

# МАТЕМАТИКА XIX ВЕКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА



АЛГЕБРА



ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под редакцией А. Н. КОЛМОГорова и А. П. ЮШКЕВИЧА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1978

Авторы книги:

доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА,  
академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО,  
З. А. КУЗИЧЕВА,  
кандидат физ.-матем. наук Ф. А. МЕДВЕДЕВ,  
кандидат физ.-матем. наук Е. П. ОЖИГОВА,  
кандидат физ.-матем. наук А. Н. ПАРШИН,  
кандидат физ.-матем. наук А. Н. РУДАКОВ,  
кандидат физ.-матем. наук Е. И. СЛАВУТИН,  
кандидат физ.-матем. наук О. Б. ШЕЙНИН,  
доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ

Редакционная коллегия:

доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА,  
кандидат физ.-матем. наук А. И. ВОЛОДАРСКИЙ (секретарь),  
кандидат физ.-матем. наук С. С. ДЕМИДОВ,  
академик А. Н. КОЛМОГОРОВ (отв. редактор),  
академик АПН СССР А. И. МАРКУШЕВИЧ,  
кандидат физ.-матем. наук Е. И. СЛАВУТИН (секретарь),  
доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ (отв. редактор)

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	7
-----------------------	---

*Глава первая*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**

(З. А. Кузичева) . . . . .	11
Предистория математической логики (11). Символическая логика Г. В. Лейбница (12). Квантификация предиката (18). «Формальная логика» А. де Моргана (19). Алгебра логики Дж. Буля (22). Алгебра логики У. С. Джевонса (27). Символическая логика Дж. Венна (30). Алгебра логики Э. Шрёдера и П. С. Порецкого (34)	
Заключение . . . . .	38

*Глава вторая*

**АЛГЕБРА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

(И. Г. Башмакова и А. Н. Рудаков при участии А. Н. Паршина и Е. И. Славутина) . . . . .	39
---	----

1. Обзор развития алгебры и теории алгебраических чисел в период 1800—1870 гг. . . . . 39
2. Эволюция алгебры . . . . . 44

Алгебраические доказательства основной теоремы алгебры в XVIII в. (44). Первое доказательство К. Ф. Гаусса (46). Второе доказательство К. Ф. Гаусса (47). Конструкция Л. Кронекера (49). Теория уравнений (51). Карл Фридрих Гаусс (52). Решение уравнения деления круга (53). Нильс Хенрик Абель (56). Эварист Галуа (57). Алгебраические труды Э. Галуа (58). Первые шаги теории групп (62). Развитие линейной алгебры (66). Гиперкомплексные числа (70). Уильям Роуэн Гамильтон (72). Алгебра матриц (74). Алгебры Г. Грассмана и У. К. Клиффорда (75). Ассоциативные алгебры (76). Теория инвариантов (76)

3. Теория алгебраических чисел и начала коммутативной алгебры . . . . 82

«Арифметические исследования» К. Ф. Гаусса (82). Исследования о числе классов квадратичных форм (86). Целые гауссовы числа и их арифметика (88). Великая теорема П. Ферма и открытие Э. Куммера (93). Теория Э. Куммера (95). Трудности. Понятие целого числа (98). Теория Е. И. Золотарёва. Целые и  $p$ -целые числа (100). Теория идеалов Р. Дедекинда (107). О методе Р. Дедекинда. Идеалы и теория сечений (113). Построение теории идеалов для полей алгебраических функций (114). Теория дивизоров Л. Кронекера (119)

Заключение . . . . . 121

*Глава третья*

**ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ**

(Е. П. Ожигова при участии А. П. Юшкевича) . . . . .	123
--	-----

1. Арифметическая теория квадратичных форм . . . . . 123  
Общая теория форм; Ш. Эрмит (123). Работы А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва по теории квадратичных форм (129). Исследования А. А. Маркова (135)
2. Геометрия чисел . . . . . 137  
Начало теории (137). Работы Г. Дж. С. Смита (142). Геометрия чисел Г. Минковского (143). Труды Г. Ф. Вороного (147)

3. Аналитические методы теории чисел . . . . .	152
П. Г. Лежен-Дирихле и теорема об арифметических прогрессиях (152). Асимптотические законы теории чисел (156). П. Л. Чебышев и теория распределения простых чисел (160). Идеи Б. Римана (166). Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел (169). Некоторые приложения аналитической теории чисел (171). Числовые функции и тождества. Работы Н. В. Бугаева (172)	
4. Трансцендентные числа . . . . .	176
Работы Ж. Лиувилля (176). Ш. Эрмит и доказательство трансцендентности числа $e$ ; теорема Ф. Линдемана (179).	
Заключение . . . . .	183
<i>Глава четвертая</i>	
<b>ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</b>	
(Б. В. Гнеденко, О. Б. Шейнин) . . . . .	184
Введение (184). Теория вероятностей у П. С. Лапласа (185). Теория ошибок П. С. Лапласа (193). Вклад К. Ф. Гаусса в теорию вероятностей (196). Исследования С. Д. Пуассона и О. Коши (199). Социальная и антропометрическая статистика (209). Русская школа теории вероятностей. П. Л. Чебышев (213). Новые области приложения теории вероятностей. Возникновение математической статистики (229). Работы второй половины XIX в. в Западной Европе (235).	
Заключение . . . . .	239
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	
(Ф. А. Медведев) . . . . .	241
<b>ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ</b> . . . . .	248
<b>ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ (А. Ф. Лапко)</b> . . . . .	249

## ПРЕДИСЛОВИЕ



Предлагаемый вниманию читателей коллективный труд «Математика XIX века», за которым последует «Математика XX века», служит продолжением трехтомной «Истории математики с древнейших времен до начала XIX столетия», опубликованной в 1970—1972 гг.<sup>1</sup> По соображениям, о которых говорится далее, мы в части XX в. ограничиваемся его первыми четырьмя десятилетиями. Общие установки авторского коллектива данного труда остаются такими же, какие были высказаны в предисловии к трехтомнику. Другими словами, мы рассматриваем развитие математики не только как процесс создания все более совершенных понятий и приемов для изучения пространственных форм и количественных отношений действительного мира, но и как социальный процесс. Математические структуры, раз возникнув, способны совершенствоваться далее в известной степени самостоятельно, но такое имманентное саморазвитие математики само обуславливается практической деятельностью и определяется либо непосредственно, либо, чаще всего, в конечном итоге потребностями общества. Исходя из этого, авторы ставят своей задачей, с одной стороны, установить движущие силы прогресса математики и с этой целью исследуют ее взаимодействие с общественным базисом, техникой, естественными науками, философией. С другой стороны, анализируя собственный ход событий в математике, авторы стремятся выявить связи между различными ее разделами и оценить достижения науки с позиций ее теперешнего состояния и ближайших перспектив.

Трудности, стоящие перед авторами данного сочинения, значительно превосходят те, какие встретились при подготовке трехтомника. История математики XIX и особенно XX вв. изучена гораздо хуже, чем предшествующих времен. За последние 150—175 лет математика чрезвычайно дифференцировалась и многие отделы ее приобрели узко специальный характер. Оригинальная литература вопроса стала практически необозримой. Наш авторский коллектив теперь значительно расширен, но и ему непосильно равномерно осветить достижения математики рассматриваемого времени во всех ее разветвлениях. По существу мы даем очерки, а не всеобъемлющую историю математики XIX и XX вв.; невозможно было избежать пробелов, и мы вынуждены оставить в стороне, например, отдельные главы теории дифференциальных уравнений, иные классы специальных функций и некоторые другие разделы. В ряде случаев не удалось найти специалистов, согласных взять на себя нелегкий труд изучения истории соответствующих вопросов в новейшее время. Кроме того, полнота описания и анализа различных дисциплин иногда оказывалась различной, главным образом в связи с недостаточной изученностью их

<sup>1</sup> В дальнейшем это сочинение цитируется сокращенно: ИМ, с указанием тома и страницы.

истории. Так, в очерках истории математики XIX в. сравнительно менее подробно изложена история вычислительных методов, которые в то время и не выделялись в особую часть математики и относились, соответственно, к алгебре и тем или иным аналитическим дисциплинам. Всё же мы стремились к тому, чтобы рассмотреть наиболее важные направления математики без существенных пропусков.

К этому следует добавить, что в различных главах неизбежными явились отдельные повторения, обусловленные принадлежностью тех или иных идей к нескольким частям математики и стремлением в каждом случае дать связное изложение вопроса.

По манере изложения новый труд в целом близок к трехтомнику. На первом плане по-прежнему стоит развитие математики как единого целого и главное место занимает история наиболее важных понятий, методов и алгоритмов. Как и ранее, приводятся небольшие биографии наиболее выдающихся ученых, а об остальных даются лишь самые краткие сведения, во многих случаях только даты жизни.

Хронологическими границами рассматриваемого здесь промежутка истории служат начало XIX в. и 30-е годы XX столетия. При этом изложение естественно разделяется на два этапа, хронологически приблизительно соответствующие XIX в. и первым четырем десятилетиям нашего столетия. Конечно, сами по себе ни 1801, ни 1900 гг. не были переломными в истории математики, хотя каждый из них был отмечен примечательными событиями, первый — выходом «Арифметических исследований» Гаусса, второй — докладом Гильберта «Математические проблемы». Мы не придерживаемся строго обеих указанных дат и в изложении истории отдельных дисциплин в зависимости от особенностей отступаем от 1801 и 1900 гг. как в ту, так и в другую сторону, чаще всего не доводя до конца XIX в., ибо в ряде случаев естественным идейным рубежом оказываются 70-е и 80-е его годы. Но взятый в целом XIX в. резко отличается от предшествующего. Для XVIII в. было характерно непосредственное развитие главных идей математики Декарта и Ферма, Ньютона и Лейбница — идей, многие из которых в начальной, зародышевой форме имелись еще у древних греков. Начиная со второй четверти XIX в. математика претерпевает революцию, не менее глубокую и значительную по своим последствиям для всего миропознания, чем революция в математике в начале Нового времени, выразившаяся, коротко говоря, в создании анализа бесконечно малых, который, по выражению Эйлера, «вращается» вокруг понятия функции. На протяжении XIX в. происходило неуклонное изменение основных понятий и установок, определяющих область математических исследований, что не означало, разумеется, отказа от идей, унаследованных от XVIII в. При этом самыми главными явились новая постановка проблемы существования математических объектов, особенно в анализе бесконечно малых, а вскоре затем создание нестандартных структур геометрии, арифметики и алгебры. Начало этому процессу положили люди, годы учения которых в большинстве случаев пришлись на первую четверть XIX в., а расцвет творчества на его вторую и третью четверти, люди с новым образом математического мышления: Коши и несколько ранее Больцано в области анализа, Лобачевский и Я. Бояи в геометрии, Галуа, Гамильтон и Грассман в сфере алгебры; их предшественником во многом явился старший годами Гаусс. Впрочем, все это стало ясным, когда новые методы распространились на математику в целом. Первоначально XIX столетие выступило в глазах современников как эпоха яркого расцвета математического анализа и его физических приложений, но, как сказано, в формах, существенно отличных от

прежних. Эти коренные изменения в математике происходили в резко изменившихся по сравнению с XVIII в. экономических и политических условиях, которые повлекли за собой изменение социальной функции математики, создание нового типа ученого, перемены в организации подготовки специалистов и самих исследований и т. д. Роль математики в естествознании, технике, да и в общественных науках неизмеримо возросла в эпоху развитого капитализма, утвердившегося или утверждавшегося в наиболее развитых странах мира. Это потребовало радикальных изменений в системе среднего и еще в большей мере высшего образования. Творческая математическая деятельность в XVII и XVIII вв. была еще в немалой степени делом любителей, нередко самоучек. Во Франции, России, Германии XVIII в. основными математическими центрами являлись государственные Академии наук. В XIX в. математика становится прежде всего университетской наукой и во все возрастающем числе университетов возникает все большее число научных математических школ.

Вопрос о верхней границе периода математики, начавшегося в первые десятилетия XIX в., решается по-разному. Но несомненно, что математика первых десятилетий XX в., характеризуется новыми чертами, отличающими ее от математики середины XIX в. Что касается математического анализа, даже в аспекте задач, имеющих основное значение для математической физики, все более несомненным становится подчинение всего математического анализа обобщающим идеям функционального анализа. Понятая еще в предыдущую эпоху возможность геометрий, отличающихся от трехмерной евклидовой, приводит к тому, что геометрия превращается по преимуществу в теорию классов пространств, более общих, чем трехмерное евклидово. В качестве основы всей математики выдвигается теория множеств, а позднее другой основой всей математики становится логическое исследование строения полностью формализованных дедуктивных теорий.

Все эти тенденции наметились уже в конце XIX в. и получили законченное классическое выражение к 30-м годам XX столетия. Последние выпуски наших очерков, посвященные математике первых четырех десятилетий XX в., имеют своей основной темой кратко охарактеризованную выше перестройку всей математики на существенно расширенной основе. Те работы конца XIX в., которые могут быть полностью освещены лишь в этой более широкой перспективе, тоже описываются в последних выпусках очерков.

Бурный расцвет математики в годы после второй мировой войны находится уже за рамками нашего труда. Исследователи, создавшие математику первых четырех десятилетий XX в., умерли, отошли от активной работы или заняты подведением итогов своих увлечений. Их достижения поддаются достаточно объективной оценке. Для математики после второй мировой войны такая оценка часто была бы затруднительна.

В намеченных хронологических рамках естественно осветить с должной широтой подъем интереса к вычислительной математике, что и будет сделано в одной из глав настоящего издания. Но влияние на проблематику математических исследований создания ЭВМ лежит уже за пределами принятых нами хронологических рамок.

В соответствии со всем сказанным, наши очерки делятся на две серии книг: «Математика XIX века» в четырех книгах и «Математика XX века» в двух книгах.

Так как объем каждой серии весьма велик, то они разделены на несколько книг, содержание которых отражено в их подзаголовках. В первую книгу вошли очерки истории математической логики, алгебры,

теории чисел и теории вероятностей в XIX в. Вторая книга содержит историю геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и вычислительной математики в XIX в. Третья и четвертая книги будут посвящены дальнейшим разделам анализа, включая методы математической физики, и в заключение историографии, а также развитию математического образования и организации научных исследований. Последние, пятая и шестая, книги отведены XX столетию.

Каждая книга содержит в приложении список важнейшей литературы и именной указатель. Названия журналов даются сокращенно, с указанием тома и года издания; если год фактического выхода в свет отличается от формального года издания, то последний приводится в скобках; список сокращений приведен в конце литературного указателя. Оригинальное название иностранных сочинений приводится только один раз, при первом его упоминании. Оригинальная транскрипция фамилий иностранных ученых дана в именном указателе.

Первая глава данной книги была прочитана проф. В. А. Успенским, вторая и третья главы — член.-корр. АН СССР Д. К. Фаддеевым, а вся книга в целом акад. АН Уз.ССР С. Х. Сираждиновым, которым авторы и редакция выражают глубокую благодарность за многие ценные советы и уточнения. Д. К. Фаддееву принадлежат также некоторые вставки, авторство которых, в соответствии с его пожеланием, особо не отмечено.

Москва, 1 июня 1977 г.

*А. Н. Колмогоров  
А. П. Юшкевич*

# Глава первая

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

### Предыстория математической логики

В трехтомной «Истории математики» (ИМ) математическая логика не рассматривалась. Поэтому анализу развития математической логики в XIX в. мы предположим краткий обзор ее предшествующей истории.

Первое дошедшее до нас систематическое построение и изложение логики содержат трактаты Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), объединенные его комментаторами под общим названием «Органон». В «Органон» входят «Категории» (об именах), «Об истолковании» (о суждениях), «Первая Аналитика» (об умозаклучениях), «Вторая Аналитика» (о доказательствах), «Топика» (о доказательстве, опирающемся на положения, представляющиеся вероятными) и примыкающее к ней «Опровержение софистических аргументов». Во «Второй Аналитике» изложена теория доказательств Аристотеля и сформулированы основные требования, предъявляемые к «доказывающей науке», в частности к математике. Подчеркивая строгость логических рассуждений Аристотеля, Лейбниц отметил: «Аристотель был первым, кто писал математически в нематематике»<sup>1</sup>.

Логика другого стиля, своеобразная логика высказываний, была развита философами мегарской школы, основателем которой был ученик Сократа Евклид из Мегар (ок. 450—380 до н. э.). Учеником Евклида был Евбулит из Милета (IV в. до н. э.), с именем которого связываются известные парадоксы — «Лжец», «Куча». Мегарская школа оканчивается Филоном (ок. 300 до н. э.). Однако примерно в это время учеником Филона Зеноном из Китиона (ок. 336—264 до н. э.) создается школа стойков, воспринявших основные идеи и стиль мегариков. Наиболее видным представителем стойков был Хрисипп (ок. 281—208 до н. э.), о котором в свое время говорили, что если бы боги нуждались в логике, то это была бы логика Хрисиппа. Дошедшая до нас в отрывках логика мегарской и стоической школ удивительным образом предвосхищает современное исчисление высказываний.

Период позднегреческой и римской античности с точки зрения истории логики мало исследован, его обычно считают периодом, когда логика мало продвинулась вперед. Однако к этому времени относятся известные комментарии Александра Афродизийского (II—III в.) к Аристотелю, «Введение к „Категориям“» Порфирия (ок. 232 — ок. 304) и труды

<sup>1</sup> Leibniz G. W. Fragmente zur Logik. Berlin, 1960, S. 7.

Бозция (ок. 480 — ок. 524), переводчика и комментатора Аристотеля и Порфирия.

В раннее средневековье логика как самостоятельная наука развивается лишь в арабоязычной литературе. Здесь прежде всего следует упомянуть цикл логических трактатов Абу Насра ал-Фараби (ок. 870—950), логическую часть «Книги исцеления» (души от невежества) Абу Али ибн Сины (Авиценны, 980—1037), комментарии к Аристотелю Ибн Рушда (Аверроэса, 1126—1198) и логический трактат «Основы приобретения [знаний]» Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274), продолжавшего традицию ал-Фараби и Ибн Сины. В указанных сочинениях излагалось и комментировалось содержание «Органона» Аристотеля и, в частности, развивалось дальше его учение о силлогизмах.

В Европе XII—XIV вв. складывается схоластическая логика, приспособившая логику Аристотеля к нуждам церкви. В это время в трудах Пьера Абеляра (1079—1142), Петра Испанского (ок. 1215—1277), Дунса Скотта (ок. 1270—1308), Уильяма Оккама (ок. 1300 — ок. 1350) оформляется так называемая новая логика (*logica modernorum*). В сочинениях этих авторов встречаются многие законы логики высказываний, например законы А. де Моргана, предвосхищаются идеи «универсума» и некоторые другие.

К этому же времени относится идея механизации логических процессов в «Великом и последнем искусстве» (*Ars magna et ultima*) испанского философа Р. Луллия (ок. 1235—1315).

От XIV столетия можно без заметного ущерба для полноты изложения перейти к XVII веку, когда вопросы логики и ее перестройки на новой, алгебраической основе привлекли внимание нескольких ученых, из которых самым крупным был Г. В. Лейбниц (ИМ, т. 2, с. 251—252).

### Символическая логика Г. В. Лейбница

Лейбниц понимал логику в самом широком смысле: она не только искусство суждения и доказательства известных истин, как аналитика Аристотеля, но и искусство изобретения и открытия новых истин.

Изучение трудов Аристотеля произвело большое впечатление на молодого Лейбница и оказало влияние на формирование его логических взглядов. Лейбниц высоко ценил силлогистику Аристотеля. Он писал: «...изобретение силлогистической формы — одно из прекраснейших и даже важнейших открытий человеческого духа. Это своего рода универсальная математика, все значение которой еще не достаточно понято»<sup>2</sup>.

Однако силлогистика Аристотеля является не единственной формой вывода; существуют и более сложные формы. К таким более сложным формам дедукции Лейбниц относит, например, правила сложения, умножения и перестановки членов пропорций у Евклида. То, что является результатом оперирования по этим правилам, носит достоверный характер, а сам процесс получения результата есть доказательство (*argumenta in forma*)<sup>3</sup>.

План усовершенствования и построения логики был у Лейбница таков.

Прежде всего нужно проанализировать все понятия, приводя их к сочетаниям наиболее простых понятий; перечень этих простых, неопределяемых понятий составит «алфавит человеческих мыслей». Затем из

<sup>2</sup> Лейбниц Г. Новые опыты о человеческом разуме. М.—Л., ОНТИ, 1936, с. 423.

<sup>3</sup> Leibniz G. W. Fragmente zur Logik. Berlin, 1960, S. 7—9.

этих простых исходных понятий все остальные понятия могут быть получены путем комбинирования. Анализ понятий позволит провести вместе с тем доказательства всех известных истин, т. е. составить своеобразный их свод — «доказательную энциклопедию».

Наконец, необходимо ввести подходящие символические обозначения для исходных и составных понятий и суждений, создать «всеобщую символику» или «универсальную характеристику».

Символике Лейбниц придавал большое значение. Он подчеркивал, что удачная символика может стать решающим фактором; отмечал, что своими успехами алгебра того времени в значительной мере обязана удачной символике Ф. Виета и Р. Декарта.

Лейбниц предполагал, что всеобщая символика призвана служить международным вспомогательным языком для выражения всего существующего или возможного знания, а также орудием открытия и доказательства новых истин или, как он говорил, искусством изобретения. Для этой последней цели требуется логическое исчисление, создание которого и должно завершить построение новой логики. Лейбниц полагал, что новая логика позволит легко разрешать споры. При наличии различных мнений по какому-либо вопросу противники возьмут перья и скажут: «Посчитаем!»

С составления «алфавита человеческих мыслей» и начал Лейбниц уточнение традиционной логики. Лейбниц исходил из того, что существует некоторое конечное число исходных понятий, на которые разлагаются все остальные понятия и из которых могут средствами комбинаторики составлять новые понятия. Задача будет решена, «...если удастся найти небольшое число мыслей, из которых по порядку возникает бесконечно много других мыслей. Так, из немногих чисел, начиная от 1 до 10, происходят по порядку все остальные числа»<sup>4</sup>.

Исходные понятия Лейбниц называет терминами первого порядка и помещает их в первый класс. Второй класс образуют термины второго порядка, т. е. сочетания терминов первого порядка по два. Пары, отличающиеся порядком терминов, не различаются. Третий класс составят термины третьего порядка, образуемые сочетаниями по три термина первого порядка или сочетаниями терминов первого порядка с терминами второго порядка, и т. д.

В зависимости от способа комбинирования каждый составной термин может иметь несколько выражений. Для выяснения тождественности выражений достаточно разложить выражения на простые, т. е. термины первого порядка: если окажется, что соответствующие термины первого порядка совпадают, то данные выражения являются записью одного и того же составного термина.

Таким образом, анализ понятия состоит в разложении его на составляющие элементы — термины первого порядка.

Каждое суждение Лейбниц представляет в субъектно-предикатной форме  $a \text{ est } b$  ( $a$  есть  $b$ ). Истинными он называет суждения, предикат которых содержится в субъекте. Для анализа некоторой истины нужно оба термина суждения о рассматриваемой истине разложить на исходные понятия и сопоставить их.

Между анализом истин и анализом понятий существует различие: если предполагается, что анализ понятия до исходного обязателен (и возможен), то анализ истин не предполагается обязательно законченным.

<sup>4</sup> *Leibniz G. W. Opuscles et fragments inédits de Leibniz. L. Couturat (Ed.). Paris, 1903, p. 429—432.*

«Потому что анализ истины закончен,— пишет Лейбниц,— когда найдено ее доказательство, и не всегда необходимо заканчивать анализ субъекта или предиката для того, чтобы найти доказательство суждения. Чаще всего уже начала анализа вещей достаточно для анализа или совершенного знания истины, которая известна о вещи»<sup>5</sup>.

Анализ отношений Лейбниц понимает как перевод с языка, содержащего многоместные отношения, на язык, где все суждения имеют субъектно-предикатную форму.

На аналогии между разложением понятий на термины первого порядка и разложением чисел на простые множители Лейбниц основывает арифметическую интерпретацию логики. Известно несколько вариантов такой интерпретации. Один из первых вариантов изложен в его работе «Начала исчисления» (*Elementa calculi*, 1679)<sup>6</sup>. В этой интерпретации каждому термину приписывается характеристическое число. Характеристические числа — натуральные; терминам, соответствующим исходным понятиям (т. е. понятиям из «алфавита»), приписываются простые числа. Составным терминам числа приписываются в соответствии с правилом: характеристическое число составного термина равно произведению характеристических чисел составляющих терминов. Определение некоторого термина, таким образом, сводится к разложению на простые множители; полученное определение однозначно в силу однозначности разложения чисел на простые множители (с точностью до порядка; для составляющих терминов порядок также несуществен).

В этом варианте отсутствовало понятие противоречивости терминов, без которого нельзя было интерпретировать отрицательные суждения. У Лейбница это понятие используется в другой интерпретации. Лейбниц обозначает отрицание знаком минус «—» и приписывает теперь каждому термину два характеристических числа — положительное и отрицательное. При этом «+» и «—» используются уже не как знаки арифметических операций: все делители характеристического числа, снабженного знаком «—», получают знак «—», аналогично, все делители характеристического числа со знаком «+» получают также «+».

Лейбниц определяет условия, когда некоторый термин *P* содержится в термине *S*, истолковывает классические формы категорических суждений. Интерпретацию этих форм суждений он использует для проверки модусов силлогизмов.

Для выявления логических связей между понятиями Лейбниц использовал и геометрические схемы. В его философских работах, опубликованных Герхардтом<sup>7</sup>, встречаются линейные схемы, в которых понятия обозначаются отрезками параллельных прямых, а через концы отрезков проводятся пунктирные линии, обозначающие, включают ли понятия друг друга полностью, частично, или вовсе не включают. Как выяснил Л. Кутюра, Лейбниц в сочинении «О выводе логических форм, проведенном посредством линий»<sup>8</sup> использует также и круговые схемы, аналогичные схемам Л. Эйлера (*De formae logicae comprobatione per linearum ductus*).

На рис. 1 приведено представление Лейбницем четырех классических суждений *a*, *e*, *i*, *o* на линейных схемах двух видов и с кругами. По поводу круговых схем Лейбниц замечает, что они допускают неоднознач-

<sup>5</sup> *Leibniz G. W. Die philosophische Schriften*. Bd 7. Berlin, hsg. von C. Gerhardt, 1890, S. 82—85.

<sup>6</sup> *Leibniz G. W. Opusculs et fragments inédits de Leibniz*. Paris, 1903, p. 49—57.

<sup>7</sup> *Leibniz G. W. Die philosophische Schriften*. Bd 7. Berlin, hsg. von C. Gerhardt, 1890.

<sup>8</sup> *Leibniz G. W. Opusculs et fragments inédits de Leibniz*. Paris, 1903, p. 293—321.

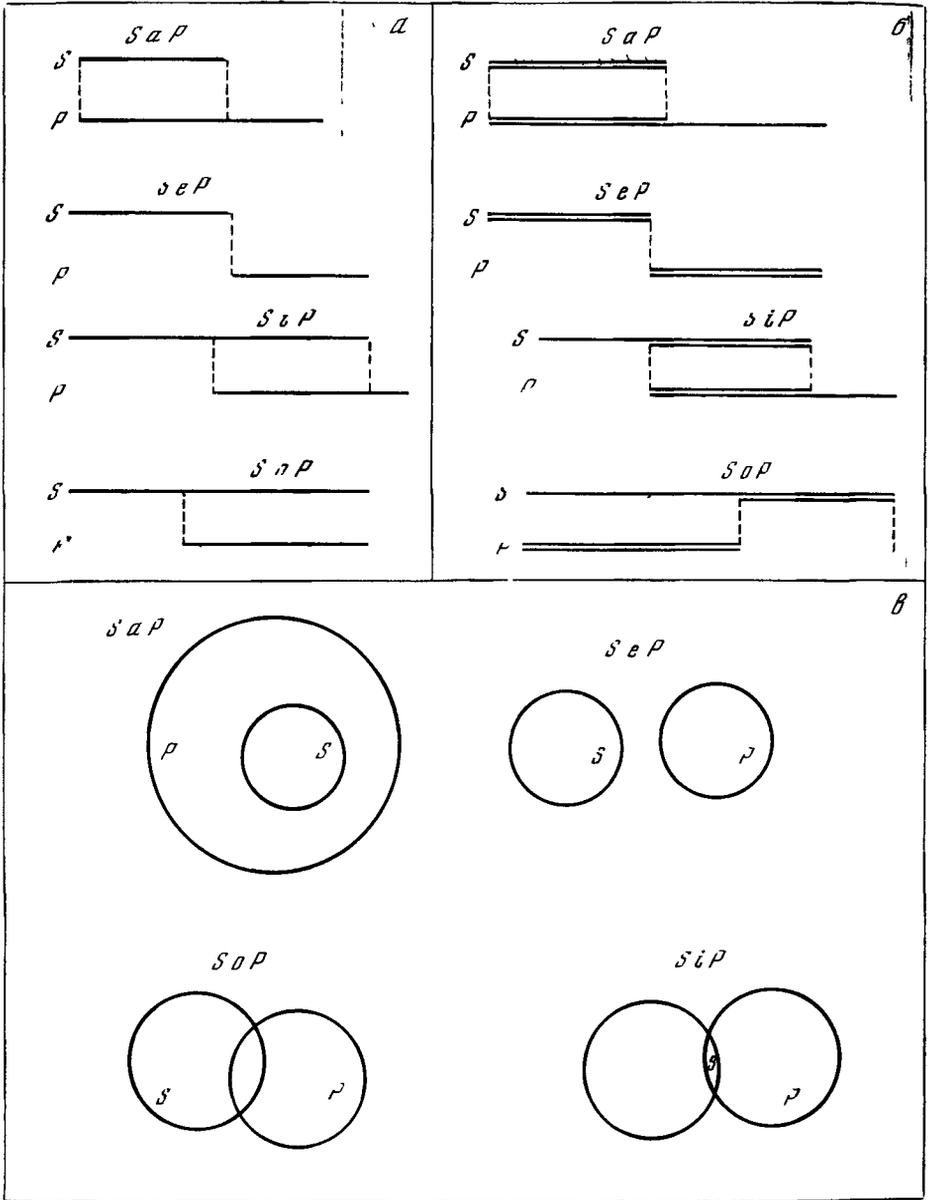


Рис. 1

ное истолкование. Так, схема суждения  $SaP$  может быть понята и как «Некоторые  $P$  не суть  $S$ », схемы же для  $SiP$  и  $SoP$  практически одинаковы. На рис. 2 приведены примеры линейных и круговых схем Лейбница для представления некоторых модусов силлогизмов типа  $aaa$  и  $eee$ , обычно называемых *Barbara* и *Cesare*.

Однако эта работа Лейбница оставалась неизвестной до 1903 г., когда была опубликована Кутюра. Основателем геометрических методов в логике принято считать Л. Эйлера. Интерпретацию силлогистики Аристо-

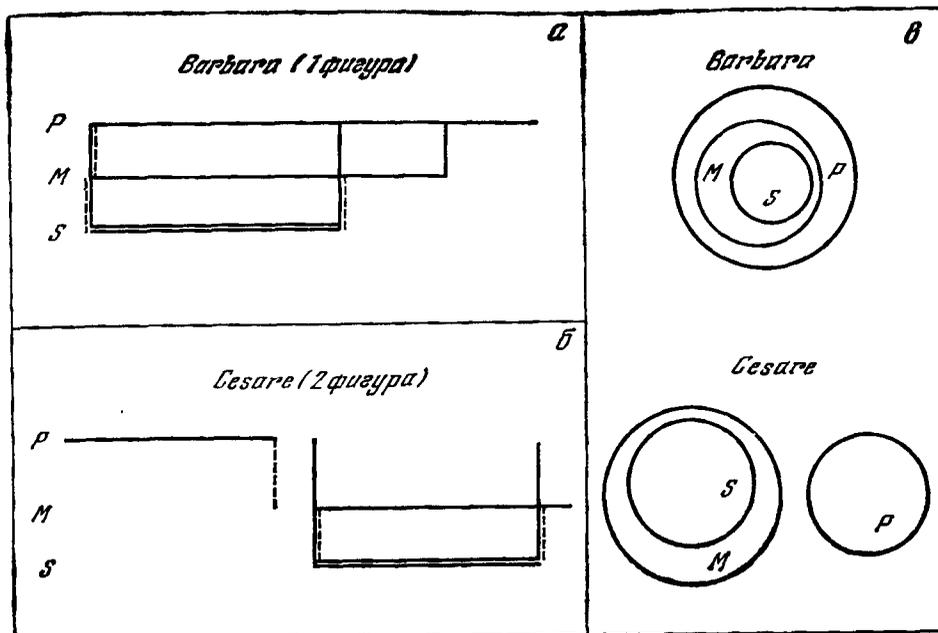


Рис. 2

теля на схемах с кругами Эйлер изложил во втором томе своих «Писем к одной немецкой принцессе» (*Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, t. 2. St.-Petersbourg, 1768)<sup>9</sup>.

Как уже указывалось, усовершенствование логики Лейбниц предполагал завершить созданием логического исчисления. Он сделал несколько набросков логического исчисления, однако ни один из них не был разработан детально и доведен до конца.

Для обозначения терминов Лейбниц использовал строчные латинские буквы  $a, b, c, \dots$ . У него имеется одна двуместная операция — приписывание символа справа  $ab$ . Из правил вывода явно сформулировано правило подстановки, разрешающее в истинном суждении заменять некоторую переменную термином или другой переменной. В качестве связок он использовал *est* для включения, *sunt idem* или *eadem sunt* для равенства, *diversa sunt* для неравенства. Отрицание  $a$  обозначается через *non a*. Хотя Лейбниц различал аксиомы логического исчисления (*propositiones per se verae*) и суждения, выводимые из аксиом (*verae propositiones*), однако четкого разграничения аксиом и теорем в его исчислениях нет, приводя ряд утверждений, он доказывает лишь некоторые из них.

В качестве примеров аксиом, видимо, можно привести следующие утверждения:

- (1)  $ab = ba$ , (2)  $aa = a$ , (3)  $a \text{ est } a$ , (4)  $ab \text{ est } a$ .

Примеры теорем:

- (1) если  $a \text{ est } b$ , то  $ac \text{ est } bc$ ,  
 (2) если  $a \text{ est } b$  и  $b \text{ est } a$ , то  $a = b$ ,  
 (3) если  $a \text{ est } c$  и  $b \text{ est } c$ , то  $ab \text{ est } c$ .

<sup>9</sup> Эти «Письма» опубликованы: *Euleri L. Opera omnia*, ser. 3, v. 11—12. Имеется рус. перев. С. Я. Румовского: *Эйлер Л. Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе*. Ч. 2. СПб., 1772 (и др. издания).

В силу различных обстоятельств большая часть работ Лейбница, относящихся к логике, увидела свет уже в начале нашего столетия. Изучение наследия Лейбница в этой области явилось большой заслугой французского математика и философа Луи Кутюра (1868—1914), который сперва на основе изучения рукописей Лейбница, хранящихся в Ганновере, написал книгу «Логика Лейбница» (*La Logique de Leibniz, Paris, 1901*), а затем опубликовал не раз цитированные «*Opuscules et fragments inédits de Leibniz*» (1903), содержащие более 200 неизданных ранее заметок и фрагментов.

Однако неверно думать, что идеи Лейбница не сыграли роли в формировании математической логики. Они оказали влияние на некоторых ученых XVIII в., таких, как И. А. фон Зегнер (1704—1777), который занимался не только математикой и естествознанием (ИМ, т. 3, с. 97), но и логикой, где довольно широко применял символические обозначения, или же как профессор логики и философии в Тюбингене Г. Плуке (1716—1790), пытавшийся разработать целую систему «логического исчисления» (*des logischen Kalküls*). Оригинальные идеи в логику ввел выдающийся математик И. Г. Ламберт, имя которого не раз встречалось в III томе «Истории математики». Не входя в разбор соответствующих работ Ламберта, в значительной части относящихся к исчислению высказываний, и его споров по некоторым вопросам с Плуке, отметим, что у него уже встречается идея квантификации предиката, вновь получившая развитие в трудах английских ученых XIX в.

Математическая логика возникает в результате применения математических, в особенности алгебраических, методов к решению задач логики. Элементы математической логики возникали в работах математиков и логиков предшествующих периодов. Однако самостоятельной научной областью математическая логика становится в XIX веке, тогда же входит в обиход и термин «математическая логика». Одной из основных задач логики всегда оставалась проблема вывода следствий из посылок. Количественное определение сказуемого, как будет показано, дает принципиальную возможность выразить исходные данные (посылки) в виде равенств. Аналогии с алгеброй подсказывают пути преобразования этих равенств — введение операций, аналогичных операциям алгебры. Эти аналогии, как мы видели, были подмечены давно, а Лейбниц продвинулся далеко вперед в алгебраизации логики. Наиболее полно эти идеи воплотились в трудах представителей нового направления логики в XIX веке. В результате попыток приспособления аппарата алгебры к нуждам логики возникает алгебраическая структура, получившая впоследствии название булевой алгебры. Вот современное ее определение.

Булевой алгеброй называется множество  $A$  с двумя выделенными элементами, обозначаемыми 0 и 1, в котором определены две двуместные операции  $+$ ,  $\cdot$  и одна одноместная  $\bar{\phantom{x}}$ , такие, что

- (1)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,  $x + y = y + x$ ,
- (2)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ,  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
- (3)  $x \cdot (x + y) = x$ ,  $x + xy = x$ ,
- (4)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + xz$ ,
- (5)  $x \cdot \bar{x} = 0$ ,
- (6)  $x + \bar{x} = 1$ .

Одним из примеров булевой алгебры является алгебра классов, в которой элементами служат классы — подмножества некоторого фиксиро-

рованного множества  $U$ , называемого универсумом, где  $\emptyset$  обозначает пустой класс,  $+$  — объединение,  $\cdot$  — пересечение, а  $^-$  — дополнение до  $U$ . Под классами часто понимаются объемы терминов, поэтому алгебру классов называют иногда логикой классов.

Первые системы указанного выше типа сформулировали Дж. Буль и де Морган, в дальнейшем они были усовершенствованы в трудах других логиков XIX в. Квантификация предиката (количественное определение сказуемого) была осуществлена несколько раньше.

### Квантификация предиката

В традиционных категорических суждениях глагол «есть» («суть») понимается как нестрогое включение. Например, предложение «все  $x$  суть  $y$ » может означать как « $x$  равно  $y$ », так и « $x$  составляет (собственную) часть  $y$ ». Квантификация предиката состоит в уточнении того, весь объем сказуемого или только его часть совпадает (или не совпадает) с объемом подлежащего. Это уточнение достигается добавлением выражения «все» или «некоторые» к именной части сказуемого. В результате вместо четырех традиционных форм категорических суждений

- a*: Все  $x$  суть  $y$ ,
- e*: Ни один  $x$  не есть  $y$ ,
- i*: Некоторые  $x$  суть  $y$ ,
- o*: Некоторые  $x$  не суть  $y$ ,

получается восемь форм:

- Все  $x$  суть все  $y$ ,
- Все  $x$  суть некоторые  $y$ ,
- Некоторые  $x$  суть все  $y$ ,
- Некоторые  $x$  суть некоторые  $y$ ,
- Ни одно  $x$  не есть ни одно  $y$ ,
- Ни одно  $x$  не есть некоторое  $y$ ,
- Некоторые  $x$  не суть некоторые  $y$ ,
- Некоторые  $x$  не суть ни одно  $y$ .

При этом изменяют свой традиционный смысл «все» и «некоторые». Традиционно «некоторые» понималось как «некоторые, а возможно и все», теперь оно понимается как «по крайней мере некоторые, но не все». «Все» употребляется в коллективном смысле, в смысле объема всего класса. Так, в суждении вида «все  $x$  суть все  $y$ » речь идет о полном совпадении объемов подлежащего и сказуемого, т. е. о равенстве  $x$  и  $y$ , и его можно записать в виде  $x = y$ . Если обозначить через  $v$  некоторый собственный подкласс класса  $y$ , то суждение «все  $x$  суть некоторые  $y$ », т. е. включение  $x$  в  $y$  можно записать в виде равенства  $x = vy$ . Аналогично можно записать и все остальные предложения.

Истолкование элементарных предложений традиционной силлогистики с точки зрения тождества (равенства) объемов субъекта и предиката получено английским ботаником Дж. Бентамом (1800—1884), опубликовано в «Наброске новой системы логики» (Outline of a new system of logic. London, 1827), но осталось вначале незамеченным. Независимо от Бентама указанные восемь форм получил шотландский философ Уильям Гамильтон (1788—1856), профессор логики и метафизики Эдинбургского университета (философа Уильяма Гамильтона не следует смешивать с его несколько младшим современником ирландским математиком Уильямом Роуеном Гамильтоном). Подробное изложение результатов Гамильтона содержится в его «Лекциях о метафизике и логике» (Lectures on metaphysics and logic. Edinburgh—London, 1860).

Несколько позднее Гамильтона к аналогичным идеям в области силогистики пришел А. де Морган, который, однако, продвинулся в разработке логики гораздо дальше. Узнав об одной работе, посланной де Морганом Кембриджскому философскому обществу, Гамильтон направил де Моргану резюме своей концепции логики. Вскоре затем между ними вспыхнул долгий и бесплодный спор о приоритете, который мы оставим в стороне и обратимся к логике де Моргана.

### «Формальная логика» А. де Моргана

Август (Огёст) де Морган (1806—1871) родился в Индии, в семье полковника английских войск, получил высшее образование в Кембриджском университете. В 1828—1831 и 1836—1866 гг. он состоял профессором математики Лондонского университетского Колледжа; среди его учеников были И. Тодгентер и Дж. Сильвестр. В 1865 г. он, как первый президент Лондонского математического общества, открыл своей вступительной речью его заседания. Де Морган сделал ряд открытий в алгебре и анализе, о которых еще будет сказано далее. В одной статье 1838 г. он ввел термин «математическая индукция», который затем получил широкое распространение благодаря учебнику алгебры Тодгентера. В математике, как и в ее преподавании, де Морган интересовал более всего основные принципы и их строго логическое развитие. Математику и логику он называл очами точного знания и выражал сожаление, что математики не более заботятся о логике, чем логики о математике. Сам он стремился сблизить обе науки и его главной заслугой явилось построение логики по подобию математических наук.

В своей «Формальной логике или исчислении необходимых и вероятных заключений» (*Formal logic, or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847*) де Морган исходил из принципа, что логика должна служить точному выражению мыслей и устранять неясности и двусмысленности, присущие обыденному языку.

В каждом языке существуют так называемые положительные и отрицательные термины. Но это подразделение в значительной мере случайно — в одном языке может существовать отрицательный «парный» термин для данного, в другом языке он не обязательно имеется. Да и в каждом языке не все термины снабжены соответствующими отрицательными. Тем не менее каждый термин разделяет «совокупность сущностей» на две группы: обладающие и не обладающие отмеченными данным термином признаками. Каждое имя, таким образом, имеет свое отрицание, например, «совершенный» и «не-совершенный», «человек» и «не-человек». Логика не только должна учитывать этот факт, но и выражать его. Однако с отрицанием в логике всегда существовали трудности. Выражаясь словами В. Минто, в логике отрицать какое-нибудь качество — значит просто утверждать, что оно не принадлежит данному предмету, отрицание только устраняет, уничтожает, но не позволяет ничего подразумевать. «Не-*b*» есть нечто совершенно неопределенное: оно может заключать в себе все, что угодно, кроме *b*»<sup>10</sup>. Для устранения такой неопределенности отрицания де Морган вводит в рассмотрение понятие «целого» или «универсума», выбираемого в зависимости от предмета исследования. Так, если *X* означает некоторый класс предметов (правда, де Морган чаще говорит об именах, обозначающих предметы), то все то в «целом» («универсуме»), что не есть *X*, следует считать за не-*X*. Если для не-*X* ввести обо-

<sup>10</sup> Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика. М., 1896, с. 48.

значение  $x$ , то в результате станет очевидным отсутствие принципиальной разницы между утвердительными и отрицательными предложениями: «Никакое  $X$  не есть  $Y$ » означает то же самое, что «Все  $X$  суть не- $Y$ », т. е. «Все  $X$  суть  $y$ ».

Установив, что с указанной точки зрения  $X$  и  $x$  равноправны, де Морган вместо пары терминов предложений традиционной силлогистики  $X$  и  $Y$ , рассматривает четыре пары  $X, Y; x, y; X, y; x, Y$ , дающие 16 логически возможных комбинаций, из которых различны восемь. Для них де Морган использует двойные обозначения: буквы  $A_1, F., I_1, O_1, A', E', I', O'$ , указывающие на связь с обозначениями элементарных предложений традиционной силлогистики, и знаки  $X) Y; X.Y; X : Y; XY; x) y$  и т. д.:

$A_1$  «Каждый  $X$  есть  $Y$ »  $X) Y$ ;  $A'$  «Каждый  $x$  есть  $y$ »  $x) y$ ;  
 $E_1$  «Ни один  $X$  не есть  $Y$ »  $X.Y$ ;  $E'$  «Ни один  $x$  не есть  $y$ »  $x.y$ ;  
 $I_1$  «Некоторые  $X$  суть  $Y$ »  $XY$ ;  $I'$  «Некоторые  $x$  суть  $y$ »  $xy$ ;  
 $O_1$  «Некоторые  $X$  не суть  $Y$ »  $X : Y$ ;  $O'$  «Некоторые  $x$  не суть  $y$ »  $x : y$ .

Для этих предложений, называемых им простыми (simple), де Морган устанавливает следующие равносильности:

$$\begin{aligned} X)Y &= X.y = y)x; & x)y &= x.Y = Y)X; \\ X.Y &= X)y = Y)x; & x.y &= x)Y = y)X; \\ XY &= X : y = Y : x; & xy &= x : Y = y : X; \\ X : Y &= Xy = y : x; & x : y &= xY = Y : x \end{aligned}$$

(здесь « $=$ » используется де Морганом в смысле равносильности, в другом смысле он использует этот знак в выражении  $X)Y + Y)Z = X)Z$ , где « $=$ » означает «следовательно»).

Используя знак « $+$ » для конъюнктивной связи простых предложений, де Морган строит составные (complex) предложения или отношения:

$$\begin{aligned} D &= A_1 + A' = X)Y + x)y; & C &= E_1 + E' = X.Y + x.y; \\ D_1 &= A_1 + O' = X)Y + x : y; & C_1 &= E_1 + I' = X.Y + xy; \\ D &= A' + O_1 = xy + X : Y; & C' &= E' + I_1 = x.y + XY; \\ P &= I_1 + I' + O_1 + O'. \end{aligned}$$

В обычной для нас символике  $D$  есть « $X = Y$ »,  $D_1$  есть « $X \subset Y$ »,  $D'$  есть « $X \supset Y$ »,  $C$  есть « $X = y$ »,  $C_1$  есть « $X \subset y$ »,  $C'$  есть « $X \supset y$ »,  $P$  означает, что ни один из классов  $X \cap Y, X \cap y, x \cap Y, x \cap y$  не пуст.

Введенные таким образом отношения являются исходными для построения теории силлогизмов де Моргана. Силлогизм, посылками которого служат составные предложения, он называет составными (complex syllogism) и отмечает, что, с его точки зрения, и составные предложения, и составные силлогизмы проще традиционных «простых».

Не вдаваясь в подробности теории силлогизмов де Моргана, отметим следующее обстоятельство. В качестве силлогистических терминов де Морган использует сначала так называемые простые имена (простые термины)  $X, Y, Z$  и т. д. Затем он вводит в рассмотрение составные имена (составные термины):  $PQ$  есть имя того, «что есть сразу  $P$  и  $Q$ » (т. е.  $P \cap Q$  в символике теории классов),  $P * Q$ <sup>11</sup> есть имя того, «что есть  $P$  или  $Q$ , или  $P$  и  $Q$  сразу» (т. е.  $P \cup Q$ ).  $U$  — имя универсума,  $u$  — имя отрицания универсума (т. е. пустого множества). Введя то, что мы бы теперь

<sup>11</sup> Де Морган использовал для такого составного имени запись « $P, Q$ ».



А. ДЕ МОРГАН

назвали операциями пересечения и объединения, де Морган устанавливает такие свойства, как:

$$XU = X; \quad Xu = u; \quad X * U = U; \quad X * u = X,$$

формулирует законы, называемые теперь «законами де Моргана»:

отрицание  $PQ$  есть  $p * q$ ; отрицание  $P * Q$  есть  $pq$ , устанавливает дистрибутивность

$$(P * Q)(R * S) = PR * PS * QR * QS,$$

а затем строит теорию силлогизмов, используя составные имена в качестве субъектов и предикатов посылок <sup>12</sup>.

Таким образом, в своей теории силлогизмов де Морган использовал систему, названную позже «алгеброй Буля». Эта система впервые отчетливо появилась у Девонса.

Позже де Морган ввел общее понятие отношения и операций над отношениями. Этим он фактически заложил фундамент современной теории отношений, развитой в дальнейшем в различных направлениях и с разных точек зрения Ч. Пирсом, Э. Шрёдером, Дж. Пеано, Г. Кантором, Г. Фреге, Б. Расселом.

Де Моргана часто упрекали впоследствии в том, что его блестящие и остроумные идеи терялись в его изложении, перегруженном деталями, многочисленными и новыми для читателя обозначениями; подчеркива-

<sup>12</sup> Morgan A. de. Formal logic... Ch. 6. London, 1847.

ние разнообразных оттенков смысла значения терминов также затрудняло восприятие его идей, разбивало впечатление, не оставляло представления о системе в целом. Тем не менее глубина и точность наблюдений, многообразие идей, содержащихся в его произведениях, заставляют думать, что наследие де Моргана изучено далеко не полностью.

### Алгебра логики Дж. Буля

Почти в одно время с де Морганом выступил с логико-математическими работами Джордж Буль (1815—1864), сын сапожного мастера, увлекавшегося математикой и изготовлением оптических приборов. Деловые качества Буля-отца были весьма посредственными, и он не смог дать сыну высшее образование. Джордж Буль окончил только начальную школу и дальнейшие знания приобретал самоучкой. Так, он изучил многие языки; рано приняв решение отдаться всецело математике, он без посторонней помощи проштудировал «Математические начала» Ньютона, «Аналитическую механику» Лагранжа и другие труды. На жизнь он зарабатывал как учитель. Свои математические исследования Буль начал с разработки операторных методов анализа и теории дифференциальных уравнений, а затем, подобно де Моргану, с которым подружился, занялся математической логикой.

Младшая дочь Буля Этель-Лилиан, в замужестве Войнич, прославилась как автор романа «Овод» о борьбе карбонариев за независимость Италии.

Два основных труда Буля носят весьма характерные названия. Это «Математический анализ логики, являющийся опытом исчисления дедуктивного рассуждения» (*The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, 1847*) и «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятности» (*An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability. London, 1854*). В них были заложены основы современной математической логики<sup>13</sup>. Именно Буль отчетливо осуществил так называемое количественное истолкование объектов логики и последовательно применял новый подход к решению проблем логики.

Этот новый подход с неизбежностью требовал не только изменения и расширения области традиционной логики, но и соответствующего изменения и расширения символического языка алгебры: выбора подходящей символики, операций и законов, определяющих эти операции и отражающих специфику объектов исследования, т. е. по существу создания нового исчисления.

Буль подчеркивал, что сущность этого исчисления в особенностях операций и законов, которым подчинены эти операции: «Те, кто знаком с настоящим состоянием символической алгебры, отдадут себе отчет в том, что обоснованность процессов анализа зависит не от интерпретаций используемых символов, а только от законов их комбинирования. Каждая интерпретация, сохраняющая предложенные отношения, равно допустима, и подобный процесс анализа может, таким образом, при одной интерпретации представлять решение вопроса, связанного со свойствами чисел, при другой — решение геометрической задачи и при третьей — решение проблемы динамики или оптики. Необходимо подчеркнуть фундаментальность этого принципа...»<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> О занятиях Буля принципами теории вероятностей см. с. 238—239.

<sup>14</sup> *Boole G. The mathematical analysis of logic... Cambridge, 1847, p. 3.*



ДЖ. БУЛЬ

Именно в этом состоит то принципиально новое, что внес Буль в представление об исчислении,— в ясном осознании абстрактности исчисления, в том, что исчисление определяется теми законами, которым мы подчиним операции.

В качестве исходных символов Буль принимает <sup>15</sup>

1)  $x, y, z$  — символы классов,

2)  $+, -, \times$  — символы операций, вместо знака  $\times$  он часто использует точку  $\cdot$  или просто опускает знак операции,

3)  $=$  — символ тождества.

Выражение  $x \cdot y$  употребляется Булем для обозначения класса всех тех и только тех элементов, которые являются элементами как класса  $x$ , так и класса  $y$ .

Если классы  $x$  и  $y$  не имеют общих элементов, то через  $x + y$  обозначается класс, состоящий из элементов класса  $x$  и элементов класса  $y$ .

Если всякий элемент класса  $y$  является элементом класса  $x$ , то через  $x - y$  обозначается класс, состоящий из всех тех и только тех элементов  $x$ , которые не являются элементами  $y$ .

Итак, на множестве классов Буль вводит три операции:  $\cdot, +, -$ ; при этом две последние определены не на любых парах классов.

<sup>15</sup> Следует иметь в виду, что Буль не строит свою систему в виде исчисления в современном смысле: он не отделяет постулируемые свойства операций от выводимых.

Указываются простейшие свойства введенных операций:

1)  $x \cdot y = y \cdot x$ ,

2)  $x + y = y + x$ , причем здесь равенство понимается в «обе стороны» — если допустима запись  $x + y$ , то допустима и  $y + x$ , и обе выражают один и тот же класс;

3)  $x \cdot x = x$ ;

4) более общо, если  $x$  — подкласс класса  $y$ , то  $x \cdot y = x$ ; это условие является и достаточным для того, чтобы  $x$  был подклассом класса  $y$ ;

5)  $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$ ; здесь равенство следует понимать «в одну сторону», именно: если допустима запись  $z \cdot (x + y)$ , т. е. классы  $x$  и  $y$  не пересекаются, то допустима и запись  $z \cdot x + z \cdot y$ , представляющая тот же самый класс, но не наоборот; из того, что  $z \cdot x$  не пересекается с  $z \cdot y$ , вообще говоря, не следует, что  $x$  не пересекается с  $y$ , хотя Буль и не оговаривает этого, однако он всегда использует, так сказать, дистрибутивные классы;

6)  $z \cdot (x - y) = z \cdot x - z \cdot y$ , относительно этого равенства также нужно сделать только что приведенное замечание.

Буль замечает, что условие « $0 \cdot y = 0$  для любого класса  $y$ » будет заведомо выполнено, если символ 0 обозначает «Nothing», пустой класс, а условие « $1 \cdot y = y$  для любого класса  $y$ » выполнено, если через 1 обозначить такой класс, что любой класс является его подклассом. Таким классом является универсальный класс (универсум), обозначаемый через 1.

Если в системе классов есть универсум 1, то имеет место закон противоречия: для любого класса  $x$

$$x(1 - x) = 0. \quad (1)$$

В самом деле,  $x = x \cdot x$ , следовательно,  $x - x \cdot x = 0$ ,  $x$  — подкласс класса 1, значит, есть класс  $x(1 - x)$ , но по свойству 5)

$$x(1 - x) = x - x \cdot x = 0.$$

Введенные Булем операции  $+$  и  $-$  определены, вообще говоря, не для любых пар классов; доопределение их на любые пары до общепринятых теперь теоретико-множественных операций в силу специфики определения Буля возможно двумя путями:

а) либо под  $x + y$  понимать объединение классов  $x$  и  $y$  независимо от того, пересекаются они или нет;

б) либо под  $x + y$  понимать симметрическую разность классов  $x$  и  $y$ , тогда  $x - y$  также должно означать симметрическую разность, ибо последняя обратна самой себе.

Учитывая наличие универсума 1 в системе, первый путь ведет, по существу, к построению булевой алгебры, а второй — булева кольца. Представление в форме булева кольца дано И. И. Жегалкиным<sup>16</sup>.

Отметим, что хотя операции, введенные Булем, определены не всюду, они представляют так называемую полную систему связей, т. е. все теоретико-множественные операции в них выразимы, именно, пересечение  $x$  и  $y$  выражается через  $x \cdot y$ , дополнение  $x$  через  $1 - x$ , объединение  $x$  и  $y$  — через  $xy + x(1 - y) + y(1 - x)$ . Буль дает это выражение объединения классов через введенное им сложение<sup>17</sup>.

<sup>16</sup> Жегалкин И. И. О технике вычисления предложений в символической логике. — Матем. сб., 1927, 34, вып. 1.

<sup>17</sup> Boole G. An investigation of the laws of thought... London, 1854, p. 62.

Термины «логическое уравнение», «логическая функция» Буль употребляет для обозначения какого-либо уравнения или функции, содержащих символы классов  $x, y, \dots$ . Примеры функций

$$f(x) = x, \quad f(x) = (1+x)/(1-x), \quad f(x, y) = (x+y)/(x-2y).$$

Если равенство  $x(1-x) = 0$  рассматривать как алгебраическое уравнение, т. е. считать  $x$  принимающим числовые значения, то это уравнение имеет корни 0 и 1. «Это наводит на мысль, — пишет Буль, — вместо определения меры согласованности символов логики с числовыми символами непосредственно сопоставлять логическим символам количественные символы, принимающие лишь значения 0 и 1»<sup>18</sup>.

Исходя из этого замечания, Буль принимает следующий общий способ обращения с логическими функциями и логическими уравнениями: «Поскольку процессы формального рассуждения зависят от законов, которым подчинены символы, а не от природы их интерпретации, мы позволим себе трактовать символы  $x, y, \dots$  так, как если бы они были количественными символами вышеописанного рода. Мы можем в действительности пренебречь логической интерпретацией символов данного уравнения, считать их количественными символами, принимающими лишь значения 0 и 1, выполнить над ними как таковыми все обычные приемы решения, а в конце возвратить им их логическую интерпретацию»<sup>19</sup>.

В соответствии с этим соглашением вместо символов  $x, y, z, \dots$  в «логические функции» можно подставлять значения 0 и 1: если  $f(x) = (a+x)/(a-2x)$ , то  $f(0) = a/a$ ,  $f(1) = (a+1)/(a-2)$ . При этом Буль многократно подчеркивает, что промежуточные результаты вовсе не обязательно будут иметь логическую интерпретацию.

Всякую функцию  $f(x)$  можно представить в виде

$$f(x) = ax + b(1-x).$$

Действительно, полагая в этом равенстве  $x = 1$ , мы получим  $f(1) = a$ , при  $x = 0$  будем иметь  $f(0) = b$ , т. е.

$$f(x) = f(1)x + f(0)(1-x).$$

Аналогично

$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)(1-x),$$

но так как

$$f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)(1-y), \quad f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)(1-y),$$

то

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)(1-x)y + f(0, 0)(1-x)(1-y).$$

Множители  $x$  и  $(1-x)$  в разложении функции  $f(x)$  и множители  $xy$ ,  $x(1-y)$ ,  $(1-x)y$ ,  $(1-x)(1-y)$  в разложении  $f(x, y)$  Буль называет конститuentами и формулирует общее правило разложения функций по конститuentам:

1) составить полный набор конститuent искомого разложения,

2) найти коэффициенты разложения,

3) умножить каждую конститuentу на соответствующий коэффициент и результаты сложить.

Для получения конститuent нескольких переменных, например  $x, y$ ,

<sup>18</sup> Ibid., p. 41.

<sup>19</sup> Ibid., p. 76.

$z$ , предлагается следующий прием: в качестве первой конstituенты взять произведение данных символов  $xuz$ ; заменить в этом произведении один из сомножителей, скажем  $z$  на  $(1 - z)$ , получим новую конstituенту  $xu(1 - z)$ ; в полученных таким образом двух конstituентах заменить какой-нибудь из исходных символов, например  $y$  на  $(1 - y)$ ; заменив в четырех конstituентах оставшийся исходный символ  $x$  на  $(1 - x)$ , будем иметь полный набор конstituент для  $x, y, z$ :

$$\begin{array}{cccc} xuz, & xu(1 - z), & x(1 - y)z, & x(1 - y)(1 - z), & (1 - x)yz, \\ & (1 - x)y(1 - z), & (1 - x)(1 - y)z, & (1 - x)(1 - y)(1 - z). \end{array}$$

Аналогично составляются наборы конstituент для любого конечного списка исходных символов.

Для определения коэффициента некоторой конstituенты в разложении данной функции нужно заменить на 1 те символы в выражении этой функции, которые входят сомножителями в эту конstituенту, и заменить на 0 те символы, дополнения которых входят в данную конstituенту. Так, для функции  $f(x, y) = (x + y)/(x - 2y)$  конstituента  $(1 - x)y$  будет иметь коэффициент  $f(0, 1) = -1/2$ , а конstituента  $x(1 - y)$  — коэффициент  $f(1, 0) = 1$ .

Сумма всех конstituент для любого разложения равна единице. Произведение любых двух конstituент равно нулю.

Таким образом, конstituенты разложения логической функции могут быть истолкованы как все возможные разбиения универсума на попарно не пересекающиеся классы. Так, класс  $x$  разбивает универсум на  $x$  и  $1 - x$ ; два класса  $x$  и  $y$  образуют  $xy, x(1 - y), (1 - x)y, (1 - x)(1 - y)$  и т. д.

Буль вводит операции над классами, чтобы применять их для решения логических уравнений.

Пусть дано уравнение  $w = v$ , где  $w$  — символ некоторого класса,  $v$  — логическая функция. Решить это уравнение относительно любого класса, входящего в  $v$ , значит выразить этот класс через остальные. Для этого Буль рекомендует формально выразить этот класс, пользуясь алгебраическими преобразованиями. Если при этом результат не истолковывается логически, например имеет вид дроби, то нужно разложить полученное выражение по конstituентам всех содержащихся в нем символов, а затем проинтерпретировать в соответствии с правилами:

1) все конstituенты с коэффициентом 1 входят в заключительное выражение;

2) все конstituенты с коэффициентами 0 отбрасываются;

3) коэффициент 0/0 заменяется символом неопределенного класса  $v$ ;

4) все конstituенты, коэффициенты которых имеют вид, отличный от указанных в пунктах 1—3, приравниваются нулю.

Пусть требуется решить уравнение

$$0 = ax + b(1 - x) \tag{2}$$

(где  $a$  и  $b$  не содержат  $x$ ) относительно  $x$ , т. е. получить выражение  $x$  через  $a$  и  $b$ . Запишем (2) в виде  $(a - b)x + b = 0$ , откуда  $x = b/(b - a)$ . Дроби неинтерпретируемы, поэтому правую часть разлагаем по конstituентам:

$$\frac{b}{b - a} = \frac{1}{0}ab + \frac{0}{-1}a(1 - b) + 1(1 - a)b + \frac{0}{0}(1 - a)(1 - b).$$

Ответ:

$$x = (1 - a)b + v(1 - a)(1 - b), \quad ab = 0.$$

Выражение  $ab = 0$  Буль называет необходимым и достаточным условием возможности соотношения (2), когда оно выполнено,  $x$  выражается через  $a$  и  $b$  соотношением

$$x = (1 - a)b + v(1 - a)(1 - b).$$

В работах последующих логиков система Буля совершенствовалась в направлении упрощения операций, истолкования неинтерпретируемых выражений, уточнения понятия «решить логическое уравнение».

### Алгебра логики У. С. Джевонса

Основными сочинениями по логике Уильяма Стенли Джевонса (1835—1882), профессора логики, философии и политической экономии в Манчестере (1866—1876) и Лондоне (1876—1880), являются: «Чистая логика» (Pure logic. London, 1863), «Замещение подобных» (The substitution of similars, 1869), «Основы науки» (The principles of science. London, 1874).

На множестве классов Джевонс определяет операции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ . Под  $x \cdot y$  понимается пересечение классов  $x$  и  $y$ . Операцию  $+$  он распространяет на любые пары классов,  $x + y$  означает у него объединение классов  $x$  и  $y$  (чтобы отличить эту операцию от «сложения» по Булю, Джевонс называет ее альтернативой и обозначает символом  $\dot{+}$ ). Операция вычитания не вводится, дополнение класса  $x$  до универсума обозначается через  $\bar{x}$ . Для обозначения пустого класса используется 0, 1 обозначает универсум. Отношение тождества классов Джевонс обозначает через  $x = y$ , считая тождественными классы, состоящие из одних и тех же элементов. Чтобы выразить включение класса  $x$  в класс  $y$ , используется запись  $x = xy$ ; такие тождества Джевонс называет частными. Отмечаются основные свойства введенных операций:

$$\begin{aligned} xy &= yx, & x + y &= y + x, & x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y)z, \\ x + (y + z) &= (x + y) + z, & x(y + z) &= xy + xz. \end{aligned}$$

При построении своей теории Джевонс использует законы тождества  $x = x$ , противоречия  $x\bar{x} = 0$ , исключенного третьего  $x + \bar{x} = 1$ , а также принцип замещения.

Вывод, получаемый применением к посылкам принципа замещения, Джевонс называет прямым или непосредственным. Например, прямым является следующий вывод: из тождества  $x = y$  можно заключить, что  $xz = yz$ , так как  $xz = xz$  и  $x$  в левой части можно заместить равным ему  $y$ .

Выводы, использующие законы противоречия и исключенного третьего, Джевонс называет непрямыми. Вот один из примеров. Пусть  $x = xy$ ,  $y = yz$ . На основании закона исключенного третьего  $x = xy + x\bar{y}$ ,  $x = xz + x\bar{z}$ , далее

$$x = xyz + xyz\bar{z} + xy\bar{y}z + xy\bar{y}z\bar{z},$$

что дает  $x = xz$ .

Для решения проблемы: охарактеризовать какой-нибудь класс на основании заданных условий — логических посылок, Джевонс предлагает следующий метод, основанный по существу на использовании совершенной дизъюнктивной нормальной формы формулы алгебры классов.

Пусть для определенности речь идет о трех классах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Прежде всего выписываются конститuentы трех классов, набор конститuent Джевонс называет логическим алфавитом. При сравнении данных в посылках зависимостей между классами с конститuentами оказывается, что некоторые из конститuent противоречат посылкам, тогда они в соответствии с за-

коном противоречия отбрасываются. «Остальные термины могут быть поставлены в уравнение с требуемым термином и получится желаемая характеристика»<sup>20</sup>.

Пример. Пусть даны посылки  $x = xy$ ,  $y = yz$ . Требуется выразить класс  $\bar{z}$  через остальные классы. Для этого надо сопоставить с посылками конъюнкты, содержащие  $\bar{z}$ :  $xy\bar{z}$ ,  $x\bar{y}\bar{z}$ ,  $\bar{x}y\bar{z}$ ,  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ; из них лишь  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  не противоречит посылкам, следовательно,  $\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , т. е.  $\bar{z}$  есть подкласс класса  $\bar{x}\bar{y}$ . Джевонс решает и обратные задачи: даны комбинации классов, требуется найти условия, из которых эти комбинации могли быть выведены. Решение этих задач также связано с перебором большого числа комбинаций. Решение задач с использованием разложений по конъюнктам и с перебором весьма трудоемко, хотя, как правило, сводится к повторению однообразных и в принципе несложных операций: выписывания конъюнктов, сравнения их с посылками и отбрасывания противоречащих исходным данным. Такое единообразие приемов навело Джевонса на мысль осуществлять их каким-либо механическим способом.

Поскольку набор различных конъюнктов определяется лишь числом классов, фигурирующих в задаче, то для решения различных задач, касающихся одинакового числа классов, можно использовать заранее заготовленные списки этих конъюнктов. На этой идее основано использование логической доски Джевонса. На обычной (классной) доске записываются логические алфавиты задач (до шести переменных включительно). На оставшейся части доски записываются посылки конкретных задач и сравниваются с соответствующей колонкой конъюнктов. Противоречивые комбинации просто стираются.

Джевонс заметил далее, что процесс стирания также можно «механизировать», и построил логические счеты. Они представляют собой наклонную доску с четырьмя горизонтальными выступами и набором деревянных пластинок с вырезанными на них конъюнктами, нечто вроде разрезной азбуки. На одном выступе располагаются все конъюнкты нужного числа переменных, на другом — содержащиеся в посылках. Противоречащие посылкам конъюнкты снимаются с верхней линии и на ней остается так называемая логическая единица задачи. После этого можно решать вопросы, касающиеся отдельных классов.

Продолжая размышлять о возможностях механизировать процессы подбора и сравнения конъюнктов и даже составления логических равенств, Джевонс после примерно десяти лет усилий построил логическую машину, которую так и называют — логической машиной Джевонса, выставленную им для обозрения в Лондонском Королевском обществе, членом которого он состоял, в 1870 г. и тогда же описанную в статье «О механическом производстве логического вывода» (On the mechanical performance of logical inference.— Philos. Trans., 1870, 160, 497—518), а позднее и в «Основах науки» (1874).

Машина Джевонса выглядит как небольшое пианино или орган (рис. 3). На клавишах ее слева направо нанесены символы «машинных» операций «конец» и «остановка» и символ логической операции  $\cdot$ , а затем символы четырех классов и их дополнений, повторенные дважды — слева и справа от центральной клавиши, обозначающей связку «есть». Операция, обозначенная символом «конец», готовит машину к решению задачи; помеченная символом «остановка» — фиксирует некоторое состояние решения задачи, например окончание составления логической единицы, т. е. готовность отвечать на вопросы относительно классов. Кроме того, имеется вер-

<sup>20</sup> Джевонс С. Основы науки. СПб., 1881, с. 90.



У. ДЖЕВОНС

тикальная доска с прорезями и набор подвижных пластинок с записанными на них конституентами четырех классов.

Посылки задачи приводятся к форме  $a$  есть  $b$ , связка «есть» соответствует включению. Чтобы передать машине тождество  $a = b$ , его представляют в виде двух включений:  $a$  есть  $ab$ ,  $b$  есть  $ab$ . Посылки вводятся в машину нажатием клавиш, соответствующих классам. Клавиши, расположенные слева от «есть», передают левую часть соотношения, правые — правую. После сообщения машине посылок задачи на вертикальной доске остается логическая единица задачи. После этого можно решать вопросы, касающиеся отдельных классов. Например, нажав на « $d$ », мы увидим на вертикальной доске конституенты, в сумме составляющие класс  $d$ . Нажатием на «остановку» восстанавливаем логическую единицу задачи и можем «спрашивать» о каком-либо другом классе. Если условия, касающиеся некоторого класса, противоречивы, то машина «отказывается» отвечать на вопросы об этом классе — этот класс вообще не появляется на вертикальной доске. Чтобы вернуть машину в исходное состояние, нужно нажать «конец». «В этом положении, — как писал П. С. Порецкий, — машина снова изображает ум, способный к мышлению над четырьмя классами вещей, но не имеющий относительно них никаких познаний. По мере того, как ему сообщаются в посылках эти познания, он начинает работать, то отбрасывая известные альтернативы, то снова возвращая некоторые из них»<sup>21</sup>.

Логическая машина Девонса, хранящаяся теперь в Оксфорде, пред-

<sup>21</sup> Порецкий П. С. О способах решения логических равенств... Казань, 1884, с. 109.

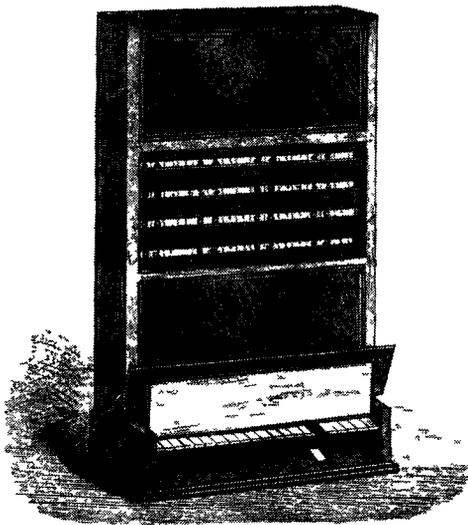


Рис. 3. Машина Джеворса

восхищала в некоторых отношениях конструкции позднейших компьютеров. «Играя» на ней, как на пианино, можно было решать определенные виды логических задач быстрее, чем без ее помощи. «Логическое пианино», как называл свою машину Джеворнс, очень заинтересовало современников. В России ее описал П. С. Порецкий в только что цитированной работе 1884 г. Позднее в 1893 г. И. В. Слепинский (1854—1931), впоследствии профессор Новороссийского (Одесского) университета, сделал в Новороссийском обществе естествоиспытателей сообщение «Логическая машина Джеворнса», в том же году опубликованное в Одессе в «Вестнике опытной физики и элементарной математики» (т. 175, № 7, с. 145—154).

### Символическая логика Дж. Венна

Джон Венн (1834—1923), сын священника, окончил в 1858 г. один из колледжей Кембриджского университета, в соответствии с семейными традициями стал священником, но стремление к научным занятиям привело к тому, что он вернулся в Кембридж, где стал преподавать логику и мораль.

Важнейшей из работ Венна, посвященных обоснованию и развитию новых методов логики, является «Символическая логика» (Symbolic logic. London, 1881; 2-nd ed., London, 1894).

Первой задачей символической логики Венн, подобно Булю и Джеворнсу, считал создание специфического языка, который должен содействовать «расширению возможностей применения наших логических процессов при помощи символов»<sup>22</sup>.

В качестве символов классов Венн употребляет буквы латинского алфавита, как и все логики того времени, пустой и универсальный классы обозначает символами 0 и 1, дополнение к классу  $x$  обозначает через  $\bar{x}$ . Кроме операций  $\cdot$  и  $+$  (он понимает  $x + y$  как объединение классов), Венн вводит вычитание и деление. Под  $x - y$  понимается исключение класса  $y$  из класса  $x$  при условии, что  $y$  есть часть  $x$ . Эту операцию он рассматривает как обратную к операции объединения классов, показывает, что она может быть исключена, поскольку в силу определения

$$x - y = x \cdot \bar{y}.$$

Операция деления рассматривается как обратная к операции пересечения классов и истолковывается Венном следующим образом: запись  $x/y$  слу-

<sup>22</sup> Venn J. Symbolic logic. London, 1894, p. 2

жит обозначением класса  $z$  такого, что  $x = yz$ ; в качестве  $z$  можно взять произвольный класс вида  $x + v \cdot \bar{y}$ <sup>23</sup>.

Выражение  $x > 0$  означает по Венну, что класс  $x$  не пуст; оно рассматривается как отрицание к  $x = 0$ . Равенство  $x = y$  Венн понимает как «не существует предметов, принадлежащих  $x$  и не принадлежащих  $y$ , и предметов, принадлежащих  $y$  и не принадлежащих  $x$ », и записывает его в «нулевой форме»

$$xy + \bar{x}y = 0.$$

Венн формулирует некоторые свойства операций, например  $x(x + y) = xy + xz$ ,  $x = x + xy$ ,  $x = x(x + y)$ , при этом он ограничивается иллюстрацией их на различных примерах, не пытаясь отделить постулируемые от доказываемых.

Как и другие представители алгебры логики прошлого столетия, важнейшими задачами символической логики Венн считал решение уравнений и исключение неизвестных. Фактически он решал эти задачи так же, как и другие логики, и мы не будем подробно останавливаться на его методах решения равенств. В отличие от Буля и Джеворна Венн решал не только уравнения, но и логические неравенства. Пусть дано неравенство

$$ax + b\bar{x} + c > 0. \quad (3)$$

Требуется найти необходимое и достаточное условие существования такого класса  $x$ , чтобы класс  $ax + b\bar{x} + c$  был не пуст.

Необходимым и достаточным условием существования указанного класса является

$$a + b + c > 0. \quad (4)$$

Действительно, из  $a + b + c = 0$  следует  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ , т. е.  $ax + b\bar{x} + c = 0$  для любого  $x$ . Пусть  $a + b + c > 0$ , это значит, что по крайней мере один из классов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не пуст. Если  $a > 0$ , положим  $x = a$ , тогда будем иметь  $aa + b\bar{a} + c > 0$ . При  $b > 0$  возьмем  $x = \bar{b}$ , получим  $a\bar{b} + b\bar{b} + c > 0$ . Если же  $c > 0$ , то  $ax + b\bar{x} + c > 0$  для любого  $x$ . Условие (4) Венн называет результатом исключения  $x$  из (3).

Венн рассматривает и случаи, когда среди посылок имеются уравнения и неравенства. Например,

$$ax + b\bar{x} + c > 0, \quad dx + e\bar{x} + f = 0. \quad (5)$$

Необходимыми и достаточными условиями существования такого класса  $x$ , что класс  $ax + b\bar{x} + c$  не пуст, а класс  $dx + e\bar{x} + f$  пуст, являются

$$de + f = 0 \quad a\bar{d} + b\bar{e} + c > 0. \quad (6)$$

Действительно, из  $dx + e\bar{x} + f = 0$  следует  $dx = 0$ ,  $e\bar{x} = 0$ ,  $f = 0$ ,  $dex = 0$ ,  $de\bar{x} = 0$ ,  $de(x + \bar{x}) = 0$ ,  $de = 0$ . Если  $dx = 0$ ,  $e\bar{x} = 0$ , то  $x \subset \bar{d}$ ,  $\bar{x} \subset \bar{e}$ , откуда  $ax \subset a\bar{d}$ ,  $b\bar{x} \subset b\bar{e}$ . Если  $ax + b\bar{x} + c > 0$ , то подално  $a\bar{d} + b\bar{e} + c > 0$ . Таким образом, из (5) следует (6). Пусть выполнены условия (6). Тогда  $de = 0$ ,  $f = 0$  и хотя бы один из классов  $a\bar{d}$ ,  $b\bar{e}$ ,  $c$  не пуст. При  $a\bar{d} > 0$  возьмем  $x = \bar{d}$ , получим

$$ax + b\bar{x} + c = a\bar{d} + b\bar{d} + c > 0,$$

$$dx + e\bar{x} + f = d\bar{d} + ed + f = 0$$

<sup>23</sup> Операция деления не является операцией в строгом смысле этого слова, ибо «результат» ее неоднозначен. Очевидно, что деление в действительности сводится к сложению и умножению и может быть исключено. Однако Венн, чтобы подчеркнуть аналогию с арифметикой, сохраняет в своей системе операции вычитания и деления.

Если  $b\bar{e} > 0$ , положим  $x = e$ , тогда

$$\begin{aligned} ax + bx + c &= ae + b\bar{e} + c > 0, \\ \} | dx + ex + f &= de + e\bar{e} + f = 0. \end{aligned}$$

В случае  $c > 0$  класс  $ax + bx$  не пуст для любого  $x$ , и если взять  $x = e$ , то  $de + e\bar{e} + f = 0$ . Следовательно, условия (6) достаточны для существования класса  $x$ , удовлетворяющего (5).

При решении логических задач Венн использовал не только алгебраические методы, но и диаграммы, называемые теперь диаграммами Венна.

Построение диаграмм Венн начинает с разбиения плоскости на  $2^n$  областей посредством  $n$  замкнутых контуров, где  $n$  — число классов, заданных в условии задачи. В решаемых им задачах встречаются только случаи  $n \leq 5$ . С ростом числа переменных наглядность картинок резко уменьшается, поэтому для представления задач с большим числом классов Венн использовал таблицы, состоящие из  $2^n$  клеток, — таблицы Венна. Между таблицами и картинками существует взаимно однозначное соответствие: по каждой таблице строится картинка, наоборот, по каждой картинке пишется таблица. На рис. 4 построены диаграммы и таблицы для  $n = 1, 2, 3$ . Переход от таблицы  $n$  переменных к таблице с  $n + 1$  переменным производится удвоением таблицы  $n$  переменных по горизонтали.

Метод построения картинок и таблиц Венн демонстрирует на многочисленных примерах, однако не дает общего определения понятия диаграммы. На основании анализа его примеров диаграммой Венна  $n$  переменных можно назвать картинку или таблицу для  $n$  переменных, одни из ячеек которой могут быть заштрихованы, другие могут быть пустыми, а третьи содержать звездочки. Заштрихованные ячейки соответствуют классам, противоречащим условиям задачи, т. е. подлежащим удалению по методу Джевонса. Незаштрихованные ячейки составляют логическую единицу задачи. Диаграммы без звездочек соответствуют формулам исчисления высказываний. Звездочки позволяют выражать некоторые частные суждения. Надо заметить, что у Венна звездочка встречается только в одном примере. На рис. 5 приведена диаграмма Венна четырех переменных, на ней заштрихованы ячейки  $ab\bar{c}\bar{d}$ ,  $abcd$ ,  $\bar{a}bcd$ ,  $\bar{a}\bar{b}cd$ . Диаграмма выражает предложение

$$ab\bar{c}\bar{d} + abcd + \bar{a}bcd + \bar{a}\bar{b}cd = 0.$$

Иногда метод диаграмм Венна ведет к цели быстрее, чем аналитическое решение. Шрёдер в «Лекциях по алгебре логики (точная логика)» (Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logic). Bd. 1—3. Leipzig, 1890—1905) приводит следующую задачу Джевонса: упростить посылки

$$a = b + c, \quad b = \bar{d} + \bar{c}, \quad \bar{c}\bar{d} = 0, \quad ad = bcd.$$

Заштриховав все области, пустые в силу условия задачи, из рис. 6 тотчас же получаем, что  $a = b = c = 1, d = 0$ . Этот же результат можно получить и аналитически.

Часто считают, что Венн воспринял идею кругов Эйлера и внес в метод Эйлера лишь некоторые улучшения. С этим мнением, однако, нельзя согласиться. Общим в методах Эйлера и Венна является лишь то, что оба они связаны с представлением объемов понятий на плоскости. В основе метода диаграмм Венна лежит отсутствовавшая у Эйлера идея разложения на конституенты — одна из центральных в алгебре логики. Диаграммы, построенные с учетом разложения на конституенты, не только более наглядны, но и позволяют извлекать большую информацию из условий

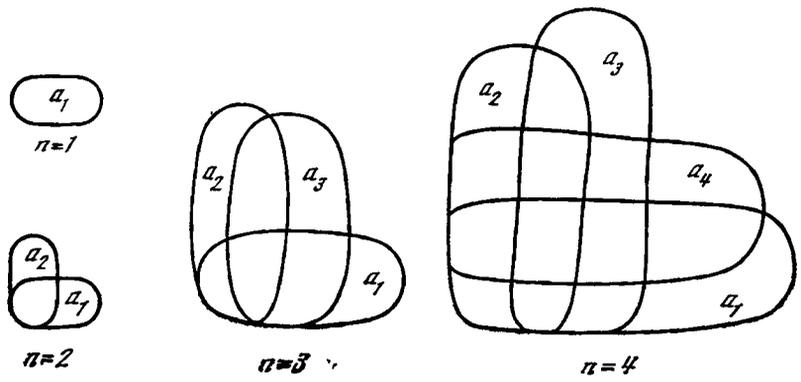
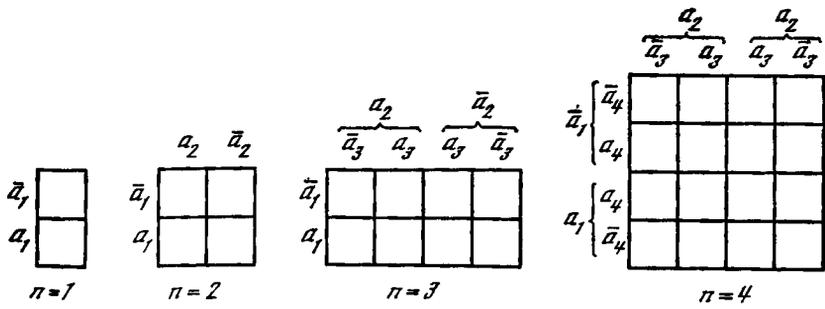


Рис. 4

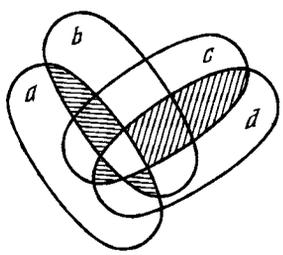


Рис. 5

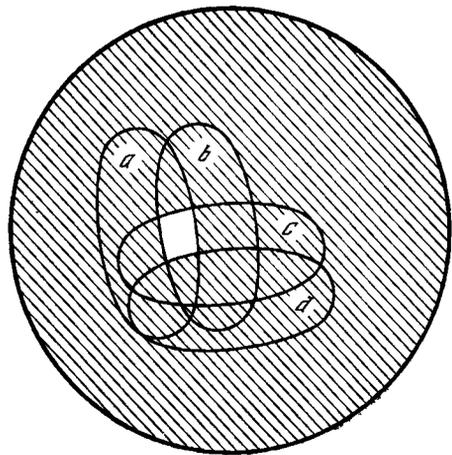


Рис. 6

задачи. К тому же — и в этом состоит еще одно важное отличие диаграмм Венна — они строились не только с целью иллюстрировать уже имеющееся решение, но и как аппарат для решения логических задач.

### Алгебра логики Э. Шрёдера и П. С. Порецкого

Одновременно с работами Венна публиковались работы Э. Шрёдера и П. С. Порецкого.

Эрнест Шрёдер (1841—1902), немецкий алгебраист и логик, с 1874 г. профессор политехникума в Дармштадте, с 1876 г. — Высшей технической школы в Карлсруэ. В работах Шрёдера получила дальнейшее развитие алгебра логики, называемая им «логическим исчислением» (Logikkalkül), ему же принадлежит и термин «исчисление высказываний» (Aussagenkalkül). Шрёдер, как и Девонс, считал излишним в логике операции вычитания и деления. Он строил систему с операциями  $\cdot$ ,  $+$ ,  $-$ , тождеством  $=$  и константами 0 и 1. В отличие от Буля, Девонса и Венна, Шрёдер явно указывал, какие из свойств операций он принимает в качестве аксиом, а какие получает как теоремы. Первый труд Шрёдера по математической логике «Круг операций логического исчисления» (Der Operationskreis des Logikkalküls) вышел в Лейпциге в 1877 г.<sup>24</sup> В этой работе, в частности, впервые сформулирован принцип двойственности. Итоги своим исследованиям в этой области он подвел в трехтомнике «Лекции по алгебре логики (точная логика)» (Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig, 1890—1905). Третий том имеет в заглавии слова «Алгебра и логика отношений» (Algebra und Logik der Relative) и содержит весьма обстоятельное изложение исчисления отношений. Шрёдер исследовал также общие свойства «исчислений» и на этом пути получил вариант системы, теперь называемой теорией квазигрупп.

Одной из центральных задач алгебры логики Шрёдер, как и другие специалисты в этой области, считал решение логических уравнений. Именно на эту проблематику его исследований мы и обратим главное внимание.

Всякое равенство Шрёдер приводит к виду

$$ax + bx = 0. \tag{7}$$

Это возможно, так как любое равенство  $y = z$  эквивалентно равенству  $y\bar{z} + \bar{y}z = 0$ , разложение левой части которого по конституентам относительно  $x, y, z$  дает

$$(y\bar{z} + \bar{y}z)x + (y\bar{z} + \bar{y}z)\bar{x} = 0,$$

т. е. равенство вида  $ax + bx = 0$ .

Среди равенств этого вида Шрёдер различает «аналитические», или тождественно истинные, например  $x\bar{x} + \bar{x}x = 0$ , и «синтетические», или истинные только при некоторых  $x$ . Аналитические равенства не могли быть, по Шрёдеру, уравнениями, поскольку уравнение рассматривалось им как условие, которому должен удовлетворять  $x$ , т. е. обращать это уравнение в тождество. Решить уравнение по Шрёдеру, это значит, во-первых, выяснить, имеет ли оно решение, т. е. существуют ли такие выражения, которые, будучи подставлены на место  $x$  в уравнение, обращают его в тождество, и если такие выражения существуют, то найти какую-нибудь их общую форму, из которой могли бы быть получены все решения уравнения (7).

<sup>24</sup> См. *Бобынин В. В.* Опыты математического изложения логики. Сочинения Эрнеста Шрёдера. — Физ.-матем. науки в их настоящем и прошедшем, 1886—1894, 2, 65—72, 178—192, 438—458.



Э. ШРЁДЕР

На первый из этих вопросов отвечает результат исключения  $x$  из уравнения (7), или резольвента  $ab = 0$ , представляющая, как отмечал еще Буль (см. выше), необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (7), общая форма решения имеет вид

$$x = b\bar{u} + \bar{a}u \quad (8)$$

при любом значении  $u$  (ср. решение Венна).

Если условие  $ab = 0$  удовлетворено, то подстановка  $x = b\bar{u} + \bar{a}u$  обращает уравнение (7) в

$$a(b\bar{u} + \bar{a}u) + b(\overline{b\bar{u} + \bar{a}u}) = 0,$$

т. е. в

$$ab\bar{u} + a\bar{a}u + b\bar{b}a + b\bar{b}\bar{u} + b\bar{u}a + b\bar{u}\bar{u} = 0.$$

Если  $ab = 0$  тождественный нуль, то здесь написано

$$0\bar{u} + 0u + 0u + 0\bar{u} + 0u + b0 = 0,$$

т. е. подлинное тождество. При этом существенно, что  $u$  — произвольный класс.

Наоборот, если какое-нибудь  $x$  удовлетворяет условию (7), то для этого же  $x$  верно и соотношение  $x = b\bar{u} + \bar{a}u$  при  $u = x$ .

Таким образом, Шрёдер фактически показал, что для всякого  $x$  равенство  $ax + bx = 0$  равносильно тому, что выполняется  $ab = 0$  и найдется такой класс  $u$ , что  $x = b\bar{u} + \bar{a}u$ .

Утверждение о существовании такого  $u$ , что  $x$ , определяемое равенством (8), удовлетворяет уравнению (7), эквивалентно утверждению о том, что любое  $u$ , удовлетворяющее (8), дает и решение уравнения (7).

Решить уравнение (7), по Шрёдеру, таким образом, эквивалентно тому, чтобы заменить это уравнение парой условий:  $ab = 0$  и «найдется такой класс  $u$ , что  $x = b\bar{u} + \bar{a}u$ ». Разумеется, соотношение (8) есть при этом логическое следствие из (7) только, если (8) берется вместе с утверждением существования  $u$ , хотя, наоборот, при всяком  $u$  соотношение (7) есть логическое следствие из (8).

Важную роль в развитии алгебры логики, а также в распространении ее идей в России сыграл выдающийся русский ученый Платон Сергеевич Порецкий (1846—1907). Сын военного врача, П. С. Порецкий в 1870 г. окончил физико-математический факультет Харьковского университета, специализируясь по астрономии. С 1876 г. он начал работать в качестве астронома-наблюдателя при Казанском университете, где впоследствии защитил докторскую диссертацию по астрономии (1886) и читал лекции по астрономии и математике. Здесь же П. С. Порецкий прочел первый в России курс математической логики. С 1881 по 1904 г. выходит цикл его работ, посвященных проблемам алгебры логики. Мы остановимся лишь на некоторых аспектах его исследований в этой области, изложенных в первой большой работе «О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики» (Казань, 1884), которая послужила основой только что упомянутого курса читанных им лекций. Поскольку последующие его работы главным образом только систематизировали и развивали идеи этой работы или же в какой-то мере относились к численному высказываний, мы их оставляем в стороне.

П. С. Порецкий понимает логическое уравнение не как условие, которому надо удовлетворить, а как посылку, из которой требуется вывести все или некоторые ее логические следствия определенного вида. В соответствии с этим у него получается другое определение того, что значит решить логическое уравнение.

Посылку, заданную равенством вида  $x = y$ , П. С. Порецкий приводит либо к форме  $x\bar{y} + \bar{x}y = 0$  и называет логическим нулем посылки, либо к форме  $xy + \bar{x}\bar{y} = 1$  и называет логической единицей посылки. Сумму логических нулей посылки он называет логическим нулем задачи и обозначает через  $N(x, y, z, \dots)$ . Произведение логических единиц посылки он называет логической единицей задачи и обозначает через  $M(x, y, z, \dots)$ . Он таким образом формулирует способ решения задачи: для определения некоторого класса  $x$  через остальные достаточно умножить этот класс на функцию, которая получается из логической единицы задачи подстановкой 1 вместо определяемого класса и 0 вместо дополнения этого класса

$$x = x \cdot M(1, y, z, \dots), \quad \bar{x} = \bar{x} \cdot M(0, y, z, \dots).$$

Из второго равенства по законам де Моргана  $x = x + \bar{M}(0, y, \dots)$  и, следовательно, для  $x$  получаются два выражения

$$x = x \cdot M(1, y, z, \dots), \quad x = x + \bar{M}(0, y, \dots). \quad (9)$$

Эти два выражения для  $x$  П. С. Порецкий называет полным решением, потому что «отрывочные сведения, предлагаемые нами в посылках, могут быть сконцентрированы в двух простых формулах, предназначенных к тому, чтобы изобразить полную картину той роли, которую играет каждый данный класс»<sup>25</sup>.

<sup>25</sup> Порецкий П. С. О способах решения логических равенств... Казань, 1884, с. 65.



П. С. ПОРЕЦКИЙ

Далее П. С. Порецкий задается вопросом, нельзя ли охарактеризовать класс  $x$ , используя не все сведения, имеющиеся в посылках и относящиеся и к другим классам, а лишь сведения, касающиеся самого класса  $x$ ? Такой характеристикой класса  $x$  будет решение

$$x = x \cdot M(1, y, \dots), \quad x = x + \bar{M}(0, y, \dots) \cdot M(1, y, \dots), \quad (10)$$

называемое Порецким точным решением.

Как уже упоминалось, под решением уравнения П. С. Порецкий понимал вывод следствий из исходной информации. Точное решение получается отбрасыванием некоторых слагаемых, равных нулю. Иногда говорят, что оно получается методом исключения сведений.

В своей «Алгебре логики» (*L'Algèbre de la logique*. Paris, 1905), в которой как бы подводился итог работам по алгебре логики XIX в. и которая была написана под сильным влиянием идей Порецкого, Л. Кутюра писал: «В логике различие терминов известных и неизвестных является искусственным и почти бесполезным: все термины, в сущности, известны, и речь идет только о том, чтобы из данных между ними соотношений вывести новые соотношения (т. е. отношения неизвестные или неявно известные). Такова цель метода Порецкого...»<sup>26</sup>.

Заметим, что И. В. Слепинский, уже упоминавшийся ранее (см. с. 30) и в прибавлении к своему переводу «Алгебры логики» Кутюра уточнивший содержащийся в ней вывод для основных формул, явился, вслед за

<sup>26</sup> Кутюра Л. Алгебра логики. Перев. с прибавлениями И. Слепинского. Одесса, 1909, с. 68.

Порецким, одним из инициаторов логико-математических исследований в России и, в частности, в Одессе. Здесь еще в 1896—1899 гг. несколько статей по алгебре логики и ее приложениям к арифметике опубликовал Е. Л. Буницкий (1874—1921), а в 1901 г. с докладом о применимости закона исключенного третьего к элементам бесконечных множеств выступил в Новороссийском обществе естествоиспытателей С. О. Шатуновский (1859—1929), опубликовавший свои мысли по этому вопросу позднее, в 1917 г. По существу С. О. Шатуновский полагал, что такое применение закона исключенного третьего в каждом конкретном случае требует совершенной точности в определении как множества, так и рассматриваемого элемента, но не отверг самую возможность такого применения в общем случае, как это сделал Л. Брауер. Впрочем, эта проблема далеко выходит за рамки данной главы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическая логика в XIX в. развивалась прежде всего как алгебра логики. Аналогия, которая привела к созданию алгебры логики, заключалась в том, что всякое решение задачи с помощью составления и решения уравнений является по существу выводом следствий из условий задачи. Идея, которой руководствовался Буль, состояла в попытке распространить алгебраические методы на задачи любого, не только количественного содержания. При этом нужно было, конечно, найти способ выражать любую информацию с помощью равенств или неравенств и установить правила преобразования этой информации. Поиск таких правил оперирования привел к созданию алгебраической системы, называемой теперь булевой алгеброй, появившейся в работах Девонса и усовершенствованной Венном, Шрёдером, Порецким. Получаемые соотношения истолковывались, как правило, на языке классов — объемов понятий. Вместе с тем уточнялись логические связи между предложениями, что способствовало тому, что изучение этих связей было выделено в так называемое исчисление высказываний. Это выделение было осуществлено в конце XIX в. Г. Фреге. В это же время в логике произошел глубокий переворот, вызванный явным введением кванторов — сокращений для «все» и «некоторые». В настоящей главе эти вопросы не рассматриваются.

# Глава вторая

## АЛГЕБРА

### И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

### ЧИСЕЛ



#### 1. ОБЗОР РАЗВИТИЯ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В ПЕРИОД 1800—1870 гг.

XIX век в математике можно назвать веком глубоких качественных преобразований науки и одновременно веком великих открытий во всех ее областях, в том числе в области алгебры. Преобразование алгебры оказалось настолько фундаментальным, что по сравнению с началом века к концу его, а еще яснее к 20-м годам нынешнего столетия, сам предмет этой науки, ее основные понятия и методы, ее место в математике неузнаваемо изменились.

Чем была алгебра к концу XVIII в., трудно определенно сказать. Конечно, это было уже не просто искусство вычислять с числами, буквами и загадочными величинами, содержащее несколько правил, несколько формул и умение как-то правильно их толковать. Нет, комплексные числа были уже всеми почти признаны, существовала уже некоторая теория линейных уравнений, уже намечались некоторые принципы, начала теории уравнений произвольной степени от одного неизвестного, но рядом с величественным зданием анализа это было очень и очень мало. Алгебра находилась где-то на окраинах математики. К началу XX в. не только существенно выросло, обогатилось замечательными понятиями и теориями содержание алгебры, но новые алгебраические понятия и алгебраический дух стали пронизывать почти всю математику. Появилась определенная тенденция алгебраизации математики. Появились такие замечательные, интенсивно развивающиеся новые науки, как алгебраическая теория чисел, алгебраическая геометрия, теория групп Ли, в которых спаяны алгебра и теория чисел, геометрия, анализ. Основы таких новых алгебраических теорий, как теории групп, полей, линейных пространств, стали наряду с основами анализа неотъемлемой частью общего математического образования, не только университетского, но и инженерно-технического.

До 70-х годов XIX в. происходил в основном скрытый период этого бурного роста алгебры. Здесь перед историком науки встает задача восстановления по черновым наброскам, работам, письмам, воспоминаниям таинственного процесса рождения, роста и взаимодействия математических идей. Эта задача трудна еще и тем, что в истории каждой крупной математической мысли имеется период неявного существования, когда она неузнаваемо для современников начинает проглядывать то там, то тут в маскарадной одежде частных случаев и приложений; а потом вдруг выступает сразу во всей своей полной красе, и не сразу можно, а иногда и совсем нельзя, определить, кто помог ей сделать этот знаменательный шаг выхода на сцену.

В рассматриваемый период только часть уже созданных новых алгебраических теорий явно вошла в математику. К ним относятся начала теории групп, полей и алгебр, существенно уже продвинувшаяся линейная алгебра (теория линейных алгебраических уравнений, линейных преобразований и квадратичных форм), а к 70-м годам — теория Гаула, связывающая новую и старую алгебру, и интенсивно развивающаяся и богатая алгебраическими идеями алгебраическая теория чисел.

Перед более детальным рассмотрением развития алгебры в период 1800—1870 гг. укажем в общих чертах основные этапы и пути этого развития.

Первым крупным событием этого периода было появление в свет в 1801 г. книги К. Ф. Гаусса «Арифметические исследования». В этом сочинении, имеющем семь разделов, только один посвящен алгебраическому вопросу — уравнениям деления круга, но и во всех остальных проявляется блестящее алгебраическое мышление ее автора. «Арифметические исследования», составившие эпоху в алгебраической теории чисел, долгое время служили руководством и источником идей в алгебре. Изучая уравнения деления круга ( $x^n - 1 = 0$ ), Гаусс доказывает, что они все имеют решения, выражаемые в радикалах, дает способ явно находить эти выражения, выделяет те значения  $n$ , для которых возможно решение в квадратных радикалах и тем самым построение правильного  $n$ -угольника циркулем и линейкой, проводя исследование, как и во всех своих трудах, поразительно глубоко и обстоятельно. Эти исследования Гаусса были продолжены Н. Х. Абелем, который доказал невозможность решения в радикалах общего уравнения 5-й степени и выделил класс уравнений, разрешимых в радикалах, который теперь носит его имя. В его работах более определенно выступают новые понятия поля (область рациональности) и группы (группа уравнения). Следующим шагом в этом направлении исследований, завершающим создание теории, были работы юного Э. Гаула, отрывочно опубликованные в 1830—1832 гг., а более полно после его смерти Лиувиллем в 1846 г.

Работы Абеля и особенно Гаула принадлежат уже совершенно новому направлению идей, которое и стало теперь общепринятым в алгебре. Исследуя очень древнюю задачу решения уравнений в радикалах, Гаула перенес центр тяжести с самой задачи на методы ее решения: он четко ввел понятие поля, группы уравнений, установил соответствие между подгруппами этой группы и подполями поля разложения многочлена, наконец, выделил нормальные делители группы и рассмотрел ее композиционный ряд. Это были совершенно новые и весьма плодотворные методы исследования, которые, однако, были восприняты математиками лишь в 70-х годах. Исключения составляют рассмотренные Гаула группы подстановок, исследование которых началось уже в 40-х годах.

Другим источником теории групп была теория композиции классов форм Гаусса, в которой операция, аналогичная сложению (или умножению) чисел, была перенесена на объекты, весьма от чисел далекие. На примере классов форм одного дискриминанта Гаусс исследовал основные свойства циклических и общих абелевых групп.

Тем временем в 1828 и 1832 гг. появились две части новой замечательной работы Гаусса «Теория биквадратичных вычетов». В этой работе не только дается геометрическая интерпретация комплексных чисел (что делалось и до него), но и, что очень важно, на комплексные числа было перенесено понятие целого числа, которое уже более 2000 лет казалось неотъемлемым свойством целых рациональных чисел.

Гаусс построил арифметику целых комплексных чисел, полностью

аналогичную обычной, сформулировал с помощью новых чисел биквадратичный закон взаимности. Этим перед арифметикой были открыты новые необъятные горизонты. Вскоре Эйзенштейн и Якоби сформулировали и доказали кубический закон взаимности, рассмотрев для этого числа вида  $k + m\rho$ , где  $\rho^3 = 1$ ,  $\rho \neq 1$ , а в 1846 г. П. Лежен-Дирихле нашел все единицы (т. е. обратимые элементы) кольца целых чисел поля  $\mathbb{Q}(\theta)$ , где  $\theta$  — корень уравнения:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}$ <sup>1</sup>. Эта работа, содержащая глубокий результат теории алгебраических чисел, интересна и с точки зрения теории групп: в ней построен первый нетривиальный пример бесконечной абелевой группы и изучена ее структура.

Дальнейшие успехи теории алгебраических чисел были связаны как с законами взаимности, так и с великой теоремой Ферма. Попытки доказать эту теорему привели Э. Куммера к изучению арифметики полей  $\mathbb{Q}(\zeta)$ , где  $\zeta^p = 1$ ,  $\zeta \neq 1$ . В 1844—1847 гг. Куммер открыл, что для целых чисел таких полей не имеет место закон однозначности разложения на «простые» множители, если под «простым» числом понимать неразложимое целое число поля  $\mathbb{Q}(\zeta)$ . Для спасения положения и возможности построения арифметики, аналогичной обычной, он ввел идеальные множители, чем положил начало наиболее тонким и абстрактным теориям в алгебраической теории чисел. Методы Куммера были локальными; они получили дальнейшее развитие в работах Е. И. Золотарёва, К. Гензеля и др. и составляют сейчас ядро коммутативной алгебры.

В первой половине XIX в. продолжалось также развитие линейной алгебры. Прежде всего нужно сказать, что хотя в «Арифметических исследованиях» Гаусса нет разделов, непосредственно относящихся к линейной алгебре, тем не менее помещенное там обстоятельное исследование целочисленных квадратичных форм от двух переменных не могло не оказать влияния на развитие и линейной алгебры. Собственным числам матрицы произвольного порядка неявно была посвящена работа О. Коши «Об уравнении, с помощью которого определяют вековые неравенства движений планет» (1826). Несколькими позднее, в 1834 г., появилась работа К. Г. Я. Якоби «О преобразовании двух произвольных однородных функций второго порядка квадратными подстановками в две другие, содержащие только квадраты переменных, с различными теоремами о преобразовании кратных интегралов», в которой уже явно изучались квадратичные формы и их приведение к каноническому виду. У того же Якоби в 1841 г. приобрела более законченный вид теория определителей. Однако до сих пор в этой теории отсутствовала геометричность и прежде всего столь важное и фундаментальное понятие линейного пространства. Первое, не очень четкое, определение линейного пространства было предложено Г. Грассманом в его книге «Учение о линейном протяжении», вышедшей в 1844 г. Это сочинение, богатое новыми идеями, но очень путано написанное, почти не привлекло к себе внимания до второго издания в 1862 г., значительно переработанного и улучшенного автором. В частности, в этом труде содержится конструкция внешнего умножения и построена знаменитая сейчас грассманова алгебра. В 1843 г. появились «Главы из аналитической геометрии  $n$  измерений» А. Кэли, менее богатые идеями, но более известные тогдашнему математическому миру. Развитие линейной алгебры тесно связано с вызвавшей в то время большой интерес теорией гиперкомп-

<sup>1</sup>  $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел;  $\mathbb{Q}$  — поле рациональных чисел.

лексных чисел (более новое название — теория алгебр). Безуспешные долгое время попытки найти обобщение комплексных чисел увенчались в 1843 г. открытием кватернионов У. Р. Гамильтоном. Гамильтон занимался кватернионами более 20 лет, до конца жизни. Его исследования подытожены в двух капитальных трудах: «Лекции о кватернионах» (1853) и «Элементы теории кватернионов» (1866). Значение этих работ оказалось не столько в кватернионах, сколько в тех новых понятиях и методах «векторного исчисления», которые при этом были открыты.

Возвращаясь к изложению истории дальнейшего развития теории групп, нужно упомянуть о серии работ О. Коши, опубликованных в 1844—1846 гг., в которых он доказывает много разнообразных теорем о группах перестановок (подгруппах симметрической группы), в частности знаменитую теорему Коши: если порядок группы делится на простое число  $p$ , то в группе есть элемент порядка  $p$ . Далее крупным событием в истории теории групп является публикация работы Кэли «О группах, зависящих от символического уравнения  $\theta^n = 1$ » в трех частях (1854, 1854, 1859). В этой работе Кэли в духе английской школы рассматривает группу как абстрактное множество символов с заданным законом композиции и определяет несколько фундаментальных понятий абстрактной теории групп, прежде всего само понятие группы и понятие изоморфизма. Это был заметный шаг в развитии нового абстрактного мышления.

Рубежом в продолжающемся развитии теории групп было появление в 1870 г. капитального «Трактата о подстановках и алгебраических уравнениях» К. Жордана. Это было и первое систематическое полное изложение теории Галуа, и подробное изложение достигнутых к этому времени результатов в теории групп, включая и значительные достижения в этих областях самого Жордана. В этой книге была также введена жорданова нормальная форма матриц линейных преобразований. Появление труда Жордана стало событием во всей математике.

Особенно следует сказать о расцвете в середине XIX в. области алгебры, которая находится между линейной алгеброй и алгебраической геометрией и называется теорией инвариантов. С одной стороны, содержание этой теории состоит в обобщении и развитии таких тем линейной алгебры, как приведение к каноническому виду квадратичных форм или матриц линейных преобразований. С другой стороны, это есть изучение, в конкретной ситуации, ответа на следующий вопрос: «Дан геометрический объект, заданный алгебраическими условиями в некоторой системе координат. Найти способ определить по алгебраическим условиям инвариантные относительно замены системы координат геометрические характеристики объекта». Вычислению системы инвариантов в разных конкретных случаях посвящено в период 1840—1870 гг. много работ различных математиков. Среди них наиболее известны работы Кэли, Эйзенштейна, Сильвестра, Сальмона, Клебша. Особо стоит упомянуть о двух статьях Гессе 1844 и 1851 гг., в которых он ввел понятие гессиана и указал применения этого понятия в геометрии, и о знаменитой работе П. Жордана 1868 г., в которой он доказал общую алгебраическую теорему о существовании конечной системы базисных инвариантов. К рассматриваемым исследованиям близка важная работа Кэли «Шестой мемуар о формах» (1859), в которой показано, как с единой точки зрения теории инвариантов рассматривать метрические свойства геометрических фигур. Это исследование является одним из истоков Эрлангенской программы Ф. Клейна, произведшей такой переворот в геометрии.

Важным достижением в области линейной алгебры в этот период было доказательство Сильвестра в 1852 г. закона инерции квадратичных форм

в работе «Доказательство теоремы о том, что всякий однородный квадратичный полином приводится вещественной ортогональной подстановкой к форме суммы положительных и отрицательных квадратов». Несколько ранее это было доказано и Якоби, но не опубликовано. В 1858 г. появилась работа Кэли «Мемуар о теории матриц», в ней определяется алгебра квадратичных матриц и устанавливается изоморфизм между алгеброй кватернионов и некоторой алгеброй матриц второго порядка (подалгеброй алгебры всех квадратных комплексных матриц второго порядка). Эта работа имела важное значение для уяснения соотношения теории алгебр и линейной алгебры.

В 60-е годы большое влияние на развитие математики имела деятельность К. Вейерштрасса. Почти ничего не публикуя, он включал результаты своих исследований в свои лекции в Берлинском университете. В лекциях 1861 г. Вейерштрасс ввел понятие прямой суммы нескольких алгебр и доказал теорему о том, что (конечномерная) коммутативная алгебра (над полем вещественных чисел) без нильпотентных элементов есть прямая сумма полей вещественных и комплексных чисел. Это один из первых «классификационных» результатов в алгебре.

В алгебраической теории чисел одной из главных задач в 60—70-е годы было построение теории делимости в общих полях алгебраических чисел, обобщающей теорию Куммера, построенную для круговых полей. Цель была достигнута после долгих усилий с помощью трех различных конструкций Е. И. Золотарёвым, Р. Дедекиндом и Л. Кронекером. Однако именно работа Дедекинда — X Дополнение к лекциям по теории чисел Дирихле, изданным в 1871 г., и XI Дополнение к последующим изданиям — была в то время воспринята всем математическим миром как решение задачи. Ясное, алгебраически прозрачное изложение Дедекинда стало образцом математического стиля на многие десятилетия. Этой и другими своими работами, в которых введены понятия кольца, модуля и идеала, Дедекинд заложил основы современного аксиоматического изложения математических теорий.

В нашем обзоре развития алгебры мы не касались теории эллиптических и абелевых функций — одной из центральных линий развития математики XIX в., области приложения сил Гаусса, Абеля, Якоби, Клебша, Гордана, Вейерштрасса и многих других. Эта область в XIX в. скорее относилась к анализу, к теории функций комплексного переменного, и только постепенно, особенно в конце XIX в., роль алгебраических идей в ней стала очень значительна.

Алгебраизация этой области началась с того, что вся теория Дедекинда была перенесена им самим в совместной работе с Г. Вебером (1882) в поле алгебраических функций. Этим был установлен глубокий параллелизм между теориями алгебраических чисел и функций и сделан решающий шаг для абстрактного определения понятий поля, модуля, кольца и идеала. С конца прошлого века начался обратный поток идей от теории алгебраических функций к теории чисел, что привело к введению  $p$ -адических чисел и топологии с помощью  $p$ -адических метрик. Но это уже дело математики нашего века.

Результатом развития описанных нами идей, методов и теорий явилось создание абстрактной «современной алгебры», а позднее — алгебраической геометрии, расцвет которой мы сейчас наблюдаем.

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ АЛГЕБРЫ

### Алгебраические доказательства основной теоремы алгебры в XVIII в.

Основная теорема алгебры была высказана впервые П. Роде, А. Жираном и Р. Декартом в первой половине XVII в., правда, все предложенные ими формулировки сильно отличались от современной: Жиран утверждал, что уравнение степени  $n$  должно иметь ровно  $n$  корней, действительных или воображаемых, причем смысл последнего термина не уточнялся. Декарт же высказал лишь предложение: алгебраическое уравнение может иметь столько корней, какова его степень (см. ИМ, т. 2, с. 24—25, 42).

В 40-х годах XVIII в. Маклорен и Эйлер дали основной теореме формулировку, эквивалентную современной: всякое уравнение с действительными коэффициентами можно разложить в произведение множителей 1-й и 2-й степени с действительными коэффициентами, иными словами, уравнение степени  $n$  имеет  $n$  корней, действительных и комплексных<sup>2</sup>.

Первое доказательство основной теоремы предложил в 1746 г. Даламбер. Хотя ученые XVIII в. и не видели недостатков в этом доказательстве, но оно казалось им слишком аналитичным. Математики стремились обосновать основную теорему чисто алгебраически, исходя из самой теории уравнений. В настоящее время известно, что этого сделать нельзя, если не использовать в том или ином виде свойств непрерывности, однако можно свести применение этих свойств к минимуму. Первое такое «максимально алгебраическое» доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру.

Работа Эйлера «Исследования о воображаемых корнях уравнений» («Recherches sur les racines imaginaires des équations»), в которой приводится доказательство основной теоремы алгебры, была опубликована в «Мемуарах» Берлинской академии наук за 1749 г. в 1751 г. Латинский вариант этой статьи (Theoremata de radicibus aequationum imaginariis) был представлен Эйлером Берлинской академии наук еще 10 ноября 1746 г. Таким образом, Эйлер проводил свои исследования почти одновременно с Даламбером. Интересно, что при этом оба ученых исходили из совершенно различных принципов.

Мы не будем останавливаться на доказательстве Даламбера: оно достаточно хорошо известно, с одной стороны, и не имеет точек соприкосновения с работами Эйлера — с другой. Доказательство Эйлера в противоположность доказательству Даламбера в настоящее время почти забыто. Между тем в основе его лежит именно та идея, которая потом повторялась и варьировалась при всех так называемых алгебраических доказательствах основной теоремы. Последующие доказательства могли быть короче или длиннее, более или менее остроумными, могли быть проведены вполне строго или иметь существенные пробелы, однако основная идея оставалась неизменной.

Кроме того, в процессе доказательства Эйлер впервые применил методы исследования уравнений, которые позднее были развиты Лагранжем и стали основными в его работах, посвященных вопросу решения уравнений в радикалах, а затем вошли в качестве неотъемлемой составной части в теорию Галуа.

Современные «алгебраические доказательства» основной теоремы можно разделить на три части: 1) топологическое предложение, состоящее в

<sup>2</sup> Мы повторим здесь для связности изложение некоторых вопросов, рассмотренных в ИМ, т. 3, с. 70 и далее.

том, что каждое алгебраическое уравнение  $f(x) = 0$  нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень; 2) конструкция поля разложения многочлена  $f(x) = 0$ , т. е. такого поля, над которым  $f(x) = 0$ , распадается на линейные множители и 3) редукция, сводящая нахождение корня уравнения  $f(x) = 0$  степени  $m = 2^k r$ , где  $r$  нечетное, к нахождению корней уравнения  $F(x) = 0$  степени  $2^{k-1} r_1$ , где  $r_1$  нечетное.

Все эти части встречаются уже в доказательстве Эйлера: топологическое предположение он формулирует и считает очевидным. Затем он предполагает, что каждый многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде

$$f_m(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m), \quad (1)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — некоторые символы или воображаемые количества, о которых нам заранее ничего неизвестно, кроме того, что с ними можно проводить обычные действия арифметики по тем же правилам, что и для обычных чисел (т. е. применять к ним закон коммутативности умножения и сложения, дистрибутивность умножения по отношению к сложению и т. д.). Опираясь с этими символами  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , Эйлер провел редукцию для уравнений степени 4, 8, 16 и наметил ее для уравнений степени  $m = 2^k$ . Последнюю редукцию безупречно строго провел Лагранж, опираясь на теоремы о симметрических и подобных функциях, в статье «О видах мнимых корней уравнений» (*Sur la forme des racines imaginaires des équations. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1772), 1774). В результате было доказано, что все  $\alpha_i$  являются либо действительными, либо комплексными числами.

Наконец, в 1795 г. в своих лекциях по математике в Нормальной школе (*Leçons de Mathématiques données à l'École Normale en 1795*) Лаплас максимально упростил редукцию Эйлера, опираясь на то же предположение о существовании разложения (1). Лаплас рассматривает многочлены

$$F_g(x) = \prod_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^m [x - (\alpha_i + \alpha_j) - s\alpha_i\alpha_j], \quad (2)$$

где  $s$  — некоторое действительное число. Он замечает, что если степень многочлена (1)  $m = 2^i r$ , где  $r$  — нечетное, то степень многочлена (2)  $g = 2^{i-1} r_1$ . Затем он разбирает случай, когда  $i = 1$ , тогда  $g$  — нечетное и  $F_g(x)$  имеет действительный корень. Беря различные действительные  $s$ , он получает

$$\alpha_i + \alpha_j - s_1\alpha_i\alpha_j = l_1,$$

$$\alpha_i + \alpha_j - s_2\alpha_i\alpha_j = l_2,$$

где  $l_1, l_2$  — действительные числа. Тогда  $\alpha_i + \alpha_j$  и  $\alpha_i\alpha_j$  будут действительными и данный многочлен (1) будет иметь действительный множитель второй степени:

$$x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x - \alpha_i\alpha_j.$$

Если теперь  $i$  произвольное, то, как показывает Лаплас, когда уравнение (2) степени  $2^{i-1} r_1$  имеет действительный множитель 2-й степени, то данное уравнение имеет действительный множитель 4-й степени, который, как это можно проверить непосредственным вычислением, разлагается в произведение двух действительных множителей 2-й степени.

Таким образом, ни Эйлер, ни Лагранж, ни Лаплас не позаботились о том, чтобы уточнить вторую часть доказательства. Она казалась им очевидной. Более того, все доказательства теорем о симметрических функциях, подобных функциях<sup>3</sup> и т. д. основывались на неявном предположении о существовании поля разложения у любого многочлена.

### Первое доказательство К. Ф. Гаусса

Такую точку зрения на вопрос, общую для всех математиков XVIII в., подверг резкой критике молодой К. Ф. Гаусс. В своем «Новом доказательстве теоремы о том, что всякая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой и второй степени» (*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii, 1799*) он писал:

«Так как помимо действительных и воображаемых величин  $a + b\sqrt{-1}$  нельзя представить никаких других видов величин, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды величин, как  $F, F', F'', \dots$ , то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением  $x$ , либо значением вида  $a + b\sqrt{-1}$ , либо вида  $F$ , либо  $F'$  и т. д. Поэтому это основное предложение может иметь только такой смысл. Каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида  $a + b\sqrt{-1}$ , либо, может быть, некоторым значением другого еще неизвестного вида, либо значением, которое вообще не содержится ни в каком виде. Как эти величины, о которых мы не можем составить никакого представления, — эти тени теней — должны складываться или умножаться, этого нельзя понять с ясностью, требующейся в математике»<sup>4</sup>.

Первое доказательство Гаусса было чисто аналитическим, и мы не будем его здесь рассматривать.

В 1815 г. Гаусс вновь вернулся к основной теореме алгебры, предложив теперь алгебраическое ее доказательство в работе «Второе новое доказательство теоремы о том, что всякая целая рациональная функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой и второй степени» (*Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, 1815. Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis recentiores, 1816*). При этом он вновь вернулся к критике хода мыслей ученых XVIII в. На этот раз он писал: «Это предположение [о возможности разложения многочлена на линейные множители — И. Б.] по крайней мере в том месте, где речь идет об общем доказательстве этой разложимости, есть не что иное, как *petitio principii*»<sup>5</sup>.

Однако обвинение доказательства Эйлера в порочном круге было несправедливо. И это лучше всего видно из анализа второго доказательства

<sup>3</sup> Функции  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  и  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  от корней уравнения  $n$ -й степени называются подобными, если они принадлежат одной и той же подгруппе  $H$  группы  $S_n$  перестановок корней этого уравнения, т. е. не изменяются при подстановках из  $H$  и меняются при всех остальных подстановках из  $S_n$ .

<sup>4</sup> *Gauss C. F. Werke. Bd 3. Göttingen, 1866, S. 1—30.*

<sup>5</sup> *Ibid.*, S. 31—56.



степень которого будет  $m(m-1)/2 = 2^{n-1} r_2$ , где  $r_2$  нечетно, т. е. для него выполняется индуктивное предположение.

Заметим, что если считать  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  корнями уравнения (1), то многочлен (4) только несущественно отличается от многочлена (2) Лапласа. Принцип их построения одинаков.

Если бы Гаусс разрешил себе пользоваться полем разложения многочлена  $f(x)$ , то дальнейшее доказательство не представляло бы труда. Но ему надо было дать некоторую конструкцию, которая позволила бы обойтись без предположения о существовании такого поля. Для этого Гаусс устанавливает тождество: если многочлен  $F(u, x) = F(u, x, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$  разлагается в произведение линейных множителей, то

$$F\left(u + w \frac{\partial F}{\partial x}, x - w \frac{\partial F}{\partial u}\right) = F(u, x) \varphi(u, x, w), \quad (5)$$

где  $\varphi(u, x, w)$  — целая рациональная функция всех своих аргументов.

Согласно принципу Гаусса, в это тождество вместо  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  можно подставить коэффициенты  $a_1, \dots, a_m$  множества  $f(x)$ . Получим

$$\bar{F}\left(u + w \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}, x - w \frac{\partial \bar{F}}{\partial u}\right) = \bar{F}(u, x) \bar{\varphi}(u, x, w), \quad (5')$$

где черточка наверху означает, что в соответствующие функции вместо  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  уже подставлены  $a_1, \dots, a_m$ .

Пусть теперь  $x = x_0$  — вещественное и такое, что дискриминант  $\Delta(\bar{F}) \neq 0$ . Поскольку дискриминант обращается в нуль лишь при конечном числе значений  $x$ , то выбор  $x_0$  может быть сделан бесконечным числом способов. Тогда  $\bar{F}(u, x_0)$  будет иметь вещественные коэффициенты и, кроме того,  $\bar{F}(u, x_0)$  и  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial u}(u, x_0)$  не могут иметь общих множителей.

Возьмем  $\bar{u}$  из множества тех значений  $u$ , для которых  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \Big|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=x_0}} \neq 0$  (мы исключаем при этом лишь конечное число значений). Гаусс обозначает

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \Big|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=x_0}} = U' \neq 0, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \Big|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=x_0}} = X'$$

и делает подстановку

$$w = (x_0 - x)/U'.$$

Он получает

$$\bar{F}\left(\bar{u} + \frac{x_0 - x}{U'} X', x\right) = \bar{F}(\bar{u}, x_0) \cdot \bar{\varphi}\left(\bar{u}, x_0, \frac{x_0 - x}{U'}\right). \quad (6)$$

Но в силу индуктивного предположения многочлен  $\bar{F}(u, x_0)$  имеет действительный или комплексный корень  $\bar{u} = u_0$  (значит,  $\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ x=x_0}} \neq 0$ ). Тождество (6) показывает, что многочлен  $\bar{F}(u, x)$  обращается в нуль при  $u = u_0 + \frac{x_0 - x}{U'} X'$ , т. е. что он алгебраически делится на разность  $u - \left(u_0 + \frac{x_0 - x}{U'} X'\right)$ .

Установив это, Гаусс полагает  $u = x^2$ , тогда

$$\bar{F}(x^2, x) = [f(x)]^{m-1}$$

будет делиться на трехчлен

$$x^2 + \frac{X'}{U'}x - \left(u_0 + \frac{X'}{U'}x_0\right)$$

с вещественными коэффициентами. И основная теорема доказана.

Мы видим, что в своем доказательстве Гаусс вместо оперирования с корнями уравнения устанавливает некоторые тождества и пользуется законами делимости многочленов. Этим методом он по существу строит поле  $\kappa$ , в котором  $\bar{F}(u, x_0)$  имеет линейный множитель, а исходный многочлен  $f(x)$  — множитель второй степени.

Однако метод, которым пользовался Гаусс, изложен в весьма завуалированном виде. И понадобилось около 60 лет, прежде чем его сумел извлечь Л. Кронекер. Вот как можно получить поле разложения по методу Гаусса. Соотношение (6) показывает, что многочлен  $\bar{F}(u, x)$  делится на трехчлен  $u - \left(u_0 + \frac{x_0 + x}{U'}X'\right)$ , если  $u_0$  — некоторый корень уравнения  $\bar{F}(u, x_0) = 0$ , т. е.

$$F(u, x) = \left[u - \left(u_0 + \frac{x_0 + x}{U'}X'\right)\right] \psi(u, x, u_0, x_0), \quad (7)$$

где  $\psi$  — целая рациональная функция всех своих аргументов. Разность

$$\bar{F}(u, x) - \left[u - \left(v + \frac{x_0 + x}{U'}X'\right)\right] \psi(u, x, v, x_0)$$

обращается в нуль, если вместо  $v$  подставить любой корень многочлена  $\bar{F}(u, x_0)$ . Отсюда следует, что

$$[f(x)]^{m-1} \equiv \left[x^2 + \frac{X'}{U'}x - \left(v + \frac{x_0}{U'}X'\right)\right] \psi(x^2, x, v, x_0) \pmod{F(v, x_0)}. \quad (8)$$

Таким образом, коэффициенты квадратного трехчлена можно найти из сравнения (8), не прибегая к рассмотрению корней уравнения (1). Это обстоятельство и спасает алгебраические доказательства основной теоремы от порочного круга.

### Конструкция Л. Кронекера

Л. Кронекер неоднократно возвращался к анализу «Второго доказательства» Гаусса. Как он сам пишет, он излагал его в курсе лекций 1870/71 гг., а также в своих лекциях по теории алгебраических уравнений. В работе «Основания арифметической теории алгебраических величин» (Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Berlin, 1882) он посвятил этому доказательству отдельный параграф. Наконец, в своей «Фундаментальной теореме общей арифметики» (Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. — J. für Math., 1887), обобщая идеи Гаусса, он поставил задачу: найти такой неприводимый многочлен  $f(x)$ , что данный многочлен, рассмотренный в поле вычетов по  $\text{mod } f(x)$ , распадается на линейные множители.

Иначе говоря, если дан многочлен

$$F(x) = x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n, \quad (9)$$

то Кронекер ставит задачу построения такого поля  $\kappa$ , являющегося конечным расширением основной области рациональности  $\mathbb{Q}(A_1, \dots, A_n)$ ,

в котором многочлен (9) разлагается в произведение линейных множителей. Разумеется, построение  $\kappa$  надо провести, не опираясь на определенные корни уравнения  $F(x) = 0$ .

Кронекер ищет такой многочлен  $G(x)$ , что

$$F(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \pmod{G(x)}.$$

Для решения задачи Кронекер рассматривает некоторый разложимый многочлен  $P(x)$  степени  $n$

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + S_1 x^{n-1} + \dots + S_n \quad (10)$$

и строит многочлен  $G(z)$  степени  $n!$ :

$$G(z, u_1, \dots, u_n, S_1, \dots, S_n) = \prod_i (x - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \dots - u_n x_{i_n}), \quad (11)$$

где  $u_1, \dots, u_n$  — неопределенные величины, а произведение распространено на всевозможные перестановки  $i_1, \dots, i_n$ , т. е. имеет  $n!$  множителей. Положим  $\theta = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$ . Тогда при всевозможных перестановках  $x_1, \dots, x_n$   $\theta$  примет  $n!$  различных значений и может быть выбрано в качестве примитивного элемента поля  $\kappa(x_1, \dots, x_n) = K$ , т. е.  $K = \kappa(\theta)$ ,  $x_k = \varphi_k(\theta, S_1, \dots, S_n)$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Последние равенства Кронекер заменяет сравнениями

$$x_k \equiv \varphi_k(z, S_1, \dots, S_n) \pmod{(z - \theta)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Сопоставляя их с равенством (10), получим

$$P(x) \equiv \prod_{k=1}^n [x - \varphi_k(z, S_1, \dots, S_n)] \pmod{(z - \theta)}.$$

Поскольку это сравнение содержит только симметрические функции от  $x_1, \dots, x_n$ , оно имеет место не только для  $\theta$ , но и для  $\theta_2, \dots, \theta_{n!}$ , а следовательно, и для произведения соответствующих модулей, т. е. для  $G(z, S_1, \dots, S_n)$ :

$$P(x) \equiv \prod_k [x - \varphi_k(z, S_1, \dots, S_n)] \pmod{G(z, S_1, \dots, S_n)}.$$

Применяя принцип Гаусса, Кронекер полагает  $S_1 = A_1, \dots, S_n = A_n$ , тогда

$$F(x) \equiv \prod_k [x - \varphi_k(z, A_1, \dots, A_n)] \pmod{G(z, A_1, \dots, A_n)}. \quad (12)$$

Это показывает, что любой многочлен  $F(x)$  распадается на линейные множители, если в качестве модуля взять соответствующий ему нормальный многочлен Галуа. Кронекер хочет, однако, построить поле, в котором многочлен  $F(x)$  распадался бы на линейные множители, т. е. такую область, в которой из  $AB = 0$  следовало бы, что либо  $A$ , либо  $B$  сравнимо с нулем по  $\text{mod } G$ . Поэтому он разлагает  $G(z, A_1, \dots, A_n)$  над  $\kappa$  на неприводимые множители, и если обозначить один из таких множителей  $G_1(z)$ , то

$$F(x) \equiv \prod_k [x - \varphi_k(z, A_1, \dots, A_n)] \pmod{G_1(z)}. \quad (12')$$

Этим конструкция закончена.

Таким образом, Кронекер построил поле разложения для любого многочлена как поле вычетов по некоторому неприводимому многочлену, не прибегая при этом к существованию поля  $\mathbb{R}$  действительных или поля  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Это чисто алгебраическая конструкция, которая приобрела очень широкое применение как в самой алгебре, так и в алгебраической теории чисел.

Отметим, что еще до Кронекера и, по-видимому, независимо от Гаусса аналогичную конструкцию в одном частном случае провел Коши в «Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences.— C. r. Acad. sci. Paris, 1847). А именно, он построил поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$  как поле вычетов многочленов от одного переменного  $P_n(x)$  с действительными коэффициентами по  $\text{mod } (x^2 + 1)$ . Однако у нас нет никаких данных, чтобы утверждать, что Кронекер был знаком с этой работой. Родство же своих идей со вторым доказательством Гаусса Кронекер подчеркивал неоднократно.

В доказательстве Кронекера можно усмотреть, кроме того, влияние теории Галуа. Особенно это заметно при определении примитивного элемента поля  $\theta$  (подробнее о теории Галуа см. ниже). Конструкция показывает, что Кронекер глубоко проник в идеи Галуа и сумел применить их с большим мастерством.

Если рассмотреть основную теорему алгебры как одно из элементарных предложений теории функций комплексного переменного, то вряд ли эта теорема может представить интерес. Но, с другой стороны, мы видели, что такие великие математики, как Эйлер, Лагранж, Лаплас и Гаусс, занимались ею, причем Гаусс предложил для нее четыре различных доказательства. Что же было интересного в этой теореме? Мы теперь можем дать ответ, относящийся, правда, только к алгебраическим ее доказательствам. Дело в том, что они оказались теснейшим образом связанными с общей теорией уравнений. Уже в доказательствах Эйлера и Лагранжа выявилась связь алгебраических доказательств с теорией симметрических функций и подобных функций корней уравнения. Рассмотрение этих последних составляет существенную часть теории Галуа. Для проведения доказательства, не опирающегося на существование поля разложения, Гаусс применил свой «принцип продолжения тождеств» и по существу построил поле, в котором данный многочлен имеет множитель второй степени. Метод Гаусса для конструкции этого поля был впоследствии развит Кронекером и стал одним из мощнейших орудий алгебры. Итак, эта теорема послужила поводом для создания новых алгебраических методов.

Разобранные нами доказательства, которые мы условно назвали алгебраическими, являются алгебраическими и по своей сущности.

### Теория уравнений

К концу XVIII в. одной из главных задач алгебры стала задача решения алгебраических уравнений в радикалах. Алгебру называли наукой о решении уравнений. Более точно ставилась задача — найти способы выражать решения уравнений вида

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

через коэффициенты с помощью четырех арифметических операций и операций извлечения арифметического корня произвольной степени. При этом  $a_0, \dots, a_n$  либо произвольны, либо удовлетворяют некоторым соот-

ношениям, либо конкретные числа. Естественно, наибольшим успехом было бы найти способы решения уравнений произвольной степени с произвольными коэффициентами, однако многочисленные поиски такого способа были безрезультатны. В то же время до 1770 г. не было известно, как решать в радикалах уравнение  $x^n - 1 = 0$  при  $n > 10$ , и выход в 1770 г. работы Вандермонда, где он разбирает случай  $n = 11$ , был уже существенным сдвигом (см. ИМ, т. 3, с. 93)<sup>6</sup>.

Решение в радикалах уравнений  $x^n - 1 = 0$  для произвольного  $n$  является замечательным достижением молодого Гаусса.

### Карл Фридрих Гаусс

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге в небогатой семье мастера-водопроводчика. Мальчик поразил учителя начальной школы, в которой он начал учиться, своими необыкновенными математическими способностями, и тот обратил на него внимание герцога Брауншвейгского. Благодаря помощи герцога Гаусс получил возможность продолжать свое образование. В 1795—1798 гг. он обучался в Гёттингенском университете. Он посещал там лекции и по математике, и по филологии, не зная, что ему избрать. Решение его сложилось только после того, как в марте 1796 г. он сделал свое знаменитое открытие о возможности построения правильного 17-угольника. В 1807 г. Гаусс был приглашен на место директора обсерватории в Гёттинген, которое и занимал до своей смерти в 1855 г. Научные интересы Гаусса были исключительно широки. Кроме различных областей чистой математики им были сделаны крупные вклады в теорию движения небесных тел, геодезию и электродинамику. В последней области им, в частности, разработаны всем известные гауссова система единиц (CGS) и понятие потенциала электрического поля. В области чистой математики им опубликованы работы по теории чисел, алгебре, анализу, геометрии поверхностей. В каждой области глубина проникновения в материал, смелость мысли и значительность результата были поражающими. Гаусса называли «королем математиков». Однако особое удивление вызвало изучение во второй половине XIX в. личных бумаг Гаусса. Оказалось, что он сообщил далеко не о всех своих идеях. Гаусс провел глубокие и далеко разработанные исследования в теории эллиптических и абелевых функций, на которые есть только намеки в его печатных работах, владел интегрированием в области комплексного переменного до работ Коши, разрабатывал неевклидову геометрию, опубликовал результаты далеко не всех своих астрономических расчетов и наблюдений. Иногда Гаусс сообщал о своих неопубликованных результатах в письмах некоторым друзьям, и возникавшие постепенно в математическом мире слухи возбуждали и направляли мысль исследований молодого поколения. Значение Гаусса в науке трудно переоценить.

Чтобы немного охарактеризовать саму личность Гаусса, приведем слова Ф. Клейна о дневнике молодого Гаусса (1796—1801): «Здесь мы видим перед собой не того недоступного, замкнутого, осторожного Гаусса, каким мы его знаем по опубликованным им работам. Мы видим здесь Гаусса таким, каким он переживал и воспринимал свои великие открытия. Он живейшим образом выражает свою радость и удовлетворение, наделяет

<sup>6</sup> Отметим, что так как при решении уравнения в радикалах мы пользуемся операцией извлечения арифметического квадратного корня, то запись  $x = \sqrt[n]{1}$  дает нам только один корень рассматриваемого уравнения — единицу, а речь идет о нахождении всех его корней. См. также с. 53.



К. Ф. ГАУСС

себя похвальными эпитетами и выражает свое настроение восторженными восклицаниями. Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе (правда, неполный), и мы переживаем процесс возникновения «Арифметических исследований»<sup>7</sup>.

Современники рисуют Гаусса как человека жизнерадостного, с большим чувством юмора. Он живо интересовался литературой, философией, политикой и экономикой. Расцвет русской науки привлекал его особое внимание, и он поддерживал научные связи с Петербургской академией наук, которая еще в 1801 г. избрала его своим членом-корреспондентом, а в 1824 г. — иностранным членом. В возрасте 62 лет Гаусс выучил русский язык и в письмах в Петербургскую академию просил прислать ему русские журналы и книги, в частности «Капитанскую дочку» Пушкина. Гаусс имел немногих личных учеников. Однако его можно с полным правом назвать учителем математиков всего мира.

### Решение уравнения деления круга

Перейдем к рассмотрению вклада Гаусса в теорию уравнения деления круга  $x^n - 1 = 0$ , седьмого раздела «Арифметических исследований» (Disquisitiones arithmeticae. Gottingae, 1801).

<sup>7</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 62.

Прежде всего разберем один пример  $n = 5$ , тривиальный случай, известный задолго до Гаусса. Ввиду равенства

$$(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

речь идет фактически о решении уравнения

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Введем величину  $z = x + 1/x$ . Из равенства  $x^5 = 1$  имеем  $1/x = x^4$ ,  $z = x^4 + x$ . Далее

$$z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + x^3.$$

Таким образом, для  $z$  получается уравнение

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

а для  $x$  — уравнение

$$x^2 - zx + 1 = 0.$$

Решая, имеем

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x_{1,2} = \frac{z \pm i\sqrt{z+3}}{2}.$$

Окончательно получаем четыре решения

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, & x_3 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, & x_4 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, \end{aligned}$$

выраженные в радикалах.

Передавая это рассуждение в современных терминах, мы скажем, что первоначальное уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

определяет поле  $K$  величин  $a + bx + cx^2 + dx^3$ , где  $a, b, c, d$  — рациональные, и в этом поле мы можем выделить подполе  $L$  величин вида  $a + \beta z$ . Поле  $K$  есть радикальное расширение второй степени поля  $L$ , а поле  $L$  — радикальное расширение второй степени поля рациональных чисел. Передавая таким же образом рассуждения самого Гаусса, мы скажем, что он начинает с рассмотрения (накладывая для простоты ограничение, что  $n$  — простое число) поля величин

$$K = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-2} x^{n-2}, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-2} \in \mathbb{Q}\}.$$

Для изучения свойств чисел поля  $K$  Гаусс рассматривает операции  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^k$  для  $0 < k < n$  на множестве корней уравнения  $x^n = 1$ , т. е. рассматривает группу Галуа поля  $K$  над  $\mathbb{Q}$ . В одном месте он пишет, что для построения правильного  $n$ -угольника имеет значение не геометрическая симметрия  $n$ -угольника, а его более скрытая алгебраическая симметрия.

Затем Гаусс выбирает в поле  $K$  другой, более удобный базис  $x, x^2, \dots, x^{n-1}$  и определяет для любого разложения числа  $n - 1$  на множители  $n - 1 = e \cdot f$  подмножество  $K_e$  величин вида

$$\alpha_1 \cdot (f, 1) + \alpha_2 \cdot (f, 2) + \dots + \alpha_e \cdot (f, e),$$

где знаки  $(f, i)$  обозначают знаменитые гауссовы периоды. Для определения периода Гаусс рассматривает вместо чисел  $1, \dots, n - 1$  соответствующие им классы вычетов по модулю  $n$ . Эти классы вместе образуют циклическую мультипликативную группу ( $n - 1$  простое) и для каждого  $f$ , делящего  $n - 1$ , в этой группе имеется единственная подгруппа из  $f$  элементов. Обозначая всю группу через  $G$ , подгруппу через  $H(f)$ , а смежные классы  $G$  по  $H(f)$  через  $H_{(f,i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, e$ ), определим период  $(f, i)$  как сумму

$$(f, i) = \sum x^k, \quad k \in H_{(f,i)}.$$

Свободно владея свойствами смежных классов, Гаусс доказывает, что произведение периодов для одного и того же  $f$  есть линейная комбинация периодов того же вида

$$(f, i) \cdot (f, j) = \sum a_{ijk} (f, k),$$

т. е. что  $K_e$  — поле. Далее он показывает, что  $K_{e_1} \subset K_{e_2}$ , тогда и только тогда, когда  $e_1$  делит  $e_2$ . Он доказывает в своей конкретной ситуации лемму о том, что образующий элемент поля удовлетворяет уравнению с коэффициентами из меньшего поля, степень которого равна степени большего поля над меньшим, указывает путь получения этих уравнений и показывает, что для рассматриваемых им полей они разрешимы в радикалах. В качестве заключения Гаусс получает теорему: если  $n - 1$  простое и  $n - 1 = a_1 \dots a_k$  — разложение  $n - 1$  на простые множители, то решение уравнения

$$x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$$

сводится к решению  $k$  уравнений степеней соответственно  $a_1, \dots, a_k$ . В частности, так как  $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ , то решение уравнения  $x^{17} - 1 = 0$  сводится к решению четырех квадратных уравнений, откуда следует возможность построения правильного 17-угольника циркулем и линейкой. При этом Гаусс добавляет: «Если же  $n - 1$  содержит, кроме числа 2, другие простые числа, то мы приходим к уравнениям более высокой степени, ... и мы можем со всей строгостью доказать, что эти уравнения более высоких степеней никак не могут быть исключены или сведены к уравнениям более низкой степени; [выделено Гауссом — Авт.]; хотя границы настоящего сочинения не позволяют привести здесь это доказательство, мы считаем своим долгом указать на это, чтобы никто не надеялся бы свести еще и другие деления, кроме делений, дающихся нашей теорией, например деления на 7, 11, 13, 19, ... частей, к геометрическим построениям и не тратил бы бесполезно свое время»<sup>8</sup>.

Заметим, что в изложении Гаусса соединены развитие общей теории и доказательство понятной яркой теоремы, что делает чтение особенно интересным.

Значение этого раздела книги Гаусса в теории уравнений очень велико, неявно здесь уже играют свои роли понятия поля, группы, базиса поля над полем и, пожалуй, даже группы Галуа. Более того, вероятно, эти понятия и их значения в теории уравнений были бы гораздо трудней обнаружены, если бы у всех перед глазами не было бы столь глубоко и красиво разобранного Гауссом примера.

<sup>8</sup> Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 572.

## Нильс Хенрик Абель

Дальнейшее развитие теории алгебраических уравнений связано с именем норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802—1829). Абель родился в 1802 г. в семье бедного норвежского пастора. Во время своего обучения в университете в Христиании в 1823 г. он некоторое время считал, что нашел формулу для решения общего уравнения 5-й степени в радикалах. Он скоро обнаружил свою ошибку и опубликовал в 1824 г. в виде брошюры весьма сжатое доказательство невозможности решения общего уравнения 5-й степени в радикалах. Это исследование привлекло к нему внимание, и ему была предоставлена стипендия для продолжения образования за границей. Абель поехал сначала в Берлин, где был с осени 1825 г. до весны 1826 г. Там он близко познакомился с А. Крелле, начавшим издание своего знаменитого *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. В первом же номере этого журнала (1826) опубликовано несколько статей Абеля. Одна из них — «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четырех» (*Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré.* — *J. für Math.*, 1826, 1), и, именно после напечатания в журнале Крелле, результат Абеля приобрел всеобщую известность. Значение этой работы в основном в самом результате — наконец, было получено решение проблемы, долгое время не поддававшейся усилиям математиков.

Летом 1826 г. Абель посетил Италию, а конец этого года провел в Париже, где представил Парижской академии мемуар, содержащий знаменитую теорему Абеля из теории абелевых функций. За эту работу, которая сначала осталась без ответа и едва не была затеряна, Абелю, уже после его смерти, была присуждена большая премия Парижской академии наук. Побыв еще в начале 1827 г. в Берлине, Абель летом 1827 г. вернулся в Христианию.

У себя на родине он оказался в самом бедственном положении без работы и каких-либо средств к существованию. Подрабатывая уроками, Абель продолжал напряженно работать над теорией эллиптических функций и алгебраических уравнений. В 1827 и 1828 гг. были опубликованы две части его «Исследований об эллиптических функциях» (*Recherches sur les fonctions elliptiques.* — *J. für Math.*), а в 1829 г. — «Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений» (*Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.* — *J. für Math.*). В конце 1828 г. Абель заболел туберкулезом, и в начале 1829 г. незадолго до получения приглашения на работу в Берлин его жизнь безвременно оборвалась. Перед смертью он работал над задачей определения всех алгебраически разрешимых уравнений.

Расскажем подробнее о содержании мемуара Абеля 1829 г. Первым шагом вперед, сделанным Абелем в этом мемуаре, является явное введение понятия области рациональности, аналога современного понятия поля. Областью рациональности относительно величин  $a_1, \dots, a_n$  Абель называет множество всевозможных величин, полученных из величин  $a_1, \dots, a_n$  и вещественных (или рациональных) чисел с помощью четырех арифметических действий (конечно, слово множество им не употреблялось). Введение этого понятия крайне существенно для сколь угодно общих исследований в теории уравнений. Вторым существенным шагом является доказательство разрешимости замечательного класса уравнений. Этот класс Абель определяет двумя условиями.



Н. Х. АБЕЛЬ

1. Каждый корень  $x_i$  уравнения выражается в виде рациональной функции от фиксированного корня

$$x_i = \theta_i(x_1).$$

2. Рациональные функции  $\theta_i$  обладают свойством

$$\theta_i(\theta_j(x_1)) = \theta_j(\theta_i(x_1)).$$

Сейчас говорят, что это нормальные уравнения с абелевой группой Галуа. Доказательство их разрешимости является развитием исследований Гаусса, и идея работы возникла у Абеля при исследовании уравнения лемнискаты, о котором упоминает Гаусс в «Арифметических исследованиях». Работа Абеля существенно дополняет и развивает идеи Гаусса и является заметным вкладом в теорию алгебраических уравнений.

### Эварист Галуа

Новые крупные открытия, прямо-таки изменившие лицо теории алгебраических уравнений, были сделаны в работах молодого французского математика Э. Галуа.

За свою короткую жизнь (1811—1832) Эварист Галуа успел сделать крупнейшие открытия и стать в ряд первых математиков XIX в. Он родился в 1811 г. в окрестностях Парижа в обеспеченной интеллигентной семье. В 1823 г. родители отдали его учиться в лицей в Париже, где через некоторое время, заинтересовавшись математикой, он с легкостью и восторгом прочитывает сочинения Лежандра, Лагранжа, Гаусса. Вот запись одного из его учителей: «Страсть к математике владеет им; я думаю,

для него было бы лучше, если бы его родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: здесь он теряет свое время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания»<sup>9</sup>. Несколько несчастий обрушилось на Галуа за 1827—1829 гг.: его отец покончил с собой вследствие тяжелой политической интриги, сам он, не кончив еще курса лицея, дважды провалился на экзамене по математике в Политехническую школу; представленная им Парижской академии работа была потеряна. Эти несчастья и нервная обстановка политических преследований и волнений во Франции тех лет сделали его характер неровным и вспыльчивым. В том же 1829 г. была опубликована его работа «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях» (*Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques.* — *Ann. Math.*). К этому времени уже были сделаны его главные открытия в теории уравнений. Осенью 1829 г. он поступил в Нормальную школу, в то время учебное заведение более низкого уровня, чем Политехническая. Его работа о сделанных им открытиях в теории алгебраических уравнений, представленная на конкурс Академии в 1830 г., снова была потеряна. В конце этого же года Галуа был исключен из школы за свои республиканские выступления, в июне 1831 г. он был под судом за свое вызывающее высказывание в адрес короля Луи-Филиппа, но его оправдали, приняв во внимание юный возраст. Через месяц, однако, он был снова арестован, так как явился одним из вожakov манифестации молодежи. На этот раз без всяких оснований, после долгого следствия, в конце 1831 г. он был приговорен к шести месяцам тюрьмы. Для нервного и не приспособленного к жизни Галуа пребывание в общей тюрьме было особенно тяжелым. Вскоре после своего выхода, вследствие какой-то темной любовной истории, Галуа был убит на дуэли. В последнюю ночь перед дуэлью Галуа пересмотрел и дополнил свою еще раз подготавливаемую для Академии наук рукопись и переслал ее своему другу О. Шевалье. Этот основной труд Галуа был опубликован в 1846 г. Лиувиллем.

### Алгебраические труды Э. Галуа

Среди нескольких заметок и статей, опубликованных еще при жизни Галуа, наиболее замечательна статья «Из теории чисел» (*Sur la théorie des nombres.* — *Bull. sci. math.*, 1830). В этой статье Галуа рассматривает полиномиальные сравнения вида

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

не имеющие целых корней. Он пишет, что «тогда корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого  $\sqrt{-1}$  в обычном анализе»<sup>10</sup>. Далее он рассматривает по сути дела конструкцию присоединения к полю корня неприводимого уравнения (явно выделяя требование неприводимости) и доказывает ряд теорем о конечных полях.

Рассмотрим более подробно содержание основной работы Галуа «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (*Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.* — *J. math. pures et appl.*, 1846). Галуа начинает мемуар с определения области рациональности. «Более того, можно условиться рассматривать как рационально-

<sup>9</sup> Галуа Э. Сочинения. М.— Л., ОНТИ, 1936, с. 321.

<sup>10</sup> Там же, с. 36.



Э. ГАЛУА

сти все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных априори известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала»<sup>11</sup>.

Он указывает, что можно изменять область рациональности, присоединяя как известные новые количества. При этом Галуа пишет: «Мы увидим, сверх того, что свойства и трудности уравнения могут быть сделаны совершенно разными сообразно количествам, которые к нему присоединены»<sup>12</sup>. Для определения группы Галуа уравнения он доказывает лемму о примитивном элементе — всегда (когда нет равных корней) можно выбрать такую функцию  $V$  от корней неприводимого уравнения, что все корни выражаются как рациональные функции от  $V$ . После доказательства этой леммы следует любопытное замечание: «Замечательно, что из этого предложения можно заключить, что всякое уравнение зависит от такого вспомогательного уравнения, что все корни этого нового уравнения являются рациональными функциями друг друга»<sup>13</sup>. Сейчас такие уравнения называют нормальными. Однако Галуа не останавливается на специальном изучении нормальных уравнений, он отмечает только, что такое уравнение «легче решить, чем какое-нибудь другое»<sup>14</sup>.

<sup>11</sup> Там же, с. 63.

<sup>12</sup> Там же.

<sup>13</sup> Там же, с. 66.

<sup>14</sup> Там же.

Далее следует самая важная лемма: «Предположим, что образовано уравнение относительно  $V$  и что взят один из его неприводимых множителей, так что  $V$  является корнем неприводимого уравнения. Пусть  $V, V', V'', \dots$  суть корни этого неприводимого уравнения. Если  $a = f(V)$  есть один из корней заданного уравнения, то  $f(V')$  тоже будет корнем этого уравнения»<sup>15</sup>. Эта лемма является основой для определения группы Галуа, которое дается в следующей за тем теореме.

«Т е о р е м а. Пусть дано уравнение и  $a, b, c, \dots$  суть  $m$  его корней. Существует всегда группа перестановок букв  $a, b, c, \dots$ , обладающая следующими свойствами:

1. Всякая функция от корней, инвариантная относительно подстановок этой группы, рационально известна (принадлежит области рациональности).

2. Обратное, всякая рационально определяемая функция от корней инвариантна относительно этих подстановок»<sup>16</sup>.

Для понимания этой теоремы следует отметить, что словом перестановка Галуа обозначает строку из корней, а словом подстановка — отображение множества корней в себя. Группа перестановок — это множество перестановок, про которое, однако, говорится: «Так как всегда рассматриваются вопросы, в которых первоначальное расположение букв совершенно не влияет на группы, которые мы будем рассматривать, то мы должны будем иметь одни и те же подстановки, какова бы ни была перестановка, от которой мы будем отправляться. Итак, если в подобной группе имеются подстановки  $S$  и  $T$ , то есть уверенность в наличии подстановки  $ST$ »<sup>17</sup>. По-видимому, эту несколько туманную фразу надо понимать так: когда употребляется термин *группа перестановок*, то имеется в виду множество перестановок  $U$ , обладающее тем дополнительным свойством, что для любой перестановки  $u \in U$  множество  $G(u, U)$  всех подстановок  $g$  таких, что  $g(u) \in U$ , одно и то же. Это множество подстановок называется *группой подстановок*, а по какому множеству перестановок оно построено, должно каждый раз быть ясно из контекста. Легко проверить, что таким образом действительно строится *группа подстановок* в нашем понимании этого слова, на что Галуа обращает внимание читателя, говоря о подстановках  $S, T$  и  $ST$ .

Для доказательства теоремы Галуа рассматривает примитивный элемент  $V$  и формулы

$$a = \varphi V, \quad b = \varphi_1 V, \dots, \varphi_{m-1} V$$

и определяет группу перестановок корней

$$\begin{aligned} &(\varphi V, \varphi_1 V, \dots, \varphi_{m-1} V), \\ &(\varphi V', \varphi_1 V', \dots, \varphi_{m-1} V'), \\ &(\varphi V'', \varphi_1 V'', \dots, \varphi_{m-1} V''), \\ &\dots \end{aligned}$$

где  $V, V', V'', \dots$  — все корни неприводимого уравнения для  $V$ . Это вполне понятное определение действия группы Галуа на множестве корней, исходя из ее действия на примитивный элемент.

То, что Галуа понимал больше, чем ему удалось написать, ясно видно из его примечаний к этой теореме. В них он старается указать, что главное — это не перестановка, а подстановка. В последнем примечании он

<sup>15</sup> Галуа Э. Сочинения. М.—Л., ОНТИ 1936, с. 67.

<sup>16</sup> Там же, с. 67—68.

<sup>17</sup> Там же, с. 67.

даже пишет: «Подстановки не зависят даже от числа корней»<sup>18</sup>! В следующих двух предложениях рассматривается изменение группы уравнения при присоединении к области рациональности корней вспомогательного уравнения. В своем последнем письме к Шевалье, перечисляя свои наиболее важные результаты, Галуа пишет об этих предложениях:

«Из предложений II и III первого мемуара видно большое различие между присоединением к уравнению одного из корней некоторого вспомогательного уравнения и присоединением всех его корней.

В обоих случаях группа уравнения при присоединении разделяется на такие группы, что от одной группы переходят к другой посредством одной и той же подстановки; но условие, что эти группы содержат одни и те же подстановки, получается только во втором случае. Это называется *собственным* разложением.

Другими словами, когда группа  $G$  содержит другую группу  $H$ , то группа  $G$  может разлагаться на группы, каждая из которых получается применением к перестановкам  $H$  одной и той же подстановки, таким образом, что

$$G = H + HS + HS' + \dots$$

Она может быть разложена также на группы, которые содержат все одни и те же подстановки, таким образом, что

$$G = H + TH + T'H \dots$$

Эти два разложения обычно не совпадают. Когда они совпадают, то говорят, что разложение *собственное*»<sup>19</sup>.

Если продумать изложенное Галуа с позиции современных знаний, то ясно, что он говорит о разложении группы на правые и левые смежные классы по подгруппе и выделяет условие совпадения этих разложений — условие нормальности подгруппы.

Доказательство предложения II очень красиво, а доказательство предложения III совсем отсутствует. Далее Галуа приводит условие разрешимости уравнения в радикалах. Это условие занимает около двух страниц текста и представляет собой описание процедуры последовательного присоединения радикалов и преобразования при этом группы уравнения. После этой общей теории следует изучение уравнений простой степени. Галуа приводит две формы критерия разрешимости уравнения простой степени.

«Таким образом, для того чтобы неприводимое уравнение простой степени разрешалось в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы все функции, инвариантные относительно подстановок

$$x_k \rightarrow x_{ak+b},$$

были рационально известны»<sup>20</sup>.

Иными словами, группа Галуа этого уравнения должна быть метациклической.

«Для того чтобы неприводимое уравнение простой степени разрешалось в радикалах, необходимо и достаточно, чтобы при знании двух каких-нибудь его корней остальные все выводились из них рационально»<sup>21</sup>.

Это есть решение вопроса, которым занимались еще Эйлер и Лагранж.

<sup>18</sup> Там же, с. 70.

<sup>19</sup> Там же, с. 49.

<sup>20</sup> Там же, с. 81.

<sup>21</sup> Там же, с. 83.

Приведем еще знаменитое место из письма к О. Шевалье: «Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать их заключение не о справедливости, но о важности этих теорем.

После этого будут, я надеюсь, люди, которые найдут свою выгоду в расшифровке всей этой путаницы»<sup>22</sup>.

При этом Галуа имеет в виду не только теорию уравнений, в этом же письме им сформулированы глубокие результаты из теории абелевых и модулярных функций.

Значение работ Галуа состоит в том, что в них в полной мере были раскрыты новые глубинные математические закономерности теории уравнений. После освоения открытий Галуа вид и цели самой алгебры существенно изменились, исчезла теория уравнений — появилась теория полей, теория групп, теория Галуа. Ранняя смерть Галуа была невозместимой утратой для науки.

На заполнение пробелов, понимание и улучшение работ Галуа понадобилось еще несколько десятков лет. Усилиями Кэли, Серре, Жордана и других открытия Галуа были превращены в теорию Галуа. Появление в 1870 г. монографии Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» представило эту теорию в систематическом изложении, понятном для всех. С этого момента теория Галуа стала элементом математического образования и фундаментом для новых математических исследований.

### Первые шаги теории групп

История собственно теории групп начинается в середине XIX в., после опубликования работ Галуа. В первой половине этого века мы имеем дело еще только с процессом возникновения теории групп. Однако некоторые теоретико-групповые рассуждения встречаются еще в работах Эйлера и Ферма. Работы Лагранжа и Вандермонда по теории алгебраических уравнений ввели в математику первый групповой объект — подстановки (см. ИМ, т. 3, с. 90—93).

Особенно значителен опубликованный в 1771—1773 гг. мемуар Лагранжа «Размышления об алгебраическом решении уравнений» (*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*). Кроме очень важных исследований в теории уравнений в нем доказана первая теоретико-групповая теорема: число значений, которые принимает функция от  $n$  переменных при всех перестановках этих переменных, делит  $n!$  — частный случай теоремы о том, что порядок подгруппы делит порядок группы. Среди последователей Лагранжа и Вандермонда следует отметить Паоло Руффини. В своих исследованиях 1808—1813 гг. по теории уравнений он рассматривает не только группу подстановок, но и ее подгруппы и вводит понятия транзитивности и примитивности (см. ИМ, т. 3, с. 95).

Важным шагом на пути возникновения теории групп были «Арифметические исследования» Гаусса. Эта книга замечательна постоянным и широким применением общих алгебраических идей. В начале книги Гаусс определяет сравнения — первый в истории пример построения фактор-кольца. Занимаясь систематическим изучением сравнений по простому модулю, Гаусс доказывает существование первообразного корня, т. е. доказывает, что мультипликативная группа поля вычетов по модулю  $p$  циклическая. Доказательство очень общее и буквально переносится на случай любого конечного поля, что сразу было отмечено Галуа, когда он стал строить теорию конечных полей.

<sup>22</sup> Галуа Э. Сочинения. М.—Л., ОНТИ, 1935, с. 59.

В связи с изучением свойств периодов Гауссу приходится оперировать со смежными классами мультипликативной группы поля из  $p$  элементов относительно различных ее подгрупп, и в его рассуждениях чувствуется ясное понимание свойств этих смежных классов.

Однако наиболее интересным и значительным для теории групп было построение Гауссом целой серии групп — групп классов бинарных квадратичных форм (заданного дискриминанта). Это наиболее абстрактные примеры групп, построенные к тому времени.

Вводя далеко не тривиальную операцию — композицию форм, Гаусс доказывает, что исходя из композиции форм можно определить композицию классов, указывает, что при композиции главного класса с любым классом  $K$  получается снова класс  $K$ , показывает, что у каждого класса существует противоположный, короче говоря, проверяет все элементарные свойства групповой операции. Ассоциативность и коммутативность композиции классов он не проверяет, но они сразу следуют из указанной им ранее ассоциативности и коммутативности композиции самих форм. Приведем одно место из сочинения Гаусса, где устанавливается существование и единственность решения уравнения  $K + X = L$  в группе классов: «Композицию классов удобно обозначать знаком сложения  $+$  и, точно так же, тождественность классов — знаком равенства. Тогда только что высказанная теорема может быть выражена так. Если  $K'$  есть класс, противоположный классу  $K$ , то  $K + K'$  есть главный класс того же определителя, и тем самым  $K + K' + L = L$ ; если поэтому положить  $K' + L = M$ , то  $K + M = L$ , что и требовалось. Если же кроме  $M$  имелся бы еще и другой класс  $M'$ , который обладал бы тем же свойством, т. е. если бы было  $K + M' = L$ , то имело бы место  $K + K' + M' = L + K' = M$ , откуда следует, что  $M' = M$ »<sup>23</sup>. Занимаясь строением группы классов, Гаусс делает многозначительное замечание: «Заметим только, что так как одного основания в этом случае (выделенном им ранее) недостаточно, то необходимо брать два или даже еще большее число классов, при умножении и композиции которых получаются уже все остальные. При этом получаются двойные и кратные индексы, польза которых состоит примерно в том же, в чем состоит и польза простых индексов...»<sup>24</sup>. Гаусс хочет сказать, что рассматриваемая им группа не циклическая, но разлагается в прямую сумму двух или нескольких циклических.

Большое значение идей Гаусса для теории групп несомненно.

Разбирая развитие собственно теории подстановок, следует остановиться на работах О. Коши. В своей первой работе на эту тему «Мемуаре о числе значений, которые может принимать функция, если переставлять всеми способами содержащиеся в ней величины» (Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme. — J. Éc. Polyt., 1815) Коши исследует вопрос о числе значений алгебраической функции при всевозможных перестановках аргумента. Пусть это число значений равно  $p$ , а число аргументов  $n$ , тогда доказанная им теорема состоит в том, что  $p$  либо 1, либо 2, либо больше или равно  $n$ . Это означает, что индекс подгруппы  $H$  симметрической группы  $S_n$  может быть 1, 2 или больше или равен  $n$ . Позднее, в 1844—1846 гг., Коши публикует целую серию статей и заметок о подстановках. Многие из них снова связаны с вопросом о возможном числе значений, в них доказаны некоторые теоремы о транзитивных группах подстановок, а наиболее известна следующая теорема: если

<sup>23</sup> Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 334.

<sup>24</sup> Там же.

группа подстановок имеет порядок, делящийся на простое число  $p$ , то в ней есть подгруппа порядка  $p$ .

Поворотным пунктом в возникновении теории групп было опубликование в 1846 г. основных работ Галуа. Мы уже описывали эти работы в разделе, посвященном теории уравнений. Особое значение их для теории групп состоит в том, что впервые было продемонстрировано, что решение старинного, важного вопроса может быть сведено к исследованию нового объекта — групп. Впервые группы выступают не как вспомогательный инструмент рассуждения, а как основной объект исследования. Большое значение имело умелое использование Галуа таких сложных понятий, как простая группа, нормальная подгруппа, разрешимая группа, несмотря на витиеватое и нечеткое их определение. Например, им были сформулированы примерно следующие утверждения (мы указываем их современную формулировку):

- а) минимальная простая группа есть  $A_5$  порядка 60;
- б) группа дробно-линейных преобразований с коэффициентами из поля вычетов по модулю  $p$  неразрешима при  $p > 3$ ;
- в) эта группа не имеет подгрупп индекса  $p$  при  $p > 11$ ;
- г) неприводимое уравнение простой степени имеет решение в радикалах тогда и только тогда, когда его группа метациклическая.

Вскоре после работ Галуа началось уже систематическое развитие теории групп.

Первое определение и первые исследования абстрактных групп были опубликованы А. Кэли в 1854 г. Артур Кэли, крупный английский математик, родился в 1821 г. в состоятельной купеческой семье. Свое детство он провел в Петербурге, где жил его отец. В 1838—1841 гг. Кэли обучался в Кембриджском университете, где был одним из первых студентов по математике. С 1841 г. он начинает публиковать свои математические работы. С 1843 г. он в течение 20 лет занимался адвокатской деятельностью, не прекращая интенсивных занятий математикой. В 1863 г. он становится профессором в Кембридже и остается им до своей смерти в 1895 г. Он опубликовал около 200 работ по различным областям математики.

Наиболее значительные результаты Кэли относятся к алгебраической геометрии, линейной алгебре и теории групп. В своих лекциях по истории математики Ф. Клейн говорит, что Кэли является «создателем современной алгебраической геометрии как со стороны теории инвариантов, так и в ее геометрической части»<sup>25</sup>.

В 1854 г. были опубликованы две части работы Кэли: «О группах, зависящих от символического уравнения  $\theta^n = 1$ » (On the theory of groups, as depending on the symbolic equation  $\theta^n = 1$ . — Philos. Mag.). В этой работе Кэли определяет группу как множество символов с заданным законом композиции, который удовлетворяет условиям ассоциативности, существования единицы и однозначной разрешимости уравнений  $ax = b$ ,  $ya = b$  для любых  $a$  и  $b$ . Правда, сначала Кэли просто пишет, что группа на множестве символов это есть ассоциативный закон композиции, а потом только добавляет, что стоит назвать группами только те законы, у которых в каждой строке и столбце таблицы умножения встречаются все элементы группы. Первое в современной терминологии означало бы только определение полугруппы, а второе есть уже вполне точное определение группы. Кэли рассматривает как способ задания группы таблицы умножения, а также изучает задание группы образующими и соотношениями. Кэли указывает, что элементами группы могут быть подстановки, но мо-

<sup>25</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 185.



А. КЭЛИ

гут быть и элементы другой природы, например кватернионы. В 1859 г. Кэли опубликовал третью часть этой работы, в ней он доказывает, что все группы простого порядка циклические, а также находит всевозможные группы порядка восемь. Само название «группа» взято Кэли в память Галуа. Эти работы Кэли не сразу получили широкую известность, но потом стали примером определения группы и пересказываются почти во всех учебниках.

Кроме работ Кэли, развитие теории групп в самой середине XIX в. состояло в разнообразных исследованиях групп подстановок и в освоении наследия Галуа. В частности, большую работу проделал в эти годы Ж. А. Серре, который включал в свои лекции по алгебре в Сорбонне все большие и большие части теории Галуа.

Дальнейшие крупные открытия в теории групп связаны с именем воспитанника и профессора Политехнической школы, а также Коллеж де Франс, Камилла Жордана (1838—1922). В 1865 г. появляется первая работа Жордана по теории Галуа «Комментарии к мемуару Галуа» (*Commentaires sur le mémoire de Galois.* — С. г. Acad. sci. Paris), в 1869 г. ее продолжение «Комментарии к Галуа» (*Commentaires sur Galois.* — *Math. Ann.*), а вскоре затем фундаментальная монография «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» (*Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, 1870). Трактат Жордана содержит части, посвященные изучению групп подстановок, собственно теории Галуа и приложению теории Галуа к уравнениям, возникающим в разных областях математики.

В сочинении Жордана есть уже явное выделение нормальных подгрупп,

понятие простой группы, изложение доказанной им в 1869 г. теоремы Жордана, первой части известной теоремы Жордана — Гёльдера, обстоятельное исследование кратнo-транзитивных групп. В этом сочинении впервые появляется понятие гомоморфизма (вернее, гомоморфизма на или эпиморфизма) под названием *l'isomorphisme métrédrique*, причем любопытно, что выражение Жордана «группа  $\Gamma$  изоморфна группе  $G$ » означает, что определен эпиморфизм  $G$  на  $\Gamma$ . Еще стоит упомянуть, что в своем сочинении Жордан впервые рассматривает матричные группы с элементами из конечного поля, ставшие в XX в. предметом обстоятельных исследований. При изложении теории Галуа Жордан использует уже современный способ сопоставления уравнению не некоторого множества перестановок корней, а группы подстановок, и критерий разрешимости уравнения в радикалах у него выражается в разрешимости его группы Галуа. Трактат Жордана стал на некоторое время учебником как по теории групп, так и по теории Галуа. Выход его знаменует окончание периода рождения теории групп.

Именно в последние 30 лет XIX в., которые уже остаются за рамками нашего изложения, происходят новые большие открытия в теории групп. Это прежде всего открытие непрерывных групп и групп Ли.

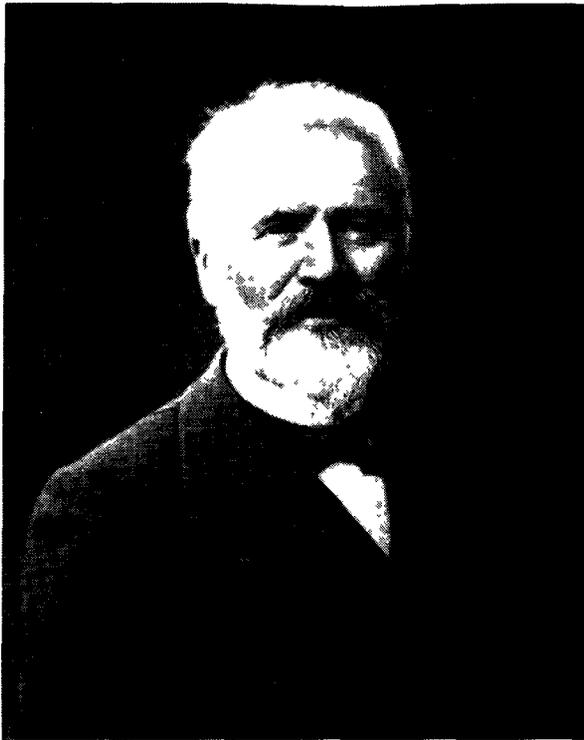
### Развитие линейной алгебры

В линейной алгебре есть две стороны — формальные алгебраические формулы и вычисления и их геометрическая интерпретация. В своем развитии линейная алгебра возникла от слияния теории решения систем линейных уравнений и аналитической геометрии, первая теория дала алгебраические формулы, вторая — геометрические образы; образовавшуюся новую науку можно было бы также назвать (линейной) геометрией  $n$ -мерного пространства. Особое подчеркивание геометрических идей во всей теории принадлежит уже XX в., но сам процесс возникновения основных понятий и основное построение теории происходили в середине XIX в. До середины XIX в., а иногда и позже изложение результатов, относящихся к линейной алгебре, происходит без привлечения геометрического содержания и трудно понять, насколько сами авторы воспринимали не только алгебраический, но и геометрический смысл своих работ.

Более конкретно, в первую треть XIX в. продолжается развитие тем, уже начатых ранее, — теории детерминантов, теории квадратичных форм, особенно в связи с теорией чисел, линейных алгебраических и линейных дифференциальных уравнений.

Гаусс в пятом разделе «Арифметических исследований» (1801) занимается вслед за Лагранжем вопросом о приведении к каноническому виду целочисленных квадратичных форм при целочисленных обратимых заменах переменных. Полученные им глубокие результаты не принадлежат собственно к линейной алгебре, но развитые им методы и стиль мышления оказали влияние и на линейную алгебру.

Следует упомянуть о важной работе Коши «Мемуар о функциях, которые могут принимать только два значения, равные по величине и противоположные по знаку при перестановках содержащихся в них переменных» (*Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment.* — *J. Ec. Polyt.*, 1815). В этой работе, развивая исследования Вандермонда, Коши строго доказывает свойства детерминантов, установленные Вандермондом для детерминантов малых порядков (ИМ, т. 3, с. 65). В ней Коши рассматривает детерминант как функцию от  $n^2$  переменных, которые располагает в квадратную таблицу.



К. ЖОРДАН

В последующие годы несколько важных работ по теории детерминантов и квадратичных форм было опубликовано Якоби. Карл Густав Якоб Якоби родился в 1804 г. в Потсдаме в очень состоятельной семье. После окончания Берлинского университета он уехал в Кёнигсберг, где вскоре в 1827 г. стал профессором и интенсивно работал и преподавал до 1843 г. В последующие годы Якоби уже не преподавал, переехал в Берлин и умер в 1851 г. после тяжелой болезни. Математические интересы Якоби были очень разнообразны. Он наиболее известен своими работами по теории абелевых функций, теории чисел, механике, вариационному исчислению и дифференциальным уравнениям. Он имел многочисленных учеников и создал Кёнигсбергскую школу.

Первая, относящаяся к линейной алгебре, работа Якоби «О преобразовании двух произвольных однородных функций второго порядка в две другие, содержащие только квадраты переменных, с различными теоремами о преобразовании и вычислении интегралов» (*De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constanti una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.*— *J. für Math.*, 1834) посвящена доказательству возможности привести две квадратичные формы одновременно к диагональному виду (если одна из них положительно определена). Попутно Якоби выводит условия на коэффициенты преобразования, сохраняющего форму вида  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ , т. е. условия ортогональности матрицы преобразования.

Несколько работ Якоби 1841—1843 гг. посвящено детерминантам. В одной из них «О функциональных детерминантах» (*De determinantibus functionalibus*, 1841) Якоби вводит знаменитый «якобиан» системы из  $n$  функций от  $n$  переменных. Добавим, что обозначение детерминанта двумя вертикальными чертами было введено Кэли в 1844 г.

В том же 1844 г. появилось два сочинения, знаменующие собой поворот в развитии линейной алгебры, это «Главы из аналитической геометрии  $n$  измерений» Кэли и «Учение о протяжении» Г. Грассмана. В обоих из них вводится понятие  $n$ -мерного пространства. Кэли следует более понятной идее введения  $n$ -мерной системы координат. Грассман стремится определить без координат  $n$ -мерное протяжение, и любопытно отметить, что позднее (в 1888 г.) аксиоматическое определение  $n$ -мерного пространства было дано Д. Пеано со ссылкой на «Учение о протяжении» Грассмана. Важную роль в овладении понятием  $n$ -мерного пространства имели некоторые геометрические исследования того времени, в особенности знаменитая речь Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», произнесенная в 1854 г. в Гёттингене и напечатанная Дедекиндом в 1868 г. В этой речи Риман определяет  $n$ -мерное многообразие и вводит понятие кривизны пространства, открывая новое широчайшее поле геометрических исследований. Об этих работах будет подробнее сказано в главе, посвященной геометрии.

Интенсивно развивавшиеся в это время исследования гиперкомплексных чисел тоже приучали математиков к обращению с многомерными объектами.

Таким образом, понятие  $n$ -мерного пространства и связанные с ним геометрические понятия линейной алгебры пали на хорошую почву и, как пишет Ф. Клейн, «понятие пространства  $n$  измерений  $R_n$  сделалось около 1870 г. общим достоянием стремящегося вперед юного поколения»<sup>26</sup>.

Важным шагом в развитии алгебраической стороны линейной алгебры было появление работы Кэли «Мемуар о теории матриц» (*A memoir on the theory of matrices. — Philos. Trans., 1858*). В этой работе Кэли вводит понятие матрицы, определяет сложение матриц, определяет умножение матриц по аналогии с композицией линейных замен переменных. Он выделяет единичную и нулевую матрицы, указывает, что определитель можно рассматривать как функцию от матрицы, а не от  $n^2$  аргументов, и ввиду этого особенно ясный вид приобретает свойство мультипликативности определителя

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Обобщая одну теорему Гамильтона о кватернионах, Кэли формулирует теорему Гамильтона — Кэли: каждая матрица аннулирует свой характеристический многочлен — и доказывает ее для матриц второго и третьего порядков. Введением понятия матрицы подчеркивалось, что линейная замена переменных — линейное преобразование — должно быть не вспомогательным средством, а объектом изучения.

Несколько ранее, в 1852 г., Дж. Сильвестром (1814—1897) в «Доказательстве теоремы о том, что всякий однородный квадратичный полином приводится вещественной ортогональной подстановкой к форме суммы положительных или отрицательных квадратов» (*The proof of the theorem that every homogenous quadratic polynom is reduced by real orthogonal substitution to a form of sum of positive and negative squares. — Philos. Mag., London, 1852*) был доказан закон инерции квадратичных форм.

<sup>26</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 210.



К. Г. ЯКОБИ

Понятие ранга матрицы и теорема Кронекера — Капелли были открыты независимо несколькими разными исследователями. Первое напечатанное доказательство этой теоремы принадлежит Ч. Л. Доджсону (1832—1898), автору знаменитых повестей «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зеркалье». Теорема была опубликована в его «Элементарной теории детерминантов» (*An elementary treatise on determinants*. London, 1867) в такой формулировке: «Для того чтобы система  $n$  неоднородных уравнений с  $m$  неизвестными была совместна, необходимо и достаточно, чтобы порядок наибольшего отличного от нуля минора был одинаков в расширенной и нерасширенной матрице системы».

Вопрос о приведении матриц линейных преобразований к жордановой нормальной форме был решен К. Вейерштрассом и К. Жорданом. Вейерштрасс в своей работе «К теории билинейных и квадратичных форм» (*Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. — J. für Math.*, 1868) дал необходимый и достаточный критерий подобия матриц, используя понятие элементарных делителей. Жордан в своем «Трактате о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870) определяет жорданову нормальную форму и доказывает возможность и единственность приведения к жордановой нормальной форме.

Таким образом, к 1870 г. были доказаны все основные теоремы линейной алгебры и основное понятие  $n$ -мерного пространства стало уже известным и привычным, но объединение всех этих результатов в единую стройную теорию произошло, быть может, только в головах некоторых выдающихся математиков. В течение следующих тридцати—пятидесяти лет

поле приложений линейной алгебры все увеличивалось, стиль же изложения и доказательств улучшался и к концу этого периода линейная алгебра уже рассматривалась всем математическим миром как замечательная стройная теория, которая должна быть элементом общего образования и активным орудием в руках каждого математика. Пожалуй, можно сказать, что сейчас в линейной алгебре все очевидно — она стала просто элементом нашего мышления.

### Гиперкомплексные числа

Поиски гиперкомплексных чисел, приведшие постепенно к возникновению теории алгебр, составляют в основном течение английской математики. Не считая отдельных исследований, непрерывное развитие теории алгебр началось на континенте с конца 70-х годов XIX в. Это был уже второй этап ее развития — период создания структурной теории полупростых алгебр и теории представлений.

Для понимания развития алгебры в Англии важно рассказать о работах представителей «английской школы символической алгебры». Своеобразие этих работ состоит в том, что, с одной стороны, в них не было создано никаких законченных и вошедших затем в математику результатов, с другой — были высказаны в первоначальной несовершенной форме фундаментальные идеи, освоение которых составляет эпоху в истории математики, продолжающуюся и по настоящее время.

Наиболее значительными алгебраистами английской школы символической алгебры являются три математика: Джордж Пикок (1791—1858), Дункан Ф. Грегори (1813—1844) и Август де Морган (1806—1871). Свои идеи, выработанные в тесном сотрудничестве, по-видимому под руководством Дж. Пикока, они публикуют в серии работ и руководств по алгебре в период двадцати лет — с 1830 по 1850 г. Будучи профессорами Кембриджского и Лондонского университетов, они распространяли и пропагандировали свои идеи среди ученых и студентов; их влияние определенно заметно в дальнейшем развитии английской математики.

Яркое изложение этих идей представляет «Отчет о недавнем прогрессе и настоящем состоянии некоторых ветвей анализа» (Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. Rept of the British ass. of the advanc. of sci. for 1833. London, 1834), опубликованный Пикоком в 1834 г. Несмотря на название, это в основном не реферативная, а вполне оригинальная работа. Пикок рассматривает вопрос о смысле и способе употребления символов в математике. Он выделяет два различных способа: арифметическую алгебру и символическую. В первом случае символ обозначает какое-то (известное или неизвестное, но определенное) целое положительное число. Действия с такими символами являются по сути дела арифметическими действиями с натуральными числами и правила этих действий получаются из нашего знания арифметики.

Символическая алгебра является «наукой о символах и их комбинациях, конструируемых по их собственным правилам, которая может быть применена к арифметике или к другим наукам посредством интерпретации»<sup>27</sup>. Пикок подчеркивает, что символическая алгебра, как и геометрия, должна быть построена на основании некоторых «принципов», которые содержат правила операций с символами, в то время как природа символов

---

<sup>27</sup> Peacock G. Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis. Rept of the British ass. of the advanc. of sci. for 1833. London, 1834, p. 194—195.

никак определенно не указывается. Тем самым он впервые высказывает мысль об аксиоматическом построении алгебры и отмечает, что аксиомы не должны указывать на «природу» используемых объектов. Он настаивает на том, что символы в символической алгебре являются совершенно общими и их смысл и способ представления (реализации) ничем не ограничиваются. Грегори, развивая эти мысли в своей работе 1840 г. «О природе символической алгебры» (On the nature of symbolical algebra.— Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1840, 14, 208—216), объясняет, что могут существовать различные классы операций и, наоборот, различные теории могут содержать операции, удовлетворяющие одинаковым законам, и поэтому их свойства могут быть установлены сразу в общем случае на основании этих законов. Разумеется, эти замечательные идеи тогда могли быть продемонстрированы только на свойствах действительных и комплексных чисел и на довольно искусственных примерах, но мы видим здесь попытку аксиоматизации алгебры и появление понятия алгебраической структуры. Де Морган в своих работах, в частности в работе «Об основаниях алгебры» (On the foundation of algebra.— Trans. of the Cambridge Philos. Soc., 1844), стремится выяснить конкретный вид правил операций в символической алгебре. Он рассматривает символы  $=$ ,  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $:$ ,  $0$ ,  $1$ , выделяет в виде формул, но не приводя соответствующих терминов, такие свойства, как ассоциативность, дистрибутивность, коммутативность, алгебраическая характеристика  $1$  и  $0$ . Им впервые выделены аксиоматические свойства равенства ( $=$ ). Можно сказать, что эта работа де Моргана была наиболее конкретным приложением общих идей школы. Ее результаты наиболее непосредственно вошли в математику. Возвращаясь к уже упоминавшейся работе Пикока, укажем, что он строил один из вариантов символической алгебры путем особого принципа «перманентности» или принципа сохранения формы. А именно, он полагал, что должны быть верны те формулы, которые остаются справедливыми, если подставить вместо букв произвольные натуральные числа, например

$$(a + x) - x = a.$$

Это, так сказать, способ получения алгебраической структуры из ее конкретной реализации, способ, гораздо более умело использованный потом Дедекиндом для конструкции идеалов, иррациональных чисел и точек римановой поверхности и постоянно применяемый с тех пор в математике и математической логике.

Нужно отметить, что математики английской школы совершенно не замечали некоторых трудностей аксиоматического метода, например, никогда не ставили вопроса о непротиворечивости системы аксиом и иногда получали не только неопределенные, но и бессмысленные утверждения. Однако высказанные ими идеи и их взгляды на алгебру оказались очень полезными для развития новых абстрактных теорий: теории групп и теории систем гиперкомплексных чисел.

В 40-е годы в Англии многие математики пытались найти различные системы гиперкомплексных чисел. Хорошо известные идеи школы символической алгебры создавали веру и надежду на успех. Под системой гиперкомплексных чисел имелась в виду система выражений

$$a \cdot 1 + b \cdot \xi + \dots + d \cdot \zeta,$$

где  $a, b, \dots, d$  — действительные числа, а  $1, \xi, \dots, \zeta$  — «основные единицы», сложение и вычитание определялись по координатно, а для умножения нужно было определить произведение всевозможных пар основных

единиц. Какими свойствами должна обладать полученная система, заранее было неясно, и только впоследствии было обнаружено, что получающиеся системы оказываются или некоммутативными, или неассоциативными, или с делителями нуля (т. е. в них имеются неравные нулю элементы  $\alpha$ ,  $\beta$ , для которых  $\alpha\beta = 0$ ) и никак не могут быть полями. Хотелось, конечно, получить числа, возможно близкие по своим свойствам к комплексным числам.

### Уильям Роуэн Гамильтон

Значительным успехом в поисках систем гиперкомплексных чисел было открытие в 1843 г. ирландским математиком Уильямом Гамильтоном тела кватернионов.

Уильям Гамильтон (1805—1865) родился в Дублине. Отличаясь необычными способностями, он уже в восемь лет знал пять языков: французский, итальянский, латинский, греческий и древнееврейский, а в 12 лет — 12 языков, в том числе персидский, арабский и малайский. В 1823 г. он поступил в Тринити колледж в Дублине и был выдающимся студентом. В 1827 г. он представил Ирландской королевской академии свою первую работу «Теория систем лучей» (*Theory of systems of rays.* — *Trans. Roy. Irish Acad.*), которая является глубоким исследованием по геометрической оптике. В том же 1827 г., еще не закончив курса колледжа, он получил должности профессора астрономии в Тринити колледже и королевского астронома Ирландии. В 1830 и 1832 гг. Гамильтон публикует два дополнения к «Теории систем лучей», а в 1834 и 1835 гг. выходят его две работы по механике, доставившие ему особенную славу, в них была создана так называемая гамильтонова механика — новый математический аппарат, послуживший потом основой для создания квантовой механики. В 1837 г. в 17-м томе *Transactions of the Royal Irish Academy* за 1833 и 1835 гг. выходит известная работа Гамильтона «Теория сопряженных функций или алгебраических пар, с предварительным и элементарным изложением алгебры как науки о чистом времени» (*Theory of conjugate functions or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time.* — *Trans. Roy. Irish Acad.*, 1837). В этой работе предложено распространенное сейчас определение комплексных чисел как пар действительных, с аксиоматическим заданием операций для этих пар. В последующие несколько лет Гамильтон с большим энтузиазмом вместе с несколькими другими английскими математиками занимается поисками гиперкомплексных чисел. Произведя громадные вычисления и убедаясь, что во всех случаях для системы с тремя основными единицами имеются делители нуля, он переходит к изучению систем с четырьмя основными единицами и в 1843 г. находит кватернионы. Это открытие произвело на него громадное впечатление, и последующие двадцать лет он посвящает осуществлению грандиозной программы: построить для кватернионов аналоги всех аналитических и алгебраических теорий, имеющих место для комплексных чисел.

Гамильтон считал, и мы сейчас с ним согласны, что кватернионы — это наиболее близкая к комплексным система гиперкомплексных чисел. Однако эта точка зрения подвергалась значительной критике со стороны некоторых алгебраистов, в частности Дж. Пиккока. Их очень смущала некоммутативность умножения кватернионов. Эту деятельность Гамильтона, создавшую в Дублине целое направление «кватернионистов», постигла частичная неудача — кватернионы занимают в математике место, значительно



*U. P. Hamilton*

#### У. Р. ГАМИЛЬТОН

меньшее, чем комплексные числа, однако полученные результаты способствовали развитию линейной алгебры и векторного анализа. Конец жизни Гамильтона был омрачен душевным расстройством.

Это был замечательный ученый, добивавшийся каждый раз глубоких, фундаментальных результатов в тех областях математики, в которых он начинал работать, один из лучших математиков XIX в.

Расскажем подробнее о кватернионах. Кватернионы можно определить как множество элементов вида

$$\alpha = a + bi + cj + dk,$$

где  $a, b, c, d$  — действительные числа, причем выполнены следующие соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Кватернионы образуют тело, причем, как было позднее доказано, это единственное нетривиальное (не совпадающее с полем  $\mathbf{R}$  действительных чисел и с полем  $\mathbf{C}$  комплексных чисел) тело, являющееся конечномерным пространством над полем  $\mathbf{R}$ ; тело кватернионов обозначают, по имени Гамильтона,  $\mathbf{H}$ . Ввиду некоммутативности умножения кватернионов из них можно составлять примеры некоммутативных групп. На множестве кватернионов определена норма  $N(x)$ , причем  $N(x_1 \cdot x_2) = N(x_1) \cdot N(x_2)$ , а именно  $N(a + bi + cj + dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Гамильтон рассматривал среди всех кватернионов подпространство

$$V = \{ai + bj + ck\},$$

элементы которого он называл векторами; здесь впервые появилось слово вектор. Множество  $V$  можно рассматривать как трехмерное евклидово пространство, и произвольное ортогональное преобразование с определителем 1 этого пространства имеет вид

$$x \rightarrow \alpha x \alpha^{-1},$$

где  $\alpha$  — некоторый кватернион с нормой 1, — знаменитая и замечательная формула, аналог которой был найден в бумагах Гаусса. Используя умножение кватернионов, Гамильтон определил векторное произведение векторов 3-мерного пространства, построив одну из первых «неарифметических» операций в алгебре<sup>28</sup>. Особое значение имели введение Гамильтоном понятия векторного поля как закона, сопоставляющего каждой точке пространства свой вектор, и введение им операции  $\nabla$  — прообраза оператора  $d$  в теории дифференциальных форм. Эти и другие открытия были систематически изложены Гамильтоном в двух трудах «Лекции о кватернионах» (Lectures on quaternions. Dublin, 1853) и «Элементы теории кватернионов» (Elements of quaternions. Dublin, 1866). Изучение кватернионов было большим стимулом к развитию теории алгебр, линейной алгебры и векторного анализа.

Немногим позднее открытия кватернионов А. Кэли опубликовал работу «Об эллиптических функциях Якоби и кватернионах» (On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Brouwin; and on quaternions.—Philos. Mag., 1845), в которой он рассматривает 8-мерную алгебру над полем действительных чисел — октавы или числа Кэли. Умножение в этой алгебре не только некоммутативно, но и неассоциативно (однако всякая пара октав порождает ассоциативную подалгебру — это свойство в настоящее время называется «альтернативностью»), но в то же время всякая ненулевая октава обладает обратной. Ввиду неассоциативности умножения октав из них можно составлять примеры неассоциативных аналогов групп, так называемых луп.

Одновременно некоторые математики считали нужным изучать варианты гиперкомплексных чисел, имеющих делители нуля. Особенно интересна работа ирландского математика Дж. Гревса (1806—1870) «Об алгебраических триплетях» (On algebraical triplets. Dublin, 1847), в которой Гревс рассматривает «триплеты» вида

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2,$$

где  $\varepsilon^3 = 1$ . Гревс предлагает следующую геометрическую интерпретацию произведения триплетов. Он сопоставляет триплету  $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$  точку трехмерного пространства с координатами  $(a, b, c)$ , проводит в этом пространстве прямую  $(x, x, x)$  и ортогональную ей плоскость и показывает, что при произведении триплетов перемножаются их проекции на прямую и плоскость соответственно как вещественные и комплексные числа. Тем самым Гревс показал, что алгебра его триплетов есть прямая сумма полей  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ ; делителями нуля являются триплеты, проекции которых на прямую или на плоскость равны нулю.

### Алгебра матриц

После этих исследований алгебр малых размерностей заметным шагом вперед была работа Кэли «Мемуар о теории матриц» (1858). В этой работе Кэли не только определяет матрицы и операции сложения матриц (см. с. 68).

<sup>28</sup> Подробнее об этом см. в кн.: Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. М.—Л., ОГИЗ, 1933.

Он строит реализацию тела кватернионов в виде подалгебры комплексных матриц второго порядка, установив изоморфизм

$$a + bi + cj + dk \cong \begin{vmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{vmatrix},$$

при этом норма кватернионов равна определителю соответствующей матрицы. Можно сказать, что тем самым Кэли впервые рассматривает линейное представление алгебры. Алгебра матриц, введенная Кэли, быстро получила широкое признание. Этим исследованием Кэли была обнаружена связь двух казавшихся вначале совсем разнородными ветвей алгебры — линейной алгебры и теории гиперкомплексных чисел, что благотворно сказалось на развитии обеих этих ветвей.

### Алгебры Г. Грассмана и У. К. Клиффорда

В это же время, в 1862 г., вышло в свет вторым изданием «Учение о протяжении» (*Ausdehnungslehre*) Г. Грассмана. В этой книге, посвященной геометрии пространства  $n$ -измерений, в первом издании (1844) «все выводится из наиболее общих философских понятий, почти без формул». Второе издание, переработанное автором, оказалось более понятным и было более замечено математическим миром. В частности, в этой книге содержится построение знаменитой алгебры Грассмана или внешней алгебры, сейчас всем известной в связи с внешним умножением дифференциальных форм.

Грассман, определив  $n$ -мерное линейное пространство векторов, определил в нем кососимметрические «внешние произведения»

$$[x_1 x_2] = -[x_2 x_1], \quad [x_1 x_2 x_3] = -[x_2 x_1 x_3] = \dots = -[x_3 x_2 x_1],$$

которые в случае, когда их сомножители линейно зависимы, Грассман считал равными нулю. В случае, когда векторы  $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_p$  линейно независимы, Грассман определил также произведение

$$[x_1 \dots x_m] [x_{m+1} \dots x_p] = [x_1 \dots x_m x_{m+1} \dots x_p],$$

если же указанные векторы линейно зависимы, это произведение считается равным нулю. Тем самым Грассман определил алгебру выражений

$$a + \sum_i a_i e_i + \sum_i \sum_j a_{ij} [e_i e_j] + \dots + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_r} a_{i_1 i_2 \dots i_r} [e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}] + \dots \\ \dots + a_{12 \dots n} [e_1 e_2 \dots e_n],$$

которые он называл «экстенсивными величинами», в настоящее время их называют числами Грассмана  $n$ -го порядка. Число координат этих «чисел» равно

$$1 + n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{r} + \dots + \binom{n}{2} + n + 1 = 2^n.$$

К труду Грассмана мы еще вернемся в разделе, посвященном геометрии XIX в.

Английский математик Уильям Кингдон Клиффорд (1845—1879), бывший профессор Лондонского университета и знаменитый своими работами по геометрии, в «Приложениях экстенсивной алгебры Грассмана» (*Application of Grassmann's extensive algebra.*— Amer. J. Math., 1879) предложил следующее видоизменение алгебры Грассмана: он также рассматривал линейные комбинации  $n$  векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и произведений  $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}$ , которые в случае, когда все их сомножители различны, опреде-

ляются так же, как «внешние произведения» Грассмана, но в случае, когда среди сомножителей имеются одинаковые, произведение не равно нулю, а вычисляется с учетом правила  $e_i^2 = -1$  (например,  $e_1 e_2 e_1 = -e_1^2 e_2 = e_2$ ). Вскоре после появления чисел Клиффорда Рудольф Липшиц (1832—1908) в «Исследованиях о суммах квадратов» (Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn, 1886) показал, что ортогональные преобразования  $n$ -мерного пространства представляются преобразованиями  $x \rightarrow \alpha x \alpha^{-1}$  в этих алгебрах, где  $x = \sum_1^n x^i e_i$ . Полученные представления впоследствии получили название «спинорных представлений» ортогональных преобразований.

### Ассоциативные алгебры

Общее понятие ассоциативной алгебры, частными случаями которого являются поле комплексных чисел, тело кватернионов, алгебры матриц, двойных и дуальных чисел и чисел Грассмана и Клиффорда, было определено американским алгебраистом Бенджаменом Пирсом (1809—1880), профессором Гарвардского университета, в книге «Линейные ассоциативные алгебры» (Linear associative algebras. Harvard, 1872). Пирс определял алгебру как  $n$ -мерное линейное пространство, в котором определено ассоциативное умножение векторов, дистрибутивное относительно сложения векторов и перестановочное с умножением вектора на число. Из рассмотренных нами алгебр этому требованию не удовлетворяют только алгебры октав и векторов 3-мерного пространства с векторным умножением.

Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — базисные векторы, то для задания умножения векторов достаточно задать умножение базисных векторов по формулам

$$e_i e_j = \sum_k c_{ij}^k e_k,$$

называемым формулами структуры алгебры (числа  $c_{ij}^k$  называются структурными константами алгебры).

Пирс ввел понятия нильпотентных элементов — элементов  $e$ , некоторая степень  $e^r$  которых равна нулю (к таким элементам относятся элементы  $e_i$  алгебры Грассмана), и идемпотентных элементов, все степени которых совпадают. С помощью этих понятий Пирс провел классификацию комплексных алгебр небольших размерностей.

Общая теория алгебр появилась в лекциях К. Вейерштрасса еще в 1861 г., но его исследования были опубликованы только в работе «К теории комплексных величин, образованных из  $n$  главных единиц» (Zur Theorie der aus  $n$  Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.— Gött. Nachr., 1884). Вейерштрасс показал, что всякая коммутативная алгебра без нильпотентных элементов является прямой суммой нескольких полей  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .

### Теория инвариантов

Классическая теория инвариантов появилась в середине XIX в. в Англии и заняла затем одно из центральных мест в математике второй половины XIX в. Своим возникновением теория инвариантов обязана трем наукам: теории чисел (гауссова классификация бинарных квадратичных форм), геометрии (проективные свойства кривых) и алгебре (теории определителей). Начальный период ее развития связан с творчеством Кэли, Сильвестра (придумавшего почти все термины теории, в том числе слово

«инвариант»), Сальмона в Англии, Якоби, Гессе в Германии и Эрмита во Франции. Затем ведущую роль в развитии теории инвариантов начинают играть немецкие математики, среди которых особенно выделяются Аронгольд, Клебш и Гордан. Математиком, решившим в конце века (1884—1892) основные проблемы теории, долгое время казавшиеся неприступными, и тем самым, по словам Г. Вейля, «почти убившим весь предмет», был Давид Гильберт.

Основная задача теории, вокруг которой концентрировались усилия, состояла в построении и изучении инвариантов форм и их систем. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — переменные. Формой порядка  $k$  называется однородный многочлен

$$P = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

степени  $k$ . Обозначим через  $GL(n)$  полную линейную группу, т. е. группу всех невырожденных матриц порядка  $n$ , а через  $SL(n)$  — унимодулярную группу, состоящую из матриц с определителем 1. Линейные преобразования этих групп действуют на переменных  $x_1, \dots, x_n$  формы  $P$  и переводят ее в новую форму

$$P^g(x_1, \dots, x_n) = P(g(x_1), \dots, g(x_n)), \quad g \in GL(n).$$

Коэффициенты всевозможных форм с фиксированными числами  $n$  и  $k$  образуют векторное пространство  $E$ , и соответствие  $P \rightarrow P^g$  задает линейное преобразование этого пространства, отвечающее элементу  $g$  группы  $GL(n)$ . Позднее такое соответствие стали называть представлением группы  $GL(n)$  в пространстве  $E$ . Инвариантом (целым) называется любая функция  $f$  на пространстве  $E$ , которая 1) является многочленом от координат этого пространства, т. е. многочленом от коэффициентов форм  $P$ , и 2) не меняется под действием группы  $GL(n)$  или  $SL(n)$ , т. е.  $f(P^g) = f(P)$  для всех  $g \in GL(n)$  или  $g \in SL(n)$ .

Кроме того, в классической теории инвариантов рассматривались функции более общего вида, например рациональные, и допускалось также иное поведение, скажем умножение на некоторую степень  $\det(g)$  под действием преобразований  $g$ , принадлежащих различным подгруппам группы  $GL(n)$ .

В кольце  $R$  всех многочленов от координат пространства  $E$  целые инварианты  $f$  образуют подкольцо  $R^{\text{inv}}$ . Если рассматривать не одну форму, а набор форм  $P_1, \dots, P_s$  (или, как говорили в то время, Formensysteme) и следующее действие линейных преобразований на этих системах

$$(P_1, \dots, P_s) \rightarrow (P_1^g, \dots, P_s^g),$$

то инварианты в этой ситуации определяются как функции коэффициентов форм  $P_1, \dots, P_s$ , имеющих такие же свойства, как и выше.

Построение инвариантов тесно связано с задачей проективной классификации алгебраических кривых. Именно результаты проективной классификации алгебраических кривых послужили главной отправной точкой при создании теории инвариантов. Из проективной эквивалентности алгебраических систем  $X$  и  $Y$ , определенных системами форм  $P_1, \dots, P_s$  и  $Q_1, \dots, Q_s$ , вытекает, что значения инвариантов для этих систем совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно, так что изучение инвариантов было лишь первым шагом в задаче классификации геометрических объектов.

Первые идеи алгебраической теории инвариантов возникают в теории чисел, а именно в «Арифметических исследованиях» Гаусса в связи с изучением бинарных квадратичных форм вида

$$P = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

при линейных преобразованиях неизвестных  $x$  и  $y$ . Рассматривая линейное преобразование

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

на котором форма  $P$  преобразуется в форму

$$P' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

Гаусс ищет такие величины, которые бы после преобразования не менялись или менялись определенным образом, и приходит прежде всего к «детерминанту» (дискриминанту в нашей терминологии)

$$D' = b'^2 - a'c' = r^2D,$$

где  $r = \alpha\delta - \beta\gamma$ ,  $D = b^2 - ac$ .

Появление теории инвариантов было подготовлено также учением о детерминантах, в особенности двумя работами Якоби «Об образовании и свойствах детерминантов» (*De formatione et proprietatibus determinantum. — J. für Math.*, 1841), «О функциональных детерминантах» (*De determinantibus functionalibus. — J. für Math.*, 1841), в которых это направление было доведено до наиболее полного развития.

Один из существенных результатов, полученных здесь, состоит в том, что для системы  $n$  линейных форм от  $n$  неизвестных

$$P_i = \sum a_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

детерминант  $f = \det(a_{ij})$  является инвариантом относительно группы  $SL(n)$ . Важным обобщением этого результата будет утверждение, что инвариантом является значение якобиана

$$f = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right)$$

в нулевой точке<sup>29</sup>. Эти работы Якоби продолжал работавший в Кёнигсберге, Гейдельберге и Мюнхене профессор Л. О. Гессе (1811 — 1874), особенно в аналитико-геометрическом направлении, что, однако, привело к временной утрате связи с теорией чисел. Гессе показал, что для произвольной формы  $P$  от  $n$  неизвестных определитель, составленный из ее вторых частных производных

$$f = \det\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

который впоследствии был назван его именем, является инвариантом относительно группы.

Одним из первых начал изучать алгебраические инварианты Дж. Буль в 1841 г. Его результаты привлекли внимание Кэли, который понял их значение и в свою очередь заинтересовал новой теорией Сильвестра. К ним примыкает также ирландский математик и теолог Дж. Сальмон. Кэли,

<sup>29</sup> Сам же якобиан, так же как и рассматриваемый ниже гессиан, будучи формой от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , является так называемым ковариантом.



ДЖ. СИЛЬВЕСТР

Сильвестру и Сальмону принадлежит такое большое число работ по теории инвариантов, а роль этих математиков в создании теории так велика, что Эрмит в одном из своих писем окрестил их «инвариантной троицей».

Джеймс Джозеф Сильвестр родился в 1814 г. в Лондоне. В 1831 г. он поступил в Кембридже в колледж Святого Иоанна, который он закончил ввиду своей болезни только в 1837 г. В 1838 г. Сильвестр стал профессором натуральной философии в университетском колледже в Лондоне. Затем он переезжает в Америку. С 1841 по 1845 г. Сильвестр был профессором в Виргинском университете. С 1845 по 1855 г. работал стряпчим, а также математиком в страховой компании. С 1871 г. Сильвестр был профессором в военной академии в Вульвиче, а с 1876 г. профессором в университете Джона Гопкинса в Балтиморе. Наряду с чисто преподавательской деятельностью он продуктивно работал над проблемами чистой математики, в основном в области теории инвариантов. Им был основан один из наиболее известных и ныне математических журналов в Америке — *American Journal of Mathematics*.

В декабре 1883 г. в возрасте шестидесяти девяти лет Сильвестр вернулся в Англию и принял профессию в Оксфорде, которую сохранил за собой до самой смерти.

Сильвестр был человеком яркого и сильного интеллекта. С большим интересом изучая самые разнообразные вопросы, он умел систематизировать и синтезировать сходные явления, возникающие в самых, казалось бы, отдаленных друг от друга областях знания. Наибольших успехов Сильвестр достиг в чисто абстрактном комбинаторном исследовании алгебраических

объектов. Еще в Лондоне Кэли приобщил Сильвестра к новым алгебраическим идеям. Скоро он стал одним из ведущих представителей этого направления алгебраической мысли. Ему, в частности, принадлежат все основные термины новой теории: инвариант, ковариант, дискриминант и т. д.

В математическом творчестве Сильвестра видное место занимает теория элементарных делителей двух квадратичных форм, а также теория канонических форм — теория приведения квадратичных форм к простейшему виду.

Исследования Буля навели Кэли на мысли о вычислении инвариантов однородных функций степени  $n$ . Используя также идеи Гессе и Эйзенштейна об определителях, он разработал технические средства, позволившие ему обобщить понятие инвариантов.

В том же 1841 г. Кэли начинает публикацию серии статей, в которых исследует алгебраические аспекты проективной геометрии. Затем с 1854 по 1878 г. Кэли публикует цикл статей, посвященных изучению однородных полиномов от двух, трех и большего числа переменных. Он получает здесь большое число конкретных результатов, а также открывает символический метод вычисления инвариантов. Так, один из результатов Кэли состоит в том, что для бинарной формы  $P$  степени четыре

$$P = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{C},$$

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

являются полной системой инвариантов относительно группы  $SL(2)$ . Другими словами, инварианты  $g_2$  и  $g_3$  порождают кольцо инвариантов

$$R^{\text{inv}} = \mathbb{C}\{g_2, g_3\},$$

Например, дискриминант формы  $P$  выражается следующим образом:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Для бинарной кубической формы

$$P = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

Эйзенштейн нашел следующий простейший инвариант:

$$f = 3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2,$$

равный с точностью до множителя дискриминанту гессиана

$$h = \frac{1}{36} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_2} \end{vmatrix}.$$

Этот результат Эйзенштейна послужил отправной точкой при дальнейшем изучении бинарных инвариантов, в частности, в упомянутых выше работах Кэли.

Позже берлинский математик З. Г. Аронгольд (1819—1884), начавший свои исследования по теории инвариантов в 1849 г., внес значительный вклад в изучение инвариантов тернарных кубических форм.

Из предыдущих примеров видно, что первой фундаментальной проблемой, вставшей перед основателями теории инвариантов, было отыскание частных инвариантов. В этом направлении в основном и велись работы в 40—70-х годах XIX в.

На этом пути после того, как было вычислено большое число специальных или частных инвариантов, встала другая фундаментальная проблема — нахождение полной системы инвариантов. Во многих случаях было замечено, что среди инвариантов данной системы форм можно выбрать конечное число таких инвариантов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , что все остальные инварианты будут являться многочленами от  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Эти инварианты впервые были обнаружены Кэли, который, основываясь на результатах Эйзенштейна для бинарных кубических форм, нашел их для бинарных форм степени 3 и 4, и опубликованы во втором из известных «Мемуаров о формах» (*Memoirs on quantics*, 1855). Такие системы инвариантов получили название полных или фундаментальных систем инвариантов. С современной точки зрения это конечная система образующих кольца инвариантов. Построение подобных систем для форм более высоких степеней от большого числа переменных натолкнулось на значительные трудности. На этом пути трудами в основном немецкой школы был разработан так называемый символический метод. Этот метод позволял вычислять в явном виде инварианты любой системы форм, имеющие заданную степень. Поскольку степени инвариантов полной системы заранее неизвестны, то символический метод в принципе не позволяет строить полные системы инвариантов. Тем не менее, комбинируя его с другими соображениями, удалось в некоторых частных случаях получить требуемый результат. Вершиной этого подхода было доказательство профессором в Эрлангене Паулем Горданом (1837—1912) в 1868 г. существования конечной полной системы инвариантов для бинарных форм любых степеней. В 1870 г. он также доказал, что любая конечная система бинарных форм имеет конечную полную систему инвариантов. За свои исследования Гордан был прозван «королем теории инвариантов». Отметим, что построения Гордана, равно как и другие конструкции, связанные с символическим методом, были вполне эффективными, хотя и связанными со сложными вычислениями. Для бинарных форм степени  $n$  явный вид полной системы инвариантов был найден лишь при  $n \leq 6$ . Уже случай  $n = 7$  приводил к вычислениям, превосходящим возможности XIX в., хотя в то время исписать десяток страниц одними формулами без единого слова не считалось чем-то особенным.

В течение следующих 12 лет были получены различные продолжения этого результата Гордана. Сам Гордан нашел полную систему инвариантов для тернарных квадратичных форм, для тернарных кубических форм и для систем двух и трех тернарных квадратичных форм. Однако вопрос о существовании конечной полной системы инвариантов в общем случае оставался одной из центральных нерешенных проблем теории.

Таким было состояние этой области математики к середине 80-х годов, когда ею начинает заниматься Гильберт. Его обращение к этой теории выглядит вполне естественным, если вспомнить о традициях Кёнигсбергской математической школы. Созданная в первой половине века Э. Нейманом (1798—1895) и К. Якоби, который преподавал в Кёнигсберге с 1826 по 1843 г., она дала почти всех немецких математиков, занимавшихся теорией инвариантов. Гессе, ученик Якоби, преподавал здесь в 1840—1855 гг. К этой школе принадлежали также Клебш и Аронгольд.

Фундаментальные работы Гильберта «О теории алгебраических форм» (*Über die Theorie der algebraischen Formen*. — *Math. Ann.*, 1890) и «О полной системе инвариантов» (*Über die vollen Invariantensysteme*. — *Math.*

Ann., 1893) содержали решение задачи, над которой долгое время бились многие специалисты по теории инвариантов. Речь идет о конечности числа образующих кольца целых инвариантов. Доказательство, предложенное Гильбертом в первой работе, было основано на придуманной им для этой цели теореме о базисе. Очень простое и короткое, оно обладало с точки зрения распространенных тогда взглядов одним принципиальным недостатком — было неэффективным. Вторая работа Гильберта завершает его исследования по теории инвариантов. В ней он предлагает явный и конструктивный способ ее решения, основанный на введенном им понятии нуль-формы.

Поразителен контраст между судьбами этих двух работ Гильберта. Если первая стимулировала развитие целого ряда разделов математики XX в. (коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия, теория представлений, гомологическая алгебра), то вторая вскоре после ее публикации оказалась забытой и почти 70 лет не оказывала никакого влияния на развитие математики.

### 3. ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И НАЧАЛА КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ

#### «Арифметические исследования» К. Ф. Гаусса

Определяющее влияние на всю теорию чисел прошлого века оказало творчество Гаусса, особенно две его работы: «Арифметические исследования» (1801) и «Теория биквадратичных вычетов» (*Theoria residuorum biquadraticorum. Commentationes soc. reg. sci. Götting. recentiores. Göttingae, pt 1, 1828; pt 2, 1832*). Вторая, где, по словам Гаусса, была в некотором смысле бесконечно расширена область высшей арифметики, будет рассмотрена в следующем подразделе. Здесь мы остановимся на «Арифметических исследованиях».

Эта книга замечательна как по своему содержанию — в ней доказаны очень трудные теоремы, которые долго не поддавались усилиям Эйлера, Лагранжа и Лежандра, и положено начало совершенно новым теориям, послужившим образцом для математиков XIX в., так и по своей форме. Прежде всего Гаусс ввел *отношение сравнения* и всю элементарную теорию чисел изложил на языке сравнений. Два целых числа  $a$  и  $b$  он назвал сравнимыми по модулю  $c$ , где  $c$  — целое, если разность  $a - b$  делится на  $c$ . Для отношения сравнения он ввел знак  $\equiv$ , аналогичный знаку равенства, и записывал

$$a \equiv b \pmod{c}.$$

Выбор знака был очень удачен, так как подчеркивал аналогию между сравнениями и равенствами: Гаусс доказывает, что со сравнениями по некоторому модулю можно оперировать по тем же правилам, как с уравнениями, их можно складывать, перемножать, умножать на число и делить на число, взаимно простое с модулем.

Отношение сравнения симметрично, рефлексивно и транзитивно, поэтому оно разбивает все целые числа на непересекающиеся классы сравнимых между собой чисел, которые называются классами вычетов по модулю  $c$ . Каждому такому классу можно сопоставить некоторый его представитель — например, наименьшее положительное число этого класса (Гаусс называет его наименьшим вычетом). Тогда представителями классов по модулю  $n$  будут числа  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Они составляют так называемую полную систему вычетов по mod  $n$ . Над классами вычетов можно опре-

делить операции сложения и умножения, после чего они составят конечное кольцо. Если же модулем является простое число  $p$ , то классы вычетов образуют конечное поле, так как у каждого из элементов его  $1, 2, \dots, p - 1$  существует обратный ему элемент. Это был первый в математике пример конечного поля (и первый пример «неестественного» поля, т. е. не связанного с проблемой измерения). Гаусс развивает теорию сравнений по аналогии с учением об уравнениях: рассматривает сначала линейные сравнения

$$ax + b \equiv 0 \pmod{c},$$

затем системы таких сравнений и, наконец, сравнения 2-й степени и высших степеней. Он показывает, что сравнение  $m$ -й степени

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Mx + N \equiv 0 \pmod{p},$$

где  $p$  — простое,  $A \not\equiv 0 \pmod{p}$ , имеет не более чем  $m$  несравнимых по  $\text{mod } p$  корней. (Впрочем, эта теорема была доказана еще Лагранжем в работе «Новый метод для решения неопределенных задач в целых числах» (Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers. — Mém. Acad. Berlin (1768), 1770) без введения отношения сравнения.)

В теории сравнений высших степеней отметим строгое доказательство существования первообразного корня по простому модулю и введение и систематическое употребление понятия индекса, соответствующего понятию логарифма.

Что касается сравнений второй степени, то почти все основные результаты здесь были получены Эйлером. Гауссу принадлежит систематизация всей теории и доказательство квадратичного закона взаимности, открытого Эйлером, строгое обоснование которого еще никому не удавалось провести (см. ИМ, т. 3, с. 104—105).

В своей книге Гаусс привел два доказательства этой замечательной теоремы (впоследствии еще 6, всего 8). Если воспользоваться символом Лежандра  $\left(\frac{p}{q}\right)$ , где  $p$  и  $q$  — простые нечетные, и положить  $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$ , когда  $p$  — квадратичный вычет по  $\text{mod } q$  (т. е. сравнение  $x^2 \equiv p \pmod{q}$  разрешимо), и  $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$  в противном случае, то квадратичный закон взаимности можно записать в виде

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Гаусс назвал эту теорему *фундаментальной*, «так как почти все, что можно высказать о квадратичных вычетах, основывается на этой теореме»<sup>30</sup>. Исследования этой теоремы и ее обобщения были одним из важнейших стимулов развития алгебраической теории чисел.

Другое основное направление, развитое Гауссом, получило название теории квадратичных форм. Квадратичной формой (или просто формой) от двух переменных называется выражение

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \tag{13}$$

где  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ . Гаусс коротко записывает форму в виде  $(a, b, c)$ . Число  $N$  называется представимым формой (13), если существуют такие целые  $m$  и

<sup>30</sup> Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 126.

$n$ , что

$$N = am^2 + 2bmn + cn^2.$$

Число  $D = b^2 - ac$  называется дискриминантом формы.

Еще Ферма поставил вопрос об определении вида целых чисел, представимых формами данного дискриминанта. Так, Ферма знал, что формой  $x^2 + y^2$  представимы все простые числа вида  $4n + 1$  и не представимо никакое простое число вида  $4n + 3$ . Он знал также, какой вид имеют простые числа, представимые формами  $x^2 \pm 2y^2$  и  $x^2 + 3y^2$ . Эйлер доказал факты, открытые Ферма, и существенно продвинулся в изучении свойств квадратичных форм. Он первый перенес внимание с изучения вида чисел, представимых некоторой формой, на изучение вида делителей представимых чисел. Этим проблема из аддитивной была переведена в мультипликативную (см. ИМ, т. 3, с. 102).

Следуя по этому пути, Лагранж в «Арифметических исследованиях» (Recherches arithmétiques.— Nouv. Mém. Acad. Berlin (1773), 1775) показал, что делители  $p$  числа  $N$ , представимого формой

$$u^2 + dv^2, \tag{14}$$

сами уже, вообще говоря, не могут быть представлены формой того же вида, зато допускают представление вида

$$p = ax^2 + 2bxy + cy^2, \tag{15}$$

где  $ac - b^2 = d$ , т. е. формой того же дискриминанта, что и форма (14), получившая название главной формы данного дискриминанта<sup>31</sup>.

Лагранж устанавливает и обратное предложение; если число  $p$  представимо в виде (15), то оно является делителем некоторого числа, представимого главной формой того же дискриминанта. Все это навело Лагранжа на мысль рассмотреть совместно все формы одного дискриминанта. Все такие формы он разбил на классы, отнеся две формы вида (15) к одному и тому же классу, если их можно перевести друг в друга путем линейной подстановки

$$x = Lx' + My', \quad y = lx' + my', \tag{16}$$

определитель которой  $Lm - lM = \pm 1$ . Тогда форма  $F(x, y)$  перейдет в форму

$$F_1(x', y') = a_1x'^2 + 2b_1x'y' + c_1y'^2, \tag{13'}$$

у которой  $a_1c_1 - b_1^2 = d(Lm - lM)^2 = d = ac - b^2$ . Таким образом, дискриминант  $d$  является инвариантом преобразований (16). Очевидно, что форму (13') можно в свою очередь перевести в (13) преобразованием вида (16). Такие две формы Гаусс назвал впоследствии эквивалентными (если  $Lm - lM = 1$ , то собственно эквивалентными). Нетрудно видеть, что если некоторое число  $N$  представимо формой (13), то оно будет представимо и всеми эквивалентными формами.

Отношение эквивалентности  $\sim$  обладает всеми свойствами отношения равенства: 1)  $F \sim F$ ; 2) если  $F \sim F_1$ , то  $F_1 \sim F$ ; 3) если  $F \sim F_1$  и  $F_1 \sim F_2$ , то  $F \sim F_2$ . Поэтому все формы данного дискриминанта действительно разбиваются на непересекающиеся классы.

<sup>31</sup> Лагранж определяет дискриминант формы как  $ac - b^2$ , т. е.  $d = ac - b^2 = -D$ , где  $D$  — дискриминант в смысле Гаусса.

Лагранж доказал чрезвычайно важную теорему о том, что число классов форм заданного дискриминанта всегда конечно. Поскольку все последующие доказательства конечности числа классов идеалов основываются на аналогичном принципе, мы приведем его рассуждения.

Лагранж показывает сначала, что любую форму (15) можно перевести с помощью преобразования (16) в форму

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2,$$

у которой  $\alpha\gamma - \beta^2 = d$ ,  $2|\beta| \leq |\alpha|$ ,  $2|\beta| \leq |\gamma|$ . Такую форму он назвал приведенной. Сопоставив каждому классу форм приведенную форму (при данном Лагранжем способе приведения такое сопоставление неоднозначно, одному и тому же классу могут соответствовать несколько приведенных форм), Лагранж показывает, что существует только конечное число неэквивалентных приведенных форм данного дискриминанта. Действительно, если  $d > 0$ , то  $d = \alpha\gamma - \beta^2 \geq 4\beta^2 - \beta^2 = 3\beta^2$ , откуда  $\beta \leq \sqrt{d/3}$ , а так как  $\beta$  — целое рациональное, то оно может принимать только конечное число различных значений. Но при данном  $\beta$

$$\alpha\gamma = d + \beta^2,$$

т. е.  $\alpha$  и  $\gamma$  могут принимать также только конечное число значений. Поэтому всего приведенных форм данного дискриминанта может быть лишь конечное число. Аналогично проводится доказательство и при  $d < 0$  (ср. ИМ, т. 3, с. 114—116).

Гаусс в своей книге построил законченную теорию бинарных квадратичных форм (т. е. форм от двух переменных) и начал аналогичное построение для тернарных форм. Он уточнил понятие эквивалентности и приведенной формы, разбил формы одного дискриминанта на классы эквивалентных между собой форм, а затем на роды и порядки. Наконец, он ввел композицию форм, т. е. определил на множестве форм данного дискриминанта операцию, аналогичную по своим свойствам арифметической операции сложения (или умножения):

$$F_1 \oplus F_2 = F_3.$$

Гаусс доказывает, что если  $F_1 \sim F'_1, F_2 \sim F'_2$ , то форма  $F_3 = F'_1 \oplus F'_2$  будет эквивалентна  $F_3$ . Таким образом, эта операция переносится на множество классов форм. Мы бы теперь сказали, что он определяет фактор-закон композиции. «Делается непосредственно ясным, — пишет Гаусс, *понятие класса, составленного из двух или из нескольких заданных классов*»<sup>32</sup>. И далее: «Композицию классов удобно обозначать знаком сложения  $+$  и, точно так же тождественность классов — знаком равенства»<sup>33</sup>.

Гаусс устанавливает по существу, что множество классов форм с введенным законом композиции образует конечную абелеву группу, в которой роль нуля играет главный класс, т. е. тот, которому принадлежит главная форма  $x^2 - Dy^2$ . Он показывает, что для каждого класса существует ему противоположный и их композиция дает главный класс.

Помимо интереса, который представляют эти исследования для создания теории групп, они имеют еще первостепенное значение для построения арифметики полей алгебраических чисел. Можно утверждать, что Гаусс построил арифметику квадратичных полей, но не с помощью привычного нам теперь языка алгебраических чисел, а с помощью квадратичных форм.

<sup>32</sup> Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 333.

<sup>33</sup> Там же, с. 334.

Действительно, уже результаты Лагранжа показывали, что делители чисел вида  $N = u^2 - Dv^2$  представимы формами  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  дискриминанта  $D$ . Но представление числа  $N$  в виде  $u^2 - Dv^2$  означает, что оно является нормой числа  $\alpha = u + v\sqrt{D}$  поля  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ . Делитель  $p$  числа  $N$ , как показал Лагранж, уже вообще не является нормой числа из  $K$ , но он представим формой дискриминанта  $D$ , что равносильно тому, что  $p$  перестает быть простым в поле  $K$ . После построения теории идеалов Дедекиндом было показано, что такое  $p$  является нормой некоторого целого идеала из этого поля (см. ниже). Оказалось также, что классы идеалов квадратичного поля соответствуют классам квадратичных форм Гаусса, а композиции классов форм отвечают умножению соответствующих классов идеалов<sup>34</sup>.

На основе этого соответствия можно доказать, например, что число  $h_0$  классов идеалов квадратичного поля всегда конечно. Вопрос о виде простых чисел, представимых формами  $F(x, y)$  дискриминанта  $D$ , которым занимались Ферма, Эйлер, Лагранж и Гаусс, эквивалентен вопросу о том, какие простые числа могут быть представимы как нормы целых идеалов из поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ , т. е. перестают быть простыми в кольце целых чисел поля. Так, например, Гаусс смог сразу же установить, какие простые рациональные числа перестают быть простыми в кольце  $\mathbb{Z}[i]$ .

Наоборот, громоздкая теория композиции классов форм может быть выражена гораздо проще через умножение соответствующих классов идеалов.

Во всяком случае основы арифметики квадратичных полей уже содержались в теории квадратичных форм Гаусса. Следует отметить, что книга Гаусса была трудна для современников. Одним из первых ее читателей, который глубоко понял ее, был П. Лежен-Дирихле. По словам Ф. Клейна, «только благодаря интерпретирующим лекциям Дирихле, которые дают прекрасное введение в постановку проблем у Гаусса и выясняют характер его мышления, это сочинение получило то влияние, которого оно заслуживает»<sup>35</sup>. Заметим, что эти лекции Дирихле были изданы только его слушателями — Р. Дедекиндом (первое издание вышло в 1863, затем книга неоднократно переиздавалась), после чего идеи и методы Гаусса приобрели уже широкую популярность.

### Исследования о числе классов квадратичных форм

Замечательным открытием в алгебраической теории чисел является вывод Гауссом и Дирихле точных формул для числа классов квадратичных форм заданного дискриминанта. Это открытие, завершая, с одной стороны, гауссову теорию бинарных квадратичных форм, содержит глубокие новые идеи и является началом многочисленных исследований о  $L$ -рядах Дирихле и их применениях в теории чисел.

Свои исследования в этом направлении Гаусс так и не опубликовал при жизни. В его бумагах была найдена относящаяся к периоду 1830—1835 гг. неоконченная рукопись работы об определении числа классов форм отрицательного определителя, в которой имеется верный ответ и основная схема доказательства. Полное опубликованное решение проблемы принадлежит Дирихле. Оно содержится в напечатанной в т. 19 и 21

<sup>34</sup> Подробнее об этом см., например, в кн.: Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.—Л., Гостехиздат, 1940.

<sup>35</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 56.

журнала Крелле работе «Исследования о различных применениях анализа бесконечно малых в теории чисел» (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* — *J. für Math.*, 1838, 1840). Эта работа — одна из серии замечательных работ Дирихле по применению аналитических методов в теории чисел, о которых говорится в соответствующем разделе настоящей книги (см. с. 152). Хотя вероятно, что Дирихле, близкий друг, даже почти ученик Гаусса, был знаком с его идеями на эту тему, статья — вполне оригинальная и самостоятельная работа.

Рассмотрим более подробно рассуждения Дирихле. Сначала он сводит задачу нахождения числа классов бинарных форм дискриминанта  $D$  к задаче нахождения числа классов таких форм вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

где числа  $a, b, c$  не имеют общих делителей (начальные формы). Пусть  $S$  — полная система представителей классов этих форм. Тогда из теории Гаусса можно получить предложение о том, что «одна и та же система бесконечного множества чисел может быть получена двояко: во-первых, соединением простых чисел  $f$ , для которых  $D$  является квадратичным вычетом; во-вторых, подстановкой всех допустимых пар чисел  $x, y$  в формы системы  $S$ . Этот результат предыдущих изысканий об эквивалентности форм и представимости чисел является основным принципом последующего исследования»<sup>36</sup>. При этом если число  $m$  получается при подстановке некоторой допустимой пары  $(x, y)$  в одну из форм системы  $S$ , то число всех таких представлений числа  $m$  равно  $\kappa 2^\mu$ , где  $\mu$  — число простых множителей в  $m$ ,  $\kappa$  — константа, зависящая только от дискриминанта  $D$ . Поэтому если мы запишем бесконечный ряд

$$\sum_{(a, b, c) \in S} \sum_{\substack{(x, y) \text{— всевозможные} \\ \text{допустимые пары}}} (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s},$$

где  $s$  — некоторое вещественное число, то, переставляя его слагаемые, получим ряд, равный

$$\kappa \sum \frac{2^\mu}{m^s},$$

где суммирование происходит по всем числам  $m$ , составленным из простых множителей, относительно которых  $D$  является квадратичным вычетом. Оба ряда абсолютно сходятся при всех  $s > 1$ , поэтому для таких  $s$  мы имеем равенство

$$\sum_{(a, b, c) \in S} \sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s} = \kappa \sum \frac{2^\mu}{m^s},$$

где суммирование происходит так же, как указано выше.

Функция, стоящая в правой части, поддается исследованию и тем самым полученное равенство позволяет получить некоторую информацию о классах квадратичных форм данного дискриминанта. Для вычисления числа классов Дирихле рассматривает поведение правой и левой частей равенства при  $s \rightarrow 1$ . Если «заставить показатель  $s$  убывать и стремиться к единице, то одновременно каждая из этих сумм [имеются в виду суммы

$$\sum_{\substack{(x, y) \text{— допустимые} \\ \text{пары}}} (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-s}$$

<sup>36</sup> *Лежен-Дирихле П. Г.* Лекции по теории чисел. М.— Л., ОНТИ, 1936, с. 194. Определение «допустимых пар» см. там же.

при фиксированных  $(a, b, c) \in S$  будет неограниченно возрастать, и при ближайшем рассмотрении окажется, что произведение такой суммы на  $s - 1$  стремится к определенному конечному пределу  $L$ , который зависит только от общего всем формам дискриминанта  $D$ ; следовательно, предельное значение всей, умноженной на  $s - 1$  левой части, будет равно  $hL$ , если через  $h$  обозначить число сумм, т.е. число форм  $(a, b, c), \dots$ , содержащихся в системе форм  $S$ . Далее, так как предельное значение произведения на  $s - 1$  правой части может быть определено непосредственно, то таким образом получается выражение для всего числа классов  $h$ , определение которого и составляет предмет нашего исследования»<sup>37</sup>.

Мы выписали из текста цитируемых здесь лекций Дирихле описание им общего плана своего доказательства. Само вычисление предела

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^s$$

содержит очень остроумные соображения, но более сложно, и мы не будем здесь его приводить<sup>38</sup>.

Общий план и конкретные идеи доказательства были позднее применены в доказательстве формулы для числа классов дивизоров поля алгебраических чисел<sup>39</sup>. Умело используемые Дирихле и в этом и в других рассуждениях ряды вида

$$\sum_n \frac{a_n}{n^s}$$

и называются рядами Дирихле.

Нам особенно хочется отметить, что это исследование, объединяющее глубокие алгебраические результаты теории форм и тонкие аналитические методы, ярко демонстрирует единство математики, всегда заметное в работах великих мастеров.

### Целые гауссовы числа и их арифметика

Теория алгебраических чисел сложилась в XIX в. Две задачи, поставленные относительно целых рациональных чисел, способствовали ее развитию. Это — закон взаимности и большая, или великая, теорема Ферма, т.е. утверждение, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при  $n > 2$  и  $xyz \neq 0$  не имеет решений в целых числах (а значит, и в рациональных).

Еще Эйлер, доказывая великую теорему Ферма для  $n = 3$ , начал оперировать с выражениями вида

$$m + n \sqrt{-3},$$

где  $m, n \in \mathbf{Z}$ , как с обычными числами. Он пользовался понятием «простого» числа, «взаимно простых чисел», законом однозначности разложения на «простые» множители и вытекающими отсюда следствиями. Никакого обоснования законности своих действий он не дал (см. ИМ, т. 3, с. 102).

Первое строгое введение целых алгебраических чисел связано с исследованием биквадратичного закона взаимности. Это было сделано Гаус-

<sup>37</sup> Лежен-Дирихле П. Г. Лекции по теории чисел. М.—Л., ОНТИ, 1936, с. 205.

<sup>38</sup> Современное изложение см. в кн.: Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Гл. V, § 1, п. 4. М., «Наука», 1964.

<sup>39</sup> Современное изложение см. там же, гл. V.

сом в «Теории биквадратичных вычетов» (1828—1832). Размышляя над обобщениями квадратичного закона взаимности, Гаусс пришел к выводу о возможности и необходимости расширения понятия целого числа, которое в течение более 2000 лет казалось неотъемлемым внутренним свойством области  $\mathbb{Z}$  целых рациональных чисел. Гаусс отделил это понятие от его естественного носителя и перенес на кольцо чисел вида

$$a + bi, \tag{17}$$

где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , а  $i$  — корень неприводимого над полем рациональных чисел уравнения

$$x^2 + 1 = 0. \tag{18}$$

Он показал не только, что числа (17) образуют область  $\mathfrak{D}$ , замкнутую относительно сложения, вычитания и умножения, но и что в этой области можно построить арифметику, аналогичную обычной. Гаусс определил для этих новых чисел единицы — их будет четыре:  $1, -1, i, -i$  — и назвал числа, получающиеся друг из друга умножением на единицу, ассоциированными. Он заметил, что разложение на множители следует рассматривать с точностью до ассоциированных чисел. Каждому числу  $\alpha$  вида (17) он сопоставил целое число, его норму  $N\alpha = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ . Из определения ясно, что

$$N\alpha\beta = N\alpha N\beta.$$

Простым комплексным числом Гаусс называл такое число вида (17), которое нельзя разложить в произведение двух сомножителей, отличных от единиц.

Из определения вытекает, что каждое составное целое рациональное число будет составным и в области  $\mathfrak{D}$ . Но простые числа из  $\mathbb{Z}$  могут стать в области  $\mathfrak{D}$  составными. Так,  $2 = (1 + i)(1 - i)$ ,  $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$  и вообще любое простое число из  $\mathbb{Z}$  вида  $4n + 1$ , которое, как известно, представимо в виде суммы двух квадратов, перестает быть простым в  $\mathfrak{D}$ :  $p = m^2 + n^2 = (m + ni)(m - ni)$ .

Напротив, простые числа из  $\mathbb{Z}$  вида  $4n + 3$ , как показывает Гаусс, остаются простыми и в  $\mathfrak{D}$  и норма числа  $q$  такого вида будет равна  $q^2$ .

Чтобы найти все простые числа из  $\mathfrak{D}$ , Гаусс доказывает теорему:

Каждое целое число  $a + bi$ ,  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , является простым или составным в  $\mathfrak{D}$  в зависимости от того, будет ли его норма простым или составным рациональным числом.

Из этого вытекает, что простыми в  $\mathfrak{D}$  будут:

- 1) число  $1 + i$  (делитель числа 2);
- 2) все целые рациональные числа вида  $4n + 3$ ;
- 3) все комплексные числа  $a + bi$ , норма которых равна простому числу вида  $4n + 1$ .

Интересно отметить, что Гаусс применяет здесь по существу *локальные методы*, а именно выводит простоту комплексного числа на основании рассмотрения его нормы.

Закон однозначности разложения на простые множители он доказывает также локальными методами, опираясь на законы делимости норм, т. е. обычных рациональных целых чисел <sup>40</sup>.

<sup>40</sup> Любопытно отметить, что Дедекиннд, излагая теорию делимости для целых гауссовых чисел в приложениях к «Теории чисел» Дирихле (изд. 1879 и 1894), опирается на алгоритм Евклида, т. е. заменяет локальные методы глобальными (подробнее о локальном методе см. в разделе о теории Куммера и Золотарёва).

Вот это доказательство. Пусть  $M = P_1^{l_1} \dots P_s^{l_s}$  — разложение числа  $M \in \mathfrak{D}$  в произведение простых. Гаусс показывает, что  $M$  не может делиться ни на какое простое  $Q$ , отличное от  $P_1, \dots, P_s$ . Действительно, пусть  $M$  делится на  $Q$ , тогда

$$N(M) = p_1^{l_1} \dots p_s^{l_s},$$

где  $p_i = N(P_i)$ , будет делиться на  $q = N(Q)$ . Поскольку  $p_1, \dots, p_s$  — либо простые вида  $4n + 1$ , либо квадраты простых вида  $4n + 3$ , либо одно из них равно 2, то ясно, что  $q$  должно равняться одному из  $p_i$ , пусть  $q = p_1$ . Но по предположению  $Q \neq P_1$ , значит, эти числа могут быть только комплексно-сопряженными. Пусть  $P_1 = a + bi$ ,  $Q = a - bi$ , при этом само  $p$  будет нечетным простым. Тогда

$$P_1 \equiv 2a \pmod{Q}$$

и

$$M \equiv 2^{l_1} a^{l_1} P_2^{l_2} \dots P_s^{l_s} \pmod{Q}.$$

Следовательно, норма правой части, т. е. число

$$2^{2l_1} a^{2l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s},$$

будет делиться на  $q$ . Но так как 2 и  $a$  на  $q$  не делятся, оно должно совпасть с одним из чисел  $p_2, \dots, p_s$ . Пусть  $q = p_2$ . Тогда  $P_2 = a + bi$  или  $P_2 = a - bi$ , в первом случае  $P_2$  совпало бы с  $P_1$ , а во втором — с  $Q$ , но и то и другое противоречит предположению.

Из этой теоремы, как замечает Гаусс, закон однозначности получается тем же способом, что и для обычных целых.

После этого Гаусс дает геометрическую интерпретацию комплексных чисел как точек плоскости и алгебраических операций с этими числами. Целые комплексные числа образуют при этом «решетку», которая разбивает комплексную плоскость на бесконечное число квадратов. Он рассматривает, далее, вычеты по комплексному модулю, вводит понятие наименьшего вычета и системы наименьших вычетов по данному модулю. Наконец, для нахождения общего наибольшего делителя двух целых комплексных чисел вводит алгоритм Евклида. Он показывает, что алгоритм будет всегда конечным, если выбирать остатки так, чтобы они явились наименьшими вычетами по соответствующему делителю

$$\begin{aligned} a &= \beta\gamma + \delta, \\ \beta &= \delta\gamma_1 + \delta_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_n &= \delta_{n+1}\gamma_n \end{aligned}$$

(здесь  $\delta_{i+1}^n$  — наименьшие вычеты по  $\text{mod } \delta_i$ ).

Такой выбор последовательных остатков обеспечивает конечность алгоритма. Мы поясним эту часть рассуждений Гаусса: пусть надо разделить число  $\alpha = a + bi$  на  $\beta = c + di$  и пусть

$$\alpha = \beta\gamma + \delta,$$

т. е.

$$N\delta = N(\alpha - \beta\gamma) = N(\alpha/\beta - \gamma) \cdot N\beta.$$

Надо показать, что  $\gamma$  можно подыскать так, чтобы  $N(\alpha/\beta - \gamma)$  была  $< 1$ . Действительно, пусть  $\alpha/\beta = \xi + i\eta$ ,  $\gamma = x + iy$ .

Тогда

$$N(\alpha/\beta - \gamma) = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

Поскольку целые числа  $x, y$  можно всегда выбрать так, чтобы  $|x - \xi| \leq 1/2, |\eta - y| \leq 1/2$ , то  $N(\alpha/\beta - \gamma) \leq 1/2$ .

После этого Гаусс для числа  $m + ni, m, n \in \mathbb{Z}$ , развивает арифметику, аналогичную обычной (доказывает малую теорему Ферма, вводит индексы и первообразные корни и т. д.). Развитую теорию он применяет для общей формулировки и частичного доказательства биквадратичного закона взаимности.

Таким образом, Гаусс действительно показал всему математическому миру, что целые комплексные числа являются не менее законными объектами высшей арифметики, чем целые рациональные.

Впечатление от работы Гаусса было громадно. Недаром вплоть до последней трети прошлого века целые алгебраические числа назывались целыми комплексными — и это даже тогда, когда они имели вид  $m + n\sqrt{D}$ ,  $D > 0$ , т. е. были действительными.

Заметим, что именно эта работа сыграла решающую роль для признания выражений  $a + bi$  числами. Действительно, только после этого стало ясно: 1) что новые числа могут служить объектами арифметики, т. е. являются числами по существу, и 2) что с помощью этой расширенной арифметики можно получить такие результаты относительно целых рациональных чисел, которые без этого получить не удавалось.

Гаусс хорошо понимал, какое необъятное море открывает его работа перед математиками. Он писал: «Эта теория (т. е. биквадратичный закон взаимности) с необходимостью требует в некотором смысле бесконечно расширить область высшей арифметики»<sup>41</sup>. И далее: «Естественный источник общей теории следует искать в расширении области арифметики»<sup>42</sup>.

Гаусс заметил, что теория кубических вычетов (т. е. кубический закон взаимности) должна основываться на рассмотрении чисел вида  $a + b\rho$ , где  $\rho^3 - 1 = 0, \rho \neq 1$ ; «и точно так же, — добавляет он, — теория вычетов более высоких степеней требует введения других мнимых величин»<sup>43</sup>.

В конце своего мемуара Гаусс сформулировал с помощью целых комплексных чисел общий биквадратичный закон взаимности, однако доказательство этой фундаментальной теоремы, которое, по его словам, «принадлежит к наиболее глубоко скрытым тайнам высшей арифметики»<sup>44</sup>, не привел, отложив его до третьей части своего мемуара, которая так никогда и не была написана. Впоследствии в бумагах Гаусса была обнаружена схема доказательства этой теоремы, близкого к его шестому доказательству квадратичного закона взаимности (т. е. основанного на теории деления круга).

Труды Гаусса побудили К. Г. Якоби и Г. Эйзенштейна (1823—1852) продолжить начатые им исследования. Уже в своих лекциях по теории чисел 1836—1837 гг. Якоби дал доказательство биквадратичного закона взаимности из соображений теории деления круга. Эйзенштейн первый опубликовал доказательство этого закона (в 1844 г.), причем применил теорию комплексного умножения специальных эллиптических функций.

<sup>41</sup> Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 654.

<sup>42</sup> Там же, с. 694.

<sup>43</sup> Там же, с. 695.

<sup>44</sup> Там же, с. 741.

Он доказал также кубический закон взаимности, построив при этом арифметику в кольце  $\mathbf{Z}[\rho]$ , а затем и закон взаимности для вычетов восьмой степени. Эти исследования Эйзенштейна изложены в «Доказательстве законов взаимности для кубических вычетов в теории чисел, составленных из кубических корней из единицы» (Beweis der Reciprocitätsgesetze für die cubische Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen. — J. für Math., 1844). В 27-м и следующем томах журнала Крелле помещены 25 заметок Эйзенштейна, тогда еще студента Берлинского университета. Дарование этого математика высоко ценил Гаусс, а лекции, которые Эйзенштейн читал в последние годы своей недолгой жизни в Берлинском университете, привлекали многих слушателей. Эйзенштейну принадлежит помимо сказанного ряд открытий в теории бинарных кубических форм и других вопросах теории чисел, а также в теории эллиптических функций. Некоторые результаты в теории чисел, опубликованные им без вывода, были доказаны оксфордским профессором Г. Смитом, одним из немногих английских математиков, занимавшихся в XIX в. этой наукой (см. далее, с. 142—143).

Обобщая идею Гаусса, в 40-х годах Эйзенштейн, Лежен-Дирихле и Ш. Эрмит независимо друг от друга определяют понятие целого алгебраического числа как корня уравнения вида

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (19)$$

где  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$ . При этом только Эйзенштейн находит нужным показать, что сумма и произведение так определенных целых чисел также будут целыми.

Следующим шагом на пути построения арифметики алгебраических чисел явилась теория единиц. Эйзенштейн изучил группу единиц кубического поля, Л. Кронекер — поля деления круга, Ш. Эрмит очень близко подошел к общему случаю, но создал эту теорию в окончательном виде П. Лежен-Дирихле. В своем мемуаре «К теории комплексных единиц» (Zur Theorie der complexen Einheiten. — Bericht über Verhandl. Königl. Preuss. Akad. Wiss., 1846) он рассматривает выражения вида

$$\varphi(\theta) = b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \quad b_i \in \mathbf{Z}, \quad (20)$$

где  $\theta$  — корень уравнения вида (19), которые он называет целыми числами. Единицами он называет те из этих чисел, которые удовлетворяют условию:

$$\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)\dots\varphi(\theta_n) = 1,$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_n$  — корни (19). Тогда если  $h$  — общее число действительных и пар комплексно-сопряженных корней уравнения (19), то в кольце чисел (20) существует  $h - 1$  основных единиц, обладающих тем свойством, что все единицы этого кольца, и притом каждая только один раз, получаются возведением основных единиц в степени, умножением их друг на друга и на одну из основных единиц. Общий вид единицы рассматриваемого кольца, таким образом, будет

$$\varepsilon_i e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_{h-1}^{m_{h-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Здесь  $\varepsilon_i$  — особые единицы, т. е. корни из обычной единицы, содержащиеся в кольце, а  $e_1, \dots, e_{h-1}$  — основные единицы.

## ‡ Великая теорема П. Ферма и открытие Э. Куммера

Между тем в начале прошлого века продолжались попытки доказать великую теорему Ферма. Так, доказательства ее для частных случаев были предложены Лежандром, Софи Жермен, Гауссом, Лежен-Дирихле и Ламе. При этом поскольку

$$x^\lambda = z^\lambda - y^\lambda = (z - y)(z - \zeta y) \dots (z - \zeta^{\lambda-1}y),$$

где  $\lambda$  — простое,  $\zeta^\lambda = 1$  и  $\zeta \neq 1$ , то доказательство проводилось путем оперирования с числами вида

$$b_0 + b_1\zeta + \dots + b_{\lambda-1}\zeta^{\lambda-1}, \quad (21)$$

где

$$b_0, b_1, \dots, b_{\lambda-1} \in \mathbb{Z}.$$

Наконец, в 1847 г. Ламе опубликовал «Общее доказательство теоремы Ферма о невозможности решения в целых числах уравнения  $x^n + y^n = z^n$ » (*Démonstration générale de théorème de Fermat sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation  $x^n + y^n = z^n$* . — С. г. Acad. sci. Paris, 1847), опираясь на то, что числа вида (21) ведут себя в отношении законов делимости точно так же, как и целые рациональные числа.

Ламе доложил свой мемуар 1 марта 1847 г. на заседании Парижской академии наук. При этом Лиувилль сделал следующее замечание: «Идея ввести К. Ч. (т. е. комплексные числа) в теорию уравнений  $x^n - y^n = z^n$  не нова; она должна была естественным образом представиться геометрам благодаря бинарной форме  $x^n - y^n$ ».

Я не вывел, однако, отсюда никакого удовлетворительного доказательства. Но во всяком случае сделанные попытки показали мне, что сначала нужно было установить для К. Ч. теорему, аналогичную элементарному предложению для целых чисел, о том, что произведение может быть только одним способом разложено на простые множители. Анализ Ламе только утверждает меня в этом мнении. Нет ли тут лакуны, которую нужно заполнить?»<sup>45</sup> Это замечание Лиувилля привело к тому, что арифметика полей алгебраических чисел на короткое, правда, время становится в центре внимания французских математиков. Ее изучают и Ламе, и Ванцель, и Коши. 22 марта 1847 г. Коши представил на заседание Академии мемуар, в котором пытался ввести для чисел вида (21) алгоритм Евклида. Мемуар печатался в *Comptes rendus* за 1847 г. частями, и в последней части Коши пришел к заключению, что алгоритм Евклида для таких чисел ввести нельзя.

Несколькими годами раньше почти такие же события произошли в Германии с той только разницей, что работа Куммера, в которой также «доказывалась» великая теорема, не была опубликована, а замечания о необходимости исследования закона однозначности были сделаны не Лиувиллем, а Дирихле.

Эрнст Эдуард Куммер родился в Зорау в Германии (ныне — г. Зары в ПНР) в 1810 г. Он рано лишился отца, по профессии врача, после смерти которого семья осталась без средств к существованию. Только благодаря исключительной энергии матери, которая смело бралась за любую работу, вплоть до шитья солдатского белья, Куммер смог получить образование.

В 1828 г. он поступил в университет города Галле, где сперва изучал теологию, но вскоре заинтересовался математикой, которую, впрочем, спер-

<sup>45</sup> Цит. по кн.: *Nogués R. Théorème de Fermat*. Paris, 1966, p. 28.

ва рассматривал как своего рода «подготовительную науку» для последующих занятий философией. Известный интерес к философским проблемам он сохранил на всю свою жизнь. После окончания в 1831 г. университета Куммер до 1842 г. преподавал физику и математику в гимназии в Лигнице (теперь Легница). У него в это время учился Л. Кронекер, который впоследствии стал его другом. Одновременно с педагогической деятельностью Куммер работал над проблемами анализа.

В 1842 г. по рекомендации Дирихле и Якоби Куммер получил место профессора в Бреслау (ныне Вроцлав), которое занимал до 1855 г., после чего перешел в Берлинский университет, где заменил Дирихле, который тогда занял в Гёттингене кафедру Гаусса. С 1861 г. Куммер и Вейерштрасс организуют первый в Германии университетский семинар по чистой математике.

Среди учеников Куммера были Л. Кронекер, П. Дюбуа-Реймон, П. Гордан, Г. А. Шварц и Г. Кантор.

На творчестве Куммера большое влияние оказали Гаусс и Дирихле, что он неоднократно сам отмечал в своих работах. Первое направление его исследований относится к теории гипергеометрического ряда, второе — к теории чисел. Здесь наиболее важным достижением Куммера является введение идеальных чисел при доказательстве великой теоремы Ферма. И, наконец, третье направление относится к геометрии, а именно к теории общих прямолинейных конгруэнций.

Куммер занимался великой теоремой Ферма начиная с 1837 г. Он обнаружил, что в кольце целых чисел (21) имеет место следующий удивительный факт: произведение двух неразложимых чисел  $\alpha\beta$  вида (21) может делиться на третье неразложимое число  $\gamma$  того же вида, причем ни  $\alpha$ , ни  $\beta$  в отдельности на  $\gamma$  не делятся.

Поясним более подробно, в чем состояло открытие Куммера.

Простые числа кольца  $Z$  можно, как известно, охарактеризовать следующими свойствами:

1) они не представимы в виде произведения двух множителей, отличных от единицы;

2) если произведение  $ab$  делится на простое число  $p$ , то по крайней мере один из сомножителей должен делиться на  $p$ .

Обычно первое из этих свойств принимали за определение, второе выводили. Но можно было бы поступить и наоборот. Куммер открыл, что числа вида (21), охарактеризованные свойством 1), могут не обладать свойством 2). Это обстоятельство ставило под сомнение возможность построения арифметики для чисел вида (21). Куммеру удалось спасти положение вещей путем введения новых объектов, которые он назвал идеальными множителями. Вот что он писал по поводу доказательства Ламе Лиувиллю: «Что касается элементарной теоремы для этих комплексных чисел о том, что составное комплексное число может быть разложено на простые множители только единственным способом, об отсутствии которой в этом доказательстве, ошибочном к тому же и в некоторых других пунктах, Вы справедливо сожалеете, то я могу Вас заверить, что она в общем случае не имеет места, поскольку дело идет о комплексных числах вида  $\alpha_0 + \alpha_1 r + \dots + \alpha_{n-1} r^{n-1}$ , но что можно ее спасти путем введения нового рода комплексных чисел, которые я назвал идеальными комплексными числами»<sup>46</sup>. Куммер сообщает также, что результаты его новой теории были доложены в 1846 г. на заседании Берлинской академии наук и опубликованы в записках этой Академии. Эта статья, помеченная 1844 г. и называвшаяся

<sup>46</sup> J. math. pures et appl., 1847, 12, 136.



Э. Э. КУММЕР

«О комплексных числах, состоящих из корней из единиц и действительных целых чисел» (*De numeris complexis qui radicibus unitas et numeris integris realibus constant.*— *Gratulationschrift der Univ. Breslau*), была напечатана в журнале Лиувилля в том же году, что и письмо Куммера. В том же 1847 г. в журнале Крелле были напечатаны две другие статьи Куммера, в которых его теория была изложена более полно: «К теории комплексных чисел» (*Zur Theorie der complexen Zahlen.*— *J. für Math.*, 1847) и «О разложении комплексных чисел, образованных посредством корней из единицы, на их простые множители» (*Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren.*— *J. für Math.*, 1847).

Далее мы вкратце излагаем основные идеи и методы Куммера.

### Теория Э. Куммера

Метод Куммера был локальным. Теория его основывалась на двух идеях, каждой из которых было бы достаточно для построения арифметики круговых полей.

Первая из них состояла в том, что разложение на множители простого рационального числа  $p$  в  $\mathbb{Z}[\zeta]$  определяется на основании разложения многочлена  $\frac{x^\lambda - 1}{x - 1} = x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + \dots + x + 1$  по  $\text{mod } p$ . В зародыше эта идея была еще у Лагранжа. Свое дальнейшее развитие она получила в трудах Е. И. Золотарёва и К. Гензеля.

Вторая идея относилась к определению в  $\mathbf{Z}[\zeta]$  локально униформизирующих, а с их помощью «валюаций». Эта идея была по-настоящему понята и развита Золотарёвым.

Наконец, при построении своей теории Куммер ввел по существу поле разложения, которое впоследствии сыграло важную роль в работах Гильберта.

Такое богатство идей и методов, избыточное, если иметь в виду осуществление непосредственной цели, вообще характерно для работ, открывающих новую теорию.

Остановимся кратко на основных этапах построения Куммера.

Пусть дано уравнение

$$\Phi(x) = x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + \dots + x + 1 = 0, \quad (22)$$

где  $\lambda$  — простое число, и пусть  $\zeta$  — его корень. Куммер исследует кольцо целых чисел  $\mathbf{Z}[\zeta]$ , элементы которого имеют вид

$$\varphi(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_{\lambda-2}\zeta^{\lambda-2}, \quad b_i \in \mathbf{Z}. \quad (23)$$

Он замечает, что для нахождения всех простых множителей кольца  $\mathbf{Z}[\zeta]$  достаточно рассмотреть разложение в этом кольце простых чисел из  $\mathbf{Z}$ . С этой целью он исследует поведение  $\Phi(x)$  в поле вычетов по  $\text{mod } p$ . Если  $\Phi(x)$  неприводимо по  $\text{mod } q$ , то Куммер считает  $q$  простым в  $\mathbf{Z}[\zeta]$ . Если  $p = m\lambda + 1$ , то он показывает, что  $\Phi(x)$  распадается по  $\text{mod } p$  на линейные множители

$$\Phi(x) \equiv \prod_{k=1}^{\lambda-1} (x - u_k) \pmod{p} \quad (24)$$

В этом случае Куммер считает, что  $p$  также распадается на произведение  $\lambda - 1$  различных простых множителей, действительных или идеальных,

$$p = \wp_1 \wp_2 \dots \wp_{\lambda-1}.$$

Таким образом, устанавливается полный параллелизм между разложением  $\Phi(x)$  по  $\text{mod } p$  и разложением самого  $p$  в кольце  $\mathbf{Z}[\zeta]$ . Этот параллелизм и служил, как отмечает сам Куммер, путеводной нитью при введении идеальных множителей. Множитель  $\wp_i$  считается при этом ассоциированным с  $x - u_i$ . Число  $\Phi(\zeta)$  делится на идеальный простой множитель числа  $p$ , принадлежащий  $x - u_i$ , если  $\Phi(u_i) \equiv 0 \pmod{p}$ .

Пусть теперь  $p$  принадлежит показателю  $f$  по  $\text{mod } \lambda$  (т. е.  $p^f \equiv 1 \pmod{\lambda}$  и  $p^k \not\equiv 1 \pmod{\lambda}$ , если  $k < f$ ). Для разложения его на множители Куммер строит при помощи гауссовых периодов подполе  $\kappa$  поля  $\mathbf{Q}(\zeta)$ , которое впоследствии получило название поля разложения числа  $p$ . Если  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{e-1}$  —  $f$ -членные гауссовы периоды, где  $ef = \lambda - 1$ , то определяющим уравнением этого поля будет

$$\Phi_e(y) = (y - \eta_0)(y - \eta_1) \dots (y - \eta_{e-1}). \quad (25)$$

Тогда, как показывает Куммер,

$$\Phi_e(y) \equiv \prod_{k=0}^{e-1} (y - v_k) \pmod{p}. \quad (26)$$

Причем с каждым из  $y - v_k$  Куммер ассоциирует идеальный множитель  $\wp_k$  числа  $p$ , так что в поле  $\kappa$ :

$$p = \wp_0 \wp_1 \dots \wp_{e-1}.$$

Таким образом, Куммер получил все простые идеальные множители кольца  $\mathbf{Z}[\zeta]$ .

Далее Куммер приступает к нахождению локальных униформизирующих для простых множителей числа  $p$ , т. е. таких чисел из  $\mathbf{Z}[\zeta]$ , которые содержат один и только один идеальный множитель числа  $p$ . Если  $\pi(\eta)$  — такой локально униформизирующий элемент, то Куммер показывает, что  $N_{\kappa}\pi(\eta)$  делится на  $p$  и не делится на  $p^2$ . Это важное свойство и служит ему для построения локально униформизирующих.

Пусть теперь  $\varphi(\zeta) \in \mathbf{Z}[\zeta]$ . Чтобы узнать, в какой степени входит множитель  $p_i$  числа  $p$ , принадлежащего показателю  $f$ , в  $\varphi(\zeta)$ , Куммер берет локально униформизирующий элемент  $\pi(\eta)$  в поле  $\kappa$  (где  $\eta$  есть  $f$ -членный гауссов период) и находит его норму

$$N_{\kappa}(\pi(\eta)) = \pi(\eta_0)\pi(\eta_1)\dots\pi(\eta_{e-1}) = \pi(\eta)\psi(\eta).$$

Тогда  $\varphi(\zeta)$  содержит  $p_i$   $m$  раз, если

$$\varphi(\zeta)\psi^m(\eta_i) \equiv 0 \pmod{p^m}, \quad \varphi(\zeta)\psi^{m+1}(\eta_i) \not\equiv 0 \pmod{p^{m+1}}. \quad (27)$$

Обозначим показатель, с которым  $p_i$  входит в  $\varphi(\zeta)$ , через  $v_{p_i}(\varphi)$ . Это будет функция, принимающая на  $\mathbf{Z}[\zeta]$  целые положительные значения. Куммер показывает, что ее основным свойством будет

$$v_p(\varphi\chi) = v_p(\varphi) + v_p(\chi).$$

После этого он уже без труда развивает основные положения теории делимости.

Переходя к структуре множества всех идеальных множителей в  $\mathbf{Z}[\zeta]$ , Куммер вводит отношение эквивалентности двух множителей и разбивает все множители на классы эквивалентных. В этом он следует по пути, проложенному Лагранжем и Гауссом в теории квадратичных форм. Куммер доказывает конечность числа классов идеальных множителей, применяя тот же метод, каким еще Лагранж доказывал конечность числа классов квадратичных форм данного дискриминанта. А именно, каждому классу идеальных чисел ставится в соответствие элемент этого класса, норма которого не превосходит некоторого числа (в случае квадратичных форм этим элементом будет приведенная форма). Как и его предшественники, Куммер проводит подсчет числа классов идеальных множителей кольца  $\mathbf{Z}(\zeta)$ .

Хотя понятие идеального множителя постоянно встречается в теории Куммера, ему не дается никакого формального определения. На сравнения (27) Куммер смотрел только как на средство для определения того, с каким показателем некоторый идеальный множитель (которому он приписывал независимое существование) входит в заданное число. В настоящее время ситуация изменилась. Теперь на эти же сравнения (27) смотрят как на определение идеального множителя, поскольку они дают возможность узнать показатели, с которыми этот множитель входит в любое целое число поля. А это только и нужно знать для построения теории делимости. Таким образом, можно сказать, что идеальный множитель определяется для нас набором своих показателей. Аналогичное положение в истории математики встречается часто: так, до XIX в. интеграл и производную не считали определением площади фигуры и соответственно тангенса угла наклона касательной к кривой как математических понятий, но лишь способ вычисления этих величин, которым приписывали, опираясь на интуицию, какое-то независимое существование. Только прошлый век принес новую точку зрения, согласно которой способ вычисления этих

величин и является способом их определения. Подобная точка зрения на идеальные множители сложилась только в наше время.

Отметим еще, что Куммер называл идеальные множители числами, найдя подтверждение своей точки зрения в доказанной им теореме о том, что, возведя такой множитель в некоторую конечную степень, мы получим существующее комплексное число. Только после работ Дедекинда и Вебера выяснилось глубокое отличие чисел поля от идеальных множителей — дивизоров. Благодаря отсутствию общих понятий теория Куммера была так тесно переплетена с исследованиями Гаусса об уравнениях деления круга, что потребовалась затрата значительных усилий для отделения общих идей от специфического аппарата круговых полей.

Но и помимо этого, построение арифметики общих полей алгебраических чисел натолкнулось на большие трудности.

Что касается дальнейших исследований Куммера по арифметике круговых полей, то здесь отметим следующее.

1. В работах, напечатанных в журнале Крелле за 1847 и 1850 гг., Куммер доказал великую теорему Ферма для всех показателей  $\lambda$ , которые являются нечетными простыми числами и не входят в числители  $(\lambda - 3)/2$  первых чисел Бернулли.

2. Куммеру принадлежит формулировка и доказательство закона взаимности для степенных вычетов с простым показателем (он сделал это в ряде работ начиная с 1858 г., последняя из них относится к 1887 г.).

Долгое время результат Куммера считался непревзойденным. Продвинуться дальше в установлении законов взаимности удалось только Д. Гильберту (1862—1943), который показал с помощью построенной им теории полей классов, что первая часть равенства в выражении для законов взаимности может быть представлена как произведение конечного числа символов (так называемых норменных символов), свойства которых он описал. Однако ему не удалось дать прямой конструкции этих символов. Это было сделано только советским математиком И. Р. Шафаревичем, который нашел и доказал общий закон взаимности<sup>47</sup>.

Поля деления круга, которые изучал Э. Куммер, кажутся, на первый взгляд, довольно частным случаем полей алгебраических чисел. Однако, как установил Л. Кронекер, это не совсем так. А именно, он открыл следующий факт: каждое абелево числовое поле над областью рациональных чисел есть подполе некоторого кругового поля (см. «Об алгебраически разрешимых уравнениях» (Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. — Ver. Königl. Akad. Wiss. zu Berlin, 1853)). Этот факт был строго доказан в 1886 г. Г. Вебером. Обобщение этой теоремы легло в основание теории полей классов Д. Гильберта.

### Трудности. Понятие целого числа

Со времен Лежена-Дирихле целым алгебраическим числом называли корень алгебраического уравнения вида

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (28)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — обычные целые числа.

Пусть  $\theta$  — корень такого уравнения и  $\mathbb{Q}(\theta)$  — поле чисел, полученных присоединением  $\theta$  к полю рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Как описать все целые числа из  $\mathbb{Q}(\theta)$ ?

<sup>47</sup> Шафаревич И. Р. Общий закон взаимности. — УМН, 1948, 3, № 3 (25), 165; Матем. сб., 1950, 26 (68), 113—146.

Во всех случаях, рассмотренных Дирихле, Эйзенштейном, Коши и Куммером, целые числа из  $\mathbb{Q}(\theta)$  были вида  $b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$ ,  $b_i \in \mathbb{Z}$ , т. е. составляли кольцо  $\mathbb{Z}[\theta]$ . Будет ли это так и в общем случае? Иначе говоря, будет ли кольцо  $\mathbb{Z}[\theta]$  содержать все целые числа из  $\mathbb{Q}(\theta)$ , если целые понимать в смысле, определенном в начале этого подраздела.

Трудно сказать, кто первый из математиков XIX в. понял, что это не так. Во всяком случае первое исчерпывающее исследование этого вопроса было изложено Дедекиндом в знаменитом X Дополнении ко второму изданию «Лекций по теории чисел» Лежена-Дирихле (1871) <sup>48</sup>.

Отметим, что описание целых чисел поля  $\mathbb{Q}(\theta)$ , отличное от описания Дедекинда, было дано Е. И. Золотарёвым (1877). И тут уже ярко выразились глубокие отличия в подходе к вопросам арифметики, которые имели место между обоими учеными.

Дедекиннд подошел к вопросу глобально. Показав, что степенной базис

$$1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$$

не всегда является минимальным, он доказал, что в кольце целых  $\mathfrak{D}$  из  $\mathbb{Q}(\theta)$  можно всегда найти такой базис (получивший название минимального)

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n,$$

который состоит из целых чисел и через который все числа из  $\mathfrak{D}$  выражаются линейной формой с целыми рациональными коэффициентами.

Е. И. Золотарёв решает вопрос локально. Он строит минимальный базис не в  $\mathfrak{D}$ , а в полулокальном кольце  $p$ -целых чисел  $\mathfrak{D}_p$ . Кольцо  $\mathfrak{D}$  он получает путем последующей глобализации как пересечение всех  $\mathfrak{D}_p$ .

Другая трудность, которая возникла при переходе от полей деления круга к общим полям, хорошо описана как в работе Е. И. Золотарёва «О теории комплексных чисел» (*Sur la théorie des nombres complexes. — J. für Math.*, 1880), так и в мемуаре Дедекиннда «О связи между теорией идеалов и теорией сравнений высших степеней» (*Über den Zusammenhang zwischen den Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. — Abh. Ges. d. Wiss., Göttingen*, 1878). С этой же трудностью столкнулся, по-видимому, и Л. Кронекер. Мы изложим ее, следуя Золотарёву: пусть

$$F(x) = 0 \tag{29}$$

— неприводимое уравнение вида (28) и  $\theta$  — его корень. Для нахождения простых идеальных множителей числа  $p$  нужно по методу Куммера рассмотреть  $F(x)$  в поле вычетов по  $\text{mod } p$ . Если  $F(x)$  остается неприводимым в поле вычетов по  $\text{mod } p$ , то  $p$  будет простым в поле  $\mathbb{Q}(\theta)$ . Если же

$$F(x) = V_1^{l_1}(x) \dots V_s^{l_s}(x) - pF_1(x),$$

то возможны два случая:

<sup>48</sup> Заметим, что этот же вопрос для действительных квадратичных полей  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  был полностью решен еще Ньютоном в его «Всеобщей арифметике», опубликованной в 1707 г. Ньютон показал, что если  $D$  не делится на квадрат простого числа и  $D \equiv 2$  или  $D \equiv 3 \pmod{4}$ , то целые числа будут иметь вид  $m + n\sqrt{D}$ , где  $m, n$  — целые. Если же

$$D \equiv 1 \pmod{4},$$

то целыми будут числа

$$(m + n\sqrt{D})/2, \quad m \equiv n \pmod{2}.$$

Однако эти исследования Ньютона оставались в прошлом веке незамеченными.

1)  $F_1(x)$  не делится по mod  $p$  ни на одно из  $V_i$ , показатель которого  $l_i > 1$ , тогда число  $p$  Е. И. Золотарёв называет неособым и полагает

$$p = p_1^{l_1} \dots p_s^{l_s},$$

где  $p_i$  ассоциирован с  $V_i(\theta)$ ;

2)  $F_1(x)$  делится по mod  $p$  на одно из  $V_i(x)$ , показатель которого  $l_i > 1$ . Такие числа Е. И. Золотарёв называет особыми. Он показывает, что особые числа необходимо являются делителями дискриминанта  $\Delta$  уравнения  $F(x) = 0$ .

Этот последний случай и вызвал трудности, которые, казалось, делали невозможным построение с помощью методов Куммера теории делимости для любого кольца алгебраических чисел.

Дедекинд и Кронекер, столкнувшись с особым случаем, отказались от локальных методов и пошли по совершенно иным путям, о которых мы будем подробно говорить далее. Теперь же остановимся на теории делимости Е. И. Золотарёва, которая и до сих пор остается в тени <sup>49</sup>.

Между тем именно в работах Золотарёва были развиты те идеи и методы, которые составляют сейчас неотъемлемую часть коммутативной алгебры. Он шел по тому пути, который несколько позднее был выбран Гензелем, и если Гензель ввел  $p$ -адические числа и локальные кольца, то Е. И. Золотарёв оперировал с  $p$ -целыми числами и исследовал первый важный пример полулокального кольца.

### Теория Е. И. Золотарёва. Целые и $p$ -целые числа

Егор Иванович Золотарёв, один из наиболее талантливых представителей математической школы П. Л. Чебышева, родился в 1847 г. в Петербурге в семье владельца часового магазина. Математические способности мальчика проявились еще в гимназии. Семнадцати лет он поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, где слушал лекции П. Л. Чебышева и А. Н. Коркина, с которым впоследствии выполнил ряд совместных исследований. В 1867 г. он окончил университет со степенью кандидата, а в следующем году защитил диссертацию на право чтения лекций по теории наилучшего приближения функций полиномами и, прочитав с успехом две пробные лекции, начал преподавать в Петербургском университете в качестве приват-доцента. Еще год спустя он защитил магистерскую диссертацию «О решении одного неопределенного уравнения третьей степени  $x^3 + Ay^3 + A^2z^3 - 3Axyz = 1$ » (СПб., 1869), а в 1874 г. — докторскую диссертацию «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению» (СПб., 1874). Эта замечательная работа поставила его в один ряд с самыми выдающимися исследователями теории чисел его времени. В 1876 г. Е. И. Золотарёв получил в Петербургском университете профессию. Он читал лекции по теории эллиптических функций, математическому анализу, механике, алгебре, впервые прочел курс введения в анализ. В 1876 г. он был избран членом Петербургской академии наук.

Летом 1872 г. и летом 1876 г. Е. И. Золотарёв был командирован университетом на четыре месяца за границу. Он побывал в Берлине, Гейдельберге и Париже, слушал лекции Вейерштрасса, Куммера и Кирхгофа, беседовал с Эрмитом, который высоко ценил совместные исследования Зо-

<sup>49</sup> См., например, «Исторический очерк» Н. Бурбаки к книгам, посвященным коммутативной алгебре.



Е. И. ЗОЛОТАРЁВ

лотарёва и Коркина по арифметической теории квадратичных форм. Впечатления о поездке за границу и о математиках Германии и Франции Е. И. Золотарёв излагал в письмах к Коркину, с которым его связывала тесная дружба. Переписка обоих математиков дошла до нас почти полностью (всего 64 письма); она представляет большой интерес, так как в письмах обсуждаются различные вопросы, относящиеся как к конкретным задачам, так и к оценке отдельных теорий и направлений в современной им математике.

Летом 1878 г. жизнь Е. И. Золотарёва трагически оборвалась: 2 июля, направляясь на дачу к родным, он попал под поезд и 19 июля скончался от заражения крови.

Е. И. Золотарёв, по отзывам современников, был в высшей степени добрым, простым и приветливым человеком. Он был любим своими коллегами, а также учениками, которые рисуют его в своих воспоминаниях как превосходного педагога. Научная деятельность Золотарёва продолжалась немногим более десяти лет, однако и за это время он обогатил науку многими важными открытиями. Основные работы его относятся к теории чисел, теории алгебраических функций и к теории наилучшего приближения функций полиномами.

Уже в магистерской диссертации 1869 г. наметились два важных направления в его творчестве. Решая в целых числах неопределенное уравнение третьей степени, которое мы привели выше и в котором  $A$  — целое число, не равное кубу, Е. И. Золотарёв, разыскивает минимумы квадратичной формы от трех переменных, коэффициенты которой зависят от

параметра, а на основании этого строит остроумный алгоритм для вычисления основной единицы чисто кубического поля  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{A})$ .

Дальнейшие работы Золотарёва по теории чисел как раз и были посвящены арифметической теории квадратичных форм и арифметике алгебраических чисел.

Впервые Е. И. Золотарёв обратился к арифметике алгебраических чисел в своей докторской диссертации 1874 г. Он пришел к этому вопросу, исходя из одной задачи теории алгебраических функций. Н. Абель показал, что если интеграл

$$\int \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad (30)$$

где  $R(x)$  и  $\rho(x)$  — полиномы, степени которых соответственно равны  $2n$  и  $n - 1$ , выражается в элементарных функциях, то  $\sqrt{R(x)}$  раскладывается в периодическую непрерывную дробь. Обратно, если  $\sqrt{R(x)}$  разлагается в непрерывную периодическую дробь, то всегда можно найти такой полином  $\rho(x)$ , чтобы интеграл (30) выражался в элементарных функциях. При всем своем значении, критерий Абеля не является эффективным, так как, сколько бы мы ни вычисляли неполных частных непрерывной дроби, в которую разлагается  $\sqrt{R(x)}$ , мы никогда не можем быть уверены, что периодичность не обнаружится далее.

Для частного случая, когда  $R(x)$  — полином 4-й степени с рациональными коэффициентами, П. Л. Чебышев предложил алгоритм, позволяющий в конечное число шагов решить вопрос о возможности выразить (30) в элементарных функциях. Он опубликовал свой алгоритм без доказательства. Е. И. Золотарёв в 1872 г. обосновал алгоритм Чебышева, а в докторской диссертации поставил задачу обобщить его на случай, когда коэффициенты  $R(x)$  — действительные числа. Для решения последней задачи ему понадобилось построить арифметику полей алгебраических чисел. Он дал такое построение для неособого случая в смысле, определенном в предыдущем подразделе. Этого случая оказалось достаточно для решения поставленной задачи относительно интеграла (30).

Впоследствии Е. И. Золотарёв вернулся к арифметике полей алгебраических чисел и дал ее построение для самого общего случая. (Соответствующая работа «О теории комплексных чисел» была передана им в редакцию журнала Лиувилля в 1876 г. и опубликована в 1880, т. е. через два года после его смерти.)

Второй цикл теоретико-числовых работ Золотарёва, выполненный им в сотрудничестве с Коркиным, относился к исследованию задачи о минимумах квадратичных форм, поставленной Ш. Эрмитом; эти работы будут рассматриваться в III главе.

Отметим еще, что Е. И. Золотарёв предложил весьма оригинальное доказательство квадратичного закона взаимности, основанное на теоретико-групповых соображениях (1872).

Вопросами наилучшего приближения функций полиномами Е. И. Золотарёв, по совету Чебышева, занялся еще в студенческие годы. Затем он вернулся к этим исследованиям в своей диссертации и двух статьях 1877 и 1878 гг. Об этих его работах речь пойдет в следующей книге, посвященной истории математики XIX в.

Беглый анализ творчества Золотарёва показывает, что это был математик, который не только прекрасно умел решать трудные конкретные задачи, что весьма характерно для школы Чебышева, но и явился творцом

ювых методов и теорий. Он был одним из создателей арифметики алгебраических чисел и локальных методов, оказавшихся столь плодотворными. К анализу этих методов мы сейчас и перейдем.

Вопросы теории делимости Е. И. Золотарёв помимо своей докторской диссертации рассматривает еще в двух работах: «О комплексных числах» (Sur les nombres complexes. — Bull. Acad. sci. St.-Petersbourg, 1878) и «О теории комплексных чисел» (Sur la théorie des nombres complexes. — J. math. pures et appl., 1880).

В первой из них доказывается основная лемма, на которую опирается теория делимости, применимая как в неособом, так и в особом случаях. Во второй работе дается вполне общее построение теории делимости.

Мы говорили уже, что Куммер находил идеальные делители простого числа  $p$ , рассматривая основное уравнение в поле вычетов по mod  $p$ , а затем и локальные униформизирующие для простых делителей  $p$  и с их помощью определял, какая степень идеального простого делителя  $\wp$  содержится в заданном целом  $\alpha$ .

Идея Золотарёва состояла в том, чтобы построить теорию делимости путем нахождения локальных униформизирующих каждого простого числа  $p$ , совсем не прибегая к рассмотрению функциональных сравнений.

Для этого он по существу построил полулокальное кольцо  $p$ -целых чисел из  $\mathbb{Q}(\theta)$ , показал, что в этом кольце существует конечное число простых элементов (определенных с точностью до  $p$ -единиц)

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s, \quad (31)$$

которые и являются локальными униформизирующими. Наконец, он доказал, что каждое число из  $\mathfrak{D}_p$  однозначно представляется (с точностью до  $p$ -единиц) в виде произведения множителей (31).

Е. И. Золотарёв начинает свою вторую работу с уточнения определения кольца целых чисел  $\mathfrak{D}$  поля  $\mathbb{Q}(\theta)$ . В своей докторской диссертации он исследовал только такие поля, для которых  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\theta]$ . Более того, он даже определяет там целые числа как многочлены вида

$$b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \quad b_i \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Е. И. Золотарёв показывает, что в общих полях такое определение недостаточно, что существуют числа

$$\alpha = \varphi(\theta)/M, \quad \varphi(\theta) \in \mathbb{Z}[\theta], \quad M \in \mathbb{Z},$$

которые могут быть корнями уравнений вида (28). Он замечает, что, во-первых, в  $M$  могут входить только особые простые числа, а во-вторых, степени, с которыми они входят, ограничены, так как если  $\alpha = \varphi(\theta)/M$  — целое, то дискриминант определяющего уравнения делится на  $M^2$ .

Пояснив это, Е. И. Золотарёв принимает следующее определение целого числа: «Каждое комплексное число

$$y = a + bx + \dots + lx^{n-1},$$

где  $a, b, \dots, l$  — рациональные числа, будем называть целым числом, если оно удовлетворяет уравнению вида (а)<sup>50</sup> (в нашей нумерации вида (28)).

После этого он переходит по существу к рассмотрению  $p$ -целых чисел. Правда, он не дает явного определения  $p$ -целого числа. Это было сделано 30 лет спустя К. Гензелем.

<sup>50</sup> Золотарёв Е. И. Собрание сочинений. Т. 2. Л., Изд-во АН СССР, 1934, с. 105—106.

Вот определение Гензеля: «Рациональное число  $\alpha = m/n$  называется «целым по mod  $p$ », если его знаменатель  $n$  не делится на  $p$ »<sup>51</sup>. Далее: «Алгебраическое число  $\beta$  называется «целым по mod  $p$ », если оно удовлетворяет по крайней мере одному уравнению

$$\beta^m + B_1\beta^{m-1} + \dots + B_m = 0$$

с коэффициентами, целыми рациональными по mod  $p$ »<sup>52</sup>. Нетрудно видеть, что если  $\alpha$  целое по mod  $p$  или, как мы будем в дальнейшем называть,  $p$ -целое из  $\mathbb{Q}(\theta)$ , то оно может быть всегда представлено в виде  $\beta/M$ , где  $\beta \in \mathcal{D}$ , а  $M$  не делится на  $p$ . Обратно, число  $\alpha = \beta/M$ , удовлетворяющее таким условиям, является  $p$ -целым в смысле определения Гензеля. Этим последним определением и пользуется Е. И. Золотарёв. Так, например, если ему нужно показать, что  $\beta/\alpha$  является  $p$ -целым, то он устанавливает, что  $\beta$  можно домножить на такое  $M$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ ,  $(M, p) = 1$ , что  $M\beta/\alpha$  будет целым. Такой способ рассуждения повторяется постоянно.

Нетрудно видеть, что  $p$ -целые числа из  $\mathbb{Q}$  образуют локальное кольцо  $\mathbb{Z}_p$ . Напомним, что кольцо  $A$  называется локальным, если оно имеет единственный максимальный идеал, отличный от самого  $A$ .

$\mathbb{Z}_p$  состоит из всех дробей вида  $m/n$ , знаменатели которых не делятся на фиксированное простое число  $p$ . Единственным максимальным идеалом этого кольца будет  $(p)$ .

Кольцо  $A$  называется полулокальным, если оно имеет конечное число максимальных идеалов  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_k$ . Первое такое кольцо, а именно кольцо  $\mathcal{D}_p$  чисел из  $\mathbb{Q}(\theta)$  «целых по mod  $p$ », и было исследовано Золотарёвым. Он показал, как мы увидим, что в таком кольце существует только конечное число идеальных простых множителей.

Хотя сам Е. И. Золотарёв не вводит понятий «кольца  $A$ », тем более «полулокального кольца  $A_p$ », а пользуется приведенным выше способом выражения, мы будем употреблять эти понятия, чтобы короче изложить ход его мыслей. Так, будем говорить о числах из кольца  $\mathcal{D}_p$  и о делимости в этом кольце.

Е. И. Золотарёв доказывает, что  $\alpha$  будет целым из  $\mathbb{Q}(\theta)$  тогда и только тогда, когда оно является  $p$ -целым для всех  $p$ , иначе говоря,

$$\mathcal{D} = \bigcap_p \mathcal{D}_p.$$

Для дальнейшего изучения арифметики  $p$ -целых чисел Е. И. Золотарёв строит в  $\mathcal{D}_p$  полную систему вычетов по mod  $p$ :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma, \tag{33}$$

где  $\sigma = p^n - 1$  и  $\alpha_i \in \mathcal{D}$ . При этом он выбирает в качестве представителя каждого из классов вычетов такое  $\alpha_i$ , норма которого делится на наименьшую возможную степень  $p$ .

Е. И. Золотарёв называет числа  $\beta$  из  $\mathcal{D}_p$  взаимно простыми с  $p$  (мы назвали бы их  $p$ -единицами), если ни одно из произведений  $\alpha_i \beta$ , где  $\alpha_i$  взято из последовательности (33), не делится в  $\mathcal{D}_p$  на  $p$ . Он доказывает, что  $\beta$  будет взаимно простым с  $p$  тогда и только тогда, когда  $N\beta$  не делится на  $p$ . Числа  $\beta$  и  $\gamma$  из  $\mathcal{D}_p$  он называет взаимно простыми, если в последовательности (16) не существует такого числа  $\alpha_i$ , что  $\alpha_i\beta$  и  $\alpha_i\gamma$  одновременно делятся на  $p$ .

Затем он доказывает теоремы:

<sup>51</sup> Hensel K. Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig—Berlin, Teubner, 1908, S. 76.

<sup>52</sup> Там же.

1. Если  $\alpha$  взаимно просто с  $\beta$  и  $\gamma$ , где  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{D}_p$ , то  $\alpha$  взаимно просто и с  $\beta\gamma$ .

2. Если  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно просты в  $\mathfrak{D}_p$ , тогда существуют такие  $\gamma, \delta$ , что  $\alpha\gamma + \beta\delta \equiv 1 \pmod{p}$ .

Более того, если  $m$  — любое натуральное число, то можно найти такие  $\gamma'$  и  $\delta'$  из  $\mathfrak{D}$ , что

$$\gamma'\alpha + \delta'\beta \equiv 1 \pmod{p^m}.$$

Если все числа последовательности (31) взаимно просты с  $p$  (т. е. являются единицами в  $\mathfrak{D}_p$ ), то Е. И. Золотарёв считает, что  $p$  является простым числом из  $\mathfrak{D}$ .

Для получения разложения других рациональных простых чисел Е. И. Золотарёв доказывает следующую основную лемму:

Пусть  $\alpha \in \mathfrak{D}_p$  удовлетворяет уравнению

$$\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \dots + b_{n-1}\alpha + b_n = 0, \quad (34)$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_n$  —  $p$ -целые. Тогда если  $b_n$  делится на  $p^\mu$ ,  $b_{n-1}$  на  $p^{\mu_1}$ ,  $b_{n-2}$  на  $p^{\mu_2}$  и т. д., то  $p^\lambda/\alpha$  будет  $p$ -целым, если

$$\lambda = \frac{r}{s} = \max\left(\mu - \mu_1, \frac{\mu - \mu_2}{2}, \frac{\mu - \mu_3}{3}, \dots\right).$$

В этом состоит первое утверждение леммы.

Если теперь выбрать  $\alpha$  так, чтобы его норма делилась на наименьшую возможную степень  $p$  по сравнению со всеми числами, принадлежащими тому же классу вычетов, что и  $\alpha$ , то

$$\lambda \leq 1,$$

т. е.  $\mu_k = \mu - k$ .

Заметим, что хотя

$$p^\lambda/\alpha = p^{r/s}/\alpha$$

не принадлежит к  $\mathfrak{D}_p$ , но

$$(p^{r/s}/\alpha)^s = p^r/\alpha^s \in \mathfrak{D}_p.$$

Из этой леммы Е. И. Золотарёв выводит два важных следствия:

1) число  $p$  делится в  $\mathfrak{D}_p$  на все  $\alpha_i$  из последовательности (33);

2) если  $\beta \in \mathfrak{D}_p$ , то существует такое  $\alpha_i$  из последовательности (33), что  $\beta$  делится на  $\alpha_i$ .

Эти два следствия дают Золотарёву возможность доказать основную теорему теории делимости.

Если произведение двух чисел  $\beta\gamma$  из  $\mathfrak{D}_p$  делится в  $\mathfrak{D}_p$  на  $\alpha$  и если  $\beta$  взаимно просто с  $\alpha$ , то  $\gamma$  делится на  $\alpha$ .

После этого Е. И. Золотарёв доказывает предложение, играющее в  $\mathfrak{D}$  такую же роль, как алгоритм Евклида в  $\mathbb{Z}$ .

Если  $\alpha$  и  $\beta$  не  $p$ -единицы, не взаимно просты и ни одно из них не делится по  $\text{mod } p$  на другое, то существует такое число  $\gamma$ , что и  $\alpha$ , и  $\beta$   $p$ -делятся на  $\gamma$ . При этом  $p$  входит множителем в  $N\gamma$  меньше раз, чем в  $N\alpha$  и  $N\beta$ .

Это предложение позволяет ему выбрать из (33) простые элементы, т. е. найти локальные униформизирующие для кольца  $\mathfrak{D}_p$ .

Число  $\alpha$  из (33) назовем простым, если каждое  $\alpha_i$ , которое не взаимно просто с  $\alpha$ , будет  $p$ -делиться на  $\alpha$ .

Из следствия 2) основной леммы видно, что для отбора простых элементов достаточно сравнить  $\alpha$  со всеми членами последовательности (33).

Отбор будем производить последовательно: если  $\alpha_1$  —  $p$ -единица, то его отбрасываем. Если  $\alpha_1$  — не  $p$ -единица, то сравниваем его с  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\sigma$ . Пусть найдется такое  $\alpha_k$ , что  $\alpha_1$  и  $\alpha_k$  не  $p$ -взаимно просты и ни одно из них не  $p$ -делится на другое. Тогда по доказанному предложению в (33) найдется такое  $\gamma$ , на которое будут  $p$ -делиться и  $\alpha_1$ , и  $\alpha_k$ , причем  $p$  войдет в  $N\gamma$  меньшее число раз, чем в  $N\alpha_1$  и  $N\alpha_k$ . Если  $\gamma$  еще не  $p$ -простое, то повторим тот же процесс. Через конечное число шагов мы придем, таким образом, к простому элементу  $\pi_1$ .

Продолжая отбор, получим

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s, \quad (35)$$

причем мы всегда можем предполагать, что числа (35) выбраны так, что они попарно взаимно просты. Таким образом, получим полный набор локально униформизирующих элементов, каждый из которых содержит только один простой идеальный множитель числа  $p$ :

$$p = e\pi_1 \dots \pi_s,$$

где  $e$  —  $p$ -единица.

Этот результат показывает, что кольцо  $\mathfrak{D}_p$  содержит только конечное число простых идеальных множителей, т. е. по современной терминологии является полулокальным.

После этого Е. И. Золотарёв переходит к рассмотрению глобальной теории. Он не определяет, что такое идеальный простой множитель числа  $p$ , но из работы видно, что каждому  $\pi_i$  из (35) он ставит в соответствие некий символ  $\mathfrak{p}_i$ , так что каждому  $\pi_i$  отвечает только один такой символ и разным элементам из (35) отвечают разные символы. Остается определить, как раскладывается число  $\alpha \in \mathfrak{D}$  на идеальные множители.

Е. И. Золотарёв вводит следующие определения: будем говорить, что  $\alpha$  содержит  $m$  раз множитель числа  $p$ , принадлежащий  $\pi_i$ , если  $\alpha$   $p$ -делится на  $\pi_i^m$  и не  $p$ -делится на  $\pi_i^{m+1}$ .

Отсюда видно, что идеальные множители определяются по существу как показатели (валюации). В действительности, строится некоторая функция  $v_p(\alpha)$ , которая принимает целые неотрицательные значения.

Эта функция, очевидно, должна обладать свойством

$$v_p(\alpha\beta) = v_p(\alpha) + v_p(\beta).$$

Е. И. Золотарёв доказывает это в последней теореме своей работы, которая звучит так: «Произведение  $\beta\gamma$  двух комплексных чисел содержит идеальный множитель  $\mathfrak{p}$ , принадлежащий  $\pi$ , столько раз, сколько оба числа  $\beta$  и  $\gamma$ -вместе»<sup>53</sup>. После этого уже нетрудно перенести в кольцо  $\mathfrak{D}$  всю обычную арифметику.

Замечательно, что и Куммер, и Золотарёв говорили об «идеальных множителях», но по существу ограничиваются определением показателя, с которым идеальный множитель входит в целое число. Больше ничего об идеальном множителе им знать не нужно.

Итак, мы видим, что Е. И. Золотарёв существенно развил локальные методы Куммера и построил с их помощью безупречно строгую арифметику алгебраических чисел. При этом он начал изучение локальных и полулокальных колец (не вводя явно этих понятий) и применил методы локализации и глобализации. Этот же путь был впоследствии избран К. Гензелем и привел его к введению  $p$ -адических чисел. Работы Золотарёва и

<sup>53</sup> Золотарёв Е. И. Собрание сочинений. Т. 2. Л., Изд-во АН СССР, 1934, с. 129.

Гензеля положили начало тому кругу идей и методов, которые составляют ядро локальной алгебры.

Замечательно также, что при своем построении алгебраических чисел Е. И. Золотарёв основывался на лемме, одинаково справедливой как для алгебраических чисел, так и для алгебраических функций. Поэтому вся теория Золотарёва может быть немедленно перенесена на кольца алгебраических функций.

### Теория идеалов Р. Дедекинда

Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд родился в 1831 г. в Брауншвейге (Германия), где его отец был профессором и юрисконсультантом. Дедекинд учился в гимназии и Карловском коллегииуме в своем родном городе. Вначале интересы юноши лежали в области химии и физики, а к математике он относился лишь как к аппарату упомянутых дисциплин. Вскоре, однако, чисто математические вопросы увлекают его все больше и больше. Уже овладев элементами аналитической геометрии, алгебраического анализа, дифференциального и интегрального исчисления, Дедекинд в 1850 г. поступил в Гёттингенский университет, который был одним из выдающихся европейских центров естественнонаучной мысли. Здесь он посещал семинар по математике и физике, где познакомился с элементами теории чисел, которая впоследствии стала основным предметом его исследований. Здесь же в Гёттингене он подружился с Риманом. В 1852 г. он написал под руководством Гаусса свою докторскую диссертацию по теории интегралов Эйлера.

Летом 1854 г. почти одновременно с Риманом Дедекинду было присвоено звание университетского лектора, после чего он начал свою деятельность в качестве приват-доцента университета. Когда после смерти Гаусса его место в Гёттингене занял Дирихле, Дедекинд сблизился с последним. Их беседы явились для Дедекинда стимулом для начала исследований в совершенно новых направлениях. Дедекинд вспоминал впоследствии, что Дирихле сделал его «новым человеком», расширив горизонты его научных интересов.

Оригинальной стороной читавшегося самим Дедекиндом курса лекций было первое университетское изложение теории Гауа. В этих лекциях, в частности, Дедекинд впервые ввел в математику понятие поля.

В 1858 г. Дедекинд был приглашен в Цюрихский политехникум в качестве преемника И. Л. Раабе (1801—1859), имя которого носит один из признаков сходимости числовых рядов. Со времен Дедекинда возникла устойчивая традиция, в силу которой Цюрих был первым шагом для многих немецких математиков на пути к профессорскому званию в Германии. Этот путь проделали, например, Кристоффель, Г. Шварц, Фробениус, Гурвиц, Г. Вебер, Г. Минковский.

В сентябре 1859 г. Дедекинд направляется вместе с Риманом в Берлин, где встречается с группой руководителей Берлинской математической школы, в том числе К. Вейерштрассом, Э. Куммером, К. Борхардтом и Л. Кронекером.

В 1862 г. Дедекинд назначается преемником А. В. Уде в Брауншвейгском политехникуме. На этой должности он оставался до самой смерти. Дедекинд умер в 1916 г.

Мы уже говорили (см. с 100), что, занимаясь арифметикой алгебраических чисел, Дедекинд столкнулся с трудностями, которые не позволяли перенести методы Куммера без существенного их изменения на общий случай. Долгие годы, по его словам, пытался он обосновать арифметику

с помощью теории сравнений высших степеней, пока, наконец, не избрал совершенно новый путь, который и привел его к цели. Это новое обоснование, получившее название теории идеалов, было им изложено впервые (в еще несовершенной форме) в X Дополнении к 2-му изданию «Теории чисел» Дирихле (1871), а затем (в окончательном виде) в XI Дополнении к последующим изданиям этой же книги (1879, 1894).

Новый путь Дедекинда можно коротко охарактеризовать как теоретико-множественный и аксиоматический. Анализируя работы Куммера, Дедекинд заметил, что в них не определялись сами идеальные числа, но только делимость на такие числа, и пришел к заключению, что оперирование с идеальными числами можно заменить рассмотрением множеств обычных целых чисел расширения  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ , делящихся на некоторое идеальное число. Надо было дать определение этим множествам, получившим название идеалов (хотя, может быть, как заметил Ф. Клейн, их лучше было бы назвать реалами), и определить теоретико-числовые понятия, такие, как делимость, сравнимость по модулю и др., в терминах теории множеств. Все это Дедекинд и сделал в X Дополнении, которое является первой работой, где основные объекты алгебры вводились аксиоматически. По утверждению Н. Бурбаки, это дополнение было написано «общим образом и в совершенно новом стиле», здесь «практически благодаря единственному рывку теория алгебраических чисел совершила переход от первых попыток и неуверенных шагов к вполне зрелой дисциплине, уже обладающей основным своим аппаратом»<sup>54</sup>.

Ввиду огромной важности для алгебры и теории чисел новой концепции Дедекинда мы постараемся здесь дать представление о X Дополнении.

Дедекинд начинает с введения понятия поля (Körper), которое он определяет следующим образом: «Под полем будем понимать каждую систему из бесконечного числа действительных или комплексных чисел, настолько замкнутую в себе и совершенную, что сложение, вычитание, умножение и деление любых двух таких чисел всегда опять образуют число той же системы»<sup>55</sup>.

Мы видим, что его определение отличается от современного требованием, чтобы элементы поля были вещественными или комплексными числами. Однако большинство следствий, которые он выводит, носят вполне общий характер и могут быть применены к любому полю.

В XI Дополнении четвертого издания «Лекций по теории чисел» Лежена-Дирихле (1894) Дедекинд излагает свою теорию по-новому. Там определение поля упрощается.

«Система  $A$  действительных или комплексных чисел называется полем (Körper), если суммы, разности, произведения и частные каждых двух чисел принадлежат  $A$ ».

Дедекинд добавляет, что «простейшее поле образовано рациональными, наибольшее — всеми числами». Он вводит далее понятия подполя, базиса и степени поля, а также понятия сопряженного числа, нормы и дискриминанта  $n$  чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  как квадрата определителя, образованного этими числами и всеми сопряженными с ними. Рассмотрев кольцо всех целых алгебраических чисел, он показывает, что на них нельзя разумным образом перенести теорию делимости. Но это можно сделать для целых чисел конечного расширения  $\Omega = \mathbb{Q}(\theta)$ , где  $\theta$  — корень неприводимого над  $\mathbb{Q}$  уравнения

<sup>54</sup> Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., «Мир», 1971, с. 662.

<sup>55</sup> Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd 3. Braunschweig, 1932, S. 224.



Р. ДЕДЕКИНД

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

Прежде чем изучать кольцо целых  $\mathfrak{D}$  такого поля  $\Omega$ , Дедекиннд вводит важное новое понятие — модуля, которому суждено было сыграть такую большую роль в алгебраической теории чисел и алгебре наших дней. Приведем его определение: «Система  $\mathfrak{a}$  действительных или комплексных чисел, суммы и разности которых принадлежат той же системе  $\mathfrak{a}$ , называется модулем»<sup>56</sup>. При этом если  $\alpha - \beta \in \mathfrak{a}$ , то Дедекиннд говорит, что

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Если  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ , то Дедекиннд называет  $\mathfrak{a}$  кратным  $\mathfrak{b}$ , а  $\mathfrak{b}$  — делителем  $\mathfrak{a}$ . Общим наименьшим кратным двух модулей  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$  он называет их пересечение  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ .

Мы видим, что модули Дедекиннда — это модули над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Поэтому он не выдвигает требования, чтобы произведение  $\omega\alpha \in \mathfrak{a}$ , где  $\alpha \in \mathfrak{a}$ , а  $\omega$  — любое число из  $\mathfrak{D}$ . Это требование появляется у него далее при введении понятия идеала. Мы видим также, что Дедекиннд систематически заменяет здесь теоретико-числовые понятия («делиться на», «быть кратным» и т. п.) на теоретико-множественные («содержаться в», «иметь подмножество» и т. п.). Далее он развивает учение о модулях — вводит понятие базиса модуля, разбиение одного модуля на классы, несравнимые между собой по другому модулю. Это учение он применяет для изу-

<sup>56</sup> Ibid., s. 242.

чения кольца целых чисел  $\mathfrak{D}$  поля  $\Omega$ . Он замечает, и это было впервые в математической литературе, что если  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — базис поля  $\Omega$ , где  $\omega_i$  — целые, то множество чисел вида

$$h_1\omega_1 + \dots + h_n\omega_n, \quad (36)$$

где  $h_i \in \mathbb{Z}$ , вообще говоря, не исчерпывает всех целых чисел  $\Omega$ , что могут быть целые числа из  $\Omega$ , которые выражаются в виде (36) с дробными  $h_1, \dots, h_n$ .

Основной результат Дедекинда заключается в доказательстве существования такого базиса

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$$

(Дедекинд называет его основным рядом), через который уже все целые числа поля  $\Omega$  выражаются в виде (36) с целыми коэффициентами. Дискриминант этого базиса Дедекинд называет дискриминантом поля или «основным числом» (Grundzahl) <sup>57</sup>.

В качестве примера он рассматривает квадратичное расширение  $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  и говорит, что если  $D \equiv 1 \pmod{4}$ , то «основной ряд» составляют числа 1 и  $(1 + \sqrt{D})/2$ , а «основным числом» будет  $D$ . Если же  $D \equiv 2$  или  $3 \pmod{4}$ , то «основным рядом» будет 1 и  $\sqrt{D}$ , а «основным числом»  $4D$ . Этот факт был по существу известен еще Ньютону <sup>58</sup>, однако в XIX в. он никем до Дедекинда отмечен не был. Между тем он был весьма существен для построения арифметики алгебраических чисел. Именно то обстоятельство, что степенной базис  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ , которым все до Дедекинда оперировали, не является в общем случае «основным рядом», и делало невозможным непосредственное перенесение на этот случай методов Куммера.

Дедекинд напоминает, что в области всех целых чисел  $\mathfrak{D}$  поля  $\Omega$ , которую он называет порядком (Ordnung), понятия неразложимости и простоты не совпадают <sup>59</sup> (факт, обнаруженный еще Куммером), и вводит для построения арифметики таких чисел новое понятие идеала, которое определяет аксиоматически:

«Система  $\mathfrak{a}$  из бесконечного числа чисел из  $\mathfrak{D}$  называется идеалом, если удовлетворяются два условия:

(I) сумма и разность любых двух чисел из  $\mathfrak{a}$  вновь есть число из  $\mathfrak{a}$ ;

(II) каждое произведение числа из  $\mathfrak{a}$  на число из  $\mathfrak{D}$  есть снова число из  $\mathfrak{a}$ » <sup>60</sup>.

Таким образом, идеалы Дедекинда — это ненулевые модули над порядком  $\mathfrak{D}$ .

Делимость чисел и идеалов определяется также через теоретико-множественные понятия: Дедекинд говорит, что если  $\alpha \in \mathfrak{a}$ , то  $\alpha$  делится на  $\mathfrak{a}$ , если  $\alpha - \beta \in \mathfrak{a}$ , то  $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$ , и отмечает, что такие сравнения можно складывать, вычитать, умножать на число (точно так же, как и уравнения). Поскольку отношение сравнения транзитивно, сравнение по

<sup>57</sup> В 4-м издании «Лекций» Лежена-Дирихле этого термина уже нет.

<sup>58</sup> См. статью: Башмакова И. Г. Об одном вопросе теории алгебраических уравнений в трудах И. Ньютона и Э. Варинга. — ИМИ, вып. 12. М., Физматгиз, 1959, с. 431—456. См. также сноску на с. 99.

<sup>59</sup> В последующих изложениях своей теории Дедекинд приводит очень простой пример неразложимых чисел, которые не будут простыми, а именно: в поле  $\Omega = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$  число  $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ , причем 2, 3,  $1 + \sqrt{-5}$ ,  $1 - \sqrt{-5}$  — целые неразложимые числа. Этот пример вошел впоследствии во все учебники.

<sup>60</sup> *Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd 3. Braunschweig, 1932, S. 251.*

$\text{mod } \mathfrak{a}$  разбивает все числа  $\mathfrak{D}$  на непересекающиеся классы, к каждому из которых принадлежит сравнимые между собой числа. Число таких классов Дедекиннд называет нормой идеалов  $\mathfrak{a}$ :  $N(\mathfrak{a})$ .

Если  $\eta \in \mathfrak{D}$  и  $\eta \neq 0$ , то множество  $I(\eta)$  всех чисел, делящихся на  $\eta$ , очевидно, удовлетворяет свойствам (I) и (II), а потому является идеалом. Дедекиннд называет такой идеал главным. Далее Дедекиннд определяет делимость идеалов и простые идеалы:

1) если  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ , то говорят, что  $\mathfrak{a}$  делится на  $\mathfrak{b}$  или является кратным  $\mathfrak{b}$ , а  $\mathfrak{b}$  называется делителем  $\mathfrak{a}$ .

Очевидно, что все числа из  $\mathfrak{b}$  распадаются по  $\text{mod } \mathfrak{a}$  на один или несколько классов. Если таких классов  $r$ , то

$$N\mathfrak{a} = rN\mathfrak{b}.$$

Дедекиннд показывает, что каждый идеал может иметь только конечное число делителей. Главный идеал  $\mathfrak{D}$  является делителем любого, а потому играет роль единицы. Этот идеал однозначно характеризуется каждым из следующих условий: 1) он содержит 1 (или, вообще говоря, какие-либо единицы поля), 2)  $N\mathfrak{D} = 1$ .

Пересечение двух идеалов  $m = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  Дедекиннд называет общим наименьшим кратным этих идеалов, а систему, состоящую из чисел вида  $\alpha + \beta$ , где  $\alpha \in \mathfrak{a}$ ,  $\beta \in \mathfrak{b}$ , — их общим наибольшим делителем  $D$ . Он показывает, что  $N\mathfrak{a} N\mathfrak{b} = NmND$ . Наконец, Дедекиннд называет идеал  $\mathfrak{p}$  простым, если он не имеет никаких делителей, кроме  $\mathfrak{D}$  и самого  $\mathfrak{p}$ .

Тогда имеет место следующая теорема:

Если  $\eta\rho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ , то по крайней мере одно из чисел  $\eta$ ,  $\rho$  делится на  $\mathfrak{p}$ .

Приведем доказательство Дедекиннда.

Пусть  $\eta$  не делится на  $\mathfrak{p}$ . Тогда все корни сравнения

$$\eta x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

образуют идеал  $X$ , содержащий идеал  $\mathfrak{p}$ . Но этот идеал не содержит числа 1, т. е.  $X \neq \mathfrak{D}$ . Значит,  $X$  должен совпадать с  $\mathfrak{p}$ , т. е.  $\rho \in \mathfrak{p}$ .

Это предложение, как мы видим, является характеристическим для простого числа или простого идеала.

После этого Дедекиннд определяет степень простого идеала  $\mathfrak{p}^r$ , не вводя еще произведения идеалов. Он делает это следующим образом:

1) доказывает, что если  $\eta$  не делится на идеал  $\mathfrak{a}$ , то всегда существует число  $\nu$ , делящееся на  $\eta$  и такое, что все корни  $\pi$  сравнения

$$\nu x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$$

образуют простой идеал <sup>61</sup>;

2) утверждает, что если  $\mu \in \mathfrak{D}$ ,  $\mu \neq 0$  и  $\mu \neq 1$ , тогда согласно п. 1) существует такое число  $\nu$ , что корни  $\pi$  сравнения

$$\nu x \equiv 0 \pmod{\mu}$$

образуют простой идеал  $\mathfrak{p}$ .

Дедекиннд называет такой идеал первичным (einfach). Тогда если  $r$  — натуральное число, то все корни  $\rho$  сравнения

$$\nu^r x \equiv 0 \pmod{\mu^r}$$

образуют идеал, который Дедекиннд называет  $r$ -й степенью идеала  $\mathfrak{p}$  и обозначает  $\mathfrak{p}^r$ .

<sup>61</sup> При доказательстве Дедекиннд применяет метод спуска, относящийся к нормам идеалов.

Заметим, что понятие степени простого идеала  $\mathfrak{p}'$ , определенное здесь Дедекиндом, совпадает с понятием примарного идеала.

Дедекинду доказывает, что идеал  $\mathfrak{p}'$  не делится ни на какой простой идеал, кроме  $\mathfrak{p}$ . Наконец, он устанавливает фундаментальные теоремы, соответствующие законам делимости целых рациональных чисел:

1) каждый идеал есть наименьшее общее кратное всех входящих в него степеней простых идеалов;

2) идеал  $m$  тогда и только тогда делится на идеал  $\mathfrak{a}$ , если все входящие в  $\mathfrak{a}$  степени простых идеалов входят также и в  $m$ .

В своих доказательствах Дедекинду опирается на свойства сравнений по  $\text{mod } \mathfrak{a}$ , где  $\mathfrak{a}$  — идеал, и метод бесконечного спуска.

Однако для построения в порядке  $\mathfrak{D}$  арифметики, полностью аналогичной обычной, необходимо было определить умножение идеалов и установить связь между этой операцией и введенной раньше операцией деления.

Дедекинду вводит произведение идеалов:

«Если умножить все числа идеала  $\mathfrak{a}$  на все числа идеала  $\mathfrak{b}$ , то эти произведения и их суммы образуют идеал, делящийся на  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$ , который называется произведением множителей  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$  и обозначается  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ »<sup>62</sup>.

Он замечает, что из этого определения следует  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{a}\mathfrak{D} = \mathfrak{a}$  и  $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ , т. е. идеал  $\mathfrak{D}$  играет роль единицы и введенная операция умножения коммутативна и ассоциативна. Однако в своей работе 1871 г. Дедекинду не сумел установить связь между введенными им операциями умножения и деления идеалов. Он только доказал, что если  $\mathfrak{p}^a$ ,  $\mathfrak{p}^b$  — наивысшие степени, в которых простой идеал  $\mathfrak{p}$  входит в идеалы  $\mathfrak{a}$  и  $\mathfrak{b}$ , то  $\mathfrak{p}^{a+b}$  — наивысшая степень, с которой он войдет в произведение  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ , а также что  $N\mathfrak{a}\mathfrak{b} = N\mathfrak{a} \cdot N\mathfrak{b}$ .

Но для полной аналогии с обычной арифметикой надо было еще доказать теорему: если идеал  $\mathfrak{a}$  делится на идеал  $\mathfrak{b}$ , т. е.  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ , то существует единственный идеал  $\mathfrak{c}$  такой, что  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ . Эта теорема представляла существенные трудности, которые Дедекинду сумел преодолеть только несколько лет спустя. Новая теория идеалов была им изложена в XI Дополнении к третьему изданию «Теории чисел» Лежена-Дирихле (1879). Он писал там: «В то время как наше предыдущее исследование идеалов состояло в существенных чертах только в применении учения о делимости модулей, теперь мы переходим к новому построению идеалов, а именно к умножению идеалов, которое образует собственное ядро теории идеалов»<sup>63</sup>. Дедекинду доказывает здесь теорему (см. выше), а именно: «Если идеал  $\mathfrak{a}$  делится на простой идеал  $\mathfrak{p}$ , то существует один и только один идеал  $\mathfrak{q}$  такой, что

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

Этот идеал  $\mathfrak{q}$  является собственным делителем  $\mathfrak{a}$ , и, следовательно,  $N\mathfrak{q} < N\mathfrak{a}$ »<sup>64</sup>. После этого он устанавливает закон однозначности разложения на простые идеалы в более привычном для нас виде:

«Каждый идеал  $\mathfrak{a}$ , отличный от  $\mathfrak{D}$ , либо является простым, либо допускает представление и притом единственным образом в виде произведения простых»<sup>65</sup>.

Отметим, что в ходе доказательства Дедекинду исследует порядок  $\mathfrak{D}$  и выделяет следующие его характеристические свойства:

1)  $\mathfrak{D}$  является конечным модулем, базис которого  $[\omega_1, \dots, \omega_n]$  одновременно и базис поля  $\Omega$ ;

<sup>62</sup> *Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd. 3. Braunschweig, 1932, S. 259.*

<sup>63</sup> *Ibid.*, S. 297.

<sup>64</sup> *Ibid.*, S. 309.

<sup>65</sup> *Ibid.*

2) каждое произведение двух чисел из  $\mathfrak{D}$  само принадлежит  $\mathfrak{D}$ ;

3) число 1 принадлежит  $\mathfrak{D}$ .

Эти свойства представляют собой по существу первое определение понятия кольца.

Последнее, третье, изложение теории идеалов содержится в XI Дополнении к четвертому изданию книги Дирихле. Оно наиболее близко к современному. Отметим, что здесь Дедекиннд вводит дробные идеалы и показывает, что они образуют группу. Изложение Дедекиннда и сейчас может служить образцом логической ясности, прозрачности и строгой последовательности.

К этому следует добавить, что в 1882 г. в работе «О дискриминантах конечных полей» (*Über die Diskriminanten endlicher Körper*) Дедекиннд ввел понятие дифференты, с помощью которого он дает новое определение дискриминанта и определяет степени, с которыми простые идеалы входят в простые делители дискриминанта.

### О методе Р. Дедекиннда. Идеалы и теория сечений

Мы видели, что в своей теории идеалов Дедекиннд последовательно применяет теоретико-множественный и аксиоматический методы. Эти привычные уже для нас инструменты исследования были совершенно новы для его современников. Поэтому Дедекиннд счел необходимым пояснить свой метод в статье «О теории целых алгебраических чисел» (*Sur la théorie des nombres entiers algébriques.* — *Bull. sci. math. et astron.*, sér. 1, 1876, 9; sér. 2, 1877, 1), изданной и отдельной книжкой в Париже в 1877 г. С этой целью он прибегает к сравнению со способом построения теории сечений, который он применил для введения иррациональных чисел. Он пишет, что, создавая свою теорию, руководствовался следующими требованиями к определению новых чисел. Определение должно: 1) основываться на тех фактах и отношениях, которые имеют место в области рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  (например, он отбрасывает определение, опирающееся на отношение однородных величин, как чуждых арифметике); 2) порождать все иррациональные числа сразу; 3) быть таким, чтобы с его помощью можно было ясным образом ввести арифметические операции.

Дедекиннд заметил, что каждое рациональное число разбирает  $\mathbb{Q}$  на два класса:  $A$ , в котором содержатся все рациональные  $q < r$ , и  $B$ , в который входят все числа из  $\mathbb{Q}$ , большие  $r$ . При этом само число  $r$  можно (по желанию) отнести к  $A$  или  $B$ . Такое разбиение Дедекиннд назвал сечением. Следующий шаг состоял в том, чтобы выделить основные свойства сечения, которые позволили бы определить его аксиоматически, не прибегая к числу  $r$ , порождающему сечение. Дедекиннд дает поэтому новое определение ( $\alpha$ ) сечения: это такое разбиение всех рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  на два класса  $A$  и  $B$ , что любое число из  $A$  меньше любого числа из  $B$ .

При таком определении оказывается, что далеко не всякому сечению соответствует порождающее его рациональное число: «существует бесконечно много сечений, которые не могут быть порождены рациональными числами указанным способом, для каждого такого сечения создают или вводят в арифметику иррациональное число, соответствующее этому сечению»<sup>66</sup>.

Далее, на основании своего определения Дедекиннд вводит в новое множество чисел-сечений отношение порядка («больше» и «меньше»), а также четыре действия арифметики. Новая область  $R$  всех чисел-сечений, как

<sup>66</sup> *Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd 3. Braunschweig, 1932, S. 269.*

показывает Дедекиннд, уже обладает свойством полноты в том смысле, что каждому ее разбиению, удовлетворяющему определению  $(\alpha)$ , отвечает порождающее его число из  $R$ .

Аналогично обстояло дело и при определении идеалов. Если  $\mu \in \mathfrak{D}$ , то множество чисел  $a$ , делящихся на  $\mu$ , очевидно, удовлетворяют свойствам (I) и (II), т. е. если  $\alpha$  делится на  $\mu$  и  $\beta$  делится на  $\mu$ , то  $\alpha \pm \beta$  делится на  $\mu$ , т. е.  $\alpha \pm \beta \in a$  (свойство I), и если  $\alpha$  делится на  $\mu$ , а  $\omega \in \mathfrak{D}$ , то  $\omega\alpha$  делится на  $\mu$ , т. е.  $\omega\alpha \in a$  (свойство II). Теперь, говорит Дедекиннд, поскольку мы хотим определить законы делимости в  $\mathfrak{D}$  так, чтобы они были аналогичны обычным, то «определения идеальных чисел и делимости на идеальные числа должны быть сделаны так, чтобы две элементарные теоремы (I) и (II), сформулированные выше, продолжали иметь место и тогда, когда  $\mu$  не будет существующим числом, но числом идеальным»<sup>67</sup>.

Поэтому Дедекиннд принимает свойства (I) и (II) в качестве аксиом, определяющих не только главные, но и все идеалы.

Если  $\mathfrak{D}$  совпадает с кольцом  $Z$ , то ничего нового мы не получим. В каждом множестве  $a$  целых рациональных чисел таких, что суммы и разности любых двух чисел снова принадлежат  $a$ , будет (как нетрудно доказать) наименьшее по абсолютной величине число, на которое все остальные числа из  $a$  делятся нацело. Или, по терминологии Дедекиннда, все идеалы в  $Z$  главные. Если  $\mathfrak{D}$  — кольцо целых поля  $\Omega = \mathbb{Q}(\theta)$ , то в нем будут идеалы  $\mathfrak{J}$ , не содержащие никакого числа  $\mu \in \mathfrak{D}$ , на которое все остальные числа из  $\mathfrak{J}$  делились бы нацело.

Определив непосредственно для таких идеалов понятие делимости и простоты, Дедекиннд, как мы видели, построил арифметику колец целых алгебраических чисел  $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Q}(\theta)$ , аналогичную обычной.

Таким образом, и в теории сечений, и в теории идеалов Дедекиннд шел по одному и тому же пути: он находил основные определяющие свойства некоторых объектов (сечений, порожденных рациональным числом, или множеств целых чисел, делящихся на некоторое число), затем брал эти свойства в качестве аксиом и получал новую область (множество всех сечений области или множество всех идеалов поля), которая была шире старой и содержала старую как частный случай. При этом новая область обладала нужными свойствами: в случае сечений — полнотой, в случае теории идеалов — законом однозначности разложения на простые множители.

К этому следует добавить, что Дедекиннд применил впоследствии тот же прием и в третий раз, а именно при построении арифметики полей алгебраических функций; тем же способом была определена точка римановой поверхности. Мы сейчас остановимся на этом вопросе более подробно.

### Построение теории идеалов для полей алгебраических функций

Уже при обосновании теории делимости алгебраических чисел Дедекиннд выделил, как мы видели, такие важнейшие понятия как поле, модуль и идеал, причем он ввел их аксиоматически и на теоретико-множественной основе. Это был первый важный шаг на пути формирования коммутативной алгебры.

Второй, не менее важный, шаг состоял в перенесении всей теории на поля алгебраических функций. Он был сделан Дедекинндом совместно с Г. Вебером.

<sup>67</sup> *Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd 3. Braunschweig, 1932, S. 271.*



Г. ВЕБЕР

Г. Вебер родился в 1843 г. в Гейдельберге. В этом же городе он обучался в университете, посещая лекции Гельмгольца и Кирхгофа. С 1873 по 1883 г. он работал в Кёнигсберге, а с 1892 по 1895 г. — ординарным профессором в Гёттингене. Вебер скончался в 1913 г. в Страссбурге. Почти во всех областях математики XIX в. Вебер оставил заметный след. Ф. Клейн замечает, что он обладал «изумительной способностью овладевать новыми для него понятиями, каковы, например, теория функций Римана и теория чисел Дедекинда»<sup>68</sup>.

Параллельно с исследованиями полей алгебраических чисел, вызванными открытием неоднозначности разложения на «простые» множители, в XIX в. шло развитие теории алгебраических функций. Центральной проблемой здесь была трактовка неоднозначных функций комплексного переменного. Этой проблемой занимались такие ученые, как Абель и Якоби, окончательное решение ее получил Б. Риман, который построил так называемые римановы поверхности. Точкам этих поверхностей отвечало уже одно и только одно значение соответствующей функции. Однако конструкция Римана не удовлетворяла Дедекинда и Вебера, так как она основывалась на предположениях о непрерывности и разложимости в ряд, которые сами базировались на различного рода геометрической интуиции. В своем мемуаре «Теория алгебраических функций одного переменного» (Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. — J. für reine und angew. Math., 1882, 92) Дедекиннд и Вебер поставили своей целью «обосновать теорию алгебраических функций, являющуюся

<sup>68</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 317.

главным достижением исследований Римана, простейшим и одновременно строгим и наиболее общим образом»<sup>69</sup>.

Замечательно, что все изложение Дедекинда и Вебера построено так, что оно имеет место и для любого основного поля характеристики нуль (по-видимому, предполагается только, что поле алгебраически замкнуто): «Нигде не будет, например, пробела, если бы мы захотели ограничить область переменных чисел системой алгебраических чисел»<sup>70</sup>.

При построении своей теории Дедекинд и Вебер руководствовались аналогией между алгебраическими функциями и алгебраическими числами, которая была уже давно замечена. Еще Стевин обратил внимание, что многочлены от одного переменного ведут себя как целые числа, причем неприводимые многочлены играют роль простых чисел. Стевин ввел для многочленов алгоритм Евклида, с помощью которого можно доказать, что каждый многочлен однозначно представляется в виде произведения неприводимых. Впоследствии на многочлены был перенесен и метод сравнений. Однако вся глубина аналогии была выявлена только после рассматриваемого нами мемуара Дедекинда и Вебера.

При этом Дедекинд, следуя своему общему принципу, изложенному нами в предыдущем подразделе, перевернул «вверх дном» все изложение Римана. Риман начинал с конструкции «римановой поверхности», которой отвечал некоторый класс алгебраических функций. Авторы начинают с построения поля функций, отвечающего классу Римана, развивают для этого поля теорию, полностью аналогичную теории алгебраических чисел, определяют в этом поле модули и идеалы и только затем с помощью развитой теории строят точки римановой поверхности.

Вся первая часть мемуара посвящена формальной теории алгебраических функций. Она начинается с определения алгебраической функции. Пусть задано неприводимое уравнение

$$F(\theta, z) = 0, \quad (37)$$

где

$$F(\theta, z) = a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \dots + a_{n-1}\theta + a_n,$$

причем коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  являются целыми рациональными функциями от  $z$ . Функцию  $\theta$ , определяемую уравнением (37), авторы называют алгебраической функцией.

Затем с помощью «конструкции Кронекера» (см. с. 49) они строят поле алгебраических функций  $\Omega$ , содержащее все рациональные функции от  $z$  и  $\theta$  (степени  $\leq n$ ). Элементы этого поля будут иметь вид

$$\zeta = b_0 + b_1\theta + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1},$$

где  $b_0, \dots, b_{n-1}$  — рациональные функции от  $z$ , степень его над полем  $\mathbb{Q}(z)$  равна  $n$ . После этого авторы почти дословно переносят всю теорию Дедекинда на поля алгебраических функций: они определяют норму и след функции и дискриминант системы  $n$  функций, вводят понятие целой функции поля и изучают кольцо этих функций, определяют понятие модуля (Funktionenmodul), вводят сравнения по модулю и, наконец, определяют понятие идеала и доказывают основную теорему теории делимости.

Приведем для примера определение понятия модуля: «Система функций (из  $\Omega$ ) называется модулем, если она воспроизводится при сложении, вычитании и умножении на целую рациональную функцию от  $z$ »<sup>71</sup>.

<sup>69</sup> Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke, Bd 1. Braunschweig, 1930, S. 238.

<sup>70</sup> Ibid., S. 240.

<sup>71</sup> Ibid., S. 251—252.

Наибольший интерес представляет определение точки римановой поверхности, отвечающей полю функций  $\Omega$ . С этого вопроса и начинается вторая часть мемуара. Здесь, как говорилось, вновь применяется типичный для Дедекинда путь рассуждений. Если бы мы имели уже некоторую точку  $\wp$ , то, рассматривая в ней значения всех функций  $\Omega$ , мы получили бы отображение  $\Omega$  в поле констант  $C$ :

$$F \rightarrow F(\wp) = F_0 \in C.$$

При этом если  $F \rightarrow F_0$  и  $G \rightarrow G_0$ , то ясно, что

$$F \pm G \rightarrow F_0 \pm G_0, \quad FG \rightarrow F_0G_0 \quad \text{и} \quad F/G \rightarrow F_0/G_0.$$

Авторы замечают, что для общности целесообразно дополнить область  $C$  числом  $\infty$ , для которого определены обычные действия арифметики; исключение составляют сочетание знаков  $\infty \pm \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ , которым никакого числового значения не приписывается. Если мы теперь возьмем такую расширенную область  $\bar{C}$  и будем рассматривать все возможные гомоморфизмы  $\Omega$  в  $\bar{C}$ , то каждому такому гомоморфизму можно сопоставить точку  $P$ . Именно таким определением воспользовались Дедекинды и Вебер:

«Если все индивидуумы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  поля  $\Omega$  сопоставлены определенным числовым значениям  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$  таким образом, что (I)  $(\alpha)_0 = \alpha$ , если  $\alpha$  — константа, и вообще (II)  $(\alpha + \beta)_0 = \alpha_0 + \beta_0$ , (III)  $(\alpha - \beta)_0 = \alpha_0 - \beta_0$ , (IV)  $(\alpha\beta)_0 = \alpha_0\beta_0$ , (V)  $(\alpha/\beta)_0 = \alpha_0/\beta_0$ , то совокупности этих значений должна быть поставлена в соответствие точка  $P$ ... и мы говорим  $\alpha = \alpha_0$  в  $P$  или  $\alpha$  имеет в  $P$  значение  $\alpha_0$ . Две точки называются различными тогда и только тогда, если существует функция  $\alpha$  из  $\Omega$ , которая принимает в обеих точках различные значения»<sup>72</sup>.

Авторы замечают, что это определение является инвариантом поля  $\Omega$ , так как оно не зависит от выбора независимой переменной, через которую мы представляем функцию этого поля.

Описанный метод введения точки  $P$  получил большую популярность в математике наших дней. Как отмечает Н. Бурбаки<sup>73</sup>, именно таким способом И. М. Гельфанд обосновал теорию нормированных алгебр (1940), после чего этот же способ применялся неоднократно.

Для построения римановой поверхности из точек авторы доказывают теорему:

1. Если  $z \in \Omega$  имеет конечное значение в  $P$ , то множество всех целых функций  $\pi \in \Omega$  относительно  $z$ , которые обращаются в нуль в точке  $P$ , образуют простой идеал  $\wp$  (относительно  $z$ ).

Авторы говорят, что точка  $P$  порождает простой идеал  $\wp$ . Если  $\omega$  — целая функция из  $\Omega$ , которая принимает в  $P$  конечное значение  $\omega_0$ , то говорят, что

$$\omega \equiv \omega_0 \pmod{\wp}.$$

2. Один и тот же простой идеал не может порождаться двумя различными точками.

3. Если  $z \in \Omega$  и  $\wp$  — простой идеал (относительно  $z$ ), то существует одна (и согласно предыдущему только одна) точка  $P$ , которая порождает этот идеал и которая называется нулевой точкой этого идеала  $\wp$ .

Из этих теорем вытекает следующий способ построения римановой поверхности  $T$ : надо взять любую функцию  $z \in \Omega$ , образовать кольцо целых функций от  $z$ , рассмотреть все его простые идеалы  $\wp$  и соответству-

<sup>72</sup> Ibid., S. 294.

<sup>73</sup> Bourbaki N. Elements d'histoire des mathématiques. Paris, 1974, p. 134.

ющие им нулевые точки  $P$ . Таким образом, получатся все точки римановой поверхности  $T$ , в которых функция  $z$  конечна. Чтобы включить и остальные точки  $P'$  (в которых  $z = \infty$ ), надо взять функцию  $z' = 1/z$ , которая обращается в этих точках в нуль, образовать кольцо целых функций от  $z'$  и построить его простые идеалы  $\mathfrak{p}'$ , которые содержат  $z'$ . Если теперь добавить к точкам  $T$  новые точки  $P'$ , отвечающие идеалам  $\mathfrak{p}'$ , то получим все точки римановой поверхности  $T$ .

Таким образом, перенесение методов теории чисел в теорию функций оказалось весьма плодотворным. При этом выяснилось, что эти методы и введенные с их помощью новые понятия переносятся почти дословно.

Известно, что аксиоматический метод в геометрии сложился в античности. В III в. до н. э. он был положен в основу построения «Начал» Евклида. Между тем аналогичный метод в алгебре возник более чем 2000 лет спустя<sup>74</sup>. Это было связано, как мы видели, с глубоким преобразованием самой алгебры, с переходом ее от учения об уравнениях (в основном, первых четырех степеней) и элементарных преобразований к изучению алгебраических структур, определенных на множестве объектов произвольной природы.

Работы Дедекинда, посвященные арифметике алгебраических чисел, дают нам возможность проследить первые, а потому и наиболее важные шаги аксиоматического метода в алгебре. Мы видим, что Дедекинду 1) строил свою аксиоматику на основе теории множеств; 2) ввел аксиоматически понятия поля, модуля, кольца и идеала для алгебраических чисел; все эти новые объекты были определены как множества чисел, удовлетворяющих некоторым явно сформулированным свойствам; 3) наконец, он перенес всю теорию в область алгебраических функций, где не только дал первое строгое построение всей теории, но и определил абстрактную риманову поверхность.

Таким образом, оказалось, что сформулированные им аксиомы определяли новые понятия поля, модуля, кольца и идеала для двух существенно различных множеств математических объектов. На самом же деле они могли быть отнесены к множествам объектов произвольной природы. И многие из теорем и рассуждений Дедекинда носили уже вполне общий характер. Однако понадобилось еще несколько десятилетий, прежде чем это было понято математиками.

Следует отметить, однако, что сам Дедекинду при рассмотрении «двухвалентных групп» (Dualgruppe), которые получили впоследствии имя дедекиндовых структур или решеток, сделал и этот последний шаг на пути создания абстрактной алгебры. В своих работах «О разложении чисел по их общим наибольшим делителям» (Über Zerlegungen von Zahlen durch die grössten gemeinsamen Teiler. Festschrift der Techn. Hochschule zu Braunschweig, 1897, S. 1—40)<sup>75</sup> и «О двучленных группах, порожденных тремя модулями» (Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. — Math. Ann., 1900, 53, 371—403)<sup>76</sup> он определил «двучленную группу» для объектов произвольной природы и изучил ее свойства, основываясь только на явно сформулированных аксиомах. Во второй из этих работ Дедекинду замечает сначала, что если обозначить через  $a + b$  общий наибольший делитель модулей  $a$ ,  $b$ , а через  $a - b$  их общее наименьшее кратное, то эти две опе-

<sup>74</sup> См. статью: Яновская С. А. Из истории аксиоматики. — В кн.: Методологические проблемы науки. М., 1972, с. 150—180.

<sup>75</sup> Dedekind R. Gesammelte mathematische Werke. Bd 3. Braunschweig, 1932, S. 103—147.

<sup>76</sup> Ibid., S. 236—271.

рации удовлетворяют следующим условиям:

$$(1) a + b = b + a; \quad a - b = b - a;$$

$$(2) (a + b) + c = a + (b + c); \quad (a - b) - c = a - (b - c);$$

$$(3) a + (a - b) = a; \quad a - (a + b) = a,$$

из которых следует, что

$$(4) a + a = a, \quad a - a = a.$$

Затем Дедекинд вводит следующее определение:

«Если две операции  $\pm$  над любыми двумя элементами  $a$ ,  $b$  некоторой (конечной или бесконечной) системы  $G$  порождают два элемента  $a \pm b$  той же системы  $G$  и одновременно удовлетворяют условиям (1), (2), (3), то  $G$  по отношению к операциям  $\pm$  называется дуальной группой, какой бы природы ни были эти элементы»<sup>77</sup>.

В качестве одного из примеров такой группы Дедекинд приводит рассмотренную выше систему модулей, другие примеры содержатся в его первой статье. Там он указывает, в частности, что в логической системе под  $a + b$  можно понимать логическую сумму, а под  $a - b$  — логическое произведение, как это делал Шрёдер в своей «Алгебре логики» (см. главу I). После этого Дедекинд выводит свойства, которыми должна обладать любая дуальная группа, и только потом изучает группы, порожденные двумя и тремя модулями.

Мы не можем здесь останавливаться подробно на дальнейшем разборе этих очень интересных работ. Для нас сейчас важно, что обе они написаны уже вполне в стиле абстрактной алгебры 20-х годов нынешнего века.

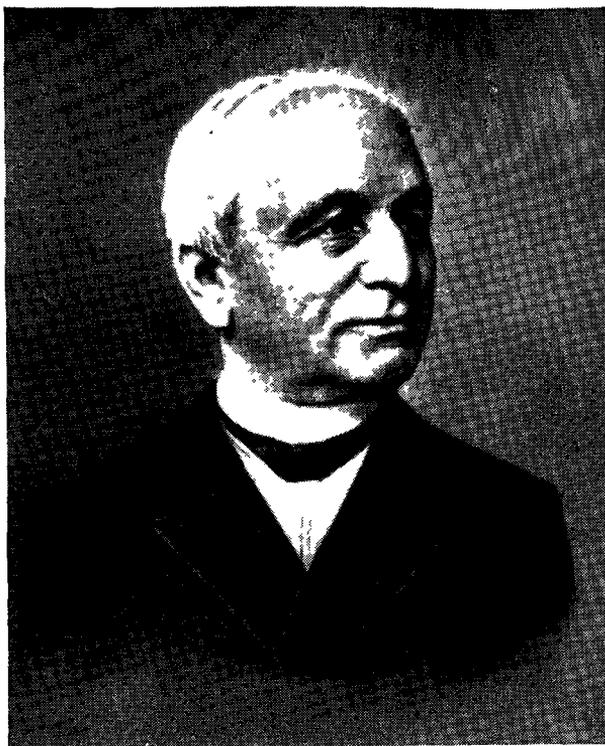
Что касается общего аксиоматического определения других алгебраических понятий, то общее понятие поля было сформулировано на рубеже XX в., а несколько позднее (1910—1914) было дано и абстрактное определение кольца (Френкель, Штейниц). Наконец, в работах Э. Нётер и ее школы окончательно сформулировалась та часть математики, которая объединила идеи и методы алгебры и теории чисел прошлого века и получила благодаря широко известной книге Б. Л. Ван дер Вардена название современной алгебры.

В заключение подчеркнем еще раз, что в создании современной алгебры, теории множеств и аксиоматического метода существенная роль принадлежит теории чисел — кузнице математических методов.

### Теория дивизоров Л. Кронекера

Проблемой построения общей теории дивизоров занимался и Леопольд Кронекер. Он родился в Германии в г. Лигнице (теперь Легница, Польша) в 1823 г. По окончании местной гимназии, где его учителем был Э. Куммер, с которым у него впоследствии установились дружеские взаимоотношения, слушал лекции в университетах Берлина, Бонна, Бреслау. На формирование Кронекера как математика наряду с Э. Куммером большое влияние оказал Дирихле, лекции которого он слушал в Берлине. В 1861 г. он был избран в Берлинскую академию наук, с 1883 г. — профессор Берлинского университета. Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, где он продолжил исследования Э. Куммера по теории квадратичных форм и теории групп. Широкой известностью пользуются взгляды Кронекера относительно «арифметизации» математики,

<sup>77</sup> Ibid., S. 237.



Л. КРОНЕКЕР

согласно которым она должна быть сведена к арифметике целых чисел. Исходя из этих взглядов, он активно выступал против принципов теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественного подхода Г. Кантора. Умер Л. Кронекер в 1891 г. в Берлине. Кронекер был одним из выдающихся математиков XIX в. Его особенно выделяла замечательная способность: «В различных областях своей работы он предчувствовал истинный смысл целого ряда соотношений фундаментального значения, не будучи еще в состоянии разработать их с полной ясностью»<sup>78</sup>.

В частности, Кронекеру принадлежит формулировка и частичное доказательство теоремы Кронекера — Вебера — первой теоремы теории полей классов (см. с. 98). Сейчас мы остановимся на обосновании им теории дивизоров в полях алгебраических чисел.

Хотя слухи и частичные сведения о создании Кронекером этой теории распространялись с середины века, полное изложение «кронекеровского» построения теории дивизоров появилось только в 1882 г. в работе «Основания арифметической теории алгебраических величин» (Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.— J. für Math., 1882), опубликованной в юбилейном, посвященном Куммеру, томе журнала Крелле. Работу Кронекера характеризует прежде всего более общая постановка задачи, рассматривается теория делимости в поле, полученном из поля рациональных чисел присоединением независимых переменных

<sup>78</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.— Л., Гостехиздат, 1937, с. 324.

и алгебраических величин над полученным полем рациональных функций. При этом Кронекер отмечает, что присоединение независимых переменных равносильно присоединению независимых трансцендентных чисел.

Возникающие алгебраические трудности Кронекер разрешает, развивая особую технику — метод присоединения вспомогательных неизвестных. Мы не будем подробно излагать рассуждения Кронекера, такое изложение можно найти в книге Г. Вейля «Алгебраическая теория чисел».

Задача, рассмотренная Кронекером, более сложна, чем решенная к тому времени Дедекиндом и Золотарёвым задача построения теории дивизоров в полях алгебраических чисел. С современной точки зрения это объясняется тем, что кольцо целых чисел поля алгебраических чисел имеет размерность 1 и является дедекиндовой областью, а кольцо целых в поле, полученном присоединением  $k$  независимых переменных и нескольких алгебраических величин, имеет размерность  $k + 1$ . Хотя мы можем рассматривать идеалы и во втором случае, но в отличие от первого здесь будут встречаться идеалы разных размерностей  $(0, 1, \dots, k)$ , а не только идеалы одной размерности 0. В этом случае дивизорам соответствуют уже не все идеалы, а только идеалы размерности  $k$ .

Сравнивая работы Кронекера и Дедекинда, Г. Вейль пишет: «Резюмируя, можно решиться сказать, что  $K$  (теория Кронекера) является более фундаментальной, а  $D$  (теория Дедекинда) — более законченной теорией»<sup>79</sup>.

Работа Кронекера не была по достоинству оценена современниками. Значение более общей постановки задачи не было понятно, а новый подход к построению арифметики алгебраических чисел после ясных, изложенных привлекательным теоретико-множественным языком работ Дедекинда казался излишним. В своей книге Г. Вейль старательно убеждает читателей в достоинствах теории Кронекера. Конечно, сейчас можно сказать, что Кронекеру удалось сделать только первый шаг в построении теории делимости в кольцах алгебраических функций. Тем не менее это был очень важный шаг в создании теории дивизоров на алгебраическом многообразии (или в кольце функций на этом многообразии), которая является необходимым инструментом для исследования многих вопросов алгебраической геометрии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы уже говорили, что 70-е годы прошлого века были неким рубежом в развитии алгебры и алгебраической теории чисел. Именно в это время оформились и вошли в математический обиход те идеи и методы, которые зародились в первой трети века, как-то: идея группы и ее инвариантов, понятия поля, кольца, модуля и идеала, а также понятия и весь аппарат линейной алгебры. В это же время арифметика была перенесена в новую область алгебраических чисел.

В следующие 50 лет все понятия, о которых мы говорили, получают более абстрактную трактовку и одновременно начинается проникновение алгебраических идей и методов в различные области математики.

В теории групп наряду с изучением конечных групп центральное место занимают исследования бесконечных групп и топологических (непрерывных) групп. Это было связано с теми применениями, которые теория групп нашла в геометрии (начиная с Эрлангенской программы Клейна), в теории функций комплексного переменного (особенно у А. Пуанкаре)

---

<sup>79</sup> Вейль Г. Алгебраическая теория чисел. М., ИЛ, 1947, с. 74.

и в дифференциальных уравнениях. Создание теории непрерывных групп, особенно исследования С. Ли, В. Киллинга и Э. Картана оказали большое влияние на позднейшее развитие как алгебры, так и топологии.

С 80-х годов прошлого века начинается и систематическое построение теории представлений групп. Здесь основные результаты первого периода развития принадлежат Г. Фробениусу и Ф. Э. Молину. Особое значение имело открытие глубоких внутренних связей между теорией представлений групп и теорией ассоциативных алгебр. Оно показало единство и плодотворность взаимодействия различных алгебраических идей и сыграло большую роль для дальнейшего развития новой алгебры.

Как мы видели, в прошлом веке была обнаружена глубокая аналогия между полями алгебраических чисел и алгебраических функций. Эта аналогия была ведущей в рассмотренном нами мемуаре Р. Дедекинда и Г. Вебера, в котором методы теории чисел, созданные Дедекиндом, были перенесены в теорию функций. С другой стороны, Е. И. Золотарёв для построения своей теории делимости воспользовался методами теории алгебраических функций. Этот же путь в конце прошлого века избрал и К. Гензель, который сумел ввести в теорию чисел аналог рядов Пюизе. Он сделал это, определив  $p$ -адические числа, в поля которых несколько позднее была перенесена топология. Таким образом, был построен  $p$ -адический анализ, позволивший широко пользоваться в теории чисел локальным рассмотрением, что существенно упрощало исследование многих трудных проблем.

В конце века (1899) Д. Гильберт дал первое систематическое изложение теории алгебраических чисел, которая до того вела свое существование в отдельных научных статьях. Его знаменитый «Zahlbericht» явился основой для дальнейшего развития теории. В этой же книге Гильберт углубил аналогию между полями алгебраических чисел и функций, придав новую форму символу норменного вычета и сформулировав общий закон взаимности по аналогии с теоремой Коши о вычетах. Он ввел для теории чисел и терминологию, принятую для функций — дивизор ветвления.

Наконец, как говорилось, в своем мемуаре Л. Кронекер впервые наметил построение единой теории для алгебраических чисел и алгебраических функций многих переменных. Однако он не имел еще достаточно средств для полного осуществления своего замысла.

В конце прошлого — начале нынешнего века развитие теории алгебраических функций приостанавливается. Математики как бы несколько отступают, чтобы укрепить свои позиции. В это время и получает развитие аксиоматический метод в алгебре, основанный на теоретико-множественных концепциях. На этом пути были построены теории абстрактных групп, полей, колец, идеалов, локальных и полулокальных колец, вплоть до теории схем, т. е. был развит аппарат современной абстрактной алгебры, первоначальный вариант которой (еще без теории схем) был создан в школе Эми Нётер и изложен Б. Л. Ван дер Варденом в его известной каждому современному математику книге, по которой и учили алгебру несколько поколений ученых.

Одновременно алгебраические методы получили все более широкое применение в геометрии, математическом анализе, а затем и в физике, так что мы можем теперь говорить об алгебраизации математики.

# Глава третья

## ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ



### 1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

#### Общая теория форм; Ш. Эрмит

В предыдущей главе были изложены исследования Гаусса, относящиеся к бинарным квадратичным формам

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — целые. Гаусс начал изучать и тройничные, или тернарные, формы, зависящие от трех переменных:

$$\sum_{i, k=1}^3 a_{ik}x_i x_k,$$

причем  $a_{ik} = a_{ki}$ , в разделе V «Арифметических исследований», озаглавленном «Отступление, содержащее исследование о тройничных формах». Он ввел для таких форм понятие дискриминанта (который называл детерминантом) и доказал, что число классов, на которые распадаются все тройничные формы с данным дискриминантом, конечно. Гаусс наметил программу дальнейшего построения теории тройничных форм, рассмотрел их приложения к вопросу о представлении чисел суммой трех квадратов и к доказательству теоремы о том, что каждое целое положительное число может быть представлено суммой трех треугольных чисел или четырех квадратов.

Проблемой эквивалентности положительно определенных квадратичных тройничных форм занимался Л. А. Зеебер (см. с. 138). Эти исследования были продолжены Эйзенштейном.

Вслед за Гауссом общую теорию квадратичных форм разрабатывал П. Г. Лежен-Дирихле, посвятивший ей много статей и большую часть своих «Лекций по теории чисел» (1863), о которых уже говорилось ранее.

Первой из этих статей явились «Исследования по теории квадратичных форм» (*Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen.*— *Abhandl. Preuss. Akad. Wiss.*, 1833), где он рассмотрел вопросы о представлении чисел квадратичными формами, простых делителях квадратичных форм и некоторые другие. Он подвел итог тому, что было сделано в этой теории до Гаусса. Затем в работе 1838 г. «Об использовании бесконечных рядов в теории чисел» (*Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres.*— *J. für Math.*, 1838, 18) Дирихле в связи с доказательством теоремы о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии

рессии (см. с. 154) использовал свойство конечности числа классов квадратичных форм данного дискриминанта. При этом он сравнил классификацию форм по Лагранжу и по Гауссу, а также нашел различные выражения для числа классов положительных форм.

Работу «Исследования о различных приложениях анализа бесконечно малых к теории чисел» (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* — *J. für Math.*, 1839, 19; 1840, 20)<sup>1</sup> Дирихле посвятил задаче: определить количество различных классов квадратичных форм заданного положительного или отрицательного дискриминанта  $D$ . Он указал, что способ его рассуждений дает в то же время путь для доказательства других утверждений Гаусса из второй части V раздела «Арифметических исследований». Дирихле изложил содержание этой части труда Гаусса в более простой и доступной форме, используя геометрическую интерпретацию. Здесь же были установлены аналоги тождества Эйлера для рядов Дирихле различного вида и выведены формулы для числа классов форм данного дискриминанта<sup>2</sup>. Среди многочисленных результатов этой работы имеются утверждения, принадлежащие Якоби, например, «число решений уравнения  $x^2 + y^2 = n$  равно учетверенной разности между числом делителей вида  $4v + 1$  и вида  $4v + 3$  числа  $n$ » или «число решений уравнения  $x^2 + 2y^2 = n$  равно удвоенной разности между числом делителей  $n$  вида  $8v + 1$  или  $8v + 3$  и числом делителей вида  $8v + 5$  или  $8v + 7$ »<sup>3</sup>.

Эта статья Дирихле исключительно богата новыми результатами, методами, связями, установленными между различными отделами математики, — интегральным исчислением, рядами, теорией чисел, теорией квадратичных форм, неопределенными уравнениями, тригонометрическими суммами. Она послужила исходным пунктом многих исследований, в том числе и работ П. Л. Чебышева по аналитической теории чисел.

Дирихле принадлежит также геометрическое изложение теории приведения положительных квадратичных форм.

Другим крупнейшим ученым, работавшим в области теории квадратичных форм, был Ш. Эрмит, о котором Ф. Клейн писал, что он «благодаря притягательной силе своей обаятельной личности... был в течение многих десятилетий одним из важнейших центров всего математического мира»<sup>4</sup>. Действительно, громадное число учеников, обширная корреспонденция, участие почти во всех научных обществах мира, дружеские связи с математиками разных стран — все свидетельствует о сильнейшем влиянии Эрмита на математиков второй половины XIX в.

Шарль Эрмит (1822—1901) окончил гимназию в Нанси, коллеж Луиле Гран в Париже и затем поступил в Политехническую школу. Еще в 1842 г. были напечатаны первые статьи Эрмита, одна из которых «Замечания об алгебраическом решении уравнений 5-й степени» (*Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du 5-me degré.* — *Nouv. Ann. Math.*, 1842, 12) содержала оригинальное доказательство невозможности алгебраического решения общего уравнения пятой степени.

По совету Лиувилля в январе 1843 г. Эрмит написал К. Якоби о своих исследованиях, посвященных делению абелевых трансцендентных. Он распространил на абелевы функции теоремы, данные Абелем и Якоби

<sup>1</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke.* Bd 1. Berlin, 1889, S. 411—496.

<sup>2</sup> Подсчетом количества различных форм данного дискриминанта (числа классов форм) занимался еще Гаусс. См. *Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел.* М., Изд-во АН СССР, 1959, с. 341—355, 449—457, 458—467, 839—866.

<sup>3</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke,* Bd 1. Berlin, 1889, S. 462—463.

<sup>4</sup> *Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.* Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 335.



Ш. ЭРМИТ

для деления аргумента в эллиптических функциях. Письмо встретило восторженный прием Якоби. В том же 1843 г. Эрмит был вынужден покинуть Политехническую школу и в дальнейшем занимался самостоятельно<sup>5</sup>.

В 1848 г. Эрмит был назначен экзаменатором и репетитором Политехнической школы. Эти скромные обязанности он выполнял много лет, даже после избрания в 1856 г. членом Парижской академии наук. Лишь в 1862 г. по инициативе Л. Пастера он получил возможность читать лекции в Нормальной школе. В 1869 г. он был назначен профессором Политехнической школы, где работал до 1876 г., и Факультета наук Сорбонны, где преподавал до 1897 г. Слушатели навсегда сохранили память о его лекциях. По поводу самого элементарного вопроса Эрмит умел открыть перед аудиторией необъятные горизонты и наметить пути науки будущего. Почти все математики Франции последней трети XIX в. были его непосредственными учениками. Среди них много блестящих имен: А. Пуанкаре, П. Аппель, Э. Пикар, Г. Дарбу, П. Пенлеве, П. Таннери и др.

Эрмит занимался разработкой алгебры, теории чисел, теории эллиптических, абелевых, модулярных функций; в каждой из этих областей ему принадлежат новые идеи и важные результаты. Наибольшей известностью пользуется его доказательство трансцендентности числа  $e$ .

Эрмита глубоко интересовали пути развития науки, механизм математического творчества, соотношения, существующие между математикой и реальным миром. В письме к Т. Стилтгесу 28 ноября 1882 г. он писал:

<sup>5</sup> Ему сообщили, что он не получит назначения на государственную службу после окончания школы из-за больной ноги.

«Я убежден, что самым абстрактным спекуляциям анализа соответствуют реальные соотношения, которые существуют вне нас и когда-нибудь станут достоянием нашего сознания... История науки, как мне кажется, доказывает, что аналитическое открытие происходит в момент, подходящий для того, чтобы сделать возможным каждый новый успех в изучении явлений реального мира, какие только можно исследовать математически»<sup>6</sup>.

Одной из составных частей математического исследования Эрмит считал метод наблюдения. Очень важной он находил связь между разными разделами математики и особенно высоко ставил те работы, в которых устанавливались подобные зависимости.

Эрмит ввел понятие билинейных форм с сопряженными переменными («эрмитовых форм»), создав полную теорию приведения определенных форм такого типа. Отсюда он извлек многочисленные следствия, в том числе — относительно приближения комплексных величин с помощью дробей, элементы которых суть целые комплексные числа Гаусса. Эрмит изучил формы с целыми комплексными коэффициентами и с комплексными переменными, получив при этом новые результаты. Формы с сопряженными переменными он применил для получения новых доказательств теорем Штурма и Коши об отделении корней алгебраических уравнений.

В 1844 г. Эрмит возобновил переписку с Якоби<sup>7</sup>. В этой переписке содержатся в зародыше основные идеи последующих исследований самого Эрмита и его учеников. Одной из первых целей, намеченных Эрмитом, было изучить новый способ аппроксимации иррациональных величин, к которому пришел Якоби, желая установить невозможность функции, имеющей более двух периодов. Эрмит распространил способ Якоби на более широкий класс иррациональностей. В письмах к Якоби Эрмит впервые изложил идею своего метода непрерывных параметров, применив его к отысканию верхних границ минимумов квадратичных форм и указав другие возможные его применения.

Эрмит одним из первых поставил вопрос об определении границ минимумов квадратичных форм. Пусть задана положительно определенная квадратичная форма от  $n$  переменных

$$f = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki},$$

где  $a_{ik}$  — любые действительные числа. Дискриминантом такой формы называется определитель из коэффициентов формы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будут принимать различные целые рациональные значения (за исключением системы  $0, 0, \dots, 0$ ), то среди значений, принимаемых этой формой  $f$ , будет наименьшее. Оно называется минимумом формы  $f$ . Этот минимум является функцией коэффициентов формы. Если рассмотреть множество всех форм данного дискриминанта  $D$ , которое получается путем непрерывного изменения коэффициентов одной из таких форм, то

<sup>6</sup> Correspondance d'Hermitte et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget avec une préface de Emile Picard. T. 1. Paris, 1905, p. 8.

<sup>7</sup> Jacobi C. G. J. Opuscula mathematica. Bd 1, 1846; Bd 2, 1851; *Hermite Ch. Oeuvres*. T. 1. Paris, 1905, p. 100—163.

будет непрерывно изменяться и минимум, причем он будет один и тот же у всех форм, ей эквивалентных. Этот минимум может при своем изменении достигать одного или нескольких максимумов, соответствующих неэквивалентным формам. Задача состоит в определении верхней границы минимумов положительных квадратичных форм от  $n$  переменных данного дискриминанта  $D$ . Эрмит рассмотрел ряд минимумов для бинарной квадратичной формы

$$(y - ax)^2 + x^2/\Delta$$

при условии, что  $\Delta$  изменяется непрерывно от 0 до  $\infty$ ,  $a$  — некоторое вещественное число. Получаемые при этом значения дроби  $y/x$  составляют множество подходящих дробей для непрерывной дроби, выражающей число  $a$ . Затем тот же вопрос рассматривается для тернарной формы

$$A(x - az)^2 + B(y - bz)^2 + z^2/\Delta,$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые положительные числа,  $a$  и  $b$  — вещественные,  $\Delta$  изменяется непрерывно от 0 до  $\infty$ . Эрмит показывает, что всегда можно сделать так, чтобы было

$$A(x - az)^2 + B(y - bz)^2 < \sqrt[3]{2AB/\Delta},$$

а затем, устремляя  $\Delta$  к  $\infty$ , получить, что при непрерывном возрастании  $\Delta$  ряды дробей  $x/z$ ,  $y/z$  сходятся соответственно к пределам  $a$  и  $b$  и при каждом приближении сумма квадратов ошибок  $x - az$  и  $y - bz$ , умноженных на постоянные  $A$  и  $B$ , будет минимальной (эта формулировка напоминает о методе наименьших квадратов Лежандра — Гаусса).

Затем Эрмит переходит к вопросу о минимумах квадратичных форм с любым числом переменных, указывает одну из верхних границ минимумов квадратичной формы от  $n$  переменных и высказывает гипотезу о точной верхней границе. Он пишет следующее:

«Мои первые исследования в случае формы с  $n$  переменными определителя  $D$  дали мне границу (верхнюю границу минимумов)

$$(4/3)^{(n-1)/2} \sqrt[n]{D};$$

я предполагаю, но не могу доказать, что числовой коэффициент  $(4/3)^{(n-1)/2}$  должен быть заменен на  $2/\sqrt[n]{n+1}$ »<sup>8</sup>.

Эрмит сообщает Якоби ряд других вопросов, решение которых зависит от разыскания минимумов квадратичных форм. При этом он говорит: «Мы снова приходим... к этому странному отысканию всех минимумов квадратичной формы, соответствующих различным системам значений нескольких параметров, про которые надо предположить, что они проходят всевозможные значения. Таков путь, открывающийся перед нами по предыдущему анализу для решения многочисленных вопросов, среди которых я выберу следующий: пусть  $\varphi(\alpha)$  — целое комплексное число, зависящее от корня  $\alpha$  уравнения  $F(x) = 0$  с целыми коэффициентами и коэффициентом при первом члене, равным 1, требуется найти все решения уравнения  $\text{Norme } \varphi(\alpha) = 1$ »<sup>9</sup>.

Поставленный Эрмитом вопрос, эквивалентный нахождению единиц поля  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , был в 1869 г. решен в магистерской диссертации Е. И. Золотарёва для случая конкретного уравнения, бывшего предметом изучения многих математиков, включая Гаусса и Эйзенштейна:

$$x^3 + Ay^3 + A^2z^3 - 3Axyz = 1, \tag{1}$$

<sup>8</sup> *Hermite Ch. Oeuvres*, Т. 1. Paris, 1905, p. 142.

<sup>9</sup> *Ibid.*, p. 146.

где  $A$  — данное целое число, не равное кубу, с помощью метода, идея которого принадлежала Эрмиту.

Метод непрерывных параметров и найденные с его помощью результаты позволили Эрмиту доказать некоторые утверждения теории чисел, в том числе о разложении числа на сумму четырех квадратов, о делителях чисел вида  $a^2 + 1$  и  $x^2 + Ay^2$  и др. Он применял теорию квадратичных форм и форм с сопряженными переменными и к доказательству теорем алгебры. Развитию и применению метода непрерывных параметров были впоследствии посвящены работы Г. Ф. Вороного, Я. В. Успенского и других математиков конца XIX — начала XX вв.

Теория квадратичных форм была предметом исследований многих математиков России. В. Я. Буняковский (1804—1889) посвятил ей несколько статей в «Лексиконе чистой и прикладной математики» (СПб., 1839) и в материалах для продолжения этого словаря, хранящихся ныне в Ленинградском отделении Архива АН СССР. В статье «Смежные виды» (*Contigües (formes)*) он приводит определения из книги Гаусса и рекомендует прочитать V раздел этого труда. В другой неопубликованной статье «Теория видов» (*Formes (Théorie des)*) он кратко формулирует содержание теории форм. В. Я. Буняковский не ограничился пропагандой гауссовской теории. В «Исследованиях о различных новых законах, относящихся к сумме делителей чисел» (*Recherches sur différentes lois nouvelles relatives à la somme des diviseurs des nombres.*— *Mém. Acad. sci. St.-Pétersbourg* (6), sci. math. et phys., 1850, 4) он дает несколько соотношений для представления чисел квадратичными формами. В примыкающей сюда работе «Новый метод в исследованиях, относящихся к представлению чисел квадратичными формами» (*Nouvelle méthode dans les recherches relatives aux formes quadratiques des nombres.*— *Mém. Acad. sci. St.-Pétersbourg* (6), sci. math. et phys., 1853, 5) были приведены представления чисел квадратичными формами частных видов.

Почти одновременно с В. Я. Буняковским теорией квадратичных форм занялся П. Л. Чебышев. В этой области П. Л. Чебышев был последователем Эйлера, Лагранжа, Лежандра, в меньшей степени Гаусса. Он посвятил квадратичным формам VII и VIII главы «Теории сравнений» (СПб., 1849), применив теорию делителей квадратичных форм к разложению чисел на множители. Он показывает, как найти линейные и квадратичные делители квадратичной формы, связывая этот вопрос с возможностью решения двучленного сравнения второй степени по простому модулю. Затем П. Л. Чебышев определяет линейные делители форм  $x^2 + ay^2$  и  $x^2 - ay^2$ , применяя эти исследования к разложению чисел на простые множители.

В статье «О квадратичных формах» (*Sur les formes quadratiques.*— *J. math. pures et appl.* (1), 1851, 16) П. Л. Чебышев показал, что для проверки простоты числа можно пользоваться не только формами с отрицательным, но и формами с положительным дискриминантом. Пусть  $x^2 - Dy^2$  — форма, дискриминант которой  $D > 0$  ( $D = b^2 - ac$ ). Все квадратичные делители этой формы имеют вид  $\lambda x^2 - \mu y^2$ . Пусть  $N$  — число, взаимно простое с  $D$ , линейные делители которого содержатся в квадратичных формах  $f = \pm (x^2 - Dy^2)$ . Тогда  $N$  будет простым в случае, когда для  $x, y$ , заключенных в границах

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{(\alpha \pm 1)N}{2}}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{(\alpha \mp 1)N}{2D}},$$

где  $\alpha$  — наименьшее значение  $x > 1$ , удовлетворяющее уравнению  $x^2 - Dy^2 = 1$ , существует единственное представление  $N$  с помощью форм

$f$  такое, что  $x$  и  $y$  не имеют общего делителя. Во всех остальных случаях  $N$  будет составным. П. Л. Чебышев привел таблицы границ для  $x$ ,  $y$  и линейных представлений числа  $N$  для каждого  $D \geq 33$ , не имеющего квадратичных делителей. Способ Чебышева впоследствии использовал А. А. Марков (см. с. 136).

Вслед за П. Л. Чебышевым, для которого теория квадратичных форм была лишь небольшой областью его разнообразных интересов, этим вопросом занялись его ученики А. Н. Коркин, Е. И. Золотарёв, А. А. Марков.

### Работы А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва по теории квадратичных форм

Первой работой этого направления в творчестве А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва была уже упоминавшаяся магистерская диссертация Е. И. Золотарёва «Об одном неопределённом уравнении третьей степени» (СПб., 1869).

Диссертация состояла из двух частей. В первой из них автор продолжил исследования Эрмита по отысканию верхних границ минимумов квадратичных форм. Для бинарных форм вопрос был решен Лагранжем, для тернарных — Гауссом. Эрмит обобщил исследования Гаусса на случай форм с любым числом переменных и показал, что минимум квадратичной формы с  $n$  переменными меньше, чем  $(\frac{4}{3})^{(n-1)/2} \sqrt[n]{D}$ , где  $D$  — абсолютная величина дискриминанта формы. Кроме того, Эрмит высказал предположение, что указанная верхняя граница не является точной и что ее следует заменить другой:

$$2 \sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}.$$

Е. И. Золотарёв доказал это утверждение для случая  $n = 2$  и показал, что всегда можно выбрать квадратичную форму, минимум которой равен этой границе:

$$2 \sqrt[n]{\frac{D}{n+1}} (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_0 x_1 + x_0 x_2 + \dots).$$

Он дал простое доказательство указанной выше теоремы Эрмита, предложил способ приведения определенных тройничных форм, отличный от способа Гаусса, рассмотрел решение других вопросов, которые также приводятся к определению минимумов квадратичных форм. Е. И. Золотарёв использовал при этом идею Эрмита о применении в теории чисел метода непрерывных параметров и предложил свой способ нахождения всех минимумов квадратичной формы

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 + z^2/\Delta,$$

где  $a$  и  $b$  — данные вещественные числа,  $\Delta$  — переменный параметр. Во второй части диссертации он применил разработанный в первой части метод к решению неопределённого уравнения (1).

Начало совместных исследований А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва, по-видимому, следует отнести ко времени защиты магистерской диссертации Е. И. Золотарёва, где А. Н. Коркин выступил со своими замечаниями. Дальнейшие беседы и размышления привели к появлению их совместных работ.

Прежде чем перейти к их анализу, мы скажем несколько слов о жизни и деятельности А. Н. Коркина.

Александр Николаевич Коркин (1837 — 1908), сын крестьянина, окончил Вологодскую гимназию, потом физико-математический факультет Петербургского университета. По рекомендации П. Л. Чебышева был допущен к преподаванию в университете с октября 1860 г. и работал в нем до конца жизни, с 1868 г. в звании профессора. А. Н. Коркин преподавал также в Морской академии, где в 1900 г. его заменил его же ученик А. Н. Крылов.

Научное творчество А. Н. Коркина относится к трем основным разделам: интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными и теории квадратичных форм. Его первые труды были посвящены уравнениям в частных производных и математической физике. Это относится и к его докторской диссертации «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и некоторых вопросах механики» (СПб., 1864). К тому направлению творчества Коркина примыкают его исследования по математической теории географических карт.

В 1871—1877 гг. А. Н. Коркин совместно с Е. И. Золотарёвым принял исследования по теории квадратичных форм.

В первой совместной работе «О положительных квадратичных формах» (*Sur les formes quadratiques positives quaternaires.* — *Math. Ann.*, 1871) А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв рассмотрели вопрос о нахождении точной верхней границы минимумов для положительных квадратичных форм с четырьмя переменными. Они получили свой результат, основываясь на выводах, сделанных для форм с тремя переменными в магистерской диссертации Е. И. Золотарёва. С помощью унимодулярной подстановки они перешли от формы с четырьмя переменными к форме с тремя переменными: минимум новой формы остается тем же, что и у исходной, и равен первому коэффициенту (в исходной форме он предполагался равным минимуму формы). Вводится в рассмотрение так называемая союзная форма и с ее помощью получается неравенство для первого коэффициента исходной формы:  $a_{11} \leq \sqrt[4]{4D}$ .

Авторы замечают, что эта граница точная, поскольку существует положительная форма, имеющая минимум  $\sqrt[4]{4D}$ , например форма

$$V_4 = \sqrt[4]{4D}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4).$$

Итог этого исследования сформулирован в виде теоремы: «Переменным любой положительной тернарной формы дискриминанта  $D$  можно придать такие целые значения, что значение формы не превзойдет величины  $\sqrt[4]{4D}$ , причем существуют такие формы, минимумы которых равны  $\sqrt[4]{4D}$ »<sup>10</sup>.

Следующая совместная работа А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва относится уже к вопросу о минимумах положительных квадратичных форм от  $n$  переменных дискриминанта  $D$  с любыми вещественными коэффициентами «О квадратичных формах» (*Sur les formes quadratiques.* — *Math. Ann.*, 1873, 6). Авторы рассматривают совокупность всех положительных квадратичных форм от  $n$  переменных дискриминанта  $D$ . Все они могут быть получены из одной из этих форм, когда ее коэффициенты изменяются непрерывным образом. Минимум этой формы непрерывно изменяется, принимая одно и то же значение для всех эквивалентных форм. Вводится

<sup>10</sup> Золотарёв Е. И. Собрание сочинений. Т. 1. Л., Изд-во АН СССР, 1931, с. 68.



А. Н. КОРЖИН

понятие предельной или экстремальной формы, а именно формы, минимумы которой могут только уменьшаться при любых бесконечно малых изменениях коэффициентов, оставляющих неизменным дискриминант.

Здесь авторы убедились, что величина  $2\sqrt[n]{D/(n+1)}$ , указанная Эрмитом, представляет собой минимум экстремальной формы, т. е. точную верхнюю границу для некоторой совокупности форм. Но существуют минимумы, которые эту величину превосходят, т. е. она не будет точной верхней границей для всех форм данного дискриминанта. Точной верхней границей минимумов для всего множества этих форм будет наибольший из минимумов экстремальных форм, заключенных в этой совокупности.

Далее в работе изучаются свойства экстремальных форм от  $n$  переменных. Одно из них таково: экстремальная форма от  $n$  переменных имеет по крайней мере  $n(n+1)/2$  представлений своего минимума (т. е. систем значений переменных, для которых форма принимает минимальное значение).

В статье имеется замечание о неопределенных формах: «Пределы (границы), которые мы рассмотрели выше, полезны также и в теории неопределенных форм... Таким образом, можно получить несколько пределов для значений неопределенных форм, но здесь, как и в теории положительных форм, речь идет об отыскании точных верхних границ. Таким образом, для бинарных неопределенных форм детерминанта  $D$  границей будет  $\sqrt{4D/5}$ . Но в отношении к этим пределам проявляется большое различие между формами неопределенными и определенными. Чтобы показать его

для бинарных форм и границы  $\sqrt{4D/5}$ , мы добавим, что если исключить форму

$$f_0 = \sqrt{4D/5} (x^2 + xy - y^2)$$

и эквивалентные ей формы, то точная верхняя граница для других форм этого детерминанта будет  $\sqrt{D/2}$ <sup>11</sup>.

Для положительных форм А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв предложили специальный способ, названный ими «разложением форм по минимумам», и с его помощью получили для квадратичной формы от  $n$  переменных дискриминанта  $D$  неравенство

$$A = \min f \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2} \sqrt[n]{D},$$

т. е. верхнюю границу минимумов, указанную ранее Эрмитом. С помощью того же разложения по минимумам авторы получают другую границу, более близкую к точной верхней границе, чем у Эрмита. Они устанавливают, что эта граница для  $n = 2, 3, 4$  будет точной, а для  $n = 5$  уже не является точной. Они находят также верхние границы минимумов отдельно для случаев, когда  $n = 2m$  и когда  $n = 2m + 1$ .

Последняя работа А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва по теории квадратичных форм «О положительных квадратичных формах» (Sur les formes quadratiques positives. — Math. Ann., 1877, 11) снова была посвящена вопросу о точных верхних границах минимумов положительных квадратичных форм. В ней авторы изучают основные свойства экстремальных форм и находят все такие формы для  $n = 2, 3, 4, 5$ .

В первой главе рассмотрены формы с любым числом переменных. Если форма задана, то узнать, является ли она экстремальной, можно по способу, который А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв применяют к трем конкретным формам, две из которых  $U_n$  и  $V_n$  зависят от  $n$ , а третья  $Z$  — от пяти переменных. Но если надо найти все экстремальные формы для данного числа переменных, то следует прибегнуть к другим средствам. Они доказывают теорему, сформулированную в статье «О квадратичных формах», о том, что число представлений минимума экстремальной формы не может быть меньше  $n(n+1)/2$ . Если минимум предполагается известным, то эти представления вполне определяют эту форму. Нахождение точной верхней границы минимумов сводится к определению экстремальных форм с наибольшим минимумом. Если будут составлены все экстремальные формы при заданном дискриминанте и данном числе переменных, то задачу можно решить.

Затем А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв переходят к изучению определителей, составленных из чисел, представляющих минимум формы (из «представлений минимума»). Эти определители  $\Delta$  они называют характеристическими. Для формы от  $n$  переменных  $\Delta$  — определитель  $n$ -го порядка. Для всякой экстремальной формы существует по крайней мере один характеристический определитель, отличный от нуля. Для любой положительной формы от  $n$  переменных, число представлений минимума которой  $\geq n$ , абсолютные значения характеристических определителей не превосходят некоторой границы, зависящей только от числа переменных  $n$ . В случае  $n = 2$  это следует из очевидного равенства

$$(u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2) = (uv' - u'v)^2 + (uu' + vv')^2.$$

<sup>11</sup> Золотарёв Е. И. Собрание сочинений. Т. 1. Л., Изд-во АН СССР, 1931, с. 111—112.

Действительно, пусть  $f(x, y)$  — бинарная форма дискриминанта  $D$ , представленная в виде суммы квадратов:

$$f(x, y) = (ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2.$$

Делается двойная подстановка:

$$\begin{aligned} u &= ap_1 + bp_2, & u' &= aq_1 + bq_2, \\ v &= a'p_1 + b'p_2, & v' &= a'q_1 + b'q_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(p_1, p_2) = u^2 + v^2, \quad f(q_1, q_2) = u'^2 + v'^2.$$

Затем находится произведение  $f(p_1, p_2) \cdot f(q_1, q_2)$ :

$$f(p_1, p_2) \cdot f(q_1, q_2) = (ab' - ba')^2 \cdot (p_1q_2 - p_2q_1)^2 + (uu' + vv')^2.$$

Поэтому

$$f(p_1, p_2) \cdot f(q_1, q_2) \geq D\Delta^2,$$

где

$$D = (ab' - ba')^2$$

и

$$p_1q_2 - p_2q_1 = \Delta,$$

и если значения  $f(p_1, p_2)$  и  $f(q_1, q_2)$  равны минимуму  $M$ , то  $M^2 \geq D\Delta^2$ . Но известно, что  $M \leq \sqrt[4]{3D}$ . Следовательно, характеристический определитель  $\Delta \leq \sqrt[4]{3}$  и, поскольку  $p_1, p_2, q_1, q_2$  — целые, получим  $\Delta = 0$  или  $|\Delta| = 1$ . Но  $\Delta = 0$  невозможно (в этом случае было бы  $p_1q_2 - p_2q_1 = 0$ , иначе говоря,  $p_1/p_2 = q_1/q_2$ , и ввиду того, что  $(p_1, p_2) = 1, (q_1, q_2) = 1$ , получилось бы  $p_1 = \pm q_1, p_2 = \pm q_2$  и представления  $(p_1, p_2) = 1, (q_1, q_2) = 1$  не были бы различными). Поэтому  $|\Delta| = 1$ .

Аналогичное рассуждение проводится и для тернарных форм. Основой его служит известная формула Эйлера

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2) &= (pp' - qq' + rr' - ss')^2 + \\ &+ (pq' + qp' - rs' - r's)^2 + (pr' + sq' - qs' - rp')^2 + \\ &+ (ps' + qr' + rq' + sp')^2. \end{aligned}$$

В результате получается  $|\Delta| \leq \sqrt{2}$ , откуда следует, что  $\Delta = 0$  или  $|\Delta| = 1$ . Затем доказательство проведено в общем виде для положительных квадратичных форм от  $n$  переменных. Из полученного при этом неравенства  $|\Delta| \leq \mu$  следует, что 1) для бинарных форм  $|\Delta| = 1$ ; 2) для тернарных форм  $|\Delta| = 1$  или  $\Delta = 0$ ; 3) для кватернарных форм  $|\Delta| = 0, 1, 2$ , причем из работы «О квадратичных формах» известно, что  $|\Delta|$  может быть равен 2 только для формы  $V_4$ . Минимум этой формы равен  $\sqrt[4]{4D}$ . В случае формы с пятью переменными  $|\Delta| = 0, 1, 2$ .

Далее А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв переходят к непосредственному нахождению экстремальных форм на основе установленных результатов. Для этой цели они ищут представления минимума каждой формы. Количество таких представлений равно  $n(n+1)/2$ , и они полностью определяют форму. Эти системы чисел записываются в виде таблицы. Составление одной из таких таблиц разобрано подробно. После этого авторы приступают к отысканию экстремальных форм, характеристические определители которых по абсолютной величине  $\leq 1$ . Оказывается, что все экстремальные формы с  $n$  переменными, характеристические определители которых равны 0, +1 или -1, эквивалентны одной и той же форме  $U_n$ .

В частности, для бинарных форм существует единственная экстремальная форма

$$\sqrt[4]{\frac{1}{3}D} (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2),$$

для тернарных форм — единственная экстремальная форма

$$\sqrt[3]{2D} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Во второй главе статьи рассмотрены формы от четырех переменных. Для них существуют две экстремальные формы

$$2 \sqrt[4]{\frac{D}{5}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

и

$$\sqrt[4]{4D} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \pm x_1x_4 \pm x_2x_4 \pm x_3x_4),$$

отсюда следует, что  $\sqrt[4]{4D}$  — точная верхняя граница минимумов кватернарных форм (причем дано новое доказательство этой теоремы, доказанной в их первой совместной статье). Для пяти переменных получаются три экстремальные формы для данного  $D$  и среди них выбирается форма, минимум которой наибольший. Величина  $\sqrt[5]{8D}$  будет точной верхней границей минимумов форм с пятью переменными.

К. Жордан в работе «Об эквивалентности алгебраических форм» (*Sur l'équivalence des formes algébriques.* — С. г. Acad. sci. Paris, 1879, 88, pt 1) применил метод Коркина и Золотарёва разложения форм по минимумам к доказательству теоремы о конечности числа классов приведенных форм с целыми алгебраическими коэффициентами детерминанта  $D \neq 0$ . Он отметил, что для квадратичных форм от  $n$  переменных подобная теорема была раньше доказана Эрмитом и «замечательно простым способом» — Коркиным и Золотарёвым. Жордан писал о процессе приведения по Коркину и Золотарёву и в более подробном «Мемуаре об эквивалентности форм» (*Mémoire sur l'équivalence des formes.* — *Acta math.*, 1882). Приведение форм по Коркину и Золотарёву применял, занимаясь кубическими тернарными формами, и А. Пуанкаре. В 1933 г. Хофрейтер определил все классы экстремальных форм для  $n = 6$ . Одним из них оказался класс, имеющий минимум  $\sqrt[6]{\frac{64}{3}}$ , указанный Коркиным и Золотарёвым. Блихфельдт в 1934 г. доказал, что

$$\mu(6) = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}, \quad \mu(7) = \sqrt[7]{64}, \quad \mu(8) = 2,$$

использовав метод Коркина и Золотарёва и некоторые соотношения, также установленные ими. Оказалось, что наибольшими значениями минимумов являются минимумы предельных форм, указанные Коркиным и Золотарёвым. Предельные формы для  $n = 6$  нашел также Г. Минковский. Он неоднократно использовал результаты А. Н. Коркина и Е. И. Золотарёва и упоминал их работы. Вопрос об отыскании всех предельных форм в случае любого числа переменных решил Г. Ф. Вороной.

Дополнительные сведения о занятиях Коркина и Золотарёва теорией квадратичных форм дают архивные материалы. В одном из рукописных отрывков А. Н. Коркин находит точные верхние границы минимумов для тройничных квадратичных неопределенных форм. Подобная задача была предложена Коркиным А. А. Маркову и решена последним.

## Исследования А. А. Маркова

Работы А. А. Маркова в области теории чисел в основном относятся к теории неопределенных квадратичных форм с тремя и четырьмя переменными и почти все посвящены нахождению предельных форм данного дискриминанта. Этот вопрос для неопределенных квадратичных форм начали исследовать А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв. Они указали две первые экстремальные формы и обнаружили основное различие между точными верхними границами форм определенных и неопределенных.

В магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» (СПб., 1880) А. А. Марков рассмотрел вопрос о нахождении минимумов для неопределенных бинарных квадратичных форм, а в последующих работах — для форм с тремя и четырьмя переменными. А. Н. Коркин сообщил ему, что  $\sqrt{D/2}$  есть минимум форм, эквивалентных форме  $f_1$ :

$$f_1 = \sqrt{\frac{D}{2}}(x^2 - 2xy - y^2).$$

А. А. Марков установил, что  $\sqrt{100D/221}$  есть точная верхняя граница минимумов всех бинарных форм, не эквивалентных ни  $f_0$  (где  $f_0 = \sqrt{4/5D}(x^2 + xy - y^2)$ ), ни  $f_1$ , и является минимумом форм, эквивалентных форме

$$f_2 = \sqrt{\frac{4D}{221}}(5x^2 - 11xy - 5y^2).$$

Он продолжил этот ряд дальше. С помощью непрерывных дробей он доказал, что если  $l$  — данное число, большее чем  $2/3$ , то имеется лишь конечное число классов форм данного дискриминанта  $D$ , значения которых по абсолютной величине меньше  $l\sqrt{D}$ . При  $l$ , приближающемся к  $2/3$ , число классов форм данного дискриминанта  $D$  бесконечно возрастает.

А. А. Марков применил свой способ отыскания минимумов для решения неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Эти исследования Маркова были продолжены в работах Г. Фробениуса «О приведении неопределенных бинарных квадратичных форм» (*Über die Reduction der indefiniten binären quadratischen Formen.* — *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1913) и «О числах Маркова» (*Über die Markoff'schen Zahlen.* — *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1913) и И. Шура «К теории неопределенных бинарных квадратичных форм» (*Zur Theorie der indefiniten binären quadratischen Formen.* — *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1913).

В начале XX в. А. А. Марков перешел к изучению подобных вопросов для неопределенных форм с тремя и четырьмя переменными. В статье «О неопределенных квадратичных тройничных формах» (*Изв. Петербург. акад. наук* (5), 1901, 14)<sup>12</sup> он смог установить две первые экстремальные формы (одна из которых была указана ему Коркиным) и дать без доказательства третью. Доказательство для нее он привел в работе «О квадратичных неопределенных тройничных формах» (*Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies.* — *Math. Ann.*, 1903, 56). А. А. Марков снова возвратился к этому вопросу в «Таблице квадратичных тернарных неопределен-

<sup>12</sup> Марков А. А. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1951, с. 143—163.

ных форм» (Зап. Акад. наук (8), 1909, 23), где привел без доказательства четвертую экстремальную форму и указал еще две, которые, как впоследствии установил Б. А. Венков<sup>13</sup>, являются шестой и седьмой экстремальными формами. Для форм с четырьмя переменными А. А. Марков нашел две первые экстремальные формы («О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными» — Изв. Петербург. акад. наук (5), 1902, 16, № 3).

В статье «О трех неопределенных тройничных квадратичных формах» (Изв. Петербург. акад. наук (5), 1902, 17, № 2) А. А. Марков рассматривает три квадратичные формы и устанавливает для каждой из них возможность выбора из разных представлений некоторого числа таких представлений, для которых переменные  $x, y, z$  ограничены несколькими неравенствами и потому могут иметь только конечное число различных значений. Для этого он использует выводы из статьи П. Л. Чебышева «О квадратичных формах», свойства символа Лежандра — Якоби, теорему Дирихле об арифметических прогрессиях и доказывает, что форма  $x^2 + xy + y^2 - 2z^2$  может представлять любое нечетное число  $\pm C$ , не делящееся на 3, причем уравнение

$$x^2 + xy + y^2 - 2z^2 = C$$

допускает по меньшей мере одно решение, удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq z \leq \frac{1}{2}(x + y/2), \quad x \geq y \geq 0, \quad x + y/2 \leq \sqrt{2C},$$

а уравнение

$$x^2 + xy + y^2 - 2z^2 = -C$$

допускает по меньшей мере одно решение, удовлетворяющее неравенствам

$$x \geq y \geq 0, \quad x + y/2 \leq z \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}C}.$$

Аналогичные утверждения доказаны и об остальных рассмотренных в этой статье формах.

Глубокий анализ трудов А. А. Маркова произвел Б. Н. Делоне, который дал систематическое геометрическое истолкование результатов Маркова и его последователей<sup>14</sup>.

Тематика А. А. Маркова привлекала и до сих пор привлекает внимание многих исследователей — Морделла, Дэвенпорта, Малера, Зигеля, Делоне и др.

Владимир Андреевич Марков (1871—1897), брат А. А. Маркова, доказал формулы, данные Эйзенштейном без доказательства, для числа классов положительных тройничных квадратичных форм данного определителя в работе «О числе классов положительных тройничных квадратичных форм данного определителя» (Сообщ. Харьк. матем. об-ва (2), 1893, 4). Вторая работа В. А. Маркова «О положительных тройничных квадратичных формах», опубликованная посмертно (СПб., 1897), также связана с трудами Эйзенштейна и посвящена вопросам теории представления чисел формами и теории эквивалентности указанных форм.

Еще до работ В. А. Маркова Е. В. Борисов напечатал сочинение «О приведении положительных тройничных квадратичных форм по способу Зеллинга» (СПб., 1890), где дал критический обзор различных теорий приведения, в том числе теории Э. Зеллинга (1834—1920), упростив

<sup>13</sup> Венков Б. А. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, 9, с. 429—494.

<sup>14</sup> Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947, с. 141—193.

метод этого ученого. Приведению квадратичных положительных  $\bar{k}$ в $\bar{a}$ т $\bar{e}$ р $\bar{n}$ арных форм посвятил свои исследования ученик Эрмита Л. Шарв.

В 1918 г. Л. Морделл в статье «О числе классов определенных квадратичных тернарных форм» (On the class number for definite ternary quadratics. — Messenger of Math., 1918, 47, 65—78) вновь доказал формулы Эйзенштейна. С работой В. А. Маркова автор, по-видимому, не был знаком.

Позднее теорией квадратичных форм в Петербурге занимался Я. В. Успенский (1883—1947), магистерская диссертация которого была посвящена применению метода непрерывных параметров Эрмита. Работы Я. В. Успенского относятся к доказательству формул, устанавливающих зависимости для числа классов положительных бинарных квадратичных форм. Начиная с первых формул такого типа, опубликованных в 1857—1860 гг. Л. Кронекером, исследования в этом направлении велись двумя методами: Кронекера и Эрмита. Оба были аналитическими, хотя часть своих результатов сам Кронекер сумел также найти и арифметическим путем. Другой арифметический способ предложил Ж. Лиувилль. Я. В. Успенский, усовершенствовав метод Лиувилля, арифметически вывел формулы Кронекера и Лиувилля и доказал ряд других результатов, в том числе формулы Гаусса для числа представлений целого числа в виде суммы трех квадратов. Исторический обзор исследований, посвященных выводу формул Лиувилля для числа представлений чисел квадратичными формами, имеется в книге Л. А. Когана <sup>15</sup>.

## 2. ГЕОМЕТРИЯ ЧИСЕЛ

### Начало теории

Первым исследованием по геометрии чисел Б. Н. Делоне <sup>16</sup> справедливо считает статью Ж. Лагранжа «Аналитические решения некоторых задач о треугольных пирамидах» (Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. — Nouv. mém. Acad. sci. Berlin, 1773), где рассмотрены различные свойства тетраэдров, заданных координатами трех вершин, четвертая вершина этих тетраэдров находится в начале координат. Затем можно назвать работы профессора физики университета во Фрейбурге Людвиг Августа Зеебера (1793—1855): статью «Попытка объяснения внутреннего строения твердого тела» (Versuch einer Erklärung des inneren Baues der festen Körper. — Ann. Phys. und Chem., 1824, 76) и книгу «Исследования о свойствах положительных тернарных квадратичных форм» (Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. Freiburg, 1831).

В первой работе Зеебер вслед за известным кристаллографом Аюи изучал разбиение пространства на одинаковые параллелепипеды. Рассмотрение квадрата расстояния между вершинами такого параллелепипеда привело Зеебера к геометрическому истолкованию положительных тройничных квадратичных форм. Автор отмечал, что теория положительных тройничных квадратичных форм оказалась полезным орудием кристаллографии. Его статья была написана именно в связи с кристаллографией которую он преподавал.

<sup>15</sup> Коган Л. А. О представлении целых чисел квадратичными формами положительно-го определителя. Ташкент, «Фан», 1971.

<sup>16</sup> Делоне Б. Н. Работы Гаусса по теории чисел. — В кн.: Карл Фридрих Гаусс. М., Изд-во АН СССР, 1956.

Во второй работе Зеебер рассмотрел теорию приведения положительных квадратичных форм от трех переменных. В специальной заметке об этой книге Гаусс в 1831 г. перечислил основные решенные Зеебером задачи: 1) для каждой данной положительной квадратичной формы найти эквивалентную ей приведенную форму; 2) доказать, что две нетождественные приведенные формы не могут быть эквивалентными или, что то же самое, что в каждом классе имеется лишь одна приведенная форма; 3) решить, содержит ли данная форма другую, неэквивалентную ей; 4) найти все возможные преобразования данной формы в другую, эквивалентную ей или содержащуюся в ней; 5) для данного дискриминанта найти все возможные классы положительных тернарных форм.

Для решения последней задачи Зеебер использовал теорему, в силу которой произведение  $abc$  коэффициентов при квадратах переменных формы

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

не превосходит удвоенного дискриминанта формы  $2D$  (берется абсолютная величина дискриминанта).

В своей заметке Гаусс указал геометрическое истолкование положительной бинарной квадратичной формы

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

где числа  $a, b, c$  — действительные, а  $x, y$  — целые переменные. Это — квадрат расстояния от некоторой точки  $P$  до начала координат. Координаты отсчитываются на осях, образующих угол, косинус которого равен  $b/\sqrt{ac}$ . Поскольку  $x, y$  — целые, то форме  $f(x, y)$  соответствует система точек, расположенных на пересечениях двух систем параллельных линий. Первая система параллельна оси  $Ox$ , вторая — оси  $Oy$ . Линии первой системы располагаются на расстоянии  $\sqrt{a}$  одна от другой, линии второй системы — на расстоянии  $\sqrt{c}$ . Таким образом, вся плоскость оказывается разбитой на одинаковые параллелограммы, а их вершины — точки с координатами, содержащими целое число раз  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{c}$ , — составляют систему точек, называемую точечной решеткой. Абсолютная величина дискриминанта формы  $D = |ac - b^2|$  равна квадрату площади одного элементарного параллелограмма.

Если вместо бинарных рассматривать тернарные формы, то параллелограммы заменяются параллелепипедами, полученными при пересечении трех систем параллельных эквидистантных плоскостей, а их вершины образуют точечную решетку в пространстве. Гаусс замечает, что с помощью этих геометрических представлений можно выяснить значение многих понятий и результатов теории квадратичных форм с двумя и тремя переменными; таким путем «можно выяснить геометрическое значение всех остальных главных моментов теории тернарных форм: свойства одной формы содержатся в другой, представления одного определенного числа или неопределенной формы от двух переменных с помощью тернарной формы...»<sup>17</sup>.

В конце заметки Гаусс предложил свое доказательство (арифметическое) теоремы Зеебера.

Начатые Гауссом геометрические исследования продолжил Лежен-Дирихле. В статье «Исследования о различных приложениях анализа бесконечно малых к теории чисел» (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.* — *J. für Math.*, 1839, 18), говоря о теории бинарных форм, Дирихле упоминает заметку Гаусса о

<sup>17</sup> Gauss C. F. Werke. Bd 2. Göttingen, 1866, S. 194—195.

книге Зеебера и дает геометрическую интерпретацию некоторых результатов, полученных аналитическим путем. С помощью геометрических представлений он решает, например, такую задачу: изображая геометрически

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m \quad (2)$$

(при  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c < 0$  это будет уравнение гиперболы), выбрать из бесчисленного множества решений уравнения (2) одно, удовлетворяющее некоторым условиям. Другая задача: сколько будет внутри и на контуре эллипса, определенного уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma,$$

целых точек, координаты которых  $x$  и  $y$  имеют вид

$$x = 2D_1v + \alpha, \quad y = 2D_1w + \beta \quad (D < 0, \quad D_1 = -D), \quad (3)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v$  и  $w$  — целые. При этом Дирихле пользуется установленной им леммой об асимптотическом выражении числа целых точек, лежащих в области, ограниченной некоторой замкнутой кривой, когда размеры фигуры, ограниченной этой кривой, бесконечно возрастают, причем изменяющаяся кривая остается все время подобной самой себе. Аналогичную задачу он решает и относительно числа целых точек с координатами вида (3), лежащих внутри и на контуре гиперболического сектора.

Видимо, подобные же геометрические соображения позволили Дирихле установить асимптотическую формулу для суммы числа делителей (см. работы «Об определении асимптотических законов в теории чисел» (*Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie.* — Bericht. Verhandl. Akad. Wiss., 1838)<sup>18</sup> и «Об определении средних значений в теории чисел» (*Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie.* — Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1849)<sup>19</sup>). Эту формулу впоследствии усовершенствовал Г. Ф. Вороной.

Наконец, в статье «О приведении положительных квадратичных форм с тремя целыми неопределенными числами» (*Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen.* — J. für Math., 1850, 40)<sup>20</sup> Дирихле обращается к геометрической трактовке теории бинарных и тернарных форм, исходя из замечаний Гаусса о работе Зеебера. Сложность метода Зеебера уже давно побудила Дирихле искать другие методы приведения тернарных форм. В этой статье Дирихле дает геометрическое истолкование результатов Зеебера. Они состоят в следующем: 1) каждая система параллелепипедально расположенных точек может быть составлена таким образом, что у соответствующего элементарного параллелепипеда ребра не больше диагоналей граней и диагоналей самого параллелепипеда; 2) такое расположение точек при заданной системе может быть получено только единственным образом. Иначе говоря, каждый класс форм может иметь только одну приведенную форму.

Дирихле рассматривает тернарную квадратичную положительную форму

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy = F(x, y, z). \quad (4)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — действительные положительные, а комбинации коэффициентов

$$a'^2 - bc, \quad b'^2 - ac, \quad c'^2 - ab, \quad -D = aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c'$$

<sup>18</sup> *Lejeune-Dirichlet G. P. Werke.* Bd 1. Berlin, 1889, S. 351—356.

<sup>19</sup> *Ibid.*, S. 49—66.

<sup>20</sup> *Ibid.*, Bd 2. Berlin, 1897, S. 21—48.

отрицательны. Дискриминант формы  $-D$  отрицателен. Составляется трехгранный угол, косинусы углов которого определяются по формулам

$$\cos \lambda = \frac{a'}{\sqrt{bc}}, \quad \cos \mu = \frac{b'}{\sqrt{ac}}, \quad \cos \nu = \frac{c'}{\sqrt{ab}}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu < 1 \text{ для } D > 0.$$

Из двух углов каждый раз выбирается тот, который описывается справа налево (если смотреть в направлении к началу координат). Грани трехгранного угла рассматриваются как оси координат. На первой оси откладывается отрезок  $\sqrt{a}$ , на второй — отрезок  $\sqrt{b}$ , на третьей — отрезок  $\sqrt{c}$ . Тогда форма (4) будет представлять квадрат расстояния точки  $P(x\sqrt{a}, y\sqrt{b}, z\sqrt{c})$  от начала координат. Если  $x, y, z$  принимают только целые значения, не равные одновременно нулю, получится система точек, образованных пересечением трех систем параллельных эквидистантных плоскостей. Дирихле подробно рассматривает преобразование формы (4) с помощью линейной замены переменных

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', & y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z' \end{aligned} \quad (5)$$

с целыми коэффициентами и определителем системы

$$E = \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'',$$

не равным 0. Геометрическим изображением новой формы  $F_1(x', y', z')$  будет система точек, расположенных на пересечении трех систем плоскостей, параллельных и находящихся друг от друга на расстоянии  $\sqrt{a'}$  (для первой системы),  $\sqrt{b'}$  (для второй),  $\sqrt{c'}$  (для третьей). За начало координат можно взять произвольную точку системы точек. Совместим начало координат новой системы с началом координат первоначальной. Линейная замена позволяет получить систему точек, совпадающую с первоначальной или симметричную ей. Это зависит от знака  $E$ . Если коэффициенты в (5) целые, а определитель  $E = \pm 1$ , то новая система точек также будет целочисленной. Если  $E = +1$ , то новая система может быть совмещена с первоначальной, т. е. собственно эквивалентным формам соответствуют системы параллелепипедально расположенных точек, которые могут быть совмещены.

Затем Дирихле рассматривает случай бинарных форм и также устанавливает, что собственно эквивалентные формы имеют системы точек, которые могут быть совмещены с помощью движения без вращения в плоскости. В случае несобственной эквивалентности форм одну из систем надо повернуть. Он выясняет, что у эквивалентных форм с двумя и тремя переменными элементарные фигуры (параллелограммы и параллелепипеды) имеют одинаковую площадь (объем). Это связано с тем, что при линейной замене с целыми коэффициентами и определителем  $E = \pm 1$  дискриминанты форм по абсолютной величине равны.

Дирихле рассматривает систему целых точек («точечную решетку»), соответствующую бинарной квадратичной форме  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , и доказывает, что такая система всегда может быть разбита на элементарные параллелограммы, у которых стороны не больше, чем диагонали. Такой элементарный параллелограмм называется приведенным. Точки системы всегда лежат попарно на равных расстояниях и в противоположных направлениях от центра  $O$ . Пусть  $P$  — точка одной из таких пар, для ко-

торой расстояние от  $O$  меньше, чем для любой другой пары. Если таких ближайших точек несколько, выбираем любую из них. Затем берется следующая точка системы  $Q$ , ближайшая к  $O$ , после  $P$  (если таких несколько, выбираем любую). Получается параллелограмм  $POQR$  (рис. 7), в котором по построению  $OP \leqq OQ$ ,  $OQ \leqq OS = PQ$ ,  $OQ \leqq OR$ . Это — приведенный параллелограмм. Обозначим  $OP = \sqrt{a}$ ,  $OQ = \sqrt{c}$ , так что  $a \leqq c$ .

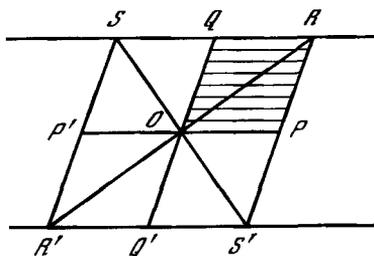


Рис. 7

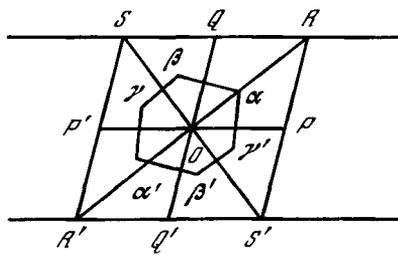


Рис. 8

Таким образом, минимальное расстояние точек системы от начальной точки  $O$  равно  $\sqrt{a}$ , второй минимум будет  $\sqrt{c}$ . Если обозначить  $\cos POQ = b/\sqrt{ac}$ , где  $b \geqq 0$ , то  $(PQ)^2 = a - 2b + c \geqq c$ , и, значит,  $2b \leqq a$ ,  $2b \leqq c$ ,  $4b^2 \leqq ac$ . Если обозначить квадрат высоты параллелограмма  $k$ , то для квадрата площади параллелограмма получится выражение

$$\Delta = ak = ac - b^2 \geqq \frac{3}{4} ac$$

и, следовательно,

$$h = \sqrt{k} \geqq \frac{1}{2} \sqrt{3c}.$$

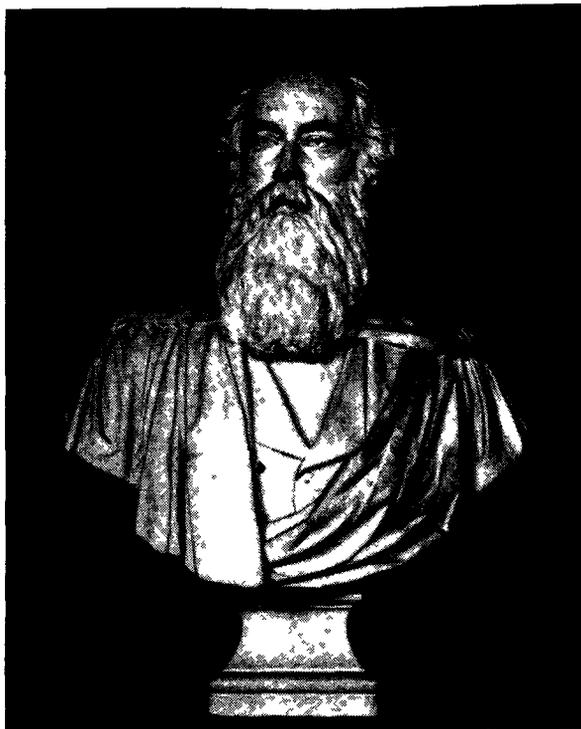
Таким образом, расстояние между параллельными линиями  $OP$  и  $QR$  больше или равно  $\sqrt{3c}$ . Иными словами, от прямой  $OP$  вторая параллельная линия  $QR$  удалена по крайней мере на  $\sqrt{3c}$ . При других расположениях стороны приведенного параллелограмма всегда имеют значения  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{c}$ .

Дирихле решил и задачу другого рода. Задана плоская решетка и указана точка  $O$  этой решетки. Требуется определить часть плоскости, внутри которой каждая точка ближе к точке  $O$ , чем к любой другой точке решетки. Такой фигурой оказывается шестиугольник  $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$  (рис. 8). Каждая точка внутри этого шестиугольника лежит ближе к точке  $O$ , чем к любой другой точке решетки.

Затем Дирихле переходит к решению аналогичной задачи для системы третьего порядка (трехмерной решетки): к построению приведенного элементарного параллелепипеда, все ребра которого меньше его диагоналей и диагоналей граней. Он строит последовательные минимальные расстояния от начальной точки и выбирает оси координат на трех последовательных минимумах. Затем полученные геометрические результаты переносятся на квадратичные формы: приведенная квадратичная форма соответствует приведенному параллелепипеду и т. д. В конце Дирихле применяет геометрический метод к доказательству «прекрасной теоремы Зеебера», аналитическое доказательство которой раньше дал Гаусс<sup>21</sup>.

Геометрический метод Гаусса — Дирихле был в дальнейшем подробно изложен в «Отчетах по теории чисел» Г. Дж. С. Смитом, а позднее был использован и изучен Ф. Клейном и развит Г. Минковским и Г. Ф. Вороным.

<sup>21</sup> Доказательства теоремы Зеебера были даны и другими математиками, в том числе Эрмитом, Коркиным и Золотарёвым. Е. И. Золотарёв доказал ее в магистерской диссертации «Об одном неопределенном уравнении третьей степени» (1869), а А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв — в работе «О квадратичных формах» (1873).



Г. СМИТ

### Работы Г. Дж. С. Смита

Генри Джон Стефен Смит (1826—1883), сын ирландского адвоката, получил образование в Оксфордском университете и после его окончания в 1850 г. был назначен преподавателем, а в 1860 г. — профессором. Смит обладал редкими способностями к языкам и большим математическим талантом. Это поставило его перед выбором: что избрать для преподавания — математику или классическую филологию. Он остановился на первой.

Смит был одним из активнейших членов Лондонского математического общества и многократно участвовал в заседаниях Британской ассоциации содействия прогрессу наук. Именно перед этой ассоциацией он выступал в 1859—1865 гг. с «Отчетами по теории чисел», в которых дал полное и систематическое описание истории теории чисел от Лежандра (1798) и Гаусса (1801) до 60-х годов XIX в. Кроме того, в статье «О настоящем состоянии и перспективах некоторых областей чистой математики» (1876) он продолжил обзор истории теории чисел до 1876 г. (см. с. 247). Эти работы Смита содержат, среди прочего, хорошее изложение теории квадратичных форм, включая геометрические методы, и ряда крупных результатов Чебышева, Коркина и Золотарёва.

Смиту принадлежат работы по теории квадратичных форм, по теории эллиптических функций, геометрии и другие. В этих сочинениях имеются интересные результаты.

В 1883 г. Парижская академия наук присудила премию за сочинение на тему «Теория разложения целых чисел на сумму пяти квадратов» двум претендентам: Смигу и студенту Кёнигсбергского университета Г. Минковскому. Смит не дожидаясь нескольких дней до получения известия о премии: ее присудили 26 февраля, а Смит скончался 9 февраля. Для восемнадцатилетнего Минковского эта работа была началом его научной карьеры. Фактически этот вопрос был решен Смитом еще в 1867 г. В статье «О порядках и родах квадратичных форм» (*On the orders and genera of ternary quadratic forms.* — *Philos. Trans.*, 1867) он показал, что различные теоремы Якоби, Эйзенштейна и Лиувилля относительно разложения числа на сумму четырех квадратов и другие простые квадратичные формы можно вывести единообразно из принципов, изложенных в этой статье. Основные теоремы для случая представления числа суммой пяти квадратов были даны Эйзенштейном в «Новых теоремах высшей арифметики» (*Neue Theoreme der höhere Arithmetik.* — *J. für Math.*, 1847, 35), но он рассмотрел только числа, не делящиеся на квадраты. В связи с этим в следующей работе «О порядках и родах тернарных квадратичных форм, содержащих более чем три неопределенных» (*On the orders and genera of ternary quadratic forms containing more than three indeterminates.* — *Proc. Roy. Soc.*, 1867, 16) Смит дополнил исследование Эйзенштейна и тем самым дал полное доказательство для случая пяти квадратов. Кроме того, он добавил также соответствующие теоремы и для случая семи квадратов.

Работы Смита не пользовались широкой известностью на континенте, и парижские академики не знали о них до объявления конкурса, а узнав, предложили Смигу дать изложение его доказательства и тем самым принять участие в конкурсе.

### Геометрия чисел Г. Минковского

Герман Минковский (1864—1909) родился в Алексотах, в России (сейчас это место относится к Литовской ССР), но еще в детстве с родителями переехал в Кёнигсберг. Пятнадцати лет он окончил местную гимназию, затем обучался в университетах Кёнигсберга и Берлина у Гельмгольца, Гурвица, Линдемана, Кронекера, Куммера, Г. Вебера, Вейерштрасса, Кирхгофа и др. Начиная с 1881 г. он занялся теорией квадратичных форм в связи с подготовкой статьи на упомянутый выше конкурс Парижской академии наук. Работа произвела на жюри, в которое входили Эрмит, Бертран, Бонне, Буке и докладывавший о ней Жордан, столь сильное впечатление, что автору простили даже то, что вопреки правилам работа была написана по-немецки.

К этому времени Минковский владел разнообразными методами теории чисел, такими, как ряды Дирихле и тригонометрические суммы Гаусса. Он глубоко изучил труды обоих ученых, а также Эйзенштейна. Исходным пунктом его первой работы была мысль, что разложение числа на сумму пяти квадратов должно зависеть от квадратичных форм с четырьмя переменными подобно тому, как разложение числа на сумму трех квадратов в доказательстве, данном Гауссом, зависит от квадратичных форм с двумя переменными.

Минковский рассмотрел квадратичные формы от  $n$  переменных, изложил основные понятия и определения теории таких форм. Он обобщил прием Гаусса, исследовав представление форм с меньшим числом переменных формами с большим числом переменных. Из общей теории уже просто получилось решение конкурсной задачи. Изучив статьи Эрмита в журнале Крелле и «Заметку о приведении положительных кватернарных квадра-

тичных форм» (Note sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires.— Ann. Ecole Norm., 1882, 11) ученика Эрмита Л. Шарва, Минковский изложил свои соображения в статье «О приведении квадратичных положительных кватернарных форм» (Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires.— С. r. Acad. sci. Paris, 1883, 96)

Основываясь на исследованиях Эрмита, Смита, Пуанкаре, Минковский публикует статьи по теории квадратичных положительных форм с любым числом переменных. Эти труды послужили темой его докторской диссертации, защищенной в Кёнигсбергском университете в 1885 г. Одним из тезисов диссертации была идея: основать математические исследования на пространственном представлении квадратичной формы.

С 1885 г. Минковский преподавал в Кёнигсберге, в 1887 г. переехал в Бонн. В 1892 г. он становится экстраординарным, а в 1894 г. ординарным профессором. В 1895 г. он заменил своего товарища по университету и друга Д. Гильберта (переехавшего в Гёттинген) в Кёнигсберге. Проведя здесь два года, Минковский в 1896 г. принял приглашение в Политехникум в Цюрихе, а с осени 1902 г. и до конца жизни был профессором Гёттингенского университета.

Статья «О положительных квадратичных формах и об алгоритме, подобном алгоритму непрерывных дробей» (Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithme. — J. für Math., 1894, 107) открывает цикл исследований Минковского по геометрии чисел. Занимаясь проблемой приведения квадратичных форм с любым числом переменных, он убедился, что эта задача, так же как и другие вопросы теории квадратичных форм, приобретает при изучении ее геометрическими методами удивительную простоту и ясность. Вслед за Гауссом и Дирихле Минковский рассматривает числовые решетки<sup>22</sup>, обобщая этот образ на случай любого числа переменных. К этому понятию он присоединяет другое. Для положительной бинарной формы

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (6)$$

с положительными коэффициентами  $a, b, c$  геометрическим образом будет эллипс. Выражение «форма (6) принимает значение  $m$  при целых  $x = p, y = q$ » означает, что эллипс проходит через точку  $(p, q)$ . Для положительной квадратичной формы от трех переменных  $F(x, y, z)$  с дискриминантом, равным единице, уравнение

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + a'xz + b'yz + c'xy = m,$$

где  $m = \text{const} > 0$ , геометрическим образом имеет эллипсоид с центром в начале координат. Минковский исходит из одной общей геометрической леммы. В двумерном случае лемма Минковского утверждает, что область  $R$  плоскости  $xOy$  всегда содержит точку  $(p, q)$  с целыми координатами, отличную от начала координат, если эта область удовлетворяет следующим условиям:

1) область  $R$  симметрична относительно начала координат, т. е. вместе с точкой  $(x, y)$  содержит и точку  $(-x, -y)$ ;

2) область  $R$  выпукла, т. е. если  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  — две какие-либо точки области  $R$ , то и весь отрезок

<sup>22</sup> Ф. Клейн также рассматривал точечные решетки. Но он сам писал о том, что «в свое время ограничивался тем, что геометрически пояснял известные уже положения теории чисел, в то время как Минковский применял геометрический метод для получения новых результатов». См. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.— Л., 1937, с. 375.



Г. МИНКОВСКИЙ

$$[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

соединяющий эти точки, также содержится в  $R$ ;

3) площадь  $R$  больше 4.

Условиям 1) и 2) удовлетворяет любой эллипс  $F(x, y) \leq t$ , а при  $mt > 4\sqrt{D}$ , где  $D$  — абсолютная величина дискриминанта  $D_1$  формы  $F(x, y)$ , он удовлетворяет и условию 3). По словам Касселса, «вся геометрия чисел базируется на теореме («лемме Минковского») о выпуклом теле»<sup>23</sup>. В общем виде она формулируется так: всякое выпуклое тело, имеющее центр в начале координат параллелепипедальной системы точек, объем которого больше чем в  $2^n$  раз (если пространство  $n$ -мерное) превышает объем основного параллелепипеда системы, содержит внутри себя, кроме центральной, по крайней мере еще хотя одну другую точку системы.

С помощью этой леммы Минковский доказал, например, что существует верхняя граница минимумов положительной квадратичной формы от  $n$  переменных данного дискриминанта  $D$ :

$$M < A(n) \sqrt[n]{D}, \tag{7}$$

где

$$A(n) = \frac{4}{\pi} \left( \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right)^{2/n},$$

---

<sup>23</sup> Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М., «Мир», 1965, с. 11—13.

а  $M$  — минимум формы. Эта оценка была получена Минковским в результате геометрического соображения, которое можно, грубо говоря, представить так: если в закрытый ящик насыпаны твердые, не входящие друг в друга шарики, то общий объем, занимаемый шариками, будет меньше, чем объем ящика, так как между шариками еще остается свободное пространство, и уж во всяком случае не больше его <sup>24</sup>.

Об истории своих исследований по геометрии чисел сам Минковский говорил, что они начались с чтения им 40-го тома журнала Крелле, где печатались письма Эрмита к Якоби, в которых была сформулирована теорема Эрмита о верхних границах минимумов квадратичных форм, и статья Дирихле «О приведении положительных квадратичных форм с тремя неопределенными числами». Сопоставив эти статьи, Минковский решил представить утверждение Эрмита геометрически. Впоследствии он обнаружил, что это свойство эллипсоидов основано на том, что эллипсоид — выпуклая поверхность с центральной точкой, и получил таким образом плодотворный принцип, который применил затем к различным выпуклым телам. При этом неравенство (7) представляло результат более точный, чем у Эрмита (см. с. 127).

В статье «О положительных квадратичных формах» (*Über positive quadratische Formen. — J. für Math., 1886, 99*) Минковский рассмотрел минимумы таких форм с 2, 3, 4, 5 переменными, ввел понятие «граничной формы», а прочитав статьи Коркина и Золотарёва, убедился, что «классы этих граничных форм тождественны с «экстремальными формами», которые гг. Коркин и Золотарёв ввели в своих интересных статьях в 6-м и 11-м томах *Mathematische Annalen*. Под этим понимаются положительные формы, обладающие свойством, что их минимум убывает, когда коэффициенты претерпевают бесконечно малые изменения, не увеличивающие детерминанта формы. Новая связь этих форм с наибольшим минимумом специфична для метода приведения г. Эрмита» <sup>25</sup>.

Минковский называет Коркина и Золотарёва и во многих других случаях, например в статье «О положительных квадратичных формах и об алгоритмах, подобных алгоритмам непрерывных дробей»: «Новые точки зрения открыли Коркин и Золотарёв, причем они привлекли такие специальные формы и полностью определили их до числа переменных, равного 5, для которых упоминаемое в основной теореме Эрмита отношение (минимума, достигаемого для целых чисел, к корню  $n$ -й степени из детерминанта) есть максимум» <sup>26</sup>. Именно здесь Минковский геометрически доказал, что минимум квадратичной положительной формы от  $n$  переменных  $M$  удовлетворяет неравенству (7), и, используя асимптотическое выражение для гамма-функции, нашел оценку

$$M < \frac{2n}{\pi e} \sqrt[n]{n! e^{1/3n}} \sqrt[n]{D},$$

где  $2/\pi e \approx 0,234$ . Из своей леммы Минковский получил множество результатов, относящихся к теории алгебраических единиц, теореме о конечности числа классов целочисленных квадратичных форм с данным дискриминантом, приближению нескольких вещественных величин с помощью рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, теории непрерывных дробей и ее обобщениям и пр.

В 1896 г. Минковский издал книгу «Геометрия чисел» (*Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1896*), в которой систематизировал полученные им резуль-

<sup>24</sup> Делоне Б. Н. Герман Минковский. — УМН, 1936, вып. 2, 34—35.

<sup>25</sup> *Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. Bd 1. Leipzig—Berlin, 1911, S. 156.*

<sup>26</sup> *Ibid., S. 245.*

таты. Французское резюме этого труда имеется в его письме к Эрмиту, которому и была посвящена книга <sup>27</sup>.

В ряде последующих статей Минковский применяет результаты к разным областям теории чисел. В частности, он обобщает и уточняет неравенства Чебышева и Эрмита. П. Л. Чебышев в статье «Об одном арифметическом вопросе» (1866) доказал, что существует бесконечно много пар целых чисел  $x$ ,  $y$ , удовлетворяющих неравенству

$$|x - ay - b| < \frac{1}{2|y|}.$$

Эрмит (J. für Math., 1880, 88) установил, что

$$|x - ay - bz| \leq \sqrt{\frac{2}{27}} \frac{1}{|yz|}, \text{ откуда } |x - ay - b| \leq \sqrt{\frac{2}{27}} \frac{1}{|y|}.$$

В монографии «Диофантовы приближения» (Diophantische Approximationen. Leipzig, 1907) Минковский показал, что существует бесконечно много целых чисел  $x$ ,  $y$ , для которых

$$|(\alpha x + \beta y - \xi_0)(\gamma x + \delta y - \eta_0)| < 1/4,$$

где  $\xi_0, \eta_0$  — произвольные заданные числа,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi_0, \eta_0$  полагаются действительными, а в случае, когда определитель  $\varepsilon = |\alpha\delta - \beta\gamma| \neq 1$ , правую часть неравенства надо умножить на  $|\varepsilon|$ , причем имеется в виду, что  $|\varepsilon| \neq 0$ . Основой этой монографии послужили лекции, читанные Минковским в Гёттингене в 1903—1904 гг., записанные и обработанные А. Аксером. Здесь более четко и подробно, со многими чертежами изложены основы геометрии чисел и ее применения.

От геометрии чисел Минковский перешел к геометрии выпуклых тел, к теории многогранников; он живо интересовался также вопросами механики и физики. Ему принадлежит чрезвычайно важная интерпретация кинематики специальной теории относительности, основанная на синтезе отдельных ранее понятий пространства и времени в единое четырехмерное пространственно-временное многообразие с гиперболической метрикой (1909).

Другим ученым, весьма успешно работавшим в области геометрии чисел, был Г. Ф. Вороной.

### Труды Г. Ф. Вороного

Георгий Федосьевич Вороной (1868—1908) родился в семье профессора русской словесности Нежинского лицея. Окончив гимназию в Прилуках, в 1885 г. поступил в Петербургский университет. Еще в школьные годы он написал свою первую статью по алгебре, напечатанную в «Журнале элементарной математики» (1885). Тогда же он сделал попытку решить в целых числах неопределенное уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 2mxyz$ , где  $m > 0$  — заданное натуральное число, но скоро понял, что задача слишком сложна.

В студенческие годы Г. Ф. Вороной исследовал свойства чисел Бернулли и доложил об одном своем открытии в этой области на заседании математического кружка, которым руководил А. А. Марков. В 1889 г. он представил исследование о числах Бернулли в качестве кандидатского сочинения, которое было напечатано в 1890 г. По рекомендации Маркова, Корки-

<sup>27</sup> *Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. Bd 1. Leipzig—Berlin, 1911, S. 266—270.*

на и других профессоров он был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию.

Первые работы Вороного были посвящены теории алгебраических чисел, которой в то время много занимались петербургские математики. Г. Ф. Вороной приступает к поискам обобщения алгоритма непрерывных дробей в применении к кубическим иррациональностям. Квадратичные иррациональности, по Лагранжу, раскладываются в бесконечную периодическую непрерывную дробь. Требовалось найти периодический алгоритм для кубических иррациональностей. Этим вопросом занимались Якоби, Лежен-Дирихле и другие известные ученые.

В магистерской диссертации «О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени» (СПб., 1894) Г. Ф. Вороной установил вид целых алгебраических чисел, зависящих от корня неприводимого уравнения третьей степени  $\rho^3 = r\rho + s$ . А. А. Марков ранее рассмотрел числа, зависящие от корня уравнения  $\rho^3 = s$ . Г. Ф. Вороной взял более общий случай. Решение всех вопросов в диссертации основано на исследовании решений сравнений третьей степени по простому и составному модулю. При этом вводятся «комплексные числа по модулю  $p$ », т. е. числа вида  $X + Yi$ , где  $i$  обозначает мнимое решение сравнения  $i^2 \equiv N \pmod{p}$ ,  $p$  — простое число,  $N$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ .

После защиты магистерской диссертации Г. Ф. Вороной получил профессуру в Варшавском университете, где работал за исключением годичного перерыва до конца жизни.

В докторской диссертации «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» (СПб., 1896), защищенной в 1897 г., Г. Ф. Вороной дает обобщение непрерывных дробей, которое в приложении к числам, зависящим от корня уравнения третьей степени, обладает свойством периодичности и может служить для отыскания основных единиц и решения других задач этой теории.

Якоби, развивая идеи Эйлера, установил свой алгоритм для одновременного приближения к двум действительным числам дробями  $M_k/N_k$ ,  $M'_k/N'_k, \dots$ , где  $M_k, N_k, \dots$  — обыкновенные целые числа. Он применил свой алгоритм к целым алгебраическим числам, зависящим от корня уравнения третьей степени, и на частных примерах обнаружил его периодичность. Имелись и другие обобщения непрерывных дробей (Дирихле, Эрмита, Кронекера), но до возможности их практического применения было еще далеко. Применяя алгоритм Якоби к формам, коэффициенты которых алгебраические числа, зависящие от корней неприводимого уравнения третьей степени, Г. Ф. Вороной заметил, что в некоторых случаях полученные при этом формы периодически повторяются. Возник вопрос: всегда ли в результате применения алгоритма Якоби получаются периодически повторяющиеся формы.

Он предложил новое обобщение непрерывных дробей, основанное на понятии относительных минимумов решетки. Пусть в пространстве размерности  $n = k + 2m$  (над полем действительных чисел) точки характеризуются  $k$  действительными и  $m$  комплексными координатами. В этом пространстве задана  $n$ -мерная решетка, не имеющая точек на координатных подпространствах. (Г. Ф. Вороной, по-видимому, рассуждал геометрически, но излагал в алгебраических терминах, называя проекции точек на координатные оси и плоскости ковариантными формами.) Относительный минимум — это такая точка решетки с координатами  $(x_1^0, \dots, x_k^0, \xi_{k+1}^0, \dots, \xi_m^0)$ , что решетка не имеет точек с меньшими по модулю координатами. Для каждого относительного минимума естественно определяются



Г. Ф. ВОРОНОЙ

соседние минимумы в направлении действительных осей или комплексных плоскостей. Г. Ф. Вороной рассмотрел три случая: 1)  $k = 2$ ,  $m = 0$  (действительные квадратичные поля); 2)  $k = 1$ ,  $m = 1$  (кубические поля отрицательного дискриминанта); 3)  $k = 3$ ,  $m = 0$  (кубические поля положительного дискриминанта). Для случая 1) отыскание соседнего относительного минимума осуществляется при помощи алгоритма непрерывных дробей. В случаях 2) и 3) Г. Ф. Вороной предлагает алгоритмы для вычисления соседних относительных минимумов. В применении к решеткам в кубических расширениях поля рациональных чисел алгоритмы оказываются периодическими и с их помощью удастся дать алгоритмическое решение задачи об эквивалентности двух идеалов и о вычислении единиц — задач, которые для действительных квадратичных полей решаются с помощью алгоритма непрерывных дробей. В более трудном из двух случаев кубического расширения — вполне вещественном — построение основных единиц получается на основе глубокого изучения конфигурации относительных минимумов, которая в отличие от двух других в этом случае довольно сложна.

За обе диссертации в 1896 г. Петербургская академия наук присудила Г. Ф. Вороному премию им. Буняковского, в 1907 г. он был избран членом-корреспондентом. В последние пять лет своей недолгой жизни Г. Ф. Вороной занимался исследованиями главным образом в двух областях: теории квадратичных форм и аналитической теории чисел.

В 1907—1909 гг. был опубликован большой труд Г. Ф. Вороного «Новые приложения непрерывных параметров к теории положительных квадра-

тичных форм» (*Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.* — *J. für Math.*, 1907, 133; 1908, 134; 1909, 136), в котором он уже использовал геометрический аппарат<sup>28</sup>.

В первой части этого сочинения «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм» (*Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites.* — *J. für Math.*, 1907, 133) Г. Ф. Вороной с новой точки зрения продолжил исследование Коркина и Золотарёва, положив в основу свойство предельных форм определяться представлениями своего минимума. А именно, Г. Ф. Вороной назвал совершенными формы, обладающие этим свойством. Таким образом, каждая предельная форма совершенна, но не всякая совершенная форма является предельной. Совершенные формы Г. Ф. Вороной связал с гранями некоторого бесконечного многогранника в конусе положительных квадратичных форм. Далее он доказал, что неэквивалентных граней, а с ними и неэквивалентных совершенных форм, имеется лишь конечное число, и дал алгоритм перехода от любой грани к соседним. Тем самым был построен алгоритм (к сожалению, чрезвычайно трудоемкий) для построения всех неэквивалентных совершенных форм, а с ними и всех предельных форм в смысле Коркина — Золотарёва.

Во второй части того же труда, озаглавленной «Исследования о примитивных параллелоэдрах» (*Recherches sur les paralléloèdres primitifs.* — *J. für Math.*, 1908, 134; 1909, 136), Г. Ф. Вороной связывает с решеткой, определяющей класс положительных квадратичных форм, ее «область Дирихле — Вороного», т. е. множество точек пространства, более близких к данному узлу решетки, чем ко всем остальным. Эти области оказались многогранниками. Очевидно, один из них при всех параллельных переносах на векторы решетки дает заполнение пространства. Многогранники, обладающие этим свойством, Г. Ф. Вороной назвал параллелоэдрами. Оказалось, что существует при данном  $n$  конечное число типов параллелоэдров, и он дал алгоритм для построения всех типов примитивных («общего положения») параллелоэдров. Эти исследования Г. Ф. Вороного в известной степени связаны с трудами русского кристаллографа Евграфа Степановича Фёдорова, который в «Началах учения о фигурах» (СПб., 1885) изучил параллелоэдры обыкновенного евклидова пространства.

У Г. Ф. Вороного имеются важные результаты и по теории неопределенных квадратичных форм. Они были опубликованы лишь посмертно в его «Собрании сочинений» (Киев, 1952 — 1953), причем, по мнению издателей этого собрания, они составляют лишь небольшую часть того, что он сделал в этой области.

Б. А. Венков сравнил характер исследований Г. Минковского и Г. Ф. Вороного по теории квадратичных форм. Он заметил, что геометрическую формулировку теоремы Эрмита о верхней границе минимума положительной квадратичной формы с вещественными коэффициентами и целыми значениями переменных, не равных нулю одновременно, дал Минковский, который рассматривал эту задачу как задачу дискретной геометрии плотнейшего расположения  $n$ -мерных шаров. «Однако такая интерпретация, хоть и не оставляет желать лучшего в смысле простоты и наглядности, не дает никаких средств продвинуть решение задачи далее, чем это сделано, например, Коркиным и Золотарёвым, т. е. для  $n > 5$ . В рассматриваемом мемуаре «Новые приложения непрерывных парамет-

<sup>28</sup> Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени. М.—Л., 1940. В этой книге дано геометрическое изложение диссертации Г. Ф. Вороного.

ров к теории положительных квадратичных форм» Вороной, употребляя геометрию в пространстве коэффициентов формы, дает алгоритмическое решение задачи для любого  $n$ .

Работы Вороного по смелости мысли (для тогдашнего состояния геометрии), вместе с тем по органической простоте и естественности конструкции представляют новый и важный шаг в решении задачи о минимумах положительной квадратичной формы»<sup>29</sup>.

Магистерская диссертация Я. В. Успенского «Некоторые приложения непрерывных параметров в теории чисел» (СПб., 1910) была связана с исследованиями Вороного и Минковского и посвящена приложениям принципа Эрмита к разным вопросам теории чисел.

Изучение теории квадратичных и других однородных форм успешно продолжалось и в XX в. в различных направлениях. Рассматривались более общие классы форм, определенных и неопределенных, давались новые доказательства известных результатов, более точные оценки и т. д. Новое элементарное доказательство формул Дирихле (для ряда случаев) принадлежит Б. А. Венкову. Геометрию чисел успешно развивали в Советском Союзе Б. Н. Делоне, Б. А. Венков, А. З. Вальфиш и их ученики. За рубежом многочисленные результаты в области теории однородных форм и в области геометрии чисел были получены Морделлом, Дэвенпортом, Малером, Г. Вейлем, Хофрейтером, Оппенгеймом, Касселсом, Коксмой и другими математиками<sup>30</sup>.

Г. Ф. Вороной занимался также вопросами аналитической теории чисел. Он напечатал две статьи по аналитической теории чисел и прочитал доклад на Международном математическом конгрессе в Гейдельберге в 1904 г. Дополнительные сведения о занятиях Вороного аналитическими методами теории чисел дают его рукописные материалы.

Главный результат его статьи «Об одной задаче из теории аналитических функций» (*Sur un problème du calcul des fonctions analytiques.* — *J. für Math.*, 1903, 126) — улучшение остаточного члена в асимптотической формуле Дирихле для суммы  $\sum_{k \leq n} \tau(k)$ , где  $\tau(k)$  — число делителей  $k$ .

Для этой цели Г. Ф. Вороной использовал геометрические соображения, специальные последовательности чисел, представляющие собой видоизменение рядов Фарея, формулу суммирования Н. Я. Сонина. К этому исследованию примыкают первые труды ученика Вороного по Варшавскому университету Вацлава Серпинского (1882—1969), ставшего впоследствии крупнейшим польским математиком, и академика И. М. Виноградова.

Во второй статье «Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов» (*Sur une fonction transcendente et ses applications à la sommation de quelques séries.* — *Ann. Ecole Norm.*, III sér., 1903, 20) Г. Ф. Вороной впервые применил в теории чисел функции Бесселя.

Рукописи Вороного показывают, что он занимался также теорией дзета-функции Римана, суммированием рядов, зависящих от простых чисел, и другими вопросами.

<sup>29</sup> Венков Б. А. К работе «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм». — В кн.: Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с. 379.

<sup>30</sup> Подробный обзор результатов в области геометрии чисел (в том числе и в связи с теорией квадратичных форм) имеется в большой статье О. Келлера (см.: *Keller O. Geometrie der Zahlen.* — In: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften.* Bd 1, 2, 1959), а также в книгах Дж. Касселса «Введение в геометрию чисел» (М., 1965), К. А. Роджерса «Укладки и покрытия» (М., 1968) и других.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

#### П. Г. Лежен-Дирихле и теорема об арифметических прогрессиях

Исходными для создания аналитических методов теории чисел были работы Леонарда Эйлера. Тождество Эйлера для дзета-функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (8)$$

где произведение справа взято по всем простым числам  $p$ , а  $s$  — действительное число, большее единицы, сыграло основную роль в исследованиях по распределению простых чисел. Эйлер изучал и другие соотношения между рядами и бесконечными произведениями, которые послужили источником многих теорем в теории чисел. Идеи Эйлера были развиты в трудах Лежандра, Дирихле, Якоби, П. Л. Чебышева, Римана и других математиков XIX и XX вв.

Наиболее значительными в области аналитических методов теории чисел в первой половине XIX в. были исследования Г. П. Лежена-Дирихле (1805—1859). Как писал в 1859 г. уже не раз упоминавшийся Г. Дж. С. Смит: «Его оригинальные исследования, по-видимому, сделали для продвижения арифметической науки больше, чем исследования любого другого автора со времен Гаусса . . . Кроме того, — продолжал Смит, — Дирихле придал элементарный характер арифметическим теориям, которые в трудах Гаусса были темными и сложными. Он сделал также очень много для популяризации теории чисел среди математиков — эту его услугу нельзя переоценить»<sup>31</sup>.

Потомок эмигрировавшей в Германию французской семьи, Густав Петер Лежен-Дирихле, окончив в 16 лет гимназию, решил продолжить образование в Париже: юноша увлекся математикой, а в Париже активно работала в то время лучшая в мире математическая научная школа. Здесь Дирихле слушал лекции и на Факультете наук Сорбонны, и в Коллеж де Франс, зарабатывая на жизнь частными уроками.

Первые научные интересы Дирихле лежали в области теории чисел; они были пробуждены изучением «Арифметических исследований» Гаусса (1801).

В 1825 г. Дирихле представил Парижской академии наук «Мемуар о невозможности некоторых неопределенных уравнений пятой степени» (*Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du 5-ème degré*)<sup>32</sup>, в котором доказал неразрешимость в целых числах некоторых уравнений вида  $x^5 + y^5 = Az^5$ . Работа эта, первая из серии его теоретико-числовых исследований, была Академией одобрена, но напечатана только три года спустя в журнале Крелле (т. 3, 1828). Работа произвела сильное впечатление на Абеля, который в 1826 г. приезжал в Париж, где оба молодых математика имели возможность встретиться и побеседовать о своих идеях и замыслах.

В 1826 г. Дирихле вернулся на родину, а в 1827 г. по рекомендации А. фон Гумбольдта получает назначение в Бреслау (ныне Вроцлав), где работает вначале в качестве приват-доцента, затем — экстраординарного профессора. По дороге в Бреслау Дирихле посетил в Гёттингене Гаусса,

<sup>31</sup> *Smith H. J., S. Report on the theory of numbers. Pt I (1859). — In: The collected mathematical papers of H. J. S. Smith V. 1. Oxford, 1894, p. 72.*

<sup>32</sup> *Lejeune-Dirichlet G. P. Werke. Bd 1. Berlin, 1889, S. 1—20.*



Г. П. ЛЕЖЕН-ДИРИХЛЕ

который принял его очень приветливо; в дальнейшем они поддерживали переписку. Научная обстановка в Бреслау была совершенно провинциальной и год спустя, при поддержке того же Гумбольдта, Дирихле переходит на службу в Берлин, где он более четверти века преподавал в университете как экстраординарный, а затем ординарный профессор. В 1831 г. Дирихле избран членом Берлинской академии наук. В 1855 г. он был приглашен занять кафедру в Гёттингене, ставшую вакантной после смерти Гаусса. Здесь он и провел последние годы жизни.

Главные направления исследований Дирихле сложились отчасти под влиянием Ж. Фурье, под руководством которого он начал свою научную работу в Париже (ему принадлежат важнейшие труды по теории рядов Фурье и математической физике), отчасти под воздействием трудов его предшественников в теории чисел, в первую очередь «Арифметических исследований» Гаусса, ставших его настольной и постоянно перечитываемой книгой. На эти области математики, да и на все развитие математики Дирихле оказал значительное влияние. Это объясняется как его педагогическим даром, так и актуальностью его проблематики. Г. Минковский коротко охарактеризовал манеру изложения Дирихле следующими словами: «Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрчих мыслей»<sup>33</sup>, намекая на принцип Дирихле в теории потенциала и называя эту манеру истинным принципом Дирихле.

<sup>33</sup> Цит. по кн.: *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., 1937, с. 132.

К этому следует добавить, что по стилю мышления, по уровню его строгости и точности Дирихле был, вероятно, наиболее ярким выразителем тех новых тенденций, которые постепенно утверждались в математике XIX в. К. Г. Якоби в одном письме к А. фон Гумбольдту писал: «Только Дирихле, не я, не Коши, и не Гаусс, знает, что такое совершенно строгое математическое доказательство; мы это узнали впервые от него. Когда Гаусс говорит, что он доказал что-либо, это для меня весьма вероятно, когда это говорит Коши, то можно поставить столько же за, сколько и против, а когда это говорит Дирихле, оно несомненно»<sup>34</sup>.

Вслед за Эйлером Дирихле с большим успехом применил в теории чисел средства математического анализа. Важнейшими исследованиями Дирихле в области теории чисел являются: доказательство теоремы об арифметических прогрессиях, найденное аналитическим методом и затем перенесенное на прогрессии и квадратичные формы с комплексными коэффициентами; определение числа классов бинарных квадратичных форм данного детерминанта; разработка теории целых алгебраических чисел высших степеней, о которой говорилось выше.

Он ввел в теорию чисел новые понятия: «характеры» и «ряды Дирихле», впервые сформулировал в общем виде понятие асимптотического закона и дал ряд примеров установления асимптотических формул.

Работа Дирихле «Доказательство теоремы об арифметической прогрессии» (*Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression. — Bericht. Verhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1837*)<sup>35</sup> содержала только набросок первого точного доказательства теоремы о том, что всякая арифметическая прогрессия, первый член и разность которой взаимно просты, содержит бесконечно много простых чисел — первой строго доказанной теоремы о распределении простых чисел, после того как древние установили, что множество всех простых чисел в натуральном ряду бесконечно<sup>36</sup>. Доказательство проведено для случая, когда разность прогрессии — простое нечетное число, и, как указывает Дирихле, аналогично рассуждению Эйлера в § 229 главы 15 тома I «Введения в анализ бесконечных» (1748). Вскоре затем появилось более подробное «Доказательство теоремы о том, что каждая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член и разность которой целые числа, не имеющие общего делителя, содержит бесконечно много простых чисел» (*Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. — Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1837*)<sup>37</sup>.

Как и Эйлер, Дирихле устанавливает зависимость между рядом и бесконечным произведением. Но вместо ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

Дирихле рассматривает ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s, \chi),$$

<sup>34</sup> Цит. по кн.: *Biermann K. R.* Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität. 1810—1920. Berlin, 1973, S. 31.— Вероятно, многие не согласятся с суждением Якоби о Гауссе.— *Прим. ред.*

<sup>35</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke.* Bd 1. Berlin, 1899, S. 108—110.

<sup>36</sup> Напомним, что в 1783 г. Эйлер высказал это предположение как гипотезу, а Лежандр в 1798 г. сделал попытку его доказать (*ИМ*, т. 3, с. 109 и 120).

<sup>37</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke.* Bd 1, S. 313—342.

где  $\chi(n)$  — числовая функция («характер» Дирихле), которая разбивает все множество простых чисел на отдельные классы вычетов. Этот ряд  $L(s, \chi)$  называется теперь «рядом Дирихле». Для иллюстрации приведем, следуя Р. Аюбу<sup>38</sup>, доказательство методом Дирихле теоремы для арифметической прогрессии частного вида: существует бесконечно много простых чисел в прогрессии с общим членом  $4n + 1$ .

Определим характер  $\chi(n)$  следующим образом:

$$\chi(n) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Тогда  $\chi(n) = 1$ , если  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , и  $\chi(n) = -1$ , если  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Легко проверить, что  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ , т. е.  $\chi(n)$  — функция вполне мультипликативная.

Рассмотрим ряд  $L(s, \chi)$  для действительного  $s$ :

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots,$$

который сходится при  $s > 0$ , абсолютно сходится для  $s > 1$  и расходится для  $s < 0$ . По свойству мультипликативных функций<sup>39</sup> при  $s > 1$  имеем

$$L(s, \chi) = \prod_{\substack{p \text{ — нечетные} \\ \text{простые}}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Беря логарифмы обеих частей этого равенства, получим

$$\begin{aligned} \ln L(s, \chi) &= \sum_{\substack{p \text{ — нечетные} \\ \text{простые}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\chi(p))^k}{k p^{ks}} = \sum_{\substack{p \text{ — нечетные} \\ \text{простые}}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \\ &+ \sum_{\substack{p \text{ — нечетные} \\ \text{простые}}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\chi(p))^k}{k p^{ks}} = \sum_{p \equiv 1 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} + R_1(s), \end{aligned}$$

где вторая сумма обозначена  $R_1(s)$ . Как и в доказательстве Эйлера, для  $\zeta(s)$  мы имеем

$$|R_1(s)| \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \text{ — нечетные} \\ \text{простые}}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} < \frac{1}{2} \frac{1}{1-2^{-s}} \zeta(2s).$$

<sup>38</sup> Ayoub R. An introduction to the analytic theory of numbers. Providence. Amer. Math. Soc., 1963, p. 6–8.

<sup>39</sup> Если теоретико-числовая функция  $f(n)$  мультипликативна, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots + f(p^k) + \dots) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k).$$

Если  $f(n)$  вполне мультипликативна, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

В обоих случаях произведение берется по всем простым  $p$ . Предполагается, что обе стороны этих равенств абсолютно сходящиеся.

Таким образом,  $R_1(s)$  остается ограниченным при  $s \rightarrow 1 + 0$ . Чтобы отделить простые, заключающиеся в арифметической прогрессии  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , т. е.  $p = 4m + 1$ , прибавим сумму по всем простым  $p$ . Так как

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= \sum_p \frac{1}{p^s} + R(s) = \frac{1}{2^s} + \sum_{\substack{p - \text{нечетные} \\ \text{простые}}} \frac{1}{p^s} + R(s) = \\ &= \frac{1}{2^s} + \sum_{p \equiv 1 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} + R(s). \end{aligned}$$

где  $R(s)$  остается ограниченным при  $s \rightarrow 1 + 0$ , получим

$$\ln L(s, \chi) + \ln \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + 2 \sum_{p \equiv 1 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} + R_1(s) + R(s),$$

где  $\ln \zeta(s) \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow 1 + 0$ , а члены  $R_1(s)$ ,  $R(s)$  остаются ограниченными при  $s \rightarrow 1 + 0$ . Поскольку  $L(s, \chi)$  — сходящийся ряд и при  $s \rightarrow 1 + 0$ ,  $L(s, \chi) \rightarrow L(1, \chi)$ , то теорема доказана, если доказано, что  $L(1, \chi) \neq 0$ . В рассматриваемом частном случае есть много способов установить этот факт. Например,

$$L(1, \chi) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \pi/4 \neq 0.$$

Но для общего случая — арифметической прогрессии  $kn + a$ , где  $(k, a) = 1$ , такого простого доказательства нет. Доказательство утверждения, что  $L(1, \chi) \neq 0$ , оказалось главной трудностью в принадлежащем Дирихле доказательстве этой теоремы. Дирихле основывался на том, что для действительных характеров  $L(1, \chi)$  является множителем в выражении числа классов бинарных форм, принадлежащих некоторому определителю, а число таких классов не может равняться нулю.

При этом была установлена связь числа классов с другими вопросами теории чисел: для отрицательных детерминантов — с квадратичными вычетами и невычетами, а для положительных детерминантов — с решениями уравнения Ферма (Пелля) и с теорией деления круга.

В работе «Об одном свойстве квадратичных форм» (Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen.— Bericht. Preuss. Akad. Wiss., 1840)<sup>40</sup> теорема об арифметических прогрессиях была распространена на квадратичные формы: каждая квадратичная форма, три коэффициента которой не имеют общего делителя, представляет бесконечно много простых чисел. Наконец, в «Исследованиях по теории комплексных чисел» (Untersuchungen über die Theorie der complexe Zahlen.— Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1841)<sup>41</sup> Дирихле перенес теорему на целые комплексные числа: выражение  $kn + a$  содержит бесконечно много простых комплексных чисел, если  $k, a$  — целые комплексные числа и  $(k, a) = 1$ .

### Асимптотические законы теории чисел

Другой цикл исследований Дирихле связан с установлением асимптотических законов для теоретико-числовых функций. Первой появилась статья «Об определении асимптотических законов в теории чисел» (Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie.— Bericht. Verhandl. Preuss. Akad. Wiss., 1838)<sup>42</sup>. Указав, что функцию сложной

<sup>40</sup> Lejeune-Dirichlet P. G. Werke. Bd 1. Berlin, 1889, S. 497—502.

<sup>41</sup> Ibid., S. 503—532.

<sup>42</sup> Ibid., S. 351—356.

природы при неограниченном возрастании независимой переменной часто можно приближенно заменять другой более простой функцией, подобно тому как течение кривой при неограниченном ее удалении представляется приближенно другой линией — ее асимптотой, Дирихле предложил по аналогии с геометрией называть такую более простую функцию асимптотическим законом для более сложной, если отношение этих функций стремится к единице при неограниченном возрастании аргумента.

Как самый старый пример асимптотического закона Дирихле привел формулу для приближенного выражения биномиальных коэффициентов в случае очень большого четного показателя степени, которая была получена Стирлингом из данного Валлисом выражения числа  $\pi$  в виде бесконечного произведения. Позднейшие исследования дали ряд результатов такого рода, особенно важных для теории вероятностей. Дирихле замечает, что асимптотические законы встречаются и для функций, связанных со свойствами чисел. В качестве примеров он приводит формулу Лежандра, асимптотически представляющую число простых чисел, не превосходящих данной границы  $x$ :

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1,08366}, \quad (9)$$

и формулы Гаусса из теории квадратичных форм для асимптотического представления среднего значения числа классов и числа порядков таких форм. У Гаусса и Лежандра их формулы были получены с помощью индукции, без строгого доказательства. Дирихле поставил себе целью развитие методов, которые, в частности, могли бы быть применены к доказательству результатов Гаусса и Лежандра. Сам он применил такой способ к задаче о количестве делителей данного натурального числа  $n$ . Эту функцию теперь обозначают  $\tau(n)$ , а Дирихле обозначал ее  $b_n$ . Он заметил, что функция  $\tau(n)$  изменяется неправильно, поэтому лучше рассмотреть вместо нее ее среднее значение:  $\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \tau(k)$ . Для этой новой функции

Дирихле с помощью свойств определенного интеграла <sup>43</sup>

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{k-1} dx$$

нашел асимптотический закон для  $\frac{1}{n} D(n)$ , где

$$D(n) = \sum_{k \leq n} \tau(k),$$

откуда для функции  $D(n)$  получил

$$D(n) = \sum_{k=1}^n \tau(k) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + 2Cn, \quad (10)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера. Аналогичным образом Дирихле установил еще несколько асимптотических законов для теоретико-числовых функций. Позднее в работе «Об определении средних значений в теории чисел» (*Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie*, 1849) <sup>44</sup>

<sup>43</sup> Заметим, что вслед за Дирихле гамма-функцию использовали в вопросах аналитической теории чисел П. Л. Чебышев, Б. Риман и другие математики.

<sup>44</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke*. Bd 2. Berlin, 1897, S. 51—66.

Дирихле снова обратился к задаче о числе делителей, рассуждая в этот раз иначе. Пусть  $D(n) = \sum_{k=1}^n \tau(k)$ . Количество чисел, кратных целому числу  $s$ , где  $s \leq n$ , будет  $[n/s]$  ( $[x]$  — целая часть числа  $x$ ) и потому

$$D(n) = \sum_{s=1}^n \left[ \frac{n}{s} \right].$$

Отсюда, так как  $n/s - [n/s] < 1$ , с ошибкой  $O(n)$  будет

$$D(n) = n \sum_{s=1}^n \frac{1}{s}.$$

Но

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{s} = \ln n + C + \frac{1}{2n} + \dots,$$

где  $C$  — постоянная Эйлера. Поэтому  $D(n) = n \ln n + O(n)$ . Для более точного выражения  $D(n)$  Дирихле использует следующее тождество: если  $\mu$  — целое,

$$\mu^2 \geq n, \quad \mu(\mu+1) > n, \quad \left[ \frac{n}{\mu} \right] = \nu, \quad \psi(s) = \sum_{k=1}^s \varphi(k), \quad \left[ \frac{n}{p} \right] = q,$$

то

$$\sum_{s=1}^p \left[ \frac{n}{s} \right] \varphi(s) = q\psi(p) - \nu\psi(\mu) + \sum_{s=1}^{\mu} \left[ \frac{n}{s} \right] \varphi(s) + \sum_{s=q+1}^{\nu} \psi\left(\left[ \frac{n}{s} \right]\right).$$

Отсюда при  $p = n$ ,  $q = 1$  получается

$$\sum_{s=1}^n \left[ \frac{n}{s} \right] \varphi(s) = -\nu\psi(\mu) + \sum_{s=1}^{\mu} \left[ \frac{n}{s} \right] \varphi(s) + \sum_{s=1}^{\nu} \psi\left(\left[ \frac{n}{s} \right]\right),$$

а при  $\varphi(s) = 1$ ,  $\psi(s) = s$

$$D(n) = \sum_{s=1}^n \left[ \frac{n}{s} \right] = -\mu\nu + \sum_{s=1}^{\mu} \left[ \frac{n}{s} \right] + \sum_{s=1}^{\nu} \left[ \frac{n}{s} \right],$$

и новая формула для суммы числа делителей  $D(n)$  имеет вид

$$D(n) = n \ln n + (2C - 1)n + O(\sqrt{n}), \quad (11)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера.

Впоследствии вопрос об уточнении остаточного члена в формуле (11) привлек внимание ряда ученых. Наибольшего успеха добился Г. Ф. Вороной. В работе «Об одной задаче вычисления асимптотических функций» (1903)<sup>45</sup> он доказал, что формулу (11) можно уточнить следующим образом:

$$D(n) = n \ln n + (2C - 1)n + O(\sqrt[3]{n} \ln n).$$

<sup>45</sup> Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1952, с. 5—50.

Дирихле, продолжая изучать свойства рядов и бесконечных произведений, аналогичных тем, которые Эйлер использовал в I томе «Введения в анализ бесконечных», убедился, что они применимы к разнообразным вопросам теории чисел. «Метод, которым я пользуюсь,— писал Дирихле,— кажется мне особенно заслуживающим внимания той связью, которую он устанавливает между анализом бесконечно малых и трансцендентной арифметикой»<sup>46</sup>. В статье «Об использовании бесконечных рядов в теории чисел» (*Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres.*— *J. für Math.*, 1838, 18)<sup>47</sup> он обобщил тождество Эйлера (8), рассмотрев вместо

$\zeta(s)$  ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{n^s}$ , где  $\left(\frac{n}{q}\right)$  — символ Лежандра, и более общие ряды

вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ , где  $f(n)$  — различные числовые функции.

С помощью этих рядов («рядов Дирихле») он находит асимптотические законы для средних значений некоторых теоретико-числовых функций. Дирихле писал, что применил подобные принципы и к доказательству формулы Лежандра для количества простых чисел, не превосходящих данной границы, но такое доказательство не обнаружено ни в печатных, ни в сохранившихся рукописных работах Дирихле.

Ряды Дирихле он использовал в «Исследованиях о различных приложениях анализа бесконечно малых в теории чисел» (*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.*— *J. für Math.*, 1839, 19; 1840, 21)<sup>48</sup>. Здесь решается вопрос об определении числа классов квадратичных форм данного определителя  $D$ .

Кроме того, Дирихле обнаружил, что его методы позволяют очень просто доказать многие теоремы из второй части V раздела «Арифметических исследований» Гаусса. По словам Дирихле, именно трудность этого раздела книги Гаусса заставила Лежандра отказаться от помещения всех результатов Гаусса во второе и третье издание «Теории чисел» (1808, 1830).

В «Исследованиях о квадратичных формах с комплексными коэффициентами и переменными» (*Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.*— *J. für Math.*, 1842, 24)<sup>49</sup> Дирихле распространяет методы и результаты только что приведенной статьи 1839—1840 гг. на квадратичные формы с целыми комплексными коэффициентами. Здесь формулируются основные теоремы теории целых комплексных чисел и важнейшие теоремы о квадратичных формах, дана классификация форм. Используя ряды Дирихле и единственность разложения на простые множители для целых комплексных чисел, Дирихле получает новое обобщение тождества Эйлера. Вводится аналог символа Лежандра. Затем определяется число классов квадратичных форм с комплексными коэффициентами для данного вещественного целого определителя и для такого же определителя, умноженного на  $i$ .

Эти исследования привели Дирихле к его знаменитой теореме о комплексных единицах. В письме к Лиувиллю он писал, что, отыскивая число форм с целыми комплексными коэффициентами для данного определителя, он пришел к выводу, что это число зависит от деления лемнискаты, в то время как в случае вещественных коэффициентов и положи-

<sup>46</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke.* Bd 1. Berlin, 1889, S. 360.

<sup>47</sup> *Ibid.*, S. 357—374.

<sup>48</sup> *Ibid.*, S. 411—496.

<sup>49</sup> *Ibid.*, S. 533—618.

тельного определителя оно связано с теорией деления круга (см. «О теории чисел» (Sur la théorie des nombres. — С. г. Acad. sci. Paris, 1840, 10))<sup>50</sup>.

На основании этих исследований возникла знаменитая работа Дирихле «К теории комплексных единиц» (1846)<sup>51</sup>, о которой говорилось ранее.

Кроме всего перечисленного, огромное влияние на развитие теории чисел и на воспитание нескольких поколений математиков оказали «Лекции по теории чисел» Дирихле, изданные под редакцией и с добавлениями Р. Дедекинда (Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig, 1863; II Aufl. 1871; III Aufl. 1879; IV Aufl. 1894). Аналитические и алгебраические методы Дирихле получили дальнейшее развитие в трудах Р. Дедекинда, Э. Куммера, Л. Кронекера, Б. Римана; математики второй половины XIX — начала XX вв. разрабатывали теорию характеров и теорию рядов Дирихле, рассматривая ряды Дирихле с комплексными показателями и комплексными коэффициентами. Вслед за Дирихле и Ж. Лиувиллем многие ученые использовали ряды для получения различных теоретико-числовых тождеств (В. Я. Буняковский, Э. Чезаро, Н. В. Бугаев и его ученики). Следуя пути, указанному Эйлером, А. М. Лежандр, а за ним К. Г. Якоби и другие математики использовали ряды и бесконечные произведения теории эллиптических функций для установления различных теорем аддитивной теории чисел.

Продолжателями исследований Дирихле в области аналитической теории чисел явились П. Л. Чебышев и Б. Рيمان.

## П. Л. Чебышев и теория распределения простых чисел

Биография П. Л. Чебышева помещена в IV главе этой книги. Здесь мы остановимся на немногих, но первостепенных по значению и получивших широкую известность работах по теории чисел. Основными направлениями его исследований в этой области были значительно им продвинутая теория распределения простых чисел; теория рядов, общий член которых — функция простых чисел, вопросы теории квадратичных форм, диофантовы приближения и обобщение алгоритма непрерывных дробей.

Начало этим исследованиям П. Л. Чебышева положила подготовка издания сочинений Эйлера по теории чисел, к которой его привлек в 1847 г. В. Я. Буняковский. Совместно с Буняковским Чебышев составил «Систематический указатель» сочинений Эйлера по теории чисел с аннотациями многих статей. Некоторые рукописные работы и заметки Эйлера П. Л. Чебышев восстанавливал, исправляя при этом закравшиеся в них ошибки. Наличие этих ошибок можно объяснить тем, что записи делали ученики Эйлера под диктовку или выполняя его указания, а лично проверить их Эйлер не мог, он был слеп.

Это издание, опубликованное под названием «Commentationes arithmeticae collectae» (Т. 1—2. Petropoli, 1849), оказало большое влияние на дальнейшее развитие теории чисел в XIX в. Своими советами и поисками сведений о пребывании Эйлера в Берлинской академии наук помогал изданию К. Г. Якоби. Сразу же после выхода в свет этих двух томов сочинений Эйлера Якоби и Дирихле обнаружили много интересного во вновь опубликованных эйлеровских материалах. В том же 1849 г. П. Л. Чебышев защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений», изданную отдельной книгой («Теория сравнений», СПб., 1849)<sup>52</sup>.

<sup>50</sup> *Lejeune-Dirichlet P. G. Werke.* Bd 1. Berlin, 1889, S. 619.

<sup>51</sup> *Ibid.*, S. 639—644.

<sup>52</sup> *Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений.* Т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944, с. 10—172.

Знание трудов Эйлера и потребовавшееся для их комментирования изучение сочинений Лагранжа, Лежандра, Гаусса, Дирихле и других ученых послужили основой для дальнейших занятий П. Л. Чебышева теорией чисел. Как отмечали рецензенты «Теории сравнений» В. Я. Буныковский и П. Н. Фусс, это сочинение П. Л. Чебышева было первым специальным трудом на русском языке об этом важном предмете и по своему изложению отличалось строгой последовательностью, простотой изложения и во многих случаях изяществом приемов, принадлежащих автору. Впоследствии эта книга выдержала несколько изданий, была переведена на немецкий (1888) и итальянский (1895) языки. Академия наук удостоила работу П. Л. Чебышева Демидовской премии.

Одним из прибавлений к «Теории сравнений» была статья Чебышева «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», французский перевод которой был напечатан в «Mémoires des savants étrangers» (Т. 6, 1851) Петербургской академии наук и в журнале Лиувилля в 1852 г.<sup>53</sup>

Вопросы применения математического анализа в теории чисел заинтересовала П. Л. Чебышева при изучении арифметических трудов Эйлера и в связи с этим упоминавшихся выше статей Дирихле «О применении бесконечных рядов в теории чисел», «Исследования о различных приложениях анализа в теории чисел» и «Об определении асимптотических законов в теории чисел». В последней Дирихле, как говорилось, привел формулу Лежандра (9) для числа  $\varphi(x)$  простых чисел, не превосходящих  $x$ . П. Л. Чебышев проверил эту формулу и убедился, что она недостаточно хорошо приближает функцию  $\varphi(x)$  (теперь эту функцию, как предложил в 1909 г. Э. Ландау, принято обозначать  $\pi(x)$ ). П. Л. Чебышев глубоко изучил различные свойства функции  $\varphi(x)$ . Первая теорема статьи гласила: «если  $\varphi(x)$  означает число простых чисел, меньших  $x$ ,  $n$  — какое-либо целое число,  $\rho$  — количество, большее 0, то в сумме

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[ \varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

мы будем иметь такую функцию, которая с приближением  $\rho$  к 0 приближается к конечному пределу»<sup>54</sup>. Доказательство этой теоремы основано на применении дзета-функции Эйлера  $\zeta(s)$  при действительных значениях аргумента (ИМ, т. 3, с. 109), а именно на поведении  $\zeta(s)$  вблизи ее полюса  $s = 1$ . Из этого П. Л. Чебышев вывел вторую теорему, устанавливающую то важнейшее в теории распределения простых чисел свойство функции  $\varphi(x)$ , что она колеблется около функции  $\text{Li } x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$  (ИМ, т. 3, с. 360—361), или, как писал он сам, что от  $x = 2$  до  $x = \infty$  функция  $\varphi(x)$  бесконечное число раз удовлетворяет как неравенству

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\ln x} - \frac{ax}{\ln^n x},$$

так и неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + \frac{ax}{\ln^n x},$$

<sup>53</sup> Там же, с. 173—190.

<sup>54</sup> Там же, с. 173. У Чебышева через  $\log x$  обозначен натуральный логарифм.

как бы ни было мало  $\alpha$ , где  $\alpha$  — некоторое положительное количество, и как бы ни было велико  $n$ . Отсюда уже следовала третья теорема, согласно которой разность  $x/\varphi(x) - \ln x$  при  $x \rightarrow \infty$  не может иметь пределом величину, отличную от  $-1$ . Между тем согласно формуле Лежандра разность  $x/\varphi(x) - \ln x$  должна при  $x \rightarrow \infty$  иметь пределом не  $-1$ , а  $-1,08366$ . В доказательстве П. Л. Чебышев использовал оценки определенных интегралов, ряды, дифференцирование, т. е. средства математического анализа.

Из результатов Чебышева вытекало, что если предел отношения  $\varphi(x)$  к  $x/\ln x$  или в современных обозначениях  $\pi(x)$  к  $x/\ln x$  при  $x \rightarrow \infty$  существует, то он равен единице.

Совершенствуя понятие асимптотического закона, П. Л. Чебышев ввел понятие функции, представляющей другую функцию «верно до количества порядка  $x/\ln^n x$  включительно», в пятой теореме показал, что если функция  $\varphi(x)$  может быть выражена верно до количества порядка  $x/\ln^n x$  включительно алгебраически через  $x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ , то такое выражение ее есть

$\text{Li } x = \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ . Как видно, П. Л. Чебышев сделал большой шаг к установле-

нию асимптотического закона распределения простых чисел, к которому подошли и другие математики<sup>55</sup>. Указав новую асимптотическую формулу для  $\varphi(x)$ , П. Л. Чебышев соответственно заменяет все полученные Лежандром формулы другими. Вместо формулы Лежандра

$$\sum_{2 \leq p \leq x} \frac{1}{p} \approx \ln(\ln x - 0,08366) \quad (p - \text{простые})$$

П. Л. Чебышев приводит

$$\sum_{2 \leq p \leq x} \frac{1}{p} \approx C + \ln \ln x; \quad (12)$$

вместо формулы Лежандра

$$\prod_{2 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \approx \frac{C_0}{\ln x - 0,08366}$$

дает

$$\prod_{2 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \approx \frac{C_0}{\ln x}. \quad (13)$$

Рассмотренная статья принесла П. Л. Чебышеву широкую известность, которая еще более возросла после публикации мемуара «О простых числах» (*Sur les nombres premiers*, 1852), вышедшего на французском языке в журнале Лиувилля<sup>56</sup>.

<sup>55</sup> Асимптотический закон  $\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dx}{\ln x}$  был известен еще Гауссу (см., например,

его письмо к Энке от 24 дек. 1849 г., опубликованное в 1863 г. (*Gauss C. F. Werke*. Bd 2, S. 444)); однако никаких опубликованных результатов Гаусс не оставил и доказательством этого закона, очевидно, не располагал.

<sup>56</sup> *Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений*. Т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944, с. 191—207.

Эта статья замечательна как простотой созданных П. Л. Чебышевым методов, так и значительностью полученных им результатов. Он рассматривает функции

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p, \quad \psi(x) = \sum_{p^{\alpha} \leq x} \ln p,$$

где  $p$  — простые числа от 2 до  $x$ ,  $\alpha \geq 2$ . Исходя из выведенного им оригинальным образом тождества для  $\theta(x)$ , он приходит к «основному тождеству Чебышева»:

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = T(x), \quad (14)$$

где  $T(x) = \ln 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot [x]$ .

Отсюда получаются неравенства для  $\psi(x)$ :

$$\psi(x) \geq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).$$

Заменяя  $T(x)$  приближенно по формуле Стирлинга, П. Л. Чебышев находит, что

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \ln x - 1, \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2} \ln x,$$

где  $A = \ln \frac{2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,921\,292\,02\dots$ . Затем он устанавливает границы для функции  $\theta(x)$ :

$$Ax - \frac{12}{5} A \sqrt{x} - \frac{5}{8 \ln 6} \ln^2 x - \frac{15}{4} \ln x - 3 < \theta(x) < \frac{6}{5} Ax - A \sqrt{x} + \frac{5}{4 \ln 6} \ln^2 x + \frac{5}{2} \ln x + 2 \quad \text{для } x > 160. \quad (15)$$

Оценки, найденные П. Л. Чебышевым, позволили ему, в частности, получить доказательство «постулата Бертрана», который Чебышев высказал в виде: для всех чисел начиная с  $n > 3$  существует всегда простое число, большее чем  $n$  и меньшее  $2n - 2^{57}$ .

Другие результаты, содержащиеся в той же статье, относятся к сходимости рядов, члены которых зависят от простых чисел. Первые открытия здесь принадлежали Эйлеру, на которого П. Л. Чебышев ссылается

в начале работы. Эйлер доказал, что ряд  $\sum_{p > 2} \frac{1}{p^k}$ , как и ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ , сходится при  $k > 1$  и расходится при  $k \leq 1$ . Но сходимость ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$  не является, вообще говоря, необходимой для сходимости ряда  $\sum_{p \geq 2} u_p$ . На-

пример, как показывает П. Л. Чебышев, ряд  $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p \ln p}$  сходится (его сум-

<sup>57</sup> *Bertrand J. Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme.* — J. Es. Polyt. Paris, 1845, 18, 123—140. Этот постулат Бертран использовал в доказательстве одного предложения теории групп подстановок; он был им проверен для всех чисел в пределах шести миллионов.

ма с точностью до 0,01 равна 1,63), между тем как ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  расходится.

П. Л. Чебышев установил следующий критерий: если для достаточно больших  $x$  функция  $F(x) > 0$  и  $F(x)/\ln x$  убывает, то для сходимости ряда  $\sum_{p \geq 2} F(p)$  необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F(n)}{\ln n}$ .

Доказательство основано на оценке сверху и снизу суммы  $\sum_p F(p)$ , где простые числа  $p$  заключены между некоторыми границами  $l$  и  $L$ .

В частном случае, полагая  $F(x) = 1$ ,  $l = 2$ ,  $L = x$ , П. Л. Чебышев установил границы, между которыми лежат значения функции  $\pi(x)$ , выражающей число простых чисел, не превосходящих  $x$ . Для этой цели он записал  $\sum F(p)$  в виде

$$\sum_{l < p < L} F(p) = \sum_{k=l}^L \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{\ln k} F(k)$$

и использовал уже найденные ранее оценки для  $\theta(k)$ , а затем положил  $F(x) = 1$ ,  $l = 2$ ,  $L = x$ . Его оценки можно записать в форме

$$A \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{6}{5} A \frac{x}{\ln x}$$

или

$$0,92129 < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1,10555.$$

Открытия П. Л. Чебышева заинтересовали знаменитого О. Коши. Об этом написал П. Л. Чебышеву Ш. Эрмит: «Мне хотелось бы, чтобы вы знали, что г. Коши, которого я видел в прошлый четверг, чрезвычайно заинтересовался вашими открытиями в области теории [простых] чисел... в особенности его поразило доказательство постулата Бертрана и результаты, касающиеся сходимости ряда  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p, \dots$  (где  $p$  — целое)»<sup>58</sup>. Другой французский ученый Ж. Серре включил содержание второго мемуара П. Л. Чебышева во второй том своего известного «Курса высшей алгебры» (Cours d'algebre superieure. T. 2. Paris, 1866, p. 203—216).

Кроме указанных выше П. Л. Чебышеву принадлежит еще несколько работ по вопросам аналитической теории чисел<sup>59</sup>. В них П. Л. Чебышев рассматривает формулы обращения рядов, члены которых зависят от простых чисел, заключенных в арифметических прогрессиях  $4n + 1$  и  $4n + 3$  и не превосходящих некоторого большого числа  $x$ , старается установить зависимость между тождеством

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \ln n$$

и тождеством Эйлера для дзета-функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

<sup>58</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951, с. 425.

<sup>59</sup> Все они напечатаны в первом томе его «Полного собрания сочинений».

Одновременно с П. Л. Чебышевым вопросами, связанными с распределением простых чисел, занимался французский офицер и математик А. де Полиньяк (1826—1863), который после знакомства с методами П. Л. Чебышева признал их превосходство и позднее использовал в своих работах.

Статьи П. Л. Чебышева породили множество исследований других ученых. Они улучшали оценки для функций Чебышева, оценивали другие подобные функции, обобщали теоремы, давали новые доказательства его результатов. Одним из первых обратился к результатам П. Л. Чебышева Франц Карл Иосиф Мертенс (1840—1927), профессор математики Берлинского, а с 1869 г. Краковского университета. В статье «Заметка по аналитической теории чисел» (Ein Beitrag zur analytische Zahlentheorie. — J. für Math., 1874, 78, 46—62), использовав результаты П. Л. Чебышева, он заменил полученные Чебышевым асимптотические выражения для

$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  и  $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$  ( $p$  — простые) более точными:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right); \quad \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-C}}{\ln x} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\},$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $B$  — некоторая постоянная величина. При этом он с большой точностью вычислил значения постоянных. В ходе доказательства Мертенс вывел также асимптотическую формулу для

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p}:$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

Среди других результатов Мертенса, полученных в указанной заметке и в другой работе «О некоторых асимптотических законах теории чисел» (Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. — J. für Math., 1874, 77) отметим асимптотические формулы для суммы обратных величин простых чисел, заключенных в арифметических прогрессиях видов  $4n + 1$  или  $4n + 3$  и вида  $kl + m$ ; для  $\sum_{m \leq x} \varphi(m)$ , где  $\varphi(m)$  — функция Эйлера, и др.

Дж. Сильвестр несколько сблизил границы для отношения  $\pi(x)$  к  $x/\ln x$ , установив, что это отношение лежит между 0,956 95 и 1,044 23. Он уточнил также постулат Бертрана, доказав, что для всех достаточно больших  $n$  существует хоть одно простое число между  $n$  и  $1,092n$  (Amer. J. Math., 1881, 4; Messenger of Math., ser. 2, 1891, 21).

Попытка распространения теорем П. Л. Чебышева на простые комплексные числа принадлежит А. Пуанкаре (см. работы «О распределении простых чисел» (Sur la distribution des nombres premiers. — C. r. Acad. sci. Paris, 1891, 113); «Распространение на простые комплексные числа теорем г. Чебышева» (Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchébicheff. — J. math. pures et appl., sér. 4, 1892, 8, 25—69)). Вместо функций Чебышева  $\theta(x)$  и  $T(x)$  он рассмотрел функцию  $T^*(x)$ , равную сумме логарифмов норм всех идеалов, норма которых  $\leq x$ , и  $\theta^*(x)$ , равную сумме логарифмов норм всех простых идеалов, норма которых  $\leq x$ , но не смог получить для этих функций аналоги неравенств Чебышева (15). В этих заметках Пуанкаре попутно установил еще некоторые результаты, касающиеся суммы логарифмов простых чисел вида  $4n + 1$  и числа простых чисел такого же вида для  $4n + 1 \leq x$ .

В. И. Станевич в статье «О простых числах видов  $4n + 1$  и  $4n - 1$ » (Сб. Ин-та инж. путей сообщения, вып. 50. СПб., 1899) применил метод статьи П. Л. Чебышева «О простых числах» к определению границ для количества простых чисел видов  $4n + 1$  и  $4n - 1$  ( $\leq x$ ) для достаточно больших  $x$  и получил результаты, аналогичные результатам указанной статьи П. Л. Чебышева. В частности, он получил аналоги постулата Бертрана: между  $a$  и  $2a$  имеется хотя одно простое число вида  $4n + 1$  (если  $a > 15/2$ ) и хотя одно простое число вида  $4n - 1$  (если  $a > 9/2$ ).

Обзор работ, относящихся к определению количества простых чисел, не превосходящих данной границы, имеется в большой статье Г. Торелли «О количестве простых чисел, меньших данного предела» (Sulla totalita dei numeri primi fino a un limite assegnato.— Atti Accad. sci. fis. e mat. Napoli, ser. 2, 1902, 11), в докторской диссертации И. И. Иванова «О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел» (СПб., 1901), а наиболее подробное изложение результатов в этой области с доказательствами и обширной библиографией в труде Э. Ландау «Руководство по теории распределения простых чисел» (Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd 1, 2. Berlin, 1909). Долгое время после статей П. Л. Чебышева 1849 и 1852 гг. в теории распределения простых чисел не было сделано существенного сдвига на предложенном им пути и дальнейшее развитие исследований в этом направлении начало представляться бесперспективным. Это мнение было опровергнуто лишь в 1949 г. А. Сельбергом и П. Эрдёшом, которые возродили былую славу элементарных методов в аналитической теории чисел, элементарных в том смысле, что они не были связаны с использованием функций комплексного переменного.

Но задолго до этого было найдено аналитическое доказательство закона распределения простых чисел. Дорогу к нему открыли новые методы, начало которым положил Риман.

### Идеи Б. Римана

Имя Б. Римана нам встретится еще неоднократно, а биография его будет помещена в разделе истории теории аналитических функций. Здесь мы должны лишь подчеркнуть, что именно творчество Римана в этой области раскрыло новые широкие горизонты перед аналитической теорией чисел вообще и перед теорией распределения простых чисел в частности.

Риман был учеником и последователем прежде всего Га́усса по Гёттингену и Дирихле по Берлину (в студенческие годы он обучался в университетах обоих городов); несколько лет Риман работал в Гёттингене одновременно с Дирихле, к которому испытывал, как писал Клейн, «глубокую внутреннюю симпатию, обусловленную сходством манеры их мышления»<sup>60</sup>. И Гаусс, и Дирихле оказали на Римана большое влияние, однако неизвестно, какие конкретные обстоятельства побудили его написать статью «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины» (Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse)<sup>61</sup>, которую он представил в 1859 г. Берлинской академии наук в знак признательности за избрание его членом-корреспондентом и которая была напечатана в том же году в ее «Monatsberichte».

Исходным пунктом работы Римана, в равной мере принадлежащей тео-

<sup>60</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., 1937, с. 292.

<sup>61</sup> Риман Б. Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1948, с. 145—153.

рии функций, одной из главных областей творчества Римана <sup>62</sup>, и теории чисел, занятия которой были в его жизни лишь одним из эпизодов, было тождество Эйлера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (16)$$

где  $p$  пробегает все простые числа, а  $n$  — все положительные целые числа. Что касается показателя  $s$ , то Риман считал его комплексной переменной  $s = \sigma + it$ . Определяемая (16) функция, которую Риман обозначил  $\zeta(s)$ , существует в случае сходимости обеих частей равенства, а это имеет место при  $\sigma > 1$ . Но Риман указывает, что можно дать такое представление функции  $\zeta(s)$ , которое не теряет смысла ни при каких значениях  $s$ . Риман устанавливает ряд глубоких свойств  $\zeta$ -функции, хотя не всегда приводит исчерпывающие доказательства. Он представляет  $\zeta(s)$  в виде некоторого интеграла по бесконечному пути, охватывающему особые точки подынтегральной функции. Двумя способами он выводит функциональное уравнение для дзета-функции <sup>63</sup>:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{1}{2} \pi s \cdot \Gamma(s) \zeta(s), \quad (17)$$

устанавливает, что  $\zeta(s)$  имеет единственный полюс в точке  $s = 1$ , «тривиальные» нули:  $s = -2, -4, -6, \dots$ , и, кроме того, нули в полосе  $0 \leq \sigma \leq 1$ , расположенные симметрично относительно прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Риман высказал предположение, что все нетривиальные нули  $\zeta(s)$  лежат на прямой  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Это — знаменитая гипотеза Римана, до сих пор не доказанная и не опровергнутая.

Исходным пунктом аналитического доказательства закона распределения простых чисел у Римана служит формула (16) для комплексного  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1$ . Следуя Эйлеру, производится логарифмирование этого тождества:

$$\ln \zeta(s) = - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{ks}}.$$

причем выбирается та ветвь логарифма, которая является вещественной при вещественных  $s$ . Чтобы записать правую часть в виде ряда Дирихле, вводят функцию  $\Lambda_1(m)$  <sup>64</sup>:

$$\Lambda_1(m) = \begin{cases} 1/k, & \text{если } m = p^k, p \text{ простое,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\ln \zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(m)}{m^s}.$$

Обозначаем

$$\sum_{m \leq x} \Lambda_1(m) = f(x).$$

<sup>62</sup> Наряду с Коши и Вейерштрассом Риман был крупнейшим представителем теории аналитических функций за все время ее развития.

<sup>63</sup> В других обозначениях уравнение (17) было известно еще Эйлеру (ИМ, т. 3, с. 338).

<sup>64</sup> *Ayoub R. An introduction to the analytic theory of numbers. Providence. Amer. Math. Soc., 1963.*

С помощью суммирования по Абелю получается

$$\sum_{m=1}^k \frac{\Lambda_1(m)}{m^s} = \frac{f(k)}{k^s} + s \int_1^k f(x) x^{-s-1} dx.$$

При  $k \rightarrow \infty$  отсюда найдем

$$\frac{\ln \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx.$$

Следующий шаг по Риману состоит в обращении этого соотношения (которое при  $s = \sigma + it$  можно рассматривать как преобразование Фурье). В результате обращения получается при  $a > 1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \ln \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds. \quad (18)$$

Риман указывает, что

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{n} \pi(x^{1/n}),$$

где  $\pi(x)$  — функция, обозначающая число простых чисел  $\leq x$ ,  $x > 1$ . С помощью формулы обращения Мёбиуса функция  $\pi(x)$  в свою очередь выражается через  $f(x)$ :

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}), \quad (19)$$

где  $\mu(n)$  — функция Мёбиуса.

Заменив в (18)  $\ln \zeta(s)$  его представлением

$$\ln \zeta(s) = \ln \xi(0) + \sum_p \ln \left(1 - \frac{s}{p}\right) - \ln \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{s}{2} \ln \pi - \ln(s-1), \quad (20)$$

где функция  $\xi(s)$  связана с  $\zeta(s)$  соотношением

$$\xi(s) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} (s-1) \zeta(s),$$

причем

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_p \left(1 - \frac{s}{p}\right),$$

Риман вместо формулы (18) получает для  $f(x)$  другую формулу, состоящую из нескольких слагаемых, и, чтобы найти окончательное выражение для  $f(x)$ , надо оценить каждое из этих слагаемых. Но главный член этого представления  $f(x)$  получается из члена  $-\ln(s-1)$  в формуле (20). Это будет

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\ln x} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\ln(s-1)}{s} \right] x^s ds. \quad (21)$$

Риман показывает, что при  $x > 1$  это интегральный логарифм и с помощью (19) получает  $\pi(x) \approx \text{Li } x$ .

При этом он устанавливает, что порядок разности  $\text{Li } x - \pi(x)$  зависит от расположения нетривиальных нулей  $\zeta(s)$ . Если верна гипотеза Римана о том, что все нетривиальные нули  $\zeta(s)$  лежат на прямой  $\sigma = 1/2$ , то  $|\pi(x) - \text{Li } x| < c \sqrt{x} \ln x$ , где  $c$  — постоянная.

Риман указал также приближенное выражение для числа корней  $N(T)$  уравнения  $\zeta(s) = 0$  в прямоугольнике  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 < \sigma < 1$ :

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

Подробные вычисления Римана, относящиеся к поведению  $\zeta(s)$ , были обнаружены в библиотеке Гёттингенского университета через несколько десятилетий после смерти Римана<sup>66</sup>.

### Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел

По инициативе Ш. Эрмита математики начали изучать методы Римана<sup>66</sup>, стремясь заполнить пробелы в его доказательствах.

В письме 28 марта 1889 г. Эрмит попросил голландского математика Т. И. Стилтеса (1856—1894), преподававшего в Тулузе с 1886 г., написать ему о содержании статьи Римана по теории чисел (она была на немецком языке, которого Эрмит почти не знал). В 1890 г. Парижская академия объявила программы премий на несколько лет вперед. Среди них была «Большая государственная премия математических наук» на 1892 г. со сроком представления работы до 1 июля 1892 г. на предложенную Эрмитом<sup>67</sup> тему «Определение числа простых чисел, не превосходящих данной величины». Пояснились содержание темы и методы решения: «Новый путь к решению этого важного вопроса был открыт Риманом в знаменитом мемуаре, который привлек живое внимание. Но работа великого геометра содержит в некоторых существенных пунктах результаты, которые он только высказал и доказательство которых было бы очень интересно. Академия предлагает заполнить эти пробелы с помощью углубленного изучения функции, обозначенной  $\zeta(s)$  в мемуаре Римана»<sup>68</sup>. Эрмит приглашал Стилтеса принять участие в этом конкурсе, но этому помешали болезнь и другие личные обстоятельства последнего. 17 января 1893 г. Эрмит сообщил Стилтесу, что Большую премию Академии получил Ж. Адамар и, кроме того, написал об одной относящейся к рассматриваемому предмету статье Э. Каэна (С. г. Acad. sci. Paris, 1893, 116). Результаты работы Адамара, основанной на глубоком изучении свойств целых чисел, — она называлась «Исследование свойств целых функций и, в частности, одной функции, рассмотренной Риманом» (*Étude sur les propriétés des fonctions entières en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* — *J. math. pures et appl.* (4), 1893, 9, 171—215) — и статьи Каэна были вско-

<sup>66</sup> Siegel C. Über Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie. — In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Bd 2. Ht 1. Berlin, 1932, S. 45—80.

<sup>68</sup> Подробно о работе Римана и развитии его идей см. в кн.: Edwards H. M. Riemann's Zeta Function. New York—London, 1974; Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М., ИЛ, 1953.

<sup>67</sup> См. письмо Эрмита Стилтесу от 17 янв. 1891 г. — In: Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. T. 1. Paris, 1905. О работах Стилтеса будет сказано ниже.

<sup>68</sup> См.: С. г. Acad. sci. Paris, 1890, 111, pt 2, 1090—1092.

ре использованы как самим Адамаром, так и Валле-Пуссенем при доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел<sup>69</sup>.

Основные исследования французского математика Ж. Адамара (1865—1963) и бельгийца Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена (1866—1962) лежали не в области теории чисел и их имена не раз встретятся в дальнейшем. Здесь мы остановимся исключительно на их вкладе в теорию распределения простых чисел. Асимптотический закон, к доказательству которого средствами теории аналитических функций подошел Риман, они доказали независимо друг от друга и одновременно. Валле-Пуссен это сделал в работе «Аналитические исследования по теории чисел» (*Recherches analytiques sur la théorie des nombres* (I pt).— *Ann. Soc. sci. Bruxelles*, 1896, 20, N 2, 183—256), а Ж. Адамар в статье «О распределении нулей функции  $\zeta(s)$  и его арифметических следствиях» (*Sur la distribution des zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et ses conséquences arithmétiques.*— *Bull. Soc. math. France*, 1896, 24, 199—220). Доказательство Адамара было немного проще, но зато Валле-Пуссен во второй статье «О функции Римана и количестве простых чисел, не превосходящих заданной границы» (*Sur la fonction de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.*— *Mém. couronnées Acad. Belgique*, 1900, 59) подробно исследовал вопрос о точности приближения функции  $\pi(x)$ .

Формула Валле-Пуссена такова:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x} + O(xe^{-\alpha \sqrt{\ln x}}), \quad \alpha > 0.$$

Впоследствии, в 30-е годы XX в., оценки остаточного члена этой формулы были значительно уточнены с помощью методов И. М. Виноградова.

Позднее аналитическое доказательство закона было упрощено и в нем уже не использовалась теория целых функций. Обычно ход дальнейшего доказательства таков: функцию  $\zeta(s)$  аналитически продолжают слева от прямой  $\sigma = 1/2$ . Затем оценивают  $\zeta(s)$  слева от  $\sigma = 1$ . При этом требуется знание некоторых сведений о нулях  $\zeta(s)$ , так как нули  $\zeta(s)$  являются особыми точками подынтегральной функции  $\ln \zeta(s)$ .

Можно показать, что величина остаточного члена в асимптотическом законе для  $\pi(x)$  прямо зависит от наибольшей нижней границы значений  $\sigma$  ( $0 \leq \sigma \leq 1$ ), для которых  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ . Гипотеза Римана утверждает, что все комплексные нули  $\zeta(s)$  имеют вещественную часть  $\sigma = 1/2$ . Границы для  $|\zeta(s)|$  слева от  $\sigma = 1$  были предметом многочисленных работ вплоть до самого последнего времени. Уточнение границ для  $|\zeta(s)|$  позволяет уточнить остаточные члены и в других асимптотических формулах, связанных с законом распределения простых чисел.

Доказательство того, что  $\zeta(1 + it) \neq 0$ , — фундаментальный факт для всех аналитических доказательств закона простых чисел. Много позднее, в 1927—1932 гг., Н. Винер (1894—1964), особенно известный своими работами по кибернетике, показал, что это единственное существенное необходимое утверждение относительно  $\zeta(s)$  для доказательства закона распределения простых чисел.

В XX в. были даны и другие аналитические доказательства закона простых чисел и утверждений, ему эквивалентных. Как упоминалось, в се-

<sup>69</sup> Подробный обзор результатов по аналитической теории чисел и, в частности, результатов, касающихся аналитического доказательства закона распределения простых чисел, имеется в фундаментальном труде: *Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* Bd 1, 2. Leipzig, 1909.

редине XX в. асимптотический закон распределения удалось доказать без средств теории функций комплексного переменного и в этом смысле «элементарно». Это сделали А. Сельберг и П. Эрдеш в 1949 г.<sup>70</sup>

### Некоторые приложения аналитической теории чисел

Методы математического анализа применяются и в других задачах теории чисел. Одним из важных применений аналитических методов служат вопросы разбиения чисел на слагаемые (*partitio numerorum*).

С помощью разложения в степенные ряды бесконечных произведений интересные теоремы этого типа получал Эйлер. Особенной известностью пользуется теорема о пятиугольных числах (см. ИМ, т. 3, с. 108).

Исследования Эйлера были продолжены Лежандром, получившим в своем «Опыте теории чисел» (1-е изд. 1798; 3-е изд. 1830) с помощью разложения бесконечных произведений в степенные ряды и приравнивания коэффициентов при членах с одинаковыми степенями еще некоторые теоремы относительно разложения чисел на слагаемые.

К. Г. Я. Якоби использовал ряды и произведения теории эллиптических функций для установления теоретико-числовых тождеств, в том числе и относящихся к разбиению чисел на слагаемые некоторого вида. В России подобными вопросами занимались В. Я. Буняковский, Н. В. Бугаев и его ученики П. С. Назимов и другие. Аналитические методы в теории разбиения применял в XX в. Я. В. Успенский. Асимптотические формулы для числа разбиений были найдены Г. Харди и С. Рамануджаном (1918), Я. В. Успенским (1920).

Заметим, что вопросы подобного рода рассматривались также математиками, работавшими в области комбинаторного анализа. В частности, многие результаты принадлежат Дж. Сильвестру, А. Кэли, П. Мак-Магону.

В XX в. С. Рамануджан, Г. Харди, Дж. Литлвуд, Я. В. Успенский, И. М. Виноградов успешно применяли аналитические методы в аддитивной теории чисел.

В XIX в. берет свое начало и современный метод тригонометрических сумм, получивший свое развитие в работах Гаусса, Дирихле, Ландау, а впоследствии Ван дер Корпута, И. М. Виноградова и его учеников, А. Вальфша и др. ученых.

Аналитические методы проникли и в геометрию чисел. Классическими задачами теории чисел являются задачи подсчета целых точек в различных областях плоскости и пространства. Задача о числе целых точек в круге  $x^2 + y^2 \leq r^2 = R$  состоит в возможно более точной оценке разности

$$\Delta(R) = A(R) - S(R) \text{ или } \Delta(R) = A(R) - \pi R, \quad (22)$$

где  $A(R)$  — число целых точек внутри круга,  $\pi R$  — площадь круга. Нахождение наилучшего остаточного члена в (22) называют проблемой о числе целых точек в круге. Эта задача тесно связана с проблемой делителей. После того как Г. Ф. Вороной установил новый остаточный член в формуле для суммы числа делителей, его ученик по Варшавскому университету Вацлав Серпинский улучшил остаточный член в проблеме о числе целых точек в круге (O pewnem zagadnieniu z rachunku funkcuj

<sup>70</sup> Selberg A. An elementary proof of the prime number theorem.— Ann. Math. (2), 1949, 50, 305—313; Erdős P. On a new method in elementary number theory.— Proc. Nat. Acad. USA, 1949, 35, 374—384.

asymptotycznych.— Prace mat.- fiz. Warszawa, 1906, 17, 77—118). Эта задача получила многочисленные обобщения.

Большую роль в теории чисел играют элементарные методы. Обычно всякое утверждение, доказанное каким-либо методом, не лежащим в рамках теории чисел, затем стараются доказать элементарно, пользуясь только средствами самой теории чисел. Таковы метод решета, метод числовых тождеств, методы теории сравнений.

Не останавливаясь на методах решета и их совершенствовании в приложениях, особенно успешных в начале XX в., скажем только, что и в XIX в. различные методы решета использовались Лежандром, В. Я. Буныakovским, П. С. Порецким, который произвел сравнение различных методов решета <sup>71</sup>, а в XX в. Ж. Мерленом, В. Бруном, А. Сельбергом, Ю. В. Липницким, А. А. Бухштабом, В. А. Тартаковским. Методы решета обычно использовались составителями таблиц простых чисел.

Мы остановимся несколько подробнее на отдельных аспектах разработки числовых тождеств, в которой, помимо Гаусса, Дирихле, Якоби, Лиувилля, Кронекера и других зарубежных ученых, приняли активное участие и русские математики.

### Числовые функции и тождества. Работы Н. В. Бугаева

В теории чисел важную роль играют некоторые числовые функции. Особенно часто встречается функция Мёбиуса, определяемая следующим образом:

$\mu(n) = 0$ , если  $n$  делится на квадрат числа, отличного от 1,

$\mu(n) = 1$ , если  $n = 1$ ,

$\mu(n) = (-1)^k$  для  $n$ , равного произведению  $k$  различных простых чисел.

С ней связаны формулы обращения, играющие важную роль при составлении многих теоретико-числовых тождеств:

$$f(n) = \sum_{d|n} f_1(d), \quad f_1(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d);$$

каждая из этих формул является следствием другой. Функцию  $\mu(n)$  фактически знал еще Эйлер <sup>72</sup>. Систематическое изучение этой функции и связанных с нею формул обращения началось с работы А. Мёбиуса (1832) <sup>73</sup>, более известного своими исследованиями в области геометрии. В 1851 г. три пары формул обращения опубликовал П. Л. Чебышев в «Заметке о некоторых рядах» <sup>74</sup>.

Ряд теоретико-числовых тождеств рассмотрел Дирихле в уже упомянутой работе 1849 г. «Об определении средних значений в теории чисел» (см. с. 157). Преобразования тождеств, принадлежащие Дирихле, использовали затем многие математики. Большое число тождеств было установлено Ж. Лиувиллем в статьях «О некоторых числовых функциях» (*Sur quelques fonctions numériques*) и «О некоторых общих формулах, которые могут быть полезны в теории чисел» (*Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres*), опубликованных в журнале Лиувилля за 1857—1860 гг.

<sup>71</sup> Порецкий П. С. К учению о простых числах.— Сообщ. и протоколы секции физ.-матем. наук. Казань, 1888, 6, вып. 1—2, 1—142.

<sup>72</sup> Euler L., *Goldbach Ch. Briefwechsel* 1729—1764. Herausgegeben und eingeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter. Berlin, 1965, S. 71—73.

<sup>73</sup> Möbius A. F. *Gesammelte Werke*. Bd 4, S. 589—612.

<sup>74</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 1. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944, с. 229—236.



Н. В. БУГАЕВ

Наиболее систематическое и элементарное построение арифметических тождеств на основе понятия числовой производной и формул обращения было дано в учении о числовых производных Н. В. Бугаева. Дальнейшая теория мультипликативных числовых тождеств является в основном развитием теории Бугаева.

Николай Васильевич Бугаев (1837—1903) окончил в 1859 г. Московский университет, где его руководителем был Н. Д. Брашман, и после защиты магистерской диссертации по теории рядов (1863) был направлен за границу для подготовки к профессорскому званию. В Берлине он слушал лекции Куммера, Кронекера, Вейерштрасса, в Париже — Лиувилля, Ламе, Дюамеля. После защиты докторской диссертации (1866) Н. В. Бугаев становится профессором Московского университета. Он был одним из членов-учредителей Московского математического общества, а с 1891 г. — его президентом. К участию в работе Общества он привлекал не только ученых, но и студентов. Его учениками были многие известные ученые, в том числе Н. Я. Сонин, Д. Ф. Егоров, Л. К. Лахтин, К. А. Андреев, П. С. Назимов и др. Н. В. Бугаеву принадлежат труды по теории чисел, теории дифференциальных уравнений, приближенным вычислениям и пр.

Основное место в творчестве Бугаева занимала проблема создания в теории чисел методов, столь же общих, как в математическом анализе. С этим связаны его работы, посвященные учению о числовых производных и интегралах по делителям, о тождествах, содержащих функцию  $E(x)$ ,

исследования по применению эллиптических функций в теории чисел и о тождествах, относящихся к вопросам разбиения чисел на слагаемые.

Наибольшее влияние оказали на Бугаева исследования Дирихле по аналитической теории чисел (см. с. 152) и лекции Ж. Лиувилля, в которых была высказана мысль о том, что не только математический анализ может быть использован для изучения вопросов теории чисел, но и теоретико-числовые функции могут быть полезны для изучения различных вопросов математического анализа. Соответствующему кругу вопросов Н. В. Бугаев посвятил докторскую диссертацию «Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа  $E$ » (М., 1866). За ней последовали статьи «Общая теорема теории чисел с одной произвольной функцией» (Матем. сб., 1867, 2, отд. 1, 10—16) и «Некоторые частные теоремы для числовых функций» (Матем. сб., 1868, 3, отд. 1, 69—78). В этих статьях Н. В. Бугаев рассмотрел некоторые общие числовые тождества, полученные с помощью сравнения различных представлений одной и той же функции в виде ряда. В качестве примеров он получил формулы Лиувилля, предложенные им без доказательства, в статьях, опубликованных в журнале Лиувилля (*J. math. pures et appl.*, 1857, 2). Среди общих тождеств, выведенных Бугаевым в этих работах, было, например, такое:

$$\sum_{d \leq n} \theta(d) \sum_{d' \mid d} \psi(d') = \sum_{d \leq n} \psi(d) \sum_{d' \mid d} \theta(d'),$$

где  $\psi(n)$ ,  $\theta(n)$  — мультипликативные числовые функции.

Этими статьями начинается цикл работ Н. В. Бугаева по теории числовых производных и интегралов. Основные методы и результаты были им изложены в его «Учении о числовых производных» (Матем. сб., 1870, 5, отд. 1, 1—63; 1872—1873, 6, отд. 1, 133—180, 201—254, 309—360); резюме этого сочинения Бугаев опубликовал в бюллетене Дарбу (*Bull. sci. math. et astr.* (1), 1876, 10).

Н. В. Бугаев называет сумму  $\sum_{d \mid n} \theta(d) = \psi(n)$  числовым интегралом функции  $\theta(n)$  по делителям, а  $\theta(n) = D\psi(n)$  числовой производной функции  $\psi(n)$  по делителям. Затем вводит понятие числового интеграла и числовой производной по натуральным числам: если  $f(n)$  — произвольная числовая функция, то сумма  $\sum_{k \leq n} f(k) = F(n)$  называется числовым интегралом функции  $f(n)$  по натуральным числам, а выражение  $f(n) = F(n) - F(n-1)$  числовой производной функции  $F(n)$  по натуральным числам. Числовые суммы вида

$$F(n) = \sum_{k \leq n} Q(k) E(n/k),$$

где  $E(x)$  — целая часть  $x$ , Н. В. Бугаев называет числовыми рядами по  $E(n/k)$ . Коэффициенты такого ряда определяются следующим образом:  $Q(n) = D(F(n) - F(n-1))$ .

Из своих общих тождеств Н. В. Бугаев получил множество следствий, в числе которых известные и новые арифметические тождества. Коэффициентами числовых рядов являются числовые функции, играющие важную роль в теории чисел, в том числе функция Мёбиуса.

Среди рассмотренных Бугаевым числовых функций имеется свертка двух произвольных функций

$$\sum_{d \leq n} \theta(d) \chi(d) = \psi(n).$$

Если известны функции  $\theta(n)$  и  $\psi(n)$ , то  $\chi(n)$  находится с помощью числового дифференцирования (предполагается, что функция  $\theta(n)$  мультипликативна). Рассматривается закон числового дифференцирования и интегрирования свертки  $\sum_{d\delta=n} \theta(\delta)\chi(d)$ . Обозначив  $\sum_{d|n} \theta(d) = D^{-1}\theta(n)$ , Н. В. Бугаев получает для любого целого  $k$ , отрицательного или положительного, общее тождество:

$$D^k \sum_{d\delta=n} \chi(\delta)\theta(d) = \sum_{d\delta=n} \chi(\delta) D^k \theta(d) = \sum_{d\delta=n} \theta(d) D^k \chi(\delta).$$

Затем даются некоторые приложения: использование свойств числовых производных для суммирования некоторых рядов, обращения рядов и бесконечных произведений, разложения функций в числовые ряды.

Изучая функцию  $H_1(n)$ , выражающую количество «первичных чисел»  $\leq n$ , т. е. чисел из натурального ряда, не делящихся на квадраты чисел, больших единицы, Н. В. Бугаев нашел несколько интересных соотношений, которые позднее вновь вывел с помощью рядов Дирихле Л. Гегенбауэр<sup>75</sup>:

$$H_1(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{u=1}^{E(\sqrt{n/k})} \mu(u), \quad H_1(n) = \sum_{k \leq \sqrt{n}} \mu(k) E\left(\frac{n}{k^2}\right),$$

$$\sum_{k \leq \sqrt{n}} H_1\left(\frac{n}{k^2}\right) = n.$$

Аналогичные соотношения Н. В. Бугаев получает и для функций  $H_2(n)$ ,  $H_3(n)$ , ...,  $H_m(n)$ , где  $H_2(n)$  — количество натуральных чисел, не делящихся на кубы,  $H_3(n)$  — количество натуральных чисел, не делящихся на четвертые степени и т. д. Эти результаты Бугаева также привлекли внимание Гегенбауера, доказавшего и обобщившего многие результаты Бугаева. Заинтересовавшись сообщением Бугаева на III Съезде русских естествоиспытателей и врачей (1873), П. Л. Чебышев применил к функции  $H_2(n)$  свой способ, изложенный им в работе «О простых числах» (см. с. 162), и нашел границы, между которыми лежит  $H_1(n)$ . Среди рассмотренных Бугаевым числовых функций — функция «порядок числа  $n$ », функция  $\Lambda(n)$ , называемая обычно функцией Г. фон Мангольда и являющаяся числовой производной логарифма:  $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ . С помощью суммы  $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$  Н. В. Бугаев, в частности, выводит тождество Чебышева. Поскольку  $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ , то логарифм произведения  $\Pi(n)$  последовательных натуральных чисел от 2 до  $n$  будет равен

$$\ln \Pi(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{E(n/k)} \Lambda(m).$$

Отсюда, переходя от логарифмов к числам, Н. В. Бугаев получает тождество Чебышева.

Продолжая аналогию с математическим анализом, Н. В. Бугаев рассматривает также «определенные числовые интегралы по делителям» и устанавливает связь между интегралом по делителям и определенным интегралом по делителям и т. д.

<sup>75</sup> *Cegenbauer L. Über die Divisoren der ganzen Zahlen.*— Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Kl., 1885, 91, Abt. 2, 600—621.

Продолжателями трудов Бугаева были его ученики С. И. Баскаков, Н. В. Берви, А. П. Минин, П. С. Назимов, отчасти Н. Я. Сонин и другие. Влияние идей Бугаева сказалось и на творчестве зарубежных математиков: Л. Гегенбауера, И. Грама, М. Чиполла, Ф. Пеллегрини и др.

Параллельно с Бугаевым подобными вопросами занимались и некоторые зарубежные математики, например, Э. Чезаро, иногда повторявший результаты, полученные ранее Н. В. Бугаевым из общих соображений.

В дальнейшем продолжались исследования по разработке операционного исчисления для теоретико-числовых функций, в том числе от нескольких переменных (Э. Белл, Р. Вайдьянатхасвами), и применению операционного исчисления Бугаева — Чиполлы (с упоминанием и без упоминания имен) для получения новых результатов и для доказательства уже известных утверждений, в том числе тождества А. Сельберга (И. Поппен, К. Ямамото и др.). Появились новые виды операционных исчислений, например у А. Л. Амицуры. Эти работы относятся уже к XX в.

Ученик Бугаева Н. Я. Сонин (1849—1915) наряду с основополагающими исследованиями по специальным функциям и другим вопросам анализа опубликовал статью «О числовых тождествах и их приложениях к учению о бесконечных рядах» (Варшавск. ун-та изв., 1885, № 5, 1—28) и ряд работ, связанных с использованием числовой функции  $[x]$  (Бугаев называл ее  $E(x)$ ). Применение этой функции к интегральному исчислению привело Сонины к обобщению известной формулы Эйлера — Маклорена (см. «Об одном определенном интеграле, содержащем числовую функцию  $[x]$ » (Варшавск. ун-та изв., 1885, № 3, 1—28)).

Труды Н. Я. Сонины в свою очередь оказали заметное влияние на творчество Г. Ф. Вороного, работавшего вместе с Сониным в Варшавском университете. Г. Ф. Вороной применил в вопросах теории чисел формулу Сонины и цилиндрические функции, бывшие основным предметом исследований Сонины. Позднее формулы Сонины и Вороного использовал в своих трудах И. М. Виноградов.

#### 4. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

##### Работы Ж. Лиувилля

В заключение раздела об аналитической теории чисел мы остановимся на одной ее области, которая только начинала развиваться в XIX в., впоследствии же превратилась в одну из важных и увлекательных ее дисциплин. Это теория трансцендентных чисел. Напомним, что алгебраическими числами называют все корни алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, а трансцендентными — остальные иррациональные числа.

Предположения о трансцендентности некоторых математических постоянных начали высказываться еще в XVII в. Дж. Валлис в 1656 г. выдвинул предположение об особой природе числа  $\pi$ , отличной от обычных иррациональностей. В несколько иной форме эту мысль выразил сто лет спустя, в 1758 г., Эйлер, заметив несколько позднее, что, однако, невозможность выразить  $\pi$  через «радикальные количества» не установлена (1775, опубл. 1785). И. Г. Ламберт, в 1766 г. доказавший (не вполне строго) иррациональность  $e$  и  $\pi$  (опубл. 1768 и 1770), был твердо уверен, что оба эти числа не принадлежат к «радикальным иррациональным количествам». Эту уверенность разделял и А. М. Лежандр, в 1800 г. выполнивший пробел в доказательстве Ламберта; Лежандр же впервые сформу-



Ж. ЛИУВИЛЛЬ

лировал во вполне современных выражениях понятие трансцендентного числа, добавив, что доказать трансцендентность  $\pi$ , по-видимому, очень трудно. В XVIII в. были высказаны предположения о трансцендентности целых классов чисел определенного вида. Так, Эйлер в I томе «Введения в анализ бесконечно малых» (1748) писал, что все числа  $\log_a b$ , где  $a$  и  $b$  рациональны,  $b$  не есть рациональная степень  $a$ , трансцендентны (см. ИМ, т. 3, с. 110—114).

Первое доказательство существования трансцендентных чисел дал Ж. Лиувилль (1844, 1851).

Жозеф Лиувилль (1809—1882), воспитанник и затем профессор Политехнической школы, а позднее Коллеж де Франс, лекции в которой он ряд лет совмещал с преподаванием на Факультете наук Сорбонны, был очень активным, разносторонним и влиятельным ученым; этому способствовало и его избрание в 1839 г. в Парижскую академию наук. В 1836 г. Лиувилль начал издание одного из ведущих математических журналов *Journal de mathématiques pures et appliquées* и выпустил 39 его томов, уступив редактирование его другому лицу в 1874 г., когда он оставил и кафедру рациональной механики в Сорбонне; лекции в Коллеж де Франс, где профессора читают курсы на любые выбранные ими темы, он продолжал читать еще пять лет.

Лиувилль опубликовал около 400 статей по многим вопросам: теории интегрирования алгебраических функций, двояко-периодическим функциям, обыкновенным дифференциальными уравнениям (где с его именем связан важный класс уравнений Штурма — Лиувилля и известная в тео-

рии линейных уравнений формула Лиувилля — Остроградского), математической физике, дифференциальной геометрии и т. д. Важной его заслугой, как упоминалось, была правильная оценка значения оставшихся в безвестности работ Галуа и их первая публикация в 1846 г. О вкладе Лиувилля в теорию алгебраических чисел также говорилось ранее.

Одной из сторон творчества Лиувилля является его постоянный интерес к доказательствам неразрешимости (в том или ином смысле) различных задач, или, наоборот, к доказательствам существования тех или иных объектов. Конечно, теоремы существования и доказательства неразрешимости были вообще в поле зрения математики той эпохи, но у Лиувилля занятия вопросами этого рода получили особенно широкий размах. Таковы были, например, его исследования проблем интегрируемости в конечном виде алгебраических функций, условий разрешимости в квадратурах уравнения Риккати, ряд работ по теории чисел. Таковы были и его основополагающие исследования в совершенно неизведанной тогда области — теории трансцендентных чисел.

Свой основной результат, содержащий эффективное доказательство бесконечности множества трансцендентных чисел, Лиувилль изложил сперва в кратких заметках в *Comptes rendus* Парижской академии наук в 1844 г. и подробнее в статье 1851 г. «О весьма обширных классах количеств, значение которых не является ни алгебраическим, ни сводящимся к алгебраическим иррациональностям» (*Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.* — *J. math. pures et appl.*, 1851, 16, 133—142).

Мы изложим основное содержание работ Лиувилля, точно следуя лучшему знатоку истории этого вопроса А. О. Гельфонду, который в одной статье 1930 г. писал: «Признак трансцендентности числа, устанавливаемый в этих работах, построен на том, что отклонение алгебраического числа  $\alpha$  от приближенно изображающей его рациональной дроби  $p/q$  не может быть меньше некоторого числа, зависящего только от знаменателя дроби и степени уравнения, которому удовлетворяет  $\alpha$ . Точная формулировка этого свойства алгебраических чисел следующая:

Пусть  $\alpha$  удовлетворяет уравнению  $n$ -й степени с целыми коэффициентами,  $p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа; тогда абсолютная величина разности  $|\alpha - p/q|$  должна удовлетворять неравенству

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Aq^n},$$

где  $A$  — постоянная, не зависящая от  $q$ .

Доказать это можно чрезвычайно просто. Пусть уравнение, которому удовлетворяет  $\alpha$ , будет неприводимым уравнением  $n$ -й степени с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

По известной из дифференциального исчисления формуле Лагранжа можно написать

$$f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f' \left[ \alpha + \theta \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) \right], \quad |\theta| < 1,$$

или, так как  $f(\alpha) = 0$ ,

$$\frac{p}{q} - \alpha = \frac{f(p/q)}{f'[\alpha + \theta((p/q) - \alpha)]} = \frac{a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_nq^n}{q^n f'[\alpha + \theta((p/q) - \alpha)]},$$

откуда, так как числитель есть целое число, а знаменатель не равен нулю,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Aq^n}, \quad A > \max_{|\theta| \leq 1} \left| f' \left[ \alpha + \theta \left( \frac{p}{q} - \alpha \right) \right] \right|.$$

Из этого неравенства Лиувилля непосредственно следует, что если для какого-нибудь действительного числа  $\omega$  существует последовательность целых чисел  $p$  и  $q$  таких, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ln |\omega - p/q|}{\ln q} = -\infty, \quad (23)$$

то число  $\omega$  обязательно должно быть трансцендентным числом. Равенство (23) является, таким образом, достаточным признаком трансцендентности. Можно, исходя из этого уравнения, построить простой пример трансцендентного числа. Пусть  $l > 1$  есть какое-нибудь целое число. Тогда число  $\omega$ , определяемое рядом

$$\omega = 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l \cdot 2} + \dots + \frac{1}{l \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{1}{l \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)} + \dots, \quad (24)$$

будет, очевидно, трансцендентным числом. Умножим обе части равенства (24) на  $l^n$ . Тогда будем иметь

$$l^n \omega = \sum_{k=0}^n l^{n-k} + \frac{1}{l^{n+1}} [1 + l^{-(n+1)(n+1)} + \dots].$$

Положив  $l^n = q$ ,  $\sum_{k=0}^n l^{n-k} = p$  и замечая также, что  $1 + l^{-(n+1)(n+1)} + \dots < 2$ , имеем окончательно

$$|\omega q - p| < 2/q^n, \quad (25)$$

где  $\lim_{q \rightarrow \infty} n = \infty$ .

Сравнивая неравенство (25) с признаком (23), заключаем, что число  $\omega$  трансцендентно.

Числа  $\omega$ , получающиеся из ряда (24), были найдены Лиувиллем и явились первыми примерами трансцендентных чисел<sup>76</sup>.

Арифметическая природа числа  $e$  также интересовала Лиувилля, и еще несколько ранее работы по теории трансцендентных чисел он доказал, что  $e$  не может быть корнем квадратного или биквадратного уравнения с целыми коэффициентами (*J. math. pures et appl.*, 1840, 5). Следующий блестящий результат — доказательство трансцендентности  $e$  — получил Ш. Эрмит, применивший для этого средства классического анализа.

### Ш. Эрмит и доказательство трансцендентности числа $e$ ; теорема Ф. Линдемана

Непосредственно подготовительным исследованием Эрмита было новое доказательство иррациональности числа  $e$ , доложенное им Британской ассоциации прогресса наук в 1873 г. Эрмит<sup>77</sup> исходит из ряда для  $e^x$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

<sup>76</sup> Гельфонд А. О. Избранные труды. М., «Наука», 1973, с. 16—17. Цитата взята из статьи «Очерки истории и современного состояния теории трансцендентных чисел», впервые опубликованной в 1930 г.

<sup>77</sup> *Hermite Ch. Oeuvres*. Т. 3. Paris, 1912, p. 127—134.

Он обозначает частичную сумму этого ряда  $F(x)$

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

и рассматривает отношение разности  $e^x - F(x)$  к  $x^{n+1}$ :

$$\frac{e^x - F(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(n+k+1)!} \quad (26)$$

Дифференцируя (26)  $n$  раз, Эрмит приходит к равенству

$$e^x \Phi(x) - \Phi_1(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{(n+1)(n+2)\dots(2n+k+1)} \cdot \frac{x^k}{k!}, \quad (27)$$

где  $\Phi(x)$  и  $\Phi_1(x)$  — полиномы с целыми коэффициентами. Допуская, что  $e^{x_0}$  при целом  $x = x_0$  равно рациональному числу  $e^{x_0} = b/a$ , Эрмит полагает в (27)  $x = x_0$ . В левой части (27) при этом получается некоторое число, большее  $1/a$ , а в правой величина, которая при стремлении  $n$  к  $\infty$  может стать меньше любого сколь угодно малого заданного числа. Полученное противоречие доказывает, что  $e^x$  ни при каком целом  $x$  не может быть рациональным числом. В частности,  $e$  — число иррациональное.

Аналогичный прием Эрмит использовал и в доказательстве трансцендентности  $e$ , сообщенном им в статье «Об экспоненциальной функции» (Sur la fonction exponentielle. — C. r. Acad. sci. Paris, 1873, 77)<sup>78</sup>.

Мы изложим доказательство теоремы Эрмита в позднейшей упрощенной переработке, по идее принадлежащей, как указал А. О. Гельфонд, А. Гурвицу (1859—1919), немецкому математику, работавшему в университетах Гёттингена, Кёнигсберга и Цюриха, и выполненной профессором Петербургского университета К. А. Поссе (1847—1928)<sup>79</sup>.

Пусть  $f(x)$  — любой многочлен от  $x$ ,  $f^{(k)}(x)$  —  $k$ -я производная от  $f(x)$ ,  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)$  — многочлен той же степени, что и  $f(x)$ . Интегрированием по частям можно получить тождество

$$e^x F(0) - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt. \quad (28)$$

Предположим, что  $e$  удовлетворяет алгебраическому уравнению с целыми рациональными коэффициентами

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0 \quad (a_0 \neq 0), \quad (29)$$

т. е. что  $e$  — число алгебраическое. Положив в (28)  $x = k$ , умножив полученное равенство на  $a_k$ , беря последовательно  $k = 0, 1, \dots, n$  и складывая полученные равенства, будем иметь

$$F(0) \sum_{k=0}^n a_k e^k - \sum_{k=0}^n a_k F(k) = \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t) dt, \quad (30)$$

и, поскольку  $e$  удовлетворяет равенству (29), имеем

$$a_0 F(0) + \sum_{k=1}^n a_k F(k) = - \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t) dt. \quad (31)$$

<sup>78</sup> *Hermite Ch. Oeuvres*. Т. 3. Paris, 1912, p. 150—181.

<sup>79</sup> *Гельфонд А. О. Избранные труды*. М., «Наука», 1973, с. 19.



Ф. ЛИНДЕМАН

Выберем в качестве  $f(x)$  выражение

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \prod_{k=1}^n (k-x)^p,$$

где  $p > n + |a_0|$ ,  $p$  — простое число. Теперь применяется тот же прием, какой был использован Эрмитом при доказательстве иррациональности  $e$ . Правая часть равенства (31), как легко показать, стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , а левая часть по абсолютной величине при достаточно большом  $n$  представляет собой число, большее или равное 1. Полученное противоречие вызвано предположением, что  $e$  — алгебраическое число. Следовательно,  $e$  — число трансцендентное.

Эрмит считал, что дать подобное доказательство для числа  $\pi$  будет нелегко. Но в 1882 г. Ф. Линдеман, используя идею Эрмита, дал доказательство трансцендентности  $\pi$ .

Фердинанд Линдеман (1852—1939), ученик геометра А. Клебша, преподавал в нескольких университетах Германии, более всего в Кёнигсберге, с 1883 г., а затем с 1893 г. — в Мюнхенском. От Клебша Линдеман унаследовал интерес к теории эллиптических и абелевых функций и к геометрии кривых. Он работал также в теории конформных отображений, занимался решением алгебраических уравнений с помощью трансцендентных функций, геометрическим представлением квадратичных форм, теорией инвариантов, рядами, дифференциальными уравнениями, а также вопросами истории и философии математики и некоторыми разделами физики.

Наибольшую известность Линдеману принесло доказательство трансцендентности числа  $\pi$ , позволившее решить, наконец, древнюю задачу о квадратуре круга, установить, что невозможно построить квадрат, по площади равный какому-либо данному кругу с помощью циркуля и линейки (и, более того, с помощью каких бы то ни было алгебраических кривых).

Доказательство трансцендентности числа  $\pi$  Линдеман получил как простое следствие теоремы, обобщавшей результат Эрмита. Линдеман сообщил свое доказательство в письме к Эрмиту, который немедленно доложил о нем Академии и опубликовал его содержание под заглавием «Об отношении окружности к диаметру и о логарифмах соизмеримых чисел или алгебраических иррациональностей» (*Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes néperiens des nombres commensurables ou des irrationsnelles algébriques*:— *C. r. Acad. sci. Paris*, 1882, 95, 2, 72—74). По-видимому, название это дано работе Эрмитом. Тогда же Линдеман напечатал более подробное изложение своего открытия в статье «О числе  $\pi$ » (*Über die Zahl  $\pi$* .— *Math. Ann.*, 1882, 20).

Результат Эрмита можно сформулировать следующим образом: невозможно равенство

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \dots + N_k e^{x_k} = 0, \quad (32)$$

где все  $N_j$  — какие-либо целые числа (не все равные нулю), а все  $x_j$  — отличные друг от друга целые числа. Линдеман доказал, что невозможно и равенство

$$A_1 e^{\omega_1} + A_2 e^{\omega_2} + \dots + A_k e^{\omega_k} = 0, \quad (33)$$

где все  $A_j$  — алгебраические, а все  $\omega_j$  — алгебраические и различные числа. Отсюда следовало, что  $e^\omega$ , где  $\omega$  — алгебраическое число, отличное от нуля, есть число трансцендентное, а значит, и трансцендентен логарифм любого алгебраического числа, не равного единице. А так как, согласно формуле Коутса — Эйлера,  $e^{\pi i} = -1$ , то  $\pi i$  трансцендентно и, поскольку  $i$  — число алгебраическое, трансцендентно число  $\pi$ .

Впоследствии были предложены новые доказательства Эрмита и Линдемана; мы воспроизвели в общих чертах одно такое доказательство теоремы Эрмита. К. Вейерштрасс в 1885 г. дал новый более простой вывод теоремы Линдемана и указал, что при алгебраическом  $\omega$ , не равном нулю,  $\sin \omega$  есть число трансцендентное. В России на работы Эрмита и Линдемана откликнулся А. А. Марков в брошюре «Доказательство трансцендентности чисел  $e$  и  $\pi$ » (СПб., 1883).

Несколько особое место занимает результат, опубликованный в один год со статьей Эрмита Г. Кантором, который в статье «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (*Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*.— *J. für Math.*, 1873, 77) установил существование трансцендентных чисел средствами теории множеств. Именно, Кантор доказал несчетность множества всех чисел на отрезке  $[0, 1]$  и счетность на том же отрезке множества всех алгебраических чисел. Отсюда следует существование трансцендентных чисел и, более того, что множество таких чисел несчетное.

Принципиально новые идеи в теории трансцендентных чисел внесены были в 30-е годы XX в. А. О. Гельфондом, К. Зигелем и другими учеными, в значительной мере в связи с поставленной в 1900 г. на Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильбертом проблемой об арифметической природе чисел вида  $\alpha^\beta$ , где  $\alpha$  — алгебраическое число, отличное

от 0 и 1, а  $\beta$  — алгебраическое иррациональное. В 1934 г. А. О. Гельфонд доказал предположение Гильберта о трансцендентности всех таких чисел, доказав тем самым в обобщенной форме и упоминавшееся утверждение Эйлера: логарифм алгебраического числа при алгебраическом основании либо рационален, либо трансцендентен. Другое и независимое доказательство этого предположения опубликовал несколько позднее в том же году Т. Шнейдер.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя краткий итог рассмотренным работам по теории чисел, мы видим, что на протяжении XIX в. в ней были созданы большие новые разделы и развиты новые методы исследования, а главное, что она впервые заняла вполне равноправное место в системе математических наук. В предыдущем столетии многие математики считали, что занятие теорией чисел может служить изысканным развлечением отдельных умов, но в общем является праздным делом. В XIX в. стало очевидным, что гармоническое развитие математики в целом невозможно без активной разработки теории чисел, которая не только сама использует алгебраические, аналитические и геометрические средства для решения своих задач, но и содействует введению новых важных понятий, методов и теорий в других областях математики. Показателем резко возросшей роли теории чисел служит длинный перечень крупных ученых, занимавшихся ею в XIX в., и возникновение целых научных школ, одним из замечательных примеров которых является Петербургская школа теории чисел. В XIX в. было решено немало давно поставленных арифметических задач и выдвинуты новые трудные проблемы. Все же многие классические задачи, вроде гипотезы Гольдбаха о представимости всех натуральных чисел суммами не более чем трех простых чисел, не могли быть решены средствами, которыми располагала теория чисел прошлого века. Для этого потребовались новые, еще более действенные методы, создание которых выпало на долю ученых XX в.

## Глава четвертая

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



### Введение

Идеи и методы теории вероятностей, развивавшиеся со второй половины XVII в., получили новые стимулы для дальнейшего прогресса в XIX столетии. Эти стимулы, весьма различные по содержанию, были связаны как с развитием естествознания и практическими потребностями общества, так и с чисто математическими постановками вопросов.

Успехи астрономии, включая ту ее часть, которая была необходима для мореплавания, а затем и физики с особой остротой выдвинули задачу создания единой теории ошибок наблюдений. В этом нуждались также картографирование европейских государств и неоднократное уточнение размеров и формы Земли по астрономо-геодезическим и маятниковым измерениям, а вместе с тем и введение метрической системы мер, которая основывалась на осуществлении грандиозной программы измерения длины четверти парижского меридиана.

Прогресс артиллерии привел к постановке многочисленных вопросов теории стрельбы, основанной на идеях теории вероятностей.

Глубокие проблемы, выдвинутые гипотезами Канта и Лапласа о происхождении Солнечной системы, возбудили интерес к общим вопросам космологии, в частности к установлению геометрии окружающего мира. Первая попытка проверки евклидовости геометрии реального пространства была предпринята Н. И. Лобачевским в 1842 г. и привела его к рассмотрению важной задачи теории вероятностей, связанной с суммированием независимо распределенных случайных величин<sup>1</sup>.

Все возрастающее государственное, общегражданское и экономическое значение приобретала демография и, соответственно, разработка ее методов, по существу относящихся к математической статистике.

Второй круг вопросов, также приводящих к математической статистике, был обусловлен запросами биометрики — новой научной дисциплины, возникшей в результате работ Ч. Дарвина и посвященной математической обработке результатов биологических наблюдений, а также исследованию различных статистических закономерностей в биологии.

Новой областью применения теории вероятностей оказалась физика; осознание вероятностного характера законов естествознания — вот важнейший вывод, полученный в XIX в.

<sup>1</sup> См. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. Т. 5. М.—Л., Гостехиздат, 1951, с. 333—341. Впрочем, эта задача, в основном в связи с другими запросами астрономии, рассматривалась также в работах Т. Симпсона, Ж. Л. Лагранжа и П. С. Лапласа.

В собственно теории вероятностей во второй половине XIX в. естественно стали рассматриваться задачи, связанные с поведением случайных величин, а не с оценкой вероятностей случайных событий. Важнейшую роль в этом коренном изменении ее содержания сыграли работы П. Л. Чебышева.

Само понятие случайной величины, которое длительное время не было даже определено и рассматривалось как самоочевидное, было надлежащим образом формализовано в работах А. М. Ляпунова, П. Леви, А. Н. Колмогорова только в XX в., да и то далеко не сразу.

### Теория вероятностей у П. С. Лапласа

В IV гл. т. 3 «Истории математики», посвященной развитию теории вероятностей в XVIII в., частично был описан вклад в эту науку, сделанный Лапласом (1749—1827), творческая деятельность которого продолжалась и в XIX столетии. Биография этого выдающегося ученого приведена там же (ИМ, т. 3, с. 146—148).

Формулируя свое детерминистическое кредо, Лаплас утверждал, что каждое состояние Вселенной есть следствие ее предшествующих и причина ее будущих состояний. Вместе с тем он понимал, что при исследовании ряда важнейших явлений практически невозможно обойтись без привлечения теоретико-вероятностных соображений. Вот одно из высказываний Лапласа, поясняющих сказанное: «Это (лунное) неравенство, хотя и указываемое наблюдениями, не казалось результатом теории всемирного притяжения и потому пренебрегалось большинством астрономов. Однако после проверки его реальности исчислением вероятностей оно показалось мне указанным со столь большой вероятностью, что я счел необходимым отыскать (его) причину»<sup>2</sup>.

Продолжая работы своих предшественников — Я. и Д. Бернулли, А. Муавра и многих других, Лаплас в ряде отдельных мемуаров настолько продвинул теорию вероятностей, что в начале XIX в. поставил себе целью объединить все сделанное в этой теории в едином труде — «Аналитической теории вероятностей» (*Théorie analytique des probabilités*. Paris, 1812), которая, несмотря на тяжеловесность изложения, некоторые неясности в трактовке основных понятий и недостаточное единство отдельных ее разделов, стала основным трудом в этой области математики вплоть до работ П. Л. Чебышева. Характерно название книги, напоминающее о более ранней «Аналитической механике» Лагранжа (1788) и несколько более поздней «Аналитической теории тепла» Фурье (1821) и выражающее тот факт, что основным аппаратом теории вероятностей служил математический анализ.

При жизни Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» издавалась еще два раза: в 1814, когда книге было предпослано популярное введение «Опыт философии теории вероятностей» (*Essai philosophique sur les probabilités*), и в 1820 г. К этому 3-му изданию автор добавил несколько приложений; кроме того, книга опубликована в 7-м томе «Полного собрания сочинений» (*Oeuvres complètes*) Лапласа в 1886 г.

Ранее уже говорилось коротко об этом труде Лапласа (ИМ, т. 3, с. 150—151), здесь же мы подробнее остановимся на второй из двух составляющих его книг, предметом которой является сама теория вероятностей (первая книга посвящена вспомогательным материалам и средствам: исчислению производящих функций с приложением к решению уравне-

<sup>2</sup> *Laplace P. S. Oeuvres complètes*. Т. 7. Paris, 1886, p. 361.

ний в обыкновенных и частных конечных разностях и приближенному вычислению определенных интегралов).

В главе 1 второй книги приведены классическое определение вероятности события, фактически применявшееся еще Д. Кардано и явно введенное Я. Бернулли и А. Муавром, как отношения количества благоприятных случаев к общему количеству равновозможных случаев, теоремы сложения и умножения вероятностей независимых событий, несколько теорем об условных вероятностях событий, а также определение математического и морального ожиданий.

В главе 2 Лаплас решает ряд задач элементарной теории вероятностей, не давая им непосредственного естественнонаучного приложения, и среди них классическую задачу о разорении игрока, восходящую к Х. Гюйгенсу; здесь же он изучает знаменитую схему Я. Бернулли, рассмотренную также и А. Муавром.

Вот, например, первая из указанных задач, которая в настоящее время рассматривается в рамках задач на случайные блуждания частицы в одномерном пространстве, имеющих важные физические приложения: у игрока  $A$  имеется  $a$  жетонов, у игрока  $B$  —  $b$  жетонов, а вероятность выигрыша каждой партии этими игроками составляют соответственно  $p$  и  $q$ . Какова вероятность разорения игрока  $B$  не более чем за заданное число партий  $n$ ?

Введем в рассмотрение вероятность  $y_{x,s}$  того, что игрок  $B$ , имея  $x$  жетонов, разорится не более чем за  $s$  партий. Легко заметить, что эта вероятность удовлетворяет следующему уравнению в частных конечных разностях:

$$y_{x,s} = py_{x+1,s-1} + qy_{x-1,s-1}.$$

Искомая вероятность  $y_{x,s}$ , очевидно, удовлетворяет таким естественным граничным условиям:  $y_{x,s} = 0$  при  $x > s$  и  $y_{x,s} = 1$  при  $x = 0$ . Решение этого уравнения Лаплас находит посредством использования производящих функций двух переменных.

Далее Лаплас рассмотрел несколько частных случаев: равные исходные капиталы ( $a = b$ ), бесконечно большой капитал игрока  $A$  ( $a = \infty$ ). При  $p = q$  для последнего случая им получен изящный окончательный результат

$$y_{b,n} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin b\varphi (\cos \varphi)^{n+1}}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Заметим, что задачу разорения игрока  $B$  при условии, что игрок  $A$  имеет бесконечно большой капитал, впервые рассматривал еще Муавр.

В главе 7 Лаплас рассмотрел более простую задачу — разорение игрока при неограниченном продолжении игры. Вероятность разорения игрока  $B$  в этой задаче дается формулой (Я. Бернулли)

$$P = \frac{p^b (p^a - q^a)}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Эта формула была также получена Лапласом в § 3 его ранней работы «Мемуар о вероятностях» (*Mémoire sur les probabilités* (1778), 1781)<sup>3</sup> посредством сведения задачи к несложному уравнению в конечных разностях.

<sup>3</sup> *Laplace P. S. Oeuvres complètes. T. 9. Paris, 1893, p. 383—485.*



П. С. ЛАПЛАС

В той же главе Лаплас рассматривает последовательное извлечение из урны билетиков с номерами  $1, 2, \dots, n$ , предварительно заложенных в эту урну в указанной последовательности и перемешанных. Возможно, замечает Лаплас, что вероятности выхода номеров все-таки не равны друг другу; однако неравенства этих вероятностей уменьшатся, если закладывать билетики в урну не по порядку номеров, а по порядку их случайного извлечения из «предварительной» урны. Еще больше эти неравенства уменьшаются, если установить две, три и т. д. «предварительные» урны.

Этот пример можно считать частным случаем примера тасования колоды карт, т. е. примером испытаний, связанных в марковскую цепь. Без строгого доказательства Лаплас отмечает существование предельного состояния — равенства вероятностей извлечения номеров билетиков.

В главе 3 Лаплас доказывает предельные теоремы Муавра — Лапласа о сходимости биномиального распределения к нормальному и в отличие от Муавра пользуется при этом формулой суммирования Маклорена — Эйлера.

Интегральная предельная теорема была получена Лапласом в виде

$$P\{-l \leq \mu - np - z \leq l\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}}} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi xx'}} e^{-\frac{l^2 n}{2xx'}}.$$

Здесь  $\mu$  — количество появлений события в схеме испытаний Я. Бернулли,  $p$  — вероятность появления события в единичном испытании,  $n$  — количество испытаний,  $z$  — число, по модулю меньше единицы,  $x = np + z$  и  $x' = np - z$  ( $q = 1 - p$ ).

Эта формула дает хорошую оценку приближения вероятности неравенства, стоящей в левой части. Ее можно считать исходным пунктом последующих исследований, нашедших определенное завершение в работе С. Н. Бернштейна «Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа» (Изв. АН СССР, Сер. матем., 1943, 7, 3—16).

Предельные теоремы Лаплас применил к решению ряда урновых задач, в процессе которого впервые ввел в теорию вероятностей дифференциальные уравнения в частных производных.

Вот одна из таких задач, восходящая к Д. Бернулли (1770). В каждой из двух урн находятся по  $n$  шаров, белых и черных, а всего в обеих урнах  $n$  белых и  $n$  черных шаров. Шары циклически, по одному, перекладываются из урны в урну. Какова вероятность  $z_{x,r}$ , что в урне  $A$  после  $r$  тиражей (циклов) окажется  $x$  белых шаров?

Получив для искомой вероятности уравнение в конечных частных разностях, Лаплас при помощи нестрогих преобразований перешел от него к дифференциальному уравнению

$$u'_r = 2u + 2\mu u'_\mu + u''_{\mu\mu} \quad \left( u = z_{x,r}, \quad r = nr', \quad x = \frac{n + \mu \sqrt{n}}{2} \right) \quad (1)$$

и для его решения применил полиномы, которые теперь называются полиномами Чебышева — Эрмита.

Эта задача впоследствии (в 1915 г.) рассматривалась А. А. Марковым и В. А. Стекловым, а М. Смолуховский в том же году вывел уравнение (1) в несколько более общем виде в связи со своими исследованиями броуновского движения.

И Д. Бернулли и Лаплас заметили, что описанный процесс перекладки шаров приводит к тому, что число белых шаров в разных урнах оказывается почти одним и тем же, приближенно равным частному от деления общего числа всех белых шаров на количество урн. Лаплас доказал этот факт при произвольном начальном распределении шаров в урнах. Таким образом, историю теории случайных процессов следует начинать по крайней мере с Д. Бернулли (1770), поскольку знаменитая модель П. и Т. Эрнфестов (1907, см. с. 231), от которой принято начинать историю этих процессов, по существу совпадает с моделью (задачей) Д. Бернулли — Лапласа. Несомненно, что этот результат следует отметить и с иных позиций: он предвосхищает знаменитую эргодическую теорему А. А. Маркова для марковских цепей.

Сам Лаплас, хотя и не мог указать непосредственного приложения этой задачи, предвидел ее существенное значение: «...Первоначальная неправильность, — говорит он, — исчезает со временем, чтобы уступить место самому простому порядку... Можно распространить этот результат на все сочетания в природе, в которых постоянные силы... устанавливают правильный образ действий, способный вызвать даже из недр хаоса системы, управляемые удивительными законами»<sup>4</sup>.

Подобное же мнение Лаплас высказывал по поводу предельных теорем вообще, справедливо усматривая в них математический аппарат для исследования статистической значимости результатов наблюдений и познания демографических законов и даже полагая, что именно действие этих теорем в конце концов обеспечит торжество «вечных принципов разума, справедливости и гуманности»<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908, с. 73.

<sup>5</sup> Там же, с. 65.

Этот наивный гуманизм Лапласа, а также и его справедливое мнение о пользе теории вероятностей в гражданской жизни привлекали умы и, в частности, на русской почве нашли сторонников, под влиянием которых к теории вероятностей обратился П. Л. Чебышев (см. с. 216).

Действием тех же предельных теорем Лаплас объяснил устойчивость и доходов от лотереи Франции, и относительного количества браков, ежегодно заключаемых в данной стране, и писем, отправляемых в ненадписанных конвертах. Первые два факта были известны, впрочем, еще до Лапласа.

Предельной теоремой Муавра—Лапласа Лаплас пользовался также в главе 9 при решении задач, потребовавшихся ему в связи с подсчетами пожизненных рент. Как и в теории ошибок (см. с. 194), он применял при этом характеристические функции и формулу обращения — перехода от характеристической функции к плотности распределения. Не ограничиваясь схемой испытаний Я. Бернулли, в одной из своих методических задач Лаплас рассмотрел обобщение этой схемы, которое теперь называется пуассоновым, и следует добавить, что упомянутое выше соображение Лапласа об устойчивости дохода от лотереи и др. свидетельствует о том, что Лаплас фактически пришел к пониманию пуассонова «закона больших чисел» (см. с. 200).

Особое место в теории вероятностей Лапласа занимало исследование конечных случайных сумм. Зачатки подобных исследований встречаются уже у Г. Галилея, который подсчитал вероятность выпадения того или иного количества очков при бросании трех игральных костей. Более общие результаты, полученные с применением производящих функций, принадлежат А. Муавру, а Т. Симпсон, Р. Бошкович и Ж. Л. Лагранж перенесли исследование конечных случайных сумм в область математической обработки наблюдений, причем последний применил для этой цели производящие функции непрерывных распределений и тем самым предвосхитил введение характеристических функций.

Лаплас неоднократно, притом различными методами, выводил законы распределения конечных сумм, в основном в астрономическом контексте, как, например, при решении следующей задачи в «Мемуаре о среднем наклонении орбит комет; о фигуре Земли и о функциях» (*Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes; sur la figure de la terre, et sur les fonctions, 1773 (1776)*)<sup>6</sup>: наклонения отдельных комет относительно эклиптики случайны — мы бы сказали взаимно независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0, \pi/2]$ ; какова вероятность, что среднее наклонение  $n$  комет заключено в заданных пределах?

Рассматривая эту задачу для  $n = 2, 3$  и  $4$ , Лаплас составляет интегральное соотношение для перехода от случая  $(n - 1)$  к случаю  $n$ . По сути это соотношение эквивалентно известной формуле

$$p_n(x) = \int_a^b p_{n-1}(x - z) p(z) dz,$$

которой в явном виде у Лапласа еще нет, но которую он фактически сумел использовать для вывода, с незначительной ошибкой, искомой функции  $p_n(x)$ .

Лаплас поставил также задачу («Аналитическая теория вероятностей», кн. 2, гл. 2) о распределении и среднем значении функции  $\psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  неотрицательных случайных переменных  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , сумма которых

<sup>6</sup> *Laplace P. S. Oeuvres complètes. T. 8. Paris, 1891, p. 279—321.*

принимает заданное значение и плотности распределения которых  $\varphi_i(x_i)$ , вообще говоря, различны. При вычислении многомерного интеграла от этой функции он пользовался разрывными множителями и по существу пришел к так называемой формуле Дирихле.

Непосредственно интересующий Лапласа случай  $\psi = t_1 + t_2 + \dots + t_n$  он рассмотрел для распределений вида  $\varphi_i(x) = a + bx + cx^2$  и

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \beta x (\beta > 0), & 0 \leq x \leq h, \\ \beta(2h - x), & h \leq x \leq 2h, \end{cases}$$

фактически пользуясь формулами

$$(a) \quad p_n(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int \int \dots \int_{x_1+x_2+\dots+x_n \leq x} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right],$$

$$(б) \quad p_n(x) = \frac{1}{dx} (I_1 - I_2),$$

где интеграл  $I_2$  совпадает с интегралом в строке (а), а интеграл  $I_1$  отличается от последнего областью интегрирования  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq x + dx)$ .

В связи с описанным исследованием Лаплас решает и такую задачу: отрезок разбит на  $i$  равных или неравных интервалов, из концов которых к нему восставлены перпендикуляры. Длины этих перпендикуляров образуют невозрастающую последовательность, сумма этих длин равна  $s$ . Какова при многократном построении будет средняя ломаная (а в непрерывном случае — средняя кривая)? Эта задача допускает истолкование на языке случайных функций: каждое построение есть реализация случайной функции, а искомая средняя кривая — математическое ожидание этой функции.

Пусть теперь некоторое событие может быть вызвано только  $i$  взаимоисключающими причинами, которые расположены в порядке убывания их (субъективных) вероятностей. Среднее значение вероятности каждой причины можно найти, если указанную процедуру проделают несколько человек, и Лаплас предлагает применять подобную процедуру в судах и при выборах. Вряд ли последняя рекомендация когда-либо осуществлялась, однако рассуждение Лапласа может быть отнесено к предьстории ранговой корреляции и статистике случайных процессов.

Важнейшее место в книге Лапласа занимают проблемы, которые теперь относятся к области математической статистики. Теорию вероятностей он полагал скорее естественнонаучной, чем математической дисциплиной, и уже по этой причине не мог выделить отдельно математическую статистику. Тем интереснее, что по поводу проблем математической статистики Лаплас упоминает в «Мемуаре о вероятностях» «новую ветвь теории вероятностей»<sup>7</sup>.

Остановимся теперь на типичной задаче математической статистики (глава 6 «Аналитической теории вероятностей»), которую Лаплас решает по независимо введенному им методу Т. Байеса (см. ИМ, т. 3, с. 137—139).

Вероятность  $x$  «простого» события, например вероятность новорожденному парижанину оказаться мальчиком, неизвестна. Требуется оценить ее по статистическим данным о рождаемости. Полагая, что  $z(x)$  —

<sup>7</sup> Laplace P. S. Oeuvres complètes. Т. 9. Paris, 1893, p. 383.

априорный закон распределения вероятностей величины  $x$ , Лаплас принимает, что

$$P\{\theta \leq x \leq \theta'\} = \frac{\int_{\theta}^{\theta'} yz dx}{\int_0^1 yz dx} \quad (0 < \theta, \theta' < 1). \quad (2)$$

Объясним смысл функции  $y(x)$ . Пусть в течение ряда лет количество рождений мальчиков составило  $p \approx 0,393 \cdot 10^6$  и количество рождений девочек  $q \approx 0,378 \cdot 10^6$ . Тогда, полагает Лаплас,

$$y(x) = C_n^p x^p (1-x)^q, \quad (3)$$

где  $n = p + q$ .

Таким образом, задача Лапласа является задачей оценки параметра биномиального распределения. Приняв  $z = 1$ , Лаплас после длительных преобразований получает из (2)

$$P\{-\theta \leq x - a \leq \theta\} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt,$$

где  $\theta$  — малая величина порядка  $p^{-1/2}$ ,  $a$  — точка максимума для функции (3), а верхний предел интеграла

$$\tau = \sqrt{\frac{T^2 + T'^2}{2}}, \quad T = \sqrt{\ln y(a) - \ln y(a - \theta)},$$

$$T' = \sqrt{\ln y(a) - \ln y(a + \theta)}.$$

Для одновершинной кривой (3) точка максимума

$$a = p/(p + q), \quad (4)$$

конечно, представляется естественной оценкой вероятности  $x$ . И все-таки математическое ожидание этой вероятности, а точнее случайной величины, имеющей распределение  $\frac{x^p (1-x)^q}{\int_0^1 x^p (1-x)^q dx}$ , не совпадает с оценкой (4), которая

является лишь асимптотически несмещенной оценкой  $x$ . Лаплас не оговорил этого обстоятельства и тем самым упустил возможность явно ввести понятия смещенности и несмещенности.

В § 18 «Мемуара о вероятностях» Лаплас близко подошел к введению состоятельных оценок, а в § 22 указал, что оценка (4) параметра биномиального распределения удачна лишь, когда достаточно велика вероятность  $P\{|x - a| < \delta\}$  ( $\delta > 0$  — малое число).

Рассмотрим еще одну важную задачу; решенную Лапласом в главе 6 второй книги, а именно оценку народонаселения Франции по данным выборочной переписи, проведенной по мысли самого Лапласа и охватившей 7% населения, и по сведениям о количестве ежегодных рождений ( $N$ ) по всей стране.

Пусть население в районах, охваченных переписью, составляет  $m$  человек, а число ежегодных рождений в этих районах  $n$  человек. Тогда для искомого народонаселения естественно принять оценку  $M = \frac{m}{n}N$  (отношение народонаселения  $m$  к числу ежегодных рождений  $n$  является одним из важнейших показателей демографической статистики). Но какова же

погрешность так оцененного  $M$ ? Проведя вероятностную оценку этой погрешности ( $\Delta M$ ), основанную на методе Байеса, Лаплас получает при  $N = 1,5 \cdot 10^6$   $P\{|\Delta M| \leq 0,5 \cdot 10^6\} = 1 - 1/1162$ .

Кажется, это была первая количественная оценка погрешности, присущей выборочному методу, и следует добавить, что в процессе вычислений в связи с необходимостью суммирования членов бинома Лаплас столкнулся с труднейшей и важной задачей вычисления значений неполной бета-функции.

Уже в XX в. в предисловии к «Таблицам неполной бета-функции» (Tables of the incomplete  $B$ -function. London, 1922, 2-е изд., 1934)<sup>8</sup> К. Пирсон назвал указанные вычисления Лапласа несовершенными. И все же сам факт отсутствия дальнейшего прогресса в этих вычислениях до К. Пирсона позволяет нам высоко оценить работу Лапласа.

Пирсон (Biometrika, 1928, 20A, pt 1—2) подверг критике решение Лапласа также и с теоретической точки зрения, заметив, например, что Лаплас рассматривал обе пары чисел  $m, n$  и  $M, N$  как независимые выборки из единой бесконечной генеральной совокупности. На самом деле выборки не являются независимыми, а само существование генеральной совокупности сомнительно.

К математической статистике, именно к предыстории метода статистических испытаний, следует отнести также замечание Лапласа в главе 5 второй книги «Аналитической теории вероятностей» о возможности экспериментального подсчета числа  $\pi$  по результатам опыта с «бюфоновой иглой». Если многократно бросать тонкий цилиндр — иглу известной длины — на плоскость, разграфленную сеткой параллельных прямых, отстоящих друг от друга на заданное расстояние, либо сеткой квадратов с заданной длиной стороны, то, как показывает подсчет, вероятность  $p$  пересечения цилиндра с некоторой прямой является функцией числа  $\pi$ . По результатам многократного бросания цилиндра можно подсчитать статистическую оценку вероятности  $p$  и, следовательно, приближенное значение числа  $\pi$ .

Сам Лаплас по этому поводу прозорливо упоминал «особый жанр (задач на) комбинации случая»<sup>9</sup>, но надо добавить, что в подобных случаях точность метода статистических испытаний невелика.

Большое внимание Лаплас уделял вероятностной оценке свидетельских показаний и приговоров судов. Вот, например, одна из соответствующих задач главы 9 второй книги: из урны с  $n$  номерами вынут один номер. Свидетель утверждает, что вынут именно номер  $i$ . Какова вероятность, что это действительно так, если возможно, что свидетель (а) не обманывает и не обманывается, (б) не обманывает, но обманывается и т. д. (всего четыре случая), и если априорно выходы всех номеров равновероятны?

Оказывается, что ошибка свидетеля или обман с его стороны становятся тем более вероятными, чем менее вероятно само по себе описываемое им событие. На этом основании Лаплас в своем «Опыте философии теории вероятностей» отвергает знаменитое пари Паскаля: достоверность свидетелей, объявивших со слов самого божества о бесконечном блаженстве, ожидающем верующих, бесконечно мала, так что выгода, ожидающая верующих, оказывается произведением бесконечно большого блага на его бесконечно малую (а не на конечную, как у Паскаля) достоверность и потому сомнительна<sup>10</sup>.

<sup>8</sup> Рус. перев.: Пирсон К. Таблицы неполной  $\Gamma$ -функции. М., ВЦ АН СССР, 1974.

<sup>9</sup> Laplace P. S. Oeuvres complètes. Т. 7. Paris, 1886, p. 365.

<sup>10</sup> Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908, с. 118.

Касаясь работы трибуналов, Лаплас исходит из того, что вероятность  $p$  правильного решения, т. е. оправдания обвиняемого либо его осуждения, одна и та же для каждого судьи и притом превосходит половину. В этом предположении вероятность правильного единогласного решения, вынесенного  $r$  судьями, оказывается равной

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}.$$

Сравнивая полученный результат со статистическими данными, Лаплас отыскивает оценку для  $p$ .

Эти и подобные рассуждения Лапласа основаны на предпосылке о независимости суждения различных судей. На самом же деле эта предпосылка заведомо не выполняется ни, скажем, при оценке вещественных доказательств, ни при оценке, быть может бессознательной, личности обвиняемого. В утрированной форме эту мысль высказал А. Пуанкаре в его «Науке и методе» (*Science et méthode*. Paris, 1906)<sup>11</sup>.

На социальный характер предубеждений в судопроизводстве обратил внимание еще французский математик и философ А. О. Курно (1801—1877) в «Основах теории шансов и вероятностей» (*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Paris, 1843)<sup>12</sup>.

Описываемые приложения теории вероятностей, возможно, привлекли внимание к необходимости совершенствования судебной статистики. Сама теория вероятностей также несколько продвинулась под влиянием подобных приложений (см. с. 204).

### Теория ошибок П. С. Лапласа

Понятие о погрешностях наблюдений прошло большой исторический путь развития. Еще Птолемей во II в. имел представление об этих погрешностях и сформулировал рекомендации по комбинированию наблюдений. В XI в. Ал-Бируни в «Геодезии» и «Каноне Масуда» заметил существование случайных погрешностей астрономических наблюдений и вычислений и проводил математическую обработку наблюдений, применяя качественный подход, не противоречащий вероятностным свойствам обычных случайных погрешностей. Первым эти свойства явно сформулировал Галилей (ИМ, т. 2, гл. 5). Однако фундамент теории ошибок был заложен лишь в середине XVIII в. в основном Т. Симпсоном и И. Г. Ламбертом. В конце того же века важные результаты были получены Д. Бернулли, который, в частности, разделил ошибки наблюдений на случайные — с нормальным законом распределения — и систематические — постоянные (ИМ, т. 3, с. 133—137). Но вплоть до Лапласа не существовало еще общего решения следующей основной задачи, возникавшей, например, при обработке градусных измерений: дана система уравнений

$$a_i x + b_i y + c_i z + \dots + l_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

с  $m$  ( $m < n$ ) неизвестными  $x, y, z, \dots$ . Требуется выделить разумное решение  $\{x, y, z, \dots\}$ , приводящее к небольшим невязкам ( $v_i$ ) и оценить погрешность этого решения, вызванную погрешностями свободных членов  $l_i$ .

В терминологии того времени говорилось об отыскании «истинных значений» неизвестных, и этот факт крайне затруднил связь между теори-

<sup>11</sup> Пуанкаре А. Наука и метод. СПб., 1910, с. 71.

<sup>12</sup> Курно О. Основы теории шансов и вероятностей. М., «Наука», 1970, § 213.

ей ошибок и возникшей впоследствии главой математической статистики, занимающейся оценкой неизвестных параметров распределений.

Первые работы Лапласа в области теории ошибок «Мемуар о вероятности причин по событиям» (*Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, 1774)<sup>13</sup> и упомянутый выше «Мемуар о вероятностях» относились к случаю одного неизвестного. В них Лаплас как бы еще присматривался к этой теории, изучая возможные пути применения сравнительно нового математического аппарата — плотностей распределения — и сравнивая друг с другом более или менее естественные критерии для выбора оценки неизвестного параметра, среди которых находился и критерий минимума абсолютного математического ожидания, впоследствии ставший у него основным.

Даже для малого количества наблюдений рабочие формулы Лапласа оказались слишком сложными, так что непосредственного успеха он не добился, тем более что принятые им законы распределения ошибок наблюдений не были взяты из астрономической практики.

В последующих сочинениях Лаплас обратился к случаю большого числа наблюдений. В «Мемуаре о приближении формул, которые являются функциями очень больших чисел и об их применении к вероятностям» (*Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités* (1809), 1810) он вначале рассматривает случайные величины  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), принимающие значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$  с вероятностями  $1/(2m + 1)$ . Лаплас составляет сумму

$$\Omega(\omega) = e^{-m\omega i} + e^{-(m-1)\omega i} + \dots + 1 + \dots + e^{(m-1)\omega i} + e^{m\omega i} \quad (6)$$

и замечает, что коэффициент при  $e^{l\omega i}$  в этой сумме, возведенной в степень  $n$ , будет равен числу комбинаций, при которых  $[\xi]$ <sup>14</sup> окажется равной  $l$ , и что поэтому соответствующая вероятность будет равна

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\omega \cos l\omega \Omega^n(\omega). \quad (7)$$

Для современного читателя ясно, что Лаплас в приведенном рассуждении использует понятие характеристической функции и применяет формулу обращения, пусть для очень простого случая.

Необходимо отметить, что Лаплас крайне небрежен в проведении формальных преобразований и рассуждений. Первоначально Лаплас рассматривает дискретные случайные величины  $\xi_i$ , затем проводит рассуждения с величинами, равномерно распределенными в отрезке  $[-h, h]$ , но в тексте выписывает величину, равномерно распределенную в отрезке  $[0, h]$ . Эти непрерывные случайные величины он аппроксимирует дискретными, подразделяя отрезок  $[0, h]$  на  $2m$  равных частей «единичной длины». Далее оказывается, что под «единичной длиной» он понимает отрезок длины  $h/m$  и подразделяет в действительности отрезок  $[-h, h]$ .

<sup>13</sup> *Laplace P. S. Oeuvres complètes*. Т. 8. Paris, 1891, p. 27—65.

<sup>14</sup> Мы применяем гауссовы обозначения вида  $[aa] = \sum_{i=1}^n a_i^2$ ,  $[ab] = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ , а также  $[a] = \sum_{i=1}^n a_i$ .

После формальных преобразований подынтегральной функции Лаплас получает при  $n \rightarrow \infty$  предельную теорему, которую можно представить в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ -s \leq \frac{[\xi]}{\sqrt{n}} \leq s \right\} = \frac{\sqrt{3}}{h \sqrt{2\pi}} \int_0^s e^{-x^2/2\sigma^2} dx,$$

где  $\sigma^2 = h^2/3$  — дисперсия величины  $\xi_i$ .

Этот результат обобщается на случай произвольного распределения (обладающего дисперсией), и, таким образом, описываемый мемуар посвящая выводу центральной предельной теоремы для суммы случайных величин, распределенных по одному и тому же закону. Вывод этот, однако, крайне нестрог. Тем не менее здесь уместно подчеркнуть исключительную интуицию Лапласа, позволявшую ему получать правильные выводы из нестрогих, а порой попросту путаных рассуждений.

В «Мемуаре об определенных интегралах и их применении к вероятностям и специально к отысканию среднего, которое следует выбирать из результатов наблюдений» (*Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations* (1810), 1811) Лаплас, применяя тот же математический аппарат, снова вывел центральную предельную теорему, на этот раз — для линейной функции  $[qe]$  случайных величин  $\varepsilon_i$ , распределенных по одному и тому же четному закону и при одном и том же порядке величин  $q_i$ .

Линейная функция случайных величин, именно — погрешностей наблюдений, естественно появляется при умножении каждого уравнения

$$a_i x + l_i = \varepsilon_i \quad (8)$$

(ср. с системой (5)) на некоторый множитель  $q_i$ , образовании суммарного уравнения и принятии оценки

$$x = - \frac{[ql]}{[qa]} + \frac{[qe]}{[qa]}. \quad (9)$$

Полагая в силу центральной предельной теоремы, что распределение  $[qe]$  является нормальным, и принимая в качестве критерия минимум абсолютного математического ожидания оценки (9), Лаплас приходит к определению множителей  $q_i$ , а потому и самой оценки, по методу наименьших квадратов. Далее он обобщает изложение на случай нескольких неизвестных, получив в ходе преобразований двумерное нормальное распределение для независимых компонент. Следует заметить, что в ту пору и вплоть до конца XIX в. никто даже не оговаривал предположения независимости компонент случайного вектора, считая его самоочевидным.

Лаплас при этом использовал неравенство Коши — Буяковского (как его теперь называют), а при замене переменных в двойном интеграле фактически применял якобиан преобразования.

В главе 4 «Аналитической теории вероятностей» Лаплас доказал, что при соответствующем центрировании и нормировании предельные распределения для сумм  $[\xi]$ ,  $[|\xi|]$ ,  $[\xi\xi]$ ,  $[q\xi]$  при условии, что случайные величины  $\xi_i$  независимы (этого Лаплас не оговаривал) и одинаково распределены на ограниченном снизу и сверху отрезке, одинаковы (стандартные нормальные). Впрочем, доказывать это не было необходимо, поскольку эти результаты являются следствием ранее сформулированной теоремы Лапласа о предельном распределении для сумм одинаково распределенных независимых слагаемых с конечной дисперсией.

В третьем издании «Аналитической теории вероятностей» Лаплас поместил три дополнения, посвященные теории ошибок наблюдений. Особый интерес представляет содержание второго из них. В нем изучается ошибка суммы углов треугольника. Лаплас предположил, что она распределена нормально с плотностью распределения  $\sqrt{\frac{h}{3\pi}} e^{-hx^2/3}$ . Для оценки меры точности Лаплас предложил выражение  $3n/2\theta^2$ , где  $\theta^2$  определено посредством равенства

$$\theta^2 = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2,$$

$T_i$  — ошибки сумм углов треугольников в  $n$  независимых наблюдениях.

Кроме того, Лаплас заметил, что если рассматривать  $h$  как случайную величину, то ее плотность распределения будет пропорциональна

$$h^{n/2} e^{-\frac{h}{3}\theta^2}.$$

Также во втором дополнении Лаплас рассмотрел сравнение мер точности при оценке результата измерений по методам среднего арифметического и медианы.

Лаплас систематически и настойчиво проводил в теории ошибок следующую идею: пусть требуется оценить на основании результатов  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) независимых измерений некоторой величины  $a$  ее значение. Тогда в качестве оценки следует взять то значение  $\hat{a}$ , при котором в минимум обращается сумма

$$\sum_{i=1}^n M |\xi_i - \hat{a}|.$$

Этот критерий можно применять в том случае, когда погрешности величин распределены нормально, однако при других распределениях он приводит к весьма сложным вычислениям. Именно по этой причине впоследствии он не получил широкого развития.

Мы видим, что вклад Лапласа в теорию ошибок наблюдений весьма велик. Им была высказана исключительно плодотворная идея о формировании наблюдаемой ошибки в результате суммирования большого числа независимых элементарных ошибок. Если эти элементарные ошибки равномерно малы, то распределение наблюдаемой ошибки при весьма общих условиях должно быть близким к нормальному. Эта идея в наше время завоевала всеобщее признание. Далее заслуживают упоминания соображения Лапласа о множественности возможных оценок истинного значения по результатам наблюдений; об оценке меры точности (дисперсии); наметки вывода центральной предельной теоремы для случая одинаково распределенных слагаемых, имеющих конечную дисперсию.

### Вклад К. Ф. Гаусса в теорию вероятностей

На долю Гаусса выпало создание теории ошибок, которая сразу нашла многочисленных последователей. Во второй книге «Теории движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям» (*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, Hamburg, 1809) <sup>15</sup> Гаусс доказал, что в классе одновершинных, симметричных и дифференцируемых распределений  $\varphi(x - x_0)$  существует и притом

<sup>15</sup> Имеется русский перевод части этой книги: Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 1. М., Геодезиздат, 1957, с. 89—109.

единственное (нормальное) распределение, при котором оценка параметра сдвига  $x_0$  по принципу наибольшего правдоподобия совпадает со средним арифметическим. Вот его вывод: пусть  $M, M', M'', \dots$  — наблюдения и  $p$  — их среднее арифметическое. Тогда уравнение правдоподобия

$$\varphi'(M - \hat{x}) + \varphi'(M' - \hat{x}) + \varphi'(M'' - \hat{x}) + \dots = 0$$

( $\varphi'(\Delta) = \frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)d\Delta}$  и  $\hat{x}$  — оценка наибольшего правдоподобия) должно иметь единственное решение  $\hat{x} = p$ :

$$\varphi'(M - p) + \varphi'(M' - p) + \varphi'(M'' - p) + \dots = 0.$$

Полагая, далее,  $M' = M'' = \dots = M - \mu N$ , можно получить для натуральных  $\mu$  ( $\mu$  — число наблюдений,  $N(\mu - 1) = M - p$ )

$$\varphi'(\mu - 1)N = (1 - \mu)\varphi'(-N), \quad \varphi'(\Delta)/\Delta = k \quad (k < 0),$$

$$\varphi(\Delta) = ce^{1/2k\Delta^2}.$$

В качестве очевидного следствия Гаусс нашел, что плотность вероятности данной совокупности наблюдений достигает максимального значения при условии, что сумма квадратов уклонений наблюдаемых значений от «истинного» значения измеряемой величины обращается в минимум. Таково было его обоснование принципа наименьших квадратов.

Этому исключительно изящному выводу были присущи недостатки, отмеченные впоследствии самим Гауссом. Во-первых, случайными погрешностями наблюдений признавались только погрешности, распределенные по нормальному закону. Указав на это ограничение, Гаусс в § 17 первой части своей «Теории комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам» (*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Göttingen, 1823) добавил, что приведет «новое изложение вопроса», имея целью доказать, что «способ наименьших квадратов дает наилучшую комбинацию наблюдений... каков бы ни был закон вероятностей ошибок...»<sup>16</sup>.

Во-вторых, как писал Гаусс в письме Бесселю в 1839 г., принцип наибольшего правдоподобия не является наилучшим: «... я считаю менее важным отыскание такого значения неизвестной величины, вероятность которого максимальна, но всегда остается бесконечно малой, нежели такого, с которым можно получить верную игру; иными словами, если  $f(a)$  обозначает вероятность значения  $a$  для неизвестного  $x$ , то представляется менее важным привести к максимуму  $f(a)$ , нежели к минимуму интеграл  $\int f(x)F(x - a)dx$ , распространенный по всем возможным значениям  $x$ , в котором за  $F$  берется функция всегда положительная и подходящим образом увеличивающаяся с увеличением аргумента»<sup>17</sup>.

Явно признавая произвольность выбора  $F$ , Гаусс остановился на  $F = x^2$ , т. е. на принципе наименьшей дисперсии. Как он доказал в «Теории комбинаций наблюдений», в классе линейных оценок наименьшими дисперсиями обладают оценки, определяемые по методу наименьших квадратов; таково было второе обоснование этого метода Гауссом. И все же многие астрономы, считавшие себя последователями Гаусса, чуть ли не до последнего времени связывали метод наименьших квадратов с реализацией нормального распределения (и принципом наибольшего правдоподобия, впоследствии независимо введенного в математическую статистику

<sup>16</sup> Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Т. 1, с. 17—36.

<sup>17</sup> Gauss C. F. Werke. Bd 8, S. 146—147.

Р. Фишером в 1912 г.). Эту устаревшую точку зрения пришлось опровергать еще А. А. Маркову в 1898 г. в письме А. В. Васильеву<sup>18</sup>.

Мысль Гаусса о предпочтительности интегральной меры («верной игры») оказалась исключительно плодотворной, и подобные меры, опять-таки независимо от Гаусса, были впоследствии введены в математическую статистику.

Переосмысливание идей и возможностей классической теории ошибок, т. е. по существу результатов Гаусса, произошло лишь в последние десятилетия в рамках математико-статистической теории оценивания параметров.

Теория вероятностей находилась далеко не в центре научных интересов Гаусса. И все-таки он обогатил эту теорию многими первоклассными результатами и повлиял на дальнейшее развитие ряда ее важных направлений.

Метод наименьших квадратов сразу же завоевал всеобщее признание, и следует упомянуть поэтому, что заслугу в его открытии и внедрении разделяют с Гауссом два его современника.

Первая публикация, в которой принцип наименьших квадратов был явно сформулирован, принадлежит А. М. Лежандру: «Новые методы определения орбит комет» (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, 1805 и 1806), который указывал, что применение этого принципа приводит к некоторому «равновесию» между остаточными погрешностями и что максимальные по абсолютной величине погрешности оказываются при этом минимальными среди любых способов уравнивания наблюдений. Последнее утверждение неверно, однако, видимо в связи со спором о приоритете между Лежандром и Гауссом, о нем просто забыли.

Гаусс применял принцип наименьших квадратов — правда, в еще неопубликованных тогда исследованиях — задолго до появления публикации Лежандра. Вот что он писал по этому поводу в «Теории движения небесных тел»: «...наш принцип, которым мы пользуемся с 1795 г., еще недавно был изложен известным Лежандром...»<sup>19</sup>.

Таким образом, оснований для спора о первенстве открытия, кажется, не было, тем более что Лежандр предложил лишь качественное обоснование принципа наименьших квадратов, так что его заслуга по сравнению с Гауссом здесь невелика. И все-таки Лежандр выступил, особенно во «Втором дополнении» к переизданию «Новых методов определения орбит комет», с резким протестом против гауссова выражения «наш принцип»<sup>20</sup>.

Другой упомянутый современник Гаусса — американский математик Роберт Эдрейн (1775—1843). Отправляясь от одной практической задачи землеустройства, он в 1808 г. опубликовал в совершенно неизвестном в Европе американском журнале, просуществовавшем к тому же всего один год, статью<sup>21</sup>, в которой, в частности, содержалось два вывода нормального закона распределения случайных ошибок наблюдений и принципа наименьших квадратов. Выводы нормального закона были малоудовлетворительными, а с принципом наименьших квадратов Эдрейн, кажется, был знаком по сочинениям Лежандра. И все-таки результаты Эдрейна

<sup>18</sup> Извлечения из писем А. А. Маркова А. В. Васильеву опубликованы в кн.: *Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей*. Л., Изд-во АН СССР, 1951, с. 233—251, под общим заглавием «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов».

<sup>19</sup> *Гаусс К. Ф. Теория движения небесных тел*, кн. 2.— В кн.: *Избранные геодезические сочинения*. Т. 1, с. 104.

<sup>20</sup> *Legendre A. M. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Second supplément*. Paris, 1820, p. 79—80.

<sup>21</sup> *Adrain R. Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations*.— *Analyst or math. Museum*, Philadelphia, 1808, 1, N 4, 93—109.

заслуживают упоминания, тем более, что он, как и Гаусс, пользовался принципом наибольшего правдоподобия. Добавим, что в 1818 г. Эдрейн первым применил метод наименьших квадратов к выводу сжатия земного эллипсоида вращения по результатам градусных измерений<sup>22</sup> и, наконец, что он получил исключительно точные для своего времени значения полуосей этого эллипсоида<sup>23</sup>.

Теорией ошибок занимались и ряд других ученых (С. Д. Пуассон, О. Коши), однако их работы естественнее рассматривать в контексте теории вероятностей.

В заключение настоящего раздела заметим, что Гауссу принадлежат отдельные заметки, сделанные им в разное время и не доведенные до публикаций. Одна из них содержит формулу обращения для преобразования Фурье плотности распределения, впрочем еще ранее предложенную Фурье, Коши и Пуассоном. В письме к Лапласу от 30 января 1812 г. Гаусс сформулировал задачу, которую можно считать первой задачей метрической теории чисел<sup>24</sup>. Вот эта задача: пусть  $M$  — некоторое число между 0 и 1; оно разлагается в непрерывную дробь:  $M = 1/a' + 1/a'' + 1/a^{(3)} + \dots$ . Спрашивается, чему равна вероятность того, что следующая дробь  $1/a^{(n+1)} + 1/a^{(n+2)} + 1/a^{(n+3)} + \dots$ , которая получена из предыдущей путем отбрасывания первых  $n$  членов, окажется меньшей  $x$ ? Обозначив эту вероятность через  $P(n, x)$ , Гаусс обнаружил, что в предположении  $P(0, x) = x$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}.$$

Сам Гаусс был недоволен рассуждениями, приведшими его к этому результату еще в 1798 г.<sup>25</sup>, и просил Лапласа найти строгое доказательство. Однако потребовалось более ста лет, прежде чем такое доказательство было найдено Р. О. Кузьминым (1928).

### Исследования С. Д. Пуассона и О. Коши

В современной науке с именем Пуассона связано понятие распределения и процесса, носящих его имя, а также закона больших чисел в форме Пуассона.

Симеон Дени Пуассон (1781—1840), сын мелкого провинциального чиновника, занявшего несколько более высокое положение в годы французской революции, должен был, по мысли отца, стать нотариусом. Не обнаружив в сыне склонности к юриспруденции, отец отдал его в обучение цирюльнику, от которого мальчик убежал обратно домой. После того отец, положение которого тем временем улучшилось, согласился направить сына в школу в Фонтенебло, где один из учителей, заметив его математическое дарование, помог юноше подготовиться к экзамену в Политехническую школу. Здесь руководителями и в еще большей мере вдохновителями молодого Пуассона явились Лагранж, Лаплас и другие лучшие математики Франции. В 1800 г. Пуассон окончил Политехническую школу, выступил с первыми научными публикациями и был оставлен при школе репетитором; в 1806 г. он заменил в должности профессора оставившего преподавание Фурье; в 1816 г., когда в Сорбонне был организован факультет

<sup>22</sup> *Adrain R.* Investigation of the figure of the earth and of the gravity in different latitudes.— Trans. Amer. Philos. Soc., 1818, 1 (new ser.).

<sup>23</sup> *Adrain R.* Research concerning the mean diameter of the earth.— Ibid.

<sup>24</sup> *Gauss C. F. Werke.* Bd 10, Abt 1, S. 371—374.

<sup>25</sup> Об этом свидетельствуют записи в рукописях Гаусса.

наук, он получил там место профессора рациональной механики; несколько ранее, в 1812 г., он был избран членом Парижской академии наук.

По всему характеру своего творчества Пуассон был типичным представителем Политехнической школы, а по плодовитости отставал, кажется, только от Коши, опубликовав более 300 работ. Его интересы охватывали многие вопросы анализа, в частности интегрирование в комплексной области и кратные интегралы, теорию вероятностей и особенно различные области прикладной математики — общую и небесную механику, математическую физику: теорию упругости, теплопроводность, капиллярность, электричество и магнетизм. «Насколько многосторонней и плодотворной была его деятельность, — писал Ф. Клейн, — можно видеть по большому числу отдельных деталей, которые до сих пор связаны с его именем: скобки Пуассона в механике, константы Пуассона в теории упругости, интеграл Пуассона в теории потенциала, наконец общеизвестное, получившее широкое распространение уравнение Пуассона  $\Delta V = -4\pi\rho$ , которое он установил для пространства, заключенного внутри притягивающего тела, обобщив уравнение Лапласа  $\Delta V = 0$ , справедливое для внешнего пространства»<sup>26</sup>. В этом внушительном списке, однако, не достает одной важной теоремы — «закона больших чисел Пуассона», см. ниже.

Вклад Пуассона в теорию вероятностей в первую очередь связан с его книгой «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах» (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Paris, 1837), в которой он продолжает исследования задач, рассмотренных в определенных предположениях еще Лапласом.

Понятие случайной величины, широко использованное в работах предшественников — Лапласа, Гаусса и других ученых, всегда связывалось ими с результатами измерений и с задачами теории ошибок наблюдений. Пожалуй, именно Пуассон впервые сделал попытку оторвать понятие случайной величины от задач теории ошибок измерений и рассматривать случайную величину как общее понятие, одинаково важное для всего естествознания. Он начал говорить о «некоторой вещи», которая способна принять значения  $a_1, a_2, \dots, a_n$  с соответствующими вероятностями. Впрочем, несколько раньше, во второй части мемуара «О вероятности средних результатов наблюдений» (*Sur la probabilité des résultats moyens des observations*. *Connaissance des temps* (1829), 1832), он сделал попытку в таком же роде рассматривать и непрерывные случайные величины, а также их функции распределения<sup>27</sup>. Следует, однако, заметить, что его теория случайных величин, в сущности, ничем не отличалась от того, чем владели и пользовались его предшественники и современники, кроме упомянутой попытки ввести специальное наименование для фактически используемого понятия.

С именем Пуассона связано введение в науку понятия «закон больших чисел»<sup>28</sup>. Он отчетливо представлял себе важность теорем типа закона больших чисел для познания окружающего нас мира и был страстным пропагандистом этого закона. Для него смысл закона больших чисел состоял в приближенном равенстве среднего арифметического большого числа случайных величин среднему арифметическому их математических ожиданий<sup>29</sup>. Однако доказательства этого утверждения во всей его общ-

<sup>26</sup> Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1937, с. 101.

<sup>27</sup> Первая часть этого мемуара опубликована там же (1824), 1827.

<sup>28</sup> Poisson S. D. Recherches sur la probabilité des jugements... Paris, 1837, p. 7.

<sup>29</sup> Ibid., p. 138—143.



С. Д. ПУАССОН

пости ему получить не удалось. В науке осталось под его именем лишь обобщение теоремы Бернулли для случая независимых испытаний, в которых событие  $A$  появляется с вероятностями, зависящими от номера испытания.

Большое внимание Пуассон уделил схеме Бернулли. По традиции Пуассон никогда не оговаривал, что он рассматривает независимые испытания, молчаливо предполагая это. Если вероятность появления события  $A$  в каждом из испытаний равна  $p$ , то вероятность его появления в  $\mu = m + n$  испытаниях не менее  $m$  раз Пуассон<sup>30</sup> записал в виде

$$P = p^m \left[ 1 + mq + \frac{m(m+1)}{2!} q^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} q^n \right] = \frac{\int_0^\infty X dx}{\int_0^\infty X dx}, \quad (10)$$

$$X = \frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}}, \quad \alpha = \frac{q}{p}, \quad q = 1 - p.$$

<sup>30</sup> Ibid., p. 189.

Вычислив эти интегралы, Пуассон получает для больших  $m$  и  $n$  асимптотические равенства

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{(\mu + n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi\mu mn}} e^{-k^2} \quad \text{при} \quad \frac{q}{p} > h, \quad (11)$$

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{(\mu + n)\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi\mu mn}} e^{-k^2} \quad \text{при} \quad \frac{q}{p} < h, \quad (12)$$

где  $k = \sqrt{n \ln \frac{n}{q\mu} + m \ln \frac{m}{p\mu}}$ ,  $h = \frac{n}{m+1}$  — абсцисса точки максимума для функции  $X(x)$ .

Формулы (11) и (12) являются, конечно, не чем иным, как интегральной предельной теоремой Муавра — Лапласа, записанной Пуассоном в несколько иной форме, чем Лапласом (см. с. 187).

Для случая малого  $q$  Пуассон принял

$$mq \approx \mu q = \omega, \quad m(m+1)q^2 \approx \omega^2, \dots, p^m \approx e^{-\omega}$$

и получил

$$P \approx e^{-\omega} \left[ 1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \dots + \frac{\omega^n}{n!} \right]. \quad (13)$$

Это — формула пуассоновской аппроксимации бернуллиевого распределения. Выражения вида

$$P\{\xi = m\} \approx e^{-\omega} \frac{\omega^m}{m!}$$

у Пуассона нет.

Предельную теорему Пуассон применяет для оценки статистической значимости разностей  $n_2/\mu_2 - n_1/\mu_1$  в двух независимых выборках как в случае известной, так и в случае неизвестной вероятности  $p$ . Далее Пуассон вывел предельную теорему для урновой задачи с переменными вероятностями и использовал ее для анализа модели избирательной системы. Согласно предположению каждый избиратель принадлежит к одной из двух политических партий, отношение числа членов которых ( $a$  и  $b$ ) по стране  $a : b = 90,5 : 100$ . Если члены этих партий случайно распределены по округам, то, как подсчитал Пуассон, вероятность избрания депутата меньшинства весьма мала. При 459 округах и  $a + b = 200\,000$  эта вероятность оказывается равной 0,16. Не следует всерьез относиться к этой модели избирательной системы, тем более что сам Пуассон представлял себе ее недостаточность. Для нас важнее отношение самого Пуассона к «представительности» правительства, избранного таким образом. По его словам «представительное правительство есть просто обман»<sup>31</sup>.

Пуассон выводит также локальную и интегральную предельные теоремы для схемы испытаний с переменными вероятностями<sup>32</sup>. Пусть в  $\mu$  испытаниях событие  $E$  происходит с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ , а противоположное событие  $F$  — с вероятностями  $q_1, q_2, \dots, q_\mu$ . Тогда вероятность событию  $E$  произойти  $m$  раз (и событию  $F$   $n = \mu - m$  раз) равна коэффициенту при  $u^m v^n$  в разложении

$$(up_1 + vq_1)(up_2 + vq_2) \dots (up_\mu + vq_\mu) = X$$

<sup>31</sup> Poisson S. D. Recherches sur la probabilité des jugements... Paris, 1837, p. 244.

<sup>32</sup> Ibid., p. 246.

и потому равна

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(m-n)ix} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Y \cos [y - (m-n)x] dx,$$

где

$$Y = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_\mu, \quad y = r_1 + r_2 + \dots + r_\mu,$$

$\rho_k$  и  $r_k$  — модуль и аргумент комплексной функции

$$(\rho_k + q_k) \cos x + i(\rho_k - q_k) \sin x = \rho_k e^{ir_k},$$

образованной из бинома  $(u\rho_k + vq_k)$  при  $u = e^{ix}$ ,  $v = e^{-ix}$ .

При больших  $\mu$ , исключая случай убывания  $p_k$  (или  $q_k$ ) с ростом  $k$ , путем разложения  $\rho_k$  и  $Y$  в степенные ряды по  $x$  Пуассон вывел локальную предельную теорему:

$$P\{m = p\mu - \theta c \sqrt{\mu}, \quad n = q\mu + \theta c \sqrt{\mu}\} \equiv U = \frac{1}{c \sqrt{\pi \mu}} e^{-\theta^2} - \\ - \frac{h\theta}{2c^2 \mu \sqrt{\pi}} (3 + 2\theta^2) e^{-\theta^2}, \quad (14)$$

$$c^2 = \frac{2[pq]}{\mu}, \quad h = \frac{4}{3\mu} \sum_{i=1}^{\mu} (p_i - q_i) p_i q_i.$$

Исходя из (14) Пуассон немедленно получил и интегральную предельную теорему.

Далее Пуассон совершил логический скачок и сформулировал неверную теорему<sup>33</sup>, подтвердив ее неточными рассуждениями. Он считал, что если суммируются случайные величины, обладающие конечной дисперсией, то без каких бы то ни было дополнительных условий случайные суммы, центрированные суммами математических ожиданий слагаемых и нормированные корнем квадратным из суммы дисперсий этих слагаемых, обязательно будут близки по распределению к нормальному стандартному закону. Отсюда Пуассон в качестве следствия получал «доказательство» закона больших чисел для произвольных слагаемых, обладающих конечной дисперсией.

В книге Пуассона в первичной форме используются обобщенные функции ( $\delta$  — символ функции Дирака)

$$f(x) = \sum_k \gamma_k \delta(x - c_k) \quad \left( \sum_k \gamma_k = 1, \gamma_k > 0 \right),$$

когда он вводит плотности распределения, равные нулю всюду, кроме конечного числа точек  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . В этих точках для бесконечно малого положительного числа  $\varepsilon$  имеют место равенства

$$\int_{C_k - \varepsilon}^{C_k + \varepsilon} f(x) dx = g_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

причем

$$\sum_{k=1}^n g_k = 1.$$

<sup>33</sup> Ibid., p. 271—277.

Никаких дополнительных пояснений к этим равенствам он не давал. Впрочем, знаменитая функция Дирака была введена на таком же уровне строгости, притом уже в нашем веке.

Около ста страниц Пуассон отводит применению теории вероятностей в уголовном судопроизводстве. Здесь мы находим некоторые общие исследования вероятности осуждения подсудимого в зависимости от количества судей (в том числе, единогласного осуждения), замечания о сравнительной устойчивости числа обвиняемых и числа осужденных по каждому из двух основных видов правонарушений — преступлений против личности и против имущества, о влиянии революции 1830 г. на деятельность судов и т. д. Исходные предпосылки Пуассона заведомо упрощены (он, например, полагает, что судьи выносят решение независимо друг от друга), и вряд ли его исследование принесло реальную пользу. Но его рассуждения о вероятностях осуждения и оправдания подсудимого<sup>34</sup>, равно как и аналогичные рассуждения Ж. А. Кондорсе и П. С. Лапласа, можно отнести к предыстории понятий о критической области и об ошибках первого и второго рода.

Мемуар Пуассона «О вероятности средних результатов наблюдений» посвящен теории ошибок наблюдений и в значительной части является как бы комментарием к работам Лапласа. Пользуясь, как и Лаплас, аппаратом характеристических функций, он вывел формулы распределения суммы и линейной функции большого числа ошибок наблюдений. Значительный интерес для истории теории вероятностей представляет то обстоятельство, что Пуассон в этой работе рассмотрел распределение, впоследствии получившее название «распределения Коши» с плотностью

$$f(x) = 1/\pi(1+x^2), \quad |x| < +\infty. \quad (15)$$

Пуассон обнаружил, что если наблюдения распределены по «закону Коши», то их среднее арифметическое имеет то же распределение, что и каждое из отдельных наблюдений.

Мы видим, что Пуассон обнаружил свойство устойчивости распределения Коши и само это распределение примерно за двадцать лет до Коши. Естественно поэтому восстановить историческую справедливость и возвратить распределению (15) имя истинного его автора.

Пуассон живо интересовался расширением поля применений методов теории вероятностей. Вот почему он занимался применением ее к вопросам медицины и демографии. В соавторстве им написана рецензия на одну из первых книг по медицинской статистике. Специальное исследование «Мемуар о пропорции рождаемости девочек и мальчиков» (*Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons.* — *Mém. Acad. sci. Paris*, 1830, 9) он посвятил изучению пропорции рождения мальчиков и девочек. Заметим, что именно в этой работе впервые появилась формула (13), давшая жизнь распределению Пуассона.

В мемуаре «О преимуществе банкира при игре в тридцать и сорок» (*Sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante.* — *Ann. math. pures et appl.*, 1825—1826, 16) Пуассону пришлось решить следующую задачу: в урне находятся  $x_1$  шаров с номером 1,  $x_2$  шаров с номером 2, . . . ,  $x_i$  шаров с номером  $i$  ( $x_1 + x_2 + \dots + x_i = s$ ). Требуется определить вероятность  $P$  извлечь при  $n$  тиражах без возвращения  $a_1$  шаров с номером 1,  $a_2$  шаров с номером 2, . . . ,  $a_i$  шаров с номером  $i$  ( $a_1 + a_2 + \dots + a_i = n$ ), если при этом сумма вынутых номеров

$$a_1 + 2a_2 + \dots + ia_i = x. \quad (16)$$

<sup>34</sup> *Poisson* *Œ. D. Recherches sur la probabilité des jugements...* Paris, 1837, p. 388—392.

Решая эту задачу, Пуассон получил, пока без учета условия (16),

$$P = \frac{n!(s-n)!}{s!} \frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1)!} \frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2)!} \cdots \frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i)!} =$$

$$= (s+1) \int_0^1 (1-y)^s Y dy,$$

$$Y = \frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1)!} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{a_1} \frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2)!} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{a_2} \cdots \frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i)!} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{a_i}$$

При  $i = 2$  система полученных вероятностей называется теперь гипер<sup>x</sup>геометрическим распределением, а сама задача имеет непосредственное отношение к выборочному контролю качества продукции.

Для учета условия (16) Пуассон заменяет  $Y$  на сумму значений  $Y$ , соответствующих таким наборам  $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ , при которых это условие выполняется. Рассматривая производящую функцию

$$\left(1 + \frac{yt}{1-y}\right)^{x_1} \left(1 + \frac{yt^2}{1-y}\right)^{x_2} \cdots \left(1 + \frac{yt^i}{1-y}\right)^{x_i},$$

Пуассон замечает, что искомая вероятность равна коэффициенту при  $t$  в выражении

$$(s+1) \int_0^1 (1-y+yt)^{x_1} (1-y+yt^2)^{x_2} \cdots (1-y+yt^i)^{x_i} dy.$$

В связи с рассматриваемой азартной игрой Пуассону пришлось вводить вторую безвозвратную выборку  $\{b_1, b_2, \dots, b_i\}$  шаров, производимую после первой, и, соответственно, отыскивать совместную вероятность выполнения условий (16) и

$$b_1 + 2b_2 + \dots + ib_i = x',$$

пользуясь для этого двойной производящей функцией.

Заметный вклад в теорию вероятностей внес О. Коши. В 1831—1853 гг. он опубликовал не менее десяти мемуаров, относящихся к математической обработке наблюдений и, частично, к теории вероятностей. Восемь таких мемуаров собраны в 12-м томе первой серии его «Полного собрания сочинений» (*Oeuvres complètes*), вышедшем в 1900 г. Некоторые из них были написаны в результате дискуссии с И. Ж. Бьенеме (1853), особенно по поводу применения метода наименьших квадратов для решения различных задач интерполяции функций.

Коши исследовал обработку наблюдений по методу средних и при помощи принципа минимакса, т. е. принципа, приводящего к таким максимальным по абсолютной величине остаточным отклонениям, которые минимальны среди любых способов обработки, и применяемого в настоящее время в теории статистических решений.

В мемуаре «О наибольшей ошибке, которой следует опасаться в среднем результате, и о системе множителей, которые приводят эту наибольшую ошибку к минимуму» (*Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le système de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum*, 1853; *Oeuvres complètes*. Т. 12. Paris, 1900, p. 114—124) Коши заметил, что максимум линейной функции неотрицательных переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , подчиняющихся  $m$  дополнительным линейным уравнениям ( $m < n$ ), достигается при условии равенства нулю ( $n - m$ ) этих переменных. Тем самым он доказал одну из теорем теории линейного программи-

рования, предыстория которой, впрочем, должна начинаться, по крайней мере, с Фурье (1824) <sup>35</sup>.

Характерной для торопливой манеры изложения многих работ Коши является незаконченность этого мемуара, отсутствие в нем хотя бы указания на необходимость эффективного алгоритма для перебора базисных решений упомянутой задачи.

В мемуаре «О средних результатах наблюдений одной и той же природы и о наиболее вероятных результатах» (*Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables*, 1853; *Oeuvres complètes*. Т. 12, р. 94—104) Коши решает изящную задачу отыскания плотности распределения  $f(\varepsilon)$  погрешностей наблюдений  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при условии максимальной вероятности  $P\{\omega_1 < \Delta x < \omega_2\}$  для погрешности одного из неизвестных ( $x$ ) находиться в любом заданном интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ . Для искомого четного распределения  $f(\varepsilon) = f(-\varepsilon)$  он получает для  $\theta > 0$  характеристическую функцию

$$\varphi(\theta) = e^{-c\theta^{\mu+1}}, \quad (17)$$

где  $\mu$  вещественно и  $c > 0$ .

Вряд ли этот вывод имел непосредственное практическое значение однако интересно, что только при значениях  $-1 < \mu \leq 1$  функция (17) является характеристической; соответствующее распределение оказывается устойчивым.

Приняв  $\mu = 1$  и 0, Коши пришел соответственно к нормальному закону и к «распределению Коши», ранее рассмотренному Пуассоном

$$f(\varepsilon) = \frac{k}{\pi(1+k^2\varepsilon^2)}.$$

«Мемуар о коэффициентах-ограничителях» (*Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs*, 1853; *Oeuvres complètes*. Т. 12, р. 79—94) посвящен разрывным множителям и, в частности, их применению в теории вероятностей. Пусть изучается вероятностное поведение функции  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$  погрешностей  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с законами распределения  $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n)$ , отличными от нуля на интервалах  $[\mu_1, \nu_1], [\mu_2, \nu_2], \dots, [\mu_n, \nu_n]$  соответственно. Тогда, замечает Коши,

$$P\{\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2\} = \int_{\mu_1}^{\nu_1} \int_{\mu_2}^{\nu_2} \dots \int_{\mu_n}^{\nu_n} I \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где

$$I = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, & \omega < \omega_1 \text{ либо } \omega > \omega_2. \end{cases}$$

В качестве подобных разрывных множителей Коши предлагает, например, функцию

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(\tau-\omega)^i} d\tau.$$

До Коши разрывные множители в теории вероятностей применяли Лаплас и Пуассон.

<sup>35</sup> См. статью: *Grattan-Guinness I. J. Fourier's anticipation of linear programming.—Operat. Res. Quarterly*, 1970, 21, 361—364.

Особый интерес представляют работы Коши «О вероятностях ошибок, которые искажают средние результаты наблюдений одной и той же природы» (*Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature*, 1853) и «Мемуар о средних результатах весьма большого количества наблюдений» (*Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations*, 1853)<sup>36</sup>. В этих работах Коши примерно одним и тем же путем доказывает центральную предельную теорему. Так, в первом из них Коши рассматривает линейную функцию

$$\omega = [\lambda \varepsilon] \quad (18)$$

погрешностей  $\varepsilon_i$  с четной плотностью распределения  $f(\varepsilon)$ , отличной от нуля на интервале  $[-\chi, \chi]$ . Характеристическая функция величины (18) равна

$$\Phi(\theta) = \varphi(\lambda_1 \theta) \varphi(\lambda_2 \theta) \dots \varphi(\lambda_n \theta),$$

где  $\varphi(\theta)$  — характеристическая функция погрешностей  $\varepsilon_i$ , и поэтому

$$P\{-v \leq \omega \leq v\} = \int_0^v F(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\theta) \frac{\sin \theta v}{\theta} d\theta, \quad (19)$$

$$F(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi(\theta) \cos \theta v d\theta,$$

— плотность распределения функции (18).

Переходя к оценке интеграла в формуле (19), Коши замечает, что при  $\lambda_i = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\rho = O(\sqrt{n})$  и  $\theta < \rho$  будет

$$\Phi(\theta) = e^{-s\theta^2}, \quad s = [\zeta \lambda \lambda],$$

где  $\zeta_i$  близки к

$$c = \int_0^\chi \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon$$

(и, следовательно,  $2s$  близко к дисперсии  $\sigma^2$  функции (18)). Тогда как оказывается,

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-v^2/4s},$$

$$P\{-v \leq \omega \leq v\} = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^v e^{-x^2/4s} dx \approx \frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

Коши привел и оценки погрешностей, возникающих при сделанных им предположениях.

Можно заметить, что Коши широко пользовался «косинус-преобразованием Фурье». Косинус- и синус-преобразования Фурье Коши специально посвятил два мемуара «О законе взаимности, который существует между некоторыми функциями» (*Sur une loi de réciprocity qui existe entre certaines fonctions*, 1817) и «Вторую заметку о взаимнообратных функциях» (*Seconde note sur les fonctions réciproques*, 1818)<sup>37</sup>. В этих работах Коши сослался и на Пуассона, и на неопубликованные еще в то время исследования Фурье по теории теплоты, доложенные последним Парижской академии наук в 1807 и 1811 гг.

<sup>36</sup> См.: *Cauchy A. L. Oeuvres complètes*. Т. 12, sér. 2. Paris, 1958, p. 104—114, p. 125—130.

<sup>37</sup> *Ibid.*, т. 2, 1958, p. 223—227; p. 228—232.

Мы рассказали вкратце о работах основных представителей замечательного периода в развитии теории вероятностей, продолжавшегося почти всю первую половину XIX в. За это время были построены основы аналитических методов в теории вероятностей, выдвинуты идеи новых предельных теорем теории вероятностей и глубоко прочувствована важность их как для теории ошибок наблюдений, так и для демографии, теории стрельбы, а также самой теории вероятностей. Были сделаны попытки расширить область применимости закона больших чисел. Это удалось осуществить для обобщенной схемы Бернулли, в которой вероятности появления события меняются вместе с номером испытания. В руках Лапласа, Гаусса и других ученых теория ошибок приобрела стройный и удобный для применений вид. Этим в значительной мере объясняется то обстоятельство, что нормальное распределение (термин К. Пирсона) сначала у астрономов и естествоиспытателей, а затем и у математиков стало называться законом Гаусса. Историческая неточность этого наименования ясна хотя бы из того, что впервые нормальное распределение появилось еще у Муавра задолго до рождения Гаусса и широко использовалось Лапласом задолго до того, как Гаусс начал заниматься математикой, и даже до того, как стал обучаться в школе.

Это был героический период в развитии теории вероятностей, и даже ученые высшего ранга — Лаплас, Пуассон, Коши — стремились как можно скорее высказать накопившуюся у них убежденность и использовали для подтверждения своих идей аналитические методы, далекие от логического совершенства. Более того, у этих ученых легко найти пробелы в доказательствах и формулировках результатов, и, хотя Лаплас, Пуассон и Коши дали многообещающие формулировки теорем типа центральной предельной теоремы и закона больших чисел, на эти результаты следует смотреть не как на математические факты, а как на увлечение новым широким и многообещающим полем математических исследований. И недаром впоследствии оказалось, что формулировки общих закона больших чисел и центральной предельной теоремы у Пуассона оказались ошибочными. Потребовалось значительное время, потребовалась гениальность нового поколения ученых, в первую очередь П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, чтобы желания, догадки и внутренняя убежденность в широте и глубине этих положений нашли стройные математические формулировки и доказательства. Тем не менее мы должны отдать должное гению Лапласа, Пуассона, Коши и Гаусса, их умению глубоко предвидеть ценность принципиальных научных идей и новых направлений математической мысли.

Семена были брошены в плодотворную почву, и нужно было время, чтобы они проросли, развились и объяснили человечеству глубокие закономерности окружающего нас мира при помощи мощных методов математического исследования. Во всяком случае мы видим, как блестящие представители, преимущественно французской науки того времени, закладывали основы математического естествознания и теории вероятностей.

Конечно, наряду с фундаментальными применениями неизбежно делались попытки применить новый математический аппарат и к таким областям науки и практической деятельности, в которых эти применения были по меньшей мере сомнительными.

Руководящей философской идеей этого периода развития теории вероятностей было убеждение во всеобщности понятия независимости, и поэтому авторы того времени (вплоть до конца столетия), как правило, не оговаривали это предположение. И только в нескольких работах Лапласа идея зависимости марковского типа начала пробивать себе дорогу.

Статистика народонаселения как научная дисциплина возникла в середине XVIII в., и о первых теоретических исследованиях в этой области, принадлежавших главным образом Д. Бернулли и П. Лапласу, уже говорилось в III томе «Истории математики» (с. 130—133).

В 1800 г. во Франции было создано Генеральное бюро статистики, функционировавшее до 1812 г. и восстановленное в 1833 г., и была предпринята первая попытка переписи населения. В 1832 г., после поездки в Англию А. Кегле, в составе Британской ассоциации содействия науке была учреждена статистическая секция, а еще через год — постоянный комитет этой секции, председателем которого стал Ч. Беббедж. В 1834 г. было создано Лондонское статистическое общество, цель которого состояла в сборе и публикации числовых данных о населении, промышленности и т. п.

В 1839 г. было организовано Американское статистическое общество. В России идейным центром статистической деятельности стало Русское географическое общество, учрежденное в 1845 г.; впрочем, статистико-географические исследования отдельных губерний проводились Вольным экономическим обществом еще в начале XIX в. (примерно с 1809 г.). В отдельных немецких государствах статистические службы были созданы сравнительно рано. Так, статистическое бюро Пруссии, учрежденное в 1805 г. и просуществовавшее только один год, было создано вновь в 1810 г., а статистическое бюро Австрии появилось в 1840 г.

Таким образом, менее чем за полвека в главных государствах Европы и Америки возникли либо государственные учреждения, либо национальные общества, в рамках которых изучалась и развивалась статистика народонаселения отдельных стран. Но, кроме того, начиная с 1851 г. с целью унификации официальных статистических данных начали проводиться международные статистические конгрессы, которые, в частности, способствовали распространению метрической системы мер. Эта система, созданная Великой Французской революцией, даже во Франции была окончательно введена лишь в 1837 г., а международный характер приобрела лишь в 1875 г. после подписания метрической конвенции 17 странами; затем к ней стали понемногу присоединяться одно государство за другим. Впрочем, в некоторых странах, как США, до сих пор сохраняются и свои национальные системы мер.

Вскоре стало ясно, что унификация государственных статистических данных невыполнима, и после 1876 г. официальные статистические конгрессы перестали проводиться. Потребности капиталистического общества привели к возникновению национальных статистических служб, однако различия и противоречия в рамках этого общества не позволили объединить отдельные национальные «статистики» в одно целое.

Развитие статистики народонаселения в XIX в. невозможно представить себе без изучения работ бельгийского геометра, астронома и метеоролога Ламбера Адольфа Жака Кетле (1796—1874), навеянных идеями Лапласа, Пуассона и других ученых, например Ж. Б. Фурье, под редакцией которого в 1821—1829 гг. было выпущено четырехтомное статистическое описание Парижа и департамента Сены. Не оставивший после себя серьезного наследия в чисто научной области, Кетле был талантливым популяризатором статистики, привлекавшим к ней внимание европейского общественного мнения. Отметим также, что Кетле был председателем Центральной бельгийской статистической комиссии и организатором первого международного статистического конгресса.

В сочинениях Кетле можно найти многие десятки страниц, посвященные простейшей математико-статистической обработке числовых данных о росте человека в зависимости от возраста, о соотношении роста и веса человека и т. д. Все эти данные Кетле справедливо считал необходимыми как для изучения человека вообще, так и для судебной медицины. Надо сказать, что до Кетле простейшей обработкой антропометрических данных занимались только скульпторы и художники (Л.-Б. Альберти), которые, впрочем, интересовались не человеком вообще, а типом прекрасного.

Главное место в учении Кетле занимало широко применявшееся им, но встречающееся еще у Бюффона (ИМ, т. 3, с. 146), понятие о среднем человеке. Это понятие он вначале (1831) ввел в антропометрическом смысле, а затем развил и пропагандировал во множестве работ; одной из наиболее известной среди них была двухтомная книга «О человеке и развитии его способностей, или опыт социальной физики» (*Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*. Т. 1—2. Bruxelles, 1836)<sup>38</sup>. Это абсолютизированное понятие «среднего человека» было подвергнуто критике многими математиками и статистиками. Так, например, Ж. Бертран в своем «Исчислении вероятностей» (*Calcul des probabilités*. Paris, 1888), о котором нам придется говорить далее, писал: «В тело среднего человека бельгийский автор вложил среднюю душу». Средний человек «лишен страстей и пороков, он ни безумен, ни мудр, ни невежда, ни ученый ... (он) зауряден во всем. После того как он съедает в течение тридцати восьми лет средний паек здорового солдата, ему положено умереть не от старости, а от средней болезни, которую обнаруживает в нем статистика»<sup>39</sup>. Разумеется, эти едкие замечания выдающегося французского математика не относились к применению средних величин в статистике вообще, значение которых никто не оспаривал.

Более интересна мысль Кетле изучать законы исторического развития по изменению среднего человека в различные эпохи. Но и здесь его идеи далеки от ясности.

Интересной для своего времени была интерпретация Кетле постоянства количества преступлений. «...Есть бюджет, — писал он, — который уплачивается с ужасающей регулярностью, — это бюджет тюрем, каторги и эшафотов, т. е. тот, к уменьшению которого следовало бы особенно стремиться; и ежегодно числа подтверждают мои предвидения... есть дань, которую человек уплачивает с большей регулярностью, чем та дань, которую он должен уплатить природе или государственной казне, — это дань преступлению! ... Мы можем заранее вычислить, сколько людей запятнают руки кровью себе подобных, сколько станет подделывателями, сколько — соблазнителями; почти так же, как можно заранее вычислить количество имеющих родиться и умереть». «Всякий социальный строй, — добавляет он, — предполагает определенное количество и определенный порядок преступлений, которые вытекают из его организации как необходимое следствие»<sup>40</sup>.

После этого утверждения его же рекомендация, кажется единственная, выглядит не очень конкретно: законодатель, указывает он, должен «по возможности» устранять причины преступлений<sup>41</sup>. По своим политическим воззрениям Кетле был буржуазным либералом. В 1869 г., оценивая твор-

<sup>38</sup> Существует русский перевод этого сочинения: *Кетле А. Социальная физика*. В 2-х томах. Киев, 1911—1913.

<sup>39</sup> *Bertrand J. Calcul des probabilités*. Paris, 1888, p. XLIII.

<sup>40</sup> *Кетле А. Социальная физика*. Т. 1. Киев, 1911, с. 12. Не забудем, что Кетле писал это в 1836 г. — *Прим. ред.*

<sup>41</sup> Там же, т. 2, 1913, с. 344.



А. КЕТЛЕ

чество Кетле как статистика в целом, К. Маркс писал: «В прошлом у него большая заслуга: он доказал, что даже кажущиеся случайности общественной жизни вследствие их периодической возобновляемости и периодических средних цифр обладают внутренней необходимостью. Но объяснение этой необходимости ему никогда не удавалось. Он не двигался вперед, а только расширял материал своего наблюдения и исчисления»<sup>42</sup>.

С математической точки зрения устойчивость статистических рядов должна быть научно обоснована, — именно на это указывал Маркс, — Кетле же ограничился утверждением о том, что каждому человеку как бы присуща общечеловеческая способность совершения преступления, присутствующий некоторый единый для всех членов данного общества коэффициент преступности.

С точки зрения статистика действительно можно говорить о существовании «коэффициента преступности», о постоянстве отношения числа осуждаемых к общему числу обвиняемых и предсказывать количество преступлений даже в менее ограничительных условиях (Пуассон). Тем не менее — и наша оговорка соответствует духу применения статистики вообще — подобные статистические выводы нельзя переносить на отдельного человека. Так, обвиняемый не может считаться в какой-то степени виновным уже в силу обвинения; напротив, в каждом отдельном случае судьи обязаны исходить только из презумпции невиновности обвиняемого. Введение единого «коэффициента преступности» в свое время вызвало резкую оппозицию, особенно со стороны немецких статистиков. Так, Г. Рю-

<sup>42</sup> Маркс К. и Энгельс Ф. Сочинения. Т. 32, М., Политиздат, 1964, с. 495—496.

мелин (1815—1889) писал в 1867 г.: «... если ... статистика, опираясь на свои средние числа, вздумает объявить мне, что она с вероятностью такой-то ожидает от меня совершения преступного действия, то я ... отвечу ей: сапожник, не суди превыше сапога»<sup>43</sup>.

Мы привели эту цитату по вышедшим в 1909 г. «Очеркам по теории статистики» крупного русского ученого, члена-корреспондента Академии наук в Петербурге Александра Александровича Чупрова (1874—1926)<sup>44</sup>, также критиковавшего метафизический характер статистических воззрений Кетле. В тех же «Очерках» Чупров излагает критику положений Кетле и со стороны тех, кто опасался общественного оправдания преступности ссылками на коэффициент преступности<sup>45</sup>. Впрочем, публикация статистических данных о преступности вызывала недовольство и до Кетле. Так, доклад русского экономиста и статистика К. Ф. Германа (1767—1838) о статистике убийств и самоубийств, опубликованный еще в 1823 г., вызвал недовольство министра народного просвещения. Сам Герман доказывал важность этой статистики для изучения нравственного и политического положения народа.

Математическая незавершенность сочинений Кетле, отсутствие в них хотя бы постановки вопроса об условиях, необходимых для устойчивости статистических рядов, привела к отрицательным последствиям: из статистических данных стали часто делать необдуманные выводы, компрометирующие сам статистический метод.

Об этом, не называя, правда, Кетле, писал, например, в 1855 г. А. Ю. Давидов в «Учено-литературных статьях профессоров и преподавателей Московского университета, изданных по случаю его столетнего юбилея» (о А. Ю. Давидове см. ниже). Все же именно работы Кетле дали непосредственный толчок к зарождению так называемого континентального направления статистики, основным объектом исследования которого оставалась статистика народонаселения.

Видным представителем этого направления в XIX в. был профессор в Страсбурге, Бреслау (Вроцлаве) и Гёттингене Вильгельм Лексис (1837—1914), который ввел количественную меру устойчивости статистических рядов, выделил несколько типов статистических рядов в соответствии с характером изменчивости его членов и предложил простейшие критерии для оценки взаимной независимости этих членов.

Работы Лексиса и его последователей в XX в., среди которых в первую очередь следует назвать В. И. Борткевича и А. А. Чупрова, оказались исключительно важными для создания математической статистики<sup>46</sup>.

<sup>43</sup> Слова, сказанные, по преданию, художником Апеллесом некоему сапожнику, который после правильного замечания о неточности, допущенной в одной картине Апеллеса при зарисовке сандалии, стал критиковать с видом знатока и другие части его произведения.

<sup>44</sup> Чупров А. А. Очерки по теории статистики. М., Госстатиздат, 1959, с. 211.

<sup>45</sup> Там же, с. 210—212.

<sup>46</sup> Основное сочинение Лексиса «О теории стабильности статистических рядов» (*Über die Theorie des Stabilität statistischer Reihen*, 1879) опубликовано в переводе на русский язык в сборнике «О теории дисперсии» (М., «Статистика», 1968) с комментарием составителя сборника Н. С. Четверикова. Среди предшественников Лексиса должен быть назван И. Ж. Бьенеме, роль которого в этом плане неоднократно подчеркивал А. А. Чупров (см. его «Очерки по теории статистики». М., 1959, с. 280).

Владислав Иосифович Борткевич (1868—1931), юрист по образованию и питомец Петербургского университета, в 1901 г. получил профессию в Берлинском университете. Его работы относятся к статистике, математической статистике и политической экономии. В своем «Законе малых чисел» (*Das Gesetz der kleinen Zahlen*. Leipzig, 1898) он одним из первых обратил внимание на распределение Пуассона и, пользуясь результатами Лексиса, изучал устойчивость количества появления маловероятных событий в обширных рядах наблюдений.

## Русская школа теории вероятностей. П. Л. Чебышев

Теоретико-вероятностные исследования парижской школы математиков, и в частности Лапласа и Пуассона, быстро получили известность и новое развитие в России. Необходимость развития страхового дела, демографических исследований и математической обработки наблюдений и внутренняя логика развития математики привели к тому, что в двадцатых-сороковых годах XIX в. в России были опубликованы первые изложения теории вероятностей и речи о ее важности, а затем и оригинальные исследования в этой области. Все это в условиях России дополнительно стимулировалось решительным антикантианством ряда математиков, как, например, харьковских профессоров Т. Ф. Осиповского (1765—1832) и его ученика А. Ф. Павловского (1788—1856), автора первой на русском языке научно-популярной брошюры «О вероятности» (Харьков, 1821). Идеи о вероятности, т. е. о неполной достоверности человеческих знаний и научных выводов, вполне соответствовали отказу от врожденных идей Канта.

О значении теории вероятностей и важности ее преподавания весьма четко заявил в торжественном собрании Московского университета, состоявшемся 29 июня 1841 г., его профессор, выходец из Чехии, Н. Д. Брашман (1796—1866): «Кто не видит с крайним сожалением совершенное небрежение в учебных заведениях одной из важнейших частей математики? Едва в некоторых университетах дают понятие о теории вероятностей, и до сих пор нет на русском языке ни одного сочинения, ни перевода не только ученой, но даже элементарной теории вероятностей... Надеемся, что русские ученые постараются скоро восполнить этот недостаток»<sup>47</sup>. И всего лишь два года спустя другой московский профессор, коллега Н. Д. Брашмана по физико-математическому факультету Н. Е. Зернов (1804—1862), произнес речь «Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию», печатный текст которой (М., 1843) содержал на 85 страницах изложение как основных понятий и элементарных теорем этой науки, так и многочисленные доводы в пользу различных видов страхования.

Значительный интерес представляют работы Виктора Яковлевича Буныковского (1804—1889), крупного организатора научных исследований и в 1864—1889 гг. вице-президента Академии наук. В 1846—1860 гг. В. Я. Буныковский состоял профессором Петербургского университета, где, в частности, читал курс теории вероятностей. Его имя нам уже встречалось и еще встретится в других отделах настоящего труда. Большой заслугой В. Я. Буныковского явилось издание руководства по теории вероятностей—«Основания математической теории вероятностей»(СПб., 1846).

Находясь под сильным влиянием Лапласа и Пуассона, В. Я. Буныковский считал важнейшей целью своего руководства упрощение выводов и разъяснение полученных ими результатов. Следует сказать, что ту же цель преследовали А. де Морган<sup>48</sup> и О. Курно<sup>49</sup> и, намного раньше, С. Ф. Лакруа<sup>50</sup>.

Вторая важная цель В. Я. Буныковского состояла в выработке русской терминологии, и следует сказать, что значительная часть введенных им

<sup>47</sup> Брашман Н. Д. О влиянии математических наук на развитие умственных способностей. М., 1841, с. 30—31.

<sup>48</sup> Morgan A. de. Theory of probability.—In: Encyclopaedia metropolitana. V. 2. London, 1845, p. 393—490.

<sup>49</sup> Его сочинение (1843), впрочем, более популярное, упомянуто на с. 193.

<sup>50</sup> Его «Элементарный трактат исчисления вероятностей» (Traité élémentaire du calcul des probabilités) выдержал четыре издания (Paris, 1816, 1822, 1833, 1864) и был переведен на немецкий язык (1818).

терминов действительно укоренилась. Вместе с тем ряд рассмотренных им вопросов не представляет научного интереса и даже просто плохо поставлен, а многие утверждения общего характера не выдерживают критики. По Буняковскому, теория вероятностей исследует даже такие явления, про которые вообще ничего не известно. На самом же деле теория вероятностей не составляет исключения из системы наук и не позволяет делать из полного незнания каких-либо положительных выводов. К вероятностным закономерностям приводит не незнание, а специфика массовых случайных явлений. В этом принципиальном вопросе В. Я. Буняковский сделал большой шаг назад по сравнению с Лапласом.

Некоторые работы Буняковского относятся к предьстории теории статистических испытаний. Вслед за Лапласом он предложил определять значения трансцендентных функций по результатам статистических испытаний<sup>51</sup>. Кроме того, именно в результате работ Буняковского широкое распространение получили задачи на «числовые вероятности».

Вот пример такой задачи у Буняковского из его руководства: определить вероятность, что взятое наудачу квадратное уравнение с целыми коэффициентами имеет вещественные корни. Первый пример подобных задач принадлежит, кажется, ученому XIV в. Н. Орему, который утверждал, что два отношения (можно сказать — два числа), взятые «наудачу», вероятно несоизмеримы<sup>52</sup>.

Отметим, наконец, что В. Я. Буняковскому принадлежит формулировка и решение любопытной задачи, которую теперь можно отнести к теории случайных размещений («О соединениях особенного рода, встречающихся в вопросе о дефектах». — Прилож. № 2 к т. 20 «Записок» Петербургской академии, 1871): дано некоторое количество дефектных экземпляров одной и той же брошюры (например, в каждом экземпляре с равной вероятностью отсутствует одна какая-то страница). Определить вероятность того, что из этих экземпляров можно составить определенное количество полноценных брошюр.

Буняковский опубликовал большое число сочинений, посвященных вопросам демографии, включая обширные исследования о возрастном составе населения России, законе смертности, вероятных армейских контингентах. Эти сочинения, имевшие большое прикладное значение, в частности для развития страхового и пенсионного дела, сыграли также важную роль в становлении статистического метода изучения народонаселения в России.

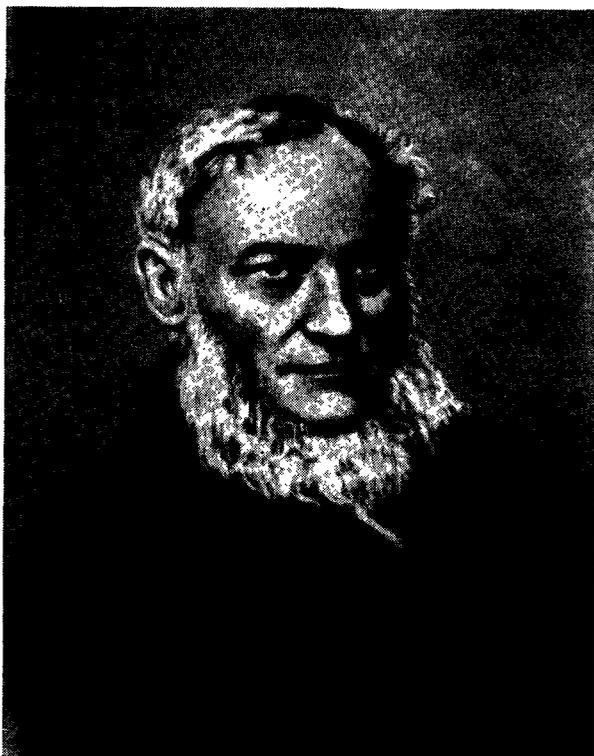
Несколько статей по теории вероятностей и математической статистике принадлежит современнику В. Я. Буняковского, академику М. В. Остроградскому, главные исследования которого, лежавшие в области анализа, математической физики и механики, будут рассмотрены во втором томе данного труда. Одна из этих статей имела прикладное значение и была написана в связи с организацией эмеритальной кассы<sup>53</sup> Морского ведомства («Записка об эмеритальной кассе», 1858)<sup>54</sup>.

<sup>51</sup> Буняковский В. Я. О приложении анализа вероятностей к определению приближенных величин трансцендентных чисел. — *Mém. Acad. sci.*, 1837, 1, N 5.

<sup>52</sup> *Oresme N.* De proportionibus proportionum (On ratios of ratios). Transl. E. Graunt. Madison, 1936, p. 247; *Ad pauca respicientes* (Concerning some matters). Madison, 1966.

<sup>53</sup> Эмеритальными кассами назывались общества взаимного страхования. Офицеры Морского ведомства уплачивали в кассу ежегодные взносы, за счет которых, уходя со службы, получали пожизненные пенсии. Пенсии, кроме того, назначались из этих же взносов семьям погибших и умерших офицеров.

<sup>54</sup> См. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. Т. 3. Киев, Изд-во АН УССР, 1961, с. 297—300.



В. Я. БУНЯКОВСКИЙ

В другой работе «Об одном вопросе, касающемся вероятностей» (1848)<sup>55</sup> М. В. Остроградский указал на возможность применения своих результатов для контроля качества продукции.

В 1858 г. М. В. Остроградский прочел в Артиллерийской академии курс по теории вероятностей из 20 лекций, и имеются данные, что три первые лекции были изданы (найти их не удалось). Заметим еще, что М. В. Остроградский интересовался «моральным ожиданием», введенным в теорию вероятностей Д. Бернулли и Лапласом.

В отчете Академии за 1835 г. сохранилась запись о докладе Остроградского, свидетельствующая по крайней мере о его попытке обобщить предпосылки Лапласа, приняв для морального ожидания более общий закон<sup>56</sup>.

Большое методологическое значение имели работы ученика Н. Д. Брашмана и с 1853 г. профессора Московского университета, автора ряда исследований по механике и различным вопросам математики, Августа Юльевича Давидова (1823—1885). Его литографированные лекции (1854) по теории вероятностей, которые он читал в университете с 1850 г., вполне заслуживали и типографского издания. Как в этом курсе, так

<sup>55</sup> Там же, с. 215—237.

<sup>56</sup> *Остроградский М. В.* Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. М., Физматгиз, 1961, с. 293—294.

и в позднейших сочинениях А. Ю. Давидов уделил большое внимание понятиям случайности, вероятности, отдавая решительное предпочтение объективным вероятностям и закону больших чисел и систематически исследовал статистическую значимость наблюдений.

И по математическому содержанию, и по основным положениям теоретико-вероятностные изыскания А. Ю. Давидова примыкают к трудам Лапласа и Пуассона. Впрочем, «моральными» приложениями теории вероятностей А. Ю. Давидов не занимался, зато большое внимание уделил приложениям к медицине.

В более позднем литографированном курсе теории вероятностей 1884—1885 гг. Давидов ввел в теорию вероятностей понятие о кумулятивной функции распределения, лишь намек на которую имелся у Пуассона. Критически относясь к Кетле, А. Ю. Давидов требовал неукоснительного обоснования статистических выводов методами, как бы мы сейчас сказали, математической статистики.

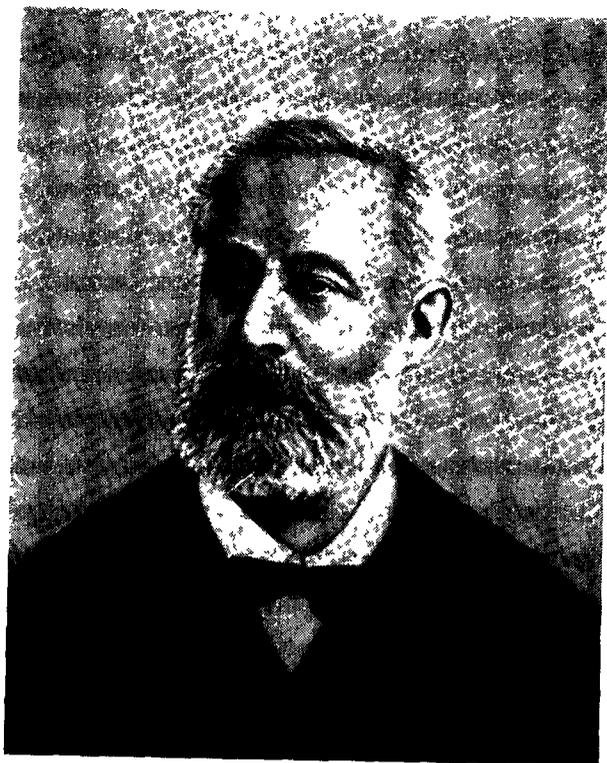
Одно замечание А. Ю. Давидова, высказанное им в речи на торжественном собрании Московского университета в 1857 г. и вряд ли оцененное современниками, заслуживает особого упоминания: статистика, указывал он, имеет дело и со средними, полученными по измерениям действительно существующих величин (например, высоты предмета), и со средними, характеризующими фиктивные величины (например, со средней ценой на хлеб), однако, добавляет А. Ю. Давидов, это разделение несущественно. Можно только пожалеть, что, исходя именно из этого несущественного разделения, астрономы и геодезисты чуть ли не до самого последнего времени упорно не хотели замечать достижений математической статистики.

Новую эпоху в развитии теории вероятностей открыл младший современник В. Я. Бунаковского и М. В. Остроградского, П. Л. Чебышев, имя которого уже не раз встречалось в предыдущих главах.

Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894), величайший, наряду с Н. И. Лобачевским, русский математик XIX в., родился в семье небогатого помещика и первую математическую подготовку получил у домашнего учителя. В 1837—1841 гг. он обучался на физико-математическом факультете Московского университета, где его руководитель, уже упоминавшийся профессор Н. Д. Брашман, человек большой эрудиции и разносторонних интересов, направлял его внимание на проблемы как чистой математики и ее приложений, так и тогдашней техники. В студенческие годы П. Л. Чебышев написал для объявленного факультетом конкурса сочинение «Вычисление корней уравнений», по оригинальности метода и исполнению заслуживавшее золотой медали, но в силу случайных обстоятельств удостоенное только серебряной. Эта работа была опубликована лишь недавно<sup>57</sup>. В 1846 г. П. Л. Чебышев защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (М., 1845) и опубликовал статью о законе больших чисел Пуассона, о которой говорится несколько далее.

В 1847 г. П. Л. Чебышев получил приглашение в Петербургский университет, где после защиты весной того же года диссертации на право чтения лекций, посвященной интегрированию алгебраических иррациональных функций в конечном виде, — вопросу, который исследовали до того Абель, Лиувилль и М. В. Остроградский, — приступил к преподаванию в звании доцента. Работая над этой диссертацией, П. Л. Чебышев встретился

<sup>57</sup> См. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1951, с. 7—25.



А. Ю. ДАВИДОВ

с некоторыми задачами теории чисел, интерес к которой у него еще более возрос в связи с участием в подготовке издания арифметических трудов Эйлера (см. с. 160). Одновременно П. Л. Чебышев готовил докторскую диссертацию «Теория сравнений», напечатанную и защищенную в том же 1849 г. В эти же годы он опубликовал сразу прославившие его открытия в теории распределения простых чисел, о которых говорилось в III главе. Впоследствии П. Л. Чебышев возвращался к теории чисел лишь изредка.

В 1850 г. П. Л. Чебышев был назначен профессором Петербургского университета, а в 1853 г. избран академиком. В течение нескольких десятилетий он развивал неутомимую деятельность и в университете, и в Академии наук. Помимо того, с начала 1856 г. он работал 13 лет как член Артиллерийского отделения Военно-ученого комитета и 17 лет как член Ученого комитета Министерства народного просвещения.

В университете П. Л. Чебышев вел различные курсы, и среди них — с самого начала теорию чисел, а с 1860 г., после выхода в отставку В. Я. Буняковского, теорию вероятностей, которой затем посвятил две основополагающие работы, отделенные промежутком в целых двадцать лет (1867 и 1887 гг.). Помимо математических предметов П. Л. Чебышев в течение нескольких лет читал в Университете, а также в Александровском лицее лекции по практической (прикладной) механике, которая заинтересовала его еще в Москве. Мы не можем здесь касаться многочисленных изобретенных П. Л. Чебышевым механизмов и его вклада в общую теорию механизмов, но должны упомянуть о том значении, которое имели эти

занятия для создания им теории наилучшего приближения функций с ее многочисленными разветвлениями, — теории, которую сам он часто называл теорией функций, наименее уклоняющихся от нуля, а С. Н. Бернштейн в 1938 г. назвал конструктивной теорией функций.

Теории наилучшего приближения функций, постепенно охватившей очень широкий круг связанных с нею вопросов — теорию ортогональных многочленов, теорию моментов, оценки интегралов, квадратурные формулы, интерполирование, теорию непрерывных дробей, служившую одним из главных средств исследований, и т. д., П. Л. Чебышев посвятил большое число работ, публиковавшихся начиная с 1854 г. в течение сорока лет. О теории наилучшего приближения функций будет говориться в следующем томе, посвященном истории математики XIX века.

Наряду с личным творчеством Чебышева важнейшим делом его жизни явилось создание большой математической школы, составившейся прежде всего из его учеников по Петербургскому университету, где он преподавал 35 лет, до 1882 г., а затем из учеников его учеников, не говоря о многочисленных последователях в других городах. П. Л. Чебышев был не только хорошим лектором, но и замечательным научным руководителем, обладавшим редкой способностью удачно выбирать и точно ставить перед молодыми исследователями новые вопросы, рассмотрение которых обещало привести к ценным открытиям.

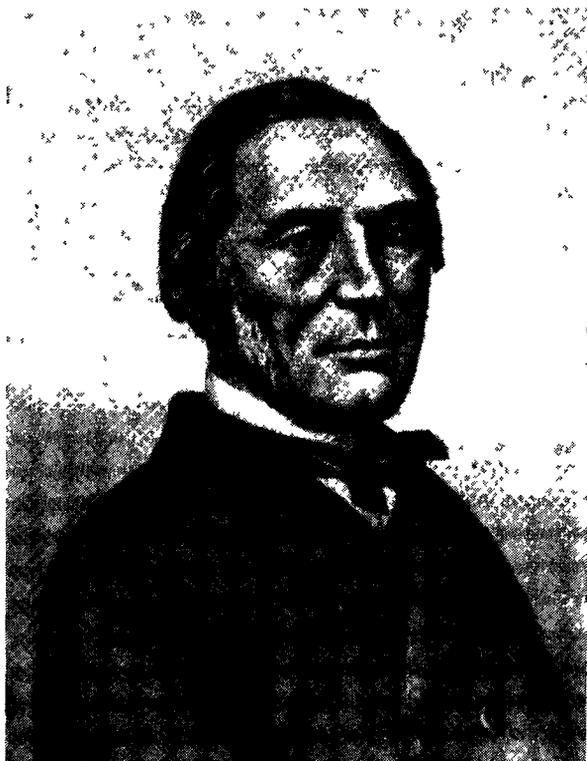
Математическая школа П. Л. Чебышева, получившая название Петербургской (о ней уже говорилось в главе II) сыграла выдающуюся роль в прогрессе математики не только в России, но и в мировом масштабе. Прямыми учениками П. Л. Чебышева были А. Н. Коркин, Ю. В. Сохоцкий, Е. И. Золотарёв, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, И. И. Иванов, К. А. Поссе, Д. А. Граве, Г. Ф. Вороной, А. В. Васильев — здесь названы далеко не все; к его школе принадлежали также Н. Я. Сонин, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов и другие. Имена всех этих ученых либо встречались выше, либо встретятся в дальнейшем изложении. Тематика школы не ограничилась кругом вопросов, которыми занимался лично П. Л. Чебышев; со временем она чрезвычайно разветвилась, частью под влиянием поставленных еще им самим проблем. При всем разнообразии исследований для представителей Петербургской школы всегда оставался характерным тот общий подход к математике, который А. М. Ляпунов, наиболее выдающийся наряду с Золотарёвым и Марковым ученик Чебышева, выразил в некрологе, написанном вскоре после кончины их общего учителя, следующими словами:

«П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

| Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды»<sup>58</sup>.

Обратимся теперь к работам П. Л. Чебышева по теории вероятностей. Число его основных публикаций в этой области невелико — всего четыре,

<sup>58</sup> Ляпунов А. М. Пафнутий Львович Чебышев. Цит. по переизд. в кн.: *Чебышев П. Л.* Избранные математические труды. М. — Л., Гостехиздат, 1946, с. 20.



П. Л. ЧЕБЫШЕВ

но их влияние на дальнейшее развитие этой дисциплины трудно переоценить: его идеи, которые послужили толчком к созданию классической русской школы теории вероятностей, продолжают разрабатываться и в наше время, а полное решение поставленных им задач было получено лишь в сороковых годах нашего столетия. А. Н. Колмогоров пишет: «С методологической стороны основной переворот, совершенный Чебышевым, заключается не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем... но главным образом в том, что Чебышев всюду стремился получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных при хотя бы и большом, но конечном числе испытаний, в виде безусловно правильных при любом числе испытаний неравенств.

Далее, Чебышев впервые ясно оценил и использовал всю силу понятий случайной величины и математического ожидания случайной величины «... сейчас мы постоянно рассмотрение событий  $A$  заменяем рассмотрением его характеристической случайной величины  $\xi_A$ , которая равна единице при осуществлении события  $A$  и равна нулю в случае, когда оно не наступает. Вероятность  $P\{A\}$  события  $A$  есть тогда не что иное, как математическое ожидание  $M\xi_A$  величины  $\xi_A$ . Соответствующий метод характеристических функций множеств стал систематически применяться в теории функций действительного переменного лишь значительно позднее»<sup>59</sup>.

<sup>59</sup> Колмогоров А. Н. Роль русской науки в развитии теории вероятностей. — Учен. зап. МГУ, 1947, вып. 91, с. 56.

В своем первом сочинении, являющемся его магистерской диссертацией (см. выше), П. Л. Чебышев поставил целью изложить теорию вероятностей с наименьшим привлечением аппарата математического анализа. По своему содержанию это сочинение охватывало начала теории вероятностей, биномиальную схему Бернулли и схему Пуассона (с ограниченным числом испытаний), теоремы Муавра — Лапласа и математическую обработку наблюдений.

Методологическая установка П. Л. Чебышева<sup>60</sup> обусловила тяжеловесность сочинения, которая особенно проявилась при замене интегрирования суммированием функций. Однако уже в этом сочинении П. Л. Чебышев последовательно проводил характерную для его творчества оценку погрешности допредельных соотношений, которой так недоставало Лапласу, и тем самым ввел в теорию вероятностей трезвый «инженерный» подход, ставший характерным и для всего творчества П. Л. Чебышева, и вообще для математики после П. Л. Чебышева.

Теория вероятностей, по Чебышеву, имеет целью установление вероятностей одних событий по заданным вероятностям других событий. Тем самым у Чебышева наметился отказ от включения теории вероятностей в естествознание в целом. Впрочем, непосредственное подчинение теории вероятностей математике не могло быть осуществлено до выделения из этой теории математической статистики.

В «Элементарном доказательстве одного общего предложения теории вероятностей» (1846)<sup>61</sup> П. Л. Чебышев при помощи остроумного алгебраического метода строго доказал следующую предельную теорему: если в  $k$ -м испытании некоторое событие  $E$  имеет вероятность  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то для общего количества появлений этого события  $\mu$  имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - \frac{[p]}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (20)$$

Этот факт был известен и самому Пуассону, который, однако, доказал его нестрого. «... Как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, — пишет П. Л. Чебышев, — он не доставляет предела погрешности, которую допускает... [его] приближенный анализ, и вследствие такой неизвестности величины погрешности доказательство не имеет надлежащей строгости»<sup>62</sup>. П. Л. Чебышев в своем выводе установил такой «предел погрешности», вычислив оценку вероятности  $P_m$  того, что событие  $E$  случится не менее  $m$  раз при  $\mu$  испытаниях (см. выше). В его собственных обозначениях эта оценка, необходимая для обоснованного применения теоремы Пуассона, выражается неравенством

$$P_m < \frac{1}{2(m-S)} \sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}} \left(\frac{S}{m}\right)^m \left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1},$$

где  $S = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ <sup>63</sup>. При всем этом как Пуассон, так и Чебышев молчаливо предполагали, что события являются независимыми. Это предположение казалось в те времена, да и позднее столь естественным, что оно не оговорено и в позднейших трудах П. Л. Чебышева.

<sup>60</sup> Связанная с тем, что сочинение предназначалось как пособие для студентов Демидовского лицея в Ярославле.

<sup>61</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947, с. 14—22.

<sup>62</sup> Там же, с. 14.

<sup>63</sup> Там же, с. 21.

Как упоминалось, в 1860 г. П. Л. Чебышев начал чтение лекций по теории вероятностей в Петербургском университете и через несколько лет после этого опубликовал и в «Математическом сборнике», и в «Journal des mathématiques pures et appliqués» за один и тот же 1867 г. свое следующее сочинение «О средних величинах»<sup>64</sup>, в котором содержались два важнейших утверждения:

1. Пусть дискретные случайные величины  $x, y, z, \dots$ , принимающие конечное число значений, имеют математические ожидания  $a, b, c, \dots$  и математические ожидания квадратов  $a_1, b_1, c_1, \dots$ . Если обозначить при  $\alpha > 0$

$$L = a + b + c + \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots},$$

$$M = a + b + c + \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots},$$

то

$$\mathbf{P}\{L \leq x + y + z + \dots \leq M\} > 1 - 1/\alpha^2.$$

В иной форме, если положить

$$L' = \frac{a + b + c + \dots}{n} - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}{n}},$$

$$M' = \frac{a + b + c + \dots}{n} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}{n}},$$

где  $n$  — число величин  $x, y, z, \dots$ , то, очевидно,

$$\mathbf{P}\left\{L' \leq \frac{x + y + z + \dots}{n} \leq M'\right\} > 1 - \frac{1}{\alpha^2}. \quad (21)$$

2. Следствия. (а) Если величины  $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$  равномерно ограничены, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{x + y + z + \dots}{n} - \frac{a + b + c + \dots}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (22)$$

(б) Пусть  $b = c = \dots = a, b_1 = c_1 = \dots = a_1$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{x + y + z + \dots}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Это важнейшее для приложений и вместе с тем столь простое следствие появилось только в курсе лекций П. Л. Чебышева 1879—1880 гг., опубликованном по конспекту А. М. Ляпунова в 1936 г.<sup>65</sup>

(в) Пусть теперь случайные величины  $x, y, z, \dots$  принимают значения 0 и 1 с вероятностями  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \dots$  и  $p, q, r, \dots$  соответственно, так что  $a = p, b = q, c = r, \dots$ . Тогда можно считать, что эти величины и вероятности  $p, q, r, \dots$  характеризуют появление события в схеме испытаний Пуассона и частота появления события в  $n$  испытаниях

$$m/n = (x + y + z + \dots)/n.$$

По формуле (22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{p + q + r + \dots}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

что совпадает с формулой (20).

<sup>64</sup> Там же, с. 431—437.

<sup>65</sup> Чебышев П. Л. Теория вероятностей. Лекции акад. П. Л. Чебышева, читанные в 1879/80 г. Издано А. М. Крыловым по записи А. М. Ляпунова. М.—Л., 1936.

Фактически в п. 1 доказано фундаментальное неравенство Бьенеме — Чебышева ( $\xi = x + y + z + \dots$ ,  $\beta > 0$ )

$$P \{ |\xi - E\xi| < \beta \} > 1 - D\xi/\beta^2$$

(о роли Бьенеме см. ниже).

В п. 2 (а) и 2 (б) содержится закон больших чисел в форме Чебышева, частными случаями которого являются закон больших чисел в формах Пуассона (п. 2 (в)) и Я. Бернулли.

Современное понимание этого вопроса таково: говорят, что последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (23)$$

подчиняется закону больших чисел, если существуют такие последовательности постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  и  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  ( $B_n > 0$ ), что при любом  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k) \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Непреодолимая научная ценность исследований, посвященных закону больших чисел, целой плеядой ученых, от Я. Бернулли до П. Л. Чебышева, а затем А. А. Маркова и позднейших математиков, состоит в том, что они нашли те общие условия, выполнение которых обязательно влечет за собой статистическую устойчивость средних, т. е. закономерность случайного. Здесь особенно велики заслуги А. А. Маркова, положившего в первые годы XX в. начала нового большого и в высшей степени важного отдела теории вероятностей, предметом которого служат зависимые случайные величины. В статье «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга», написанной и опубликованной в 1907 г.<sup>66</sup> А. А. Марков писал: «В своих выводах Чебышев ограничился простейшим и потому наиболее интересным случаем независимых величин...», — и далее подчеркивал, что «выводы Чебышева можно распространить и на некоторые случаи довольно общего характера, когда величины зависят друг от друга»<sup>67</sup>. В цитированной работе Марков, в частности, значительно расширил условие приложимости закона больших чисел, полученное П. Л. Чебышевым, доказав, что последовательность (23) подчиняется этому закону и в случае зависимых величин, если

$$\frac{1}{n^2} D \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)^{68}.$$

Несколько позднее, в 3-м издании только что указанного курса теории вероятностей, А. А. Марков установил также, что закон больших чисел имеет место для сумм зависимых величин, если при некотором  $\delta > 0$  для всех  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$E |\xi_k|^{1+\delta} \leq c \quad (c > 0)^{69}.$$

Распространение закона больших чисел Чебышева на непрерывные случайные величины осуществил воспитанник Петербургского университета

<sup>66</sup> Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Л., Изд-во АН СССР, 1951, с. 339—361.

<sup>67</sup> Там же, с. 341—342.

<sup>68</sup> См. также Марков А. А. Исчисление вероятностей. 3-е изд. СПб., 1913, с. 76.

<sup>69</sup> Там же, с. 84.

и профессор Харьковского университета М. А. Тихомандрицкий (1844—1921; см. его «Курс теории вероятностей». Харьков, 1898), а еще раньше — профессор университета в Одессе И. В. Слешинский (1854—1931; см. его работу «К теории способа наименьших квадратов». — Зап. матем. отделения Новорос. об-ва естествоиспытателей. Одесса, 1892, 14).

Сочинение «О двух теоремах относительно вероятностей», появившееся на русском языке в приложении к «Запискам» Академии наук в 1887 г. и на французском — в «Acta mathematica» за 1890—1891 гг.<sup>70</sup>, является одним из замечательных достижений П. Л. Чебышева. Его утверждения верны, несмотря на определенную незавершенность работы и на отдельные дефекты в формулировке теоремы, которая была там высказана. Здесь результаты П. Л. Чебышева по теории моментов, примененные к выводу центральной предельной теоремы теории вероятностей, дали начало сильному методу доказательства, позднее нашедшему многочисленные применения и серьезное развитие в работах других авторов. Далее в этом сочинении отмечается (без строгого вывода) возможность дальнейших уточнений предельной теоремы в форме асимптотического разложения по полиномам Чебышева — Эрмита.

Программа, намеченная в этом сочинении П. Л. Чебышевым, в первой ее части была в основном выполнена его учениками А. А. Марковым (1898) и А. М. Ляпуновым (1901), а выполнение второй ее части начато Г. Крамером (1928) и позднее продолжено рядом других исследователей.

Основная теорема в формулировке самого П. Л. Чебышева звучит следующим образом: ... Если (а) математические ожидания  $a_i^{(1)}$  случайных величин  $u_1, u_2, \dots, \dots$  равны 0, (б) математические ожидания  $a_i^{(2)}, a_i^{(3)}, \dots, a_i^{(k)}, \dots$  их последовательных степеней не превосходят по абсолютной величине какого-либо конечного предела, то вероятность того, что выражение

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(2)})}} \quad (24)$$

примет значение, заключающееся между пределами  $z_1$  и  $z_2$ , при  $n \rightarrow \infty$  сходится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-x^2} dx.$$

Строго говоря, условия Чебышева недостаточны для проведения полноценного доказательства. Прежде всего он, следуя традициям своего времени, не оговаривает независимости величин  $u_k$ . Далее, он не отмечает того, что выражение  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{(2)}$  при  $n \rightarrow \infty$  может стремиться к нулю

и тогда окончательный вывод будет неверен. Условие (б) теоремы сформулировано не очень отчетливо, поскольку совсем не требуется одна и та же константа для всех  $k$ , она может зависеть от порядка  $k$  момента.

Необходимые уточнения в формулировке теоремы Чебышева и связанные с ними уточнения доказательства были почти немедленно после выхода работы в свет внесены А. А. Марковым, о чем несколько подробнее мы скажем позднее.

<sup>70</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. [Т. 3. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948, с. 229—239.

Второй теореме П. Л. Чебышев уделяет в своей работе так мало места, что все сказанное им мы здесь воспроизведем.

«... Заметим, что по формулам, данным нами в записке под названием «О разложении функций одной переменной»<sup>71</sup>, при  $n$  каком-нибудь получается такое выражение для этой вероятности<sup>72</sup>:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \left[ 1 - k_3 \left( \frac{q}{\sqrt{2}} \right)^3 \psi_3(x) + k_4 \left( \frac{q}{\sqrt{2}} \right)^4 \psi_4(x) + \dots \right] e^{-x^2} dx,$$

где  $k_3, k_4, \dots$  суть коэффициенты при  $s^3, s^4, \dots$  в разложении функции

$$\exp \left[ \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \frac{M^{(4)}}{n} s^4 + \dots \right]$$

по степеням  $s$ , а  $\psi_3(x), \psi_4(x), \dots$  — полиномы, получаемые по формуле

$$\psi_l(x) = e^{x^2} \frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}.$$

Здесь  $M^{(3)}, M^{(4)}$  и следующие коэффициенты при  $s^k$  являются семиинвариантами для нормированных сумм.

Несколько слов о французском математике и статистике И. Ж. Бьенеме (1796—1878), с которым П. Л. Чебышев находился в творческом общении и работы которого он высоко ценил. Вот что писал сам П. Л. Чебышев в мемуаре «О предельных величинах интегралов» (1874) о Бьенеме: «В мемуаре, весьма интересном во многих отношениях, который был прочитан Бьенеме в Академии наук в 1833 г. и который был напечатан в *Comptes rendus* и воспроизведен в журнале Лиувилля (2-я сер., т. 12, 1867) под заглавием «*Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi des probabilités dans la méthode des moindres carrés*», знаменитый ученый предлагает метод, заслуживающий особенного внимания. Этот метод со-

стоит в определении предельной величины интеграла  $\int_0^a f(x) dx$  по величинам интегралов

$$\int_0^A f(x) dx, \quad \int_0^A x f(x) dx, \quad \int_0^A x^2 f(x) dx, \dots,$$

где  $A > a$  и  $f(x)$  — неизвестная функция, подчиненная одному только условию сохранять знак + между пределами интегрирования. Простое и строгое доказательство закона Бернулли, находящееся в моей заметке «О средних величинах», представляет один из результатов, легко получаемых из метода Бьенеме, при помощи которого он сам пришел к доказательству одного предложения о вероятностях, из которого закон Бернулли вытекает непосредственно»<sup>73</sup>.

Что же содержится в этом мемуаре Бьенеме? Во-первых, в нем имеется неравенство, которое, однако, не было надлежащим образом выделено из общего текста мемуара и которое мы запишем в виде

$$P \{ |x - E \bar{x}| \geq \alpha \} \leq D\bar{x}/\alpha^2,$$

где  $x$  — среднее арифметическое из результатов серии наблюдений и  $\alpha > 0$ .

<sup>71</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 3. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948, с. 335—341.

<sup>72</sup> Т. е. для вероятности (24) принять значение в  $[z_1, z_2]$ .

<sup>73</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 3, с. 63.

Во-вторых, в этом мемуаре исследуется порядок четных моментов сумм случайных и независимых погрешностей наблюдений в предположении одинакового порядка малости всех этих погрешностей.

Заслуга П. Л. Чебышева состояла в том, что именно он пришел к мысли использовать для доказательства центральной предельной теоремы моменты случайной величины. Таким образом, одним из основных авторов метода моментов является П. Л. Чебышев.

В упомянутом выше курсе лекций П. Л. Чебышева 1879—1880 гг. из общего объема примерно в 250 страниц на долю собственно теории вероятностей отводится лишь около ста последних страниц, которые предвараются весьма солидными разделами, посвященными определенным интегралам (интегралам Эйлера, Лапласа, Фруллани, разрывным интегральным множителям, некоторым интегралам от комплексных функций) и исчислению конечных разностей (для функций одного переменного). Собственно курс теории вероятностей П. Л. Чебышева, включая обоснование метода наименьших квадратов по мемуару Гаусса 1809 г. и смежные вопросы математической обработки наблюдений, в основном состоял из уже известного материала, но характерно, что никаких «моральных» приложений теории вероятностей в нем не было и в помине.

Ограничимся одним замечанием. По поводу формулы Байеса вероятности гипотез (которая, кстати, у самого Байеса отсутствует) П. Л. Чебышев утверждает, что законы, относящиеся к апостериорным вероятностям, являются скорее гипотезами<sup>74</sup>. П. Л. Чебышев не занимался специально вопросами обоснования теории вероятностей и философским осмысливанием ее результатов, но приведенное утверждение свидетельствует о его внимательном отношении и к этой стороне предмета.

Вслед за статьей П. Л. Чебышева «О двух теоремах относительно вероятностей», посвященной, как мы видели, центральной предельной теореме, последовали две публикации А. А. Маркова «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов» (Казань, 1898) и «О корнях уравнения  $e^{x^2} \frac{d^m(e^{-x^2})}{dx^m} = 0$ » (Sur les racines de l'équation  $e^{x^2} \frac{d^m(e^{-x^2})}{dx^m} = 0$ . — Изв. Акад. наук, сер. 5. СПб., 1898), в которых автор вполне точно сформулировал и доказал предложение, аналогичное предложению Чебышева. Путь, которым шел А. А. Марков, был путь метода моментов. Вот формулировка теоремы Маркова в наших теперешних выражениях: если последовательность взаимно независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (25)$$

такова, что при всех целочисленных значениях  $r \geq 3$  будет  $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n(r) / B_n^r) = 0$ , где

$$B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k}, \quad C_n(r) = \sum_{k=1}^n E|\xi_k - E\xi_k|^r,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - E\xi_k) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

<sup>74</sup> Чебышев П. Л. Теория вероятностей. Лекции акад. П. Л. Чебышева, читанные в 1879/80 г. Издано А. М. Крыловым по записи А. М. Ляпунова. М.—Л., 1936, с. 154.

Важнейшие заслуги в доказательстве центральной предельной теоремы принадлежат А. М. Ляпунову, в общем научном творчестве которого теория вероятностей осталась, впрочем, лишь эпизодом. По существу, А. М. Ляпунов опубликовал лишь две теоретико-вероятностные работы: «Об одной теореме теории вероятностей» (Sur une proposition de la théorie des probabilités, 1900) и «Новая форма теоремы о пределе вероятности» (Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, 1901), — первую в «Известиях» и вторую — в «Записках» Петербургской академии <sup>75</sup>.

Полагая метод моментов слишком сложным и громоздким, Ляпунов доказал центральную предельную теорему методом характеристических функций. И этот метод, и разрывный множитель Дирихле, которым Ляпунов пользовался для упрощения преобразований, применялись в теории вероятностей задолго до него, и в принципе его путь был известен. Но именно Ляпунов точно указал условия, необходимые для выполнения центральной предельной теоремы, и весьма аккуратно оценил быстроту сходимости распределения нормированной суммы случайных величин к нормальному закону. Таким образом, Ляпунов сумел подчинить метод Лапласа общематематическим требованиям Чебышева о строгости доказательства предельных теорем и о получении оценок отклонений от предельных закономерностей при конечном числе испытаний.

Вот основной результат А. М. Ляпунова: если для последовательности независимых случайных величин (25) существует хотя бы одно такое  $\delta > 0$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E\xi_k^{2+\delta}}{\left(\sum_{k=1}^n D\xi_k\right)^{1+\delta/2}} = 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ z_1 < \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n E\xi_k}{\sqrt{2 \sum_{k=1}^n D\xi_k}} < z_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

причем стремление к нормальному закону является равномерным для любых  $z_1$  и  $z_2$  ( $z_2 > z_1$ ).

А. М. Ляпунов также установил известные неравенства между абсолютными начальными моментами для дискретных случайных величин

$$v_m^{l-n} < v_n^{l-m} < v_l^{m-n} \text{ при } l > m > n \geq 0$$

(«Новая форма теоремы...»), а в предыдущем мемуаре («Об одной теореме...»), в начале § 4, впервые привел четкое, хотя и косвенное, определение кумулятивной функции распределения  $F(x)$ , в соответствии с которым для любых  $u$  и  $v$ ,  $v > u$ ,

$$F(v) - F(u) = \mathbf{P} \{u \leq \xi < v\}.$$

После работ А. М. Ляпунова А. А. Марков еще раз вернулся к доказательству центральной предельной теоремы, имея в виду восстановить «поколебленное» А. М. Ляпуновым значение метода моментов <sup>76</sup>. Поставив себе подобную цель, А. А. Марков уже не мог требовать существования всех моментов случайных величин (потому что такого условия не было у А. М. Ляпунова), и это обстоятельство, как казалось, служило не-

<sup>75</sup> Эти статьи перекрывают два кратких сообщения, опубликованные им по этой же теме в Comptes rendus Парижской академии в 1901 г. Русский перевод всех четырех работ напечатан в кн.: Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1954, с. 125—176.

<sup>76</sup> Марков А. А. Исчисление вероятностей. 3-е изд. СПб., 1913, с. 332.



А. А. МАРКОВ

преодолимым принципиальным препятствием для применения метода моментов. И все-таки А. А. Марков блестяще справился со своей задачей, применив ставшее с тех пор стандартным урезание случайных величин, добившись тем самым и очевидного существования всех моментов только лишь у этих урезанных величин.

Имя А. А. Маркова и его работы не раз упоминались в предыдущем изложении. Поскольку наибольшее значение в развитии математики приобрели его исследования по теории вероятностей, мы в заключение этого раздела <sup>77</sup> кратко опишем его жизненный путь. Андрей Андреевич Марков (1856—1922), сын мелкого служащего Лесного департамента, затем ставшего частным поверенным, увлекся математикой еще будучи гимназистом. В 1874 г. он поступил в Петербургский университет, где слушал лекции Чебышева, Коркина и Золотарёва и был активным участником студенческого кружка, руководимого двумя последними учеными. По окончании университета в 1878 г. А. А. Марков был оставлен при нем для подготовки, как тогда выражались, к профессорскому званию. О его магистерской диссертации по теории минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм, непосредственно примыкавшей к работам Золотарёва и Коркина, говорилось во II главе. Эту диссертацию высоко оценил П. Л. Чебышев, особо отметивший искусное применение в ней непрерывных дробей, которые он с таким успехом применял в собственных

<sup>77</sup> Биография А. М. Ляпунова будет помещена в одной из следующих книг, посвященных истории математики XIX в.

изысканиях. К арифметической теории квадратичных форм А. А. Марков возвращался и в дальнейшем. В том же 1880 г., когда состоялась магистерская защита А. А. Маркова, он начал преподавание в Петербургском университете в качестве доцента.

Четыре года спустя А. А. Марков защитил докторскую диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» (СПб., 1884), где, среди прочего, доказал и обобщил важные неравенства Чебышева, приведенные десятью годами ранее в статье «О предельных величинах интегралов» (Sur les valeurs limites des intégrales. — J. math. pures et appl., 1874)<sup>78</sup>. Докторская диссертация явилась первой в большом цикле работ А. А. Маркова по теории моментов, интерполированию и теории наилучшего приближения функций, продолжавшихся почти тридцать лет. В 1886 г. он был избран профессором Петербургского университета и, по предложению П. Л. Чебышева, академиком. В штате университета А. А. Марков оставался до 1905 г., когда вышел в отставку, чтобы не загораживать путь более молодым ученым. Но связь с университетом он сохранял до конца жизни, регулярно читая в нем, на правах приват-доцента (т. е. без твердого жалованья) курсы теории вероятностей и лекции о непрерывных дробях.

Среди работ А. А. Маркова имеются статьи по разным вопросам, помимо названных, например по теории дифференциальных уравнений, но с конца 90-х годов он все чаще обращается к теории вероятностей. Некоторые из них были охарактеризованы выше, но большая часть их приходится уже на первую четверть XX столетия, в конце которой, в 1924 г., было посмертно опубликовано переработанное самим автором 4-е издание его «Исчисления вероятностей». Первое издание этого замечательного университетского руководства, в которое, как мы видели, включались и многие открытия А. А. Маркова, вышло в 1900 г., но начальные варианты его выходили в литографированных изданиях с того времени, когда А. А. Марков стал читать лекции по теории вероятностей вместо ушедшего в отставку П. Л. Чебышева, т. е. с 1882—1883 учебного года.

«Несомненно, — писал С. Н. Бернштейн, — самым ярким выразителем идей и направления Чебышева в теории вероятностей был А. А. Марков, наиболее близкий своему учителю по характеру и остроте своего математического дарования. Если Чебышев, в особенности к концу жизни, а также и в своих лекциях, иногда сам уклонялся от требуемой им четкости формулировок и строгости доказательств в теории вероятностей, то классический курс исчисления вероятностей А. А. Маркова и его оригинальные мемуары, являющиеся образцами точности и ясности изложения, в наибольшей степени содействовали превращению теории вероятностей в одну из самых совершенных областей математики и широкому распространению направления и методов Чебышева»<sup>79</sup>. Важнейшей заслугой А. А. Маркова явилось начало изучения свойств сумм и средних для зависимых случайных величин и создание в 1907 и следующие годы теории так называемых цепей Маркова — основы одного из главных теперь отделов теории вероятностей и ее приложений. Но эта тема выходит далеко за границы рассматриваемого нами времени.

А. А. Марков был не только крупнейшим ученым, но и выдающимся гражданином. В юные годы он с увлечением читал произведения Добролюбова, Писарева и Чернышевского, которые оказали явное влияние

<sup>78</sup> Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 3. 1948, с. 63—65.

<sup>79</sup> Бернштейн С. Н. О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. — В кн.: Научное наследие П. Л. Чебышева. Вып. 1. Математика. 1945, с. 59—60.

на формирование его общественных взглядов. Взрослым человеком он смело выступал против реакционной политики царского правительства. Так, в 1902 г. он резко протестовал против кассации по требованию самого царя выборов в почетные академики А. М. Горького, в 1907 г. письменно отказался от участия в выборах в Государственную думу в связи с незаконным установлением новых избирательных правил, а в 1913 г. официально празднованию трехсотлетия дома Романовых он как бы противопоставил научный юбилей, относящийся к истории теории вероятностей. С этой целью, по предложению А. А. Маркова, под его редакцией и с его предисловием Академия наук издала «Часть четвертую сочинения Якова Бернулли *Ars Conjectandi*» (СПб., 1913), с надписью наверху обложки и титульного листа: «К 200-летию юбилею закона больших чисел».

### Новые области приложения теории вероятностей. Возникновение математической статистики

Элементы кинетической теории газов были созданы в XVIII и первой половине XIX в. по существу без привлечения идей и методов теории вероятностей. Положение изменилось лишь во второй половине XIX в., начиная, пожалуй, с работ Р. Клаузиуса (1822—1888) и особенно работы Дж. К. Максвелла (1831—1879) «Пояснения к динамической теории газов» (*Illustrations of the dynamical theory of gases*, 1860)<sup>80</sup>.

Максвелл предположил, что скорости молекул газа в равновесном состоянии неодинаковы, и задался целью определить закон распределения этих скоростей. Допустив также, что компоненты скорости молекулы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  взаимно независимы, он получил для искомой плотности распределения  $\varphi(x)$  соотношение

$$\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2), \quad (26)$$

откуда  $\varphi(x) = Ce^{-Ax^2}$  ( $C > 0$ ,  $A < 0$ ).

Простая идея, лежащая в основе этого вывода и усматриваемая из соотношения (26), не была нова: в теории ошибок ее использовал в одном из своих выводов нормального закона еще Р. Эдрейн (см. с. 198); эту же идею также в теории ошибок независимо использовали Дж. Гершель (1850), У. Томсон (он же — лорд Кельвин) и П. Тейт (1867), а затем Н. Я. Цингер (1899) и А. Н. Крылов (1932).

В области физики идея вывода Максвелла также получила широкую известность, а сам вывод в 1872 г. был усовершенствован австрийским физиком Л. Больцманом (1844—1906), который доказал, что распределение Максвелла — единственное, удовлетворяющее условию статистического равновесия. Мы заметим лишь, что современный вывод распределения Максвелла принадлежит Ю. В. Линнику (1952), который уточнил предпосылки вывода<sup>81</sup>, а затем дополнительно провел выводы этого распределения при трех различных ослабленных предположениях.

Для Максвелла теоретико-вероятностный метод был необходим ввиду невозможности вычисления скорости каждой отдельной молекулы, о чем он писал в одной работе 1875 г.

Существенно новый этап в приложении теории вероятностей к физике, а точнее — к кинетической теории газов связан с именем Больцмана. Уже в одной статье 1871 г. Больцман заметил, что доказательство по крайней

<sup>80</sup> Имеется русский перевод в кн.: *Максвелл Дж. К.* Статьи и речи. М., «Наука», 1968.

<sup>81</sup> Взаимная независимость компонент скорости должна иметь место при любом выборе системы координат.

мере некоторых положений термодинамики должно быть проведено с учетом вероятностных соображений, а в 1872 г. при изучении закона распределения кинетической энергии молекул (что как раз было связано с усовершенствованием вывода Максвелла закона распределения скоростей молекул) и некоторой функции от этого распределения заявил, что «проблема механической теории тепла — это проблема исчисления вероятностей»<sup>82</sup>.

Работы Больцмана не получали признания: во-первых, сама атомно-молекулярная теория строения вещества была еще только рабочей гипотезой и, во-вторых, соображения о вероятностном переходе веществ из одного состояния в другое противоречили обратимости формул механики. Дискуссия по поводу этого противоречия в основном с И. Лопшидтом привела к тому, что в 1877 г. Больцман<sup>83</sup> устранил из рассмотрения механические элементы и целиком перешел к теоретико-вероятностному методу.

Конкретно, Больцман отыскивал плотность распределения  $f(x)$  кинетической энергии системы молекул при условии наиболее вероятного состояния системы (т. е. ее теплового равновесия). Пусть кинетическая энергия у  $w_0$  молекул заключена в интервале  $[0, \epsilon]$ , у  $w_1$  молекул — в интервале  $[\epsilon, 2\epsilon]$  и т. д. Тогда, если общее число молекул равно  $n$ ,

$$w_0 \approx n\epsilon f(0), \quad w_1 \approx n\epsilon f(\epsilon), \quad w_2 \approx n\epsilon f(2\epsilon) \text{ и т. д.},$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots = n.$$

Число возможных распределений данного состояния системы

$$p = \frac{n!}{w_0! w_1! w_2! \dots},$$

а максимум  $p$ , как оказывается, соответствует случаю

$$f(x) = Ce^{-hx} \quad (C, h > 0).$$

Рассматривая, далее, распределение компонент  $u, v, w$  скоростей молекул, Больцман пришел к вычислению интеграла

$$\Omega = - \iiint f(u, v, w) \ln f(u, v, w) du dv dw$$

при заданной кинетической энергии системы и доказал, что  $\Omega$  («мера распределенности» системы, как ее назвал Больцман) является мерой вероятности ее состояния, и притом, — в отличие от энтропии, — определенной при любом состоянии системы, а не только при состоянии равновесия.

В качестве общего вывода Больцман сформулировал второй закон термодинамики в вероятностном виде: изменение, которое может произойти само собой, заметил Больцман, есть переход от менее вероятного состояния к более вероятному состоянию.

Работы Больцмана по-прежнему не признавались никем, за исключением почти одного только М. Планка<sup>84</sup>, и очень возможно, что это обстоятельство сыграло свою роль в том, что Больцман покончил жизнь само-

<sup>82</sup> Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. — In: Wiss. Abhandl., Bd 1. Leipzig, 1909. Цитата приводится по кн.: Гельфер Я. М. История и методология термодинамики и статистической физики. Т. 1. М., «Высшая школа», 1969, с. 379.

<sup>83</sup> См. статью Больцмана «Об отношении второго начала механической теории теплоты и исчисления вероятностей в соответствии с теоремами о тепловом равновесии» (Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, resp. den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. — In: Wiss. Abhandl., Bd 2).

<sup>84</sup> В России теоретико-вероятностную точку зрения на кинетическую теорию газов поддерживали В. А. Михельсон (1883) и Н. Н. Пирогов (1886).



Л. БОЛЬЦМАН

убийством. Но в дискуссиях, проходивших в последние годы XIX в., Больцман успел дополнительно разъяснить свою точку зрения. Так, в ответ на критику со стороны немецкого математика Э. Цермело (1871—1953), основанную на известной теореме А. Пуанкаре о возвращении механической системы в первоначальное состояние, Больцман указал, что период возвращения системы в это состояние невообразимо велик<sup>85</sup> и что сам факт возвращения не противоречит теоретико-вероятностным представлениям.

Уже в начале XX в. вероятностная сущность второго начала термодинамики была ярко проиллюстрирована урновой моделью Пауля Эренфеста (ученика Больцмана) и его жены Т. А. Афанасьевой-Эренфест в их работе «О двух известных возражениях против  $H$ -теоремы Больцмана» (*Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche  $H$ -Theorem*, 1907)<sup>86</sup>.

Работы Максвелла и Больцмана фактически заложили основы классической статистической физики, завершенной американским физиком Дж. У. Гиббсом (1839—1903) в его «Основных принципах статистической механики, развитых со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики» (*Elementary principles in statistical mechanics*

<sup>85</sup> *Boltzmann L. Zu Hrн Zermelos Abhandlung «Über die mechanische Erklärung irreversibeler Vorgänge», 1897. — In: Wiss. Abhandl., Bd 3, S. 579—586).*

<sup>86</sup> См. русский перевод в кн.: *Эренфест П.* Сб. статей. М., «Наука», 1972. Уже упоминалось (см. с. 188), что эта модель, с появления которой принято начинать историю случайных процессов, по существу встречается еще у Д. Бернулли.

developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics. New Haven, 1902)<sup>87</sup>. Мы не будем останавливаться на работах Гиббса и на высказанной Больцманом в 1868 г. эргодической гипотезе; исследования, посвященные этой гипотезе, появились только в XX в., начиная с критического обзора статистической механики П. и Т. Эренфестов (1911).

В результате работ Больцмана в физике и развития естествознания вообще произошел коренной перелом: некоторые фундаментальные законы природы, как оказалось, имеют вероятностный, а не жесткий, детерминированный характер. Следует, однако, добавить, что в XIX в. сама теория вероятностей еще не получила от физики импульса к дальнейшему развитию<sup>88</sup>.

Характеризуя применение статистического метода в XIX в., А. Я. Хинчин утверждал, что «довольно расплывчатые и как бы робкие вероятностные рассуждения здесь еще не претендуют на роль основной базы, фигурируя наряду и приблизительно на равном положении с чисто механическими рассматриваниями... делаются еще довольно далеко идущие предположения относительно строения и законов взаимодействия частиц... понятия теории вероятностей являются здесь лишенными отчетливости, обременены тяжелыми смешениями и благодаря этому очень часто дискредитируют математические рассуждения... предельные теоремы теории вероятностей... здесь еще не находят себе применения. Математический уровень всех этих исследований чрезвычайно низок, и важнейшие задачи, которые ставит математике эта новая область применений, еще не видны сколько-нибудь отчетливо»<sup>89</sup>.

Все это написано, конечно, с позиций статистической механики середины нашего столетия, и можно, пожалуй, добавить, что у Больцмана все же встречается попытка логически строгого введения понятия статистической вероятности. Именно в этой связи во второй части своих «Лекций по теории газов» (*Vorlesungen über Gastheorie*. Tl 1—2. Leipzig, 1895—1899)<sup>90</sup> он несколько раз рассматривает бесконечное множество «повторений» одного и того же газа и по существу вводит таким образом бесконечную генеральную совокупность. Точку зрения Больцмана, неявно применявшуюся еще Лапласом, воспринял Гиббс<sup>91</sup>.

В разделе, посвященном социальной и антропометрической статистике, мы описывали развитие статистики народонаселения, этой традиционной отрасли приложения теории вероятностей, на континенте Европы. В Англии развитие статистики пошло по иному — по пути ее приложения в биологии. Первым в этой связи должен быть упомянут Ф. Гальтон (Голтон,

<sup>87</sup> Рус. перев.: *Гиббс Дж. У.* Основные принципы статистической механики. М.— Л., Гостехиздат, 1946.

<sup>88</sup> Впрочем, теория вероятностей, безусловно, применялась при конкретных физических исследованиях. По этому поводу см., например: *Schneider J.* Clausius' erste Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen der atmosphärischen Lichtstreuung.— *Arch. hist. exact. sci.*, 1974, 14, N 2. Работа Клаузиуса относится к 1849 г. Роль Клаузиуса в создании кинетической теории газов, во всяком случае с точки зрения теории вероятностей, еще недостаточно изучена.

<sup>89</sup> *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики. М.— Л., Гостехиздат, 1943, с. 7.

<sup>90</sup> *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М., Гостехиздат, 1956.

<sup>91</sup> Определение вероятности, основанное на бесконечном количестве опытов — и, следовательно, на существовании некоторой бесконечной генеральной совокупности, было положено в основу всей теории вероятностей уже в начале XX в. Р. ф. Мизесом (1883—1953). Конструктивные идеи Мизеса в своем непосредственном виде оказались неприемлемыми, однако и они, и его резкая критика основ классической теории вероятностей плодотворно воздействовали на развитие этой научной дисциплины.

1822—1911), двоюродный брат Ч. Дарвина. Будучи главным образом психологом и антропологом, Гальтон стремился основывать свою научную работу в этих и других областях науки на измерениях и их математической обработке и именно так после появления дарвиновского «Происхождения видов» (1859) он подошел к проблеме наследственности.

Книга Гальтона «Естественная наследственность» (*Natural inheritance*. London — New York, 1889), основанная на разработанных им элементах теории корреляции<sup>92</sup>, привлекла к себе внимание математика К. Пирсона и зоолога У. Ф. Р. Уэлдона (1860—1906), который стремился обосновать дарвиновскую теорию естественного отбора статистическим изучением популяций животных и растений.

В самом конце XIX в. Гальтон, Пирсон и Уэлдон создали биометрическую школу, т. е. научную школу, цель которой состояла в создании методов обработки биологических наблюдений и исследования статистических закономерностей в биологии, основав существующий до сего времени журнал «Биометрика»<sup>93</sup>.

В первом номере этого журнала (1902) содержатся две редакционные статьи, в первой из которых говорится:

«Очень немного лет назад все те проблемы, решение которых зависят от изучения различий между отдельными индивидуумами расы или вида, пренебрегались большинством биологов...

Исходная мысль дарвиновской теории эволюции заключается именно в существовании этих различий ... первый шаг в исследовании возможного влияния процесса отбора на какой-либо отличительный признак расы должен состоять в оценке частоты, с которой встречаются индивидуумы, проявляющие любую заданную степень аномальности по отношению к этому признаку... Эти и многие другие проблемы влекут за собой сбор статистических данных в большом масштабе...»<sup>94</sup>.

И далее, во второй статье:

«...проблема эволюции есть проблема статистики ... мы должны обратиться к математике больших чисел, к теории массовых явлений, чтобы надежно истолковать наши наблюдения... разве нельзя спросить, как случилось, что основатель нашей современной теории эволюции так мало обращался к статистике? Характерная черта мышления Дарвина привела его к установлению теории эволюции без математических понятий; именно так работало мышление Фарадея в области электромагнетизма. Но как каждая мысль Фарадея допускает математическое определение и требует математического исследования ... так и каждая идея Дарвина, — вариация, естественный отбор ... сразу же представляется приспособленной для математического определения и требующей статистического исследования»<sup>95</sup>. Далее приводится все же найденное высказывание Дарвина о значимости статистического метода и его замечание, что он не верит ни во что, «кроме фактического измерения и тройного правила». Эти слова, — пишут

<sup>92</sup> Наличие корреляционных соотношений между некоторыми событиями было известно, конечно, давно. Так, Аристотель в книге «*Problemata*» заметил наличие подобных соотношений в биологии, а Кеплер в своей «*Гармонии мира*» (кн. 4, гл. 7) ошибочно полагал, что при отсутствии «аспектов» (т. е. «примечательных» расположений небесных светил) обычно бывает тихая погода. Однако количественного измерения тесноты корреляции до Гальтона, кажется, не было и коэффициент корреляции ввел именно Гальтон (1888).

<sup>93</sup> Заметим попутно, что в числе весьма немногих математических журналов «*Биометрика*» регулярно публикует статьи по истории своего предмета (точнее, по истории теории вероятностей и математической статистики).

<sup>94</sup> *The scope of Biometrika*. — *Biometrika*, 1901—1902, 1, pt 1, 1—2.

<sup>95</sup> *The spirit of Biometrika*. *Ibid.*, p. 4.

авторы статьи, призывая к союзу биологов, математиков и статистиков, — «вполне могут служить девизом для «Биометрики» и всех специалистов по биометрии»<sup>96</sup>.

Главой биометрической школы с самого начала стал Карл Пирсон (1857—1936); в частности, именно он вплоть до своей смерти был главным, а многие годы — единственным редактором «Биометрики». Пирсон получил математическое образование в Кембридже, где его учителями были Дж. Стокс, Максвелл, Кэли и У. Бернсайд, и дополнительно изучал физику в Гейдельберге. В 1884 г. он стал профессором прикладной математики и механики в Лондонском университете, в 1911 г. — профессором евгеники; в 1896 г. был избран членом Королевского общества.

Пирсон был весьма разносторонним ученым: помимо работ по математической статистике, его перу принадлежат труды по прикладной математике и философии<sup>97</sup>. В молодые годы он изучал юриспруденцию и историю и по своим взглядам склонялся к умеренному социализму английского толка. Первая публикация Пирсона по математической статистике появилась около 1893 г., и, хотя до конца XIX в. он опубликовал более 20 работ, его основные результаты относятся к XX в. Пирсон существенно продвинул теорию корреляции и издал большое число важных статистических таблиц. Но главное в его работах — изучение ряда распределений, часть которых была введена в употребление им самим, и оценка их параметров по результатам наблюдений. Развитие этого направления, центрального в математической статистике на рубеже XIX—XX вв. и начала XX в., привело к отказу от пережившей себя методики определения «истинных значений» наблюдаемых величин в классической теории ошибок. Именно математически четкое требование оценки параметров распределения при том или ином дополнительном условии позволило яснее ставить конкретные задачи и по существу создать соответствующую часть математической статистики. Работам Пирсона, по крайней мере до 20-х годов XX в., был присущ недостаточно высокий общетеоретический уровень, что затрудняло их признание и дальнейшее развитие за пределами Англии<sup>98</sup>.

Однако научная общественность Англии была подготовлена к восприятию идей и методов биометрической школы ввиду предшествующих работ Ф. И. Эджворта (1845—1926), также разностороннего ученого, который занимался не только теорией вероятностей, статистикой и ее приложениями и теорией ошибок, но и политической экономией и, кроме того, был одним из пионеров приложения математики к экономике. В то же время, ввиду особенностей стиля Эджворта, его математические работы оставались малоизученными.

<sup>96</sup> Ibid.

<sup>97</sup> По основным философским вопросам Пирсон был близок к Э. Маху, и его взгляды, изложенные в книге «Грамматика науки» (*The grammar of science*, 1892), были подвергнуты резкой критике в книге «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленина (1909).

<sup>98</sup> См., например: *Tschuprow A. A. Teorien för statistiska räknors stabilitet*, 1926 (рус. перев. в кн.: *Чупров А. А. Вопросы статистики*. М., Госстатиздат, 1960). Заметим, что сам А. А. Чупров способствовал признанию работ Пирсона в России, о чем свидетельствуют и его «Очерки по теории статистики» 1909 г., и его переписка с А. А. Марковым (1910—1917); в начальном периоде этой переписки А. А. Марков крайне отрицательно отзывался о Пирсоне, но затем, под влиянием А. А. Чупрова, значительно изменил свою точку зрения. См.: О теории вероятностей и математической статистике. (Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова). Отв. ред. Х. О. Ондар. М., «Наука», 1977. Вообще идеи биометрической школы стали известными в России в начале XX в. в результате работ Л. К. Лахтина (1904), Р. М. Орженцого (1910) и Е. Е. Слуцкого (1912).



К. ПИРСОН

Заканчивая этот раздел, можно сказать, что рождение математической статистики как отдельной математической дисциплины, которое произошло в 20-х—30-х годах нашего века, многим обязано и биометрической школе, и «континентальной» школе статистики народонаселения. Пожалуй, именно соединение этих двух школ в одно целое и вместе с тем проникновение статистического метода в ряд «новых» областей науки и его использование в промышленном производстве и создало математическую статистику.

#### Работы второй половины XIX в. в Западной Европе

В конце XIX в. собственно теории вероятностей были посвящены трактаты Ж. Бертрана и А. Пуанкаре.

Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822—1900), имя которого упоминалось при изложении работ П. Л. Чебышева по аналитической теории чисел (см. гл. III), в детстве проявил необыкновенные способности и возбудил большие надежды, которые, однако, оправдались затем не в полной мере. Воспитанник Политехнической школы, он выступил с первой печатной работой по математической теории электричества в 1839 г., а через два года начал преподавательскую деятельность, сперва в лицее, затем в других учебных заведениях. В 1856 г. он был назначен профессором Политехнической школы, в 1862 г. также профессором Коллеж де Франс. Член Парижской академии наук, с 1874 г. он стал ее непременным секретарем. Работы его охватывали многие отделы математики, но не были первостепенными; его имя носят постулат Бертрана в теории чисел, проблема

Бертрана в теории групп, кривые двойкой кривизны в дифференциальной геометрии. Как непременный секретарь Академии, Бертран опубликовал большое число небольших изящных биографий скончавшихся при нем ее сочленов и произнесенных в форме «похвальных слов». Его перу принадлежит также много популярных статей и книг, в том числе по истории математики и астрономии, а также руководств. «Исчисление вероятностей» (Calcul des probabilités. Paris, 1839) Бертрана и сейчас исключительно интересно обилием важных задач, анализ которых подчас приводит к неожиданным результатам, а также меткими и остроумными замечаниями по поводу многих мнений и высказываний его предшественников<sup>99</sup>. Вот, например, ставшая классической задача Бертрана: наудачу выбирается хорда в круге. Определить вероятность, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника. Оказывается, что слово «наудачу» недостаточно определено и что поэтому задача допускает много различных решений, из которых автор привел три. Этот факт заставил не только более аккуратно формулировать условия задач, но и задуматься над самими основами теории вероятностей.

И все же общее содержание трактата Бертрана вряд ли можно назвать математически оригинальным. Собственный вклад автора в теорию вероятностей невелик.

В первом издании «Исчисления вероятностей» (Calcul des probabilités. Paris, 1896) Пуанкаре исследует причину равной вероятности различных исходов при игре в рулетку и равномерного распределения долгот малых планет. Рассмотрим первую из этих задач. Шарик движется по кругу, постепенно замедляет свое движение и останавливается. Функция распределения начальной скорости шарика принимается непрерывной. Если разделить круг на равные секторы, то вероятность остановки шарика в любом таком секторе оказывается постоянной вне зависимости от вида функции распределения скорости.

К задачам подобного рода Пуанкаре возвращался и в своих научно-популярных сочинениях<sup>100</sup>, и в одной статье 1906 г., и, наконец, во втором издании своего трактата (1912; переизд. в 1923). Кроме того, Пуанкаре дополнительно рассмотрел и чисто физические задачи. Так, второе издание «Исчисления вероятностей» заканчивается замечанием о диффузии жидкостей. Образование единой однородной «жидкости», замечает Пуанкаре, должно быть как-то обосновано теоретически. Описанная задача связана с так называемой эргодической гипотезой; цикл работ, посвященных этой гипотезе, в 1912 г. едва-едва начинался.

В том же втором издании «Исчисления вероятностей» Пуанкаре мы находим рассуждение о случайном событии, взятое из «Науки и метода». Случайное событие, по мнению Пуанкаре, характерно тем, что малые причины ведут к существенному изменению результата действия<sup>101</sup>. Напри.

<sup>99</sup> Одно из таких высказываний, посвященное среднему человеку Кетле, цитировалось на с. 210.

<sup>100</sup> «Наука и гипотеза» (La science et l'hypothèse. Paris, 1902); «Наука и метод» (Science et méthode. Paris, 1908). Как и вторая из названных книг, «Наука и гипотеза» вышла и в русском переводе (СПб., 1906). Следует заметить, что в обеих книгах знаменитый математик выступает и как философ, в основном близкий к махизму. Его трактовка проблем теории познания была подвергнута В. И. Лениным подробному критическому разбору в «Материализме и эмпириокритицизме» (1909).

<sup>101</sup> Подобное истолкование случайного события не противоречит соображениям, которые высказывал еще Аристотель. Так, в своей «Метафизике» Аристотель называет «случайным» обнаружение клада при рытье ямы. Небольшое изменение в выборе места для ямы привело бы к существенному изменению результата: клад остался бы в земле. Другой пример из «Физики» Аристотеля относится к «случайной» встре-



Ж. БЕРТРАН

мер, малое изменение начальной скорости движения шарика при игре в рулетку приводит к существенному изменению результата движения — остановке шарика в ином секторе круга. Но Пуанкаре отметил и второй вид случайности, действующей в рамках схемы «малые причины — малые действия» при условии многочисленности и сложности сочетания этих причин. Первый вид случайности характеризуется равномерным распределением, второй — нормальным распределением, которое имеет место в силу «обычно» выполняемых условий центральной предельной теоремы.

Формализация понятия случайного, пригодная для естественнонаучных приложений, остается большой и важной задачей современной математики.

Взятое в целом содержание трактата Пуанкаре все же соответствует более старым сочинениям, и, например, имена П. Л. Чебышева и А. М.

---

че двух человек. Небольшое изменение в цепи предшествовавших событий привело бы к тому, что встреча не состоялась. Аналогичного мнения о случайных событиях придерживались ряд философов нового времени, начиная с Т. Гоббса и Г. В. Лейбница. В XVIII в. истолкованием случайности занимался И. Г. Ламберт. Пытаясь ввести понятие о бесконечных случайных последовательностях, он на интуитивном уровне подошел к представлению о нормальных числах, которые в XX в. вызвали интерес ряда крупных исследователей (Э. Борель и др.) (см. *Lambert J. H. Anlage zur Architectonic. Bd 1. Riga, 1771, § 324*).

Грубо говоря, нормальным числом в заданной системе счисления называется такое число, все цифры разложения которого в бесконечную дробь встречаются одинаково часто. Более того, при неограниченном возрастании количества цифр разложения пределы относительных частот появления каждого сочетания цифр по одному, по два, по три и т. д. должны быть соответственно равны.

Ляпунова здесь, как и ранее у Бертрана, вообще не названы; теория вероятностей еще оставалась, как и у Лапласа, отраслью прикладной математики. Возможно, что это было связано и с особенностями научного творчества Пуанкаре, и с его работой в должности заведующего кафедрой математической физики <sup>102</sup> и теории вероятностей в Сорбонне: первое издание книги соответствовало курсу лекций, прочитанному автором в 1893—1894 учебном году.

Мы должны еще упомянуть о работах австрийского математика Э. Чубера (1851—1925) и английских логиков и математиков А. де Моргана, Дж. Буля, У. С. Джевонса и Дж. Венна, занимавшихся вопросами обоснования теории вероятностей (см. о них в гл. I).

Чуберу принадлежит несколько сочинений по теории вероятностей и теории ошибок. Не оставив после себя крупного научного наследия, он был добросовестным компилятором, и эти сочинения долгое время пользовались заслуженной известностью. Упомянем в этой связи его «Теорию ошибок наблюдений» (*Theorie der Beobachtungsfehler*. Leipzig, 1891) и «Исчисление вероятностей» (*Wahrscheinlichkeitsrechnung*) — главу из «Энциклопедии математических наук» (*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Bd 1. Leipzig, 1901). Сочинения Чубера содержат также весьма ценные сведения по истории теории вероятностей.

Де Морган стремился обосновать исходные теоремы теории вероятностей логическими исчислениями. Его книга «Формальная логика или исчисление необходимых и вероятных умозаключений» (1847; см. с. 19) содержит главы, посвященные теории вероятностей, вероятностным умозаключениям и индукции. Де Морган признает в основном лишь субъективную вероятность, трактуя ее как количественную меру знания. Не имея непосредственного практического приложения, работы де Моргана оставались малоизученными, однако они были продолжены Булем.

Стремясь перевести логику Аристотеля на алгебраический язык, Буль обратил внимание и на вероятностную логику. В один год со своим основным математико-логическим сочинением «Исследование законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» (1854; см. с. 22) Буль опубликовал статью «Об условиях, которые ограничивают решение вопросов в теории вероятностей» (*On the conditions by which the solution of questions in the theory of probabilities are limited*), в которой предвосхитил необходимость аксиоматического обоснования теории вероятностей. Вот что писал Буль: «... претензии (теории вероятностей) принадлежать к чистой науке должны основываться на той степени, в которой она удовлетворяет следующим условиям ...», — и далее сформулировал три условия. Второе и третье из этих условий носят общенаучный характер: необходимость опытной проверки результатов и запрет ограничений на развитие науки. Первое же условие таково: «Принципы, на которых основаны ее (теории вероятностей) методы, должны быть аксиоматическими (of an axiomatic nature)» <sup>103</sup>. Буль опередил свое время и в формулировке целей теории вероятностей, фактически повторив в одной статье 1851 г. формулировку, данную в 1846 г. П. Л. Чебышевым (см. с. 220).

Под большим влиянием де Моргана было написано и основное сочинение Джевонса «Основы науки: трактат о логике и научном методе» (1874, см. с. 27). В главе 10 этой книги Джевонс утверждал, что роль тео-

<sup>102</sup> Под математической физикой подразумевались разделы физики, в которых применялись математические вычисления.

<sup>103</sup> *Boole G. Studies in logic and probability*. London, 1952, p. 288.

рии вероятностей начинается там, где начинается незнание. Ошибочность подобных утверждений была уже отмечена нами выше (см. с. 214)<sup>104</sup>. Вместе с тем Дживонс стремился подчинить теорию вероятностей математической логике, и именно это направление его работ представляет интерес. Аналогичного направления придерживался Венн. В предисловии к первому изданию своей «Логике случая» (*Logic of chance*. London, 1866) он даже утверждал, что мнение о принадлежности теории вероятностей к математике ошибочно.

Проблема соотношения математической логики и теории вероятностей актуальна и в наше время; впрочем, ее, видимо, следует рассматривать в контексте более общей проблемы о соотношении математической логики и математики.

Заканчивая изложение, мы считаем целесообразным сказать несколько слов об истории математики и механики, члене Королевского общества И. Тодгентере (1820—1884). Автор ряда учебников по элементарной и высшей математике, Тодгентер опубликовал также монографии по истории вариационного исчисления и истории теории притяжения и фигуры Земли. Его же монография «История математической теории вероятностей» (*A history of the mathematical theory of probability*. Cambridge, 1865) доведена до Лапласа включительно и частично описывает сочинения Пуассона. Тодгентер не был специалистом по теории вероятностей и его комментарии нельзя считать достаточно квалифицированными, тем более, что с момента выхода его книги прошло более 110 лет. Но исключительная добросовестность Тодгента привела к тому, что его книга является практически полным источником сведений о рассмотренном им периоде.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Период от Лапласа до конца XIX в. характеризовался следующими чертами:

1. Построением теории вероятностей как естественнонаучной дисциплины (Лаплас) с применением в ней аппарата математического анализа, в том числе характеристических функций (Лаплас), доказательствами различных форм закона больших чисел (Лаплас, Пуассон, П. Л. Чебышев) и центральной предельной теоремы (Лаплас, Коши, П. Л. Чебышев, А. А. Марков).

2. Построением классической теории ошибок (Лаплас, Гаусс).

3. Резким возрастанием значения статистики народонаселения, созданием в основных государствах мира статистических служб и обществ и соответствующим возрастанием общественного интереса к теории вероятностей, обусловленным также и другими практическими приложениями этой теории.

<sup>104</sup> Методологически несостоятельным оказалось также мнение Дж. С. Милля из его «Системы логики» (*System of logic*. London, 1843): «...Даже в том случае, когда вероятность обуславливаются наблюдением и опытом, самое небольшое усиление данных (путем лучших наблюдений или более полного исследования специальных обстоятельств...) имеет больше значения, чем самое детальное исчисление вероятностей, основанных на данных в их прежнем, менее совершенном состоянии. Пренебрежение этим очевидным соображением дало начало тем неудачным приложениям исчисления вероятностей, которые сделали это исчисление настоящим позором математики. Достаточно упомянуть о приложении его к установлению достоверности свидетелей и правильности приговоров, выносимых присяжными» (см. *Милл Дж. С. Система логики*. СПб., 1914, с. 490. Этот перевод сделан с английского издания 1879 г.).

4. Началом становления теории вероятностей как общематематической дисциплины (П. Л. Чебышев).

5. Началом применения вероятностных представлений в физике (Максвелл, Больцман) и установлением важнейшего естественнонаучного факта вероятностного характера по крайней мере некоторых фундаментальных законов природы.

6. Зарождением «континентальной» школы статистики народонаселения (Лексис) и биометрической школы (Гальтон, К. Пирсон, Уэлдон).

7. Появлением работ, в которых теория вероятностей обосновывалась с позиций математической логики (де Морган, Буль, Девонс, Вени).

Остановимся на четвертом пункте и вообще на взаимоотношении теории вероятностей и математики в целом. Действительно, в XIX в. теория вероятностей начала превращаться из собрания разнообразных и интересных частных задач в математическую теорию с довольно строго очерченной проблематикой. Но при этом ни у Лапласа, ни позднее у Бертра и Пуанкаре она еще не превратилась в логически совершенную математическую дисциплину: в XIX в. ее скорее следует отнести к прикладной математике. Не удивительно, что Д. Гильберт в своем знаменитом докладе на Международном конгрессе математиков в Париже (1900) отнес теорию вероятностей к физическим наукам. Подлинные его слова, сказанные им при постановке одной из проблем (проблемы № 6), таковы:

«С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь — теория вероятностей и механика»<sup>105</sup>.

Потребовалось еще долгое время, прежде чем в 30-х годах XX в. сложилось четкое понимание того, что теория вероятностей является подлинно математической наукой, имеющей вместе с тем самые тесные и непосредственные связи с широким спектром наук о природе, а также с техническими и социально-экономическими дисциплинами.

Крупнейший шаг в математизации теории вероятностей был сделан П. Л. Чебышевым, который фактически включил учение о случайных событиях в более широкое учение о случайных величинах. Введение понятия случайной величины как объекта изучения теории вероятностей было естественным и необходимым, однако в рассматриваемом периоде оно осталось незамеченным. Позднее, уже в начале XX в., это понятие выдвинулось на первый план и прошло большой и сложный путь развития, получило четкий математический смысл. В частности, именно введение этого понятия привело к тому, что функции распределения и характеристические функции стали сами по себе специальными объектами изучения.

Переход теории вероятностей к изучению случайных величин ни в какой мере не ослабил внимания к изучению случайных событий и не закрыл пути появления в примитивной форме новых задач, потребовавших введения нового понятия — случайного процесса.

---

<sup>105</sup> Проблемы Гильберта. Под ред. П. С. Александрова. М., «Наука», 1969, с. 34. Весьма возможно, что Гильберт отнес теорию вероятностей к физическим дисциплинам также и под влиянием замечательных успехов математического анализа во второй половине XIX в., которые по существу преобразовали всю математику.

## ЛИТЕРАТУРА

### Собрания сочинений и издания классиков<sup>1</sup>

- Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений. Т. 1—3. Киев, Изд-во АН УССР, 1952—1953.
- Галуа Э.* Сочинения. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Ганкель Г.* Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона, вместе с их геометрическим толкованием. Казань, 1912.
- Гаусс К. Ф.* Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959.
- Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., ИЛ, 1947.
- Гильберт Д.* Основания геометрии. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
- Дедекиндр Р.* О композиции бинарных квадратичных форм. Дополнение X.— В кн.: *Лежен-Дирихле П. Г.* Лекции по теории чисел. М.—Л., ОНТИ, 1936, с. 332.
- Дирихле П. Г. Лежен.* Лекции по теории чисел. В обработке и с дополнениями Р. Дедекиндр. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Золотарёв Е. И.* Полное собрание сочинений. Вып. 1—2. Л., Изд-во АН СССР, 1934.
- Клиффорд В. К.* Здравый смысл точных наук. М., 1910.
- Коркин А. Н.* Сочинения. Т. 1. СПб., 1911.
- Коши О. Л.* Алгебраический анализ. Leipzig, 1864.
- Курно Ог.* Основы теории шансов и вероятностей. М., «Наука», 1970.
- Лаплас П. С.* Изложение системы мира. Т. 1—2. СПб., 1861.
- Лаплас П. С.* Опыт философии теории вероятностей. М., 1908.
- Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. Т. 1—5. М.—Л., Гостехиздат, 1946—1951.
- Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. Т. 1—4. М., Изд-во АН СССР, 1954—1965.
- Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
- Марков А. А.* Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. М., Изд-во АН СССР, 1951.
- Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. Т. 1—3. Киев, Изд-во АН УССР, 1959—1961.
- Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1—3. М., «Наука», 1971—1974.
- Риман Б.* Сочинения. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
- Стилтьес Т. И.* Исследования о непрерывных дробях. Харьков—Киев, ГНТИ Украины, 1936.
- Фёдоров Е. С.* Симметрия и структура кристаллов. М., Изд-во АН СССР, 1949.
- Фёдоров Е. С.* Начала учения о фигурах. М., Изд-во АН СССР, 1953.
- Фробениус Г.* Теория характеров и представлений групп. Харьков, ГНТИ Украины, 1937.
- Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. Т. 1—5, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944—1951.
- Abel N. H.* Oeuvres complètes. Т. 1—2. Christiania, Grøndahl, 1881.
- Betti E.* Opere matematiche. Т. 1—2. Milano, Hoepli, 1903—1914.
- Boltzmann L.* Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd 1—2. Leipzig, Barth, 1909.
- Bolzano B.* Gesammelte Schriften. Bd 1—12. Wien, Braunmüller, 1882.
- Boole G.* Collected logical works. V. 1—2. Chicago — London, The Open Court publ. Co., 1940.
- Boole G.* Studies in logic and probability. London, Watts, 1952.
- Cauchy A. L.* Oeuvres complètes. Т. 1—27 (2 séries). Paris, Gauthier—Villars, 1882—1974.
- Cayley A.* Collected mathematical papers. V. 1—14. Cambridge, Univ. press, 1889—1898.
- Clifford W. K.* Mathematical papers. London, Macmillan, 1882; New York, Chelsea publ. house, 1968.
- Clifford W. K.* Lectures and essays. V. 1—2. London, Macmillan, 1901.

<sup>1</sup> В списке литературы помещены сперва соответствующие содержанию книги собрания сочинений и издания классиков, а затем отдельные работы по математической логике, алгебре, теории чисел, теории вероятностей (включая некоторые руководства) и их истории. Общие сочинения по истории математики, биографические и библиографические труды будут приведены в одной из следующих книг.

- Dedekind R.* Gesammelte mathematische Werke. Bd 1—3. Braunschweig, Vieweg, 1930—1932.
- Dirichlet P. G. Lejeune.* Werke. Bd 1—2. Berlin, Reimer, 1889—1897.
- Eisenstein F. G. M.* Mathematische Abhandlungen. Berlin, Reimer, 1874.
- Fourier J. B. J.* Oeuvres. T. 1—2. Paris, Gauthier—Villars, 1888—1890.
- Frege G.* Die Grundlagen der Arithmetik. New York, 1950.
- Frege G.* Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1962.
- Frege G.* Kleine Schriften. Darmstadt, Wissensch. Bücher, 1967.
- Frobenius F. G.* Gesammelte Abhandlungen. Bd 1—3. Berlin, Springer, 1968.
- Gauss C. F.* Werke. Bd 1—12. Göttingen, 1863—1933.
- Gibbs J. W.* The collected works. V. 1—2. New York — London — Toronto, Longmans, 1928.
- Grassman H.* Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Bd 1—3. Leipzig, Teubner, 1894—1911.
- Hadamard J.* Oeuvres. T. 1—4. Paris, Centre national de recherche scientifique, 1968.
- Hamilton W. R.* The mathematical papers. V. 1—3. Cambridge Univ. press, 1931—1967.
- Hermite C.* Oeuvres. T. 1—4. Paris, Gauthier — Villars, 1905—1917.
- Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen. Bd 1—3. Berlin, Springer, 1932—1935.
- Jacobi C. G. J.* Gesammelte Werke. Bd 1—7. Berlin, Reimer, 1881—1891.
- Jordan C.* Oeuvres. T. 1—4. Paris, Gauthier—Villars, 1961—1964.
- Klein F.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd 1—3. Berlin, Springer, 1921—1923.
- Kronecker L.* Werke. Bd 1—5. Leipzig, Teubner, 1895—1930.
- Lagrange J. L.* Oeuvres. T. 1—14. Paris, Gauthier—Villars, 1867—1892.
- Laplace P. S.* Oeuvres complètes. T. 1—14. Paris, Gauthier—Villars, 1878—1912.
- Lie S.* Gesammelte Abhandlungen. Bd 1—10. Leipzig, Teubner — Oslo, Aschelong, 1934—1960.
- Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen. Bd 1—2. Leipzig — Berlin, Teubner, 1911.
- Peano G.* Opere scelte. V. 1—3. Cremonese (Ed.). Roma, 1957—1958.
- Peano G.* Formulario mathematico. Cremonese (Ed.). Roma, 1960.
- Pearson K.* Early statistical papers. Cambridge Univ. press, 1948.
- Peirce B. O.* Mathematical and physical papers, 1903—1913. Cambridge, Harvard univ. press, 1926.
- Peirce Ch. S.* Collected papers. V. 1—8. Cambridge, Harvard univ. press, 1931—1958.
- Poincaré H.* Oeuvres. T. 1—11. Paris, Gauthier—Villars, 1928—1956.
- Ruffini P.* Opere matematiche. V. 1—3. Cremonese (Ed.). Roma, 1953—1954.
- Smith H. J. S.* Collected mathematical papers. V. 1—2. Oxford, 1894.
- Stieltjes T. J.* Oeuvres complètes. T. 1—2. Groningen, Noordhoff, 1914—1918.
- Sturm C.* Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen. Ostwald's Klassiker, N 143, 1904.
- Sylvester J. J.* Collected mathematical papers. V. 1—4. Cambridge Univ. press, 1904—1911.
- Weierstrass K.* Mathematische Werke. Bd 1—7. Berlin, Mayer und Müller, 1894—1897.
- Wronski, Hoëne J.* Oeuvres mathématiques. T. 1—4. Paris, 1925.

## К главе I

### Источники

- Аристотель.* Аналитика первая и вторая. М., ГИПЛ, 1952.
- Ибн Сина.* Давиш-мамэ (книга знания). Сталинабад, Таджикгосиздат, 1957.
- Кутюра Л.* Алгебра логики. Одесса, 1909.
- Лейбниц Г.* Новые опыты о человеческом разуме. М.—Л., Соцэкгиз, 1936.
- Мичто В.* Дедуктивная и индуктивная логика. М., 1896.
- Порецкий П. С.* Изложение основных начал логики в возможно более наглядной и общедоступной форме. Казань, 1881.
- Порецкий П. С.* О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Казань, 1884.
- Порецкий П. С.* По поводу брошюры г. Волкова «Логическое исчисление». Казань, 1884.
- Порецкий П. С.* Из области математической логики. М., 1902.
- Аль-Фараби.* Логические трактаты. Алма-Ата, «Наука», 1975.
- Чёрч А.* Введение в математическую логику. Т. 1. М., ИЛ, 1960.
- Boole G.* The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, — London, Macmillan, 1847.

- Boole G.* An investigation of the laws of thought. London — Cambridge, 1854.
- Couturat L.* La logique de Leibniz. Paris, 1901.
- Euler L.* Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. T. 2. St.-Petersbourg, 1768. (Рус. перев. С. Я. Румовского: Эйлер Л. Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе. Ч. 2. СПб., 1772.)
- Hamilton W.* Lectures on metaphysics and logic. V. 1—4. Edinburgh—London, 1860.
- Jevons W. S.* On the mechanical performance of logical inference.— Philos. Trans., 1870, 160, 497—517.
- Leibniz G. W.* Opera philosophica quae exstant latina, gallica, germanica. J. E. Erdmann (Ed.). Berolini, Eichleri, 1840.
- Leibniz G. W.* Die philosophische Schriften. Bd 7. Berlin, hsg. von C. I. Gerhardt, 1890.
- Leibniz G. W.* Opuscules et fragments inédits de Leibniz. L. Couturat (Ed.). Paris, 1903.
- Morgan A. de.* Formal logic: or the calculus of inference, necessary and probable. London, Taylor and Walton, 1847.
- Morgan A. de.* Trigonometry and double algebra. London, Taylor, 1849.
- Schröder E.* Der Operationskreis des Logikkalküls. Leipzig, Teubner, 1877.
- Schröder E.* Vorlesungen über die Algebra der Logik. Bd 1—3. Leipzig, Teubner, 1890—1905.
- Venn J.* Symbolic logic. London, Macmillan, 1881; 2nd ed. 1894.
- Venn J.* On the diagrammatic and mechanical representations of propositions and reasoning.— The London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag. and J. Sci., ser 5, 1880, 10.

### Исследования

- Бирюков Б. В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., «Высшая школа», 1963.
- Бобынин В. В.* Опыты математического изложения логики. Сочинения Эрнеста Шрёдера.— Физ.-матем. науки в их настоящем и прошедшем. 1886—1894, 2, 65—72, 173—192, 438—458.
- Болтаев М. Н.* Вопросы гносеологии и логики в произведениях Ибн Сины и его школы. Дюшанбе, «Ирфон», 1965.
- Котарбинский Т.* Лекции по истории логики.— В кн.: Избранные произведения. М., ИЛ, 1963.
- Кузичев А. С.* Диаграммы Венна (история и применения). М., «Высшая школа», 1968.
- Лукасевич Л.* Аристотелевская логика с точки зрения современной формальной логики. М., ИЛ, 1959.
- Нарский И. С.* Готфрид Лейбниц. М., «Мысль», 1972.
- Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М., «Наука», 1967.
- Стяжкин Н. И., Силаков В. Д.* Краткий очерк общей и математической логики в России. М., «Высшая школа», 1962.
- Яновская С. А.* Основания математики и математическая логика.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
- Berg J.* Bolzano's logik. Stockholm, Almqvist & Wiksell, 1962.
- Berka K., Kreisel L.* Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der Logik. Berlin, 1971.
- Blanché R.* La logique et son histoire. D'Aristote à Russell. Paris, 1971.
- Bochénski J. M.* Formale Logik. Freiburg—München, 1962.
- Carruccio E.* Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo. Torino, 1958.
- Heijenoort J. von.* From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879—1931. Cambridge (Massachusetts), Harvard Univ. Press, 1967.
- Jørgensen J.* A treatise of formal logic: its evolution and main branches with relation to mathematics and philosophy. V. 1—3. New York, 1962.
- Kneale W., Kneale M.* The development of logic. Oxford, 1962.
- Lewis C. J.* A survey of symbolic logic. New York, 1960.
- Scholz H.* Geschichte der Logik. Berlin, 1931.
- Sternfeld R.* Frege's logical theory. Illinois Univ. Press, 1966.
- Wang Hao.* A survey of mathematical logic. Peking, 1962.

### К главам II и III

#### Источники и монографии

- Бухштаб А. А.* Теория чисел. М., «Просвещение», 1966.
- Венков Б. А.* Элементарная теория чисел. М.—Л., ОНТИ, 1937.
- Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М., ИЛ, 1955.

- Коган Л. А. О представлении целых чисел квадратичными формами положительного определителя. Ташкент, «Фан», 1971.
- Марков В. А. О положительных тройничных квадратичных формах. СПб., 1897.
- Прастар К. Распределение целых чисел. М., ИЛ, 1967.
- Сохоцкий Ю. В. Начальное общее наибольшее делителя в применении к теории делимости алгебраических чисел. СПб., 1893.
- Чеботарёв Н. Г. Теория Галуа. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., Гостехиздат, 1956.
- Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., «Наука», 1972.
- Ayoub R. An introduction to the analytic theory of numbers. Providence, Amer. Math. Soc., 1963.
- Bachmann P. Zahlentheorie. Bd 1—5. Leipzig—Berlin, Teubner, 1921—1927.
- Dedekind R., Weber H. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.— In: R. Dedekind's Gesammelte mathematische Werke. Bd 1. Braunschweig, 1930, S. 238—348.
- Euler L. Commentationes arithmeticae collectae. T. 1—2. Petropoli, 1849.
- Hamilton W. R. Lectures on quaternions. Dublin, 1853.
- Hantzeck H. Development of the Minkowski geometry of numbers. New York, 1939.
- Jordan C. Traité des substitutions et des équations algébriques. 2e éd. Paris, Gauthier—Villars et Blanchard, 1957.
- Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Bd 1—2. Göttingen, 1896—1897.
- Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd 1—2. Leipzig, 1909.
- Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd 1—3. Leipzig, Hirzel, 1927.
- Legendre A. M. Théorie des nombres. T. 1—2. Paris, 1830.
- Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig—Berlin, Teubner, 1913.
- Seeber L. A. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. Freiburg. 1831.

### Исследования

- Башмакова И. Г. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарёва.— ИМИ, 1949, 2, 233—351.
- Башмакова И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры.— ИМИ, 1957, 10, 257—304.
- Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. М., «Наука», 1974.
- Берман Г. Н. Число и наука о нём. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
- Беспамятных Н. Д. Арифметические исследования в России в XIX в.— Учен. зап. Гроднен. пед. ин-та, 1957, 2, 3—42.
- Буняковский В. Я. Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839.
- Бурбаки Н. Исторический очерк к главам I—III.— В кн.: Группы и алгебры Ли, М., «Мир», 1976, с. 453—479.
- Васильев А. В. Целое число. Петроград, 1922.
- Делоне Б. Н. Герман Минковский.— УМН, 1936, 2, 32—38.
- Делоне Б. Н. Развитие теории чисел в России.— Учен. зап. МГУ, 1947, вып. 91 («Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры»), 77—96.
- Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947.
- Делоне Б. Н. Пути развития алгебры.— УМН, 1952, 7, вып. 3 (49), 155—178.
- Делоне Б. Н. Работы Гаусса по теории чисел.— В кн.: Карл Фридрих Гаусс. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 11—112.
- Депман И. Я. История арифметики. М., «Просвещение», 1965.
- Камунов Н. Ф. Первый очерк теории алгебры Ф.Э. Молина.— ИМИ, 1975, 20, 150.
- Киселев А. А., Ожигова Е. П. К истории элементарного метода в теории чисел. Actes du XI Congrès intern. d'histoire des sciences (1965), t. 3. Warsaw, 1967, p. 244.
- Кузьмин Р. О. Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарёва.— УМН, 1947, 2, вып. 6 (22), 21—51.
- Матвеевская Г. П. Постулат Бертрана в Записках Эйлера.— ИМИ, 1961, 14, 285—288.
- Мельников И. Г. В. Я. Буняковский и его работы по теории чисел.— Труды Ин-та истории естествознания и техники, 1957, 17, 270—286.
- Минин А. П. О трудах Н. В. Бугаева по теории чисел.— Матем. сб., 1904, 25, № 2, 293—321.
- Морозова Н. Н. В. Я. Буняковский и его работы по теории чисел.— Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1970, 282, № 8.
- Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России. Л., «Наука», 1972.
- О квадратуре круга. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио. М.—Л., ГТТИ, 1934.

- Поссе К. А. А. Н. Коркин.*— Матем. сб., 1909, 27, № 1, 1—27.
- Поссе К. А.* Заметка о решении двучленных сравнений с простым модулем по способу Коркина.— Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. 2, 1910, 11, 249—268.
- Рябо Г.* Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартусского университета.— Учен. зап. Тартус. ун-та, 1955, 37, 74—103.
- Сорокина Л. А.* Работы Абеля об алгебраической разрешимости уравнений.— ИМИ, 1959, 12, 457—480.
- Сушкевич А. К.* Материалы к истории алгебры в России в XIX в. и в начале XX в.— ИМИ, 1951, 4, 237—451.
- Успенский Я. В.* Очерк научной деятельности А. А. Маркова.— Изв. Рос. Акад. наук, 1923, 17, 19—34.
- Чеботарёв Н. Г.* Новое обоснование теории идеалов (по Золотарёву).— Изв. физ.-матем. общ-ва Казани, 1925, 2, № 25.
- Чеботарёв Н. Г.* Обоснование теории делимости по Золотарёву.— УМН, 1947, 2, № 6 (22), 52—67.
- Юшкевич А. П., Башмакова И. Г.* «Алгебра или вычисление конечных» Н. И. Лобачевского.— ИМИ, 1949, 2, 72—123.
- Vachmakova I.* Sur l'histoire de l'algèbre commutative.— XIIe Congrès intern. d'histoire des sciences. Colloques. Textes des rapports. Paris, Michel, 1968, p. 185—202.
- Bortolotti E.* Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche. Modena, 1903.
- Brill A., Noether M.* Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit.— Jahresber. Dtsch. Math.— Verein, 1894, 3, 107—566.
- Bunt L. N. H.* The development of the ideas of number and quantity according to Piatet. Groningen, 1951.
- Crowe M. J.* A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vector system. Univ. Notre Dame Press, 1967.
- Dieudonné J.* Minkowski Hermann. Dictionary of scientific biography. Ch. C. Gillispie. (Ed. in chief.) V. 9, p. 411—414.
- Dieudonné J.* Cours de géométrie algébrique. Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique. Paris, 1974.
- Dixon L. E.* History of the theory of numbers. V. 1—3. New York, 1966.
- Dubreil P.* La naissance de deux Jumelles. La logique mathématique et l'algèbre ordonnée.— XIIe Congrès intern. d'histoire des sciences. Colloques. Textes des rapports. Paris, Michel, 1968, p. 203—208.
- Freudenthal H.* L'algèbre topologique, en particulier les groupes topologiques et de Lie.— Ibid., p. 223—243.
- Gericke H.* Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim, Bibliogr. Institut, 1970.
- Hensel K. E. E.* Kummer und der grosse Fermatsche Satz. Marburg, 1910.
- Konen H.* Geschichte der Gleichung  $t^2 - Du^2 = 1$ . Leipzig, Hirzel, 1901.
- Liebman H., Engel F.* Die Berührungstransformationen. Geschichte und Invariantentheorie. Leipzig, 1914.
- Mitzscherling A.* Das Problem der Kreisteilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Leipzig — Berlin, Teubner, 1913.
- Muir T.* The theory of determinants in the historical order of development. V. 1—5. London, 1906—1930.
- Natucci A.* Il concetto di numero e le sue estensioni. Studi storico-critichi intorno ai fondamenti dell'Aritmetica generale col oltre 700 indicazioni bibliografiche. Torino, Bocca, 1923.
- Nový L.* L'Ecole algébrique anglaise.— XIIe Congrès intern. d'histoire des sciences. Colloques. Textes des rapports. Paris, Michel, 1968, p. 211—222.
- Nový L.* Origin of modern algebra. Prague, Publ. House Czechosl. Acad. Sci., 1973.
- Ore O.* Number theory and its history. New York — Toronto, 1948.
- Smith H. J. C.* On the history of the researches of mathematicians on the series of prime numbers.— In: Collected mathematical papers. V. 1. Oxford, 1894, p. 35—37.
- Smith H. J. C.* Reports on the theory of numbers.— Ibid., p. 38—364.
- Smith H. J. C.* On the present state and prospects of some branches of pure mathematics.— In: Collected mathematical papers. V. 2. Oxford, 1894, p. 166—190.
- Studnicka F. J.* Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie. Prag, 1876.
- Torelli G.* Sulla totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato. — Atti Acad. sci. fis. e mat. Napoli, sez. 2, 1901, 1, 1—222.
- Verriest G.* Evariste Galois et la théorie des équations algébriques. Louvain, 1934.
- Wieleitner H.* Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Berlin, Teubner, 1918.
- Wussing H.* Die Genesis des abstrakten Gruppen-Begriffes. Berlin, 1969.

## К главе IV

### Источники

- Больцман Л.* Лекции по теории газов. Ч. 1—2. М., Гостехиздат, 1956.
- Буняковский В. Я.* О приложении анализа вероятностей к определению приближенных величин трансцендентных чисел.—Мемуары Петербург. акад. наук, 1837, 1 (3), № 5.
- Буняковский В. Я.* Основания математической теории вероятностей. СПб., 1846.
- Буняковский В. Я.* О соединениях особого рода, встречающихся в вопросе о дефектах. Прилож. № 2 к т. 20 Записок Петербург. акад. наук за 1871.
- Гиббс Дж. В.* Основные принципы статистической механики. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
- Давидов А. Ю.* Приложение теории вероятностей к статистике.— В кн.: Учено-литературные статьи профессоров и преподавателей Московского университета. М., 1855.
- Давидов А. Ю.* Теория вероятностей. М., Литографированный курс лекций 1879—1880 гг.
- Кетле А.* Социальная физика. Т. 1—2. Киев, 1911—1913.
- Кузьмин Р. О.* Об одной задаче Гаусса.— ДАН СССР, сер. А, 1928, № 18—19, 375—380.
- Линник Ю. В.* Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла.— ДАН СССР, 1952, 85, № 6, 1251—1254.
- Марков А. А.* Исчисление вероятностей. СПб., 1900; 4-е изд., М., 1924.
- Михельсон В. А.* Собрание сочинений. Т. 1. М., 1930.
- О теории дисперсии. Сб. ст. В. Лексиса, В. И. Борткевича, А. А. Чупрова, Р. К. Бауэра. М., «Статистика», 1968.
- Пирогов Н. Н.* Основания кинетической теории многоатомных газов.— Журн. рус. физ.-хим. об-ва, 1886—1887, 18—19.
- Слепшинский И. В.* К теории способа наименьших квадратов.— Зап. матем. отделения Новорос. об-ва естествоиспытателей. Одесса, 1892, 14.
- Тихомадрицкий М. А.* Курс теории вероятностей. Харьков, 1898.
- Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики. М.—Л., Гостехиздат, 1943.
- Чебышев П. Л.* Теория вероятностей (лекции 1879—1880 гг.). Издано А. Н. Крыловым по записям А. М. Ляпунова. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936.
- Чупров А. А.* Очерки по теории статистики. М., Госстатиздат, 1959.
- Чупров А. А.* Вопросы статистики. М., Госстатиздат, 1960.
- Эренфест П.* Сборник статей. М., «Наука», 1972.
- Adrain R.* Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations.— Analyst or math. Museum, 1808, 1, N 4.
- Bertrand J.* Calcul des probabilités. Paris, 1888.
- Biencarté I. J.* Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés.— J. math. pures et appl., 1852, 17.
- Biencarté I. J.* Considerations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi des probabilités dans la méthode des moindres carrés.— C. r. Acad. sci. Paris, 1853, 37.
- Boole G.* Studies in logic and probability. London, 1952.
- Czuber E.* Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig, 1891.
- Galton F.* Natural inheritance. London — New York, 1889.
- Lacroix S. F.* Traité élémentaire du calcul des probabilités. Paris, 1816.
- Legendre A. M.* Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris, 1805 et 1806.
- Morgan A. de.* Theory of probability.— In: Encyclopaedia metropolitana. V. 2. London, 1845.
- Pearson K.* On a method of ascertaining limits to the actual number of marked members in a population of given size from a sample.— Biometrika, 1928, 20 A, pt. 1—2.
- Poincaré H.* Calcul des probabilités. Paris, 1896.
- Poisson S. D.* Sur l'avantage du banquier au jeu de trente-et-quarante.— Ann. math. pures et appl., 1825—1826, 16.
- Poisson S. D.* Sur la probabilité des résultats moyens des observations. Conn. des tems., 1827 et 1832 (publ. 1824 et 1829).
- Poisson S. D.* Mémoire sur la proportion des naissances des filles et des garçons.— Mém. Acad. sci. Paris, 1830, 9.
- Poisson S. D.* Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris, 1837.
- Recherches statistiques sur la ville de Paris et de département de la Seine. Sous la direction de J. B. J. Fourier. T. 1—4. Paris, 1821—1829.
- Venn J.* Logic of chance. London, 1866.

## Исследования

- Брашман Н. Д.* О влиянии математических наук на развитие умственных способностей. М., 1841.
- Гнеденко Б. В.* Развитие теории вероятностей в России.— Труды Ин-та истории естествознания, 1948, 2, 390—425.
- Гнеденко Б. В.* О работах М. В. Остроградского по теории вероятностей.— ИМИ, 1951, 4, 99—123.
- Гнеденко Б. В.* Краткий очерк истории теории вероятностей.— В кн.: Курс теории вероятностей. М., Гостехиздат, 1954, с. 360—388.
- Гнеденко Б. В.* О работах К. Ф. Гаусса по теории вероятностей.— В кн.: К. Ф. Гаусс. М., Изд-во АН СССР, 1956, с. 217—240.
- Гнеденко Б. В.* О работах А. М. Ляпунова по теории вероятностей.— ИМИ, 1959, 12, 135—160.
- Гнеденко Б. В., Гизман И. И.* Развитие теории вероятностей на Украине.— ИМИ, 1956, 9, 477—536.
- Дружинин Н. К.* К вопросу о природе статистических закономерностей и о предмете статистики как науки. Учен. зап. по статистике, 1961, 6, 65—77.
- Дружинин Н. К.* Развитие статистической практики и статистической науки в европейских странах.— В кн.: В. И. Ленин и современная статистика. Т. 1. М., «Статистика», 1970, с. 33—36.
- Колмогоров А. Н.* Роль русской науки в развитии теории вероятностей.— Учен. зап. МГУ. Сер. матем. наук, 1947, 91, 53—64.
- Майстров Л. Е.* Теория вероятностей. Исторический очерк. М., «Наука», 1967.
- Ондар Х. О.* О работах А. Ю. Давидова по теории вероятностей и его методологических взглядах.— История и методология естественных наук, 1971, 11, 98—109.
- Паоловский А. Ф.* О вероятности. Речи, произнесенные в торжественном собрании Харьковского университета. Харьков, 1821.
- Птуха М. В.* Очерки по истории статистики в СССР. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1959.
- Шейнин О. В.* О работах Р. Эд्रेйна в теории ошибок.— ИМИ, 1965, 16, 325—336.
- Шейнин О. В.* Теория вероятностей П. С. Лапласа.— ИМИ, 1977, 22, 212—224.
- Шейнин О. В.* О появлении дельта-функции Дирака в трудах П. С. Лапласа.— ИМИ, 1975, 20, 303—308.
- Adams W. J.* The life and times of central limit theorem. New York, 1974.
- Bowley A. L.* F. Y. Edgeworth's contributions to mathematical statistics. London, 1928.
- Czuber E.* Wahrscheinlichkeitsrechnung.— In: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaft. Bd 1. Leipzig, 1904.
- Freudenthal H., Steiner H.—G.* Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik.— In: Grundzüge der Mathematik. Bd 4. Göttingen, 1966, S. 149—195.
- Grattan-Guinness I.* Fourier's anticipation of linear programming.— Operat. Res. Quarterly, 1970, 21, 361—364.
- Heyde C. C., Seneta E. I. J.* Bienaymé. New York — Heidelberg — Berlin, Springer, 1977.
- Koren J.* The history of statistics. Their development and progress in many countries. New York, 1970.
- Plackett R. L.* The discovery of the method of least squares.— Biometrika, 1972, 59, N 2, 239—251.
- Schneider I.* Clausius' erste Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen der atmosphärischen Lichtstreuung.— Arch. hist. exact. sci., 1974, 14, N 2, 143.
- Schneider I.* Beitrag zur Einführung wahrscheinlichkeits-theoretischer Methoden in die Physik der Gase nach 1856.— Arch. hist. exact. sci., 1974, 14, N 3, 237—261.
- Sheynin O. B.* D. Bernoulli's work on probability.— Rete. Strukturgesch. Naturwiss., 1972, 1, N 3—4, 273—300.
- Sheynin O. B.* Laplace's work in probability.— Arch. hist. exact. sci., 1976, 16, N 2, 137—187.
- Sheynin O. B.* Laplace's theory of errors.— Arch. hist. exact. sci., 1977, 17, N 1, 1—61.
- Sheynin O. B.* S. D. Poisson's work in probability.— Arch. hist. exact. sci., 1978, 18, N 3.
- Todhunter I.* A history of mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. New York, 1965.
- Truesdell C.* Early kinetic theory of gases.— Arch. hist. exact. sci., 1975, 15, N 1, 1—66.
- Walker H. M.* Studies in the history of statistical method. Baltimore, 1929.
- Westergaard H.* Contributions to the history of statistics. New York, 1969.

## ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

Abhandl. Preuss. Akad. Wiss.	Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse
Amer. J. Math.	American Journal of Mathematics
Ann. Ecole Norm.	Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure
Ann. Math.	Annales de mathématiques de M. Gergonne
Ann. math. pures et appl.	Annales des mathématiques pures et appliquées
Ann. Phys. und Chem.	Annalen der Physik und der Chemie
Ann. Soc. sci. Bruxelles	Annales de la Société scientifique de Bruxelles
Arch. Hist. exact. sci.	Archive for History of Exact Sciences
Atti Accad. sci. fis. e mat. Napoli	Atti della Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli
Bericht. Verhandl. Akad. Wiss.	Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physikalische Klasse
Bericht Königl. Akad. Wiss. zu Berlin	Berichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse (Berlin).
Bull. Acad. Sci. St.-Petersbourg	Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg
Bull. sci. math. et astron.	Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques
Bull. Sci. math.	Bulletin des sciences mathématiques de M. Ferrussac
Bull. Soc. math. France	Bulletin de la Société mathématiques de France
C. r. Acad. sci. Paris	Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (de Paris)
Gött. Nachr.	Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse
J. Ec. Polyt.	Journal de l'Ecole Polytechnique
J. für Math.	Journal für die reine und angewandte Mathematik
J. math. pures et appl.	Journal de mathématiques pures et appliquées
Math. Ann.	Mathematische Annalen
Mém. Acad. Sci. St.-Petersbourg	Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Petersbourg
Messenger of Math.	Messenger of Mathematics
Nouv. Ann. Math.	Nouvelles Annales des Mathématiques
Operat. Res. Quarterly	Operational Research Quarterly
Philos. Mag.	Philosophical Magazine and Journal of Science
Prace mat.-fys.	Prace Matematyczno-Fizyczne
Proc. Nat. Acad. USA	Proceedings of the National Academy of Science (Washington)
Proc. Roy. Soc.	Proceedings of the Royal Society. Series E. Mathematical and Physical Sciences (London)
Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien	Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse (Wien)
Trans. of the Cambridge Philos. Soc.	Transactions of the Cambridge Philosophical Society
Trans. Roy. Irish Acad.	Transactions of the Royal Irish Academy
Trans. Roy. Soc. Edinburgh	Transactions of the Royal Society of Edinburgh

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель (Niels Hendrick Abel, 1802—1829) 5, 40, 43, 56, 57, 102, 115, 124, 152, 168, 218, 241, 245
- Абеляр (Pierre Abélard, 1079—1142), 12
- Авиценна — см. Ибн Сина
- Адамар (Jacques Hadamard, 1865—1963), 169, 176, 242
- Адамс (W. J. Adams) 247
- Аксер (A. Axer) 147
- Аккерман (Wilhelm Ackermann, 1896—1962) 241
- Александр Афродизийский (Ἀλεξανδρος ὁ Ἀφροδισιεύς, II—III вв.) 11
- Александров Павел Сергеевич (р. 1896) 240
- Альберти (Leon Battista Alberti, 1404—1472) 210
- Амицура (A. L. Amizura) 176
- Андреев Константин Андреевич (1848—1921) 173
- Апеллес (Ἀπellaς, IV в. до н. э.) 212
- Аппель (Paul Appell, 1855—1930) 125
- Аристотель (Ἀριστοτέλης 384—322 до н. э.) 11, 12, 15, 233, 236, 242
- Аронгольд (Siegfried Heinrich Aronhold, 1819—1884) 77, 80, 81
- Афанасьева-Эренфест Татьяна Алексеевна (1876—1959) 188, 231
- Аюб (Raymond Georg Dimitri Ayoub, р. 1923) 155, 167, 244
- Аюи (René Juste Haüy, 1743—1822) 137
- Бавли (A. L. Bowley) 247
- Байес (Бэйз, Thomas Bayes, 1702—1761) 192, 225
- Байо (Benjamin Eduard Baillaud, 1848—1934) 126
- Баскаков Сергей Иванович (1857—1883) 176
- Бауэр (R. K. Bauer) 247
- Бахман (Paul Gustav Heinrich Bachmann, 1837—1920) 244
- Башмакова Изабелла Григорьевна (р. 1921), 5, 110, 244, 245
- Бэббедж (Charles Babbage, 1792—1871) 209
- Белл (Eric Temple Bell, 1883—1960) 176
- Бентам (George Bentham, 1800—1884) 18
- Берви Николай Васильевич (1869—?) 176
- Берг (J. Berg) 243
- Берка (Karel Berka) 243
- Берман Георгий Николаевич (1908—1949) 244
- Бернсайд (William Burnside, 1852—1927) 234
- Бернулли Даниил (Daniel Bernoulli, 1700—1782) 186, 188, 193, 209, 215, 220, 231
- Бернулли Яков (Jacob Bernoulli, 1654—1705) 98, 147, 186, 187, 189, 201, 208, 222, 224, 229
- Бернштейн Сергей Натанович (1880—1968) 188, 218, 228
- Бертран (Joseph Louis François Bertrand, 1822—1900) 143, 163—166, 210, 211, 235—238, 240, 245, 246
- Беспамятных Никифор Дмитриевич (р. 1910) 244
- Бессель (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784—1846) 151, 197
- Бетти (Enrico Betti, 1823—1892) 241
- Бирман (Kurt Reinhard Biermann, р. 1919) 154
- ал-Бируни Абу-р-Райхан Мухаммед ибн Ахмед (973 — ок. 1050) 193
- Бирюков Борис Владимирович (р. 1922) 243
- Бланше (R. Blanché) 243
- Блихфельд (Hans Frederick Blichfeldt, 1873—1945) 134
- Бобынин Виктор Викторович (1849—1919) 34, 243
- Болтаев М. Н. 243
- Больцано (Bernhard Bolzano, 1781—1848) 8, 241, 243
- Больцман (Ludwig Boltzmann, 1844—1906) 229—233, 240, 241, 246
- Бонне (Pierre Ossian Bonnet, 1819—1892) 143
- Боревич Зенон Иванович (р. 1922) 88
- Борель (Emile Borel, 1871—1956) 237
- Борисов Евгений Васильевич (1854 — ?) 136
- Борткевич Владислав Иосифович (Ladislaus von Bortkiewicz, 1868—1931) 212, 246
- Бортолотти (Ettore Bortolotti, 1866—1947) 245
- Борхардт (Karl Wilhelm Borchardt, 1817—1880) 108
- Бохенски (J. M. Bocheński) 243
- Бошкович (Rudjer Josip Bošković, Вошкович, 1711—1787) 189

- Боэций (Anicius Manlius Severinus Boet-  
 hius, ок. 480 — ок. 524) 12  
 Бояи (János Bolyai, 1802—1860) 8  
 Брауен (B. Brouwin) 74  
 Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brouwer,  
 1881—1966) 38  
 Брашман Николай Дмитриевич (1796—  
 1866) 173, 213, 215, 217, 247  
 Бриль (Alexander Wilhelm Brill, 1842—  
 1935) 245  
 Брун (Viggo Brun, р. 1885) 172  
 Бугаев Николай Васильевич (1837—1903)  
 5, 160, 171—176, 244  
 Буке (Jean Claude Bouquet, 1819—1885)  
 143  
 Буль Дж. (George Boole, 1815—1864) 5,  
 18, 21—27, 30, 31, 34, 35, 38, 78, 80,  
 238—240, 240—241, 246  
 Буль Э. Л. — см. Войнич  
 Бунцкий Евгений Львович (1874—1921)  
 38  
 Бунт (L. N. H. Bunt) 245  
 Буныковский Виктор Яковлевич (1804—  
 1889) 128, 149, 160, 161, 171, 172, 195,  
 213—215, 217, 218, 244—246  
 Бурбаки (Nicolas Bourbaki) 100, 108, 117,  
 244  
 Бурже (Henry Bourget, 1864—1921) 126  
 Бухштаб Александр Адольфович (р. 1905)  
 172, 243  
 Бьенеме (Irénée Jules Bienaumé, 1796—  
 1878) 205, 212, 222, 224, 246  
 Бюффон (George Louis de Buffon,  
 1707—1788) 210
- Вайдянатхасвами (R. Vaidyanatha-  
 swamy) 176  
 Валле-Пуассен (Charles Jean de la  
 Vallée Poussin, 1866—1962) 170  
 Валлис (Уоллис, John Wallis, 1616—1703)  
 157, 176  
 Вальфш Арнольд Зельманович (1892—  
 1962) 151, 171  
 Ван дер Варден (Bartel Leendert van der  
 Waerden, р. 1903) 119, 122  
 Ван дер Корпут (J. G. van der Corput,  
 р. 1890) 171  
 Вандермонд (Alexandre Théophile Van-  
 dermonde, 1735—1796) 52, 62, 67  
 Ван Хао (Wang Hao) 243  
 Ванцель (Pierre Laurent Vantzel, 1814—  
 1848) 93  
 Варинг (Уэринг, Edvard Waring, 1734—  
 1798) 110  
 Васильев Александр Васильевич (1853—  
 1929) 198, 219, 244  
 Вебер (Heinrich Weber, 1843—1913) 43,  
 98, 108, 114—117, 120, 122, 143, 244  
 Вейерштрасс (Carl Theodor Wilhelm  
 Weierstrass, 1815—1897) 43, 69, 76,  
 94, 100, 108, 119, 143, 167, 173, 182, 242  
 Вейль (Hermann Weyl, 1885—1955) 77,  
 121, 151  
 Венков Борис Алексеевич (1900—1962)  
 136, 150, 151, 243
- Вени (John Veun, 1834—1923) 5, 30—32,  
 34, 35, 38, 238—240, 243, 246  
 Верье (G. Verriest) 245  
 Вестергард (H. L. Westergaard, 1853—  
 1937) 247  
 Виет (François Viète, Vieta, 1540—1603)  
 13  
 Вилейтнер (Heinrich Wieleitner, 1874—  
 1931) 245  
 Винер (Norbert Wiener, 1894—1964) 170  
 Виноградов Иван Матвеевич (р. 1891)  
 151, 170, 171, 176  
 Винтер (Eduard Winter, р. 1896) 172  
 Войнич (Ethel Lilian Voynich, 1864—  
 1960) 22  
 Волков 242  
 Вороной Георгий Федосьевич (1868—  
 1908) 5, 128, 139, 142, 147—151, 158,  
 171, 176, 219, 241  
 Вронский — см. Гёне-Вронский  
 Вуссинг (Hans Wussing, р. 1927) 245
- Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642),  
 189, 193  
 Галуа (Evariste Galois, 1811—1832) 5, 8,  
 40, 42, 44, 50, 51, 54, 55, 57—62, 64—66,  
 108, 178, 241, 244, 245  
 Гальтон (Голтон, Francis Galton, 1822—  
 1911), 232, 233, 240, 246  
 Гамильтон У. (William Hamilton, 1788—  
 1856) 5, 8, 18, 19  
 Гамильтон У. Р. (William Rowan Ha-  
 milton, 1805—1865) 18, 42, 69, 72—75,  
 241—244  
 Ганкель (Hermann Hankel, 1839—1873)  
 241  
 Ганцек (H. Hanceck) 244  
 Гаусс (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855),  
 5, 6, 8, 40, 41, 43, 46—55, 57, 62, 63,  
 67, 74, 78, 82—94, 97, 98, 107, 108, 123,  
 124, 126—129, 138, 139, 141—143, 145,  
 152—154, 157, 159, 161, 162, 166, 171,  
 172, 196—201, 208, 225, 239—247  
 Гененбауер (Leopold Bernhard Gegenbauer,  
 1849—1903) 175, 176  
 Гекке (Erich Hecke, 1887—1947) 86  
 Гельмгольц (Hermann von Helmholtz,  
 1821—1894) 115, 143  
 Гельфанд Израиль Моисеевич (р. 1913) 117  
 Гельфер Яков Матвеевич 230  
 Гельфонд Александр Осипович (1906—  
 1968) 178—180, 182, 183  
 Гензель (Kurt Hensel, 1861—1941) 41, 95,  
 100, 103, 104, 106, 107, 122, 245  
 Герике (H. Gerike) 245  
 Герман Карл Федорович (1767—1838) 212  
 Герхард (Carl Immanuel von Ger-  
 hardt, 1816—1899) 14, 243  
 Гершель (John Friederick William Her-  
 schel, 1792—1871) 229  
 Гессе (Ludwig Otto Hesse, 1811—1874)  
 42, 77, 78, 80, 81  
 Гёдель (Kurt Gödel, р. 1906) 243 !  
 Гёльдер (Otto Ludwig Hölder, 1859—  
 1937) 66  
 Гёне-Вронский (Józef Hoëne-Wronski,  
 1778—1853) 242

- Гиббс (Josian Willard Gibbs, 1839—1903) 231, 232, 242, 246
- Гиллиспи (Charles C. Gillispie, p. 1918) 245
- Гильберт (David Hilbert, 1862—1943) 8, 77, 81, 82, 96, 98, 122, 144, 182, 183, 240, 241, 242
- Гихман Иосиф Ильич (p. 1918) 247
- Гнеденко Борис Владимирович (p. 1912) 6, 247
- Гоббс (Thomas Hobbes, 1588—1679) 237
- Гольдбах (Christian Goldbach, 1690—1764) 172, 183
- Гопкинс (John Hopkins) 79
- Гордан (Paul Gordan, 1837—1912) 42, 43, 77, 81, 94
- Горький Алексей Максимович (Пешков, 1868—1936) 229
- Граве Дмитрий Александрович (1863—1939) 219
- Грам (Jorgen Pedersen Gram, 1850—1916) 176
- Грассман (Hermann G. Grassman, 1809—1877) 5, 8, 41, 68, 75, 76, 242
- Граттен-Гюиннес (Ivor Grattan-Guinness) 206, 247
- Граун (E. Graun) 215
- Гревс (John T. Graves, 1806—1870) 74
- Грегори (Duncan Farquharson Gregory, 1813—1844) 70, 71
- фон Гумбольдт (Alexander von Humboldt, 1769—1859) 152—154
- Гурвиц (Adolf Hurwitz, 1859—1919) 108, 143, 180
- Гюйгенс (Хейхенс, Christian Huygens, 1629—1695) 186
- Давидов Август Юльевич (1823—1885) 212, 215, 216, 246, 247
- Даламбер (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783) 44
- Дарбу (Gaston Darboux, 1842—1917) 66, 125, 174
- Дарвин (Charles Darwin, 1809—1882) 184, 233, 234
- Дедекинд (Richard Julius Wilhelm Dedekind, 1831—1916) 5, 43, 68, 71, 86, 89, 98—100, 107—119, 121, 122, 160, 241, 242, 244
- Декарт (René Descartes, Cartesius, 1596—1650) 8, 13, 44
- Делоне Борис Николаевич (p. 1890) 136, 137, 146, 150, 151, 244
- Депман Иван Яковлевич (1885—1970) 244
- Джевоис (William Stanley Jevons, 1835—1882) 5, 21, 27—32, 34, 38, 238—240, 243
- Диксон (Leonard Eugene Dickson, 1874—1954) 245
- Диофант (Диофантос, III в.) 244
- Дирак (Paul Adrien Maurice Dirac, p. 1902) 203, 204, 247
- Дирхле Лежен (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805—1859) 5, 41, 43, 86—89, 92—94, 98, 99, 108—113, 123, 124, 136, 138—161, 166, 167, 171, 172, 174, 175, 190, 226, 241, 242
- Добролюбов Николай Александрович (1836—1861) 228
- Доджсон (Charles Lutwidge Dodgson, 1832—1898) 69
- Дружинин Николай Капитонович 247
- Дьёдонне (Jean Alexandre Dieudonné, p. 1906) 245
- Дэвенпорт (Harold Devenport, 1907—1969) 136, 151
- Дюамель (Jean Marie Constant Duhamel, 1797—1872) 173
- Дюбрейль (P. Dubreil) 245
- Дюбуа-Реймон (Paul Du Bois Reymond, 1831—1889) 94
- Евбулит из Милета (IV в. до н. э.) 11
- Евклид (Εὐκλείδης, 365—ок. 300 до н. э.) 12, 89, 90, 93, 105, 116, 118
- Евклид из Мегар (Εὐκλείδης, 450—380 до н. э.) 11
- Егоров Дмитрий Федорович (1869—1931) 173
- Жегалкин Иван Иванович (1869—1947) 24
- Жермен (Sophie Germain, 1776—1831) 93
- Жирар (Albert Girard, 1595—1632) 44
- Жордан (Camille Jordan, 1838—1922) 42, 62, 66, 69, 134, 143, 242, 244
- Зегнер (Johann Andreas von Segner, 1704—1777) 17
- Зеебер (Ludwig August Seeber, 1793—1855) 123, 137—139, 141, 244
- Зеллинг (Eduard Seling, 1834—1920) 136
- Зенон из Китиона (Ζήνων, ок. 336—264 до н. э.) 11
- Зернов Николай Ефимович (1804—1862) 213
- Зигель (Carl Ludwig Siegel, p. 1896) 136, 169, 182
- Золотарев Егор Иванович (1847—1878) 5, 41, 43, 89, 95, 96, 99—107, 121, 122, 127, 129—137, 141, 142, 146, 150, 219, 227, 228, 241, 244, 245
- Ибн Рушд, Абу Валид Мухаммед ибн Ахмед (1126—1198) 12
- Ибн Сина, Абу Али ал-Хусейн ибн Абдалла (980—1037) 12, 242, 243
- Иванов Иван Иванович (1862—1939) 166, 219
- Иргенсен (J. Jørgensen) 243
- Кант (Immanuel Kant, 1724—1804) 184, 213
- Кантор (Georg Cantor, 1845—1918) 21, 94, 120, 182
- Капунов Николай Федорович (p. 1912) 244
- Капелли (Alfredo Capelli, 1855—1910) 69
- Кардано (Girolamo Cardano, 1501—1576) 186
- Карруччо (Ettore Carruccio) 243
- Картан (Elie Cartan, 1869—1951) 66, 121
- Касселс (John William Scott Cassels, p. 1922) 145, 151, 243

- Каэн (Eugène Cahen, 1865 — ?) 169  
Келлер (Eduard Ott Heinrich Keller, р. 1906) 151  
лорд Кельвин — см. Томсон  
Кеплер (Johannes Kepler, 1571—1630) 233  
Кетле (Lambert Adolphe Jacques Quetelet, 1796—1874) 209—212, 216, 237, 246  
Киллинг (Wilhelm Killing, 1847—1923) 121  
Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887) 100, 115, 143  
Киселев Андрей Алексеевич (р. 1916) 244  
Клаузиус (Rudolf Julius Clausius, 1822—1888) 229, 232, 247  
Клебш (Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833—1872) 42, 43, 77, 81, 181  
Клейн (Felix Klein, 1849—1925) 42, 52, 53, 65, 66, 69, 74, 86, 108, 115, 120, 121, 124, 145, 153, 166, 200, 242, 244  
Клиффорд (William Kingdon Clifford, 1845—1879) 5, 75, 76, 241, 242  
Книл М. (M. Kneale) 243  
Книл У. (W. Kneale) 243  
Коган Л. А. 137, 244  
Коксма (J. F. Koksmā) 151  
Колмогоров Андрей Николаевич (р. 1903) 5, 10, 185, 219, 247  
де Кондорсе (Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet, 1743—1794) 204  
Копен (H. Kopen) 245  
Корен (J. Koren) 247  
Коркин Александр Николаевич (1837—1908) 5, 100—102, 129—137, 141, 142, 146, 147, 150, 219, 227, 228, 241, 245  
Котарбинский (Tadeusz Kotarbiński, р. 1886) 243  
Котс (Kotes, Roger Cotes, 1682—1716) 182  
Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857) 6, 8, 41, 42, 51, 52, 63, 67, 93, 99, 122, 126, 154, 164, 167, 195, 199, 200, 204—208, 239, 241, 242, 245  
Крамер (Gabriel Cramer, 1704—1752) 223  
Крейгель (L. Kreisel) 243  
Крелле (August Leopold Crelle, 1780—1855) 56, 87, 92, 95, 98, 120, 144, 146, 152  
Кристоффель (Elvin Bruno Cristoffel, 1829—1900) 108  
Кронекер (Leopold Kronecker, 1823—1891) 5, 43, 49—51, 69, 92, 94, 98—100, 108, 116, 119—122, 137, 143, 149, 160, 172, 173, 242  
Кроу (Michael J. Crowe) 245  
Крылов Алексей Николаевич (1863—1945) 130, 219, 221, 225, 229, 246  
Кузичев Александр Сергеевич (р. 1934) 243  
Кузичева Зинаида Андреевна (р. 1933) 5  
Кузьмин Родион Осиевич (1891—1949) 199, 244, 246  
Куммер (Ernst Eduard Kummer, 1810—1893) 5, 41, 43, 89, 93—100, 103, 106, 108, 110, 119, 120, 143, 160, 173, 245  
Курно (Antoine Augustin Cournot, 1801—1877) 193, 213, 241  
Кутюра (Louis Couturat, 1868—1914) 13—15, 17, 37, 242, 243  
Кэли (Arthur Cayley, 1821—1895) 41—43, 62, 64, 65, 67—69, 73—76, 78, 80, 81, 171, 234, 242  
Лагранж (Joseph Louis de Lagrange, 1736—1813) 22, 44—47, 51, 57, 61, 62, 67, 82—86, 95, 97, 124, 128, 129, 137, 148, 161, 178, 184, 186, 189, 199, 242  
Лакруа (Silvestre François Lacroix, 1765—1843) 214, 246  
Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728—1777), 17, 176, 193, 237  
Ламе (Gabriel Lamé, 1795—1870) 93, 95, 173  
Ландау (Edmund Landau, 1877—1938) 161, 166, 170, 171, 244  
Лапко Анатолий Филиппович (р. 1919) 6  
Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749—1827) 6, 45—48, 51, 184—196, 199—202, 204, 208, 209, 213—216, 220, 225, 226, 232, 238—240, 241, 242, 247, 248  
Лахтин Леонид Кузьмич (1853—1927) 173, 234  
Леви (Paul Lévy, 1886—1971) 185  
Лежандр (Adrien Marie Legendre, 1752—1833) 57, 82, 83, 93, 127, 128, 136, 142, 152, 154, 157, 159—162, 171, 172, 176, 198, 244, 246  
Лейбниц (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646—1716) 5, 8, 11—17, 237, 242, 243  
Лексис (Wilhelm Lexis, 1837—1914) 212, 213, 240, 246  
Ленин Владимир Ильич (Ульянов, 1870—1924) 235, 237, 247  
Ли (Sophus Lie, 1842—1899) 39, 66, 121, 242, 244, 245  
Либман (K. O. Heinrich Liebman, 1874—1939) 245  
Линдеман (Ferdinand Lindemann, 1852—1939) 143, 181, 182  
Линник Юрий Владимирович (1915—1972) 172, 229, 246  
Липшиц (Rudolf Lipschitz, 1832—1903) 76  
Литлвуд (John Edensor Littlewood, 1885—1957) 171  
Лиувиль (Joseph Liouville, 1809—1882) 5, 40, 59, 93, 95, 102, 124, 137, 143, 159—162, 172—174, 176—179, 218, 224  
Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) 8, 184, 241, 245  
Лопшидт (Joseph Loschmidt, 1821—1895) 231  
Луи-Филипп (1773—1850) 58  
Лукаевич (Jan Łukasiewicz, 1878—1956) 243  
Луллий (Raimondo Lullus, Lulio, ок. 1235—1315) 12  
Льюис (Clarens Irving Lewis, 1883—1964) 243  
Ляпунов Александр Михайлович (1857—1918) 185, 208, 219, 221, 223, 225—227, 238, 241, 246, 247

- Майстров Леонид Ефимович (р. 1920) 247  
 Маклорен (Меклорин, Colin Maclaurin, 1698—1746) 44, 176, 187  
 Махмагон (Percy Alexander Mac Mahon, 1854—1929) 171  
 Максвелл (James Clarke Maxwell, 1831—1879) 229, 230, 231, 234, 240, 246  
 Малер (Kurt Mahler, р. 1903) 136, 151  
 Мангольдт (Hans Carl Friedrich von Mangoldt, 1854—1925) 175  
 Марков Андрей Андреевич (1856—1922) 5, 129, 134—136, 147, 148, 182, 188, 198, 208, 219, 222, 223, 225, 226—229, 234, 239, 241, 245, 246  
 Марков Владимир Андреевич (1871—1897) 136, 137, 244  
 Маркс (Karl Marx, 1818—1883) 211  
 Матвиевская Галина Павловна (р. 1930) 244  
 Мах (Ernst Mach, 1836—1916) 235  
 Медведев Федор Андреевич (р. 1923) 6  
 Мельников Илья Григорьевич (р. 1915) 244  
 Мерлен (Jean Merlin, ? — 1915) 172  
 Мертенс (Franz Carl Joseph Mertens, 1840—1927) 165  
 Мёбиус (August Ferdinand Möbius, 1790—1868) 168, 172, 174  
 фон Мизес (Richard F. von Mises, 1883—1953) 232  
 Милл (John Stuart Mill, 1872—1917) 239  
 Минин Александр Петрович (1852 —?) 176, 244  
 Минковский (Hermann Minkowski, 1864—1909) 5, 108, 134, 142—147, 150, 151, 153, 242, 244, 245  
 Минто (William Minto, 1845—1893) 19, 242  
 Митчерлинг (A. Mitzscherling) 245  
 Михельсон Владимир Александрович (1860—1927) 230, 246  
 Молин Федор Эдуардович (1861—1941) 122, 244  
 Морган (Augustus D. de Morgan, 1806—1871) 5, 12, 18—22, 37, 70, 71, 213, 238—240, 243, 246  
 Морделл (Louis Jöel Mordell, 1888—1972) 136, 137, 151  
 Морозова Н. Н. 244  
 Муавр (Abraham de Moivre, 1667—1754) 186, 187, 189, 202, 208, 220  
 Мюир (Thomas Muir, 1844—1934) 245  
 Назимов Петр Сергеевич (1851—1901) 171, 173, 176  
 Нарский И. С. 243  
 Насир ад-Дин ат-Туси (1201—1274) 12  
 Натуччи (Aipinolo Natucci, р. 1883) 245  
 фон Нейман Э. (Franz Ernst Neumann, 1798—1895) 81  
 Нётер М. (Max Noether, 1844—1921) 245  
 Нётер Э. (Emmy Noether, 1882—1935) 119, 122  
 Нови (Luboš Nový, р. 1929) 245  
 Ногес (R. Noguès) 93  
 Ньютон (Isaac Newton, 1643—1727) 8, 22, 99, 110  
 Ожигова Елена Петровна (р. 1923) 5, 244  
 Оккам (William Occam, ок. 1300 — ок. 1350) 12  
 Ондар Хеймероол Опанович (р. 1936) 234, 247  
 Оппенгейм (Alexander Oppenheim, р. 1903) 151  
 Оре (Øystein Ore, 1899—1968) 245  
 Орем (Nicole Oresme, ок. 1323—1382) 215  
 Орженцкий Роман Михайлович (1863—1923) 234  
 Осиповский Тимофей Федорович (1765—1822) 213  
 Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862) 178, 215, 217, 218, 241, 247  
 Павловский Андрей Федорович (1788—1856) 213, 247  
 Паршин Алексей Николаевич (р. 1942) 5  
 Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662) 192, 247  
 Пастер (Louis Pasteur, 1822—1895) 125  
 Пеано (Giuseppe Peano, 1858—1932) 21, 68, 242  
 Пеллегрини (F. Pellegrino) 176  
 Пелль (John Pell, 1610—1685) 156  
 Пенлеве (Paul Painlevé, 1863—1933) 125  
 Перрон (Oskar Perron, р. 1880) 244  
 Петр Испанский (Petrus Hispanus, ок. 1215—1277) 12  
 Пикар (Émile Picard, 1856—1941) 125  
 Пикок (George Peacock, 1791—1858) 70, 73  
 Пирогов Николай Николаевич (1843—1891) 230, 246  
 Пирс Б. (Benjamin O. Peirce, 1809—1880) 76, 242  
 Пирс Ч. (Charles Sanders Peirce, 1839—1914) 21, 242  
 Пирсон (Karl Pearson, 1857—1936) 192, 208, 233—234, 240, 242, 246  
 Писарев Дмитрий Иванович (1840—1868) 228  
 Плакет (Robin L. Plackett) 247  
 Планк (Max Planck, 1858—1947) 230  
 Плуке (Gottfried Ploucquet, 1716—1790) 17  
 Полиньяк (Alphons Polygnac, 1826—1863) 165  
 Попкен И. 176  
 Порецкий Платон Сергеевич (1846—1907) 5, 30, 34, 36—38, 172, 242  
 Порфирий (ок. 232 — ок. 304) 11, 12  
 Поссе Константин Александрович (1847—1928) 180, 219, 245  
 Прахар К. 244  
 Птолемей Клавдий (Κλαυδῖος Πτολεμαῖος, ум. ок. 170) 193  
 Птуха М. В. 247  
 Пуанкаре (Henri Poincaré, 1854—1912) 121, 125, 134, 144, 165, 193, 231, 235—238, 240, 241, 242, 246

- Пуассон (Siméon Denis Poisson, 1781—1840) 6, 199—208, 211, 213, 216, 218, 220, 222, 239, 240, 246
- Пушкин Александр Сергеевич (1799—1837) 53
- Пуказэ (Victor Puiseux, 1820—1883) 122
- Раабе (J. L. Raabe, 1801—1859) 108
- Рамануджан (Srinivasa Ramanujan, 1887—1920) 171
- Рассел (Bertrand Russell, 1872—1970) 21
- Риккати (Jacopo Francesco Riccati, 1676—1754) 178
- Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866) 5, 68, 107, 108, 115, 116, 151, 152, 157, 160, 164—170, 241
- Роджерс К. А. 151
- Роте (Peter Rothe, ? — 1617) 44
- Рудаков Алексей Николаевич (р. 1947) 5
- Рудио (Ferdinand Rudio, 1856—1929) 244
- Румовский Степан Яковлевич (1734—1812) 16, 243
- Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) 62, 242, 245
- Рюмелин (G. Pümelin, 1815—1889) 212
- Ряго Г. 245
- Сальмон (George Salmon, 1819—1904) 42, 77—79
- Сельберг (Atle Selberg, р. 1917) 166, 171, 172, 176
- Сенета (Eugene Seneta) 247
- Серпинский (Waclaw Serpinski, 1882—1969) 151, 171
- Серре (Joseph Alfred Serret, 1819—1885) 62, 65, 164
- Сидаков В. Д. 243
- Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814—1897) 19, 42, 69, 76, 78—80, 165, 171, 242
- Симпсон (Thomas Simpson, 1710—1761) 184, 189, 193
- Сираждинов Сагды Хасанович (р. 1921) 10
- Скотт (Duns Scott, ок. 1270—1308) 12
- Слаутин Евгений Иосифович (р. 1948) 5
- Слешинский Иван Владиславович (1854—1931) 30, 37, 223, 246
- Слупцкий Евгений Евгеньевич (1880—1948) 234
- Смит (Henry John Stephan Smith, 1826—1883) 5, 92, 142—144, 152, 242, 245
- Смолуховский (Marien Smoluchowski, 1872—1917) 188
- Сократ (Σοκράτης, 469—399 до н. э.) 11
- Сонин Николай Яковлевич (1849—1915) 151, 173, 176, 219
- Сорокина Людмила Александровна (р. 1932) 245
- Сохоцкий Юлиан Васильевич (1842—1927) 219, 244
- Станевич Виктор Иванович 166
- Стевин (Simon Stevin, 1548—1620) 116
- Стеклов Владимир Андреевич (1864—1926) 188, 219
- Стилтьес (Thomas Johannes Stieltjes, 1856—1894) 125, 169, 241, 242
- Стирлинг (James Stirling, 1692—1770) 157, 163
- Стокс (George Gabriel Stokes, 1819—1903) 234
- Студницкая (F. J. Studnicka) 245
- Стяжкин Николай Иванович (р. 1932) 243
- Сушкевич Антон Казимирович (1889—1961) 245
- Таннери (Paul Tannery, 1843—1904) 125
- Тартаковский Владимир Абрамович (р. 1904) 172
- Тейлор (Agnus E. Taylor, р. 1911) 243
- Тейт (Peter Guthrie Tait, 1831—1901) 229
- Титчмарш (Edward Charles Titchmarsh, 1899—1963) 169
- Тихоандрюцкий Матвей Александрович (1844—1921) 223, 246
- Тодгентер И. (Isaac Todhunter, 1820—1884) 19, 239, 247
- Томсон (William Thomson, 1824—1907) 229
- Торелли (Gabriele Torelli, 1849—1931) 166, 245
- Трэдделл (C. Truesdell, р. 1919) 247
- Уде (A. W. Ude) 108
- Уолтон (John Walton, XVIII в.) 243
- Успенский Владимир Андреевич (р. 1930) 10
- Успенский Яков Викторович (1883—1947) 128, 137, 151, 171, 245
- Уэлдон (Walter Frank Raphael Weldon, 1860—1906) 233, 240
- Фаддеев Дмитрий Константинович (р. 1907) 10, 150
- ал-Фараби Абу Наср Мухаммед ибн Мухаммед (ок. 870—950) 12, 242
- Фарадей (Michael Faraday, 1791—1867) 233
- Фарей (John Farey, 1766—1826) 151
- Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665) 5, 8, 41, 62, 84, 86, 88, 91, 93, 94, 98, 156
- Фёдоров Евграф Степанович (1853—1919) 150, 241
- Филон (Φίλων, ок. 300 до н. э.) 11
- Фишер (Rouald Aylmer Fisher, 1890—1962) 198
- Фреге (Gottlob Friedrich Ludwig Frege, 1849—1925) 21, 38, 242
- Фрейденталь (Hans Freudenthal, р. 1905) 245, 247
- Френкель (A. Fränkel) 119
- Фробениус (Georg Frobenius, 1849—1917) 108, 122, 135, 241, 242
- Фруллани (Giuliamo Frullani, 1795—1834) 225
- Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830) 153, 168, 186, 119, 206, 207, 209, 242, 246
- Фусс Павел Николаевич (1798—1859) 161

- Харди (Godfrey Harold Hardy, 1877—1947) 171  
Хейде (С. С. Heude) 247  
фон Хейденурт (J. von Heijenoort) 243  
Хинчин Александр Яковлевич (1894—1959) 232, 246  
Хованский Алексей Николаевич (р. 1916) 244  
Хофрейтер (Nikolaus Hofreiter, р. 1904) 134, 151  
Хризипп (Χρῑσιππος, ок. 281—208 до н. э.) 11
- Цермело (Ernest Zermelo, 1871—1953) 231  
Цингер Николай Яковлевич (1842—1918) 229
- Чеботарёв Николай Григорьевич (1895—1947) 244, 245  
Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) 5, 6, 100, 102, 124, 128—130, 136, 142, 147, 152, 157, 160—166, 172, 175, 185, 186, 188, 189, 208, 213, 217—228, 235, 237—240, 241, 246  
Чезаро (Ernesto Cesàro, 1859—1906) 160, 176  
Чернышевский Николай Гаврилович (1828—1889) 228  
Четвериков Николай Сергеевич (1885—1973) 212  
Чёрч (Alonzo Church, р. 1903) 242  
Чиполла (Michele U. L. Cipolla, 1880—1947) 176  
Чубер (Emmanuel Czuber, 1851—1925) 238, 246, 247  
Чупров Александр Александрович (1874—1926) 212, 234, 246
- Шарв (Léon Scharve, 1849 — ?) 133, 145  
Шатуновский Самуил Осипович (1859—1929) 38  
Шафаревич Игорь Ростиславович (р. 1923) 88, 98, 244  
Шварц (Hermann Amandus Schwarz, 1843—1921) 94, 108  
Шевалье (Augustin Chevalier) 59, 61, 62  
Шейнин Оскар Борисович (р. 1925) 6, 247  
Шнейдер И. (Ivo Schneider) 232, 249  
Шнейдер Т. (T. Schneider, 1876—1959) 183
- Шольц (Heinrich Scholz, 1884—1956) 243  
Шрёдер (Ernst Schröder, 1841—1902) 5, 21, 32, 34—36, 38, 119, 243  
Штейнер (H. G. Steiner) 247  
Штейниц (Ernst Steinitz, 1871—1928) 119  
Штернфельд (R. Sternfeld) 243  
Штурм (Sturm, Jaques Charles François Sturm, 1803—1855) 126, 177, 242  
Шур (Issai Schur, 1875—1941) 135
- Эдвардс (Harold M. Edwards) 169  
Эджворт (Francis Ysidro Edgeworth, 1845—1926) 234, 247  
Эдрейн (Robert Adrain, 1775—1843) 198, 199, 229, 246, 247  
Эйзенштейн (Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823—1852) 41, 42, 80, 81, 91, 92, 99, 123, 127, 136, 137, 143, 243  
Эйлер (Leonhard Euler, 1707—1783) 8, 14—16, 32, 44—47, 51, 61, 62, 82—84, 86, 107, 124, 128, 133, 143, 149, 152, 154, 155, 157—161, 163—165, 167, 171, 172, 176, 177, 182, 183, 187, 218, 225, 243—244  
Энгель (Friedrich Engel, 1861—1941) 245  
Энгельс (Friedrich Engels, 1820—1895) 211  
Энке (Johann Franz Encke, 1791—1865) 162  
Эрдёш (Paul Erdős, р. 1913) 166, 171  
Эренфест П. (Paul Ehrenfest, 1880—1933) 188, 231, 231, 246  
Эренфест Т. А.— см. Афанасьева-Эренфест  
Эрмит (Charles Hermite, 1822—1901) 5, 77, 79, 92, 100, 102, 124—129, 131, 132, 134, 137, 141, 143, 144, 146, 147, 149—151, 164, 169, 179—182, 188, 223, 242
- Юшкевич Андрей Павлович (р. 1906) 5, 10, 172, 245
- Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851) 41, 43, 62, 67, 68, 73, 77, 78, 81, 91, 94, 115, 124—127, 136, 143, 146, 148, 149, 152, 154, 160, 171, 172, 242  
Ямамото (С. Yamamoto) 176  
Яновская Софья Александровна (1896—1966) 118, 243

**МАТЕМАТИКА XIX ВЕКА**  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**  
**АЛГЕБРА**  
**ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**  
**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

●  
*Утверждено к печати  
Институтом истории естествознания  
и техники Академии наук СССР*

●  
Редактор *А. Ф. Лапко*  
Редактор издательства *Н. Н. Лезнова*  
Художник *А. В. Пушкарный*  
Художественный редактор *Т. П. Поленова*  
Технический редактор *Ф. М. Женох*  
Корректор *Р. П. Шаблева*

ИБ № 7515

Сдано в набор 04.04.78  
Подписано к печати 16.10.78  
Т-17531. Формат 70×100<sup>1/16</sup>  
Бумага для глубокой печати  
Гарнитура обыкновенная  
Печать высокая  
Усл. печ. л. 20,6 Уч.-изд. л. 21,1  
Тираж 10150 экз. Тип. зак. 382  
Цена 2 р. 10 к.

●  
Издательство «Наука»  
117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул.; 9/4а  
2-я типография издательства «Наука»  
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10