границы нет границы”. Так, границей круга является окружность, граница которой уже пуста. Границей поверхности с границей — набор окружностей. Границей шара — сфера, имеющая, в свою очередь, пустую границу, и т.д.

## 14.1 Гомологии поверхностей с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$

Для определения гомологий объектов той или иной природы необходимо научиться определять, что такое граница. Мы начнем с определения границы одномерных и двумерных симплексов — отрезков и треугольников.

**Определение 14.1.1.** *Границей отрезка с концами  $a, b$  называется (формальная) сумма этих концов, т.е.  $\partial : [a, b] \mapsto [a] + [b]$ .*

*Границей треугольника с вершинами  $a, b, c$  называется (формальная) сумма его сторон, т.е.  $\partial : [a, b, c] \mapsto [a, b] + [b, c] + [c, a]$ .*

*Границу точки будем считать равной нулю  $\partial([a]) = 0$ .*

В этих и нижеследующих определениях в этом параграфе мы рассматриваем суммирование по модулю 2, т.е. линейные комбинации объектов с коэффициентами из группы вычетов  $\mathbb{Z}_2$  (или, что то же самое, из поля вычетов  $\mathbb{F}_2$ ). Ключевым фактом в определении и изучении гомологий является следующее свойство:

**Утверждение 14.1.2.** *Граница границы треугольника равна нулю.*

Для доказательства подсчитаем границу границы треугольника:

$$\partial([a, b] + [b, c] + [c, a]) = ([a] + [b]) + ([b] + [c]) + ([c] + [a]) = 2[a] + 2[b] + 2[c] \equiv 0 \pmod{2}.$$

Заметим, что граница границы отрезка также равна нулю, поскольку равна нулю граница точки.

**Задача 14.1.** Чему равна граница графа-петли с одной вершиной  $\partial([a, a])$ ?

Пусть теперь  $S$  — поверхность и  $G$  — граф в ней, разбивающий ее на треугольники (т.е. триангуляция). Для  $n = 0, 1, 2$  определим *пространство цепей размерности  $n$*  для пары  $(S, G)$  как векторное пространство над  $\mathbb{F}_2$ , порожденное

- при  $n = 0$  вершинами графа  $G$ ;
- при  $n = 1$  ребрами графа  $G$ ;
- при  $n = 2$  гранями вложения графа  $G$ .

Эти пространства будем обозначать, соответственно, через  $C_0(S, G), C_1(S, G), C_2(S, G)$ . Распространим наше определение отображения границы на пространства  $C_0(S, G), C_1(S, G), C_2(S, G)$  по линейности. Мы получим цепочку векторных пространств и их линейных отображений

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(S, G) \xrightarrow{\partial_2} C_1(S, G) \xrightarrow{\partial_1} C_0(S, G) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

(нульмерное векторное пространство  $0$  слева добавлено для полноты картины, а индексы у отображений границы подсказывают, об отображениях каких именно пространств идет речь).

Доказанное нами выше свойство означает, что образ отображения  $\partial_2$  лежит в ядре отображения  $\partial_1$  (оба эти пространства являются векторными подпространствами в  $C_1(S, G)$ ):  $\text{Im}(\partial_2) \subset \text{Ker}(\partial_1) \subset C_1(S, G)$ . Теперь мы можем определить *первые гомологии поверхности  $(S, G)$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{F}_2$*  как факторпространство  $H_1(S, G) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2)$ . Точно так же определяются гомологии всех остальных размерностей,  $H_n(S, G) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ .

**Задача 14.2.** Выберите триангуляции и вычислите гомологии следующих поверхностей: цилиндр  $S^1 \times [0, 1]$ , лист Мебиуса, сфера  $S^2$ , проективная плоскость, тор, бутылка Кляйна.

**Задача 14.3.** Проверьте, что различные триангуляции поверхностей из предыдущей задачи приводят к совпадающим гомологиям

**Задача 14.4.** Докажите, что для произвольной триангуляции связной поверхности  $H_0 = \mathbb{F}_2$ .

**Задача 14.5.** Докажите, что для произвольной триангуляции связной поверхности без края  $H_2 = \mathbb{F}_2$ , а для связной поверхности с непустым краем  $H_2 = 0$ .

Основным результатом теории гомологий, объясняющим ее важность, является следующая

**Теорема 14.1.3.** *Гомологии триангулированной поверхности зависят только от поверхности, и не зависят от выбора ее триангуляции.*

Доказательство аналогично доказательству того, что эйлерова характеристика поверхности не зависит от выбора разбиения поверхности на многоугольники. Оно разбивается на два шага. Сначала мы доказываем, что измельчение триангуляции не меняет гомологии. Затем — что любые две триангуляции имеют общее измельчение.

Следующее утверждение существенно упрощает вычисление гомологий.

Пусть  $G$  — произвольный граф, вложенный в поверхность  $S$  (не обязательно триангуляция поверхности). Определим группу цепей  $C_2(S, G)$  как векторное пространство над полем  $\mathbb{F}_2$ , порожденное многоугольниками разбиения. Граничное отображение  $\partial_2 : C_2(S, G) \rightarrow C_1(S, G)$  определено на многоугольнике как сумма всех его сторон и продолжается по линейности на линейные комбинации многоугольников. Как нетрудно видеть, для такого определения граничного отображения  $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$ . Всякое разрезание поверхности на многоугольники несложно превратить в триангуляцию: достаточно в каждом многоугольнике провести недостающие диагонали (это можно сделать различными способами).

**Теорема 14.1.4.** *Для произвольного вложенного графа  $G$  на поверхности  $S$  гомологии определяемой им цепочки пространств и отображений совпадают с гомологиями произвольной диагональной триангуляции вложения.*

Воспользуемся этой теоремой для вычисления гомологий проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$  с коэффициентами в поле из двух элементов. Для этого представим проективную плоскость как результат склейки двуугольника, две стороны которого склеиваются со скручиванием. После склеивания эти две стороны превращаются в граф, состоящий из одной вершины и одной петли. Этот граф разрезает проективную плоскость на один диск (внутренность двуугольника). Обозначим этот диск через  $A$ , а ребро-петлю через  $a$ . Тогда последовательность пространств цепей и их граничных отображений имеет вид

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

где первое из пространств  $\mathbb{F}_2$  порождено диском  $A$ , второе — ребром  $a$ , а третье — вершиной графа.

Граница диска равна 0, так как  $\partial_2 A = a + a = 2a = 0$ . Аналогично, граница ребра  $a$  это граница петли, и она тоже равна 0. Поэтому пространства гомологий имеют вид

$$H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2/0 = \mathbb{F}_2; \quad H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2/0 = \mathbb{F}_2; \quad H_0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2/0 =$$

Использованные в этом параграфе определения и конструкции годятся не только для поверхностей, но и для топологических объектов более сложной природы, например, для симплициальных комплексов (в этом случае вдоль общего ребра можно склеивать не два треугольника, а большее их количество). Кроме того, гомологии можно определять не только для топологических объектов, но и для чисто алгебраических. А именно, цепочка

векторных пространств и линейных отображений

$$0 \xrightarrow{\partial_3} V_2 \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

называется *комплексом*, если композиция любых двух последовательных отображений в этой цепочке равна 0. Разумеется, комплексы могут быть как длиннее, так и короче. В каждом комплексе имеют место включения  $\text{Im } \partial_k \subset \text{Ker } \partial_{k+1}$ , и соответствующие факторпространства называется пространствами гомологий комплекса

$$H_k = \text{Im } \partial_k / \text{Ker } \partial_{k+1}.$$

## 14.2 Гомологии и эйлерова характеристика

Пусть  $(S, G)$  — двумерная поверхность и вложенный в нее граф. Мы определяли эйлерову характеристику поверхности выражением

$$\chi(S, G) = |V(G)| - |E(G)| + |F(G)|,$$

где через  $|V(G)|$ ,  $|E(G)|$ ,  $|F(G)|$  обозначены, соответственно, количество вершин, количество ребер в графе  $G$  и количество граней вложения. Другими словами, эйлерову характеристику можно определить в терминах размерностей пространств цепей:

$$\chi(S, G) = \dim C_0(S, G) - \dim C_1(S, G) + \dim C_2(S, G).$$

Как мы видели, эйлерова характеристика не зависит от вложенного графа, только от поверхности; поэтому обычно мы обозначаем ее через  $\chi(S)$ .

**Утверждение 14.2.1.** *Эйлерову характеристику поверхности можно следующим образом выразить через размерности пространств гомологий поверхности:*

$$\chi(S) = \dim H_0(S) - \dim H_1(S) + \dim H_2(S).$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \dim H_0(S) - \dim H_1(S) \\ + \dim H_2(S) &= (\dim \text{Ker } \partial_0 - \dim \text{Im } \partial_1) - (\dim \text{Ker } \partial_1 - \dim \text{Im } \partial_2) + (\dim \text{Ker } \partial_2) \\ &= \dim \text{Ker } \partial_0 - (\dim \text{Im } \partial_1 + \dim \text{Ker } \partial_1) + (\dim \text{Im } \partial_2 + \dim \text{Ker } \partial_2) \\ &= \dim C_0(S, G) - \dim C_1(S, G) + \dim C_2(S, G) - 0 \\ &= \chi(S) \end{aligned}$$

(мы воспользовались следующим свойством линейных отображений векторных пространств: размерность каждого из пространств цепей  $C_k(S, G)$  равна сумме размерностей ядра и образа граничного отображения  $\partial_k$ ).

В частности, для вычисленных нами выше гомологий проективной плоскости с коэффициентами в  $\mathbb{F}_2$  имеет место следующее равенство

$$\chi(\mathbb{RP}^2) = \dim H_0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) - \dim H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) + \dim H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{F}_2) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

### 14.3 Ориентации, ориентируемость и гомологии с коэффициентами в других группах

Если мы хотим определить гомологии с коэффициентами в других группах — скажем, с коэффициентами в целых числах  $\mathbb{Z}$  или в вещественных числах  $\mathbb{R}$ , то мы можем рассматривать в качестве групп цепей группы, порожденные вершинами, ребрами и треугольниками какой-либо триангуляции. Однако нам надо таким образом изменить определение граничных отображений, чтобы оставалось неизменным свойство “у границы нет границы”. В определении, которое мы использовали в случае поля коэффициентов  $\mathbb{F}_2$ , выполнение этого свойства обеспечивалось равенством  $1 + 1 = 0$ , которое в других группах и полях, как правило, не выполняется.

Для построения универсального определения граничного отображения введем понятие ориентации отрезка и треугольника. Пусть  $a, b, c$  — вершины треугольника. Будем говорить, что две перестановки букв  $a, b, c$  задают *одинаковую ориентацию* треугольника, если они отличаются четной перестановкой; в противном случае мы говорим, что эти две перестановки задают *различную ориентацию* треугольника. Шесть перестановок трех букв разбиваются на два класса, по три перестановки в каждом, и каждый из этих двух классов определяет одну ориентацию треугольника. Аналогично, каждая из двух перестановок букв  $a, b$  определяет одну ориентацию отрезка. Напротив, у точки бывает только одна ориентация — поскольку существует лишь тождественная перестановка одного элемента.

Рассмотрим теперь какую-нибудь триангуляцию  $G$  поверхности  $S$  и зафиксируем ориентацию каждого ее отрезка и каждого ее треугольника (т.е. выберем одну из двух возможных ориентаций). Обозначим, через  $C_0(S, G; \mathbb{R})$ ,  $C_1(S, G; \mathbb{R})$ ,  $C_2(S, G; \mathbb{R})$  векторные пространства, порожденные над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , соответственно, вершинами, ребрами и треугольниками триангуляции с выбранными ориентациями. Те же элементы с другой ориентацией будем отождествлять с базисными элементами, взятыми с противоположным знаком, так что

$$\begin{aligned} [a, b] &= -[b, a] \\ [a, b, c] &= [b, c, a] = [c, a, b] = -[b, a, c] = -[a, c, b] = -[c, b, a]. \end{aligned}$$

Теперь определим *границу ориентированного отрезка* равенством

$$\partial[a, b] = [b] - [a],$$

*границу ориентированного треугольника* равенством

$$\partial[a, b, c] = [b, c] - [a, c] + [a, b].$$

Нетрудно видеть, что это определение непротиворечиво. Например,

$$\partial[a, b] = [b] - [a] = -\partial[b, a] = \partial(-[a, b]).$$

Также нетрудно проверить выполнение требования “у границы нет границы”:

$$\begin{aligned}\partial\partial[a, b, c] &= \partial([b, c] - [a, c] + [a, b]) \\ &= ([c] - [b]) - ([c] - [a]) + ([b] - [a]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

*Задача 14.6.* Определите понятие ориентации многоугольника.

*Задача 14.7.* Выберите триангуляции, ориентации и вычислите гомологии следующих поверхностей с коэффициентами в поле  $\mathbb{R}$ : цилиндр  $S^1 \times [0, 1]$ , лист Мебиуса, сфера  $S^2$ , проективная плоскость, тор, бутылка Кляйна.

Как и в случае поля коэффициентов  $\mathbb{F}_2$ , вычисления удобнее проводить для разбиений на произвольные многоугольники, а не для триангуляций. Подсчитаем, например, гомологии проективной плоскости, воспользовавшись той же склейкой двуугольника. Последовательность пространств цепей и их граничных отображений имеет вид

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

где первое из пространств  $\mathbb{R}$  порождено диском  $A$ , второе — ребром  $a$ , а третье — вершиной графа. Теперь граничное отображение  $\partial_2$  уже ненулевое:  $\partial_2 A = 2a \neq 0$ ; напротив, оно является взаимно-однозначным отображением векторных пространств. Поэтому

$$H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R}) = 0; \quad H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R}) = 0; \quad H_0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Несмотря на то, что размерности пространств гомологий с вещественными коэффициентами существенно отличаются от размерностей пространств гомологий с коэффициентами в поле из двух элементов, равенство для эйлеровой характеристики не нарушается:  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1 - 0 + 0 = 1$ .

Свои особенности имеет вычисление гомологий с коэффициентами в кольце целых чисел  $\mathbb{Z}$ . Эти особенности связаны с тем, что кольцо  $\mathbb{Z}$  не является полем, поэтому фактор ядра отображения по образу другого отображения может быть устроен сложнее, чем в случае полей. В качестве простейшего примера рассмотрим цепочку групп и отображений

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

в которой отображение  $\partial_1$  переводит образующую 1 группы  $\mathbb{Z}$  в элемент 2 группы  $\mathbb{Z}$ . Вторые гомологии этого комплекса равны 0, поскольку отображение  $\partial_2 1$  имеет нулевое ядро, а первые гомологии имеют вид  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ , поскольку образ отображения  $\partial_1$  состоит из четных чисел  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ .

*Задача 14.8.* Докажите, что для связной поверхности  $S$  справедливы равенства  $H_0(S; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $H_0(S; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

*Задача 14.9.* Докажите, что для связной поверхности  $S$  без края справедливы равенства  $H_2(S; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $H_2(S; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , если  $S$  ориентируема, и  $H_2(S; \mathbb{R}) = 0$ ,  $H_2(S; \mathbb{Z}) = 0$ , если  $S$  неориентируема.

*Задача 14.10.* Выберите триангуляции, ориентации и вычислите гомологии следующих поверхностей с коэффициентами в группе  $\mathbb{Z}$ : цилиндр  $S^1 \times [0, 1]$ , лист Мебиуса, сфера  $S^2$ , проективная плоскость, тор, бутылка Кляйна.