

Матросов В.А.

Мирзоев М.С.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебник для бакалавриата

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению педагогического образования профилей:

- ♦ «Информатика и математика»
- ♦ «Физика и информатика»
- ♦ «Технология и информатика»
- ♦ «Математика и информатика»
- ♦ «Прикладная информатика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО
Прометей

В.Л. МАТРОСОВ

М.С. МИРЗОЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебник для бакалавриата

Рекомендовано УМО в качестве учебника для вузов



**МОСКВА
2020**

УДК 510.6
ББК 22.12
М 63

М 63 **В.Л. Матросов, М.С. Мирзоев**
Математическая логика: Учебник для бакалавриата /
В.Л. Матросов, М.С. Мирзоев. — М.: Прометей, 2020. — 228 с.
ISBN 978-5-907244-03-0

В учебнике изложены основные понятия математической логики, язык и средства математической логики, в том числе системы логических функций и их применение в информатике. Рассматриваются основные разделы математической логики: алгебра высказываний; исчисления высказываний и логика предикатов. Алгоритмическим подходом по шагам представлено доказательство теорем из аксиоматической теории Л. Помимо теоретических и практических материалов учебник содержит задания для самостоятельной работы.

Содержание учебника соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования третьего поколения и методическим требованиям, предъявляемым к учебным изданиям.

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению педагогического образования профилей «Информатика и математика», «Физика и информатика», «Технология и информатика», «Математика и информатика», «Прикладная информатика». Может быть полезен широкому кругу читателей, интересующихся основами математической логики.

© Матросов В.Л., наследники, 2020

© Мирзоев М.С., 2020

© Издательство «Прометей», 2020

ISBN 978-5-907244-03-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	6
Введение	12
Глава 1. Алгебра высказываний	21
1.1. Алфавит и формулы алгебры высказываний.	21
1.2. Основные логические операции алгебры высказываний	23
1.3. Индуктивное определение формулы и подформулы алгебры высказывания	24
1.4. Истинностные значения формулы алгебры высказывания	26
1.5. Классификация формул алгебры высказываний . . .	27
1.6. Понятие равносильности. Основные равносильные формулы алгебры высказываний . . .	28
1.7. Булевы функции (логические функции)	31
1.8. Совершенные нормальные формы	37
1.9. Системы булевых функций	42
1.10. Минимизация булевых функций	54
1.11. Модели функционально-логические схемы базовых устройств компьютера	76
1.11.1. Логические элементы.	76
1.11.2. Моделирование функциональных схем устройства компьютера	80
1.11.3. Функционально-логическая модель сумматора.	87
1.11.4. Функционально-логическая схема триггера . . .	89
1.11.5. Шифраторы и дешифраторы.	95

1.12. Электронные схемы и компьютер	96
1.13. О некоторых других приложениях теории булевых функций	101
1.14. Некоторые примеры применения языка Java в алгебре высказываний	104
Контрольные вопросы и задания	124
Практические задания	126
 Глава 2. ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	132
2.1. Алфавит, формулы, система аксиом и правила вывода исчисления высказываний	132
2.2. Аксиомы исчисления высказываний	134
2.3. Операция подстановки	135
2.4. Правила вывода	136
2.5. Понятие формального доказательства	136
2.6. Производные правила вывода	138
2.7. Выводимость формулы исчисления высказываний из совокупности формул (совокупности гипотез)	141
2.8. Некоторые правила выводимости из совокупности гипотез H	142
2.9. Примеры доказуемых формул в исчисления высказываний	153
2.10. Исследование исчисления высказываний	159
2.11. Полнота исчисления высказываний	163
2.12. Независимость системы аксиом исчисления высказываний	171
Контрольные вопросы и задания	177
Практические задания	178
 Глава 3 ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ	182
3.1. Понятие предиката. Логические операции над предикатами	182
3.2. Операции навешивания кванторов	187
3.3. Язык логики предикатов (ЯЛП)	191
3.4. Операция подстановки в ЯЛП	194
3.5. Языки первого порядка	195

3.6. Равносильные формулы языка первого порядка . . .	203
3.7. Некоторые виды математических теорем.	209
3.8. Методы доказательств	211
3.9. Теорема Гёделя о неполноте	222
Контрольные вопросы и задания	223
Практические задания	224
Литература	226

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая логика как основа формирования интеллекта современного человека, в том числе будущего специалиста в области информатики и информационных коммуникационных технологий считается ядром и главным инструментом изучения и исследования закономерности информационных процессов системы различной природы. Искусство рассуждения, самосознания, строгость математических выводов, доказательств, вычисления, обобщения, абстракция, аналогия и интуиция помогают будущему учителю информатики успешно ориентироваться не только в своей профессиональной деятельности, но и в организаторских, социальных, экономических и других жизненно важных проблемах. Элементы математической логики присутствуют почти во всех направлениях общеобразовательного курса информатики (информационные процессы различных систем, алгоритмизация и программирование, моделирование и формализация, информационные технологии, социальная информатика) и составляют основу архитектуры компьютеров (новых процессоров, мультипроцессоров и др.). Следовательно, знание математической логики играет ведущую роль в профессиональной деятельности учителя информатики.

1. Цель дисциплины «Математическая логика» — формирование системы знаний в области: математической логики; теории доказательств; логических основ компьютеров, сетевых устройств и различных логических моделей вычислений в предметной области математики и информатики; представление о логике предикатов и исчисление предикатов; формирование культуры мышления (умения корректно осуществлять обобщение, пользоваться обоснованными аналогиями, находить кратчайший путь решения, осуществлять полноту и выдержанность классификаций и др.); формирование алгоритмической, логической культуры (развитие алгоритмического, логического мышления, умение анализировать и составлять формальные доказательства теоремы исчисления высказывания, умение использовать различные способы установления равносильности формул алгебры высказываний и др.); развитие навыков моделирования процессов обработки информации с помощью системы логических функций и конструирование конечных дискретных автоматов, микропроцессоров и вычислительных машин; развитие у обучающихся навыков самостоятельного анализа решений различных логических задач.

2. Место дисциплины «Математическая логика» в структуре образовательной программы.

Математическая логика входит в цикл профессиональных дисциплин в вариативной части программы бакалавриата педагогического образования по профилям: «Математика и информатика», «Информатика и математика», «Физика и информатика», «Технология и информатика», а также по направлению «Информационные технологии в образовании» — профиль «Информационные системы и технологии».

Для успешного изучения дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения курсов «Дискретная математика», «Элементарная математика», «Математический анализ», «Аналитическая геометрия» «Линейная алгебра».

Знание основ математической логики является важной составляющей общей информационной, технологической культуры современного специалиста. Эти знания необходимы как при проведении теоретических исследований в различных областях информатики, математики, так и при решении практических задач из разнообразных прикладных областей.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине «Математическая логика»

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций выпускника:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);
- способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);
- способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК-6);
- способность работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-9);
- способность к подготовке и редактированию текстов профессионального и социально значимого содержания (ОПК-5);
- способность реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1);

- готовность применять знания математической логики, фундаментальной и прикладной математики для анализа и синтеза информационных систем и процессов (СК-1);

- способность использовать математический аппарат логики, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации (ПК-2);

- владение современными формализованными математическими, информационно-логическими и логико-семантическими моделями и методами представления, сбора и обработки информации (ПК-3);

- способность реализовывать аналитические и технологические решения в области программного обеспечения и компьютерной обработки информации (ПК-4);

- готовность к обеспечению компьютерной и технологической поддержкой деятельности обучающихся в учебно-воспитательном процессе и внеурочной работе (ПК-5);

- способность использовать современные информационные и коммуникационные технологии для создания, формирования и администрирования электронных образовательных ресурсов (ПК-6).

Обучающий, изучивший дисциплину «Математическая логика», **должен *знать***: ключевые понятия (специальные термины, определения, теоремы и др.); важнейшие черты элементы логики в информатике, математике и в других предметных областях современной науки; примеры разрешимых и неразрешимых алгоритмических проблем из области математической логики и других областей науки;

уметь: грамотно формулировать логические, алгоритмические проблемы; приводить примеры, иллюстрирующие основные понятия математической логики; доказывать основные теоремы учебного курса; доказывать равносильность формулы алгебры логики и логики предикатов; создавать и реализовывать логические модели конечных дискретных автоматов, микропроцессоров, сетевых устройств и вычислительных машин; оценивать степень сложности логических задач и выбирать кратчайший путь (способ) решения задачи; свободно ориентироваться в теоретическом и методическом материале; уметь отстаивать свою точку зрения; уметь составлять формальные доказательства теоремы аксиоматической теории L ; уметь принимать элементы алгебры логики и логики предикатов в языках сверхвысокого уровня программирования и др.;

владеть: знаниями о современных достижениях науки в области математической логики; навыками участия в научной дискуссии, принятия независимых суждений и самостоятельных решений.

Учебник включает введение и состоит из трех глав, каждая из которых содержит теоретический материал, практические задания и материалы для самостоятельной работы. Изложенные учебные материалы построены по рекурсивным методическим подходам, обеспечивающим такие важные качества ума, как понимание, умение анализировать и принимать правильные решения в зависимости от ситуации.

В первой главе подробно рассматривается алгебра высказываний (алгебра логики). Даются общие представления по ее основным понятиям и логическим операциям над элементарными высказываниями

(отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность), приводятся основные равносильности формул алгебры высказываний, классификация формул, описываются базовые элементарные логические функции. Рассматривается использование логических функций в проектировании микропроцессоров, устройств компьютера, а также приводятся перечень вопросов и задания для самостоятельной работы.

Во второй главе рассматривается исчисление высказываний (аксиоматическая теория L), где строится класс доказуемых формул (теоремы) теории L . Рассматриваются операции подстановки, правила вывода в исчислении высказываний. Далее подробно излагается выводимость формулы исчисления высказываний из совокупности формул (гипотез). Приводятся примеры доказуемых формул в аксиоматической теории L и раскрываются такие свойства исчисления высказываний, как полнота, независимость системы аксиом. Каждая тема обоснована примерами, и в конце приведены перечень вопросов и задания для самостоятельной работы.

Третья глава посвящена логике предикатов. Рассматриваются понятие предикат, логические операции над предикатами, понятие кванторов, язык логики предикатов, операции подстановки в языке логики предикатов. Описывается понятие равносильной формулы языка первого порядка. Рассматриваются различные виды математических теорем и методы доказательств. Далее речь идет о методах доказательства теоремы от противного и методом резолюции, а также о теореме Гёделя о неполноте. Каждая тема обоснована примерами, и в конце приведены перечень вопросов и задания для самостоятельной работы.

ВВЕДЕНИЕ

В современном информационном обществе, где объем информации увеличивается с большим темпом, становится актуальной проблема формирования и развития логической, алгоритмической, информационной и технологической культуры каждого члена общества. Изучение элементов математической логики и логических основ компьютеров, сетевых устройств составляют основу такого формирования.

Математическая логика (от греч. слова *logos* — слово, мысль, разум, речь) — наука, занимающаяся исследованием логических исчислений. Такой подход возник в связи с открытием известных логических парадоксов. Поэтому первоначально математическая логика развивалась как средство решения задач обоснования математики.

Математика является дедуктивной наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, т.е. выведение одних утверждений (суждений) из других происходит по определенным правилам, причем исходные утверждения являются достоверными. Поэтому справедливыми признаются в математике только те утверждения, которые обоснованы с помощью дедуктивных рассуждений.

В общем, логика — это наука о формах, законах человеческого мышления и способах доказательных рассуждений.

Мыслить логично — это значит мыслить точно и последовательно, не допускать противоречий в своих рассуждениях, уметь вскрывать логические ошибки и применять правильное решение в различных жизненно важных ситуациях.

Логика является одной из древнейших наук. Основоположителем формальной логики является древнегреческий философ и логик Аристотель (384–322 г. до н.э.), который впервые систематизировал формы и законы человеческого мышления, исследовал категории «понятие» и «суждение», подробно разработал теорию умозаключений (т.е. теорию формального вывода) и доказательств, описал ряд логических операций и сформулировал основные законы формальной логики. Основные философские сочинения Аристотеля — это «Органон», включающий статьи «Об истолковании»; «Аналитики: первая и вторая работа»; «О софистических опровержениях»; «Топика» и др.

Сам Аристотель свое логическое учение называл «аналитикой». Аналитика — это наука о средствах установления объективной истинности; наука о доказательстве.

По мнению Аристотеля, основной принцип формальной логики заключается в следующем: «правильность рассуждения определяется только его логической формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него суждений». Иначе говоря, формальный характер логического вывода заключается в том, что в наших рассуждениях одни предложения выводятся из других в силу определенной связи между их формой, структурой независимо от конкретного их содержания.

Например.

1. Если $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — ромб; если $ABCD$ — ромб, то $ABCD$ — параллелограмм; следовательно, если $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — параллелограмм.

2. Если $a \in N$, то $a \in Z$; если $a \in Z$, то $a \in R$; следовательно, если $a \in N$, то $a \in R$.

3. Если число 5235460 делится на 10, то оно делится на 5, следовательно, если это число не делится на 5, то оно не делится на 10.

4. Если число e является рациональным, то оно является алгебраическим; следовательно, если число e не является алгебраическим, то оно не является рациональным.

Если элементарные высказывания, участвующие в первых двух примерах, обозначить соответственно X, Y, Z , а слова «если ... то ...» заменить $\rightarrow$, то получим символическую запись, отражающую их форму

$$((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z).$$

Аналогично для примеров 3, 4 после обозначения составляющих высказываний символами X, Y , а их отрицания $\bar{X}, \bar{Y}$ получим: $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$.

Аристотель определил основные законы формальной логики:

1. **Закон непротиворечия** — невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же объекту.

2. **Закон исключенного третьего** — это закон традиционной и формальной логики, согласно которому из двух формально противоречащих друг другу утверждений одно обязательно должно быть истинным, а другое ложным.

3. Закон тождества — это традиционный и формальный логический закон, согласно которому утверждение (суждение или умозаключение), введенное однажды в рассуждение, должно оставаться неизменным, однозначно понимаемым на протяжении всего последующего рассуждения, каким бы продолжительным оно ни являлось.

4. Закон достаточного основания — всякая истинная мысль должна быть достаточно обоснована. В качестве доводов для подтверждения истинной мысли могут быть использованы: истинные суждения, объективные факты, научно обоснованные законы, аксиомы, доказанные теоремы.

5. Закон силлогизма. Если две импликации высказывательной формы истины, то истинной должна быть и третья импликация.

Логика Аристотеля дополнялась, изменялась и совершенствовалась в течение многих веков зарубежными и отечественными учеными.

Идею о формализации логики в XVII веке предложил немецкий математик Г. Лейбниц (1646–1716). Он пытался построить универсальный язык, посредством которого каждому понятию и суждению можно было присвоить числовую характеристику и установить правила, которые позволили бы определить, «истинно данное суждение или ложно»? То есть хотел логику представить в виде исчисления. Однако он не смог реализовать свою идею.

Первая реализация идеи Лейбница принадлежит английскому учёному Дж. Булю (1815–1864). Он создал алгебру логики, в которой буквами обозначены высказывания, что привело к возникновению «Алгебры высказываний». Введение символических обозначений

в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как и введение буквенных обозначений для алгебры. Именно благодаря введению символов в логику была заложена почва для создания новой науки — математической логики.

Применение математики в логике позволило представить логические теории в удобной форме и применить вычислительный аппарат, что уточнило и расширило область логических исследований.

К концу XIX столетия актуальное значение для математики приобрели вопросы обоснования ее основных понятий и идей. Эти задачи имели логическую природу и, естественно, привели к дальнейшему развитию математической логики. В этом отношении показательны работы немецкого математика Г. Фреге (1848–1925) и итальянского математика Д. Пеано (1858–1932), которые применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств. В своих трудах Фреге впервые систематизировал исчисление высказываний, т.е. аксиоматически построил логику высказываний. В работе «Основные законы арифметики» он построил впервые в истории науки формально логико-математическую систему, содержащую значительную часть арифметики.

Очевидно, что для математического образования важным является математическое мышление, особенности которого объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем.

В связи с этим современную математическую логику определяют как раздел математики, посвященный изучению: математических доказательств; вопросов

оснований математики; логики в информатике и искусственного интеллекта.

Одной из основных причин развития математической логики в системе наук является широкое распространение аксиоматического метода в построении математических теорий.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий и отношений между ними. Эти понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории — аксиомы. Все дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом.

Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом в построении геометрии. Изложение этой теории в «Началах» не безупречно. Евклид здесь пытается дать определение исходных понятий (точки, прямой, плоскости). В доказательстве теорем используются нигде явно не сформулированные положения, которые считаются очевидными.

Таким образом, в этом построении отсутствует необходимая логическая строгость, хотя истинность всех положений теории не вызывает сомнений.

Отметим, что такой подход к аксиоматическому построению теории оставался единственным до XIX века. Большую роль в изменении такого подхода сыграли работы Н.И. Лобачевского (1792–1856). Он впервые высказал суждение о невозможности доказательства пятого постулата Евклида и подкрепил это убеждение созданием новой геометрии. Позже немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925) построил евклидовую

модель геометрии Лобачевского и доказал, что V постулат не зависит от остальных аксиом, т.е. его нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Непротиворечивость аксиоматической теории является одним из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путем вывести два противоречащих друг другу утверждения.

Доказательство непротиворечивости аксиоматических теорий можно осуществить различными методами. Одним из них является метод моделирования, или формализаций. Здесь в качестве основных понятий и отношений выбираются элементы некоторого множества и отношения между ними, а затем проверяется, будут ли выполняться для выбранных понятий и отношений аксиомы данной теории, т.е. строится модель для данной теории.

Так аналитическая геометрия является арифметической интерпретацией геометрии Евклида. Ясно, что метод моделирования сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к непротиворечивости другой теории.

Большинство интерпретаций для математических теорий (и, в частности, для арифметики) строится на базе теории множеств.

Однако в конце XIX века в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы теории множеств). Ярким примером такого парадокса является парадокс Б. Рассела. С открытием парадоксов появилась необходимость уточнения и особенного изучения логических средств, используемых в математических доказательствах, что привело к дальнейшему развитию

математической логики и ее применению к плохо формализуемым объектам.

В развитии математической логики и применении ее к теории математического доказательства и основаниям математики приняли участие выдающиеся математики и логики конца XIX — XX вв., к числу которых относятся Дж. Пеано, Б. Рассел, А. Уайтхед, А.М. Тьюринг, Я. Лукашевич, А. Тарский, Д. Гильберт, Г. Генцен, К. Гёдель, С.К. Клини, Э.Л. Пост, А. Чёрч, И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков, А.А. Марков и др.

Математическая логика сформировалась как наука для удовлетворения потребностей логики в точном языке и формальном аппарате (первый этап), а дальнейшее ее развитие связано с потребностями математики в адекватной логике (второй этап). В результате математическая логика значительно расширила свою первоначальную предметную область. Математическая логика широко применяется как внутри математики (исследование оснований математики), так и в других областях (анализ и синтез автоматических устройств, теоретическая информатика, информационные системы, система искусственного интеллекта и т.п.).

В настоящее время математическая логика все чаще стала использоваться непосредственно в информатике и системе искусственного интеллекта. Более того, одним из наиболее известных проектов создания компьютеров пятого поколения предполагается использование логических исчислений в качестве основной системы программирования. Действительно, источником создания языка логического программирования Пролога являются логика предикатов 1-го порядка, теория рекурсивных функций, методы логического

вывода (конкретно — метод резолюций), а также языки программирования Пленэр и Лисп.

Дисциплина «Математическая логика» является непосредственным продолжением учебного курса «Дискретная математика», где излагаются следующие разделы:

- алгебра высказываний (алгебра логики);
- исчисление высказываний;
- алгебра предикатов;
- исчисление предикатов.

Изучение учебной дисциплины «Математическая логика» студентами, обучающимися по направлениям: педагогическое образование — профиль «Математика и информатика», «Информатика и математика» «Физика и информатика», «Технология и информатика»; информационные технологии в образовании — профиль «Информационные системы и технологии» и студентами, обучающимися по направлению «Прикладная информатика», обеспечивает получение фундаментального образования, развивает и совершенствует у них профессиональную подготовку.

Глава 1.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Алфавит и формулы алгебры высказываний

Изучение математической логики естественно начать с изучения алгебры высказываний, на которой базируются логические исчисления (исчисления высказываний, исчисления предикатов и др.). Кроме того, алгебра высказываний представляет самостоятельный интерес как основа для построения языка, описывающего некоторые дискретные устройства (электронные схемы, микросхемы, конечные автоматы и др.).

Под высказыванием понимается осмысленное предложение, о котором можно говорить, что оно истинно или ложно, но ни то и другое вместе.

Таким образом, множество всех высказываний делится на два класса:

- класс, включающий истинные высказывания;
- класс, включающий ложные высказывания.

Примеры.

1. Волга впадает в Каспийское море.
2. Два больше трех.
3. Какой час?

Первые два предложения являются высказываниями. Первое из них — истинно, второе — ложно. Третье предложение является вопросительным, следовательно, оно не является высказыванием.

Высказывания будем обозначать буквами латинского алфавита $x, y, z, \dots$, а их значения, т.е. истину и ложь, соответственно цифрами 1 и 0.

В обычной речи сложные предложения образуют из более простых с помощью союзов *и, или, если ..., то ...* и др.

Примеры.

1. Светит солнце, *и* идет дождь.
2. Шесть делится на два *или* шесть делится на три.
3. Если контакт замкнут, *то* лампа горит.

Эти связи можно рассматривать как операции над высказываниями. В обычной речи не всегда удается однозначно определить истинность или ложность сложного высказывания по истинности или ложности составляющих его высказываний.

В алгебре высказываний вводят операции, которые по существу выражают связи, употребительные в обычной речи, причем истинность или ложность сложного высказывания полностью определяется истинностью или ложностью составляющих его высказываний.

Определение 1. Алфавитом алгебры высказываний называется множество вида

$$A = \{p, q, r, x, y, z, \dots, p_1, q_1, r_1, x_1, y_1, z_1, \dots, -, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1, (,)\},$$

где латинскими буквами обозначены конкретные элементарные высказывания, которые назовем высказывательными переменными языка алгебры высказываний.

При необходимости употребляются также индексы из множества натуральных чисел; символы «1»,

«0» называются константами языка алгебры высказываний, соответственно означающими «истинно», «ложно»; « $\neg$ », $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ — символы, обозначающие логические операции языка, «(,)» — вспомогательные символы.

1.2. Основные логические операции алгебры высказываний

Пусть даны два элементарных высказывания x и y .

Определение 2. Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, обозначаемое $x \wedge y$ или $x \& y$ (читается « x и y »), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y одновременно истинны.

Определение 3. Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, обозначаемое $x \vee y$ (читается « x или y »), которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно ложны.

Определение 4. Импликацией (логическим следованием) двух высказываний x и y называется новое высказывание, обозначаемое $x \rightarrow y$ или $x \supset y$ (читается: «если x то y »; «из x следует y »; « x влечет за собой y »), которое ложно в том и только в том случае, когда высказывание x истинно и высказывание y ложно.

Определение 5. Отрицанием (инверсией) высказывания x называется новое высказывание, обозначаемое $\bar{x}$ или $\neg x$ (читается «не x »), которое истинно тогда и только тогда, когда x — ложно.

Определение 6. Эквиваленцией (логическим тождеством) двух высказываний x и y называется новое высказывание, обозначаемое $x \sim y$ или $x \equiv y$ или $x \leftrightarrow y$

(читается « x тогда и только тогда, когда y »), которое истинно тогда и только тогда, когда x и y одновременно истинно или ложно.

В таблице приведены основные логические операции алгебры высказываний:

Таблица 1

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

1.3. Индуктивное определение формулы и подформулы алгебры высказывания

При дальнейшем изложении учебного материала всякое произвольное высказывание обозначим большими латинскими буквами $X, Y, Z \dots$.

Они не являются символами алфавита алгебры высказываний.

Определение 7.

1. Каждая высказывательная переменная и логическая константа является формулой алгебры высказываний.

2. Если X — формула алгебры высказываний, то выражение $(\bar{X})$ также является формулой алгебры высказываний.

3. Если X и Y — формулы алгебры высказываний, то выражения вида

$$(X \wedge Y), (X \vee Y), (X \rightarrow Y), (X \sim Y)$$

тоже являются формулами алгебры высказываний.

4. Никаких других формул кроме пунктов 1–3 не существует, т.е. всякое выражение является формулой алгебры высказываний, если оно получено с помощью пунктов 1–3.

Каждая высказывательная переменная и логическая константа называется элементарной формулой алгебры высказываний.

В строгом смысле каждая формула алгебры высказываний включает внешние скобки. Приведем примеры формул в языке алгебры высказываний:

$(X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$ — есть формула алгебры высказываний,

$X \vee$ — не является формулой алгебры высказываний.

Для упрощения дальнейшего изложения материала принимаем некие соглашения.

1. Внешние скобки можно опускать.

Вместо $X \wedge Y$ или $X \& Y$ будем вписывать XY .

2. Приоритет логических операций задается следующим образом:

« $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ ».

Определение 8 (Индуктивное определение подформулы).

1. Подформулой элементарной формулы является она сама.

2. Если формула имеет вид $\bar{X}$, то ее подформулой является она сама и все подформулы формулы X .

3. Если формула имеет вид XY , $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$, $X \sim Y$, то их подформулами являются они сами и все подформулы формул X и Y .

4. Формула является подформулой данной формулы тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью пунктов 1–3.

Например, для формулы $\overline{x \vee y}$ подформулами являются: x , y , $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

1.4. Истинностные значения формулы алгебры высказывания

Пусть B — произвольная формула алгебры высказываний и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — список высказывательных переменных формулы B .

Так как каждая высказывательная переменная x_i (где $i = 1, \dots, n$) принимает либо значение «1», либо значение «0», то количество двоичных наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ равно 2^n .

Определение 9. Интерпретацией формулы B называется набор значений высказывательных переменных, входящих в данную формулу.

Определение 10. Таблица, содержащая всевозможные интерпретации формулы и соответствующие этим интерпретациям значения формулы, называется истинностным значением формулы B .

Пример. Пусть B представляет формулу вида: $x \rightarrow (y \vee x)$, тогда истинные значения данной формулы в виде таблицы имеют вид:

Таблица 2

x	y	$y \vee x$	$x \rightarrow (y \vee x)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

1.5. Классификация формул алгебры высказываний

Определение 11. Формула B называется тавтологией (тождественно истинной или общезначимой), если при любой из своих интерпретаций она принимает значение «истина».

Примерами тавтологий являются:

$$\begin{aligned} A &= x \vee \bar{x}; \\ B &= xy \rightarrow y \\ C &= (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \text{ и др.} \end{aligned}$$

Определение 12. Формула B называется тождественно ложной (противоречием или невыполнимой), если при любой из своих интерпретаций она принимает значение «ложь».

Примерами противоречивой формулы является отрицание всякой общезначимой формулы: $\overline{x \vee x}$; $\overline{x \rightarrow x \vee y}$ и др.

Определение 13. Формула B называется выполнимой, если существует хотя бы один набор значений высказывательных переменных, на котором формула B истинна.

Например: $x \rightarrow y$; xy и др.

Общезначимые формулы занимают важнейшие места в формальной логике, в том числе в алгебре высказываний.

Общезначимые формулы истинны в силу своей структуры, независимо от истинностных значений составляющих их формул.

Например, для любой формулы A формальная схема $A \vee \bar{A}$ принимает значение 1 независимо от значения формулы A . Как было сказано раньше, рассмотренная формальная схема выражается одним

из основных законов формальной логики — законом исключенного третьего.

Для тождественных истинных высказываний мы также будем использовать обозначение **1** или ***u***.

Через $(A)_B^x$ принято обозначать формулу, полученную из формулы A заменой всех вхождений в A переменной x формулой B .

Эта замена называется правилом подстановки.

Из истинности высказываний A и $A \rightarrow B$ следует истинность высказывания B . Этот логический закон принято называть правилом заключения.

1°. Если A — общезначимая формула, то формула $(A)_B^x$, также является общезначимой.

2°. Если A и $A \rightarrow B$ общезначимые формулы, то формула B , получающаяся из формулы A и $A \rightarrow B$ с помощью правила заключения, также является общезначимой.

Исходя из изложенного раздела алгебры высказываний следует, что для установления общезначимости формул используются истинностные таблицы.

1.6. Понятие равносильности. Основные равносильные формулы алгебры высказываний

Пусть A и B — произвольные формулы алгебры высказываний и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — список высказывательных переменных для этих формул.

Определение 14. Формулы A и B называются равносильными, если они принимают одинаковые истинные значения при любом наборе значений переменных из указанного списка и это обозначается $A = B$ или $A \equiv B$.

Из определения следует, что если у всяких двух формул алгебры высказываний таблицы истинности совпадают, то они равносильны.

Замечание. Не следует полагать, что в обе формулы A и B обязательно входят одни и те же переменные. Некоторые из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут фактически отсутствовать в каждой из них.

Например, несложно выявить, что формулы $A = x\bar{y} \vee x$ и $B = x$ являются равносильными.

Определение 15. Две формулы A и B называются **неравносильными**, если существует хотя бы один набор значений переменных из исходного списка, при котором они принимают различные значения.

Например, формулы $A = x \rightarrow y$ и $B = y \rightarrow x$, являются неравносильными.

Действительно, при наборе $(1,0)$ они принимают разные значения.

$$A_{(1,0)} = 1 \rightarrow 0 = 0; \quad B_{(1,0)} = 0 \rightarrow 1 = 1$$

Приведем перечень основных равносильностей алгебры высказываний.

Таблица 3

1. $xy = yx$	2. $x \vee y = y \vee x$
3. $x(yz) = (xy)z$	4. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
5. $x(y \vee z) = xy \vee xz$	6. $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$
7. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$	8. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$
9. $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$	10. $\bar{\bar{x}} = x$
11. $xx = x \quad (\bar{\bar{x}} = \bar{x})$	12. $x \bar{x} = 0$

13. $x1 = x$	14. $x0 = 0$
15. $x \vee x = x \quad (\bar{x} \vee \bar{x} = \bar{x})$	16. $x \vee \bar{x} = 1$
17. $x \vee 0 = x$	18. $x \vee 1 = 1$
19. $x \rightarrow 1 = 1$	20. $x \rightarrow 0 = \bar{x}$
21. $1 \rightarrow x = x$	22. $0 \rightarrow x = 1$
23. $x \rightarrow (y \vee z) =$ $= (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$	24. $x \rightarrow (yz) =$ $= (x \rightarrow y)(x \rightarrow z)$
25. $x \rightarrow (y \rightarrow z) =$ $= (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$	26. $x \sim y =$ $= (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$
27. $x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y}$	28. $x \vee xy = x$
29. $x(x \vee y) = x$	30. $x \sim y = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x)$
31. $x \vee \bar{x} y = x \vee y$	32. $xy \vee \bar{x} y = y$
33. $xy \vee x \bar{y} = x$	

С помощью основных равносильных формул можно установить равносильность всякой формулы алгебры высказываний.

Для установления равносильности формул A и B используют различные способы. Наиболее часто используемыми из них являются:

- установление равносильности формул с помощью истинностных таблиц;
- метод преобразований;
- метод от противного.

При проведении равносильных преобразований каждый шаг основывается на использовании того или иного закона.

Рассмотрим ряд примеров равносильных преобразований.

Пример 1. Доказать равносильность $\bar{x} \vee y \rightarrow xy = x$.
 $\bar{x} \vee y \rightarrow xy = \bar{x} \vee y \vee xy = \bar{x} \bar{y} \vee y \vee xy = x \bar{y} \vee y = x(\bar{y} \vee y) = x1 = x$

Пример 2. Доказать равносильность $x \leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy$.
 $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = (\bar{x} \vee y)\bar{y} \vee (\bar{x} \vee y)x =$
 $= \bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y} \vee y \bar{y} \vee yx = \bar{x} \bar{y} \vee 0 \vee yx = \bar{x} \bar{y} \vee yx = x \bar{y} \vee xy$

Пример 3. Упростить формулу $\overline{(x \vee y \rightarrow x \vee y)} y$.
 $\overline{(x \vee y \rightarrow x \vee y)} y = (x \vee y \vee x \vee y) y = (x \vee y) y = y$.

Пример 4. Доказать, что формула является общезначимой, т.е. $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)) = 1$.
 $\overline{(x \vee y) \vee (\bar{y} \vee z)} \vee \overline{x \vee y \vee z} = \bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee z = x \bar{y} \vee y \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} \vee z =$
 $= (x \bar{y} \vee x \bar{y}) \vee (y \bar{z} \vee z) = \bar{y}(x \vee x) \vee (y \vee z)(z \vee z) = \bar{y}1 \vee (y \vee z)1 =$
 $= \bar{y} \vee y \vee z = 1 \vee z = 1$

1.7. Булевы функции (логические функции)

Рассмотрим функцию вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где аргументы и сама функция принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Такие функции называются булевыми функциями.

Другими словами, булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сопоставляет всякому упорядоченному набору $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, состоящему из элементов 0 и 1, единственное значение $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, т.е. $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Таким образом, существует 2^n различных двоичных наборов, при каждом из которых функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает одно из двух значений: 0 или 1.

Теорема 1. Существует $2^{(2^n)}$ — булевых функций от n переменных.

Доказательство. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — произвольный двоичный набор, при котором функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение 0 или 1. Как нам знакомо из курса элементарной математики, количество таких бинарных наборов равно 2^n .

Всякая булева функция с каждым из таких наборов сопоставляет одно из двух истинностных значений — 0 или 1. Следовательно, булевых функций столько, сколько можно составить различных двоичных наборов. Но всякий такой набор есть размещение с повторениями из 2 по 2^n , т.е. $\tilde{A}_2^{2^n} = 2^{(2^n)}$.

Чтобы задать булеву функцию, достаточно знать ее значение при любом наборе значений переменных, т.е. задать булеву функцию в виде таблицы, как показано ниже.

Таблица 4

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0, 0, ..., 0, 0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0, 0, ..., 0, 1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0, 0, ..., 1, 0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
... ..	
1, 1, ..., 1, 1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

В левой части этой таблицы выписаны по строкам все 2^n двоичных наборов длины n в лексикографическом порядке. Первая строка в таблице является нулевым набором, а каждый следующий набор получается из предыдущего прибавлением 1. При этом говорят, что каждый набор является записью подходящего неотрицательного целого числа в двоичной системе счисления.

Множество всех булевых функций принято обозначать через P_2 .

Некоторые элементарные булевы функции.

Составим таблицу для всех одноместных булевых функций.

Таблица 5

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются константами 0 и 1. Как следует из таблицы, значения функции $f_3(x)$ совпадают со значениями переменной x . Исходя из этого функцию $f_3(x)$ называют тождественной функцией и вместо символа функции, как правило, пишут символ переменной x . Не трудно определить, что функция $f_4(x) = \bar{x}$ и ее называют отрицанием переменной x .

Рассмотрим теперь булевы функции от двух аргументов. Их количество равно 16. Составим таблицу для всех двуместных булевых функций.

Из табл. 6 следует, что $f_1(x_1, x_2)$ и $f_{16}(x_1, x_2)$ являются константами 0 и 1. Значения функции $f_4(x_1, x_2)$ совпадают со значениями переменной x_1 . Следовательно, $f_4(x_1, x_2)$ называют функцией выбора первого аргумента и обозначают $e_1^2(x_1, x_2)$ или e_1^2 . На практике часто вместо $e_1^2(x_1, x_2)$ пишут x_1 . Аналогично $f_6(x_1, x_2) = e_2^2(x_1, x_2) = x_2$.

Функцию $f_7(x_1, x_2)$ называют сложением по модулю 2. В отличие от обычного сложения $x_1 + x_2$ она обозначается

$$x_1 \oplus x_2.$$

Таблица 6

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0
f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функцию $f_{15}(x_1, x_2)$ называют штрихом Шеффера и обозначают $x_1 | x_2$.

Используя приведенные выше названия функций от двух переменных, попробуйте дать подходящие названия остальным функциям.

В теории булевых функций важной является не только зависимость функции от переменных, но и так называемая существенная зависимость функции от переменной. Прежде чем дать строгое определение этому понятию, посмотрим на «степень» зависимости функции от переменных на примерах двуместных функций

$$f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_{16}(x_1, x_2).$$

Функция $f_1(x_1, x_2)$ есть константа 0. Для этой функции любое изменение значений переменных не влечет за собой изменения значения функции. При этом переменные x_1, x_2 считают несущественными для $f_1(x_1, x_2)$. Аналогичное рассуждение можно сделать для функции $f_{16}(x_1, x_2)$.

Для функции $f_4(x_1, x_2)$ переменная x_1 называется существенной переменной, а значения переменной x_2 никак не влияют на значения этой функции, следовательно, она является фиктивной (несущественной) для данной функции.

Рассмотрим теперь функцию $f_2(x_1, x_2)$. Легко можно заметить, что обе переменные x_1, x_2 являются для нее существенными. Действительно, из равенств $f_2(0,1)=0$, $f_2(1,1)=1$ следует, что при фиксированном значении переменной $x_2=1$ изменение значения переменной x_1 влечет за собой изменение значения функции. Следовательно, переменная x_1 является существенной для данной функции. Аналогичным образом, рассматривая наборы $(1,0)$ и $(1,1)$, доказывается существенность переменной x_2 .

В виде упражнения проверьте на наличие существенности переменных x_1, x_2 для остальных двухместных функций.

Функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i , если имеются такие значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, что функция одной переменной $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ не является константой (т.е. совпадает с одной из функций x_i или $\bar{x}_i$).

Если функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i , то переменная x_i называется существенной переменной функции $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, а в противном случае переменная x_i называется несущественной или фиктивной переменной данной функции.

Функции, различающиеся фиктивными переменными, считаются равными.

Возникает вопрос: «Существует ли формула, с помощью которой можно задать всякую булеву функцию?»

Для ответа на вопрос поступим следующим образом.

$$\text{Определим: } x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

$$\text{Несомненно, из определения следует, что } \sigma^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = \alpha, \\ 0, & \text{если } \sigma \neq \alpha. \end{cases}$$

Последнее равенство можно доказать.

Рассмотрим σ^α . При $\sigma = \alpha$ возможны два случая: 1^1 или 0^0 . В обоих случаях мы получаем 1. Действительно, по первой части формулы получаем, что

$$1^1 = 1 \text{ и } 0^0 = \bar{0} = 1,$$

т.е. в обоих случаях получили «1», что соответствует действительности.

Теперь рассмотрим когда $\sigma \neq \alpha$. Также допустимы два случая: 1^0 или 0^1 . В обоих случаях с учетом вышеуказанной формулы получаем 0. Действительно, по первой части формулы получаем: $1^0 = \bar{1} = 0$ и $0^1 = 0$.

Таким образом, каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная определяемая этой формулой булева функция.

1.8. Совершенные нормальные формы

В основном существуют два способа задания булевых функций. Первым способом можно считать задание булевых функций формулами, т.е. аналитический способ задания булевых функций, а другой способ — задание булевых функций истинностными таблицами.

По формуле легко составляется истинностная таблица. На практике при конструировании различных электронных (цифровых) устройств часто возникает обратная задача — от таблицы истинности перейти к формуле, чтобы на ее основе построить функциональную схему. Значения переменных в таблице истинности соответствуют значениям входов функциональной схемы.

Для решения подобного рода задач существуют два метода, о которых будем говорить ниже. Для пояснения приведем следующий пример.

Пусть трехместная булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана в виде таблицы.

Таблица 7

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Способ 1

1. Из данной истинностной таблицы выбираем все те наборы значений переменных, для которых функция принимает значение «1».

2. Для каждого из отобранных наборов составляем конъюнкции из переменных x_1, x_2, x_3 или их отрицаний, которые будем называть образующими или элементарными конъюнкциями.

В нашем случае элементарными конъюнкциями являются следующие формулы:

$$x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 \bar{x}_3, \quad x_1 \bar{x}_2 x_3, \quad \bar{x}_1 x_2 x_3.$$

3. Теперь составляем дизъюнкцию из имеющихся элементарных конъюнкций, т.е.

$$(x_1 x_2 x_3) \vee (x_1 x_2 \bar{x}_3) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3) \vee (\bar{x}_1 x_2 x_3).$$

Дизъюнкция, составленная из элементарных конъюнкций, называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет равных элементарных конъюнкций, и все элементарные конъюнкции содержат одни и те же переменные, причем каждую переменную — только один раз (включая вхождения под знаком отрицания).

Способ 2

Этот алгоритм аналогичен первому способу, поэтому мы приведем его кратко без пояснений и доказательства.

1. Рассмотрим все те наборы значений переменных, для которых функция принимает значение «0».

2. Для каждого из отобранных наборов составляем дизъюнкцию из их отрицаний или по переменным x_1, x_2, x_3 (имеются в виду те наборы, где функция принимает значение «0»), которые будем называть образующими, или элементарными дизъюнкциями.

В нашем случае элементарными дизъюнкциями являются следующие формулы:

$$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3, \quad x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3, \quad x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3, \quad x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

3. Теперь составляем конъюнкцию из имеющихся элементарных дизъюнкций, т.е.

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Конъюнкция, составленная из элементарных дизъюнкций, называется конъюнктивной нормальной формы (КНФ).

Совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) называется КНФ, в которой нет равных элементарных дизъюнкций, и все элементарные дизъюнкций содержат одни и те же переменные, причем каждую переменную — только один раз (включая вхождения под знаком отрицания).

Из вышеуказанного примера следует, что если мы хотим построить формулу некоторой функции по таблице истинности этой функции, то всегда можно получить СКНФ или СДНФ этой функции.

Замечание. СДНФ относится к более общему классу формул над множеством $\{\bar{x}, xy, x \vee y\}$, которые носят ДНФ. В отличие от СДНФ в произвольной ДНФ, которая также представляет собой дизъюнкцию конъюнкций, конъюнкции могут состоять из различных переменных и иметь различную длину. Например, формулы

$$xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x} \bar{y} \quad \text{и} \quad x \vee y$$

реализуют одну и ту же булеву функцию $f(x, y) = x \rightarrow y$, где первая из них является СДНФ, а вторая формула — ДНФ. На этом примере видно, что ДНФ булевой функции может быть гораздо проще, чем ее СДНФ.

Пусть задана n -местная булева функция.

Теорема 4. Для всякой булевой функции имеет место:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

где $1 \leq m \leq n$.

Доказательство. Берем произвольный двоичный набор длины n , т.е. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и покажем, что в этом наборе левая и правая части данного равенства принимают одинаковые значения. Действительно, пусть $f(x_1, \dots, x_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. В правой части вышеуказанного равенства количество всевозможных двоичных наборов равно 2^m , и среди них обязательно найдется один набор, для которого имеет место равенство: $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Отсюда следует, что $\sigma_i = \alpha_i$ и $\sigma_i^{\alpha_i} = 1$. Тогда в правой части вышеуказанного равенства один дизъюнктивный член имеет следующий вид $1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_n)$, а остальные дизъюнктивные члены равняются нулю, так как в конъюнкции где-то встречается нуль.

Таким образом

$$\bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Теорема 5. Для всякой булевой функции имеет место:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

В случае, когда $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, данное представление приобретает вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \text{ — СДНФ.}$$

Следствие 1. Каждая СДНФ выражает ту же булеву функцию, что и истинностная таблица (кроме $f = 0$).

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, согласно истинностной таблице при произвольном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, принимает значение 1, т.е.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Тогда этот набор будет находиться среди выбранных наборов, относительно которых будут составляться элементарные конъюнкции. Таким образом, в составленной СДНФ будет по крайней мере один дизъюнктивный член, который при данном наборе принимает значение 1. По определению дизъюнкции значение 1 будет иметь и сама СДНФ.

Пусть теперь при данном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, согласно истинностной таблице, функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение 0. Тогда этот набор не будет среди избранных. Значит, все составленные элементарные конъюнкции будут иметь значение 0. Следовательно, все члены СДНФ принимают значение 0.

Следствие 2. Всякая составленная СКНФ выражает ту же булеву функцию (истинностную функцию), что и истинностная таблица (кроме $f = 1$).

Доказательство (самостоятельно).

Теорема 6. Всякую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ можно выразить формулой алгебры высказываний, более того, эта формула содержит только логические операции $\{\bar{}, \wedge, \vee\}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ при любом наборе значений переменных. Тогда достаточно в качестве формулы, представляющей функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, взять формулу вида $x_i \bar{x}_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \bar{x}_1)(x_2 \bar{x}_2) \dots (x_n \bar{x}_n) = 0.$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, тогда при любом наборе значений переменных функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Возьмем произвольный двоичный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и определим множество вида $G_f = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid f_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = 1\}$.

Тогда функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить как СДНФ, т.е. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in Gf} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$,

где $\sigma_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. По теореме 5 это утверждение верно.

Следствие 3. Так как конъюнкция может быть выражена через дизъюнкцию и отрицание, то всякую булеву функцию можно выразить с помощью операции $\{\vee, -\}$.

Следствия 4. Так как дизъюнкция может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то всякую булеву функцию можно выразить с помощью операции $\{\wedge, -\}$.

Правдоподобность этих утверждений следует из равносильности формулы алгебры высказываний:

$$\begin{aligned}x \vee y &= \overline{x} \overline{y} \\ xy &= \overline{x} \vee \overline{y}\end{aligned}$$

1.9. Системы булевых функций

Задание булевых функций табличным способом является универсальным, где в примитивной форме отражена функциональная зависимость значений функции от значений аргументов. Однако в математике часто требуется установить функциональные связи между значениями функции для нескольких наборов значений переменных либо между значениями различных функций. В таких случаях табличная форма неприемлема, а используют формулы различных типов.

Самые простые формулы обобщают идею перехода от значений переменных к значениям функции и допускают использование других функций в качестве переменных. Действительно, нам известно из курса элементарной математики, что формула $(x_1 + x_2) \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$,

составленная из символов переменных x_1, x_2, x_3 и символов функции $+$, $\cdot$, указывает на определенную последовательность при вычислении функции, представленной этой формулой. При этом функции сложения и умножения в заданной формуле считаются известными, а рассматриваемая формула только организует процесс вычисления значений функции, представленной этой формулой, исходя из значений переменных x_1, x_2, x_3 и используя заданные функции $+$, $\cdot$.

Предположим, что имеется некоторое непустое множество F булевых функций. Введем понятие формулы, составленной из символов функций множества F (формулы над множеством F). Какие функции входят в F и как они заданы, нам безразлично, важно, что каждая функция из F имела собственное имя.

Определим понятие формулы над F индуктивным способом.

Пусть f есть обозначение функции от n переменных из множества F , а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — символы переменных. Тогда выражение $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называем формулой над F .

Пусть теперь g есть обозначение функции от m переменных из множества F , а $A_1, A_2, \dots, A_m$ — либо определенные формулы над F , либо символы переменных (необязательно различные).

Тогда выражение $g(A_1, A_2, \dots, A_m)$ считаем формулой над F .

Пусть, например, F есть множество булевых функций, состоящее из функции $\bar{}$, $\cdot$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $|$ (соответственно отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, сложение по модулю 2, импликация, штрих Шеффера).

Тогда согласно приведенному выше определению следующие выражения будут являться формулами над F :

$$\bar{x}_5, (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_5, ((x_3 \cdot \bar{x}_2) \rightarrow \overline{(x_1 \cdot x_5)}) | x_1, \\ (\bar{x}_3 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_1)) \oplus (\bar{x}_3 \vee (x_1 \cdot x_5)).$$

Для определения функций задаваемой конкретной формулой потребуется вновь обратиться к определению понятия формулы над F и параллельно этому определению ввести определение функции, реализуемой формулой над F .

Если f есть обозначение функции от n переменных из множества F , то формула $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реализует ту самую функцию от n переменных, обозначением которой служит f . Например, формула $((x_1 x_2) \sim \bar{x}_3)$ реализует функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, представленную в табл. 8.

Таблица 8

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Определение 18. Пусть заданы функции

$$g(y_1, \dots, y_n) \text{ и } h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_n(x_1, \dots, x_m).$$

Говорят, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ получена из этих функций с помощью операции суперпозиции, если выполняется следующее равенство:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_m), \dots, h_n(x_1, \dots, x_m)).$$

В теореме 6 доказано, что всякая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции трех

булевых функций: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. В настоящем параграфе тема представления булевых функций в виде суперпозиций функций из некоторой системы развивается и приводится до определенного конца: приводятся необходимые и достаточные условия (теорема Поста), которым должна удовлетворять система булевых функций для того, чтобы всякая булева функция могла быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы.

Определение 19. Система булевых функций F называется полной, если всякая булева функция представлена формулой над F .

Примерами полных систем булевых функций являются:

1) $\{\vee, \wedge, \bar{}\}$; 2) $\{\wedge, \bar{}\}$; 3) $\{\vee, \bar{}\}$; 4) $\{\rightarrow, \bar{}\}$; 5) $\{||, \downarrow\}$.

В виде упражнения докажите самостоятельно полноту каждой из вышеуказанной системы.

Специальные классы булевых функций

Говорят, что булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет 0, если $f(0, \dots, 0) = 0$. Обозначим через P_0 класс всех булевых функций, сохраняющих 0.

Говорят, что булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет 1, если $f(1, \dots, 1) = 1$. Обозначим через P_1 класс всех булевых функций, сохраняющих 1.

Булева функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется двойственной функцией для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ для любых $x_1, \dots, x_n$.

Булева функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$. Класс всех самодвойственных булевых функций обозначим через S .

Введем на множестве $\{0, 1\}$ отношение порядка, полагая, что $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых значений

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \{0, 1\}$ из $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$ следует, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Класс всех монотонных функций обозначим через M .

Полином вида $A_1 + A_2 + \dots + A_m$, где каждая из формул A_i есть либо 1, либо переменная, либо конъюнкция различных переменных, $A_i \neq A_j$ при $i \neq j$, называется полиномом Жегалкина.

Наконец, булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется линейной, если ее можно представить в виде следующего выражения (называемого полиномом Жегалкина степени не выше первой):

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные, равные либо 0, либо 1. Символом L обозначим класс всех линейных булевых функций.

Введенные классы булевых функций P_0, P_1, S, M, L играют главную роль при описании полных систем булевых функций.

Определение 20. Класс булевых функций называется собственным, если он не пуст и не совпадает с классом всех булевых функций.

Определение 21. Класс булевых функций называется замкнутым или классом Поста, если он вместе со всякими своими функциями содержит всякую их суперпозицию.

Теорема 7. Классы P_0, P_1, S, M, L являются собственными замкнутыми классами булевых функций.

Доказательство. Проверим сначала, что все эти классы являются собственными. Укажем функции, которые принадлежат и не принадлежат каждому из рассматриваемых классов, предоставляя читателю проверить самостоятельно данные утверждения. Как классу P_0 , так и классу P_1 принадлежит, например,

конъюнкция и не принадлежит отрицание. Далее конъюнкция не является самодвойственной функцией, а отрицание есть функция самодвойственная. (Проверим последнее утверждение. Пусть $f(x) = \bar{x}$. Тогда $f^*(x) = \overline{f(\bar{x})} = \bar{x} = f(x)$, а значит, $f(x) = \bar{x}$ — самодвойственная функция). Наконец, к классу монотонных функций принадлежит конъюнкция и не принадлежит импликация, а к классу L линейных функций принадлежит сложение по модулю два (сумма Жегалкина) и не принадлежит конъюнкция.

Покажем теперь замкнутость этих классов. Пусть $f_1, f_2, f_3 \in P_0$, т.е. $f_1(0,0) = f_2(0,0) = f_3(0,0) = 0$, и $g(x_1, x_2) = f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$.

Тогда

$$g(0,0) = f_1(f_2(0,0), f_3(0,0)) = f_1(0,0) = 0 \text{ т.е. } g \in P_0.$$

Аналогично проверяется замкнутость класса P_1 .

Пусть теперь $f_1, f_2, f_3 \in S$, т.е.

$$\begin{aligned}\overline{f_1(u,v)} &= f_1(\bar{u}, \bar{v}), \\ \overline{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} &= f_2(x_1, x_2), \\ \overline{f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} &= f_3(x_1, x_2), \\ g(x_1, x_2) &= f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}g^*(x_1, x_2) &= \overline{g(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \overline{f_1(f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2), f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2))} = \\ &= f_1(\overline{f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}, \overline{f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}) = f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)) = g(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Следовательно, $g \in S$.

Пусть $f_1, f_2, f_3 \in M$ и $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2$ и $g(x_1, x_2) = f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$.

$$\begin{aligned}\text{Тогда } f_2(\alpha_1, \alpha_2) &\leq f_2(\beta_1, \beta_2), \quad f_3(\alpha_1, \alpha_2) \leq f_3(\beta_1, \beta_2) \text{ и} \\ g(\alpha_1, \alpha_2) &= f_1(f_2(\alpha_1, \alpha_2), f_3(\alpha_1, \alpha_2)) \leq f_1(f_2(\beta_1, \beta_2), f_3(\beta_1, \beta_2)) = \\ &= g(\beta_1, \beta_2).\end{aligned}$$

Следовательно, $g \in M$.

Наконец рассмотрим случай, когда $f_1, f_2, f_3 \in L$.
Предположим, что

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2; \\f_2(x_1, x_2) &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2; \\f_3(x_1, x_2) &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}g(x_1, x_2) &= f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2)) = a_0 + a_1 \cdot f_2(x_1, x_2) + a_2 \cdot f_3(x_1, x_2) = \\&= a_0 + a_1 \cdot (b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2) + a_2 \cdot (c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2) = \\&= (a_0 + a_1 b_0 + a_2 c_0) + (a_1 b_1 + a_2 c_1) \cdot x_1 + (a_1 b_2 + a_2 c_2) \cdot x_2 = d_0 + d_1 x_1 + d_2 x_2. \\g(\alpha_1, \alpha_2) &= f_1(f_2(\alpha_1, \alpha_2), f_3(\alpha_1, \alpha_2)) \leq f_1(f_2(\beta_1, \beta_2), f_3(\beta_1, \beta_2)) = g(\beta_1, \beta_2)\end{aligned}$$

Следовательно, $g \in L$.

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что, например, функция $f(x) = x$ принадлежит каждому из пяти классов P_0, P_1, S, M, L .

Лемма. Пусть даны две системы булевых функций S_1, S_2 .

Если система булевых функций F_1 полная и всякую функцию системы F_1 можно выразить формулами F_2 , то F_2 также будет полная система.

Теорема 8 (Поста) (критерий полноты класса булевых функций)

Система булевых функций $\{f_0, f_1, \dots, f_s, \dots\}$ является полной тогда и только тогда, когда существует функция из данной системы не принадлежащая ни одному из основных замкнутых классов P_0, P_1, S, M, L .

Доказательство.

Необходимость. Пусть система булевых функций $\{f_0, f_1, \dots, f_s, \dots\}$ полна. Допустим, что все функции этой системы входят в класс P_0 . Поскольку на основании предыдущей теоремы класс P_0 замкнут, то всякая суперпозиция любых функций из данной системы есть функция из класса P_0 . Но также по предыдущей теореме класс P_0 не исчерпывает всех булевых функций.

Поэтому найдется булева функция (не принадлежащая классу P_0), которая не является суперпозицией функций из системы $\{f_0, f_1, \dots, f_s, \dots\}$, что противоречит полноте этой системы. Следовательно, в системе имеется функция, не принадлежащая классу P_0 . Совершенно аналогично доказываются утверждения о наличии в системе $\{f_0, f_1, \dots, f_s, \dots\}$ функций, не принадлежащих классам P_0, P_1, S, M, L .

Достаточность. Предположим, что среди функций системы $\{f_0, f_1, \dots, f_s, \dots\}$ имеются такие функции f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 , что $f_0 \notin P_0$; $f_1 \notin P_1$; $f_2 \notin S$; $f_3 \notin M$; $f_4 \notin L$.

Покажем, что из этих пяти функций с помощью суперпозиций можно сконструировать подобные функции, которые заведомо образуют полную систему.

Начнем с f_0 , для которой $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$. Введем функцию $\tilde{f}_0(x) = f_0(x, x, \dots, x)$. Для нее имеем: $\tilde{f}_0(0) = 1$, $\tilde{f}_0(1) = 0$ или 1. Следовательно, $\tilde{f}_0(x) = \bar{x}$ или $\tilde{f}_0(x) = 1$.

Аналогично из f_1 , для которой $f_1(1, 1, \dots, 1) = 0$, строим функцию $\tilde{f}_1(x) = f_1(x, x, \dots, x)$. Для нее имеем: $\tilde{f}_1(1) = 0$, $\tilde{f}_1(0) = 1$ или 0. Следовательно, $\tilde{f}_1(x) = \bar{x}$ или $\tilde{f}_1(x) = 0$.

Таким образом, приобретаем одну из следующих четырех пар функций:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \text{ и } \bar{x} & (1); \quad \bar{x} \text{ и } 0 & (2); \\ \bar{x} \text{ и } 1 & (3); \quad 0 \text{ и } 1 & (4). \end{array}$$

В каждом из случаев (2) и (3) имеем тогда по три функции $\bar{x}, 0, 1$ (например, если есть функции $\bar{x}$ и 0, то константа 1 получается как $\bar{0}$).

Рассмотрим случай (1). Покажем, что и здесь можно получить обе константы 0 и 1. Для этого привлечем несамодвойственную функцию f_2 (т.е. $f_2 \notin S$). Для нее $f_2 \neq f_2^*$, т.е. $f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq f_2(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ для некоторого

набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из нулей и единиц. Следовательно, для этого набора $f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_2(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$. Построим теперь функцию $f_2(x)$ по следующему правилу: $f_2(x) = f_2(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$, где

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \text{ и } \bar{x} & (1); \quad \bar{x} \text{ и } 0 & (2); \\ \bar{x} \text{ и } 1 & (3); \quad 0 \text{ и } 1 & (4). \end{array} \quad \text{для } 1 \leq i \leq n.$$

Для функции имеем:

$$\tilde{f}_2(0) = f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_2(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \tilde{f}_2(1).$$

Следовательно $\tilde{f}_2(x)$ — константа.

Из того, что имеется $\bar{x}$, из этой константы (0 или 1) можно получить и другую константу (1 или 0 соответственно). Итак, в случае (1) имеем функции $\bar{x}, 0, 1$.

Рассмотрим случай (4). Здесь из констант 0 и 1 необходимо получить функцию $\bar{x}$. Для этого рассмотрим немонотонную функцию $f_3 \notin M$. Ее немонотонность означает: найдутся такие наборы из нулей и единиц $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n)$ но $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Построим функцию $f_3(x)$ по следующему правилу: $f_3(x) = f_2(x^{\delta_1}, \dots, x^{\delta_n})$, где

$$x^{\delta_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0; \\ 1, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1; \\ x, & \text{если } \alpha_i = 0, \beta_i = 1, \end{cases}$$

для $1 \leq i \leq n$. Очевидно, что $\tilde{f}_3(0) > \tilde{f}_3(1)$. Следовательно, должно быть $\tilde{f}_3(0) = 1$, $\tilde{f}_3(1) = 0$. Значит $\tilde{f}_3(x) = \bar{x}$.

Таким образом, из данной системы функций с помощью суперпозиций нами получены функции $\bar{x}, 0, 1$.

Рассмотрим теперь нелинейную функцию $f_4 \notin L$. Предположим, что x_1 — тот ее аргумент, который в разложение полинома Жегалкина функции f_4 входит нелинейно, т.е. f_4 может быть представлена в виде

$$f_4(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \phi(x_2, \dots, x_n) + \psi(x_2, \dots, x_n),$$

где $\phi \neq 0, \phi \neq 1$ (в противном случае функция f_4 имела бы два различных представления полиномами Жегалкина, что невозможно). Поэтому, если $\phi(0, \dots, 0) = a$, то найдется такой набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, при котором $\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{a}$.

Построим функцию $\tilde{f}_4(x, y)$ по следующему правилу:

$$\tilde{f}_4(x, y) = x \cdot \check{\phi}(y) + \psi(y),$$

где $x = x_1$, $\check{\phi}(y) = \phi(y^{\alpha_2}, \dots, y^{\alpha_n})$,

$$\psi(y) = \psi(y^{\alpha_2}, \dots, y^{\alpha_n}), \text{ и } y^{\alpha_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = 0; \\ y, & \text{если } \alpha_i = 1, \end{cases}$$

для $2 \leq i \leq n$.

Тогда получаем, $\check{\phi}(0) = \phi(0, \dots, 0) = a$; $\check{\phi}(1) = \phi(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = \bar{a}$. Следовательно, $\check{\phi}(y) = y$ или $\check{\phi}(y) = \bar{y}$. Заметим, что $\bar{y} = y + 1$. Значит, $\check{\phi}(y)$ можно представить в виде $\check{\phi}(y) = y + b_0$, где $b_0 = 0$ или 1 . Кроме того, ясно, что функцию одного аргумента $\psi(y)$ можно представить в виде линейного полинома Жегалкина: $\psi(y) = b_1 y + b_2$. Таким образом, $\tilde{f}_4(x, y)$ имеет вид:

$$\tilde{f}_4(x, y) = x(y + b_0) + (b_1 y + b_2) = xy + bx + cy + d.$$

Рассмотрим всевозможные случаи для коэффициентов b, c, d .

Если $b = c = d = 0$, то $\tilde{f}_4(x, y) = xy$.

Если $b = 1$, то функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{f}_4(x, y)} &= \tilde{f}_4(x, \bar{y}) = x\bar{y} + x + c\bar{y} + d = x(y + 1) + x + c(y + 1) + d = \\ &= xy + x + x + cy + c + d = xy + cy + c_1. \end{aligned}$$

Если $c = c_1 = 0$, то $\overline{\tilde{f}_4(x, y)} = xy$.

Если $c = 1$, то функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{f}_4(x, y)} &= \tilde{f}_4(\bar{x}, y) = \bar{x}y + y + c_1 = \\ &= (x + 1)y + y + c_1 = xy + y + y + c_1 = xy + c_1. \end{aligned}$$

В случае, когда $c_1 = 0$, $\overline{\tilde{f}_4(x, y)} = xy$.

Если $c_1 = 1$, то $\overline{f_4(x, y)} = xy + 1 = \overline{xy} = x|y$ (штрих Шеффера).

Таким образом, из функций f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 , имеющих в данной системе функций, мы получаем с помощью суперпозиций функции $\bar{x}$ и xy или же функцию $x|y$. Поскольку ранее было доказано, что каждая из систем булевых функций $\{\wedge, \bar{}\}$ и $\{|\}$ полна, то и данная система булевых функций $\{f_0, f_1, \dots, f_4, \dots\}$ полна.

Практическое применение теоремы Поста

Из этой теоремы следует достаточно простой способ выяснения полноты некоторого набора функций. Для каждой из этих функций выясняется принадлежность к перечисленным выше классам. Результаты заносятся в так называемую *таблицу Поста* (в нашем примере эта таблица составлена для четырех функций, причем знаком “+” отмечается принадлежность функции соответствующему классу, знак “–” означает, что функция в него не входит).

Таблица 9

f	P_0	P_1	L	M	S
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	+
f_3	–	+	–	–	–
f_4	+	+	–	+	–

В соответствии с теоремой Поста набор функций будет полным тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста имеется хотя бы один минус.

Все остальные логические функции можно составить из набора логических функций, среди которых есть:

- хотя бы одна нелинейная;
- хотя бы одна немонотонная;
- хотя бы одна несамодвойственная;
- хотя бы одна, не сохраняющая 0;
- хотя бы одна, не сохраняющая 1.

Рассмотрим пример.

Проверить функциональную полноту системы булевых функций $A = \{x \oplus y, x \wedge y, 1\}$.

Проверим принадлежность замкнутым классам функции $f(x, y) = x \oplus y$. Построим таблицу истинности данной функции.

Таблица 10

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$f(0,0) = 0$, следовательно, $f(x, y) \in P_0$.

$f(1,1) = 0$, следовательно, $f(x, y) \notin P_0$.

$f(0,0) = f(1,1)$, следовательно, $f(x, y) \notin S$.

$f(1,0) = 1 > 0 = f(1,1)$, следовательно, $f(x, y) \notin M$.

Функция представляет собой полином Жегалкина первой степени, следовательно, $f(x, y) \in L$.

Результаты можно занести в первую строку таблицы Поста. Остальные функции исследуются аналогично. Построим таблицу Поста.

Таблица 11

	P_0	P_1	S	M	L
$x \oplus y$	+	-	-	-	+
$x \wedge y$	+	+	-	+	-
1	-	+	-	+	+

В каждом столбце таблицы имеется минус, следовательно, система A функционально полна.

1.10. Минимизация булевых функций

Совершенные нормальные формы (СНФ) хотя и дают однозначные представления функции, но являются очень громоздкими. Реализация СНФ программно или схемотехнически является избыточной, что ведет к увеличению программного кода, поэтому существуют методы упрощения логической записи — минимизации.

Определение 22. Преобразование логических функций с целью упрощения их аналитического представления называются минимизацией.

Существуют два направления минимизации:

1. Кратчайшая форма записи (цель — минимизировать ранг каждого терма).

Под термом здесь понимается перечень символов переменных или символов функций, входящих в формулу.

При этом получаются кратчайшие формы КДНФ (кратчайшая дизъюнктивная нормальная форма), ККНФ (кратчайшая конъюнктивная нормальная форма), КПНФ (кратчайшая приведенная нормальная форма).

2. Получение минимальной формы записи (цель — получение минимального числа символов для записи всей функции сразу).

Минимизация ДНФ

Пусть Q — полная система булевых функций. Тогда любую булеву функцию можно реализовать формулой над Q . Для некоторых полных систем Q существуют функции, которые реализуются различными формулами. (Легко показать, что для любой полной системы Q и любой булевой функции f существует бесконечное число формул над Q , реализующих функцию f). Поэтому возникает проблема нахождения наиболее оптимальной из них. Решение этой проблемы имеет существенное значение в решении прикладных задач.

На практике, как правило, рассматриваются такие критерии оптимальности, для которых вопрос о существовании оптимальных формул решается примитивным образом. Обычно для формул определяется некая числовая характеристика (параметр), имеющая различную степень сложности.

Оптимальной формулой называется формула с наименьшим возможным значением этого параметра. Сам процесс поиска формул наименьшей сложности носит название *минимизации формул*.

Из всех полных систем булевых функций наиболее востребованной в решении вопросов минимизации считается система $Q_0 = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$.

При этом в качестве меры сложности чаще всего рассматривают два взаимосвязанных понятия: число символов функций, входящих в формулу, либо число символов переменных.

При этом как символы функций, так и символы переменных подсчитываются с теми кратностями, с которыми они встречаются в формуле. Например, в формуле

$$x_1(\overline{x_2 \vee x_3}) \vee \overline{x_2} \overline{x_3}(\overline{x_1 x_2 \vee \overline{x_4}})$$

имеются 12 символов функций и 8 символов переменных.

При изложении минимизации булевых функций в качестве меры сложности формул будем выбирать число символов переменных, входящих в формулу. Несложно понять, что для всякой булевой функции существует реализующая ее формула наименьшей сложности над системой Q_0 (таких формул может быть несколько).

В самом деле для заданной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ можно, например, последовательно перебирать в некотором порядке все формулы над Q_0 сложности $1, 2, \dots$, содержащие только символы переменных $x_1, \dots, x_n$, и сравнивать реализуемые ими функции с функцией f .

Этот процесс является конечным. Действительно, во-первых, функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ всегда можно реализовать в виде совершенной ДНФ со сложностью, не превосходящей $n \cdot 2^n$. А во-вторых, количество формул над Q_0 заданной сложности конечно.

Описанный выше примитивный алгоритм поиска формулы наименьшей сложности относится к классу так называемых переборных алгоритмов. Отличительным свойством этих алгоритмов является то, что для отыскания искомого объекта (в нашем случае — формулы) сложности l приходится перебирать все объекты сложности, меньшей или равной l . Обычно это приводит к тому, что переборный алгоритм при работе над входными

данными размера l совершает около c^l шагов, где c — константа, превосходящая 1.

Если обратиться к формулам над системой Q_0 , то можно показать, что число различных формул, содержащих ровно r символов переменных из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, не меньше, чем $(4n)^r$. Поэтому если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ задана формулой сложности l , то непосредственный просмотр всех формул со сложностью k , (где $k \leq l$) потребует не менее c_1^l шагов, где $c_1 > 1$.

Дадим необходимые определения, употребляемые в теории минимизации ДНФ.

Определение 23. *Элементарной конъюнкцией* называется формула вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \{0, 1\}$ и все переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ различны. Число r называется *рангом конъюнкции*.

Определение 24. *Дизъюнктивной нормальной формы* (ДНФ) называется формула вида $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_t$ где $K_1, K_2, \dots, K_t$ — различные элементарные конъюнкции (порядок сомножителей в конъюнкции роли не играет).

Определение 25. *Минимальной ДНФ функции* f называется ДНФ, которая реализует функцию f и имеет наименьшее число символов переменных среди всех ДНФ, реализующих функцию f .

Всякая булева функция может иметь несколько минимальных ДНФ. Например, для функции $f(x, y, z)$, заданной двоичным набором (11100101), минимальными ДНФ являются: $\bar{x}y \vee xz \vee \bar{x}\bar{z}$ и $xz \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$.

Как мы уже отметили, проблему минимизации ДНФ можно решить примитивным переборным алгоритмом. Этим способом уменьшим число переборов алгоритма за счет удаления некоторых элементарных конъюнкций, которые заведомо не входят ни в одну из минимальных ДНФ. С этой целью введем следующие понятия.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция и K — элементарная конъюнкция, все переменные которой принадлежат множеству $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Определение 26. Элементарную конъюнкцию K называют *импликантом* функции f , если функция $K \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ тождественно равна 1, и *простым импликантом* функции f , если K — импликант функции f , но перестает быть подобным после вычеркивания из K некоторых сомножителей.

Из этого определения следует, что импликант K функции f принимает значение 1 только на тех наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на которых функция $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ (импликант K «имплицирует» единичные значения функции f).

Далее, если элементарная конъюнкция K' получается из элементарной конъюнкции K вычеркиванием некоторых сомножителей, то, очевидно, $(K \rightarrow K')$ будет тождественно равна 1.

Поэтому простой импликант K функции f обладает свойством максимальной: он, как говорят, восполняет наибольшее число единиц функции f среди всех импликантов функции f , которые получаются из K умножением на некоторые сомножители. Отсюда говорят, что простые импликанты и дизъюнкция всех простых импликантов играют важную роль в решении вопросов минимизации ДНФ.

Определение 27. ДНФ функции f называется *сокращенной*, если она представляет собой дизъюнкцию всех простых импликантов функции f .

Несложно заметить, что сокращенная ДНФ обязательно должна быть минимальной. Например, для рассмотренной выше приведенной функции (11100101) с минимальной ДНФ сокращенной ДНФ является $\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee xz \vee \bar{y}z$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение (теорема 9).

Теорема 9. Любая минимальная ДНФ булевой функции может быть получена из ее сокращенной ДНФ путем удаления некоторых конъюнкций.

Доказательство. Достаточно установить, что любая минимальная ДНФ булевой функции f является дизъюнкцией только простых импликантов функции f , так как, во-первых, в силу определения каждая входящая в ДНФ конъюнкция представляет собой импликант функции f . А во-вторых, если бы импликант минимальной ДНФ не был простым, то из него удалением некоторых сомножителей можно было бы получить простой импликант функции f . Как следствие, получили бы другую ДНФ с меньшим числом символов переменных. Это противоречит определению минимальной ДНФ. Теорема доказана.

Следствие. Если некоторая конъюнкция не входит в сокращенную ДНФ функции f , то она не входит ни в одну минимальную ДНФ функции f . Теорема 9 показывает, что при построении минимальных ДНФ нет необходимости рассматривать произвольные импликанты — достаточно ограничиться теми, которые входят в сокращенную ДНФ.

Как мы уже убедились, сокращенная ДНФ может не быть минимальной. Однако существуют достаточно широкие классы функций, для которых эти понятия совпадают. Один из них — класс монотонных функций.

Теорема 10. Сокращенная ДНФ монотонной функции, отличной от константы, не содержит отрицаний переменных и является ее единственной минимальной ДНФ.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — монотонная функция, отличная от константы, а конъюнкция

$$K = x_{i_1}, \dots, x_{i_r}, \bar{x}_{i_{r+1}}, \dots, \bar{x}_{i_s}$$

является импликантом функции f , причем $s > r$. Тогда конъюнкция K , а вместе с ней и функция f принимает значение 1 при $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$; $\bar{x}_{i_{r+1}} = \dots = \bar{x}_{i_s} = 0$. (значения остальных переменных могут быть произвольными).

Ввиду монотонности функция f будет принимать значение 1, как только $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$. Следовательно, если положить $K' = x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$, то K' будет также импликантом функции f , который получается из импликанта K вычеркиванием сомножителей $\bar{x}_{i_{r+1}}, \dots, \bar{x}_{i_s}$. Поскольку $s > r$, получаем, что K не есть простой импликант функции f . Значит, сокращенная ДНФ функции f не содержит отрицаний переменных.

Итак, всякая конъюнкция K из сокращенной ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид $x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}$.

Покажем, что конъюнкция K является единственной конъюнкцией в сокращенной ДНФ функции f , которая принимает значение 1 при

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1; \quad \bar{x}_{i_{r+1}} = \dots = \bar{x}_{i_s} = 0. \quad (*)$$

В самом деле пусть имеется еще одна конъюнкция K' из сокращенной ДНФ функции f , которая принимает значение 1 при выполнении условий (*). Тогда согласно первой части доказательства теоремы конъюнкция K' не может содержать сомножителей $\bar{x}_{i_{r+1}}, \dots, \bar{x}_{i_s}$, так как $\bar{x}_{i_{r+1}} = \dots = \bar{x}_{i_s} = 0$. Следовательно, в конъюнкцию K' могут входить лишь сомножители из числа $x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}$. Но тогда K' получается из K вычеркиванием некоторых сомножителей, что противоречит простоте импликанта K .

Таким образом, конъюнкцию K из сокращенной ДНФ функции f удалить нельзя. Для завершения

доказательства теоремы 10 остается обратиться к теореме 9.

Как же строить сокращенную ДНФ булевой функции? Существует целый ряд методов синтеза сокращенной ДНФ.

Рассмотрим несколько из них.

1. Метод Блейка. Этот метод применим к произвольной ДНФ булевой функции, отличной от константы, и состоит в многократном выполнении двух эквивалентных преобразований над конъюнкциями, входящими в ДНФ:

1) *обобщенное склеивание*:

$$xK' \vee \bar{x}K'' = xK' \vee \bar{x}K'' \vee K'K'';$$

2) *поглощение*: $K' \vee K'K'' = K'$ (подразумевается, что преобразования выполняются только слева направо).

Итак, пусть D – произвольная ДНФ булевой функции f , отличной от константы. По методу Блейка сначала выполняем все возможные преобразования 1) и получаем ДНФ D' . Покажем, что при этом каждый простой импликант K функции f будет включен в ДНФ D' . Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда K не входит в D .

Прежде всего отметим, что в K входят только те переменные, которые содержатся в D . В самом деле, если бы это было не так, то, удалив из K переменную, не входящую в D , мы получили бы конъюнкцию K' , которая, очевидно, также является импликантом функции f . Это противоречит простоте импликанта K .

Рассмотрим теперь множество конъюнкций $\{K_j\}$, которое удовлетворяет следующим трем условиям.

1°. K_j содержит только те переменные, которые входят в D .

2°. K_j получается из K домножением на некоторые множители (случай $K_j = K$ не исключается).

3°. Для любой конъюнкции H из ДНФ D конъюнкции K_j удовлетворяет хотя бы один набор, не удовлетворяющий конъюнкции H .

Множество $\{K_j\}$ не пустое, так как содержит, например, конъюнкцию K (условие 3° для конъюнкции K выполняется, поскольку в противном случае конъюнкция K либо входит в D , либо не является простым импликантом функции f).

Выберем в множестве $\{K_j\}$ конъюнкции наибольшего ранга $K_1, \dots, K_m$. Рассмотрим конъюнкцию K_1 . Она не может содержать все переменные, входящие в D , так как в этом случае конъюнкции K_1 удовлетворяет только один набор (переменные функции f , не входящие в D , здесь можно не принимать во внимание), который в силу условия 3° не удовлетворяет ни одной конъюнкции из D . То есть получаем, что K_1 не является импликантом функции f , что противоречит условию 2°.

Возьмем переменную $x \in D$, которая не входит в K_1 . Рассмотрим конъюнкции xK_1 и $\bar{x}K_1$. Они удовлетворяют условиям 1° и 2° и имеют ранг на 1 больший, чем ранг K_1 . Следовательно, по выбору конъюнкции K_1 конъюнкции xK_1 и $\bar{x}K_1$ не удовлетворяют условию 3°. Тогда в ДНФ D имеются такие конъюнкции H_1 и H_2 , что все сомножители конъюнкций H_1 и H_2 входят соответственно в конъюнкции xK_1 и $\bar{x}K_1$.

Ясно, что в конъюнкцию H_1 должен входить сомножитель x , а в конъюнкцию H_2 — сомножитель $\bar{x}$.

Поэтому

$$H_1 = xH'_1, \quad H_2 = \bar{x}H'_2,$$

где все сомножители конъюнкций H'_1 и H'_2 принадлежат конъюнкции K_1 . Следовательно, после выполне-

ния преобразования 1) над конъюнкциями H_1 и H_2 в ДНФ D' будет включена конъюнкция H'_1 и H'_2 , все сомножители которой входят в конъюнкцию K_1 .

Аналогичные построения и утверждения справедливы и для конъюнкций $K_2, \dots, K_r$. Обозначим через D_1 ДНФ, которая получается из ДНФ D добавлением конъюнкций вида H'_1, H'_2 , образованных при рассмотрении всех конъюнкций $K_2, \dots, K_r$. Если теперь для этой ДНФ D_1 определить множество конъюнкций $\{L_j\}$, удовлетворяющих условиям 1°–3°, то конъюнкция наибольшего ранга из $\{L_j\}$ будет иметь ранг меньший, чем ранг конъюнкций K_1 . Понятно, что на некотором шаге этого индуктивного процесса в ДНФ D' будет включена конъюнкция K .

После того как в ДНФ D' будут включены все конъюнкций — простые импликанты функции f — преобразование 2) удаляет из D' конъюнкций, не являющиеся простыми импликантами. В результате образуется сокращенная ДНФ функции f .

Еще раз рассмотрим функцию $f(x, y, z)$, заданную двоичной строкой (11100101). Ее совершенная ДНФ есть

$$D = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee x y z.$$

Применяя к ДНФ D метод Блейка, построим сокращенную ДНФ функции f . При этом применим четыре раза преобразование 1):

$$\begin{aligned} \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z &= \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} \bar{y}, \\ \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z &= \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z \vee x z, \\ \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z &= \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z \vee \bar{y} z, \\ \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z &= \bar{x} \bar{y} z \vee x \bar{y} z \vee x \bar{z}, \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью преобразования 1) к ДНФ D дизъюнктивно добавляем слагаемое

$$D_c(f) = \bar{x} \bar{y} \vee x z \vee \bar{y} z \vee x \bar{z}$$

и образуем ДНФ $D' = D \vee D_c(f)$. Затем, пользуясь преобразованием 2), из ДНФ D' удаляем все конъюнкции, входящие в совершенную ДНФ D . В результате получим сокращенную ДНФ $D_c(f)$ функции f .

ДНФ D функции f называется *тупиковой*, если она состоит только из простых импликантов функции f и после удаления любой конъюнкции из D полученная ДНФ уже не реализует функцию f .

Очевидно, что всякая минимальная ДНФ является тупиковой.

Как показывает следующий пример, булева функция может иметь несколько тупиковых ДНФ, которые не являются минимальными.

Пусть

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} \vee x y z.$$

Сокращенная ДНФ функции f имеет вид:

$$\bar{x} \bar{y} \vee \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} y \vee x z \vee y z \vee y \bar{z}.$$

Тупиковыми ДНФ функции f будут

$$\begin{aligned} D_1 &= \bar{x} \bar{y} \vee x z \vee y \bar{z}, \\ D_2 &= \bar{x} \bar{z} \vee x y \vee y \bar{z}, \\ D_3 &= \bar{x} \bar{y} \vee x y \vee y \bar{z} \vee y z, \\ D_4 &= \bar{x} \bar{y} \vee x y \vee \bar{x} \bar{z} \vee x z, \\ D_5 &= \bar{x} \bar{z} \vee x z \vee y \bar{z}. \end{aligned}$$

Из них только D_1 и D_2 являются минимальными.

Таким образом, если сокращенная ДНФ строится по функции однозначно, то процесс перехода от сокращенной ДНФ к тупиковой ДНФ уже неоднозначен. При этом удаление одних элементарных конъюнкций из сокращенной ДНФ приводит к минимальной ДНФ, а удаление других приводит к тупиковой, не являющейся минимальной. Поэтому для построения минимальной ДНФ приходится, вообще говоря, строить все тупиковые ДНФ и затем проводить среди них отбор.

2. Метод неопределенных коэффициентов.

Сущность метода состоит в преобразовании СДНФ в минимальную ДНФ. На основании теоремы Жегалкина всякую булеву функцию можно представить в виде выражения (рассмотрим на примере трех переменных):

$$f(x_1, x_2, x_3) = k_1^1 x_1 + k_1^0 \overline{x_1} + k_2^1 x_2 + k_2^0 \overline{x_2} + k_3^1 x_3 + k_3^0 \overline{x_3} + k_{12}^{11} x_1 x_2 + k_{12}^{10} x_1 \overline{x_2} + k_{12}^{01} \overline{x_1} x_2 + k_{12}^{00} \overline{x_1} \overline{x_2} + k_{13}^{11} x_1 x_3 + \dots + k_{23}^{11} x_2 x_3 + \dots + k_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 + \dots + k_{123}^{000} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Алгоритм определения коэффициентов:

2.1. Исходное уравнение разбить на систему уравнений, равных числу строк в таблице истинности.

2.2. Напротив каждого выражения поставить соответствующее значение функции.

2.3. Выбрать строку, в которой значение функции $f = 0$ и приравнять все k_i к нулю.

2.4. Просмотреть строки, где функция имеет единичное значение, и вычеркнуть все коэффициенты, встречающиеся в нулевых строках.

2.5. Проанализировать оставшиеся коэффициенты в единичных строках.

2.6. Используя правило, что дизъюнкция равна 1, если хотя бы один из $k_i = 1$, выбрать min-термы минимального ранга. При этом отдавать предпочтение коэффициентам, встречающимся в нескольких уравнениях одновременно.

2.7. Записать исходный вид функции.

Замечание. Метод неопределенных коэффициентов применим для дизъюнктивной нормальной формы и непригоден для конъюнктивной.

Пример: $f(x_1, x_2, x_3) = \vee(0, 2, 4, 7)$

Таблица 12

	k_1	k_2	k_3	k_{12}	k_{13}	k_{23}	k_{123}	f
0	0	0	0	00	00	00	000	1
1	0	0	1	00	01	01	001	0
2	0	1	0	01	00	10	010	1
3	0	1	1	01	01	11	011	0
4	1	0	0	10	10	00	100	1
5	1	0	1	10	11	01	101	0
6	1	1	0	11	10	10	110	0
7	1	1	1	11	11	11	111	1

$$\begin{cases} k_{13}^{00} + k_{23}^{00} + k_{123}^{000} = 1 \\ k_{13}^{00} + k_{123}^{010} = 1 \\ k_{23}^{00} + k_{123}^{100} = 1 \\ k_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

Итак, получим $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_2 x_3$

3. Метод Куайна

Сущность метода сводится к тому, чтобы преобразовать СДНФ в минимальной ДНФ.

Задачи минимизации по методу Куайна состоят в попарном сравнении импликант, входящих в СДНФ, с целью выявления возможности склеивания по какой-то переменной так: $Fx_i \vee F\overline{x_i} = F$.

Таким образом, можно понизить ранг термов. Процедура производится до тех пор, пока не останется ни одного терма, допускающего склейки с другим. При этом склеивающиеся термы обозначаются *.

Определение 28. Непомеченные термы называются первичными импликантами.

Полученное логическое выражение не всегда оказывается минимальным, поэтому исследуется возможность дальнейшего упрощения. Для этого:

3.1. Составляются таблицы, в строках которых пишутся найденные первичные импликанты, а в столбцах указываются термы первичной логической функции.

3.2. Клетки этой таблицы отмечаются в том случае, если первичная импликанта входит в состав какого-нибудь первичного терма.

3.3. Задача упрощения сводится к нахождению такого минимального количества импликант, которые покрывают все столбцы.

Алгоритм метода Куайна включает следующие шаги:

1. Нахождение первичных импликант.

Исходные термы из ДНФ записывают в столбик и склеивают сверху вниз. Непомеченные импликанты на этом шаге переходят в функции.

2. Расстановка меток избыточности.

Составляем таблицу, в которой строки — первичные импликанты, столбцы — исходные термы. Если некоторый min-терм содержит первичный импликант, то на пересечении строки и столбца ставим метку.

3. Нахождение существенных импликант.

Если в каком-либо столбце есть только одна метка, то первичный импликант соответствующей строки является существенным.

4. Из строки, содержащей важный импликант, вычеркиваются соответствующие столбцы. Если в результате вычеркивания столбцов появятся строки первичных импликант, которые не содержат метки или содержат одинаковые метки в строках, то такие первичные импликанты вычеркиваются. В последнем случае оставляем одну из них.

5. Выбор минимального покрытия. Из таблицы, полученной на шаге 3, выбирают такую совокупность

первичных импликант, которая включает метки во всех столбцах по крайней мере по одной метке в каждом. При нескольких возможных вариантах отдается предпочтение покрытию с минимальным суммарным числом элементов в импликантах, образующих покрытие.

6. Далее результат записывается в виде функции.

Пример:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigvee (3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13)$$

1

Таблица 13

Шаг 1

Термы 4-го ранга	Термы 3-го ранга	Термы 2-го ранга
$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \quad * 1$	$\overline{x_1} x_3 x_4$	$x_2 \overline{x_3}$
$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \quad * 3$	$\overline{x_2} x_3 x_4$	$x_2 \overline{x_3}$
$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \quad * 4$	$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \quad * 1$	
$\overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \quad * 1$	$x_2 \overline{x_3} x_4 \quad * 2$	
$x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \quad * 2$	$\overline{x_1} x_2 x_4$	
$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \quad * 2$	$x_2 \overline{x_3} x_4 \quad * 2$	
$x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \quad * 3$	$x_1 \overline{x_2} x_4$	
$x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \quad * 4$	$x_1 \overline{x_3} x_4$	
	$x_1 x_2 \overline{x_3} \quad * 1$	

Таблица 14

Шаг 2

	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$	$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4}$	$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4$	$\overline{x_1} x_2 x_3 x_4$
$\overline{x_1} x_3 x_4$	V			V
$\overline{x_2} x_3 x_4$	V			
$\overline{x_1} x_2 x_4$			V	V
$x_1 \overline{x_2} x_4$				
$x_1 \overline{x_3} x_4$				
$x_2 x_3 \overline{x_4}$		V	V	
	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$	$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$	$x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4}$	$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$
$\overline{x_1} x_3 x_4$				
$\overline{x_2} x_3 x_4$		V		
$\overline{x_1} x_2 x_4$				
$x_1 \overline{x_2} x_4$	V	V		
$x_1 \overline{x_3} x_4$	V			V
$x_2 x_3 \overline{x_4}$			V	V

Шаг 4. Пропускаем.

Шаг 5. Выбираем те мин-термы, при записи которых МДНФ функции минимальна.

Шаг 6. $f_{\text{МДНФ}} = x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_4$.

Недостаток метода Куайна — необходимость полного попарного сравнения всех $\min$ -термов на этапе нахождения первичных импликант.

4. Идея модификации метода Куайна — метод Куайна — Мак-Клоски

4.1. Каждая конъюнкция в СДНФ представляется своим двоичным набором.

4.2. Вся совокупность номеров наборов разбивается на группы в зависимости от числа единиц, имеющих в номерах наборов (0-группа, 1-группа, 2-группа и т.д.).

4.3. Сравниваются две группы, отличающиеся на одну единицу.

4.4. В результате сравнения в номере набора, имеющего большее число единиц на позиции, где обнаружится разница на одну единицу, ставится прочерк.

4.5. В процессе преобразования появляются новые сочетания (n -группы).

4.6. Процесс преобразования продолжается до тех пор, пока возможна операция склеивания.

4.7. Элементы преобразованных групп являются первичными импликантами, которые вместе с номерами исходных наборов образуют таблицы разметок.

4.8. В остальном эти методы совпадают с единственным уточнением: если в результате составления таблицы разметок ни одна из строк не покрывает единицу столбца, то надо выбрать номер столбца набора из предыдущей группы преобразований.

Определение 29. n -группа — это такой набор аргументов функции, что число всех аргументов, равных единице, равно n , причем значение функции равно 1.

Пример: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 15)$
1

Составим таблицу истинности.

Таблица 15

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Запишем n -группы:

0-Группа: 0000

1-Группа: 0001, 0010, 0100, 1000

2-Группа: 0011, 0101, 0110, 1001

3-Группа: 0111, 1011

4-Группа: 1111

Теперь сравним группы с номерами n и $n+1$:

0- Группа: 000-, 00-0, 0-00, -000

1- Группа: 00-1, 0-01, -001, 001-, 0-10, 010-, 01-0,
100-

2- Группа: 0-11, -011, 01-1, 011-, 10-1

3- Группа: -111, 1-11

Еще раз сравним (при этом прочерки должны быть на одинаковых позициях):

0-Группа: 00--, 0-0-, -00-

1-Группа: 0--1, -0-1, 0-1-, 01-

2-Группа: --11

И еще раз сравним: 0-Группа: 0---

Запишем таблицу исходных min-термов, где функция равна 1.

Таблица 16

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110
V	V	V	V	V	V	V
0111	1000	1001	1011	1111		
V					0---	

Выделим минимальное число групп, покрывающих единиц. Для проверки составим таблицу истинности.

Таблица 17

	1000	1001	1011	1111
-00-	V	V		
-0-1		V	V	
-111			V	V

Метод минимизирующих карт (для СДНФ и СКНФ)

Одним из способов графического представления булевых функций от небольшого числа переменных являются карты Карно. Их разновидность — карты Вейча, которые строятся как развертки кубов на плоскости, при этом вершины куба представляются клетками

карты, координаты которых совпадают с координатами соответствующих вершин куба.

Для ДСНФ единицы ставятся в клетке, соответствующей номеру набора, на котором значение функции равно единице, а ноль не ставится, а для КСНФ — наоборот.

Диаграмма для двух логических переменных (для СДНФ):

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	11	01
$\overline{x_2}$	10	00

Для трех переменных:

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2	110 ₆	111 ₇	011 ₃	010 ₂
$\overline{x_2}$	100 ₄	101 ₅	001 ₁	000 ₀
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

Карты Карно используются для ручной минимизации функций алгебры логики при небольшом количестве переменных. Правило минимизации: склеиванию подвергаются 2, 4, 8, 16, 2^n клеток и клетки, лежащие на границе карты.

При числе переменных 5 и больше отобразить графически функцию в виде единой плоской карты невозможно. Тогда строят комбинированные карты, состоящие из совокупности более простых карт. Процедура минимизации заключается тогда в том, что сначала находится минимальная форма 4-х мерных кубов (карт), а затем, расширяя понятие соседних клеток, отыскивают min-термы для совокупности карт. Причем соседними клетками являются клетки, совпадающие при совмещении карт поворотом вокруг общего ребра.

Таблица 18

	x_2	$\overline{x_2}$
x_1	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \vee x_2$
$\overline{x_1}$	$x_1 \vee \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$

Пример: Минимизировать булевы функции от двух переменных: $f(x_1, x_2) = \bigvee_1(1, 2, 3)$

Таблица 19

	x_1	$\overline{x_1}$
x_2	1	1
$\overline{x_2}$	1	

$$f = x_2 \vee x_1$$

Минимизировать функцию:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1(0, 3, 5, 6, 7)$$

Таблица 20

	x_1	x_1	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}$
x_2	1	1	1	
$\overline{x_2}$		1		
	$\overline{x_3}$	x_3	x_3	$\overline{x_3}$

$$f = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

Минимизация булевых функций, заданных в базе $\{\oplus, \wedge, \neg\}$.

Метод неопределенных коэффициентов применим для минимизации функций, заданных в различных базисах. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является ПСНФ, операция $\oplus$ имеет особенности, отличающие ее от операции дизъюнкции.

$$1) 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$$

$$2) \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_m = 0$$

$$3) \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_{m+1} = 1$$

Минимизация при этом усложняется, так как ее основными критериями являются минимальные ранги каждого термина и их минимальное количество, при этом в ходе минимизации в базисе $\{\oplus, \wedge, \neg\}$ нецелесообразно приравнять к нулю все коэффициенты на наборах, где $f = 0$, так как в наборах, где функция $f = 1$, могут остаться термы высокого ранга. Поэтому особой разницы между выбором нулевого или единичного значения функции нет.

Количество коэффициентов, остающихся в нулевых строках, должно быть четным, а в единичных — нечетным. Лучше всего рассматривать единичные строки и оставлять те коэффициенты минимального ранга, которые чаще всего повторяются в этих строках. В общем случае для получения минимальной формы выполняют следующие действия:

1. Подсчитывают, сколько раз в единичных строках встречаются термы первого ранга, и оставляют из них те, которые встречаются максимальное число раз.

2. Находят нулевые строки, в которых встречаются оставленные в первом шаге термы, и их не обнуляют.

3. Рассматривают нулевую строку, в которой остались одни единичные термы, и находят в них еще

единичный терм, встречающийся максимальное число раз в единичных строках, в которых еще не было оставлено ни одного термина, и т.д.

Метод Куайна — Мак-Клоски может быть применен при минимизации этого базиса, при этом кроме эффективных значений функции, где $f = 1$, включаются некоторые мин-термы, где $f = 0$. Метод Куайна — Мак-Клоски применим для минимизации базисов стрелки Пирса и штриха Шеффера.

1.11. Модели функционально-логические схемы базовых устройств компьютера

1.11.1. Логические элементы

В основе обработки компьютером информации лежит алгебра логики. Элементы математической логики и дискретной математики составляют основу конструирования различных электронных (цифровых), вычислительных и сетевых устройств. Нам известно, что 0 и 1 в логике не просто цифры, а обозначение состояний какого-то предмета нашего мира, условно называемых «ложь» и «истина». Таким предметом, имеющим два фиксированных состояния, может быть электрический сигнал. Были созданы устройства управления электричеством — электронные схемы, состоящие из набора полупроводниковых элементов. Такие электронные схемы, которые преобразовывают сигналы только двух фиксированных напряжений электрического тока, стали называть логическими элементами.

Логические элементы — это электронные устройства, которые преобразуют проходящие через них двоичные электрические сигналы по определенному закону.

Логические элементы имеют один или несколько входов, на которые подаются электрические сигналы, обозначаемые условно 0, если отсутствует электрический сигнал, и 1, если имеется электрический сигнал. Также логические элементы имеют один выход, с которого снимается преобразованный электрический сигнал.

В конструирование микропроцессоров, компьютеров и сетевых устройств в основном используются три базовых логических элемента (инвертор «НЕ», конъюнктор «И», дизъюнктор «ИЛИ»).

Ниже рассмотрим каждый из трех элементарных логических элементов.

Логический элемент «НЕ» (инвертор)

Простейшим логическим элементом является инвертор, выполняющий функцию отрицания (инверсию). У этого элемента один вход и один выход. На функциональных схемах он обозначается (см. рис. 11.1):



Рис. 11.1

Если на вход поступает сигнал, соответствующий 1, то на выходе будет 0. И наоборот, т.е. таблица истинности для данного элемента имеет вид (см. таблица 21):

Таблица 21

ВХОД	ВЫХОД
1	0
0	1

Логический элемент «ИЛИ» (дизъюнктор)

Логический элемент, выполняющий логическое сложение, называется дизъюнктор. Он имеет как минимум два входа. На функциональных схемах он обозначается (см. рис. 11.2):

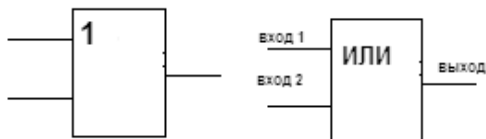


Рис. 11.2

Если хотя бы на один вход поступает сигнал (1), то на выходе будет сигнал (1). Таблица истинности элемента «ИЛИ» имеет следующий вид (см. таблица 22)

Таблица 22

вход 1	вход 2	выход
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логический элемент «И» (конъюнктор)

Логический элемент, выполняющий логическое умножение, называется конъюнктор. Он имеет как минимум два входа. На функциональных схемах он обозначается (см. рис. 11.3):

На выходе этого элемента будет сигнал (1) только в том случае, когда на все входы поступает сигнал (1). В случае, когда на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль. Таблица истинности элемента «И» имеет следующий вид (см. таблица 23).

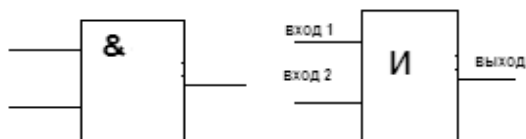


Рис. 11.3

Таблица 23

вход 1	вход 2	выход
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Другие логические элементы построены из трех простейших базовых элементов и выполняют более сложные логические преобразования информации.

Рассмотрим еще два логических элемента, которые играют роль базовых при создании более сложных элементов и схем.

Логический элемент «И-НЕ» (Штрих шефера)

Логический элемент «И-НЕ» имеет следующую таблицу истинности (см. табл. 24).

Таблица 24

вход 1	вход 2	выход
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

На функциональных схемах он обозначается (см. рис. 11.4):

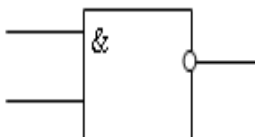


Рис. 11.4

Логический элемент «ИЛИ-НЕ» (Стрелка Пирса)

Логический элемент «ИЛИ-НЕ» имеет следующую таблицу истинности (см. таблица 25).

Таблица 25

вход 1	вход 2	выход
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

На функциональных схемах он обозначается:

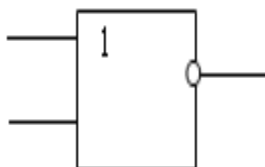


Рис. 11.5

1.11.2. Моделирование функциональных схем устройства компьютера

Сигнал, выработанный одним логическим элементом, можно подавать на вход другого элемента, это дает

возможность образовывать цепочки из отдельных логических элементов — функциональные схемы.

Функциональная (логическая) схема — это схема, состоящая из логических элементов, которая выполняет определенную функцию. Анализируя функциональную схему, можно понять, как работает логическое устройство компьютера, т.е. дать ответ на вопрос, какую функцию она выполняет.

Важной формой описания функциональных схем является структурная формула. Покажем на примере, как выписывают формулу по заданной функциональной схеме (см. рис. 11.6).

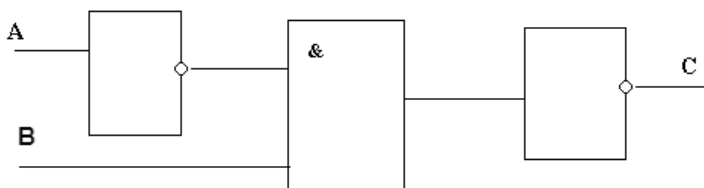


Рис. 11.6

Ясно, что элемент «И» осуществляет логическое умножение значений A и B. Над результатом в элементе «НЕ» осуществляется операция отрицания, т.е. вычисляется значение выражения:

$$\overline{A \& B}$$

Таким образом, структурной формулой данной функциональной схемы является формула:

$$C = \overline{A \& B}$$

Составление таблицы истинности функциональной схемы устройства компьютера

Для функциональной схемы устройства компьютера можно составить таблицу истинности, т.е. таблицу

значений сигналов на входах и выходах схемы, по которой можно понять, какую функцию выполняет данная схема. Таблица истинности — это табличное представление логической (функциональной) схемы, в котором перечислены все возможные сочетания значений входных сигналов вместе со значением выходного сигнала для каждого из этих сочетаний.

Составим таблицу истинности для вышеуказанной логической схемы (см. рис. 11.6). В данной таблице (таблица 26) 3 столбца и 5 строк. Заполним первые столбцы всеми возможными вариантами входных сигналов.

Рассмотрим четвертый вариант входных сигналов: $A = 1, B = 1$. Проследим по схеме, как проходят и преобразуются входные сигналы. Результат, полученный на выходе ($C = 1$), запишем в таблицу. Аналогично реализуются первые оставшихся трех вариантов входных сигналов ($A = 0, B = 0$; $A = 0, B = 1$; $A = 1, B = 0$).

В результате получаем таблицу истинности данной логической схемы (см. таблица 26):

Таблица 26

А (вход 1)	В (вход 2)	С (выход)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Задание. Построить таблицу истинности для данной логической схемы и записать структурную формулу для данной функциональной схемы:

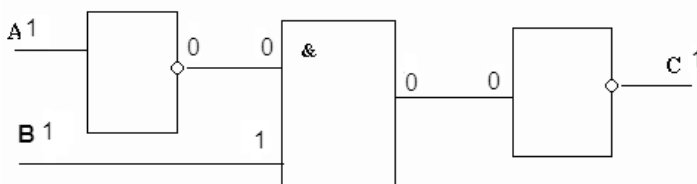


Рис. 11.7

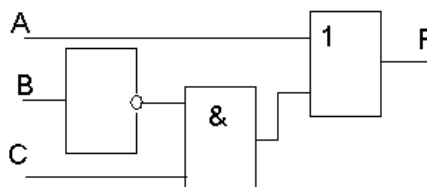


Рис. 11.8

Функционально-логическая реализация типовых устройств компьютера

Обработка любой информации на компьютере сводится к выполнению процессором различных арифметических и логических операций. Для этого в состав процессора входит так называемое арифметико-логическое устройство (АЛУ). Оно состоит из ряда устройств, построенных на рассмотренных выше логических элементах. Важнейшими из таких устройств являются триггеры, полусумматоры, сумматоры, шифраторы, дешифраторы, счетчики, регистры.

Выясним, как из логических элементов разрабатываются логические устройства компьютера.

Этапы конструирования логического устройства.

1. Построение таблицы истинности по заданным условиям работы проектируемого устройства ПК (т.е. по соответствию его входных и выходных сигналов).

2. Конструирование логической функции данного узла по таблице истинности, ее преобразование (упрощение), если это возможно и необходимо.

3. Составление функциональной схемы проектируемого устройства по формуле логической функции.

После этого остается только реализовать полученную функционально-логическую схему.

Задание. Построить функционально-логическую схему для заданной таблицы истинности (см. таблица 27):

Таблица 27

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Запишем логическую функцию в соответствии с данной таблицей истинности

$$F = \bar{A} \& \bar{B} \& C \vee A \& B \& C$$

Упростим полученное логическое выражение:

$$F = C \& (\bar{A} \& \bar{B} \vee A \& B) = C \& ((\bar{A} \vee \bar{B}) \vee A \& B)$$

Построим логическую схему для данного выражения (см. рис. 11.9):

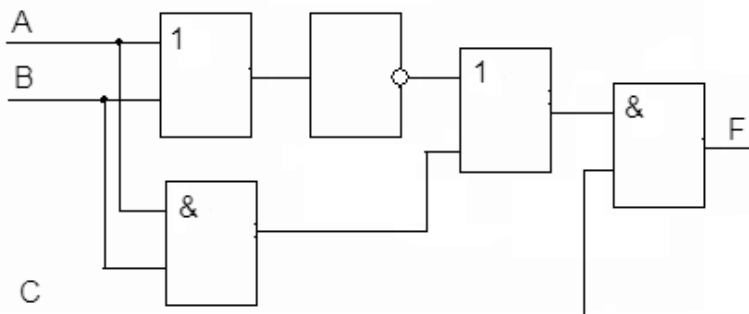


Рис. 11.9

Попробуем, действуя по этому плану, сконструировать устройство для сложения двух двоичных чисел (одноразрядный полусумматор). Пусть нам необходимо сложить двоичные числа A и B .

Через P и S обозначим первую и вторую цифру суммы: $A + B = PS$.

Примечание: вспомните таблицу сложения двоичных чисел.

1. Таблица истинности, определяющая результат сложения, имеет вид:

Таблица 28

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2. Сконструлируем функции $P(A, B)$ и $S(A, B)$ по этой таблице:

$$P(A, B) = A \& B \quad S(A, B) = \bar{A} \& B \vee A \& \bar{B}$$

Преобразуем вторую формулу, пользуясь законами формальной логики:

3. Теперь можно построить функционально-логическую схему одноразрядного полусумматора (см. рис. 11.10):

$$\begin{aligned} S(A, B) &= \bar{A} \& B \vee A \& \bar{B} = \bar{A} \& B \vee A \& \bar{B} \vee A \& \bar{A} \vee B \& \bar{B} = \\ &= (\bar{A} \& A \vee \bar{A} \& B) \vee (A \& \bar{B} \vee B \& \bar{B}) = \\ &= \bar{A} \& (A \vee B) \vee B \& (A \vee B) = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee B) = (A \vee B) \& \overline{(A \& B)} \\ S(A, B) &= (A \vee B) \& \overline{(A \& B)} \\ P(A, B) &= A \& B \end{aligned}$$

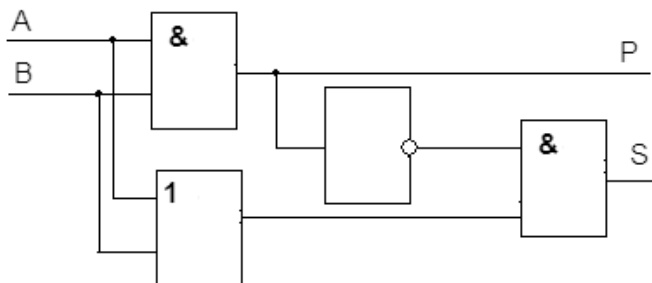


Рис. 11.10

Условное обозначение одноразрядного сумматора (см. рис. 11.11):

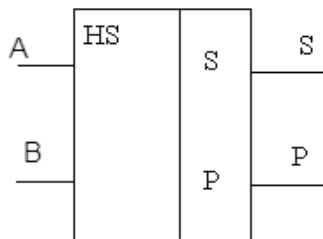


Рис.11.11

1.11.3. Функционально-логическая модель сумматора

Полный одноразрядный сумматор

Одноразрядный двоичный сумматор на три входа и два выхода называется полным одноразрядным сумматором.

Логика работы одноразрядного сумматора на три входа или полного сумматора приведена в таблице 29, где A , B — суммируемые двоичные цифры, P_0 — перенос из младшего разряда, S — образующаяся сумма данного разряда и осуществляющая перенос P в следующий старший разряд (см. таблица 29).

Таблица 29

Слагаемые		Перенос из младшего разряда	Сумма	Перенос
A	B	P_0	S	P
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Формула переноса:

$$P = A \& B \& \bar{P}_0 \vee \bar{A} \& B \& P_0 \vee A \& \bar{B} \& P_0 \vee A \& B \& P_0$$

Формула для вычисления суммы:

$$S = \bar{A} \& B \& \bar{P}_0 \vee A \& \bar{B} \& \bar{P}_0 \vee \bar{A} \& \bar{B} \& P_0 \vee A \& B \& P_0$$

После преобразования формулы переноса и суммы принимают вид:

$$P = A \& B \vee A \& P_0 \vee B \& P_0$$

$$S = (A \vee B \vee P_0) \& \bar{P}_0 \vee (A \& B \& P_0)$$

Теперь можно построить функционально-логическую схему полного одноразрядного сумматора с учетом переноса из младшего разряда (см. рис. 11.12).

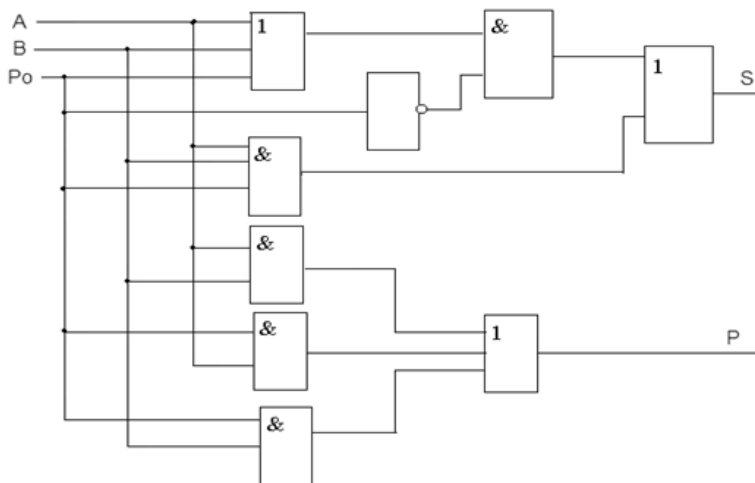


Рис. 11.12

Сумматор — это электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел поразрядным сложением. Сумматор является центральным узлом арифметико-логического устройства (АЛУ) процессора. Находит он применение и в других устройствах

компьютера. В реальных электронных схемах сумматор изображается так (см. рис. 11.13):

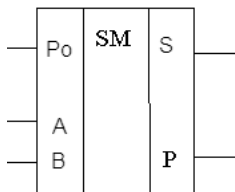


Рис. 11.13

Сумматор выполняет сложение многозначных двоичных чисел. Он представляет собой последовательное соединение одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых осуществляет сложение в одном разряде. Если при этом возникает переполнение разряда, то перенос суммируется с содержимым старшего соседнего разряда.

На рисунке показано, как из N сумматоров можно составить устройство для сложения двух N -разрядных двоичных кодов, это схема многоразрядного сумматора (см. рис. 11.14).

1.11.4. Функционально-логическая схема триггера

Триггер — электронная схема, применяемая для хранения значения одноразрядного двоичного кода.

Воздействуя на входы триггера, его переводят в одно из двух возможных состояний (0 или 1). С поступлением двоичных сигналов на входы триггера в зависимости от его состояния либо происходит переключение, либо исходное состояние сохраняется. При отсутствии входных сигналов триггер сохраняет свое состояние сколь угодно долго.

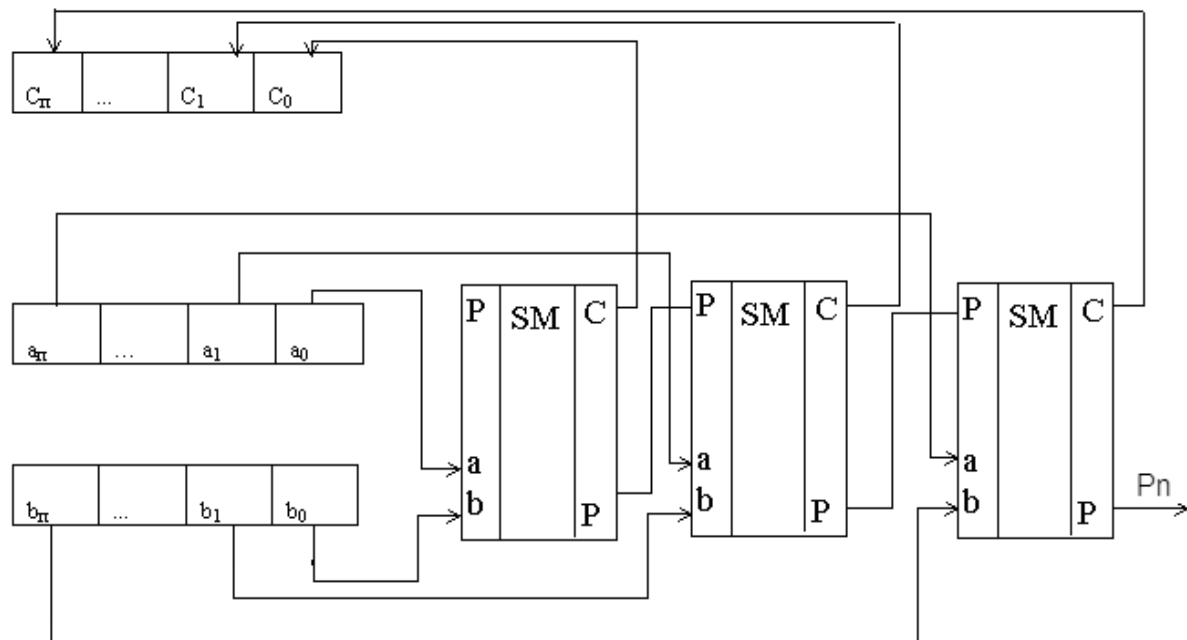


Рис. 11.14

Термин триггер происходит от английского слова *trigger* — защёлка, спусковой крючок. Для обозначения этой схемы в английском языке чаще употребляется термин *flip-flop*, что в переводе означает «хлопанье». Это звукоподражательное название электронной схемы указывает на ее способность почти мгновенно переходить («перебрасываться») из одного электрического состояния в другое.

Существуют разные варианты исполнения триггеров в зависимости от элементной базы («И-НЕ», «ИЛИ-НЕ») и функциональных связей между сигналами на входах и выходах (*RS*, *JK*, *T*, *D* и другие).

Самый распространенный тип триггера — это *RS*-триггер (*S* и *R* соответственно от английских *set* — установка, и *reset* — сброс). Условное обозначение *RS*-триггер имеет вид (см. рис. 11.15):

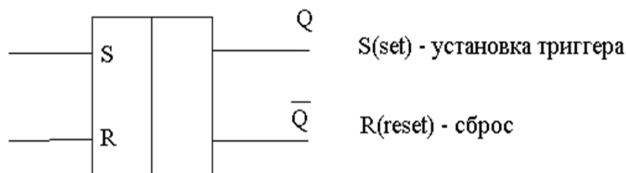


Рис. 11.15

RS-триггер

RS-триггер построен на двух логических элементах: «ИЛИ-НЕ» либо «И-НЕ». Как, правило, триггер имеет 2 выхода: прямой и инверсный Q и $\bar{Q}$ (см. рис. 11.16).

Напишем алгоритм работы *RS*-триггера.

Пусть на вход элемента номера 1 подан сигнал 1, а на вход элемента номера 3 — 0. На выходе элемента номера 1 независимо от того, какой второй сигнал

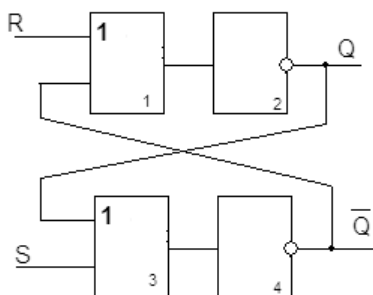


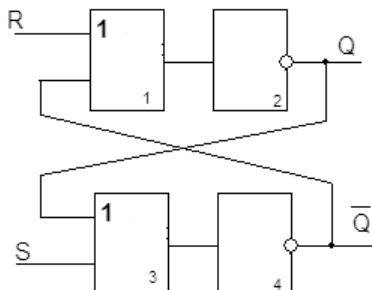
Рис. 11.16

поступит на вход, будет 1, так как это элемент ИЛИ (по свойствам дизъюнкции). Пройдя через элемент номер 2, сигнал примет значение 0 ($Q = 0$). Следовательно, и на втором входе элемента номера 3 установится сигнал 0. На выходе элемента номера 3 — 0. Пройдя через элемент номер 4, сигнал изменится на 1. Следовательно, принимает значение 1.

Убедимся, что данное устройство сохраняет исходный сигнал. Запомним, что $S = 0$, $R = 1$, $Q = 0$, $\bar{Q} = 1$.

В момент прекращения входных сигналов ($S = 0$, $R = 0$) на выходе = 1. Это напряжение подается на вход элемента номера 1. На выходе элемента номера 1 сохраняется 1, и на Q — сигнал 0. На входах элемента номера 3-0, следовательно, получаем 1.

Таким образом, при отсутствии на внешних входах сигналов 1 триггер поддерживает постоянное напряжение на своих выходах. Чтобы изменить напряжение на выходах триггера, надо подать сигнал 1 на вход элемента номера 3. Тогда $Q = 1$, $\bar{Q} = 0$.

RS-триггер**Рис. 11.17***Таблица 30*

Вход		Выход		Режим работы
S	R	Q	$\bar{Q}$	
0	0	0	0	Хранение
1	0	1	0	Запись 1
0	1	0	1	Запись 0
1	1	X	X	Запрещение ($Q \neq \bar{Q}$)

Регистры

Функционально-логическая схема устройства компьютера, состоящая из триггеров, предназначенная для запоминания многоразрядных двоичных кодов и выполнения над ними некоторых логических преобразований, называется **регистром**.

По-другому «регистр» можно представить как совокупность ячеек, в каждой из которых может быть записано одно из двух возможных значений: 0 или 1, т.е. один разряд двоичного числа.

С помощью регистров можно выполнять следующие операции: прием двоичного слова в регистр (установка состояния); передача двоичного слова из регистра; сдвиг слова вправо или налево; преобразование последовательного кода слова в параллельный и обратно; установка регистра в начальное состояние (сброс) и др.

Регистры отличаются по типу ввода и вывода информации (кодového слова).

Основными типами регистров по признаку ввода являются параллельные и последовательные (сдвигающие).

Совокупность регистров, используемых ЭВМ для запоминания программы работы, исходных и промежуточных результатов, называется оперативной памятью (ОП).

Регистры содержатся в различных вычислительных узлах компьютера — процессоре, периферийных устройствах и т.д.

Регистр — это устройство, предназначенное для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым можно представлять и адрес, и команду, и данные (см. рис. 11.18).

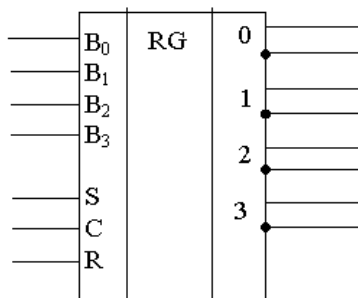


Рис. 11.18

Существуют несколько типов регистров, отличающихся видом выполняемых операций.

Некоторые важные регистры имеют свои названия, например: сдвиговый регистр предназначен для выполнения операции сдвига; счетчики-схемы, способные считать поступающие на вход импульсы. К ним относятся *T*-триггеры (название от англ. *tumble* — опрокидываться). Этот триггер имеет один счетный вход и два выхода. Под действием сигналов триггер меняет свое состояние с нулевого на единичное и наоборот. Число перебрасываний соответствует числу поступивших сигналов; счетчик команд — регистр устройства управления процессора (УУ), содержимое которого соответствует адресу очередной выполняемой команды; служит для автоматической выборки программы из последовательных ячеек памяти; регистр команд — регистр УУ для хранения кода команды на период времени, необходимый для ее выполнения. Часть его разрядов используется для хранения кода операции, остальные — для хранения кодов адресов операндов. В компьютерах в основном применяются регистры 8, 16, 32, 48 и 64 разрядов.

1.11.5. Шифраторы и дешифраторы

Шифратор и дешифратор являются типовыми узлами компьютера. Шифратор (кодер) — это логическое устройство, которое преобразует единичный сигнал на одном из входов в *n*-разрядный двоичный код. Наибольшее применение он находит в устройствах ввода информации (например, в клавиатуре), в том числе для преобразования десятичных чисел в двоичную систему счисления.

Дешифратор (декодер) — это логическое устройство, преобразующее двоичный код, поступающий на его входы, в сигнал только на одном из его выходов. Дешифраторы широко применяются в устройствах управления, в системах цифровой индикации с газоразрядными индикаторами, для построения распределителей импульсов по различным цепям и т.д.

Дешифратор двоичного n -разрядного кода имеет 2^n выходов, так как каждому из 2^n значений входного кода должен соответствовать единичный сигнал на одном из выходов дешифратора.

1.12. Электронные схемы и компьютер

Основоположником ЭВМ является американский математик Дж. фон Нейман, который разработал основные принципы построения ЭВМ. Первая электронно-вычислительная машина была создана в 1946 г. в США. Для записи и обработки в ЭВМ числовой и символьной информации удобным с технической точки зрения оказался язык двоичных чисел — нулей и единиц.

Поэтому естественно было ожидать, что методы математической науки, исследовавшей двузначные функции, рано или поздно найдут применение в процессе создания такой техники. Впервые предположение о возможности применения алгебры логики в технике было высказано в 1910 г. известным физиком П. Эренфестом (1880–1933).

Булевы функции стали математическим аппаратом для исследования контактных, электронных схем (на дискретных полупроводниковых элементах и чуть позже в интегральных схемах), а сами схемы

к середине XX в. нашли многочисленные применения в автоматической технике — в системах телефонной связи, системах транспортной сигнализации, централизации и блокировке, релейной защите, телемеханике и, наконец, при проектировании быстродействующих компьютеров.

Рассмотрение электронных схем, лежащих в основе современной компьютерной техники, можно провести по аналогии с исследованием релейно-контактных схем.

Двоичный полусумматор. Всякая информация (числовая, графическая, звуковая и др.) в компьютере хранится и обрабатывается в двоичной системе в ячейках памяти поразрядно. Рассмотрим пример представления и обработки цифровой информации в оперативной памяти компьютера. Правило сложения двоичных чисел осуществляется следующим образом:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 10.$$

Сложение по этим правилам делается по каждому разряду двух ячеек, в которых хранятся слагаемые. Если же происходит переполнение данного разряда (что возможно только при сложении $1 + 1$), то происходит перенос единицы в следующий разряд.

Таким образом, процесс сложения в одном разряде может быть охарактеризован двумя булевыми функциями: и $P(x, y)$, зависящими от складываемых чисел x и y .

Первая функция $S(x, y)$ представляет собой значение суммы, записываемое в тот же разряд соответствующей ячейки, в котором происходит сложение.

Вторая функция — функция переноса $P(x, y)$ — дает значение числа, переносимого в следующий, более

старший разряд при переполнении разряда, в котором происходит сложение.

Таблица истинности этих функций представлена ниже.

Таблица 31

x	y	$S(x, y)$	$P(x, y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Используя СДНФ, выписываем для них выражения, по которым легко построить соответствующие релейно-контактные схемы:

$$S(x, y) = \bar{x}y \vee x\bar{y}, \quad P(x, y) = xy.$$

Одноразрядный двоичный сумматор. При сложении двух чисел действия описанные в предыдущем пункте совершаются лишь в первом (самом младшем) разряде ячеек, хранящих слагаемые.

Во всех же остальных разрядах, начиная со второго, в процессе сложения участвуют не два слагаемых x_k и y_k , а еще и число, переносимое из предыдущего разряда и равное значению функции переноса $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ в этом разряде.

Таким образом, функция сумма S_k в k -ом разряде ($k \geq 2$) зависит от трех аргументов, т.е. $S_k = (x_k, y_k, P_{k-1})$. От этих же переменных зависит и функция переноса из k -го разряда $P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$.

Составим таблицу значений этих функций.

Таблица 32

x_k	y_k	P_{k-1}	$S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$	$P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

По таблице легко составляются ДНФ, КНФ.

Соответственно, затем их упростим, преобразуя тождественным образом:

$$S(x, y, P) = \bigvee_{S(\alpha, \beta, \gamma)=1} x^\alpha y^\beta p^\gamma = \bar{x} \bar{y} p \vee \bar{x} y \bar{p} \vee x \bar{y} \bar{p} \vee x y p = \\ = (x y \vee \bar{x} \bar{y}) p \vee (\bar{x} y \vee x \bar{y}) \bar{p};$$

$$P(x, y, P) = \bigvee_{P(\alpha, \beta, \gamma)=1} x^\alpha y^\beta p^\gamma = \bar{x} y p \vee x \bar{y} p \vee x y \bar{p} \vee x y p = \\ = xy(p \vee \bar{p}) \vee (\bar{x} y \vee x \bar{y}) p = xy \vee (\bar{x} y \vee x \bar{y}) p.$$

Соответствующие схемы предлагается нарисовать самостоятельно.

Построив подобные схемы для каждого разряда и обеспечив их надлежащее соединение, можно получить схему многоразрядного двоичного сумматора, осуществляющего сложение двоичных чисел в ЭВМ.

Шифратор и дешифратор. Человек привык производить операцию с числами в десятичной системе счисления. Для ЭВМ более удобна двоичная система. Поэтому важную роль в ЭВМ играют устройства, обеспечивающие взаимопонимание человека и машины, т.е. устройства, переводящие информацию с языка

человека на язык машины и обратно. Такими устройствами являются, например, шифраторы, осуществляющие перевод чисел из десятичной системы в двоичную, и дешифраторы, осуществляющие обратный перевод.

Покажем, как конструируется шифратор. Имеется следующее соответствие между десятичной и двоичной записями

Таблица 33

Десятичная запись	Двоичная запись	Десятичная запись	Двоичная запись
0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001

Другими словами, запись чисел в двоичной системе счисления представляет собой значения одной из булевых функций: f_1, f_2, f_4, f_8 . Действительно, можем считать, что каждая из этих функций зависит от десяти переменных $x_0, x_1, \dots, x_9$. В виде таблицы покажем часть строк этих булевых функций.

Отсутствие остальных строк в приведенной таблице означает, что на указанных десяти наборах значений переменных функции должны принимать указанные значения, а на остальных наборах их значения могут быть какими угодно. Это, в свою очередь, означает, что в качестве каждой из функций можно взять довольно много (конечное число) функций.

На основе таблицы составляется ДНФ, КНФ. Читателю предлагается самостоятельно составить ДНФ и КНФ для вышеуказанных функций и построить их контактные схемы.

Таблица 34

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	f_1	f_2	f_4	f_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

1.13. О некоторых других приложениях теории булевых функций

В настоящее время аппарат булевых функций широко применяется в решении задач теории распознавания образов. Реализация методов теории распознавания образов связана с созданием математических моделей исследуемого объекта, где используются элементы математической логики. Некоторые методы ее решения опираются на теорию булевых функций, которая позволяет в определенном смысле автоматизировать процесс решения, используя для этой цели компьютер.

Примерами этого являются: моделирование выявления уровня способности человека к конкретной деятельности, медицинская диагностика, задача прогнозирования погоды и др.

Например, для создания модели выявления уровня способности к конкретной деятельности можно

применить алгоритмы распознавания образов с использованием булевых функций.

Под образом будем понимать некоторую геометрическую область, внутри которой все элементы похожи между собой и не похожи на элементы другой геометрической области. Совокупности образов составляют алфавит образов (классов).

Рассмотрим задачу о подборе тестовых заданий для мониторинга успеваемости будущих учителей информатики в условиях многоуровневой подготовки.

Предположим, что с помощью экспертов составлена обучающая выборка из числа преуспевающих студентов, выполнявших тестовые задания по каждому направлению обучения в условии многоуровневой подготовки студентов педагогических вузов. Обозначим их соответственно через классы $K_1, \dots, K_l$. Тогда для каждого класса можно определить векторы центра тяжести $Z_1, \dots, Z_l$. При этом объекты соответствующих классов группируются вокруг центрального вектора каждого класса. На входе диагностической системы задается новый объект U . Требуется установить, к какому классу принадлежит объект U .

Для распознавания объекта U можно использовать различные алгоритмы распознавания образов. Не исключены классификации респондентов с применением алгоритма, основанные на логических функциях.

Рассмотрим случай, когда рассматриваются два класса, например K_1 — класс бакалавров и K_2 — класс магистров.

Элементы матрицы описания изучаемого объекта принимают бинарные значения.

Пусть $T_1 = \|a_{ij}\|$, $T_2 = \|b_{sj}\|$ — эталоны соответственно классам K_1, K_2 , где $a_{ij}, b_{sj} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m_1$;

$$s = 1, \dots, m_2; \quad j = 1, \dots, n; \quad T_1 \cap T_2 = \emptyset, \quad K_1 \cup K_2 \subseteq K \\ T_1 \cup T_2 = T, .$$

Набор столбцов $(j_1, \dots, j_d) \in T$, где $d \leq n$, называется тестом для пары таблиц (T_1, T_2) , если после удаления из T всех столбцов, не вошедших в число $(j_1, \dots, j_d)$, все строки таблицы T_1 будут различны со всеми строками таблицы T_2 .

Определение 30. Тест называется тупиковым для пары таблиц (T_1, T_2) , если после удаления из него любого столбца он перестает быть тестом для (T_1, T_2) .

При проведении классификации объекта с помощью алгоритма распознавания образов на основе теста с определенной длиной сначала для пары таблиц (T_1, T_2) находят все тесты определенной длины, далее с их помощью находят так называемые информационные признаки. Совокупность информационных признаков образует информационный вектор. После чего составляют процедуру классификации объектов.

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_s = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d t_s^j, s = 1, \dots, n$ тесты для

пары таблиц (T_1, T_2) .

Далее вычисляем вектор

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \text{ где } \tau_s = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d t_s^j, s = 1, \dots, n .$$

Вектор τ называется информационным вектором признаков, т.е. координата τ_s указывает на важность s -го признака для отличия T_1 от T_2 . В этом случае в качестве нормали разделяющей гиперплоскости можно брать вектор $\tau * [K_{1j} - K_{2j}] = [\tau_1(K_{11} - K_{21}), \dots, \tau_n(K_{1n} - K_{2n})]$.

В качестве меры близости между объектами можно использовать расстояние Хемминга. Далее относительно каждого класса вычисляют:

$$\sum_1 = \sum_{j=1}^n u_j \tau_j K_{1j}, \quad \sum_2 = \sum_{j=1}^n u_j \tau_j K_{2j}.$$

Правила распознавания: если $\sum_1 > \sum_2$, то $U \in K_1$; если $\sum_1 < \sum_2$, то $U \in K_2$; и в случае когда $\sum_1 = \sum_2$, алгоритм не распознает объект U .

1.14. Некоторые примеры применения языка Java в алгебре высказываний

Программа построения таблиц истинности. В языках программирования высокого уровня имеются логические операции: отрицание (NOT), конъюнкция (AND), дизъюнкция (OR) и исключение дизъюнкции (XOR). Реализацию их рассмотрим на примере языка ООП (объектно-ориентированного программирования) Java.

В языке Java логические операции применяются к величинам типа `boolean`, которые могут принимать два значения: *true* — истина, *false* — ложь. Результат операции также будет иметь тип *boolean*.

Программа построения таблицы истинности логических операций: $A \wedge B$:

```
public class A{
    public static void main(String args[]){
        boolean a=true, b=true, c;
        System.out.println("\ta\tb\ta&b");
        do{
            do{
                System.out.print("\t"+a);
                System.out.print("\t"+b);
                c=a&b;
                System.out.println("\t"+c);
                b=!b;
            }
            while (b==false);
        }
```

```

        a=!a;
    }
    while (a==false);
}
}

```

**Программа построения таблицы истинности
сложного высказывания: $C = A \wedge B \vee B \wedge \bar{C}$:**

```

public class D{
    public static void main(String args[]){
        boolean a=true, b=true, c=true, d;

        System.out.println("\ta\tb\tc\td");
        do{
            do{
                do{
                    System.out.print("\t"+a);
                    System.out.print("\t"+b);
                    System.out.print("\t"+c);
                    d=a&b|b&!c;
                    System.out.println("\t"+d);
                    c=!c;
                }
                while(c==false);
                b=!b;
            }
            while(b==false);
            a=!a;
        }
        while(a==false);
    }
}

```

Результат работы программы см. в таблице 35.

Решение содержательных логических задач

Алгебра высказываний находит широкое применение при решении содержательных логических задач. Существуют разные способы формализации как

Таблица 35

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>

условий задачи, так и процесса ее решения: алгебраический, табличный, графический и др. Каждый из этих способов обладает своими достоинствами.

Так, например, при применении алгебраического метода наиболее трудным является перевод текста задачи на язык формул. Далее, если вы знаете логические законы и правила упрощения выражений, решение задачи сводится к формальным преобразованиям и приводит сразу к ответу, который остается лишь расшифровать, исходя из принятых вами обозначений.

Метод диаграмм Эйлера — Венна позволяет графически решать математические задачи на основе применения теории множеств.

Как правило, задачу можно решить несколькими способами. Чтобы выбрать наиболее простой и эффективный способ для каждой конкретной задачи, необходимо знать все эти способы.

Приведем несколько примеров.

Задача 1.

Данила, Максим и Петя нашли в земле сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

Данила. *Это сосуд греческий и изготовлен в V веке.*

Максим. *Это сосуд финикийский и изготовлен в III веке.*

Петя. *Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке.*

Учитель сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений.

Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Решение с помощью алгебры высказываний

В условии нам даны высказывания школьников и учителя, некоторые из них противоречат друг другу. Решить задачу — значит найти истинное высказывание, отвечающее на поставленный в задаче вопрос.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g &= \text{Это сосуд греческий;} \\ f &= \text{Это сосуд финикийский;} \\ v3 &= \text{Сосуд изготовлен в III в.;} \\ v4 &= \text{Сосуд изготовлен в IV в.;} \\ v5 &= \text{Сосуд изготовлен в V в.} \end{aligned}$$

Запишем в данных обозначениях условия задачи. Со слов учителя следует, что Данила прав только в чем-то одном: или $g = 1$, или $v5 = 1$.

Таким образом, тождественно истинным будет высказывание

$$g \wedge v5 \vee \bar{g} \wedge v5 = 1.$$

Аналогично из слов Максима и учителя следует:

$$f \wedge v3 \vee \bar{f} \wedge v3 = 1,$$

а из слов Пети и учителя:

$$g \wedge v5 \vee \bar{g} \wedge v5 = 1.$$

Кроме того, ясно, что сосуд может быть изготовлен только в одном из веков и только в одной из стран. Эти условия можно записать так:

$$v3 \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5 = 1;$$

$$f \wedge \overline{g} \vee \overline{f} \wedge g = 1;$$

Итак, мы получили пять тождественно истинных высказываний. Их нужно логически перемножить. Результат должен быть также тождественно истинным высказыванием:

$$\begin{aligned} 1 &= (g \wedge v5 \vee \overline{g} \wedge v5) \wedge (f \wedge \overline{v3} \vee \overline{f} \wedge v3) \wedge (g \wedge \overline{v5} \vee \overline{g} \wedge v5) \wedge \\ &\wedge (f \wedge \overline{g} \vee \overline{f} \wedge g) \wedge (v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \\ &= \{\text{упростим: сначала перемножим первую и третью скобки и вторую и четвертую скобки}\} = \\ &= (g \wedge v5 \wedge \overline{g} \wedge \overline{v4} \vee g \wedge v5 \wedge g \wedge v4 \vee \overline{g} \wedge v5 \wedge \overline{g} \wedge \overline{v4} \vee \overline{g} \wedge \\ &v5 \wedge g \wedge v4) \wedge (f \wedge \overline{v3} \wedge f \wedge \overline{g} \vee f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{f} \wedge g \vee \overline{f} \wedge v3 \wedge f \wedge \\ &\wedge \overline{g} \vee \overline{f} \wedge v3 \wedge \overline{f} \wedge g) \wedge (v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \\ &= \{\text{упростим выражения в первой и второй скобках, учитывая, что, например,}\} \end{aligned}$$

$$\{g \wedge \overline{g} = 0, \quad g \wedge g = g, \quad \overline{g} \wedge \overline{g} = \overline{g}\} =$$

$$\begin{aligned} &= (g \wedge \overline{v5} \wedge v4 \vee \overline{g} \wedge v5 \wedge \overline{v4}) \wedge (f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{g} \vee \overline{f} \wedge v3 \wedge g) \wedge \\ &\wedge (v3 \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \\ &= \{\text{перемножим первую и вторую скобки и упростим произведение}\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (g \wedge \overline{v5} \wedge v4 \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{g} \vee g \wedge \overline{v5} \wedge v4 \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge g \vee \overline{g} \wedge v5 \wedge \\ &\wedge v4 \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{g} \vee \overline{g} \wedge v5 \wedge v4 \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge g) \wedge (v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \\ &\wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (g \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{g} \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) \wedge \\ &\wedge (v3 \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5} \vee \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \end{aligned}$$

$$= \{\text{перемножим оставшиеся скобки и упростим полученное выражение}\} =$$

$$\begin{aligned} &= (g \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \wedge v3 \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5}) \vee (g \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \wedge \\ &\wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5}) \vee (g \wedge \overline{f} \wedge v3 \wedge v4 \wedge \overline{v5} \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) \vee \\ &\vee (g \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5 \wedge v3 \wedge \overline{v4} \wedge \overline{v5}) \vee (g \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5 \wedge \\ &\wedge \overline{v3} \wedge v4 \wedge \overline{v5}) \vee (g \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5 \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5) = \\ &= g \wedge f \wedge \overline{v3} \wedge \overline{v4} \wedge v5 \end{aligned}$$

т.е. $\overline{g}=1, f=1, \overline{v3}=1, \overline{v4}=1, v5=1$

Таким образом, сосуд финикийский и изготовлен в V веке.

Программный метод решения задачи 1

Алгоритм решения заключается в том, чтобы перебрать все допустимые значения переменных $g, f, v3, v4, v5$ и найти, при каких из них основная формула принимает значение 1 (истина).

```
public class Sosud{
    public static void main(String args[]){
        boolean g=true, v5=true, v4=true, v3=true,
f=true, A;
        System.out.println("\tg\tf\tv3\tv4\tv5\tA");
        do{
            do{
                do{
                    do{
                        System.out.print("\t"+g);
                        System.out.print("\t"+f);
                        System.out.print("\t"+v3);
                        System.out.print("\t"+v4);
                        System.out.print("\t"+v5);
                        A=(g&&!v5|!g&v5) & (f&&!v3|!f&v3) & (!
g&!v4|g&v4) & (f&!g|!f&g) & (v3&!v4&v5|!v3&v4&!v5|!v3&!v4
&v5);

                        if(A==false)
                            System.out.println("\t"+A);
                        else{
                            System.out.print("\t"+A);
                            System.out.println("\Искомый
ответ.");

                            boolean t1=g;
                            boolean t2=v5;
                            boolean t3=v4;
                            boolean t4=v3;
```

```

        boolean t5=f;
System.out.println("Сосуд греческий? – "+t1+" Сосуд
финикийский? – "+t5+" Изготовлен в 3 веке? – "+t4+"
Изготовлен в 4 веке? – "+t3+" Изготовлен в 5 веке? –
"+t2);

        }
        v5=!v5;

    }

    while (v5==false);
    v4=!v4;

}
while (v4==false);
v3=!v3;

}
while (v3==false);
f=!f;

}
while (f==false);
g=!g;
}
while (g==false);
}
}

```

Сосуд финикийский и изготовлен в V веке.

Задача 2

В одном королевстве были незамужние принцессы, голодные тигры и приговоренный к казни узник. Но король всякому узнику, осужденному на смерть, давал последний шанс спастись. Ему предлагалось угадать, в какой из двух комнат находится тигр, а в какой принцесса. Хотя вполне могло быть, что король в обеих комнатах разместил принцесс или, что хуже, в обеих тигров. Выбор надо было сделать на основании табличек

на дверях комнат. Причем, узнику было известно, что утверждения на табличках либо оба истинны, либо оба ложны. Надписи гласили:

Первая комната: *По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса.*

Вторая комната: *Тигр в другой комнате.*

Какую дверь должен выбрать узник?

Решение с помощью алгебры высказываний.

Введем обозначения.

p_1 — в первой комнате находится принцесса.

p_2 — принцесса во второй комнате.

A — утверждение на первой двери: $A = p_1 \vee p_2$;

B — утверждение на второй двери: $B = \overline{p_1}$.

Условия задачи о том, что утверждения на табличках либо одновременно истинные, либо одновременно ложные, записываются так:

$$A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} = 1.$$

Подставим вместо A и B соответствующие формулы и упростим:

$$\begin{aligned} A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} &= ((p_1 \vee p_2) \& \overline{p_1}) \vee ((\overline{p_1} \vee p_2) \& \overline{p_2}) = \\ &= (p_1 \& \overline{p_1} \vee p_2 \& \overline{p_1}) \vee (\overline{p_1} \& p_2 \& \overline{p_2}) = \\ &= 0 \vee p_2 \& \overline{p_1} \vee 0 = p_2 \& \overline{p_1} \end{aligned}$$

То есть $p_2 \& \overline{p_1} = 1$, в первой комнате находится тигр, во второй принцесса.

В первой комнате — тигр, во второй — принцесса.

Программа решения задачи 2.

```
public class korolevstvo{
    public static void main(String args[]){
        boolean p1=true, p2=true, A;
        System.out.println("\tp1\tp2\tA");
```

```

do{
    do{

        System.out.print("\t"+p1);
        System.out.print("\t"+p2);
        A=( (p1|p2)&!p1) | (! (p1|p2) &! (! (p1) ) ) ;

        if(A==false)
            System.out.println("\t"+A);

        else{
            System.out.print("\t"+A);
            System.out.println("\tИскомый
ответ.");

            boolean t1=p1;
            boolean t2=p2;
            System.out.println(«принцесса в первой комнате? —
«+t1+» Принцесса во второй? — «+t2);
            }
            p2=!p2;

        }

        while (p2==false);
        p1=!p1;

    }

    while (p1==false);
}
}

```

В первой комнате — тигр, во второй — принцесса.

Задача 3

На соревнованиях по прыжкам в воду Олег, Леша, Андрей, Игорь заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись:

Нина: *Олег был первым, а Леша — вторым.*

Таня: Олег был вторым, а Андрей — третьим.

Даша: Андрей был четвертым, а Игорь — вторым.

Алла, которая была судьей на этих соревнованиях и хорошо помнила, как распределились места, сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление.

Кто из мальчиков какое место занял?

Решение с помощью алгебры высказываний

Введем следующие обозначения: буквой и цифрой обозначим имя мальчика и место, которое он занял. Например, $O1$, будет означать, что Олег занял первое место, а $I4$ — Игорь занял четвертое место.

Из слов Аллы следует, что Нина в одном из предположений была права, а в другом ошибалась, т.е.

$$H = O1 \& \overline{I2} \vee \overline{O1} \& I2 = 1.$$

Аналогично записываем:

$$T = O2 \& \overline{A3} \vee \overline{O2} \& A3 = 1.$$

$$D = A4 \& \overline{I2} \vee \overline{A4} \& I2 = 1.$$

Тогда: $H \& T \& D = 1$.

Кроме того, так как мальчиков 4 и мест 4, то один и тот же мальчик не может занять два места и одно место не может быть занято двумя мальчиками одновременно. Формально это следует записать так:

$$\begin{aligned} O1 \& \overline{O2} \& \overline{O3} \& \overline{O4} \vee O1 \& O2 \& \overline{O3} \& \overline{O4} \vee \overline{O1} \& \overline{O2} \& \overline{O3} \& O4 = 1, \\ O1 \& \overline{I1} \& \overline{A1} \& \overline{I1} \vee \overline{O1} \& I1 \& \overline{A1} \& \overline{I1} \vee \overline{O1} \& \overline{I1} \& \overline{A1} \& I1 = 1, \end{aligned}$$

...

и так для каждого мальчика и для каждого места.

Но для более краткой записи решения задачи мы будем упрощать формулу

$$\begin{aligned} H \& T \& D = (O1 \& \overline{I2} \vee \overline{O1} \& I2) \& \\ & : (O2 \& \overline{A3} \vee \overline{O2} \& A3) \& (A4 \& \overline{I2} \vee \overline{A4} \& I2), \end{aligned}$$

пользуясь следующими свойствами:

- двое не могут занять одно и то же место: $O1 \& L1 = 0$ и т.п.;
- один мальчик не может занять два места: $O1 \& O2 = 0$ и т.п.;
- если мальчик не занял какие-либо места, то он занял одно из остальных мест: $\overline{O1} = O2 \vee O3 \vee O4$, $\overline{O1} \& \overline{O2} = O3 \vee O4$ и т.п.

Теперь можно записать решение задачи:

$$\begin{aligned}
 & (O1 \& \overline{L2} \vee \overline{O1} \& L2) \& (O2 \& \overline{A3} \vee \overline{O2} \& A3) \& \\
 & \& (A4 \& \overline{I2} \vee \overline{A4} \& I2) = (O1 \& O2 \& \overline{I2} \& \overline{L3} \vee \\
 & \vee O1 \& \overline{O2} \& \overline{A4} \& I2 \vee \overline{O1} \& O2 \& A4 \& \overline{I2} \vee \overline{O1} \& \\
 & \& \overline{O2} \& A4 \& I2) \& (L4 \& \overline{A2} \& \overline{L4} \& A2) = \\
 & = (O1 \& L3 \& I4 \vee O4 \& I2 \& L3) \& \\
 & \& (L4 \& \overline{L2} \vee \overline{L4} \& A2) = O1 \& L3 \& I4 \& L4 \& \overline{A2} \vee \\
 & \vee O1 \& L3 \& I4 \& \overline{L4} \& A2 \vee O1 \& L3 \& I4 \& \\
 & \& L4 \& \overline{A2} \vee O1 \& L3 \& I4 \& \overline{L4} \& A2 = \\
 & = O1 \& A2 \& L3 \& I4.
 \end{aligned}$$

Таким образом, Олег занял первое место, Леша — второе, Андрей — третье, Игорь — четвертое.

Предлагается читателю самостоятельно составить программу решения на одном из современных языков программирования.

Решение с помощью графов

Граф — один из видов моделей, отражающих взаимодействие объектов или систем.

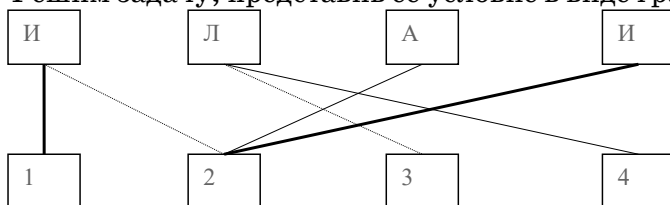
Графом в некоторых случаях называют схему, в которой обозначаются только наличие объектов (элементов системы) и наличие и вид связи между объектами.

Объекты представляются в графе вершинами (на схеме они обозначаются кружочками, прямоугольниками и т.п.). Связи между объектами представляются дугами, если связь однонаправленная (обозначается на схеме линиями со стрелками), или ребрами, если

связь между объектами двусторонняя (обозначается на схеме линиями без стрелок).

Метод графов применяется тогда, когда между объектами, о которых идет речь в задаче, существует много связей. Граф позволяет наглядно представить эти связи и определить, какие из них не противоречат условиям задачи.

Решим задачу, представив ее условие в виде графа.



Вершины графа — имена мальчиков и занятые ими места.

Ребра графа — высказывания девочек:

мнение Нины — жирные линии (ребра *О-1* и *И-2*);

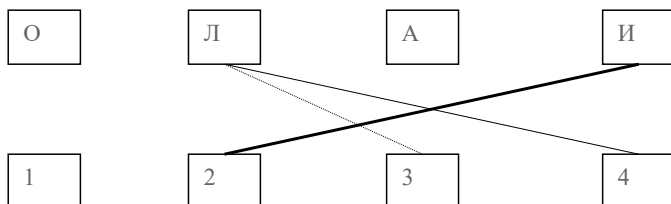
мнение Тани — пунктирные линии (ребра *О-2* и *Л-3*);

мнение Даши — тонкие линии (ребра *А-2* и *Л-4*).

Алла сказала, что каждая девочка сделала только одно правильное заявление. Значит, надо оставить только по одной линии каждого типа. Всего в графе должно остаться 3 линии разных типов.

Предположим, что истинно высказывание, обозначенное ребром *И-2*, тогда нам следует удалить из графа ребра *О-1* (Нина права только в одном предположении), *О-2* и *А-2* (только кто-то один может занять второе место).

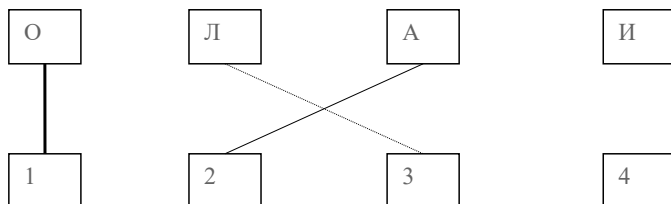
В графе останется по одной линии каждого вида, а именно ребра *Л-3*, *Л-4* и *И-2*. Но это невозможно, так как Леша не мог одновременно занять третье и четвертое места. Значит, предположение



об истинности высказывания, обозначенного ребром И-2, было неверным.

Одно предположение Нины (ребро И-2) неверно, значит, верно ее другое предположение (ребро О-1). Следовательно, ребро О-2 следует удалить, а из этого следует, что высказывание, обозначенное ребром Л-3, должно быть истинным. Тогда ребро Л-4 надо удалить. Отсюда следует, что вторую тонкую линию (А-2) надо оставить.

В результате получим следующий граф, который и дает ответ задачи:



Таким образом, первое место занял Олег, второе — Леша, третье — Андрей, четвертое — Игорь.

Задача 4

В одной стране жили рыцари, которые всегда говорили только правду, и лжецы, которые всегда лгали. Однажды в страну проник шпион по имени Мердок, который, как и всякий шпион, иногда говорил правду, иногда лгал, в зависимости от того, что ему выгодно. Шпион поселился с двумя жителями страны — рыцарем

и лжецом. Всех троих арестовали в один день и привели на допрос. Никто не знал, кто из них кто. Они сделали следующие заявления:

А сказал: *Я – Мердок.*

В сказал: *А говорит правду.*

С сказал: *Я не Мердок.*

Кто же из них шпион — *А*, *В* или *С*?

Решение с помощью алгебры высказываний.

Введем следующие переменные:

Пусть $Aш = A$ – шпион.

Пусть $Bш = B$ – шпион.

Пусть $Cш = C$ – шпион.

В наших обозначениях высказывания, *А*, *В*, *С* записываются так: $A = Aш$, $B = Aш$, $C = Cш$.

По условиям задачи ясно, что из трех высказываний истинным может быть либо одно (если шпион лжет), либо два (если шпион говорит правду).

Следовательно, возможны следующие варианты распределения истинных (И) и ложных (Л) высказываний:

$$ИИЛ \vee ИЛИ \vee ЛИИ \vee ЛЛИ \vee ЛИЛ \vee ИЛЛ = 1 \quad (*)$$

Посмотрим, что означает ИИЛ для введенных нами обозначений.

Высказывание пленника *А* истинно, следовательно, $Aш = 1$; высказывание пленника *В* истинно, следовательно $Aш = 1$; высказывание пленника *С* ложно, следовательно $Cш = 1$. То есть $Aш \& Bш \& Cш = 1$. Но *А* и *С* не могут одновременно быть шпионами, следовательно, это неверно и данная конъюнкция ложна.

Аналогично вариант ИЛИ «переводится» в наши обозначения так: $Aш \& Aш \& Cш = 1$. Эта конъюнкция тоже ложна, поскольку *А* не может одновременно быть шпионом и не быть им.

Интерпретируем полностью формулу (*), опуская для краткости знак конъюнкции:

$$\overline{A} \wedge \overline{A} \wedge C \vee \overline{A} \wedge \overline{A} \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge A \wedge C \vee \overline{A} \wedge A \wedge \overline{C} \vee \\ \vee \overline{A} \wedge A \wedge C \vee \overline{A} \wedge A \wedge \overline{C} = 0 \vee 0 \vee 0 \vee \overline{A} \wedge C \vee 0 \vee 0 = 1.$$

То есть ни A , ни C не шпионы, следовательно, шпион — B . Далее уже просто сделать вывод, что A — лжец, C — рыцарь.

Решение с помощью таблицы

Табличный метод очень нагляден, но не обладает универсальностью, т.е. предназначен для решения только определенного класса задач. Кроме того, он требует анализа находящейся в таблице информации, умения сравнивать и сопоставлять

Из условий задачи следует, что A не может быть рыцарем (так как он либо является Мердоком, либо лжет), а C не может быть лжецом (так как если он лжет, то он — Мердок). Отметим это в следующей таблице.

Таблица 36

Пленник	Рыцарь	Лжец	Шпион
A	—		
B			
C		—	

Предположим, что B — рыцарь. Тогда следует поставить плюс в соответствующей клетке и минусы в оставшихся клетках строки « B » и столбца «Рыцарь». Тогда A может быть только лжецом. Отразим это в таблице.

Таблица 37

Пленник	Рыцарь	Лжец	Шпион
А	–	+	
В	+	–	–
С	–	–	

Получилось, что рыцарь подтверждает ложь лжеца, а такого быть не может. Следовательно, наше предположение о том, что A – рыцарь, было неверным.

Остается одна возможность: C – рыцарь.

Таблица 38

Пленник	Рыцарь	Лжец	Шпион
А	–		
В	–		
С	+	–	–

Случай, когда A – шпион, а B – лжец, невозможен, так как в этом случае лжец говорит правду. Остается единственный вариант.

Таблица 39

Пленник	Рыцарь	Лжец	Шпион
А	–	+	–
В	–	–	+
С	+	–	–

A – лжец, B – шпион, C – рыцарь.

Задача 5

Логическая функция F задается выражением $\bar{x} \vee y \vee (\bar{z} \wedge w)$. Задан фрагмент таблицы истинности функции F , содержащий все наборы аргументов, при которых функция F ложна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z, w .

Таблица 40

?	?	?	?	F
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0

В ответе напишите буквы x, y, z, w в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы. Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение:

1. Данная формула принимает значение ложь (0), если все слагаемые, входящие в формулы принимают значение 0. Следовательно, при $\bar{x} = 0$, $x = 1$. И исходя из формулы y должен всегда быть равен 0. Значит в таблице истинности первый неизвестный столбец — это y , а последний неизвестный столбец — это x .

2. Исходя из вышесказанного рассмотрим таблицу истинности, нам теперь необходимо разобраться с оставшимися двумя столбцами, от которых зависит третье слагаемое в формуле $(\bar{z} \cdot w)$.

Чтобы произведение $(\bar{z} \cdot w)$ равнялось нулю, не должно быть ситуаций, когда $\bar{z}$ и w одновременно равны 1. Это возможно только в том случае, когда второй неизвестный столбец — z , а третий — w .

Таблица 41

y	$?$	$?$	x	F
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0

Таблица 42

z	w	$(\bar{z} \cdot w)$
0	0	0
1	0	0
1	1	0

Таким образом, ответ — $yzwx$.

Задача 6

В таблице приведены запросы и количество найденных по ним страниц некоторого сегмента сети Интернет:

Таблица 43

Запрос	Найдено страниц (в тысячах)
Терпение& Желание &Стремление	1100
Терпение & Желание &Удачи	1300
Терпение & Желание&Стремление&Удачи	1000

Какое количество страниц (в тыс.) будет найдено по запросу

(Терпение & Желание & Стремление) | (Терпение & Желание & Удачи)?

Считается, что все запросы выполнялись практически одновременно, так что набор страниц, содержащих все искомые слова, не изменялся за время выполнения запросов.

Решение:

Введем систему обозначений:

Т — Терпение

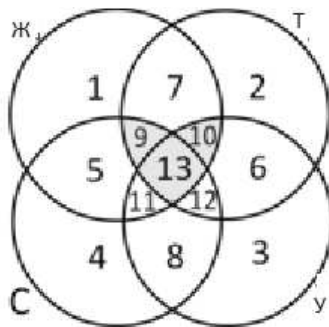
Ж — Желание

У — Удачи

С — Стремление

Формула запроса будет выглядеть следующим образом

$$(T \wedge Ж \wedge C) \vee (T \wedge Ж \wedge У)$$



Для решения данной задачи воспользуемся кругами Эйлера.

$T \wedge Ж \wedge C$ — это сумма зон 9, 13 и равна 1100

$T \wedge Ж \wedge У$ — это сумма зон 10, 13 и равна 1300

$(T \wedge Ж \wedge C) \vee (T \wedge Ж \wedge У)$ — это сумма зон 9, 13, 10 и равна $1100 + 1300 - 1000 = 1400$

Ответ: 1400.

Задание 7

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \vee x_4) = 1 \\ (x_3 \equiv x_4) \rightarrow (x_5 \vee x_6) = 1 \\ (x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_7 \vee x_8) = 1 \\ (x_7 \equiv x_8) \rightarrow (x_9 \vee x_{10}) = 1 \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

1. Решаем первое уравнение системы. Для получения решения составляем таблицы истинности по логическим переменным x_1, x_2, x_3, x_4 следующим образом (укороченным вариантом):

Таблица 44

x_1	x_2	$x_1 \equiv x_2$	x_3	x_4	$x_3 \vee x_4$	$(x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_3 \vee x_4)$
0	0	1	0	0	0	0,1,1,1 (3)
0	1	0	0	1	1	1,1,1,1 (4)
1	0	0	1	0	1	1,1,1,1 (4)
1	1	1	1	1	1	0,1,1,1 (3)

Примечание: В последнем столбце в скобках указано количество возможных двоичных наборов по переменным x_3, x_4 относительно каждого набора из возможных переменных x_1, x_2 , где логическое выражение истинно.

Из таблицы следует, что для первого уравнения из возможных 16 двоичных наборов, в 14 из них

уравнение принимает значение истинно, а в двух наборах — ложь.

Метод отображения в виде схемы относительно первого уравнения выглядит следующим образом:

Таблица 45

x_1	x_2		x_3	x_4
0	0	→	0	0
0	1	→	0	1
1	0	→	1	0
1	1	→	1	1

2. Используя правило отображения, составляем таблицу истинности для всех пар логических переменных, т.е.:

Таблица 46

	$x_1 x_2$	$x_3 x_4$	$x_5 x_6$	$x_7 x_8$	$x_9 x_{10}$
00	1	2	8	28	100
01	1	4	14	50	178
10	1	4	14	50	178
11	1	4	14	50	178
				Отв.	634

Ответ: 634.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается традиционная логика от формальной логики?

2. Охарактеризуйте основные законы традиционной логики.

3. Что такое высказывание? Приведите примеры предложений не являющихся высказываниями.

4. Какие виды формул рассматриваются в алгебре высказываний?

5. Какие логические операции применяются к высказываниям?

6. Какие равносильные формулы алгебры высказываний вы знаете?

7. Доказать равносильность следующих формул тремя способами (с помощью таблицы истинности, методом преобразования и методом от противного):

a) $(\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$;

b) $(xy \rightarrow z)(\bar{z} \rightarrow xy) = z$;

c) $xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$

8. Приведите примеры общезначимых и противоречивых формул алгебры высказываний.

9. Что такое булевы функции и какие виды булевых функций вы знаете?

10. Приведите примеры применения СДНФ и СКНФ в алгебре высказываний.

11. Какие логические способы существуют для установления равносильности формул алгебры высказываний?

12. Составьте СДНФ и СКНФ для всех двуместных булевых функций.

13. Классификация минимизации булевых функций.

14. Системы булевых функций и теорема Поста о полноте системы булевых функций.

15. Алгоритм Куайна и Мак-Клоски. Таблицы простых импликантов.

16. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам. Сумматоры.

17. Шифратор и дешифратор.

18. Аппарат булевых функций в задачах распознавания.

19. Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры высказываний:

а) Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.

б) Если сегодня хорошая погода, то я не буду работать в библиотеке, а буду работать на природе.

с) Студент получает диплом высшего образования тогда и только тогда, когда он заканчивает институт, или университет, или академию.

Практические задания

1. Составьте истинностные таблицы следующих формул:

а) $(x \vee \bar{y} \rightarrow x) \bar{y}x$

б) $(x \rightarrow y) \rightarrow x$

в) $(x\bar{y} \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow \bar{x}y)$

г) $(x \rightarrow \bar{x} \vee y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y)$

д) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z)$

е) $x \rightarrow \overline{x \rightarrow y}$

ж) $x \vee yz \rightarrow (x \vee y)(x \vee z)$

з) $x(y \vee z) \rightarrow xy \vee xz$

2. Установить равносильность формул алгебры высказываний:

а) $(\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$

б) $(\bar{x}yz \rightarrow x \vee y) \bar{z} \rightarrow \overline{xz \vee y} = z \vee \bar{y}$

в) $(xy \rightarrow z)(\bar{z} \rightarrow xy) = z$

г) $xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$

д) $x\bar{y} \vee \bar{x}z \vee y\bar{z} = \bar{x}y \vee \bar{y}z \vee x\bar{z}$

3. Являются ли следующие формулы алгебры высказываний общезначимыми?

а) $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)$

б) $\overline{x} \vee \overline{y} \rightarrow \overline{xy}$

в) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$

г) $\overline{xy} \rightarrow \overline{x \vee y}$

д) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{x} \vee y)$

е) $\overline{x} \rightarrow (x \rightarrow \overline{y})$

ж) $x\overline{y} \rightarrow x \rightarrow y$

з) $(\overline{x} \rightarrow y) \rightarrow ((\overline{x} \rightarrow \overline{y}) \rightarrow x)$

и) $x \vee y \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow \overline{yz})$

к) $x \vee (x\overline{y} \rightarrow \overline{x \vee \overline{y}})(x \rightarrow \overline{y})$

4. Преобразовать формулы до длины l :

а) $l=2$; $xy \vee \overline{xy} \vee \overline{x\overline{y}}$

б) $l=2$; $(x \rightarrow y)\overline{xy} \vee x\overline{y} \rightarrow (x \rightarrow \overline{xy})$

в) $l=3$; $(xyz \rightarrow xz)(\overline{x \rightarrow y \vee z})$

г) $l=4$; $(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x \vee y \vee z})$

5. Равносильны ли следующие формулы:

а) $a(b \rightarrow c) = ab \rightarrow ac$

б) $a \vee (b \rightarrow c) = a \vee b \rightarrow a \vee c$

в) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$

г) $a \rightarrow (b \vee c) = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$

д) $a \rightarrow (bc) = (a \rightarrow b)(a \rightarrow c)$

6. Составьте СДНФ и СКНФ для всех двуместных булевых (истинностных) функций.

7. Составьте СДНФ и СКНФ, выражающие те же функции, что и следующие формулы:

а) $(x \vee y \vee \overline{z}) \rightarrow (z \sim y)$

б) $(x \vee y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z)$

в) $\overline{xy \rightarrow p} \vee x(y \vee z)$

г) $x(y \vee z) \rightarrow xy \vee z$

8. Доказать методом от противного общезначимость формулы:

$$(x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

9. Доказать, что $A \sim B$ общезначима тогда и только тогда, когда $A \equiv B$.

10. Доказать, что формула A общезначима тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ — ложное утверждение.

11. Без построения истинностных таблиц докажите, что следующие формулы являются необщезначимыми:

а) $xxyz$

б) $\overline{x \rightarrow (y \rightarrow xy)}$

в) $(x \sim y)\overline{xy}$

г) $x \rightarrow (y \rightarrow z)xyz$

12. Какие из приведенных ниже формул являются: общезначимыми; противоречиями; выполнимыми?

а) $x \vee y \rightarrow (z \vee x \rightarrow z \vee y)$

б) $\overline{x \rightarrow (x \rightarrow y \sim y)}$

в) $(x \rightarrow y)(z \rightarrow s)(\overline{x \vee \overline{s}}) \rightarrow \overline{x \vee \overline{z}}$

г) $x \vee xy \sim \overline{x}$

д) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z))$

е) $\overline{x \vee yz} \vee z$

13. Найдите существенные и фиктивные переменные функций $f_1(x_1, x_2, x_3)$ и $f_2(x_1, x_2, x_3)$, заданных двоичными наборами (10100101) и (00010111).

14. Пусть $f_1(x_1, x_2, x_3)$ задается двоичным набором (01101001), $g_1(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

Определите, чему равны функции

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2) &= f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), x_2), \\ h_1(x_1, x_2, x_3) &= f(g_2(x_1, x_2), x_3, g_1(x_2, x_1)). \end{aligned}$$

15. Разложите по переменным x, z функцию $f(x, y, z) = xyz \oplus xz \oplus y \oplus z \oplus 1$.

16. Докажите полноту систем функций:

$$\{\bar{x}, x \rightarrow y\}, \quad \{0, x \rightarrow y\}, \quad \{0, x \oplus y \oplus 1, x \vee y\}.$$

17. Докажите, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i тогда и только тогда, когда от переменной x_i существенно зависит функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$.

18. Методом неопределенных коэффициентов постройте полином Жегалкина для функции $f(x, y, z, t)$, заданной набором (1010101111011000).

19. Докажите, что следующие функции обладают свойством самодвойственности:

$$f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z, \quad f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz, \\ f(x, y, z) = xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}.$$

20. Докажите, что не существует самодейственных функций $f(x_1, x_2)$, существенно зависящих от обеих переменных.

21. Проверьте на монотонность функцию $f(x, y, z) = xyz(x \rightarrow y)(x \rightarrow z)$. С использованием диаграммы множества B^3 найдите число монотонных функций от трех переменных.

22. Докажите, что из монотонности функции f следует монотонность функции f^* .

23. Найдите все монотонные линейные функции.

24. Постройте пример базиса в классе P_2 , состоящего из трех функций.

25. Постройте СФЭ, реализующую функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ ($n \geq 2$) со сложностью $4(n-1)$.

26. Составьте контактные схемы для булевых функций (учитывая, что $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$):

- а) $\bar{x} \vee x(y \vee z)$
 б) $(x \rightarrow y)(y \rightarrow z)$
 в) $(x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$
 г) $(x \rightarrow y) \rightarrow \bar{x}(y \vee z)$
 д) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow \bar{x})$

27. Составить логическое выражение по заданной логической схеме.

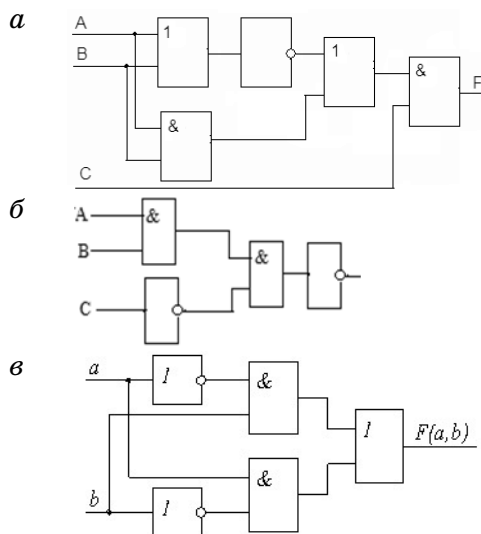
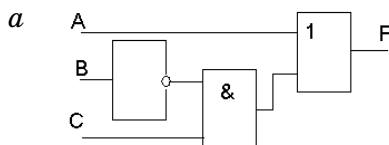


Рис. 1

28. Составить логическое выражение по заданной логической схеме.



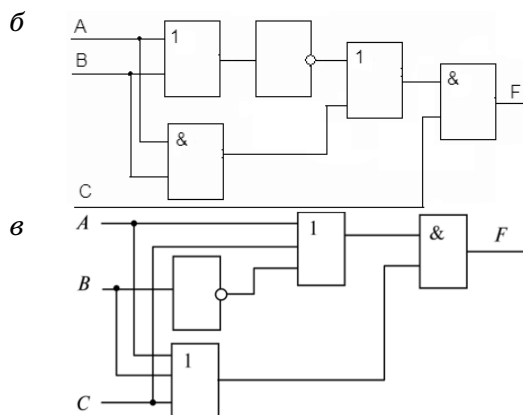


Рис. 2

29. Постройте сокращенную, тупиковые и минимальные **ДНФ** для функции $f(x, y, z)$, заданной двоичной строкой **(10111101)**.

Глава 2.

ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. Алфавит, формулы, система аксиом и правила вывода исчисления высказываний

В алгебре высказываний был описан класс общезначимых формул, выражающих законы алгебра логики при помощи понятия истинностного значения. В аксиоматической теории L (т.е. в исчислении высказываний) законами логики являются доказуемые (выводимые) формулы, и они получаются другими способами, т.е.

- 1) формируется язык исчисления высказываний;
- 2) формируются аксиомы исчисления высказываний;
- 3) формируются в явном виде правила вывода в исчислении высказываний;
- 4) с помощью аксиом и правил вывода исчисления высказываний получают новые доказуемые формулы (теоремы теории L).

Приведем перечень символов, участвующих в описании исчисления высказываний.

1. $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots$, – символьные переменные;
2. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ – логические символы;

3. $(,)$ — вспомогательные символы.

Таким образом, алфавитом исчисления высказываний называется множество вида

$$M = \{x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots, \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}.$$

Для обозначения формул будем использовать прописные латинские буквы $A, B, C, \dots$. Буквы эти не являются символами алфавита исчисления высказываний.

Индуктивное определение формулы исчисления высказываний

1. Каждая символьная переменная является формулой исчисления высказываний.

2. Если A — формула исчисления высказываний, то выражение $(\bar{A})$, тоже является формулой исчисления высказываний.

3. Если A и B формулы исчисления высказываний, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ тоже являются формулами исчисления высказываний.

4. Никаких других формул кроме пунктов 1–3 не существует, т.е. всякое выражение является формулой исчисления высказываний, если оно получено с помощью пунктов 1–3.

Аналогично определяется понятие подформулы формулы исчисления высказываний, как и в алгебре высказываний. Будем учитывать те же соглашения, которые приняли в алгебре высказываний.

Примерами формул исчисления высказываний являются:

$$\begin{aligned} &\overline{x \vee y \rightarrow z \rightarrow k}; \\ &\bar{x} \vee (y \rightarrow zk); \\ &x \rightarrow (y \rightarrow \bar{x}) \end{aligned}$$

и др.

Определение выводимых формул

Следующим шагом в описании аксиоматической теории L является выделение некоторого класса формул, которые будем называть выводимыми формулами в исчислении высказываний.

Определение выводимых формул имеет рекурсивный характер, как и в случае определения формулы. Сначала определяются исходные выводимые формулы, а затем определяются правила, позволяющие из имеющихся выводимых формул получить новые формулы исчисления высказываний. Эти правила называются правилами вывода, а исходные формулы — аксиомами теории L .

Полученные выводимые формулы из системы аксиом с помощью правила вывода будем называть выводом данной формулы из системы аксиом.

2.2. Аксиомы исчисления высказываний

В качестве аксиом исчисления высказываний берется перечень аксиом, приведенный в работе [6], к числу которых относится:

- $A_1: x \rightarrow (y \rightarrow x)$
- $A_2: (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$
- $A_3: xy \rightarrow x$
- $A_4: xy \rightarrow y$
- $A_5: (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow \rightarrow xy))$
- $A_6: x \rightarrow x \vee y$
- $A_7: y \rightarrow x \vee y$
- $A_8: (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$
- $A_9: (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$
- $A_{10}: x \rightarrow \bar{\bar{x}}$
- $A_{11}: \bar{\bar{x}} \rightarrow x$

Нужно отметить, что в приведенной формальной аксиоматической системе логические знаки $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ воспринимаются как символы, а не как логические операции.

Прежде чем определить правила вывода в исчислении высказываний, приведем определение операции подстановки в исчислении высказываний.

2.3. Операция подстановки

Пусть A и B – формулы исчисления высказываний, x – высказывательная переменная, входящая в формулу A .

Результат подстановки в формулу A вместо каждого вхождения переменной x формулы B обозначим через $(A)_B^x$, и она определяется следующим образом:

1. Если формула A есть переменная x , т.е. $A = x$, то $(A)_B^x = B$.

2. Если формула A есть переменная y , т.е. $A = y$, где $y \neq x$, то $(A)_B^x = y$.

3. Если формула A есть $\bar{C}$ и определена подстановка $(C)_B^x$, то

$$(A)_B^x = \overline{(C)_B^x}.$$

4. Если формула A имеет один из видов $C \vee D$, $C \wedge D$, $C \rightarrow D$ и определена подстановка $(C)_B^x$, $(D)_B^x$, то результатами подстановки $(A)_B^x$ соответственно являются формулы: $(C)_B^x \vee (D)_B^x$, $(C)_B^x \wedge (D)_B^x$, $(C)_B^x \rightarrow (D)_B^x$.

Например, пусть заданы формулы $A = x \rightarrow y$ и $B = xy$. Тогда результат подстановки $(A)_B^x$ есть формула $C = xy \rightarrow y$.

Нужно отметить, что результат подстановки в формулу A вместо переменной x формулы B также является формулой исчисления высказываний.

2.4. Правила вывода

1. Правило подстановки.

Пусть A – формула исчисления высказываний, содержащая переменную x , тогда имеет место $\frac{A}{(A)_B^x}$, т.е. формула $(A)_B^x$ является непосредственно следствием формулы A .

2. Правило заключения

Правило заключения записывается так:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B},$$

и данная запись читается так: формула B является следствием формулы $A, A \rightarrow B$ по правилу заключения. При этом формулы $A, A \rightarrow B$ называются посылками, а B — заключением.

2.5. Понятие формального доказательства

Пусть A — произвольная формула исчисления высказываний.

Определение 31. Формальным доказательством формулы A называется конечная последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_k$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Последний член этой последовательности есть формула A , т.е.

$$A = A_k;$$

2. Для всякого i , где $i=1,2,\dots,k$, A_i является либо аксиомой, либо получается из предшествующих ей в этой последовательности формул с помощью одного из двух правил: правила подстановки или правила заключения.

Определение 32. Формула A исчисления высказываний называется доказуемой (теоремой), если она имеет формальное доказательство и обозначается следующим образом:

$$\vdash A$$

и читается « A — доказуемая формула» или « A — теорема в исчислении высказываний».

Нужно отметить, что класс доказуемых формул в исчислении высказываний является подмножеством множества всех формул исчисления высказываний.

Всякая аксиома (A_1 – A_{11}) исчисления высказываний является доказуемой, и ее доказательством является она сама.

Пример 1. Рассмотрим один из основных законов логики — закон тождества $\vdash x \rightarrow x$ и приведем его формальное доказательство, т.е.:

1. $x \rightarrow (y \rightarrow x)$	(A_1)
2. $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$	(A_2)
3. $(x \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x))$	$(A_2)_x^z$
4. $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x)$	$(ПЗ(1,3))$
5. $(x \rightarrow x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow x)$	$(4)_{x \vee y}^y$
6. $x \rightarrow x \vee y$	(A_6)
7. $x \rightarrow x$	$(ПЗ(6,5)).$

Доказанную формулу обозначим **12***, и в дальнейшем будем использовать её наряду с аксиомами для получения новых доказуемых формул.

Примечание. Рядом с каждым пунктом в скобках сокращенно указана используемая аксиома из системы аксиом исчисления высказываний и правил вывода.

Например, запись (ПЗ(6, 5)) означает, что в данном случае использовано правило заключения к формулам пунктов 6, 5; а запись $(4)_{x \vee y}^y$ – результат операции подстановки в формулу пункта 4 и т.д.

При дальнейшем изложении материала будем пользоваться таким способом представления доказательства (выводимости) с соответствующими комментариями.

2.6. Производные правила вывода

1. Производное правило подстановки

$$\frac{\vdash A}{\vdash (A)_B^x}$$

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A$ – последовательность формул является доказательством формулы A .

Рассмотрим следующую последовательность формул: $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A, (A)_B^x$. По определению доказательства формулы данная последовательность есть доказательство формулы $(A)_B^x$.

2. Производное правило заключения

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A$ – есть доказательство формулы A и $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, A \rightarrow B$ – доказательство формулы $A \rightarrow B$.

Рассмотрим следующую последовательность формул:

$$A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, A \rightarrow B, B.$$

По определению доказательство формулы B в данном случае получается по правилу заключения из формул A и $A \rightarrow B$.

3. Правило одновременной подстановки

Правило подстановки обобщается на любое число переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые соответственно заменяются формулами $B_1, \dots, B_n$, т.е.

$$\frac{\vdash A}{\vdash (A)_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}}$$

Доказательство. Если формулы B_i (где $i = 1, 2, \dots, n$) не содержат переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, то порядок, в котором будем делать эти подстановки, безразличен. В противном случае поступим следующим образом. Введем дополнительно высказывательные переменные.

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ – список переменных, обладающих следующими свойствами:

- 1) эти переменные попарно отличны друг от друга;
- 2) они отличаются от всех переменных, входящих в формулу A ;
- 3) они отличаются от всех переменных, входящих в формулы $B_1, B_2, \dots, B_n$.
- 4) они отличаются от всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказательство.

1 шаг. Так как $\vdash A$, т.е. A – доказуемая формула по условию, то по производному правилу подстановки доказуема будет и формула $\vdash (A)_{z_1}^{x_1}$.

2 шаг. Так как $\vdash (A)_{z_1}^{x_1}$, то по производному правилу подстановки доказуемо будет $\left((A)_{z_1}^{x_1} \right)_{z_2}^{x_2}$, то есть доказуема формула $\vdash (A)_{z_1, z_2}^{x_1, x_2}$; и т.д.

n шаг. Так как $\vdash (A)_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}^{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}$, то $\vdash ((A)_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}^{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}})_{z_n}^{x_n}$,

т. е. $\vdash (A)_{z_1, z_2, \dots, z_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} (*)$

$n + 1$ шаг. Так как доказуема формула $(*)$, то $\vdash ((A)_{z_1, z_2, \dots, z_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n})_{B_1}^{x_1}$, т. е.

$\vdash (A)_{B_1, z_2, \dots, z_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}$;

продолжая вышеуказанный процесс, на $2n$ -ом шаге получаем требуемую формулу, т. е.

$2n$ шаг. Получим, что $\vdash (A)_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n}$.

В вышеприведенной процедуре формула $(*)$ играет вспомогательную роль. Если не производить замены высказывательных переменных x_i высказывательными переменными z_i , то при последовательных подстановках подстановка будет производиться и вместо высказывательных переменных x_i , входящих в формулу B_j . Тогда результат операции не будет представлять собой результат одновременной подстановки вместо высказывательных переменных x_i в формулу A .

В качестве примера, где используется операция одновременной подстановки, можно привести доказательство следующей формулы:

$$13^* \quad \vdash \bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow \bar{xy}$$

Формальное доказательство:

1. $\vdash (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$	(A_8)
2. $\vdash (\bar{x} \rightarrow \bar{xy}) \rightarrow ((\bar{y} \rightarrow \bar{xy}) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow \bar{xy}))$	$(A_8)_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{xy}}^{x, y, z}$;
3. $\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$	(A_9)
4. $\vdash xy \rightarrow x$	(A_3)

5. $\vdash (xy \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \overline{xy})$	$(A_9)_{xy,x}^{x,y}$
6. $\vdash \bar{x} \rightarrow \overline{xy}$	(ПЗ(4,5))
7. $\vdash (\bar{y} \rightarrow \overline{xy}) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow \overline{xy})$	(ПЗ (6,2))
8. $\vdash xy \rightarrow y$	(A_4)
9. $\vdash (xy \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \overline{xy})$	$(A_9)_{xy}^x$
10. $\vdash \bar{y} \rightarrow \overline{xy}$	(ПЗ (8,9))
11. $\vdash \bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow \overline{xy}$	(ПЗ(10,7))

2.7. Выводимость формулы исчисления высказываний из совокупности формул (совокупности гипотез)

Пусть имеется множество формул исчисления высказываний, их обозначим через $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} = H$. В частности, $H = \emptyset$.

Формулы из множества H обычно называются посылками или гипотезами.

Определение 33. Выводом формулы A из совокупности гипотез H называется конечная последовательность формул $B_1, B_2, \dots, B_k$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $B_k = A$;

2) для любого i , $(1 \leq i \leq k)$ B_i либо является доказуемой формулой, либо принадлежит H , либо получается из предшествующих ей формул в этой последовательности формул с помощью правила заключения.

Определение 34. Формула называется выводимой из H , если существует ее вывод из совокупности гипотез H , и обозначается

$$H \vdash A.$$

Замечание. В отличие от определения доказательства здесь не участвует операция подстановки. Если A доказуемая формула, то она выводима из пустого множества, однако доказательство формулы A не обязательно является выводом A из пустого множества.

Например, пусть $H = \{A, A \rightarrow B\}$

Покажем, что $H \vdash B$.

Достаточно взять в качестве последовательности формул, составляющих вывод формулы B , последовательность формул:

$$A, A \rightarrow B, B,$$

где формулы $A, A \rightarrow B$ являются гипотезами.

Очевидно, формула B получается из формулы $A, A \rightarrow B$ с помощью правила заключения.

Основные свойства выводимости формулы из совокупности гипотез H

1°. Если $H \vdash A$ и $H \subseteq W$, то $W \vdash A$.

2°. Если $A \in H$, то $H \vdash A$.

3°. Если $\vdash A$ и H — произвольная совокупность гипотез, то $H \vdash A$.

4°. Всякая формула исчисления высказываний, выводимая из пустой совокупности гипотез, является доказуемой формулой.

2.8. Некоторые правила выводимости из совокупности гипотез H

$$1. \frac{H \vdash A, H \vdash A \rightarrow B}{H \vdash B}$$

— общее правило заключения (ОПЗ).

Примечание: в числителе указаны исходные условия утверждение A в знаменателе — результат (заключение).

Доказательство. По условию существует вывод формул A и $A \rightarrow B$ из совокупности H . Пусть последовательность формул $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$, A есть вывод формулы A из совокупности гипотез H и последовательность формул $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, $A \rightarrow B$ — вывод формулы $A \rightarrow B$ из совокупности гипотез H .

Рассмотрим последовательность формул вида:

$$A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, A \rightarrow B, B.$$

Очевидно, данная последовательность формул составляет вывод формулы B из совокупности гипотез H . Сама формула B из этой последовательности формул получается с помощью правила заключения из формулы A и $A \rightarrow B$.

$$2. \quad \frac{H \vdash B}{H \vdash A \rightarrow B}$$

— правило введения посылки (ПВП),

где A и B — произвольные формулы исчисления высказываний

Доказательство

1. $\vdash x \rightarrow (y \rightarrow x)$	(A_1)
2. $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$	$(1)_{B,A}^{x,y}$
3. $H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$	$(3^0 \text{ к } (2))$
4. $H \vdash B$	(по условию)
5. $H \vdash A \rightarrow B$	$(\text{ОПЗ } (4,3))$

$$3. \quad \frac{H \vdash A \rightarrow B, H \vdash B \rightarrow C}{H \vdash A \rightarrow C}$$

— правило силлогизма (ПС).

Доказательство

1. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$	(A_2)
2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$(1)_{A,B,C}^{x,y,z}$
3. $H \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$(3^0 \text{ к } (2))$
4. $H \vdash B \rightarrow C$	(по условию)
5. $H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(ПВП(4))
6. $H \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	(ОПЗ (5,3))
7. $H \vdash A \rightarrow B$	(по условию)
8. $H \vdash A \rightarrow C$	(ОПЗ (7,6))

$$4. \frac{H \vdash A \text{ и } H \vdash B}{H \vdash AB}$$

— правило введения конъюнкции (ПВК).

Доказательство

1. $\vdash (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow xy))$	(A_5)
2. $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow AB))$	$(1)_{A,B,A}^{x,y,z}$
3. $H \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow AB))$	$(3^0 \text{ к } (2))$
4. $\vdash A \rightarrow A$	$(12^*)_A^x$
5. $H \vdash A \rightarrow A$	$(3^0 \text{ к } (4))$
6. $H \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow AB)$	(ОПЗ (5,3))
7. $H \vdash B$	(по условию)
8. $H \vdash A \rightarrow B$	(ПВП (7))

9. $H \vdash A \rightarrow AB$	(ОПЗ (8,6))
10. $H \vdash A$	(по условию)
11. $H \vdash AB$	(ОПЗ (10,9))

$$5. \frac{H \vdash A \rightarrow C \text{ и } H \vdash B \rightarrow C}{H \vdash A \vee B \rightarrow C}$$

— **правило введения дизъюнкции (ПВД).**

Доказательство

1. $\vdash (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$	(A_8)
2. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$	(1) $_{A,B,C}^{x,y,z}$
3. $H \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$	(3 ⁰ к (2))
4. $H \vdash A \rightarrow C$	(по условию)
5. $H \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$	(ОПЗ (4,3))
6. $H \vdash B \rightarrow C$	(по условию)
7. $H \vdash A \vee B \rightarrow C$	(ОПЗ (6,5))

$$6. \frac{H \vdash A \rightarrow B}{H \vdash \bar{B} \rightarrow \bar{A}}$$

— **правило контрапозиции (ПК).**

Доказательство

1. $\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$	(A_9)
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$	(1) $_{A,B}^{x,y}$
3. $H \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$	(3 ⁰ к (2))

4. $H \vdash A \rightarrow B$	(по условию)
5. $H \vdash \bar{B} \rightarrow \bar{A}$	(ОПЗ(4,3)).

7. Правила снятия двойного отрицания (ПСДО)

а. $H \vdash \bar{\bar{A}}$ — ПСДО относительно произвольной формулы ИВ;

$$\frac{H \vdash \bar{\bar{A}}}{H \vdash A}$$

б. $\vdash \bar{\bar{A}} B$ или $H \vdash A \bar{\bar{B}}$ — ПСДО относительно конъюнкции;

$$\frac{\vdash \bar{\bar{A}} B \text{ или } H \vdash A \bar{\bar{B}}}{H \vdash AB}$$

в. $H \vdash \bar{\bar{A}} \vee B$ или $H \vdash A \vee \bar{\bar{B}}$ — ПСДО относительно дизъюнкции;

$$\frac{H \vdash \bar{\bar{A}} \vee B \text{ или } H \vdash A \vee \bar{\bar{B}}}{H \vdash A \vee B}$$

г. $H \vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow B$ или $H \vdash A \rightarrow \bar{\bar{B}}$ — ПСДО относительно импликации.

$$\frac{H \vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow B \text{ или } H \vdash A \rightarrow \bar{\bar{B}}}{H \vdash A \rightarrow B}$$

Доказательство

Доказательство пункта (а) состоит из следующих последовательностей формул:

1. $\vdash \bar{\bar{x}} \rightarrow x$	(A_{11})
2. $\vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow A$	(1) $_A^x$
3. $H \vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow A$	(3 ⁰ к (2))
4. $H \vdash \bar{\bar{A}}$	(по условию)
5. $H \vdash A$	

Доказательство пункта (б):

1. $\vdash xy \rightarrow x$	(A_3)
2. $\vdash \bar{\bar{A}} B \rightarrow \bar{\bar{A}}$	(1) $_{\bar{A}, B}^{x, y}$

3. $\vdash \bar{A} \rightarrow A$	$(A_{11})^x A$
4. $H \vdash \bar{A} B \rightarrow \bar{A}$	$(3^0 \text{ к } (2))$
5. $H \vdash \bar{A} \rightarrow A$	$(3^0 \text{ к } (3))$
6. $H \vdash \bar{A} B \rightarrow A$	$(\text{ПС } (4,5))$
7. $H \vdash \bar{A} B$	(по условию)
8. $H \vdash A$	$(\text{ОПЗ } (7,6))$
9. $H \vdash \bar{A} B \rightarrow B$	$(A_4)_{A,B}^{x,y} \Phi$
10. $H \vdash B$	$(\text{ОПЗ } (7,9))$
11. $H \vdash AB$	$(\text{ПВК } (8,10))$

В виде упражнения докажите самостоятельно пункты 6, 2.

8. Теорема дедукции:
$$\frac{H, A \vdash B}{H \vdash A \rightarrow B}$$

Доказательство

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B_k$ – вывод формулы B из A, H .

Докажем, что для всякого i (где $1 \leq i \leq k$) имеет место следующая выводимость: $H \vdash A \rightarrow B_i$.

Доказательство проведем методом математической индукции.

Шаг 1. Пусть $i = 1$, тогда $H \vdash A \rightarrow B_1$. Формула B_1 по определению выводимости из совокупности гипотез является либо доказуемой формулой, либо принадлежит совокупности гипотез H , либо есть формула A . Рассмотрим всевозможные случаи.

а. Пусть B_1 — доказуемая формула, т.е. $\vdash B_1$. Тогда получаем:

1. $\vdash B_1$ (по условию)
2. $H \vdash B_1$ (3^0 к (1))
3. $H \vdash A \rightarrow B_1$ (ПВП к (2))

б. Пусть $B_1 \in H$.

Тогда

1. $H \vdash B_1$ (2^0)
2. $H \vdash A \rightarrow B_1$ (ПВП к (1)).

в. Пусть $B_1 = A$.

Тогда по правилу подстановки из формулы 12^* получаем, что $H \vdash A \rightarrow A$ (12^*) $_A^x$. Следовательно, $H \vdash A \rightarrow B_1$.

Шаг 2. Предположим, что для некоторого $i < k$ все формулы B_l (где $1 \leq l \leq i$) выводимы из совокупности гипотез H , т.е. $H \vdash A \rightarrow B_l$.

Шаг 3. Тогда докажем, что теорема верна и в случае $i = l + 1$, т.е. имеет место выводимость $H \vdash A \rightarrow B_{l+1}$.

Возможны следующие случаи:

- а. B_{l+1} — есть доказуемая формула;
- б. B_{l+1} — принадлежит совокупности гипотезы H ;
- в. B_{l+1} — есть формула A г. B_{l+1} — получается из предшествующей ей в этой последовательности формул с помощью правила заключения.

Пункты а–в доказываются аналогично первому шагу. Приведем доказательство для последнего случая, т.е. когда B_{l+1} получается из каких-то предшествующих ей формул B_m и $B_m \rightarrow B_{l+1}$ с помощью правила заключения, т.е. имеет место: $H \vdash A \rightarrow B_m$ и $H \vdash B_m \rightarrow B_{l+1}$, то по правилу силлогизма получаем, что $H \vdash A \rightarrow B_{l+1}$.

Следовательно, теорема дедукции верна для любой формулы из заданной совокупности гипотез H .

Следствия из теоремы дедукции:

Следствие 1. Обобщенная форма теоремы дедукции

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B}{\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \dots))}$$

Доказательство

Шаг 1. Обозначим через $H = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$, тогда по теореме дедукции получим:

$$\frac{H, A_n \vdash B}{H \vdash A_n \rightarrow B}$$

Шаг 2. Теперь обозначим через $H = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}\}$, тогда исходное правило приобретает вид:

$$\frac{H, A_{n-1}, A_n \vdash B}{H \vdash A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)}$$

Очевидно, последнее правило верно, так как оно и есть результат применения правила введения посылки к предыдущему пункту.

Продолжая процесс таким же образом, и на n -ом шаге получаем, что исходное правило справедливо.

Следствие 2. Связь между доказуемой и выводимой формулой.

Имеет место:

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}$$

Второе следствие устанавливает взаимосвязь между доказуемыми и выводимыми формулами в исчислении высказываний.

Приведем несколько примеров применения теоремы дедукции на практике. В последующем эти примеры будут использованы для получения новых правил выводимости из совокупности гипотез H .

Пример 1*. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$

Рассмотрим совокупность формул: $H = \{x \rightarrow (y \rightarrow z), y, x\}$.

Докажем, что $H \vdash z$.

Доказательство описываем в виде последовательности формул:

1. $H \vdash x \rightarrow (y \rightarrow z)$	$(2^0);$
2. $H \vdash x$	$(2^0);$
3. $H \vdash y \rightarrow z$	(ОПЗ к (2,1));
4. $H \vdash y$	$(2^0);$
5. $H \vdash z$	(ОПЗ к (4,3)).

Согласно следствию теоремы дедукции получаем :

$\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z)).$

Пример 2*. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z)$

Рассмотрим совокупность формул: $H = \{x \rightarrow (y \rightarrow z), xy\}$.

Докажем, что $H \vdash z$.

Доказательство описываем в виде последовательности формул:

1. $H \vdash x \rightarrow (y \rightarrow z)$	$(2^0);$
2. $H \vdash xy$	$(2^0);$
3. $H \vdash xy \rightarrow x$	$(A_3, 3^0);$
4. $H \vdash x$	(ОПЗ к (2,3));
5. $H \vdash y \rightarrow z$	(ОПЗ к (4,1));
6. $H \vdash xy \rightarrow y$	$(A_4, 3^0);$
7. $H \vdash y$	(ОПЗ к (2,6));
8. $H \vdash z$	(ОПЗ к (7,5)).

Согласно следствию теоремы дедукции получаем:

$$H \vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z).$$

Пример 3*. $H \vdash (xy \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$

Рассмотрим совокупность формул:

$$H = \{xy \rightarrow z, y, x\}.$$

Докажем, что $HH \vdash z$.

Доказательство описываем в виде последовательности формул:

1. $H \vdash xy \rightarrow z$	$(2^0);$
2. $H \vdash x$	$(2^0);$
3. $H \vdash y$	$(2^0);$
4. $H \vdash xy$	(ПВК к (2,3)).
5. $H \vdash z$	(ОПЗ к (4,1)).

Согласно следствию теоремы дедукции получаем :

$$\vdash (xy \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$$

$$9. \quad \frac{H \vdash A \rightarrow B}{H, A \vdash B}$$

— правило удаления импликации (ПУИ).

Доказательство. По условию задан вывод формулы $A \rightarrow B$ из H .

Пусть последовательность $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, A \rightarrow B$ — есть вывод формулы $A \rightarrow B$ из совокупности H .

Рассмотрим следующую последовательность формул исчисления высказываний

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, A \rightarrow B, A, B.$$

По определению выводимости формулы из совокупности гипотез эта последовательность является выводом формулы B из H, A , где формула A — гипотеза. Следовательно, формула B выводима из H, A .

$$10. \frac{H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

— правило перестановки посылок (ППП).

Доказательство

1. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$	(пример 1*)
2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	(1) $\overset{x,y,z}{A,B,C}$
3. $H \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	(3 ⁰ к(2))
4. $H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(по условию)
5. $H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$	(ОПЗ (4, 3))

$$11. \frac{H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}{H \vdash AB \rightarrow C}$$

— правило соединения посылок (ПСП).

Доказательство

1. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z)$	(пример 2*)
2. $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (AB \rightarrow C)$	(1) $\overset{x,y,z}{A,B,C}$
3. $H \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (AB \rightarrow C)$	(3 ⁰ к (2))
4. $H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(по условию)
5. $H \vdash AB \rightarrow C$	(ОПЗ (4,3))

$$12. \frac{H \vdash AB \rightarrow C}{H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

— правило разъединения посылок (ПРП).

Доказательство

1. $\vdash (xy \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$	(пример 3*)
2. $\vdash (AB \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	(1) $\begin{smallmatrix} x,y,z \\ A,B,C \end{smallmatrix}$
3. $H \vdash (AB \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	(3 ⁰ к (2))
4. $H \vdash AB \rightarrow C$	(по условию)
5. $H \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(ОПЗ (4,3))

2.9. Примеры доказуемых формул в исчислении высказываний

Дальнейшее развитие исчисления высказываний связано с получением новых классов доказуемых формул в этой теории.

Каждую из новых доказуемых формул обозначим через n^* , где $n = 12, 13, 14, \dots$.

$$14^* \vdash \overline{xy} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$$

Доказательство

1. $\vdash \overline{x} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	(A ₆) $\begin{smallmatrix} x,y \\ \overline{x},\overline{y} \end{smallmatrix}$
2. $\vdash \overline{y} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	(A ₇) $\begin{smallmatrix} x,y \\ \overline{x},\overline{y} \end{smallmatrix}$
3. $\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})$	(A ₉)
4. $\vdash (\overline{x} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x})$	(3) $\begin{smallmatrix} x,y \\ \overline{x},\overline{x \vee y} \end{smallmatrix}$
5. $\vdash (\overline{y} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{y})$	(3) $\begin{smallmatrix} x,y \\ \overline{y},\overline{x \vee y} \end{smallmatrix}$
6. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x}$	(ПЗ (1,4))
7. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{y}$	(ПЗ (2,5))

8. $\overline{x \vee y} \vdash x$	(ПУИ, ПСДО (6))
9. $\overline{x \vee y} \vdash y$	(ПУИ, ПСДО (7))
10. $\overline{x \vee y} \vdash xy$	(ПВК (8,9))
11. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow xy$	(ТД(10))
12. $\vdash \overline{xy} \rightarrow \overline{x \vee y}$	(ПК (11), ПСДО)

$$15^* \vdash \overline{x y} \rightarrow \overline{x \vee y}$$

Доказательство

1. $\vdash \overline{x y} \rightarrow \overline{x}$	$(A_3)_{x,y}^{x,y}$
2. $\vdash \overline{x y} \rightarrow \overline{y}$	$(A_4)_{x,y}^{x,y}$
3. $\vdash \overline{x} \rightarrow \overline{x y}$	(ПК (1))
4. $\vdash \overline{y} \rightarrow \overline{x y}$	(ПК (2))
5. $\vdash x \rightarrow \overline{\overline{x y}}$	(ПСДО (3))
6. $\vdash y \rightarrow \overline{\overline{x y}}$	(ПСДО (4))
7. $\vdash x \vee y \rightarrow \overline{\overline{x y}}$	(ПВД (5,6))
8. $\vdash \overline{x y} \rightarrow \overline{x \vee y}$	(ПК (7), ПСДО).

$$16^* \vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x y}$$

Доказательство

1. $\vdash x \rightarrow x \vee y$	(A_6)
2. $\vdash y \rightarrow x \vee y$	(A_7)
3. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x}$	(ПК (1))

4. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{y}$	(ПК (2))
5. $\overline{x \vee y} \vdash \overline{x}$	(ПУИ (3))
6. $\overline{x \vee y} \vdash \overline{y}$	(ПУИ (4))
7. $\overline{x \vee y} \vdash \overline{x} \vee \overline{y}$	(ПВК (5,6))
8. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	(ТД (7))

$$17^* \vdash \overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$$

Доказательство

1. $\vdash \overline{x} \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x})$	$(A_1)_{\overline{x}, \overline{y}}^{x, y}$
2. $\overline{x} \vdash \overline{y} \rightarrow \overline{x}$	(ПУИ (1))
3. $\overline{x} \vdash x \rightarrow y$	(ПК(2), ПСДО)
4. $\vdash \overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$	(ТД (3))

$$18^* \vdash x \vee \overline{x} \text{ (закон исключенного третьего)}$$

Доказательство

1. $\vdash \overline{x} \rightarrow (x \rightarrow \overline{y})$	$(17^*)_{\overline{y}}^y$
2. $\vdash \overline{x} \vee x \rightarrow \overline{y}$	(ПСП (1))
3. $\vdash \overline{y} \rightarrow \overline{x \vee x}$	(ПК (2))
4. $\vdash y \rightarrow \overline{x \vee x}$	(ПСДО (3))
5. $\vdash \overline{xy} \rightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	(14^*)
6. $\vdash \overline{xx} \rightarrow x \vee \overline{x}$	$(5)_{\overline{x}, x}^{x, y}$

7. $\vdash y \rightarrow x \vee \bar{x}$	(ПС (4,6))
8. $\vdash (x \rightarrow x) \rightarrow x \vee \bar{x}$	(7) $\begin{matrix} y \\ x \rightarrow x \end{matrix}$
9. $\vdash x \rightarrow x$	(12*)
10. $\vdash x \vee \bar{x}$	(ПЗ (9,8))

$$19^* \quad \vdash (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{x} \vee y$$

Доказательство. Обозначим $H = \{x \rightarrow y\}$ и докажем, $H \vdash \bar{x} \vee y$, чтобы затем воспользоваться следствием 1 теоремы дедукции.

Ниже приведем доказательство в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash x \rightarrow y$	(2°)
2. $H \vdash y \rightarrow \bar{x} \vee y$	((A ₇) $\frac{x}{\bar{x}}, 3^0$)
3. $H \vdash x \rightarrow \bar{x} \vee y$	(ПС (1,2))
4. $H \vdash \bar{x} \rightarrow \bar{x} \vee y$	((A ₆) $\frac{x}{\bar{x}}, 3^0$)
5. $H \vdash x \vee \bar{x} \rightarrow \bar{x} \vee y$	(ПВД (3,4))
6. $H \vdash x \vee \bar{x}$	(18*, 3°)
7. $H \vdash \bar{x} \vee y$	(ОПЗ (6,5)).
8. $x \rightarrow y \vdash \bar{x} \vee y$	$H = x \rightarrow y$
9. $\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{x} \vee y$	(ТД(8))

$$20^* \vdash \bar{x} \vee y \rightarrow (x \rightarrow y)$$

Доказательство

1. $\vdash \bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$	(17*)
2. $\vdash y \rightarrow (x \rightarrow y)$	$(A_1)_{y,x}^{x,y}$
3. $\vdash \bar{x} \vee y \rightarrow (x \rightarrow y)$	(ПВД (1,2))

$$21^* \vdash x \rightarrow (y \rightarrow xy)$$

Доказательство. Обозначим $H = \{x, y\}$ и докажем, что имеет место $H \vdash xy$, чтобы затем воспользоваться следствием 1 теоремы дедукции.

Ниже приведем доказательство в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash x$	(2^0)
2. $H \vdash y$	(2^0)
3. $H \vdash xy$	(ПВК (1,2)).
4. $x, y \vdash xy$	$H=x, y$
5. $\vdash x \rightarrow (y \rightarrow xy)$	(следствие 1 ТД(4))

$$22^* \vdash (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow x)$$

Доказательство. Обозначим $H = \{\bar{x} \rightarrow y, \bar{x} \rightarrow \bar{y}\}$ и докажем, что имеет место $H \vdash x$, чтобы затем воспользоваться следствием 1 теоремы дедукции.

Ниже приведем доказательство в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash \bar{x} \rightarrow y$	(2^0)
2. $H \vdash \bar{x} \rightarrow \bar{y}$	(2^0)

3. $H, \bar{x} \vdash y$	(ПУИ (1))
4. $H, \bar{x} \vdash \bar{y}$	(ПУИ (2))
5. $H, \bar{x} \vdash \bar{y}y$	(ПВК (4,3))
6. $H \vdash \bar{x} \rightarrow \bar{y}y$	(ТД(5))
7. $H \vdash \bar{y}y \rightarrow \bar{x}$	(ПК (6))
8. $H \vdash \bar{y}y \rightarrow x$	(ПСДО (7))
9. $H \vdash \bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow \bar{x}y$	(13*, 3 ⁰)
10. $H \vdash y \vee \bar{y} \rightarrow \bar{y}y$	(9) _y ^x
11. $H \vdash y \vee \bar{y} \rightarrow x$	(ПС (10,8))
12. $H \vdash y \vee \bar{y}$	((18*) _y ^x , 3 ⁰)
13. $H \vdash x$	(ОПЗ (12,11)).
14. $\vdash (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow x)$	(следствие 1 ТД(13))

Формула **22*** позволяет легко получить так называемое правило косвенного доказательства (доказательство от противного).

23. Правило косвенного доказательства (ПКД).

$$\frac{H, \vdash B \text{ и } H, \bar{A} \vdash \bar{B}}{H \vdash A}$$

Доказательство

1. $\vdash (\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow ((\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow x)$	(22*)
2. $\vdash (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow A)$	(1) _{A,B} ^{x,y}

3. $H, \bar{A} \vdash B$	(по условию)
4. $H \vdash \bar{A} \rightarrow B$	(ТД(3))
5. $H \vdash (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow A$	(ОПЗ (4,2))
6. $H, \bar{A} \vdash \bar{B}$	(по условию)
7. $H \vdash \bar{A} \rightarrow \bar{B}$	(ТД(6))
8. $H \vdash A$	(ОПЗ (7,5)).

2.10. Исследование исчисления высказываний

Рассматриваемое исчисление высказываний L обладает следующими свойствами.

1. Непротиворечивость исчисления высказываний
2. Полнота исчисления высказываний.
3. Алгоритмическая разрешимость исчисления высказываний.
4. Независимость системы аксиом исчисления высказываний.

Прежде чем говорить об основных свойствах исчисления высказываний, напомним о взаимосвязи между формулами алгебры высказываний и формулами исчисления высказываний.

Из определения понятия формул в исчислении высказываний следует, что если всякую формулу исчисления высказываний рассматривать содержательно (т.е. буквы могут принимать значение 0 или 1; символами логических операций являются: $\wedge, \vee, \bar{}, \rightarrow$), то она является формулой алгебры высказываний.

И наоборот, всякая формула, не содержащая 0 или 1, если смотреть на нее формально (т.е. не вкладывать

никакого смысла ни в буквы, ни в операции), будет являться формулой исчисления высказываний.

Интерпретацией языка исчисления высказываний называется конечное множество вида $M = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ и функция вида $f: M \rightarrow M$, соответствующая символу отрицание $\neg$, и три функции вида $f: M^2 \rightarrow M$, соответствующие символам $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Среди всех интерпретаций выделяют главную интерпретацию.

Главная интерпретация — это множество вида $M = \{0, 1\}$ и заданные на нем стандартные логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание, соответствующие символам $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$.

Таким образом, главная интерпретация языка исчисления высказываний берется из алгебры высказываний.

Теорема 11. Всякая доказуемая формула исчисления высказываний (ИВ) является общезначимой в главной интерпретации.

Доказательство. Так как всякая доказуемая формула в ИВ получается с участием каких-либо аксиом ИВ и правил вывода, следовательно, нетрудно показать, что всякая аксиома ИВ является общезначимой формулой в главной интерпретации ИВ и правила вывода сохраняют свойство общезначимости в этой интерпретации.

Таким образом, рассмотрим два случая:

1. Покажем, что всякая аксиома исчисления высказываний является общезначимой (тавтологией) в главной интерпретации.

2. Покажем, что операция подстановки сохраняет свойство «быть тавтологией».

3. Покажем, что правило заключения сохраняет свойство «быть тавтологией».

Рассмотрим каждый пункт отдельно:

1. Проверим на общезначимость аксиому A_9 : $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$.

Для этого составляем таблицу истинности.

Таблица 47

x	y	$x \rightarrow y$	$\bar{y} \rightarrow \bar{x}$	$(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Как следует из таблицы, она является общезначимой формулой в алгебре высказываний. Остальные аксиомы проверяются аналогично.

2. Пусть A – тавтология.

Покажем, что $(A)^x_B$ — тоже является тавтологией.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, x$ – список переменных для формулы A . Так как A – тавтология, то для любых значений переменных она принимает значение 1, следовательно, результат подстановки $(A)^x_B$ также будет истинным.

3. Пусть $A, A \rightarrow B$ — тавтологии в главной интерпретации. Тогда покажем, что B — тоже является тавтологией в главной интерпретации.

Введем обозначения $A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \beta$, т.е. значения формулы A на заданном двоичном наборе, где β принимает одно из двух значений — 0 или 1. Докажем

от противного, т.е. предположим, что при исходных условиях формула B не является тавтологией в главной интерпретации. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – список переменных для формул A, B . Тогда существует такой двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на котором формула B принимает значение 0, т.е.

$$B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0.$$

Следовательно, получаем, что

$$A_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \rightarrow B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1 \rightarrow 0 = 0,$$

т.е. получили противоречие. Таким образом, правило заключения сохраняет свойство «быть тавтологией» в главной интерпретации.

II. Пусть A — доказуемая формула в исчислении высказываний, т.е. $\vdash A$.

Покажем, что A является общезначимой в главной интерпретации.

Так как A — доказуемая формула, то существует ее доказательство, т.е.

$$A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k,$$

где A_i ($1 \leq i \leq k$) по определению формального доказательства формулы исчисления высказываний либо является аксиомой, либо получается из предшествующих ей формул с помощью операции подстановки или правила заключения. Так как выше было доказано, что каждая аксиома является общезначимой в главной интерпретации и правило подстановки и правило заключения сохраняют свойство общезначимости формулы исчисления высказываний, то очевидно формула A является общезначимой в главной интерпретации.

Определение 35. Исчисление высказываний называется непротиворечивым, если в нем нет таких формул A , для которых доказуема и она сама, и ее отрицание.

Теорема 12. Исчисления высказываний непротиворечивы.

Доказательство. Каждую формулу исчисления высказываний будем рассматривать как формулу алгебры высказываний.

Очевидно, что все формулы, выводимые в исчислении высказываний и рассмотренные как формулы алгебры высказываний, являются общезначимыми, т.е. принимают значение «истина» при всех значениях переменных высказываний, входящих в формулы.

Нетрудно показать, что все аксиомы исчисления высказываний являются таковыми. Правило подстановки и правило заключения тоже сохраняют свойство общезначимости. Таким образом, применяя к общезначимым формулам правила вывода, мы получаем также общезначимые формулы. Отсюда следует, что все выводимые формулы исчисления высказываний, рассматриваемые как формулы алгебры высказываний, являются общезначимыми. В таком случае очевидно, что если формула A выводима в исчислении высказываний, то формула $\bar{A}$ не может быть выводима, так как A – общезначимая формула, а $\bar{A}$, наоборот, принимает значение «ложь» при всех значениях входящих в нее переменных высказываний. Следовательно, исчисление высказываний непротиворечиво.

2.11. Полнота исчисления высказываний

Доказывая непротиворечивость и полноту исчисления высказываний, мы показали, что всякая формула, доказуемая (выводимая) в исчислении высказываний, является общезначимой, если рассматривать ее как формулу алгебры высказываний.

Возникает вопрос: является ли всякая общезначимая формула алгебры высказываний выводимой в исчислении высказываний? В этом заключается проблема полноты в широком смысле для исчисления высказываний.

Данная проблема имеет положительное решение для исчисления высказываний.

Определение 36. Исчисление высказываний называется полным в широком смысле, если любая общезначимая формула в его главной интерпретации является доказуемой формулой в исчислении высказываний.

Определение 37. Исчисление высказываний называется полным в узком смысле, если добавление к его аксиомам в качестве новой аксиомы всякой недоказуемой формулы приводит к противоречивому исчислению высказываний.

Теорема 12. Всякая общезначимая формула алгебры высказываний является доказуемой (выводимой) формулой в исчислении высказываний.

Прежде чем доказать теорему о полноте в широком смысле, докажем важную лемму, так называемую лемму о выводимости. Для этого нам понадобятся следующие обозначения:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0 \end{cases} \quad A^\beta = \begin{cases} A, & \text{если } \beta = 1 \\ \bar{A}, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Лемма о выводимости

Пусть A — произвольная формула исчисления высказываний и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — список переменных для формулы A , тогда имеет место следующая выводимость:

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash A^\beta,$$

где $\beta = |A|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ — значение формулы A на наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пример. Предположим, что задана формула A :
 $A = x_1 \bar{x}_2 \rightarrow x_3$

Рассмотрим значение формулы на наборе (101).

Исходя из леммы получим, что $x_1, \bar{x}_2, x_3 \vdash x_1 \bar{x}_2 \rightarrow x_3$, поскольку значение $A_{(1,0,1)} = 1$.

Если взять набор (1,0,0), то результат будет:
 $x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \vdash x_1 \bar{x}_2 \rightarrow x_3$, поскольку значение $A_{(1,0,0)} = 0$.

Доказательство леммы. Доказательство проведем индукцией по числу k вхождений логических связок в формулу A .

Если $k=0$, то A — высказывательная переменная x_i , где $1 \leq i \leq n$ и утверждения леммы сводится к $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash x_i^\beta$, где $\beta = |x_i|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \alpha_i$.

Следовательно $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash x_i^{\alpha_i}$.

Это справедливо по свойству 2^0 о выводимости формулы из совокупности гипотез. Допустим, что лемма верна для всех $j < k$.

Случай 1. A имеет вид $B_1 B_2$. Число логических связок в B_1 и B_2 очевидно меньше k .

Возможны два случая:

$$1a) |B_1 B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1;$$

$$1b) |B_1 B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0.$$

Случай 1a) $|B_1 B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$.

$|B_1 B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$ тогда и только тогда, когда $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$ и $|B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$. По предположению индукции утверждение леммы верно для формул B_1 и B_2 . Следовательно, имеют место:

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash B_1$$

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash B_2$$

Применяя правило введения конъюнкции к указанным выше утверждениям, мы получаем:
 $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash B_1 B_2$.

Случай 1b) $|B_1 B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$. Это справедливо, когда одна из формул B_1 или B_2 неистинна, т.е. $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$ или $|B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$.

Пусть $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$. По предположению индукции имеем $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \bar{B}_1$.

Имеет место следующее правило:

$$\frac{H \vdash \bar{B}_1}{H \vdash \overline{B_1 B_2}}$$

Доказательство представим в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash B_1 B_2 \rightarrow B_1$	$((A_3)_{B_1, B_2}^{x, y}, 3^0)$
2. $H \vdash \bar{B}_1 \rightarrow \overline{B_1 B_2}$	(ПК (1))
3. $H \vdash \bar{B}_1$	(по условию)
4. $H \vdash \overline{B_1 B_2}$	(ОПЗ(3,2))

Аналогично доказывается случай:

$$\frac{H \vdash \bar{B}_2}{H \vdash \overline{B_1 B_2}}$$

Случай 2. A имеет вид $B_1 \vee B_2$: возможны два случая:

$$2a) |B_1 \vee B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1;$$

$$2b) |B_1 \vee B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0.$$

Случай 2a) $|B_1 \vee B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$ это верно в случае, когда $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$ или $|B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$.

Пусть $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1$.

По предположению индукции имеем

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash B_1.$$

Имеет место следующее правило:

$$\frac{H \vdash B_1}{H \vdash B_1 \vee B_2}$$

Доказательство представим в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash B_1 \rightarrow B_1 \vee B_2$	$((A_6)_{B_1, B_2}^{x, y}, \exists^0 \text{ из } H)$
2. $H \vdash B_1$	(по условию)
3. $H \vdash B_1 \vee B_2$	(ОПЗ (1)).

Случай 2б) $|B_1 \vee B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$, тогда и только тогда, когда значение формул B_1 и B_2 равно 0, т.е. $|B_1|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$ и $|B_2|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 0$. По предположению индукции утверждение леммы верно для формул B_1 и B_2 , т.е.

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} &\vdash \bar{B}_1 \\ x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} &\vdash \bar{B}_2. \end{aligned}$$

Имеет место, следующее правило:

$$\frac{H \vdash \bar{B}_1, H \vdash \bar{B}_2}{H \vdash \overline{B_1 \vee B_2}}$$

Доказательство представим в виде последовательности утверждений:

1. $H \vdash \bar{B}_1$	(по условию)
2. $H \vdash \bar{B}_2$	(по условию)
3. $H \vdash \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2$	(ПВК (1,2))
4. $H \vdash \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2 \rightarrow \overline{B_1 \vee B_2}$	$(15^*)_{B_1, B_2}^{x, y}$
5. $H \vdash \overline{B_1 \vee B_2}$	(ОПЗ (3,4)).

Таким образом, доказали, что лемма верна для всякой формулы исчисления высказываний. Аналогично доказывается случай, когда A имеет вид: $B_1 \rightarrow B_2$ и $\bar{B}_1$.

В виде упражнения докажите это самостоятельно.

Доказательство теоремы 12. Пусть A — произвольная формула алгебры высказываний, которая является общезначимой, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ — список переменных формулы A . Докажем, что она является доказуемой формулой в исчислении высказываний.

Так как A — общезначимая формула, следовательно, она принимает значение «истина» при любом наборе значений переменных, входящих в формулу A . Тогда по лемме о выводимости имеет место утверждение:

$$x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n} \vdash A.$$

Докажем, что это утверждение верно.

Рассмотрим произвольный набор длиной $n-1$: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$. Добавляя к этому набору 0 или 1, получим набор из n элементов, из которых формула A выводима.

а) $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, 0)$,

б) $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, 1)$.

В силу леммы о выводимости имеем

а) $x_1^{\beta_1}, \dots, x_{n-1}^{\beta_{n-1}}, \overline{x_n} \vdash A$

б) $x_1^{\beta_1}, \dots, x_{n-1}^{\beta_{n-1}}, x_n \vdash A$.

Обозначим через $H = x_1\beta^1, x_2\beta^2, \dots, x_{n-1}\beta^{n-1}$.

Тогда доказательство представим в виде последовательности утверждений:

1.	$H, \bar{x}_n \vdash A$	(по условию)
2.	$H, x_n \vdash A$	(по условию)
3.	$H \vdash \bar{x}_n \rightarrow A$	(ТД (1))
4.	$H \vdash x_n \rightarrow A$	(ТД (2))
5.	$H \vdash x_n \vee \bar{x}_n \rightarrow A$	(ПВД(4,3))
6.	$H \vdash x_n \vee \bar{x}_n$	$((18^*)_{x_n}^x, 3^0)$
7.	$H \vdash A$	(ОПЗ(6,5)).

Теперь рассмотрим следующий набор: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}$.

Аналогичным образом из данного набора составим два набора длиной $n-1$:

$$\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0$$

$$\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 1$$

и по той же лемме получим:

а) $x_1^{\beta_1}, \dots, x_{n-2}^{\beta_{n-2}}, \bar{x}_{n-1} \vdash A$

б) $x_1^{\beta_1}, \dots, x_{n-2}^{\beta_{n-2}}, x_{n-1} \vdash A$.

Обозначим через $H = x_1\beta^1, x_2\beta^2, \dots, x_{n-2}\beta^{n-2}$.

Тогда доказательство представим в виде последовательности утверждений:

1.	$H, \bar{x}_{n-1} \vdash A$	(по условию)
2.	$H, x_{n-1} \vdash A$	(по условию)
3.	$H \vdash \bar{x}_{n-1} \rightarrow A$	(ТД (1))
4.	$H \vdash x_{n-1} \rightarrow A$	(ТД (2))
5.	$H \vdash x_{n-1} \vee \bar{x}_{n-1} \rightarrow A$	(ПВД(4,3))

6. $H \vdash x_{n-1} \vee \bar{x}_{n-1}$	$((18^*)^x_{x_{n-1}}, 3^0)$
7. $H \vdash A$	(ОПЗ(6,5))

Продолжая процесс таким же образом, на n -ом шаге получим, что A — доказуемая формула, т.е. $\vdash A$.

Теорема 13. Исчисление высказываний является полным в узком смысле.

Доказательство. Для доказательства будем использовать конъюнктивную нормальную форму.

Пусть A — произвольная недоказуемая формула в ИВ L . Добавляя ее к системе аксиом ИВ L , получим новую систему аксиом исчисления высказываний, которую обозначим через L' . Докажем, что исчисления высказываний L' противоречиво.

Так как по предположению A — недоказуемая формула в исчисления высказываний L , следовательно, она необщезначима в главной интерпретации исчисления высказываний, т.е. существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на котором формула A принимает значение ложь.

Рассмотрим следующую последовательность формул:

$$\underbrace{(x \vee \bar{x})^{\alpha_1}}_{B_1}, \underbrace{(x \vee \bar{x})^{\alpha_2}}_{B_2}, \dots, \underbrace{(x \vee \bar{x})^{\alpha_n}}_{B_n}.$$

Легко можно показать, что для всякого i , где $i = 1, 2, \dots, n$, имеет место:

$$|B_i|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = |(x \vee \bar{x})^{\alpha_i}|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = 1^{\alpha_i} = \alpha_i.$$

Рассмотрим формулу $(A)_{B_1, \dots, B_n}^{x_1, \dots, x_n}$ и ее отрицание $\overline{(A)_{B_1, \dots, B_n}^{x_1, \dots, x_n}}$.

Очевидно, формула $\overline{A(B_1, \dots, B_n)}$ зависит от всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Покажем что $\overline{A(B_1, \dots, B_n)}$ является общезначимой формулой в главной интерпретации исчисления высказываний.

$$|A(B_1, \dots, B_n)|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \overline{A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \overline{0} = 1.$$

Так как формула $\overline{A}^{x_1, \dots, x_n}_{B_1, \dots, B_n}$ является тавтологией в главной интерпретации, следовательно, она доказуема в L . Следовательно, она доказуема в L' . По условию A – доказуемая формула в L' , тогда $A^{x_1, \dots, x_n}_{B_1, \dots, B_n}$ доказуема в L' по правилу одновременной подстановки. Следовательно, L' – противоречиво.

Проблема разрешимости ИВ Проблема разрешимости для исчисления высказываний заключается в следующем: *существует ли алгоритм, позволяющий по любой формуле ИВ определить, является ли она доказуемой в ИВ?*

В исчислении высказываний такой алгоритм существует.

Так как класс доказуемых формул ИВ совпадает с классом тавтологий алгебры высказываний (AB), то имеется алгоритм, выясняющий, является ли формула тавтологией или нет.

2.12. Независимость системы аксиом исчисления высказываний

Определение 38. Аксиома A называется независимой, если ее нельзя вывести из остальных аксиом исчисления высказываний с помощью правил вывода исчисления высказываний.

Определение 39. Система аксиом исчисления высказываний называется независимой, если каждая

аксиома этой системы является независимой, в противном случае система аксиом называется зависимой.

Ясно, что зависимая система аксиом в некотором смысле менее совершенна, чем независимая, так как она содержит лишние аксиомы. На первый взгляд кажется, что вопрос о независимости системы аксиом мало важен и имеет значение только с точки зрения технического удобства. Однако это не всегда так. Вопрос о независимости одной аксиомы некоторой системы от других аксиом этой же системы часто бывает равносильным вопросу о возможности заменить без противоречия в рассматриваемой системе данную аксиому ее отрицанием. В качестве примера можно отметить вопрос о независимости пятого постулата Евклида в системе аксиом евклидовой геометрии. Этот вопрос, как известно, имел большое значение в развитии математики.

Теорема 14. Всякая аксиома исчисления высказываний (теории L) является независимой.

Доказательство. Для доказательства независимости некоторой аксиомы A исчисления высказываний поступим следующим образом:

1. Через F обозначим множество всех формул исчисления высказываний.

2. Выбираем свойство S таким образом, чтобы одни формулы исчисления высказываний обладали этим свойством, другие — нет, и далее свойство S должно удовлетворять следующим условиям:

а) аксиома A не обладает свойством S , а остальные аксиомы исчисления высказываний обладают этим свойством;

б) правила вывода исчисления высказываний сохраняют свойство S .

Тогда аксиома A является независимой, иначе, если A была бы зависима от остальных аксиом, то ее можно

было бы получить из них с помощью правил вывода. Следовательно, тогда бы аксиома A обладала свойством S , но по условию она не должна обладать свойством S .

Возникает вопрос: как подобрать свойство S ?

Оно подбирается с помощью интерпретации ИВ.

Теперь переходим к доказательству независимости аксиом ИВ L . Для этого нам необходимо построить 11 моделей с указанными свойствами S по одной для каждой аксиомы. Независимость аксиом $A_3 — A_{11}$ доказывается относительно просто. Это связано с тем, что при построении модели для данных аксиом достаточно изменить в главной интерпретации некоторым образом определение только того логического оператора, который описывает данная аксиома.

В силу того что логический оператор $\rightarrow$ входит во все 11 аксиом ИВ, при построении моделей для аксиом A_1 и A_2 изменения могут затронуть все логические операторы.

Рассмотрим доказательство независимости аксиомы A_3 , т.е. $xy \rightarrow x$. В качестве интерпретации берем множество $M = \{0, 1\}$. Логические операции, кроме конъюнкции, определяются так же, как в главной интерпретации, а конъюнкцию определим следующим образом:

$$xy = y. \quad (*)$$

В этой интерпретации определим основные логические операции следующим образом (см. таблицу 48).

Таблица 48

x	y	xy	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$\bar{x}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

В качестве свойства S берем «быть истинной» в рассматриваемой модели.

а) Нетрудно проверить, что аксиомы $A_1, A_2, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ удовлетворяют свойству S .

Покажем, что аксиома A_4 : $xy \rightarrow y$, истина в нашей модели.

Используя равенство (*), получим: $y \rightarrow y$,

т.е. это есть результат подстановки в формулу (12*) вместо переменной x переменной y . Соответственно данной модели, она является общезначимой формулой, следовательно, аксиома A_4 обладает свойством S .

Рассмотрим теперь аксиому A_5 :

$$(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow xy)).$$

Используя равенство (*), получим:

$$(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow y)).$$

Нетрудно показать, что данная формула является общезначимой в рассматриваемой модели, так как формула $(z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow y)$ есть результат подстановки в формулу (12*). Следовательно, тоже обладает свойством S .

Проверим аксиому A_3 : $xy \rightarrow x$.

С учетом равенства (*) получим: $y \rightarrow x$.

И нетрудно проверить, что она не является общезначимой формулой в этой модели, так как при $x = 0, y = 1$ она принимает значение «ложь», следовательно, аксиома A_3 не обладает свойством S .

б) Покажем, что правила вывода сохраняют свойство S .

Проверим сначала правило подстановки.

Пусть формула A обладает свойством S , т.е. она является общезначимой формулой в этой модели. Тогда

$(A)_B^x$ — также будет общезначимой формулой в этой

интерпретации, т.е. операция подстановки сохраняет свойство S .

Проверим правило заключения.

Пусть $\frac{A \equiv 1, A \rightarrow B \equiv 1}{B \equiv 1}$ и $x_1, \dots, x_n$ — список переменных для формул A и B .

Докажем от противного. Предположим, что существует бинарный набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, при котором формула B принимает значение «ложь», т.е. $|B|_\alpha = 0$. Тогда получим, что $|A \rightarrow B|_\alpha = 0$, что противоречит условию. Следовательно, правило заключения тоже сохраняет свойство S .

Таким образом, мы доказали, что аксиома A_3 является независимой аксиомой исчисления высказывания.

Аналогичным образом доказываются независимость аксиом A_4 – A_{11} (см. таблицу 49).

Для доказательства независимости аксиом A_1 и A_2 потребуется использовать другую интерпретацию, например, для доказательства независимости аксиомы A_2 будем использовать $M = \{0, 1, 2\}$.

В этой интерпретации определим основные логические операции следующим образом (см. таблицу 50).

Теперь докажем, что аксиома A_2 является независимой.

При этом в качестве свойства S берем «быть тождественной истинной» в этой интерпретации.

Тогда докажем, что все аксиомы ИВ, кроме A_2 , в данной интерпретации являются общезначимыми, т.е. обладают свойством S .

Покажем, например, что аксиома A_1 : $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ — обладает свойством S .

В случае, когда $x = 0, x = 1$, формула (аксиома A_1) независимо от y принимает значение «истина», т.е.

Таблица 49

Аксиомы	Свойство S	Исключительная операция
$A_4 : xy \rightarrow y$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$xy = x$
$A_5 : (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow xy))$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$xy = 0$
$A_6 : x \rightarrow x \vee y$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$x \vee y = y$
$A_7 : y \rightarrow x \vee y$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$x \vee y = x$
$A_8 : (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$x \vee y = 1$
$A_9 : (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$\bar{x} = x$
$A_{10} : x \rightarrow \bar{x}$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$\bar{x} = 0$
$A_{11} : \bar{x} \rightarrow x$	«БЫТЬ $\equiv 1$ »	$\bar{x} = 1$

Таблица 50

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$\bar{x}$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	
0	2	0	2	1	
2	0	0	2	2	2
2	1	2	1	1	
1	2	2	1	2	
2	2	2	2	1	

обладает свойством S , а в случае $x = 2$ значение формулы зависит от значения y . Рассмотрим все возможные значения y : $y = 0, y = 1, y = 2$. Тогда формула соответственно каждому случаю принимает значение 1:

$$2 \rightarrow (0 \rightarrow 2) = 1$$

$$2 \rightarrow (1 \rightarrow 2) = 1$$

$$2 \rightarrow (2 \rightarrow 2) = 1$$

Таким образом, аксиома A_1 обладает свойством S .

Аналогичным образом доказывается с учетом таблицы 50, что аксиомы $A_3 - A_{11}$ обладают свойством S .

Нетрудно показать, что правила вывода сохраняют свойство S .

Покажем, что аксиома A_2 не обладает свойством S .

Для этого достаточно рассмотреть значение данной аксиомы на наборе $(2, 2, 0)$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} & [(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))]_{(2,2,0)} = \\ & = (2 \rightarrow (2 \rightarrow 0)) \rightarrow ((2 \rightarrow 2) \rightarrow (2 \rightarrow 0)) = 2 \end{aligned}$$

Следовательно, аксиома A_2 не обладает свойством S .

В виде упражнения покажите, что аксиомы $A_1, A_3, A_6, A_7, A_8, A_9$ являются независимыми.

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется операция подстановки в исчислении высказываний?

2. Какие правила вывода рассматриваются в исчислении высказываний?

3. Перечислите производные правила вывода в исчислении высказываний.

4. Что такое формальное доказательство в ИВ? Приведите примеры.

5. Понятие выводимости из совокупности гипотез.

6. Перечислите основные правила выводимости.
7. Приведите примеры использования правила косвенного доказательства в других областях науки.
8. Теорема дедукции. Основные следствия. Приведите примеры использования теоремы дедукции.
9. Объясните связь между доказуемостью и выводимостью в ИВ.
10. Приведите доказательства формул $19^* - 22^*$.
11. Приведите доказательства формул $12^* - 18^*$.
12. Какими свойствами обладает исчисление высказываний?
13. В чем заключается непротиворечивость ИВ?
14. Докажите независимость аксиом $A_5 - A_8$.

Практические задания

- 1) Дана конечная последовательность формул:

$$xy \rightarrow x, xy, x, x \rightarrow (y \rightarrow z), y \rightarrow z, xy \rightarrow x, y, z.$$

Вопрос: какая формула выводима (доказуема) и из каких посылок?

- 2) Постройте выводы

а) $x, y \vdash xy$;

б) $x \vdash x \vee y$;

в) $xy \vdash x$;

г) $x \rightarrow y, y \rightarrow x \vdash \underline{xy}$;

д) $x \rightarrow y, x \rightarrow \underline{y} \vdash \underline{x}$.

- 3) Дано доказательство:

1. $\vdash (xy)z \rightarrow z$ $(A_4)^{x,y}_{xy,z}$

2. $\vdash (xy)z \rightarrow xy$ $(A_3)^{x,y}_{xy,z}$

3. $\vdash xy \rightarrow y$ (A_4)

$$4. \vdash (xy)z \rightarrow y \quad (\text{ПС}(2,3))$$

$$5. (xy)z \vdash z \quad (\text{ПУ} (4))$$

$$6. (xy)z \vdash y \quad (\text{ПУ} (4))$$

Дополните его до доказательства формулы $(xy)z \rightarrow x(yz)$.

4) Дано доказательство:

$$1. \vdash x \bar{y} \rightarrow x \quad (A_3) \frac{y}{y}$$

$$2. \vdash \bar{x} \rightarrow \overline{xy} \quad (\text{ПК}(1))$$

$$3. \vdash x \bar{y} \rightarrow \bar{y} \quad (A_4) \frac{y}{y}$$

и т. д.

Дополните его до доказательства формулы

$$x \bar{y} \rightarrow \overline{x \rightarrow y}.$$

5) Докажите теоремы:

$$а) \vdash xy \rightarrow yx,$$

$$б) \vdash xy \rightarrow x \vee y,$$

$$в) \vdash x \rightarrow x,$$

$$г) \vdash x \vee y \rightarrow y.$$

6) Доказать, что следующие формулы исчисления высказываний являются теоремами ИВ:

$$а) \vdash x \vee xy \rightarrow x;$$

$$б) \vdash xy \rightarrow x \vee y;$$

$$в) \vdash (xy)z \rightarrow x(yz);$$

$$г) \vdash x \vee (y \vee z) \rightarrow (x \vee y) \vee z;$$

$$д) \vdash xy \vee xz \rightarrow x(y \vee z);$$

$$е) \vdash y \vee z \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow y);$$

$$ж) \vdash (\bar{x} \rightarrow x) \rightarrow x;$$

$$з) \vdash ((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x;$$

$$\text{и)} \vdash (x \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow (x \rightarrow y);$$

$$\text{к)} \vdash (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x);$$

$$\text{л)} \vdash ((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow x;$$

$$\text{м)} \vdash (x \rightarrow \bar{x}) \rightarrow \bar{x}.$$

7) Установить выводимость

$$\bar{y}, x \vee y \vdash \overline{x \vee y}.$$

8) Докажите соотношения выводимости:

$$\text{a)} x \vdash x;$$

$$\text{б)} \bar{x}, y \vdash \overline{xy};$$

$$\text{в)} x, y \vdash x \rightarrow y;$$

$$\text{г)} x, y \vdash x \sim y;$$

$$\text{д)} \bar{x}, y \vdash \overline{x \sim y};$$

$$\text{е)} x, \bar{y} \vdash \overline{x \rightarrow y}.$$

9) Докажите правила вывода:

$$\text{a)} xy, x \vdash y; \quad \text{б)} x \rightarrow y, \bar{y} \vdash \bar{x};$$

$$\text{в)} x \rightarrow y \vdash \bar{y} \rightarrow \bar{x}; \quad \text{г)} xy, \bar{y} \vdash \bar{x};$$

$$\text{д)} \overline{x \vee y} \vdash \overline{xy}; \quad \text{е)} \overline{xy} \vdash \overline{x \vee y};$$

$$\text{ж)} \overline{xy} \vdash \overline{x \vee y}; \quad \text{з)} \overline{x \vee y} \vdash \overline{xy};$$

$$\text{и)} \bar{x}, y \vdash x; \quad \text{к)} \bar{x} \vee y \vdash x \rightarrow y;$$

$$\text{л)} \bar{x} \rightarrow y, \bar{x} \rightarrow \bar{y} \vdash x; \quad \text{м)} x \vdash y \vdash \overline{x \vee y}.$$

10) Установите существование доказательств следующих формул:

$$\text{a)} xy \vdash x(x \rightarrow y);$$

$$\text{б)} (y \vdash x) \vdash (x \vee y \vdash x);$$

$$\text{в)} x \vdash (x \sim x);$$

$$\text{г)} x \vee (x \sim x).$$

11) Докажите независимость аксиом:

$$A_5: (z \vdash x) \vdash ((z \vdash y) \vdash (z \vdash xy))$$

$$A_7: y \vdash x \vee y$$

$$A_9: (x \vdash y) \vdash (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$$

12) Докажите независимость аксиомы $A_1: x \vdash (y \vdash x)$

Глава 3.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

3.1. Понятие предиката.

Логические операции над предикатами

Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными. Структура простого высказывания не анализируется, что ограничивает сферу использования данного аппарата. В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь. В логике такие предложения, истинность которых зависит от аргументов, обозначают с помощью предикатов.

Таким образом, предикат — это логическая функция, принимающая при конкретных значениях аргументов значение 1 (истина) или 0 (ложь).

Рассмотрим классический силлогизм Аристотеля. Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Или: все люди — животные. Следовательно, голова человека есть голова животного.

Корректность подобных умозаключений основывается не только на отношениях между входящими в них

простых высказываний, но и на внутренней структуре самих высказываний, на понимании таких выражений, как «все», «всякий» и т.п. В подобных рассуждениях приходится иметь дело с выражениями вида $P(x)$, т.е. x имеет свойство P .

Рассмотрим несколько высказываний:

15 — нечетное число; (1)

8 — нечетное число; (2)

6 не равно 5; (3)

В Самаре жителей больше, чем в Москве ; (4)

В Москве жителей больше, чем в других
городах России. (5)

Все эти высказывания являются элементарными и в алгебре высказываний изображаются одной буквой, и очевидно, что в алгебре высказываний высказывания (2), (4) ложны, а остальные истинны. В то же время ясно, что между высказываниями (1) и (2) или между (4) и (5) сходства гораздо больше, чем между (1) и (4). В высказываниях (1) и (2) речь идет о числах, которым приписывается одно свойство, — нечетность. В высказывании (3) утверждается наличие неравенства между числами. В последних высказываниях говорится о городах и их жителях. Числа и города — это объекты.

Множество объектов, о которых делаются утверждения, называется предметной областью, а сами отношения между n объектами — n -местными предикатами.

Таким образом, одноместный предикат отражает наличие или отсутствие того или иного свойства у объекта. Предикат от нескольких переменных выражает отношение между объектами в рассматриваемый предметный области.

С математической точки зрения, n -местный предикат — это функция $p(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных,

причем переменные принимают значения из предметной области, а функция p принимает одно из двух значений — 0 или 1.

Если в высказывании (1) «нечетность» обозначить через p_1 , то $p_1(15) = u$, а высказывание (2) — $p_1(8) = л$.

В высказывании (3), обозначая «не равно» через p_2 , получим $p_2(6, 5) = u$ и т.д.

Определение 40. Одноместным предикатом на множестве M называется всякое отображение вида $M \rightarrow \{0, 1\}$ и обозначается $p(x)$;

Двуместным предикатом на множестве M называется всякое отображение вида $M \times M = M^2 \rightarrow \{0, 1\}$ и обозначается $p(x, y)$; и т.д.

n -местным предикатом на множестве M называется всякое отображение вида $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_n \rightarrow \{0, 1\}$ и обозначается $p(x_1, \dots, x_n)$.

Множества $M, M^2, \dots, M^n$ соответственно называются областью определения одноместного, двуместного и n -местного предиката, а $\{0, 1\}$ — множество значения предикатов.

Например, пусть в качестве множества M задано множество натуральных чисел N . Обозначим через $p(x)$: « x — простое число».

Тогда в зависимости от значения x логическая функция $p(x)$ принимает либо значение 1 («истина»), либо значение 0 («ложь»). Действительно, при значениях $x = 2, 3, 5, 7, \dots$, функция $p(x) = 1$ и в случае, когда $x = 4, 6, 8, 9, \dots$ $p(x) = 0$.

В данном примере в качестве объекта рассматриваются элементы из множества натуральных чисел, а в качестве свойства взято «простое число», и это свойство обозначено через p .

Пусть теперь на множестве R задан двуместный предикат $p(x, y)$: « x меньше y ».

Данное предложение становится определенным, если x и y заменить действительными числами: «2 меньше 10», « -3 меньше 5», « $\sqrt{2}$ меньше π » и т.д. Как видим, в этом случае рассматривается отношение между элементами в множестве R . Тогда через p в данном случае обозначено отношение между объектами, где в качестве объектов взяты x и y .

Пусть на множестве M (где $M \neq \emptyset$ — произвольное множество) задан предикат $p(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 41. Подмножество множества M , состоящее из тех значений переменных, при которых данный предикат превращается в истинностное высказывание, называется множеством истинности предиката и обозначается следующим образом:

$$M[p(x_i)] = \{x_i \in M \mid p(x_i) = 1\},$$

а дополнение к множеству истинности называется множеством ложности предиката.

Пример 1. Пусть задан двуместный предикат: $p(x, y) = (x < y)$.

Множество истинности предиката является множеством точек R^2 , лежащих выше прямой $y = x$. В остальных точках плоскости предикат $p(x, y) = \text{л.}$

Пример 2. Пусть задан трехместный предикат $p(x, y, z) = (x^2 + y^2 = z^2)$ на множестве Z всех целых чисел. Множество истинности этого предиката состоит из всех троек x, y, z целых чисел, для которых выполняется равенство $x^2 + y^2 = z^2$. Например, в это множество входят тройки (3, 4, 5), (5, 12, 13) и т.д.

Логические операции над предикатами

Над предикатами можно производить те же логические операции, что и над высказываниями.

Пусть на множестве $M \neq \emptyset$ заданы предикаты $p(x)$ и $q(x)$, где в общем случае $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Определение 42. Конъюнкцией предикатов $p(x)$ и $q(x)$ называется новый предикат, обозначаемый $r(x) = p(x) \wedge q(x)$, который принимает значение «истина» для тех и только тех значений $x \in M$, при которых оба исходных предиката $p(x)$ и $q(x)$ превращаются в истинное высказывание.

Пусть M_1 — множество истинности предиката $p(x)$, M_2 — множество истинности предиката $q(x)$, тогда множеством истинности предиката $r(x)$ является множество вида

$$M[r(x)] = M_1 \cap M_2.$$

Определение 43. Дизъюнкцией предикатов $p(x)$ и $q(x)$ называется новый предикат, обозначаемый $s(x) = p(x) \vee q(x)$, который принимает значение «истинна» для тех и только тех значений $x \in M$, при которых хотя бы одно из высказываний (предикатов) $p(x)$ или $q(x)$ истинно.

$$M[s(x)] = M_1 \cup M_2$$

— множество истинности предиката $s(x)$.

Определение 44. Отрицанием предиката $p(x)$ с областью определения M называется предикат с той же областью определения, обозначаемый $\bar{p}(x)$, который принимает значение «истина» для тех и только тех значений $x \in M$, при которых $p(x)$ есть ложное высказывание.

Множеством истинности предиката $\bar{p}(x)$ является множество

$$M[\bar{p}(x)] = M \setminus M_1.$$

Определение 45. Импликацией предикатов $p(x)$ и $q(x)$ называется новый предикат, обозначаемый $z(x) = p(x) \rightarrow q(x)$, который принимает значение «ложь» для тех и только тех значений $x \in M$, при которых предикат $p(x)$ является истинным высказыванием, а $q(x)$ — ложным.

Множество истинности предиката $z(x)$ является множеством вида

$$M[z(x)] = \bar{M}_1 \cup M_2.$$

Определение 46. Эквиваленцией двух предикатов $p(x)$ и $q(x)$ называется новый предикат, обозначаемый $k(x) = p(x) \sim q(x)$, который принимает значение «истина» для тех и только тех значений $x \in M$, при которых предикаты $p(x)$ и $q(x)$ одновременно являются истинными или ложными высказываниями.

Множество истинности предиката $z(x)$ является множеством вида

$$M[k(x)] = (\bar{M}_1 \cup M_2) \cap (\bar{M}_2 \cup M_1).$$

3.2. Операции навешивания кванторов

В логике предикатов кроме операций отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквивалентности рассматриваются и операции навешивания квантора всеобщности и квантора существования.

Пусть на множестве $M \neq \emptyset$ задан одноместный предикат $p(x)$.

Определение 47. Говорят, что предложение вида $\forall x p(x)$ на этом множестве представляет собой истинное высказывание тогда и только тогда, когда $p(x)$ истинно для любого элемента $x \in M$.

Определение 48. Говорят, что предложение $\exists x p(x)$ на множестве M представляет собой истинное высказывание тогда и только тогда, когда $p(x)$ истинно хотя бы для одного элемента $x \in M$.

Пусть на множестве $M \neq \emptyset$ задан произвольный двуместный предикат $p(x, y)$.

Определение 49. Предложение $\forall x p(x, y)$ при заданном $y_0 \in M$ является истинным, т.е. $\forall x p(x, y_0) = 1$ тогда и только тогда, когда $p(x, y_0)$ истинно для любого элемента $x \in M$.

Определение 50. Предложение $\exists x p(x, y)$ при заданном $y_0 \in M$ является истинным, т.е. $\exists x p(x, y_0) = 1$ тогда и только тогда, когда $p(x, y_0)$ истинно хотя бы для одного элемента из множества M .

Таким образом, в результате операции навешивания кванторов (всеобщности или существования) на двуместный предикат получаем одноместный предикат по переменной, на которую квантор не навешен.

Пример. Пусть задан предикат

$$p(y) = \exists x (x < y), \quad \text{где } x, y \in R.$$

Для проверки на истинность предиката поступим следующим образом. Берем произвольный элемент y_0 из множества R , подставляя в данный предикат, получим одноместный предикат:

$$p(x) = (x < y_0).$$

Тогда нетрудно проверить, что выражение $\exists x (x < y_0)$ является истинным высказыванием во множестве R .

Если рассматривать предикат

$$p(y) = (\forall x (x < y)), \quad \text{где } y \in R,$$

то он является ложным во множестве R (*выполните проверку самостоятельно*).

Если множество M , на котором рассматривается предикат $p(x)$, является конечным множеством, т.е. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, то высказывание вида $\forall x p(x)$ равносильно высказыванию $p(x_1) \wedge \dots \wedge p(x_n)$, т.е. имеет место следующее равенство

$$\forall x p(x) = p(x_1) \wedge \dots \wedge p(x_n).$$

Аналогично, если множество M , на котором рассматривается предикат $p(x)$, является конечным множеством, т.е. $M = \{x_1, \dots, x_n\}$, то высказывание вида $\exists x p(x)$ равносильно высказыванию $p(x_1) \vee \dots \vee p(x_n)$, т.е. имеет место следующее равенство

$$\exists x p(x) = p(x_1) \vee \dots \vee p(x_n).$$

Численные кванторы

В математике часто встречаются выражения вида «по меньшей мере n » («хотя бы n »), «не более чем n », « n и только n » («ровно n »), где n – натуральное число.

Эти выражения, называемые численными кванторами, имеют чисто логический смысл; они могут быть заменены равнозначными выражениями, не содержащими числительных и состоящими только из логических терминов и знака $\equiv$.

Пусть $n = 1$. Предложение «По меньшей мере один объект обладает свойством P » имеет тот же смысл, что и предложение «Существует объект, обладающий свойством P », т.е.

$$\exists x (P(x)). \quad (*)$$

Предложение «Не более чем один объект обладает свойством P » равнозначно предложению «Если существуют объекты, обладающие свойством P , то они совпадают», т.е.

$$\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x \equiv y). \quad (**)$$

Предложение «один и только один объект обладает свойством P » равнозначно конъюнкции вышеуказанных предложений (*) и (**).

Отрицание предложений с кванторами

Известно, что часто для отрицания некоторого предложения достаточно добавить к сказуемому этого предложения отрицательную частицу «не». Например, отрицанием предложения «Река x впадает в Черное море» является предложение «Река x не впадает в Черное море». Годится ли этот прием для построения отрицаний предложений с кванторами?

Рассмотрим другой пример. Предложения «Все птицы летают» и «Все птицы не летают» не являются отрицаниями друг друга, так как они оба ложны. Предложения «Некоторые птицы летают» и «Некоторые птицы не летают» не являются отрицанием друг друга, так как они оба истинны. Таким образом, предложения, полученные добавлением частицы «не» к сказуемому предложений «Все x суть P » и «Некоторые x суть P », не являются отрицаниями этих предложений. Универсальным способом построения отрицания данного предложения является добавление словосочетания «неверно, что» в начале предложения. Таким образом, отрицанием предложения «Все птицы летают» является предложение «Неверно, что все птицы летают»; но это предложение имеет тот же смысл, что и предложение «Некоторые птицы не летают». Отрицанием предложения «Некоторые птицы летают» является предложение «Неверно, что некоторые птицы летают», которое имеет тот же смысл, что и предложение «Все птицы не летают».

Условимся отрицание предложения $\forall x(P(x))$ записывать как $\neg \forall x(P(x))$, а отрицание предложения

$\exists x(P(x))$ — как $\bar{\exists}x(P(x))$. Очевидно, что предложение $\bar{\forall}x(P(x))$ имеет тот же смысл, а следовательно, то же значение истинности, что и предложение $\exists x(\bar{P}(x))$, а предложение $\bar{\exists}x(P(x))$ — тот же смысл, что $\forall x(\bar{P}(x))$. Иначе говоря, $\bar{\forall}x(P(x))$ равносильно $\exists x(\bar{P}(x))$; $\bar{\exists}x(P(x))$ равносильно $\forall x(\bar{P}(x))$.

Кванторы общности и существования называют двойственными относительно друг друга. Выясним теперь, как строить отрицание предложения, начинающегося с нескольких кванторов, например, такого: $\forall x\exists y\forall z(P(x, y, z))$.

Последовательно применяя сформулированное выше правило, получим:

$$\begin{aligned}\bar{\forall}x\exists y\forall z(P(x, y, z)) &= \exists x(\bar{\exists}y\forall z(P(x, y, z))) = \\ &= \exists x\forall y(\bar{\forall}z(P(x, y, z))) = \exists x\forall y\exists z(\bar{P}(x, y, z)).\end{aligned}$$

3.3. Язык логики предикатов (ЯЛП)

В язык логики предикатов так же, как в случае алгебры высказываний, входит перечень символов, из которых строятся термы и формулы языка логики предикатов. Они разделяются по группам:

1. — фиксированный предикатный символ;
2. $\forall, \exists, \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow$ — символы логических операций;
3. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — символы предметных переменных;
4. P_j^n , где $j = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ — предикатные символы с указанием местности;
5. f_j^n , где $j = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ — функциональные символы с указанием местности.
6. $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — символы предметных констант.
7. $(,)$ — вспомогательные символы.

Понятия «терм» и «формула» в ЯЛП

Определение 51.

1. Каждая предметная переменная, предметная константа является термом.

2. Если $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы и f_j^n — n местный функциональный символ, то $f_j^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — терм.

3. Всякое выражение в ЯЛП является термом тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью пунктов 1 и 2.

Например, следующие выражения являются термами ЯЛП:

$$f_1^1(c_4); f_1^3(x_1, f_2^1(x_2), c_3); f_1^2(c_1, f_2^4(c_1, x_3, c_1, x_3)).$$

Определение 52. (Формула в ЯЛП)

1. Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ называется формулой ЯЛП.

2. Если $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы и P_j^n — n -местный предикатный символ, то $P_j^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — формула.

3. Если A и B — произвольные формулы ЯЛП, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(\bar{A})$ тоже являются формулами ЯЛП.

4. Если A — формула и x_i — предметная переменная, то $(\forall x_i A)$, $(\exists x_i A)$ тоже являются формулами ЯЛП.

5. Всякое слово в ЯЛП является формулой тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью пунктов 1–4.

Формулы, описанные в пунктах 1, 2, называются элементарными формулами.

Например, следующие выражения являются формулами ЯЛП:

$$P_1^2(f_1^2(c_4, x_1), x_2); P_1^3(x_1, f_1^1(x_2), c_3);$$

$$(\exists x_1 P_1^2(x_1, c_2) \vee (\forall x_2 P_2^1(x_2))).$$

Аналогичным образом, как в алгебре высказываний, определяем понятие подформулы формулы ЯЛП.

Определение 53.

1. Подформулами элементарных формул являются они сами.

2. Если формула имеет вид $(\bar{A})$, то ее подформулой является она сама и все подформулы формулы A .

3. Если формула имеет один из видов $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, то их подформулами являются они сами и все подформулы формул A и B .

4. Если формула имеет вид $(\forall x_i A)$, $(\exists x_i A)$, то их подформулами являются они сами и все подформулы формулы A .

Для упрощения дальнейшего изложения материала принимаем некие соглашения.

1. Внешние скобки можно опускать.

2. Вместо $X \wedge Y$ можно записать XY .

3. Приоритет логических операций задается следующим образом:

$$\langle \forall, \exists, \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow \rangle.$$

Пусть A – произвольная формула алгебры предикатов и x_i — предметная переменная. Тогда в формулах $(\forall x_i A)$, $(\exists x_i A)$ формула A называется областью действия квантора $\forall$ ($\exists$) по переменной x .

Определение 54. Вхождение переменной x_i в формуле A называется связанным, если переменная x_i стоит под знаком квантора или находится в области действия квантора по переменной x_i .

Определение 55. Вхождение переменной x_i в формулу A называется свободным, если оно не является связанным.

Переменная x_i называется свободной (связанной) в формуле A , если существует хотя бы одно свободное (связанное) вхождение переменной x_i в формуле A .

Замечание. Одна и та же переменная в формуле A может быть свободной и связанной.

Пример 1. Пусть задана формула ЯЛП: $P_1^2(x_1, y_1) \rightarrow \forall x_1 Q_1^1(x_1)$, где количество вхождений переменной x_1 в данной формуле равно 3. Причем два раза она входит как связанная и один раз — как свободная переменная. Переменная y_1 в формулу входит один раз как свободная переменная.

Пример 2. Пусть имеется формула ЯЛП:

$$\forall x_2 \left(P_1^1(x_2) \wedge Q_1^2(x_2, f_1^2(x_2, y_1)) \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists z_1 R_1^2(y_1, z_1) \vee S_1^1(f_2^1(x_2))$$

Переменная x_2 входит в формулу пять раз, из них 4 раза она входит как связанная переменная, 1 раз — как свободная переменная; переменная y_1 входит 2 раза как свободная переменная и переменная z_1 входит 2 раза как связанная переменная.

3.4. Операция подстановки в ЯЛП

Пусть A — произвольная формула ЯЛП, x_i — свободная предметная переменная, входящая в формулу A , и t — терм ЯЛП. Тогда результат подстановки в формулу A вместо каждой свободной переменной x_i терма t обозначаем следующим образом: $(A)_t^{x_i}$. Такая подстановка допустима, если выполняется следующее условие: ни одно свободное вхождение переменной x_i в формулу A не должно находиться в области действия никакого квантора по переменным, содержащимся в терме t .

Тогда говорят, что терм t допустим для подстановки в формулу A вместо каждого свободного вхождения переменной x_i .

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $A = P_1^1(x_1) \vee \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2)$ и даны термы соответственно:

a. $t = f_1^2(x_1, x_3)$;

b. $t = f_1^2(x_1, x_2)$.

Нетрудно заметить, что подстановка t в место x_1 в случае (a) допустима, а в случае (b) недопустима.

Результат подстановки в случае (a) является:

$$A = P_1^1(f_1^2(x_1, x_3)) \vee \forall x_2 P_2^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2).$$

Аналогичным образом в алгебре предикатов определяется операция одновременной подстановки, т.е. подстановка вида: $(A)_{t_1, \dots, t_n}^{x_1, \dots, x_n}$.

3.5. Языки первого порядка

Для того чтобы на языке формул выразить какие-то свойства объектов, записать какие-то утверждения некоторой математической теории, достаточно лишь частично использовать множество предикатных и функциональных символов и предметных констант ЯЛП. (Логические символы, т.е. символы: **1.** $\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, =$; **2.** $x_1, x_2, \dots, x_n$ — одинаковы для всех языков первого порядка.) Таким образом, языки первого порядка отличаются друг от друга нелогическими символами. Задать язык первого порядка — это значит задать его нелогические символы, т.е.:

$$\Sigma = \{P_j^n, \dots, f_j^n, \dots, a_1, a_2, \dots\}.$$

При этом в некоторых случаях можно обойтись вовсе без функциональных символов и предметных

констант ЯЛП, в то время как без предикатных символов невозможно построить ни одной формулы.

В языках первого порядка, в отличие от языков более высокого порядка, не допускаются кванторы по предикатным и функциональным символам. Кванторы рассматриваются по предметным переменным. Например, $\forall P \forall x (P(x) \vee \overline{P(x)})$ не является формулой языка первого порядка, она является формулой языка более высокого порядка.

Структура для языка первого порядка Σ

Определение. Структурой t , для языка первого порядка Σ , называется непустое множество M с определенными на нем $p_1^0, p_2^0, \dots, f_1^0, f_2^0, \dots, a^0, a^0, \dots$, соответствующими нелогическим символам языка первого порядка Σ , и обозначается следующим образом:

$$t = \{M, p_1^0, p_2^0, \dots, f_1^0, f_2^0, \dots, a^0, a^0, \dots\}.$$

Каждый нелогический символ языка первого порядка Σ получает в структуре t определенный смысл.

Смысл термина в структуре языка t а) Если терм не содержит предметных переменных, например $f_3(a_1, a_2)$, то ему соответствует конкретное значение $f_3^0(a_1^0, a_2^0)$ в структуре t .

б) Если терм содержит предметную переменную, например $f_3^0(x_1, x_2)$, то в структуре t он выражает функцию $f_3^0(x_1, x_2)$.

Смысл формулы в структуре языка t а) Если формула замкнута, то такая формула в структуре t называется высказыванием.

б) Если формула не замкнута, то такая формула в структуре t представляет собой предикат от тех

свободных переменных, которые в формуле были свободными.

**Понятие оценки для предметных переменных
в структуре t языка первого порядка Σ**

Понятие оценки для предметных переменных в структуре t языка первого порядка Σ вводится с целью замены во всякой незамкнутой формуле из структуры t свободных переменных элементами из множества M с тем, чтобы оценка формулы представляла собой в структуре t высказывание.

Определение. Оценкой предметных переменных в структуре t языка первого порядка Σ называется произвольная последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, где $b_i \in M$, $1 \leq i \leq n$.

Обозначим оценку через u .

Обозначим через $|t|_{m,\sigma}$ значение терма t в структуре t при оценке u .

Тогда для оценки u , значения терма t равно:

1) Если терм t есть предметная константа a_i , то значение этого терма в структуре t при оценке u есть a_i^0 :

$$|t|_{m,\sigma} = |a_i|_{m,\sigma} = a_i^0$$

2) Если терм t есть предметная переменная x_j , то значение этого терма в структуре t при оценке u есть b_j :

$$|t|_{m,\sigma} = |x_j|_{m,\sigma} = b_j$$

3) Если терм представляет собой $f_i(t_1, t_2, \dots, t_{n_i})$ и $|t_1|_{m,\sigma} = t_1^0, \dots, |t_{n_i}|_{m,\sigma} = t_{n_i}^0$, а символ f_i интерпретируется в структуре t как f_i^0 , то значение терма t в структуре t при оценки u есть $f_i^0(t_1^0, \dots, t_{n_i}^0)$, т.е.

$$|t|_{m,\sigma} = f_i^0(t_1^0, \dots, t_{n_i}^0).$$

Определение (истинностное значение формулы в структуре m языка первого порядка Σ при оценке σ).

1. Если формула имеет вид: $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы и $|t_1|_{m,\sigma} = t_1^0$, $|t_2|_{m,\sigma} = t_2^0$, то предложение $t_1 = t_2$ есть истинное высказывание тогда и только тогда, когда $t_1^0 = t_2^0$;

2. Если формула имеет вид $P_j(t_1, t_2, \dots, t_{n_j})$, где $t_1, t_2, \dots, t_{n_j}$ — термы и значения термов $|t_1|_{m,\sigma} = t_1^0, \dots, |t_{n_j}|_{m,\sigma} = t_{n_j}^0$, а символ P_j интерпретируется в структуре m как P_j^0 , то значение терма t в структуре m при оценке σ есть $P_j^0(t_1^0, \dots, t_{n_j}^0)$, т.е. $|t|_{m,\sigma} = P_j^0(t_1^0, \dots, t_{n_j}^0)$.

3. Если формула имеет вид: $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, \overline{A}$ и известны значения формул A и B — $|A|_{m,\sigma}, |B|_{m,\sigma}$, то соответственно имеют место следующие равенства:

$$|A \wedge B|_{m,\sigma} = |A|_{m,\sigma} \wedge |B|_{m,\sigma}$$

$$|A \vee B|_{m,\sigma} = |A|_{m,\sigma} \vee |B|_{m,\sigma}$$

$$|A \rightarrow B|_{m,\sigma} = |A|_{m,\sigma} \rightarrow |B|_{m,\sigma}$$

$$|\overline{A}|_{m,\sigma} = \overline{|A|_{m,\sigma}}.$$

4.1. Если формула имеет вид $\forall x_i A$, то оценка $|\forall x_i A|_{m,\sigma}$ есть истинное высказывание тогда и только тогда, когда формула A истинна в структуре m при любой

оценке σ' предметных переменных отличающихся от оценки σ не более чем на свою i -ую компоненту.

4.2. Если формула имеет вид $\exists x_i A$, то $|\exists x_i A|_{m, \sigma}$ есть высказывание истинное тогда и только тогда, когда формула A истинна в структуре m , хотя бы при одной оценке σ' предметных переменных, отличающихся от оценки σ не более чем на свою i -ую компоненту.

Пример. Рассмотрим в качестве языка первого порядка $\Sigma = \{p^2, f^2, a_1, a_2\}$ и пусть A_1, A_2, A_3 — формулы.

$$\forall x \exists y P(f(x, y), a_1) \quad (A_1)$$

$$\exists z (p(a_2, z) \wedge f(x, z) = y) \quad (A_2)$$

$$\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow \exists z (p(x, z) \wedge p(z, y))) \quad (A_3)$$

1. Рассмотрим истинностные значения формул на структуре $m_1 = \{R, <, +, 0, 3\}$:

A_1 : $\forall x \exists y (x + y < 0) = u$ так как формула замкнута и для любого элемента $x \in R$ всегда существует элемент $y \in R$, для которого высказывание истинно.

A_2 : $\exists z ((3 < z) \wedge (x + z = y)) = S(x, y)$ — двухместный предикат. $S(x, y)$ в структуре m_1 принимает значение «истинно» на тех и только тех парах $\left(x^0, y^0\right)$, которые удовлетворяют условию: $y^0 - x^0 > 3$.

A_3 : $\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z) \wedge (z < y))$ — истинное высказывание. Эта формула выражает свойство плотности множества R .

2. Теперь рассмотрим истинностные значения формул на структуре $m_2 = \{R_+, <, \cdot, 1, 8\}$

A_1 : $\forall x \exists y (x < 1) = u$ — аналогично предыдущему случаю.

$$A_2: \exists z ((8 < z) \wedge (x = y)) = Q(x, y).$$

Предикат $Q(x, y) = u$ на тех парах (x^0, y^0) , для которых $y^0 > 8x^0$.

$A_3: \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)) = u$ (Свойство плотности множества R_+).

Общезначимые и выполнимые формулы языка первого порядка Σ

Определение. Формула A языка первого порядка Σ называется истинной в структуре t языка Σ , если она представляет собой истинное высказывание в структуре t для любой оценки предметной переменной x в этой структуре.

Определение. Формула A языка Σ называется общезначимой, если она истинна в любой структуре t языка Σ .

Определение. Формула A языка первого порядка Σ называется выполнимой в структуре t языка Σ , если она принимает истинное высказывание в структуре t при некоторой оценке предметных переменных x в этой структуре.

Определение. Формула A языка Σ называется выполнимой, если существует структура t языка Σ , в которой она выполнима.

Связь между общезначимыми и выполнимыми формулами

1. Формула A языка первого порядка Σ общезначима тогда и только тогда, когда формула $\bar{A}$ невыполнима.

2. Формула A языка первого порядка Σ выполнима тогда и только тогда, когда формулы $\bar{A}$ необщезначима.

В виде упражнения самостоятельно докажите утверждения 1–2.

Определение. Формулу $\forall x_1, \dots, \forall x_n A$ называют замыканием общности формулы A , где A – формулы языка первого порядка Σ и $x_1, \dots, x_n$ — ее свободные предметные переменные.

Имеет место утверждение: формула A языка Σ называется общезначимой тогда и только, тогда когда ее замыкание общности является общезначимой формулой.

Определение. Формула $\exists x_1, \dots, \exists x_n A$ называется замыканием существования формулы A .

Определение. Формулу A языка первого порядка Σ называют подстановкой в тавтологию, если она получается из некоторой тавтологии логики высказываний подстановкой в нее произвольной формулы языка первого порядка Σ .

Например, берем общезначимую формулу $x \vee \bar{x}$, и пусть A – произвольная формула языка Σ . Тогда по определению получаем формулу $A \vee \bar{A}$, которая общезначима.

Теорема. Подстановка в тавтологию есть общезначимая формула.

Доказательство провести самостоятельно.

Рассмотрим несколько примеров на исследование общезначимости формул языка первого порядка Σ .

Пример 1. Исследуем на свойство общезначимости формулу $\forall x p(x) \rightarrow p(y)$ в языке первого порядка $\Sigma = \{p\}$.

Пусть $m = \{M, p^0\}$ произвольная структура языка $\Sigma = \{p\}$.

Пусть σ произвольная оценка предметных переменных, такая, что свободная переменная y при этой оценке имеет значение y^0 .

Тогда в структуре $m = \{M, p^0\}$ исследуемая формула приобретает вид:

$$\forall x p^0(x) \rightarrow p^0(y^0).$$

Докажем, что это высказывание истинно.

1) Пусть $\forall x p^0(x) = \varepsilon$. Тогда согласно определению операции импликации, получаем истинное высказывание.

2) Пусть $\forall x p^0(x) = u$. Тогда по определению операции квантора всеобщности, $p^0(x) = u$ для любого элемента множества M , следовательно, данное высказывание истинно при $x = y^0$, т.е. $p^0(y^0) = u$.

Таким образом доказали, что $\forall x p^0(x) \rightarrow p^0(y^0) = u$. Значит, это общезначимая формула.

Пример 2. $p(y) \rightarrow \exists x p(x)$ — общезначимая формула.

Доказательство провести самостоятельно.

Пример 3. $p(y) \rightarrow \forall x p(x)$ — не общезначимая формула.

Докажем, что существует структура m и существуют оценки σ , при которых формула принимает ложное значение.

Рассмотрим структуру $m = \{N, p^0\}$, где p^0 — «быть четным числом».

Пусть существует оценка σ такая, что свободная переменная y в этой оценке имеет значение y^0 , где $y^0 = 4$. Тогда получаем ложное высказывание, т.е. $p^0(4) \rightarrow \forall x p^0(x)$. Следовательно, эта формула не общезначима.

В виде упражнения самостоятельно исследуйте, к какому виду формул относятся следующие формулы языка первого порядка:

$$\forall y \exists x p(x, y) \rightarrow \exists x \forall y p(x, y);$$

$$\exists x \exists y (p(x) \wedge p(y));$$

$$p(x) \wedge \bar{p}(x).$$

3.6. Равносильные формулы языка первого порядка

Пусть A и B — формулы языка первого порядка Σ .

Определение. Формулы A и B называются равносильными ($A = B$), если они принимают одинаковые истинностные значения в любой структуре m языка Σ и при любой оценке σ предметных переменных из этой структуры.

Приведем несколько примеров равносильных формул.

Пример 1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$

Формулы $\forall x P(x)$ и $\exists x \overline{P(x)}$ принимают одинаковые истинностные значение в любой структуре m языка первого порядка Σ и для любого σ предметных переменных из этой структуры.

Пусть $m = \{M, P^0\}$, где M — произвольное непустое множество, P^0 — произвольный одноместный предикат.

Так как обе формулы замкнуты, то не требуется оценки σ предметных переменных в структуре.

Рассмотрим всевозможные случаи.

а) Пусть $\overline{\forall x P^0(x)} = u$, тогда докажем, что $\overline{\exists x P^0(x)} = u$.

Из того, что $\forall x P^0(x) = u$, следует $\exists x P^0(x) = l$, следовательно, получаем $\exists x P^0(x) = u$.

б) Пусть $\forall x P^0(x) = l$, тогда докажем, что $\exists x P^0(x) = l$.

Из того, что $\forall x P^0(x) = l$, следует $\exists x P^0(x) = u$. Тогда существует $x_0 \in M$, для которой $P^0(x_0) = l$, следовательно, получаем $\exists x P^0(x) = l$.

Из пунктов а–б следует $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.

Пример 2. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Доказательство. Покажем, что в любой структуре m и для любых значений P°, Q° рассматриваемые формулы принимают одинаковые истинностные значения.

Рассмотрим всевозможные случаи.

а) Пусть $\forall x (P^0(x) \wedge Q^0(x)) = u$, тогда по определению квантора всеобщности получаем: $P^0(x) \wedge Q^0(x) = u$, а это верно тогда и только тогда, когда $P^0(x) = u$ и $Q^0(x) = u$. В силу того, что x является произвольной, получим $\forall x P^0(x) = u$ и $\forall x Q^0(x) = u$, отсюда следует, что $\forall x P^0(x) \wedge \forall x Q^0(x) = u$

б) Пусть $\forall x (P^0(x) \wedge Q^0(x)) = l$. Отсюда следует, что существует элемент $x_0 \in M$, для которого $P^0(x_0) \wedge Q^0(x_0) = l$, а значит, $P^0(x_0) = l$ или $Q^0(x_0) = l$.

Если $P^0(x_0) = l$, то $\forall x P^0(x_0) = l$, следовательно, $\forall x P^0(x) \wedge \forall x Q^0(x) = l$. Аналогично доказывается случай, когда $Q^0(x_0) = l$.

Таким образом, с учетом пунктов а–б рассматриваемые формулы являются равносильными.

В качестве примера неравносильных формул можно привести формулы $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ и $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$, т.е. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \neq \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$.

В виде упражнения докажите это самостоятельно.

Основные равносильности

1. $\overline{\forall xA} = \exists x\overline{A}$
2. $\overline{\exists xA} = \forall x\overline{A}$
3. $\forall x(A \wedge B) = \forall xA \wedge \forall xB$
4. $\exists x(A \vee B) = \exists xA \vee \exists xB$
5. $\forall x(A \wedge D) = \forall xA \wedge D$
6. $\exists x(A \wedge D) = \exists xA \wedge D$
7. $\forall x(A \vee D) = \forall xA \vee D$
8. $\exists x(A \vee D) = \exists xA \vee D$
9. $\forall x\forall yA = \forall y\forall xA$
10. $\exists x\exists yA = \exists y\exists xA$
11. $\forall xC(x) = \forall yC(y)$
12. $\exists xC(x) = \exists yC(y)$, где x не входит как свободная переменная в формулу D и y не входит как свободная переменная в формулу C .

Эти равносильности позволяют производить над формулами языка первого порядка Σ равносильные преобразования.

Приведем несколько примеров преобразования формул с помощью основных равносильностей.

Пример 1. Пусть задана формула вида

$$\exists x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(y, z).$$

С помощью основных равносильностей преобразуем формулу и получим:

$$\begin{aligned} \exists x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(y, z) &= \overline{\exists x P(x, y)} \vee \exists z Q(y, z) = \\ &= \forall x \overline{P(x, y)} \vee \exists z Q(y, z) = \forall x (\overline{P(x, y)} \vee \exists z Q(y, z)) \neq \\ &\neq \exists z (\overline{P(x, y)} \vee Q(y, z)). \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть задана формула вида

$$\exists x (\forall p(y) \wedge \bar{q}(x) \vee \exists z (r(x, z) \vee q(y))).$$

Используя перечень равносильностей, преобразуем заданную формулу и получим формулу, у которой кванторы стоят впереди, т.е.

$$\begin{aligned} \exists x (\forall p(y) \wedge \bar{q}(x) \vee \exists z (r(x, z) \vee q(y))) &\neq \\ \neq \forall x ((\exists p(y) \vee q(x)) \wedge \forall z (r(x, z) \vee \bar{q}(y))) &= \\ = \forall x ((\exists t p(t) \vee q(x)) \wedge \forall z (r(x, z) \vee \bar{q}(y))) &= \\ = \forall x (\exists t (p(t) \vee q(x)) \wedge \exists z (r(x, z) \vee \bar{q}(y))) &= \\ = \forall x \exists t (\overline{p(t) \vee q(x)} \wedge \exists z (r(x, z) \vee \bar{q}(y))) &= \\ = \forall x \exists t \forall z ((\overline{p(t) \vee q(x)}) \wedge r(x, z) \vee \bar{q}(y)). \end{aligned}$$

Определение. Формула A языка первого порядка называется формулой, записанной в предваренной нормальной форме (ПНФ), если она бескванторная или если она имеет кванторы, то они все стоят впереди.

Теорема. Для любой формулы языка первого порядка Σ существует равносильная ей ПНФ.

Доказательство. Докажем индуктивно по построению формулы языка первого порядка Σ .

Шаг 1. Пусть A — элементарная формула языка первого порядка Σ , следовательно, она не содержит

кванторов, тогда равносильной ей формулой, записанной в ПНФ, является она сама.

Шаг 2. Пусть формула языка первого порядка Σ есть один из видов формул $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\bar{A}$ и для формул A и B существуют равносильные формулы, записанные в ПНФ соответственно, т.е. имеют место равносильности:

$$A = (\sigma_1 x_1) \dots (\sigma_n x_n) \tilde{A}, \text{ где } \sigma_1, \dots, \sigma_n - \forall$$

или $\exists, \tilde{A}$ – безкванторная формула

$$B = (\gamma_1 x_1) \dots (\gamma_k y_k) \tilde{B}, \text{ где } \gamma_1, \dots, \gamma_k - \exists$$

или $\forall, \tilde{B}$ – безкванторная формула

Обозначим через $z_1, \dots, z_n$ переменные, отличные от всех $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_k$ и от всех предметных переменных, входящих в формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Тогда по формулам равносильностей 11, 12 из вышеприведенного списка получаем:

$$A = (\sigma_1 z_1) \dots (\sigma_n z_n) \tilde{A}.$$

Аналогичным образом обозначим через $t_1, \dots, t_k$ переменные, отличные от всех $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_k$; $z_1, \dots, z_n$ и от всех предметных переменных, входящих в формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Тогда по формулам равносильностей 11, 12 из вышеприведенного списка получаем:

$$B = (\sigma_1 t_1) \dots (\sigma_k t_k) \tilde{B}.$$

Тогда имеем равносильности:

$$A \wedge B = (\sigma_1 z_1) \dots (\sigma_n z_n) (\gamma_1 z_1) \dots (\gamma_k t_k) \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B} \right).$$

Правая часть последней формулы есть ПНФ формулы $A \wedge B$, так как $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — бескванторные формулы.

Аналогично доказывается случай, когда формула имеет $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\bar{A}$.

Шаг 3. Пусть формула языка первого порядка Σ имеет вид: $\forall x_i A$ и для формулы A существует равносильная формула A^* , записанная в ПНФ. Тогда для формулы $\forall x_i A$ равносильной ей формулой, записанной в ПНФ, является формула $\forall x_i A^*$.

Аналогично доказывается случай, когда формула имеет вид $\exists x_i A$.

Пример. Пусть формула A имеет вид:

$$\exists x R(x, y, z) \rightarrow \forall x Q(x, y).$$

Используя список равносильности, покажем, что для данной формулы существует равносильная ей формула, записанная в ПНФ.

Действительно, имеет место:

$$\begin{aligned} \exists x R(x, y, z) \rightarrow \forall x Q(x, y) &= \overline{\exists x R(x, y, z)} \vee \forall x Q(x, y) = \\ &= \forall x \overline{R}(x, y, z) \vee \exists x \overline{Q}(x, y) = \forall x \overline{R}(x, y, z) \vee \exists t \overline{Q}(t, y) = \\ &= \forall x (\overline{R}(x, y, z) \vee \exists t \overline{Q}(t, y)) = \forall x \exists t (\overline{R}(x, y, z) \vee \overline{Q}(t, y)). \end{aligned}$$

Примеры использования языка первого порядка Σ для записи математических утверждений

Язык первого порядка удобен для записи математических предложений и определений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Рассмотрим язык первого порядка вида $\Sigma = \{f^2, g^2, p^1, a\}$. В качестве структуры берем $m = \{N \cup \{0\}, +, \cdot, S, 0\}$, где S – «следует за».

Приведем несколько примеров.

1. $x \leq y$ $x < y \wedge x = y$;
2. $x < y$ $\exists z(x + z = y)$;
3. x – «четное число»: $\exists y(x = y + y)$
4. $Div(x, y)$: $x = 0 \wedge \exists z(x \cdot z = y)$ (y делится x)
5. x – «простое число»: $x = 0 \wedge x = S(0) \wedge \forall z(Div(z, x) \rightarrow z = S(0) \vee z = x)$

6. Определение предел числовой последовательности, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, где $a \in R$:

$$\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists m \forall n (n > m \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)).$$

3.7. Некоторые виды математических теорем

Математические теоремы, как $\forall x(\overline{Q}(x) \rightarrow \overline{P}(x))$ правило, имеют структуру, выражаемую схемой $X \rightarrow Y$. При этом предложение X называется условием теоремы (посылкой), а предложение Y — заключением. Например, «Если число делится на 2, то его квадрат делится на 4» и т.п.

Рассмотрим четыре вида теорем:

Таблица 51

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	(1)	$\forall x(\overline{P}(x) \rightarrow \overline{Q}(x))$	(3)
$\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$	(2)	$\forall x(\overline{Q}(x) \rightarrow \overline{P}(x))$	(4)

Пара теорем, у которых условие одной является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются взаимно обратными друг другу.

Так, теоремы (1) и (2), а также (3) и (4) — взаимно обратные теоремы. При этом если одну из них называют прямой теоремой, то вторая называется обратной.

Пара теорем, у которых условие и заключение одной являются отрицанием соответственно условия и заключения другой, называются взаимно противоположными.

Так, теоремы (1) и (3), а также (2) и (4) являются взаимно противоположными теоремами.

Прокомментируем эти виды теорем на примере теоремы Пифагора:

Теорема Пифагора (прямая теорема): «В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы».

Теорема Пифагора (обратная теорема): «Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный».

Теорема Пифагора (противоположная теорема): «Если сумма квадратов двух сторон треугольника не равна квадрату третьей стороны, то треугольник не является прямоугольным».

Теорема Пифагора (обратная противоположная теорема): «Если треугольник не прямоугольный, то сумма квадратов его двух сторон не равна квадрату третьей стороны».

Необходимые и достаточные условия

Рассмотрим теорему

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (1)$$

Если M_1 — множество истинности предиката $P(x)$ и M_2 — множество истинности предиката $Q(x)$, то множество истинности предиката $P(x) \rightarrow Q(x)$ есть множество $\overline{M}_1 \cup M_2$. Но тогда множеством ложности этого предиката будет $\overline{\overline{M}_1 \cup M_2} = M_1 \cap \overline{M}_2$. Последнее множество будет пустым лишь в случае, когда $M_1 \subseteq M_2$.

Итак, предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$ является истинным для всех $x \in E$ в том и только в том случае, когда множество истинности предиката $P(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q(x)$. При этом говорят, что предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, и предикат $Q(x)$ называют необходимым условием для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ — достаточным условием для $Q(x)$.

Так, в теореме «Если x – число натуральное, то оно целое», предикат $Q(x)$: « x – число целое» логически следует из предиката $P(x)$: « x – число натуральное», а предикат « x – число натуральное» является достаточным условием для предиката « x – целое число».

Часто встречается ситуация, при которой истинны взаимно обратные теоремы

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \quad (1)$$

$$\forall x(Q(x) \rightarrow P(x)) . \quad (2)$$

Это, очевидно, возможно при условии, что $M_1 = M_2$.

В таком случае из теоремы (1) следует, что условие $P(x)$ является достаточными для $Q(x)$, а из теоремы (2) следует, что условие $P(x)$ является необходимым для $Q(x)$.

Таким образом, если истинны теоремы (1) и (2), то условие $P(x)$ является и необходимым, и достаточным для $Q(x)$. Аналогично в этом случае условие $Q(x)$ является необходимым и достаточным для $P(x)$.

Иногда вместо логической связки «необходимо и достаточно» употребляют логическую связку «тогда и только тогда».

Так как здесь истинны высказывания (1) и (2), то истинно высказывание

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow P(x)) = \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) .$$

3.8. Методы доказательств

1. Доказательство теорем методом от противного

Мы хотим доказать справедливость утверждения Т. Допустим, Т – не верно. Тогда верно $\bar{T}$. Пусть из $\bar{T}$ следует ложное высказывание В: $\bar{T} \rightarrow B$.

Следовательно, $\bar{T}$ – ложь. Поэтому Т истинно.

2. Доказательство теорем методом резолюции

В 1965 году американский математик Дж. Робинсон разработал метод резолюций для доказательства выводимых формул исчисления высказываний или предикатов, развивающий процесс автоматического доказательства теорем. До Робинсона французский математик Ж. Эрбран в 1930 году доказал очень важную теорему, послужившую основой для предложенного им механического метода доказательств. Эрбран предложил алгоритм, устанавливающий необщезначимость формулы исчисления предикатов, следовательно, ее недоказуемость.

С появлением вычислительных машин интерес к методу механического доказательства выводимых формул резко выросла. В 1960 году алгоритм Эрбрана был реализован на ЭВМ, были попытки его модернизации, однако первоначальные результаты алгоритма были малоэффективны. Значительный прогресс в сфере автоматического доказательства теорем связан с принципом резолюций, разработанный Робинсоном.

Резолюция — это один из способов доказательства теорем (выводимых формул) в области исчисления высказываний или предикатов, относящийся к сфере искусственного интеллекта. Он применяется с середины 60-х годов прошлого столетия. Резолюция — это метод, используемый для построения опровержений. Важным практическим применением метода резолюций, в частности при создании систем опровержения, является современное поколение интерпретаторов языка PROLOG.

Принцип резолюции (или разрешения), рассматриваемый в работе Робинсона, описывает способ выявления противоречий в базе данных дизъюнктивных выражений при минимальном использовании подстановок.

Опровержение разрешения — это способ доказательства теоремы, основанный на формулировке обратного утверждения и добавлении отрицательного высказывания к системе используемых аксиом, которые по предположению считаются истинными.

Затем правило резолюции используется для доказательства того, что такое предположение ведет к противоречию. Поскольку в процессе доказательства теоремы показывается, что ее отрицание неверно, то исходное утверждение должно быть истинным.

Процесс доказательства состоит из следующих шагов:

1. Предположения или аксиомы приводятся к дизъюнктивной форме;

2. К набору аксиом добавляется отрицание доказываемого теоремы в дизъюнктивной форме;

3. Выполняется совместное разрешение этих дизъюнктов, в результате чего получаются новые основанные на них дизъюнктивные выражения;

4. Генерируется пустое выражение, означающее противоречие;

5. Подстановки, использованные для получения пустого выражения, свидетельствуют о том, что отрицание отрицания — истинно.

Резолюция — это согласованное правило вывода. Однако оно не является полным. Резолюция является полной в смысле опровержения, т.е. если в наборе высказываний имеется противоречие, то на основе этого набора всегда можно сгенерировать пустое или нулевое выражение.

Для доказательства от обратного требуется, чтобы аксиомы и отрицание исходного утверждения были приведены к нормальной дизъюнктивной форме.

В дизъюнктивной форме логическая база данных представляется в виде набора дизъюнкций, или литералов. Литерал — это простейшее выражение или его отрицание.

Наиболее типичная форма резолюции, получившая название бинарной резолюции, применяется к двум выражениям, одно из которых является литералом, а другое — его отрицанием. Если литералы содержат переменные, то их необходимо унифицировать и привести к эквивалентному виду. Затем генерируется новое выражение, состоящее из дизъюнктов всех предикатов этих двух выражений, за исключением этого литерала и его отрицания, которые считаются «вычеркнутыми».

По мнению Робинсона, правила вывода, применяемые при автоматизации процесса доказательства выводимых формул, необязательно должны совпадать с правилами вывода, используемыми человеком. Разработанный алгоритм Робинсона нелегко поддается восприятию человеком, но эффективно реализуется на компьютере. Он имеет следующий вид:

$$A \vee B, C \vee \bar{B} \vdash A \vee C,$$

т.е. формула $A \vee C$ является логическим следствием двух формул, стоящих слева. При этом говорят, что формула $A \vee B$ резольвирует с формулой $C \vee \bar{B}$, а формула $A \vee C$ называется резольвентой формул $A \vee B, C \vee \bar{B}$. В случае, когда в посылке отсутствуют и A и C , правило резолюций выводит пустую формулу.

Сравнивая правило резолюций с правилом заключения (при этом правило заключения записываем в виде: $A, A \vee B \rightarrow B$), можно сказать, что правило резолюций является обобщением правила заключения.

Основываясь на подходящей системе аксиом и на правиле резолюций, можно построить полное

формализованное исчисление высказываний или исчисление предикатов первого порядка.

Прежде всего, приведем описание метода резолюций для доказательства теорем формализованного исчисления высказываний. Отметим одну важную идею.

Пусть даны формулы $B_1, \dots, B_m$ и A . Легко можно доказать, что формула A является логическим следствием формул $B_1, \dots, B_m$ тогда и только тогда, когда формула $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_m \wedge \bar{A}$ противоречива. Действительно, $B_1, \dots, B_m \vdash A$ тогда и только тогда, когда $\vdash B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$. Теперь, формула $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$ будет общезначимой, если ее отрицание $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A$ — противоречиво. Преобразуя последнюю формулу, получим требуемое.

$$\overline{B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A} \equiv \overline{B_1 \wedge \dots \wedge B_m} \vee A \equiv \bar{B}_1 \vee \dots \vee \bar{B}_m \vee A \equiv B_1 \wedge \dots \wedge B_m \wedge \bar{A}.$$

Чтобы доказать противоречивость формулы $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_m \wedge \bar{A}$, достаточно доказать, что из совокупности формул $B_1, \dots, B_m, \bar{A}$ логически следует любая формула теории L . Процесс работы алгоритма продолжается до тех пор, пока не будет получено пустая формула (ложное утверждение).

Приведем пример. Пусть даны формулы:

$$B_1 = \bar{P} \vee \bar{Q} \vee R;$$

$$B_2 = P;$$

$$B_3 = Q;$$

$$A = R.$$

Ставится вопрос: следует ли формула A из совокупности формул $\{B_1, B_2, B_3\}$.

Решение.

1. Применяем правило резолюций к формулам B_1, B_2 . Получаем: $B_4 = \overline{Q} \vee R$.

2. Применяем правило резолюций к формулам B_3, B_4 . Получаем: $B_5 = R$

3. Из формул R и $\overline{R}$ получаем искомую формулу.

Следовательно, формула A является логическим следствием формул B_1, B_2, B_3 .

Рассмотрим случай, когда метод резолюций применяется в логике предикатов.

Каждая формула логики предикатов, участвующая в доказательстве некоего утверждения по методу резолюций, должна быть представлена в специальном стандартном виде. Первый шаг на пути преобразования формулы к такому виду — это приведение ее к предваренной нормальной форме (ПНФ), бескванторная часть которой приведена к конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

Рассмотрим следующий пример. При этом с помощью метода преобразования равносильных формул получим ПНФ.

$$\begin{aligned}
 & (\forall x) \{ P(x) \rightarrow [(\forall y) (P(y) \rightarrow R(x, y)) \wedge (\overline{\forall y}) (Q(x, y) \rightarrow P(y))] \} = \\
 & = (\forall x) \{ \overline{P(x)} \vee [(\forall y) (\overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (\exists y) \overline{Q(x, y) \vee P(y)}] \} = \\
 & = (\forall x) \{ \overline{P(x)} \vee [(\forall y) (\overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (\exists y) (Q(x, y) \wedge \overline{P(y)})] \} = \\
 & = (\forall x) \{ \overline{P(x)} \vee [(\forall y) (\overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (\exists t) (Q(x, t) \wedge \overline{P(t)})] \} = \\
 & = (\forall x) \{ \overline{P(x)} \vee (\forall y) (\exists t) [(\overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (Q(x, t) \wedge \overline{P(t)})] \} = \\
 & = (\forall x) (\forall y) (\exists t) \{ \overline{P(x)} \vee [(\overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (Q(x, t) \wedge \overline{P(t)})] \} = \\
 & = (\forall x) (\forall y) (\exists t) [(\overline{P(x)} \vee \overline{P(y)} \vee R(x, y)) \wedge (\overline{P(x)} \vee Q(x, t)) \wedge (\overline{P(x)} \vee \overline{P(t)})]
 \end{aligned}$$

Далее производится так называемая *сколемизация* полученной формулы, целью которой является

удаление всех кванторов существования. Этот алгоритм состоит в следующем. Если на первом месте в формуле стоит квантор существования, то стоящая под ним предметная переменная всюду в данной формуле заменяется некоторым конкретным предметом (индивидом), а сам квантор существования опускается. Например, для формулы $(\exists x)(\forall y)(P(x, y))$ этот алгоритм дает $(\forall y)(P(a, y))$. Если перед квантором существования $\exists y$ стоят кванторы общности $\forall x_1, \dots, \forall x_k$, то выбирается новый k -местный функциональный символ f , все y в формуле заменяются $f(x_1, \dots, x_k)$, а квантор $\exists y$ опускается. Получаемая формула называется *сколемовской нормальной формой* для данной формулы. Например, для рассмотренной выше формулы этот алгоритм выдает

$$(\forall x)(\forall y) \left[\left(\overline{P(x)} \vee \overline{P(y)} \vee R(x, y) \right) \wedge \left(\overline{P(x)} \vee \right. \right. \\ \left. \left. \vee Q(x, f(x, y)) \right) \wedge \left(\overline{P(x)} \vee \overline{P(f(x, y))} \right) \right].$$

Получившиеся дизъюнктивные одночлены образуют *множество дизъюнктов* исходной формулы, которое, подобно тому, как это было в исчислении высказываний, участвует в доказательстве по методу резолюций. Для вышерассмотренной формулы получим следующее множество дизъюнктов:

$$S = \left\{ \overline{P(x)} \vee \overline{P(y)} \vee R(x, y), \overline{P(x)} \vee \right. \\ \left. \vee Q(x, f(x, y)), \overline{P(x)} \vee \overline{P(f(x, y))} \right\}.$$

Выше мы установили, что для доказательства выводимости формулы A из формул $B_1, \dots, B_m$ исчисления высказываний достаточно доказать тождественную ложность формулы $B_1 \wedge \dots \wedge B_m \wedge \overline{A}$, т.е. противоречивость множества дизъюнктов $\{B_1, \dots, B_m, \overline{A}\}$. Подобным образом можно действовать и в исчислении предикатов. Но здесь задача заключается в построении модели

множества формул $\{B_1, \dots, B_m, \bar{A}\}$, т.е. в поисках такой интерпретации, при которой все эти формулы превращаются в истинные высказывания. Если такая модель существует, то A не может быть следствием формул $B_1, \dots, B_m$. В противном случае формула A является логическим следствием формулы $B_1, \dots, B_m$. В общем случае область поиска такой интерпретации является громоздкой в зависимости от вида формул $B_1, \dots, B_m, A$. Однако существует возможность сузить область исследуемых интерпретаций. Для этого достаточно рассматривать интерпретации не на всевозможных множествах, а на так называемом универсуме Эрбрана, который для множества S формул логики предикатов обозначается символом $H(S)$.

Алгоритм Эрбрана строится рекурсивно следующим образом:

1. Множество всех индивидов из S принадлежит $H(S)$; если в S их нет, то $H(S)$ приписывается произвольный индивид a .

2. Если термы $t_1, \dots, t_n$ принадлежат S , то $H(S)$ содержит также $f(t_1, \dots, t_n)$, где f — любой n -местный функциональный символ из S .

3. Никаких других термов в $H(S)$ нет.

Понятно, что при выборе любой интерпретации простейшим формулам из S никаких других объектов предметной области, помимо объектов из $H(S)$, не требуется. В этом смысле $H(S)$ — наиболее общая область интерпретации формул из S , так что поиск модели множества формул S можно ограничить эрбрановскими интерпретациями, и если мы установим, что такой модели для множества $\{B_1, \dots, B_m, \bar{A}\}$ среди этих интерпретаций нет, то ее не будет существовать вовсе, а значит, A будет следствием формул $B_1, \dots, B_m$. Если

же модель множества формул S существует, то она существует и среди ее эрбрановских интерпретаций.

Форма правила резолюции в логике предикатов остается той же самой, что и в логике высказываний. Но в формулах логики предикатов содержатся предметные переменные, которых не было в формулах логики высказываний, и применение данного правила здесь несколько усложняется. В этом случае над формулами логики предикатов производится еще одна процедура — *процедура унификации предметных переменных*.

Суть этой процедуры состоит в том, что в данных формулах некоторые предметные переменные заменяются конкретными предметами, чтобы для формул, к которым нельзя было раньше применить правило резолюций, теперь это стало возможным. Например, если к формулам $P(a) \vee \overline{Q(a, b)}$ и $Q(x, y) \vee \overline{R(x, y)}$ нельзя применить правило резолюций, то после замены во второй формуле x на a и y на b получаем формулы $P(a) \vee \overline{Q(x, y)}$ и $Q(a, b) \vee \overline{R(a, b)}$, к которым это правило применимо, и оно дает формулу (резольвенту) $P(a) \vee \overline{R(a, b)}$.

Как и в исчислении высказываний, в исчислении предикатов правило резолюции, примененное к формулам $P(a)$ и $\overline{P(a)}$, дает пустую формулу. Это означает, что исходное множество формул $B_1, \dots, B_m, \overline{A}$ противоречиво, а значит, формула A выводима из формул $B_1, \dots, B_m$. С точки зрения семантики возможность выведения пустой формулы означает, что нельзя построить эрбрановскую модель множества формул $B_1, \dots, B_m, \overline{A}$.

Теперь о методе резолюций для доказательства теорем исчисления предикатов. Для того чтобы автоматизировать процесс доказательства того, что формула A выводима из формул $B_1, \dots, B_m$, было бы уместно найти эффективный алгоритм, основывающийся

на правиле резолюций, который позволял бы обнаруживать противоречивость множества формул $B_1, \dots, B_m, \bar{A}$. Предположим, что существует некая позитивная сила (человек или машина), которая по случайному закону применяет правило резолюции к формулам из множества $\{B_1, \dots, B_m, \bar{A}\}$. После каждого выполнения резолюции получающаяся резольвента добавляется в это множество. Если будет получена пустая формула, то это и будет означать, что исходное множество формул противоречиво, и тогда эта сила прекратит свое действие. Если A выводима из $B_1, \dots, B_m$, то множество формул $\{B_1, \dots, B_m, \bar{A}\}$ действительно противоречиво, и позитивная сила рано или поздно сгенерирует пустую формулу и тем самым обнаружит эту противоречивость. Тем не менее в процессе работы может быть накоплено огромное количество резольвент. Поэтому для создания эффективного алгоритма поиска пустой формулы необходимо вести ограничения на данный процесс и направить его активность на участки, которые с наибольшей вероятностью могут привести к появлению пустой формулы.

Таким образом, при использовании метода резолюций возможен не один прием поиска решения задачи, и важнейшей проблемой при этом является проблема эффективности алгоритма поиска доказательства. Разработано большое число приемов поиска доказательства методом резолюций, использующих, в частности, различного рода ограничения на вид исходных дизъюнктов (наиболее распространены так называемые дизъюнкты Хорна). Каждая из этих стратегий обладает своими преимуществами. Причем для одной и той же теоремы некоторые приемы могут работать успешно. С другой стороны, один и тот же прием для одних теорем работает хорошо, а для других — плохо.

Рассмотрим подробнее так называемый *обратный прием* на следующем конкретном примере. Пусть имеются формулы: $P(a) \vee \overline{Q(a,b)}$, $Q(x,y) \vee \overline{R(x,y)}$, $S(b)$, $R(a,b)$. Требуется определить, является ли формула $P(a)$ следствием перечисленных формул. Сначала добавляем к данному множеству формул отрицание доказываемой формулы. В результате получаем следующее множество формул:

- (1): $P(a) \vee \overline{Q(a,b)}$;
- (2): $Q(x,y) \vee \overline{P(x,y)}$;
- (3): $S(b)$;
- (4): $R(a,b)$;
- (5): $\overline{P(a)}$.

Реализация данного алгоритма методом резолюций будет сфокусирована на следствиях добавления формулы (5) к данному множеству формул (1)–(4). Алгоритм характеризуется следующими двумя требованиями: в первой выполняемой резолюции следует использовать только что добавленную формулу (5); в каждой последующей резолюции должна участвовать резольвента предыдущей резолюции (это предотвращает хаотическое «блуждание» алгоритма и порождение им необозримого количества «лишних» формул). Согласно первому требованию на первом шаге применяем правило резолюции к формулам (5) и (1), которые резольвируют друг с другом. В результате получаем формулу

$$(6): \overline{Q(a,b)}.$$

Согласно второму требованию на следующем шаге должна участвовать формула (6). Она резольвирует с формулой (2). Результатом будет формула

$$(7): \overline{R(a,b)}.$$

Формула (7) резольвирует с формулой (4). Их резольвентой является пустая формула. Это означает, что множество формул (1)–(5) противоречиво, что, в свою очередь, означает, что формула $P(a)$ является следствием формул (1)–(4).

Метод резолюций начинает процесс решения с отрицания заключения, а далее в процессе решения используются остальные исходные формулы, что продолжается до тех пор, пока не будет выведена требуемая формула. Данный прием решения называется также приемом поиска «сначала вглубь», поскольку результат последней резолюции всегда используется в следующей за ней резолюции.

3.9. Теорема Гёделя о неполноте

В 1931 году австрийский математик Курт Гёдель доказал знаменитую теорему о неполноте.

Теорема. *Если формализованная арифметика непротиворечива, то она неполна.*

Математическая теория называется формальной или формализованной, если ее полностью можно представить посредством формул и формальных преобразований между формулами. Великий Гильберт считал, что всю математику можно формализовать, т.е. выразить символами и механическими операциями между ними. Теорема Гёделя о неполноте утверждает, что в непротиворечивой формальной арифметике существуют содержательно истинные, но формально не выводимые формулы. Это означает, что содержательную арифметику невозможно полностью формализовать. Поэтому невозможно формализовать и всю математику. Теорема Гёделя имеет глубокий философский

смысл, который заключается в том, что формальным методом невозможно охватить всю математику: для построения математики требуется также интуиция. Поскольку компьютерные программы являются формализованными текстами, то согласно теореме Гёделя, невозможно полностью запрограммировать даже обычную арифметику. То есть современный компьютер, работающий на формализованных текстах (программах), органически не способен выразить всю математику, тем более весь интеллект человека. Компьютер — удобный, эффективный инструмент, но не более. Однако нельзя исключить, что компьютеры, построенные на биологической основе, преодолеют эту ограниченность «кварцевых» компьютеров.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое предикат? Приведите различные варианты определения предиката.
2. Какие логические операции рассматриваются в алгебре предикатов?
3. Дайте определение формулы и терма в языке первого порядка Σ .
4. Объясните в виде примера понятие связанных и свободных переменных в формуле в языке первого порядка Σ .
5. Приведите пример применения операции подстановки в алгебре предикатов.
6. Какие равносильные формулы рассматриваются в алгебре предикатов?
7. Приведите примеры общезначимых, необщезначимых, выполнимых и невыполнимых формул в алгебре предикатов.

8. Приведите несколько примеров записи математических предложений в виде формул логики предикатов.

9. Какие виды математических теорем существуют?

10. Опишите метод доказательства теорем от противного.

11. Метод резолюций при доказательстве теорем.

12. Применение метода резолюций в логике предикатов.

13. Теорема Гёделя о неполноте.

Практические задания

1. Определите, какие из следующих записей выражают предикаты:

a) $2 * 5 = 10$

b) $2x = 8$

c) $xy = z^2$

d) $x^2 + 1 = 0$

e) $2x + 3y = 0$

k) $x \cap y = z$

l) $x \cap y =$

2. Указать область истинности логической функции, связанной с предикатами:

a) “ $x \leq y$ ”, если $x, y \in \mathbb{R}^2$

b) “ $x > y$ ”, если $x, y \in \mathbb{R}^2$

c) “число делителей числа x ”, если $x \in \mathbb{N}$

b) Найдите область истинности логической функции, связанной с предикатом:

c) “ x — написал роман “Отцы и дети”, где $x \in \{\text{А.Н. Гончаров, А.Н. Толстой, И.С. Тургенев, А.С. Пушкин}\}$.”

d) “ x кратно 3”, где $x \in \{0, 3, 5, 6, 9, 12, 33\}$

- e) " $\cos x > 1$ ", где $x \in R$
 f) " $x + y = z$ ", где $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. Укажите свободные и связанные вхождения переменных в следующих формулах:

- a) $\forall z(\forall x P(x, y) \rightarrow P(z, x))$
 b) $\forall y P(z, y) \rightarrow \forall z P(z, y)$
 c) $\forall y \exists x P(x, y) \vee \overline{\forall x Q(x)}$
 d) $\forall x(P(x) \wedge \exists x Q(x, z) \rightarrow \exists y R(x, z) \vee Q(z, x))$
 e) $\forall z \exists y(P(z, y) \wedge \forall z Q(z, x) \rightarrow R(z))$

5. Постройте истинностные таблицы ($|M|=2$) для формул:

- a) $\forall x Q(x, y)$
 b) $\exists x(Q(x, y) \rightarrow Q(y, x))$
 c) $\exists y Q(x, y)$
 d) $\forall x \exists y(Q(x, z) \rightarrow Q(x, y))$

6. Доказать равносильность формул:

- a) $\overline{\forall x A(x)} \wedge \overline{\forall x B(x)} = \forall x(A(x) \wedge B(x))$
 b) $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$

7. Доказать общезначимость формул:

- a) $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$
 b) $P(y) \rightarrow \exists x P(x)$

8. Доказать общезначимость формул:

- a) $\exists x P(x) \rightarrow P(g(y))$
 b) $\forall x P(f(x)) \rightarrow \exists x P(f(x))$
 c) $(\forall x P(x) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)))$
 d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
 e) $P(y) \rightarrow \exists x P(f(x))$
 k) $P(f(y)) \rightarrow \exists x P(f(x))$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. — М.: Академия, 2004. — 448 с.
2. *Клини С.К.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
3. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Введение в математическую логику. — М.: Изд-во МГУ, 1982. — 120 с.
4. Математическая логика / Под общ. Ред. А.А. Столяр. — Минск: Вышэйшая школа, 1991. — 269 с.
5. *Марков А.А.* Элементы математической логики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 80 с.
6. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
7. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
8. *Смирнов В.А., Маркин В.И., Новодворский А.Е., Смирнов А.В.* Логика и компьютер: доказательство и его поиск (Курс логики и компьютерный практикум). — М.: Наука, 1996. — 255 с.
9. *Тимофеева И.Л.* Математическая логика в вопросах и задачах. — М.: Прометей, 2002. — 112 с.
- 10 *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. — М.: Мир, 1990.- 480 с.

ДЛЯ ЗАПИСЕЙ

МАТРОСОВ Виктор Леонидович

МИРЗОЕВ Махмашариф Сайфович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебник для бакалавриата

Публикуется в авторской редакции
Корректura *Киселева В.А.*
Дизайн обложки *Середа Т.В.*
Компьютерная верстка *Середа Т.В.*

Издательство «Прометей»
119002, г. Москва, ул. Арбат, д. 51, стр. 1
Тел./факс: +7 (495) 730-70-69
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 03.10.2019
Формат 60×84/16. Объем 14,25 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ 964

ISBN 978-5-907244-03-0



9 785907 244030