Л. М. ЛИХТАРНИКОВ,
Т. Г. СУКАЧЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ И РЕШЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание четвертое,
стереотипное

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.12я73
Л 65

Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г.

Л 65 Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие. 4-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 288 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0082-9

Учебное пособие состоит из двух частей — курса лекций по математической логике, включающего теоретический материал по ряду разделов: алгебра логики, исчисление высказываний, логика предикатов, математические теории, алгоритмы, и задачника-практикума, содержащего упражнения по перечисленным разделам.

Учебное пособие предназначено для студентов университетов и педагогических вузов, изучающих математическую логику.

ББК 22.12я73

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие «Математическая логика. Курс лекций и задачник-практикум» предназначено для студентов университетов и педагогических институтов, изучающих математическую логику.

Оно состоит из двух частей. Часть первая «Курс лекций по математической логике» включает в себя теоретический материал по разделам:

1. Алгебра логики.
2. Исчисление высказываний.
3. Логика предикатов.
4. Математические теории.
5. Алгоритмы.

Часть вторая «Задачник-практикум по математической логике» содержит набор упражнений почти по всем перечисленным разделам.

В зависимости от содержания программ курса математической логики на конкретных специальностях, отдельные разделы пособия могут быть исключены из рассмотрения (например, исчисление высказываний, математические теории), а из других разделов использована лишь часть материала.

Учитывая, что в отдельных случаях студентам требуется лишь «Задачник-практикум», в каждом его разделе приводится минимум теоретических сведений, необходимых для решения предлагаемых задач.

Студенты математических специальностей университетов и педагогических институтов материалы разделов 1, 3 и 5 могут впоследствии использовать в подготовке школьного факультативного курса «Элементы математической логики».

Часть I

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, то есть путем использования законов человеческого мышления. Изучение законов человеческого мышления является предметом логики.

Как самостоятельная наука логика оформилась в трудах греческого философа Аристотеля (384–322 гг. до н. э.). Он систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться формальной или Аристотелевой логикой.

Формальная логика просуществовала без серьезных изменений более двадцати столетий. Естественно, что развитие математики выявило недостаточность Аристотелевой логики и потребовало дальнейшего ее развития.

Впервые в истории идеи о построении логики на математической основе были высказаны немецким математиком Г. Лейбницем (1646–1716) в конце XVII в. Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по особым правилам. Это позволит всякое рассуждение заменить вычислением.

«Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления» (Лейбниц).

Первая реализация идеи Лейбница принадлежит английскому ученому Д. Булю (1815–1864). Он создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к алгебре высказываний. Введение символических обозначений в логику имело для этой науки такое же решающее значение, как и введение буквенных обозначений для математики. Именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания новой науки — математической логики.

Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, и это, конечно, расширило область логических исследований. К концу XIX столетия актуальное значение для математики приобрели вопросы обоснования ее основных понятий и идей. Эти задачи имели логическую природу и, естественно, привели к дальнейшему развитию математической логики. В этом отношении показательны работы немецкого математика Г. Фреге (1848–1925) и итальянского математика Д. Пеано (1858–1932). Эти ученые применили математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

Особенности математического мышления объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем. В связи с этим современную математическую логику определяют как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики.

Одной из основных причин развития математической логики является широкое распространение аксиоматического метода в построении различных математических теорий, в первую очередь геометрии, а затем арифметики, теории групп и т. д.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий и отношения между ними. Эти понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории — аксиомы. Все дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом. Впервые аксиоматическое построение математической теории была предпринято Евклидом (III в. до н. э.) в построении геометрии.

Изложение этой теории в «Началах» Евклида не безупречно. Евклид здесь пытается дать определение исходных понятий (точки, прямой, плоскости). В доказательстве теорем используются нигде явно не сформулированные положения, которые считаются очевидными. Таким образом, в этом построении отсутствует необходимая логическая строгость, хотя истинность всех положений теории не вызывает сомнений.

Отметим, что такой подход к аксиоматическому построению теории оставался единственным до XIX в. Большую роль в изменении такого подхода сыграли работы Н. И. Лобачевского (1792–1856).

Лобачевский впервые в явном виде высказал убеждение в невозможности доказательства пятого постулата Евклида и подкрепил это убеждение созданием новой геометрии. Позже немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925) доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского, чем фактически была доказана и невозможность доказательства пятого постулата Евклида.

Так возникли и были решены в работах Н. И. Лобачевского и Ф. Клейна впервые в истории математики проблемы невозможности доказательства и непротиворечивости в аксиоматической теории.

Непротиворечивость аксиоматической теории является одним из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путем вывести два противоречащих друг другу утверждения.

Доказательство непротиворечивости аксиоматических теорий можно осуществить различными методами. Одним из них является метод моделирования или интерпретаций. Здесь в качестве основных понятий и отношений выбираются элементы некоторого множества и отношения между ними, а затем проверяется, будут ли выполняться для выбранных понятий и отношений аксиомы данной теории, то есть строится модель для данной теории. Так, аналитическая геометрия является арифметической интерпретацией геометрии Евклида. Ясно, что метод моделирования сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к проблеме непротиворечивости другой теории.

Большинство интерпретаций для математических теорий (и, в частности, для арифметики) строится на базе теории множеств, в связи с этим важно доказать непротиворечивость теории множеств.

Однако в конце XIX в. в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы теории множеств). Ярким примером такого парадокса является парадокс Б. Рассела (1872–1970). Разобьем все мыслимые множества на два класса. Назовем множество «нормальным», если оно не содержит себя в качестве своего элемента и «ненормальным» в противном случае. Например, множество всех книг — «нормальное» множество, а множество всех мыслимых вещей — «ненормальное» множество. Пусть L — множество всех «нормальных» множеств. К какому классу относится множество L? Если L — «нормальное» множество, то $L \in L$, т. е. содержится в классе «нормальных» множеств, но тогда оно содержит себя в качестве своего элемента, и поэтому оно «ненормально». Если L — «ненормальное» множество, то $L \notin L$, т. е. не содержится среди «нормальных» множеств, но тогда L не содержит себя в качестве своего элемента, и поэтому оно «нормально». Таким образом, понятие «нормального» множества приводит к противоречию.

Попытки устранить противоречия в теории множеств привели Цермело (1871–1953) к необходимости построить аксиоматическую теорию множеств. Последующие видоизменения и усовершенствования этой теории привели к созданию современной теории множеств. Однако средства этой аксиоматической теории не позволяют доказать ее непротиворечивость.

Другие методы обоснования математики были развиты Д. Гильбертом (1862-1943) и его школой. Они основываются на построении математических теорий как синтаксических теорий, в которых все аксиомы записываются формулами в некотором алфавите и точно указываются правила вывода одних формул из других, то есть в теорию как составная часть входит математическая логика.

Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой требовалось доказать, стала предметом другой математической теории, которую Гильберт назвал метаматематикой, или теорией доказательств.

В связи с этим возникает задача построения синтаксической, то есть формализованной аксиоматической теории самой математической логики. Выбирая по-разному системы аксиом и правила вывода одних формул из других, получают различные синтаксические логические теории. Каждую из них называют логическим исчислением.

В данном курсе будет рассмотрено классическое исчисление высказываний.

Глава 1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под *высказыванием* обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Приведем примеры высказываний.

1) Великий Новгород стоит на Волхове.

2) Париж — столица Англии.

3) Карась не рыба.

4) Число 6 делится на 2 и на 3.

5) Если юноша окончил среднюю школу, то он получает аттестат зрелости.

Высказывания 1), 4), 5) истинны, а высказывания 2) и 3) ложны.

Очевидно, предложение «Да здравствуют наши спортсмены!» не является высказыванием.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными. Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Карась — рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3», соединенных союзом «и». Высказывание 5) получается из простых высказываний «Юноша окончил среднюю школу», «Юноша получает аттестат зрелости» с помощью грамматической связки «если ..., то ...». Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

В дальнейшем будем элементарные высказывания обозначать малыми буквами латинского алфавита: x, y, z, ..., x_1, x_2, x_3, ...; истинное значение высказывания — буквой *и* или цифрой 1, а ложное значение — буквой *л* или цифрой 0.

Если высказывание a истинно, то будем писать $a = 1$, а если a ложно, то $a = 0$.

§ 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

1. Отрицание. *Отрицанием* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\overline{x}$ и читается «не x» или «неверно, что x».

Логические значения высказывания $\overline{x}$ можно описать с помощью таблицы:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть x — высказывание. Так как $\overline{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\overline{x}$, то есть высказывание $\overline{\overline{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x. Ясно, что логические значения высказываний x и $\overline{\overline{x}}$ совпадают.

Например, для высказывания «Река Волхов вытекает из озера Ильмень» отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов вытекает из озера Ильмень» или «Река Волхов не вытекает из озера Ильмень», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов не вытекает из озера Ильмень».

2. Конъюнкция (логическое умножение). *Конъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x \& y$ или $(x \wedge y)$, читается «x и y». Высказывания x, y называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \& y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2, и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Из определения операции конъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \& \overline{x}$ всегда ложно.

3. Дизъюнкция (логическое сложение). *Дизъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x, y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x, y обозначается символом $y \vee y$, читается «x или y». Высказывания x, y называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Например, высказывание «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике DFE угол D острый», «В треугольнике DFE угол E острый».

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операции дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \vee \overline{x}$ всегда истинно.

4. Импликация. *Импликацией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y — ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x, y обозначается символом $x \to y$, читается «если x, то y» или «из x следует y». Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y — следствием или заключением, высказывание «$x \to$ $\to y$» — следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Например, высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Употребление слов «если ..., то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что, если высказывание x ложно, то высказывание «Если x, то y» вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида «если x, то y» в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение y вытекает из предложения x. Употребление слов «если ..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «Если x, то y». Если при этом известно, что x истинно и доказана истинность импликации $x \to y$, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения y.

5. Эквиваленция. *Эквиваленцией* (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y». Высказывания x, y называются членами эквиваленции.

Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$» является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности, и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

§ 3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний x, y, z можно построить высказывания

$$(x\&y) \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \rightarrow \overline{(y \vee (x\&z))}.$$

Первое из них есть дизъюнкция конъюнкции x, y и отрицания высказывания z, а второе высказывание есть импликация, посылкой которой является высказывание x, а заключением — отрицание дизъюнкции высказывания y и конъюнкции высказываний x, z.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется *формулой алгебры логики*. Формулы алгебры логики будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, $\ldots$.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

В связи с этим формулы

$$(x\&y) \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \to \overline{(y \vee (x\&z))}$$

могут быть записаны так:

$$x\&y \vee \overline{z} \qquad \text{и} \qquad x \to \overline{y \vee x\&z}.$$

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $\overline{x\&y} \vee \overline{z}$ в случае, если $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, будет истина, то есть $\overline{x\&y} \vee \overline{z} = 1$.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например, для формулы $\overline{x} \vee y \to x\&\overline{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	$x\&\overline{y}$	$\overline{x} \vee y \to x\&\overline{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Легко видеть, что, если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

§ 4. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильность формул будем обозначать знаком $\equiv$, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Например, равносильны формулы:

$$\overline{\overline{x}} \equiv x,$$

$$x \vee x \equiv x,$$

$$(x \& \overline{x}) \vee y \equiv y.$$

Формула A называется *тождественно истинной* (или *тавтологией*), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

Например, тождественно истинны формулы $x \vee \overline{x}$, $x \to (y \to x)$.

Формула A называется *тождественно ложной*, если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных.

Например, тождественно ложна формула $x \& \overline{x}$.

Ясно, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ — тавтология, и обратно, если формула $A \leftrightarrow B$ — тавтология, то формулы A и B равносильны.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

1. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & x \& x \equiv x \\ 2. & x \vee x \equiv x \end{array}\right\} \text{— законы идемпотентности.}$$

3. $x \& u \equiv x$.
4. $x \vee u \equiv u$.

5. $x\&л \equiv л$.
6. $x \vee л \equiv x$.
7. $x\&\overline{x} \equiv л$ — закон противоречия.
8. $x \vee \overline{x} \equiv и$ — закон исключенного третьего.
9. $\overline{\overline{x}} \equiv x$ — закон снятия двойного отрицания.

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ x\&(y \vee x) \equiv x \\ 11.\ x \vee (y\&x) \equiv x \end{array}\right\} \text{— законы поглощения.}$$

Докажем один из законов поглощения. Рассмотрим формулу $A \equiv x\&(y \vee x)$. Если в этой формуле $x = 1$, то, очевидно, $y \vee x = 1$ и тогда $x\&(y \vee x) = 1$ как конъюнкция двух истинных высказываний. Пусть теперь в формуле A $x = 0$. Но тогда по определению операции конъюнкции будет ложной и конъюнкция $x\&(y \vee x)$. Итак, во всех случаях значения формулы A совпадают со значениями x, а поэтому $A \equiv x$.

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y)\&(y \to x)$.
2. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \overline{x\&y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 4.\ \overline{x \vee y} \equiv \overline{x}\&\overline{y} \end{array}\right\} \text{— законы де Моргана.}$$

5. $x\&y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
6. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x}\&\overline{y}}$.

Ясно, что равносильности 5 и 6 получаются из равносильностей 3 и 4 соответственно, если от обеих частей последних взять отрицания и воспользоваться законом снятия двойного отрицания. Таким образом, в доказательстве нуждаются первые четыре равносильности. Докажем две из них: первую и третью.

Так как при одинаковых логических значениях x и y истинными являются формулы $x \leftrightarrow y$, $x \to y$, $y \to x$, то истинной будет и конъюнкция $(x \to y)\&(y \to x)$. Следовательно, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые истинные значения.

Пусть теперь x и y имеют различные логические значения. Тогда будут ложными эквивалентность $x \leftrightarrow y$ и одна из двух импликаций $x \to y$ или $y \to x$. При этом будет ложной и конъюнкция $(x \to y)\&(y \to x)$. Таким образом, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые логические значения.

Рассмотрим равносильность 3. Если x и y принимают одновременно истинные значения, то будет истинной конъюнкция $x\&y$ и ложным отрицание конъюнкции $\overline{x\&y}$. В то же время будут ложными $\overline{x}$, и $\overline{y}$, а поэтому будет ложной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Пусть теперь хотя бы одна из переменных x или y принимает значение ложь. Тогда будет ложной конъюнкция $x\&y$ и истинной ее отрицание. В то же время отрицание хотя бы одной из переменных будет истинным, а поэтому будет истинной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Следовательно, во всех случаях обе части равносильности 3 принимают одинаковые логические значения.

Аналогично доказываются равносильности 2 и 4.

Из равносильностей этой группы следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Дальнейшее исключение логических операций невозможно. Так, если мы будем использовать только конъюнкцию, то уже такая формула как отрицание x не может быть выражена с помощью операции конъюнкции.

Однако существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций, которыми мы пользуемся. Такой операцией является, например, операция «Штрих Шеффера». Эта операция обозначается символом $x \mid y$ и определяется следующей таблицей истинности:

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Очевидно, имеют место равносильности:

1. $\overline{x} \equiv x \mid x$
2. $x\&y \equiv (x \mid y) \mid (x \mid y)$.

Из этих двух равносильностей следует, что всякая формула алгебры логики может быть заменена равносильной формулой, содержащей только операцию «Штрих Шеффера».

Отметим, что $x \mid y \equiv \overline{x\&y}$.

Аналогично может быть введена операция $\varphi(x, y) \equiv \overline{x \vee y}$.

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x\&y \equiv y\&x$ — коммутативность конъюнкции.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ — коммутативность дизъюнкции.
3. $x\&(y\&z) \equiv (x\&y)\&z$ — ассоциативность конъюнкции.
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ — ассоциативность дизъюнкции.
5. $x\&(y \vee z) \equiv (x\&y) \vee (x\&z)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
6. $x \vee (y\&z) \equiv (x \vee y)\&(x \vee z)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Докажем последний из перечисленных законов. Если $x = 1$, то будут истинными формулы $x \vee (y\&z)$, $x \vee y$, $x \vee z$. Но тогда будет истинной и конъюнкция $(x \vee y)\&(x \vee z)$. Таким образом, при $x = 1$ обе части равносильности 6 принимают одинаковые логические значения (истинные).

Пусть теперь $x = 0$. Тогда $x \vee (y\&z) \equiv y\&z$, $x \vee y \equiv y$ и $x \vee z \equiv z$, а поэтому и конъюнкция $(x \vee y)\&(x \vee z) \equiv y\&z$. Следовательно, здесь обе части равносильности 6 равносильны одной и той же формуле $y\&z$, и поэтому принимают одинаковые логические значения.

§ 5. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ

Используя равносильности I, II и III групп можно часть формулы или формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются *равносильными*.

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Формула A считается проще равносильной ей формулы B, если она содержит меньше букв, меньше логических операций. При этом обычно операции эквивалентность и импликация заменяются операциями дизъюнкции и конъюнкции, а отрицание относят к элементарным высказываниям. Рассмотрим ряд примеров.

1. Доказать равносильность $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee x\&y$.

Используя равносильности I, II и III групп запишем цепочку равносильных формул:

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow y &\equiv (x \to y)\,\&\,(y \to x) \equiv (\overline{x} \vee y)\,\&\,(\overline{y} \vee x) \equiv \\ &\equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee \overline{x}\&x \vee y\&\overline{y} \vee y\&x \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee 0 \vee 0 \vee y\&x \equiv \\ &\equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee y\&x \equiv \overline{x}\&\overline{y} \vee x\&y. \end{aligned}$$

2. Упростить формулу $(\overline{x \vee y} \to x \vee y)\,\&y$.

Запишем цепочку равносильных формул:

$$\begin{aligned} (\overline{x \vee y} \to x \vee y)\,\&y &\equiv \left(\overline{\overline{x \vee y}} \vee x \vee y\right)\&y \equiv \\ &\equiv (x \vee y \vee x \vee y)\,\&y \equiv (x \vee y)\,\&y \equiv y. \end{aligned}$$

3. Доказать тождественную истинность формулы

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)).$$

Запишем цепочку равносильных формул:

$$\begin{aligned} &(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv \\ &\equiv \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee \left(\overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x \vee y} \vee z\right) \equiv \overline{\overline{x}}\&\overline{y} \vee \overline{\overline{y}}\&\overline{z} \vee \overline{x}\&\overline{y} \vee z \equiv \\ &\equiv x\&\overline{y} \vee y\&\overline{z} \vee \overline{x}\&\overline{y} \vee z \equiv (x\&\overline{y} \vee \overline{x}\&\overline{y}) \vee (y\&\overline{z} \vee z) \equiv \\ &\equiv \overline{y}\&(x \vee \overline{x}) \vee (y \vee z)\,\&\,(\overline{z} \vee z) \equiv \overline{y}\&1 \vee (y \vee z)\&1 \equiv \\ &\equiv \overline{y} \vee y \vee z \equiv (\overline{y} \vee y) \vee z \equiv 1 \vee z \equiv 1. \end{aligned}$$

§ 6. АЛГЕБРА БУЛЯ

Равносильности III группы говорят о том, что алгебра логики обладает коммутативными и ассоциативными законами относительно операций конъюнкции и дизъюнкции и дистрибутивным законом конъюнкции относительно дизъюнкции, эти же законы имеют место и в алгебре чисел. Поэтому над формулами алгебры логики можно производить те же преобразования, которые проводятся в алгебре чисел (раскрытие скобок, заключение в скобки, вынесение за скобки общего множителя).

Но в алгебре логики возможны и другие преобразования, основанные на использовании равносильностей:

$$\begin{aligned} &(x\&y) \vee z \equiv (x \vee z)\,\&\,(y \vee z), \\ &x\&(y \vee x) \equiv x, \\ &x \vee (y\&x) \equiv x, \\ &\overline{x\&y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}, \\ &\overline{x \vee y} \equiv \overline{x}\&\overline{y} \qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Эта особенность позволяет прийти к важным и далеко идущим обобщениям.

Рассмотрим непустое множество M элементов любой природы $\{x,\ y,\ z,\ \ldots\}$, в котором определены отношение «=» (равно) и три операции: «+» (сложение), «·» (умножение), «—» (отрицание), подчиняющиеся следующим аксиомам:

Коммутативные законы:

1а. $x + y = y + x$, 1б. $x \cdot y = y \cdot x$.

Ассоциативные законы:

2а. $x + (y + z) = (x + y) + z$, 2б. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Дистрибутивные законы:

3а. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$, 3б. $(x \cdot y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$.

Законы идемпотентности:

4а. $x + x = x$, 4б. $x \cdot x = x$.

Закон снятия двойного отрицания:

5. $\overline{\overline{x}} = x$.

Законы де-Моргана:

6а. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, 6б. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$.

Законы поглощения:

7а. $x + (y \cdot x) = x$, 7б. $x \cdot (y + x) = x$.

Такое множество M называется *булевой алгеброй*.

Если под основными элементами x, y, z, ... подразумевать высказывания, под операциями «+», «·», «—» дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание соответственно, а знак равенства рассматривать как знак равносильности, то, как следует из равносильностей I, II и III групп, все аксиомы булевой алгебры выполняются.

В тех случаях, когда для некоторой системы аксиом удается подобрать конкретные объекты и конкретные соотношения между ними так, что все аксиомы выполняются, говорят, что найдена *интерпретация* (или *модель*) данной системы аксиом.

Значит, алгебра логики является интерпретацией булевой алгебры. Алгебра Буля имеет и другие интерпретации. Например, если под основными элементами x, y, z, ... множества M подразумевать множества, под операциями «$+$», «$\cdot$», «$-$» — объединение, пересечение, дополнение соответственно, а под знаком равенства — знак равенства множеств, то мы приходим к алгебре множеств. Нетрудно убедиться, что в алгебре множеств все аксиомы алгебры Буля выполняются.

Среди различных интерпретаций булевой алгебры имеются интерпретации и технического характера. Одна из них будет рассмотрена ниже. Как будет показано, она играет важную роль в современной автоматике.

§ 7. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Как уже отмечалось, значение формулы алгебры логики полностью зависит от значений входящих в эту формулу высказываний. Поэтому формула алгебры логики является функцией входящих в нее элементарных высказываний.

Например, формула $(x \& y) \to \overline{z}$ является функцией трех переменных $f(x, y, z)$. Особенностью этой функции является то обстоятельство, что ее аргументы принимают одно из двух значений: ноль или единицу, и при этом функция также принимает одно из двух значений: ноль или единицу.

Определение. *Функцией алгебры логики* n переменных (или *функцией Буля*) называется функция n переменных, где каждая переменная принимает два значения: 0 и 1, и при этом функция может принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Ясно, что тождественно истинные и тождественно ложные формулы алгебры логики представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Выясним, каково число функций n переменных. Очевидно, каждую функцию алгебры логики (как и формулу алгебры логики) можно задать с помощью таблицы истинности, которая будет содержать 2^n строк. Следовательно, каждая функция n переменных принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц. Таким образом, функция n переменных полностью определяется набором значений из нулей и единиц длины 2^n. Общее же число наборов, состоящих из нулей и единиц, длины 2^n равно 2^{2^n}. Значит, число различных функций алгебры логики n переменных равно 2^{2^n}.

В частности, различных функций одной переменной четыре, а различных функций двух переменных шестнадцать. Выпишем все функции алгебры логики одной и двух переменных.

Рассмотрим таблицу истинности для различных функций одной переменной. Она, очевидно, имеет вид:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Из этой таблицы следует, что две функции одной переменной будут постоянными: $f_1(x) \equiv 1$, $f_4(x) \equiv 0$, а $f_2(x) \equiv x$, и $f_3(x) \equiv \overline{x}$.

Таблица истинности для всевозможных функций двух переменных имеет вид:

$$f_i \equiv f_i(x, y)$$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Ясно, что аналитические выражения этих функций могут быть записаны следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
f_1 \equiv 1, & f_5 \equiv \overline{x\&y}, & f_9 \equiv \overline{x \leftrightarrow y}, & f_{13} \equiv \overline{y \to x}, \\
f_2 \equiv x \vee y, & f_6 \equiv x, & f_{10} \equiv \overline{y}, & f_{14} \equiv \overline{x \to y}, \\
f_3 \equiv y \to x, & f_7 \equiv x \leftrightarrow y, & f_{11} \equiv y & f_{15} \equiv x\&y, \\
f_4 \equiv x \to y, & f_8 \equiv \overline{x}, & f_{12} \equiv \overline{x \vee y}, & f_{16} \equiv 0.
\end{array}
$$

§ 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ВИДЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная функция алгебры логики n переменных.

Рассмотрим формулу

$$
\begin{aligned}
&F(1,1,\ldots,1)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_n\vee \\
&\vee F(1,1,\ldots,1,0)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_{n-1}\&\overline{x}_n\vee \\
&\vee F(1,1,\ldots,1,0,1)\,\&x_1\&x_2\&\ldots\&x_{n-2}\&\overline{x}_{n-1}\&x_n \vee \cdots \vee \\
&\vee F(0,0,\ldots,0)\,\&\overline{x}_1\&\overline{x}_2\&\ldots\&\overline{x}_n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

которая составлена следующим образом: каждое слагаемое этой логической суммы представляет собой конъюнкцию, в которой первый член является значением функции F при некоторых определенных значениях переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, остальные же члены конъюнкции представляют собой переменные или их отрицания. При этом под знаком отрицания находятся те и только те переменные, которые в первом члене конъюнкции имеют значение 0.

Вместе с тем формула (1) содержит в виде логических слагаемых всевозможные конъюнкции указанного вида.

Ясно, что формула (1) полностью определяет функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Иначе говоря, значения функции F и формулы (1) совпадают на всех наборах значений переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Например, если x_1 принимает значение 0, а остальные переменные принимают значение 1, то функция F принимает значение $F(0,1,1,\ldots,1)$. При этом логическое слагаемое

$F(0,1,\ldots,1)\&\overline{x}_1\&x_2\&\ldots\&x_n$, входящее в формулу (1), принимает также значение $F(0,1,\ldots,1)$, все остальные логические слагаемые формулы (1) имеют значение 0. Действительно, в них знаки отрицания над переменными распределяются иначе, чем в рассмотренном слагаемом, но тогда при замене переменных теми же значениями в конъюнкцию войдет символ 0 без знака отрицания, символ 1 под знаком отрицания. В таком случае один из членов конъюнкции имеет значение 0, а поэтому вся конъюнкция имеет значение 0. В связи с этим на основании равносильности $x \vee 0 \equiv x$ значением формулы (1) является $F(0,1,\ldots,1)$.

Ясно, что вид формулы (1) может быть значительно упрощен, если в ней отбросить те логические слагаемые, в которых первый член конъюнкции имеет значение 0 (и, следовательно, вся конъюнкция имеет значение 0). Если же в логическом слагаемом первый член конъюнкции имеет значение 1, то, пользуясь равносильностью $1\&x \equiv x$, этот член конъюнкции можно не выписывать.

Таким образом, в результате получается формула (1), которая содержит только элементарные переменные высказывания и обладает следующими свойствами:

1) Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

2) Все логические слагаемые формулы различны.

3) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Перечисленные свойства будем называть *свойствами совершенства* или, коротко, свойствами (С).

Из приведенных рассуждений видно, что каждой не тождественно ложной функции соответствует единственная формула указанного вида.

Если функция $F(x_1,x_2,x_3)$ задана таблицей истинности, то соответствующая ей формула алгебры логики может быть получена просто. Действительно, для каждого набора значений переменных, на котором функция $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимает значение 1, запишем конъюнкцию элементарных переменных высказываний, взяв за член конъюнкции x_k, если значение x_k на указанном наборе значений переменных есть 1, и отрицание x_k, если значение x_k есть 0. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций и будет искомой формулой.

Пусть, например, функция $F(x_1, x_2, x_3)$ имеет следующую таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Для наборов значений переменных (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0), (0,0,0), на которых функция принимает значение 1, запишем конъюнкции: $x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$, $x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3$, $\overline{x}_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3$, а искомая формула, обладающая свойствами (C), имеет вид:

$$x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3 \vee x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3 \vee \overline{x}_1 \& x_2 \& \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3.$$

§ 9. ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ

Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Будем называть операцию конъюнкции двойственной операции дизъюнкции, а операцию дизъюнкции двойственной операции конъюнкции.

Определение. Формулы A и A^* называются *двойственными*, если формула A^* получается из формулы A путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Например, для формулы $A \equiv (x \vee y) \& z$ двойственной формулой будет формула $A^* \equiv (x \& y) \vee z$.

Теорема. *Если формулы A и B равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, то есть $A^* \equiv B^*$.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если для формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ двойственной формулой является $A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то справедлива равносильность*

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Доказательство. Для элементарной формулы утверждение леммы очевидно. Действительно, если $A(x_1) \equiv x_1$, то $A^*(x_1) \equiv x_1$, $\overline{A}(x_1) \equiv \overline{x}_1$, $A^*(\overline{x}_1) \equiv \overline{x}_1$ и $\overline{A(x_1)} \equiv A^*(\overline{x}_1)$.

Пусть теперь утверждение леммы справедливо для всяких формул, содержащих не более k операций. Докажем, что при этом предположении утверждение справедливо и для формулы, содержащей и $k+1$ операцию.

Пусть формула $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит $k+1$ операцию. Тогда ее можно представить в одном из трех видов:

1) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$,
2) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
3) $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

где формулы $A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержат не более k операций, и, следовательно, для них утверждение справедливо, то есть

$$\overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$
$$\overline{A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A_2^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

В случае 1) имеем $A^* \equiv \overline{A}_1^*$, поэтому

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{\overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}} \equiv$$
$$\equiv \overline{A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

В случае 2) имеем $A^* \equiv (A_1 \vee A_2)^* \equiv A_1^* \& A_2^*$, а поэтому

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv$$
$$\equiv \overline{A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \& \overline{A_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv$$
$$\equiv A_1^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \& A_2^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Аналогичное доказательство проводится и в случае 3).

Докажем теперь закон двойственности.

Пусть формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равносильны:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Но тогда, очевидно,

$$\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{1}$$

В то же время, согласно лемме,

$$\begin{cases} \overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), \\ \overline{B(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv B^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n). \end{cases} \tag{2}$$

Из равносильностей (1) и (2) получаем

$$A^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \equiv B^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$

и, следовательно,

$$A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

§ 10. ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И СОВЕРШЕННАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (ДНФ И СДНФ)

Определение 1. *Элементарной конъюнкцией* n переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.

Элементарная конъюнкция n переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\delta_1} \& x_2^{\delta_2} \& \ldots \& x_n^{\delta_n},$$

где $x_k^{\delta_k} = \begin{cases} x_k, & \text{если} \quad \delta_k = 1, \\ \overline{x}_k, & \text{если} \quad \delta_k = 0. \end{cases}$

Определение 2. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее ДНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A \equiv x\&(x \to y)$ имеем:

$$A \equiv x\&\left(\overline{x} \vee y\right) \equiv (x\&\overline{x}) \vee (x\&y) \equiv x\&y, \qquad \text{то есть}$$

$$\text{ДНФ } A \equiv (x\&\overline{x}) \vee (x\&y)\,,$$

$$\text{ДНФ } A \equiv x\&y.$$

Среди многочисленных ДНФ A существует единственная ДНФ A, для которой выполняются перечисленные выше четыре свойства совершенства (свойства (С)).

Такая ДНФ A называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* формулы A (СДНФ A).

Как уже указывалось, СДНФ A может быть получена с помощью таблицы истинности.

Другой способ получения СДНФ формулы A основан на равносильных преобразованиях формулы и состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из ДНФ A.

2. Если в полученной ДНФ A входящая в нее элементарная конъюнкция B не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B\&\left(x_i \vee \overline{x}_i\right) \equiv B$, элементарную конъюнкцию B заменяют на две элементарных конъюнкции $(B\&x_i)$ и $(B\&\overline{x}_i)$, каждая из которых содержит переменную x_i.

3. Если в ДНФ A входят две одинаковых элементарных конъюнкции B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \vee B \equiv B$.

4. Если некоторая элементарная конъюнкция B, входящая в ДНФ A, содержит переменную x_i и ее отрицание $\overline{x}_i$, то $B \equiv 0$, и B можно исключить из ДНФ A как нулевой член дизъюнкции.

5. Если некоторая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ A, содержит переменную x_i дважды, то одну переменную можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i\&x_i \equiv x_i$.

Ясно, что после выполнения описанной процедуры будет получена СДНФ A.

Например, для формулы $A \equiv x \vee y\&(x \vee \overline{y})$ ДНФ $A \equiv \equiv x \vee x\&y \vee y\&\overline{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $B \equiv x$, входящая в ДНФ A, не содержит переменной y, то, пользуясь равносильностью $B \equiv B\&(y \vee \overline{y}) \equiv x\&(y \vee \overline{y}) \equiv x\&y \vee x\&\overline{y}$, заменим ее на две элементарных конъюнкции $x\&y$ и $x\&\overline{y}$. В результате получим ДНФ $A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y} \vee x\&y \vee y\&\overline{y}$.

Так как теперь ДНФ A содержит две одинаковых элементарных конъюнкции $x\&y$, то лишнюю отбросим, пользуясь равносильностью $x\&y \vee x\&y \equiv x\&y$. В результате получим ДНФ $A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y} \vee y\&\overline{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $y\&\overline{y}$ содержит переменную y и ее отрицание $\overline{y}$, то $y\&\overline{y} \equiv 0$, и ее можно отбросить как нулевой член дизъюнкции.

Таким образом, получаем

$$\text{СДНФ } A \equiv x\&y \vee x\&\overline{y}.$$

§ 11. КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И СОВЕРШЕННАЯ КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (КНФ И СКНФ)

Определение 1. *Элементарной дизъюнкцией* n переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.

Элементарная дизъюнкция n переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \cdots \vee x_n^{\delta_n},$$

где $x_k^{\delta_k} = \begin{cases} x_k, & \text{если} \quad \delta_k = 1, \\ \overline{x}_k, & \text{если} \quad \delta_k = 0. \end{cases}$

Определение 2. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее КНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A \equiv \overline{x \vee y} \leftrightarrow x\&y$ имеем:

$$A \equiv (\overline{x \vee y} \to x\&y)\,\&\,(x\&y \to \overline{x \vee y}) \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee x\&y)\,\&\,\left(\overline{x\&y} \vee \overline{x \vee y}\right) \equiv$$
$$\equiv (x \vee x \vee y)\,\&\,(x \vee y \vee y)\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x})\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{y})\,, \quad \text{то есть}$$
$$\text{КНФ } A \equiv (x \vee x \vee y)\,\&\,(x \vee y \vee y)\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x})\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{y})\,.$$

Но так как $x \vee x \equiv x$, $y \vee y \equiv y$, $\overline{x} \vee \overline{x} \equiv \overline{x}$, $\overline{y} \vee \overline{y} \equiv \overline{y}$, то КНФ $A \equiv (x \vee y)\,\&\,(x \vee y)\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y})\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y})$.

А так как $(x \vee y)\,\&\,(x \vee y) \equiv (x \vee y)$, $(\overline{x} \vee \overline{y})\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y}) \equiv (\overline{x} \vee \overline{y})$, то КНФ $A \equiv (x \vee y)\,\&\,(\overline{x} \vee \overline{y})$.

Определение 3. КНФ A называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* формулы A (СКНФ A), если для нее выполнены условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит переменную и ее отрицание.
4. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит двух одинаковых переменных.

Можно доказать, что каждая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

Один их способов получения СКНФ состоит в использовании таблицы истинности для формулы $\overline{A}$.

Действительно, получив с помощью таблицы истинности СДНФ $\overline{A}$, мы получим СКНФ A, взяв отрицание $\overline{\text{СДНФ } \overline{A}}$, то есть СКНФ $A \equiv \overline{\text{СДНФ } \overline{A}}$.

Другой способ получения СКНФ, использующий равносильные преобразования, состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из КНФ A.
2. Если в полученной КНФ A входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B \vee (x_i\&\overline{x}_i) \equiv B$, элементарную дизъюнкцию B заменяют на две элементарные дизъюнкции $B \vee x_i$ и $B \vee \overline{x}_i$, каждая из которых содержит переменную x_i.

3. Если в КНФ A входят две одинаковых элементарных дизъюнкции B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \& B \equiv B$.

4. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i и ее отрицание, то $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$ и, следовательно, вся элементарная дизъюнкция имеет значение 1, а поэтому ее можно отбросить как единичный член конъюнкции.

5. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i дважды, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \vee x_i \equiv x_i$.

Ясно, что после описанной процедуры будет получена СКНФ A.

Например, для формулы $A \equiv x \vee \& (x \vee \overline{y})$ КНФ $A \equiv$ $\equiv (x \vee y) \& (x \vee x \vee \overline{y})$.

Так как обе элементарные дизъюнкции различны и содержат все переменные (x и y), то первое и второе условия СКНФ A выполнены.

Элементарная дизъюнкция $x \vee x \vee \overline{y}$ содержит переменную x дважды, но $x \vee x \equiv x$, и поэтому КНФ $A \equiv (x \vee \overline{y}) \& (x \vee y)$; причем ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит переменную и ее отрицание. Значит, теперь выполнены все условия СКНФ A, и, следовательно, СКНФ $A \equiv (x \vee \overline{y}) \& (x \vee y)$.

§ 12. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные,

2) тождественно ложные и

3) выполнимые.

Определения тождественно истинной и тождественно ложной формул даны выше.

Формулу A называют *выполнимой*, если она принимает значение «истина» хотя бы на одном наборе значений входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

В связи с этим возникает задача: к какому классу относится данная формула?

Эта задача носит название *проблемы разрешимости*.

Очевидно, проблема разрешимости алгебры логики разрешима.

Действительно, для каждой формулы алгебры логики может быть записана таблица истинности, которая и даст ответ на поставленный вопрос.

Однако практическое использование таблицы истинности для формулы $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при больших n затруднительно.

Существует другой способ, позволяющий, не используя таблицы истинности, определить, к какому классу относится формула A. Этот способ основан на приведении формулы к нормальной форме (КНФ или ДНФ) и использовании алгоритма, который позволяет определить, является ли данная формула тождественно истинной или не является. Одновременно с этим решается вопрос о том, будет ли формула A выполнимой.

Предположим, что мы имеем критерий тождественной истинности для формул алгебры логики. Рассмотрим механизм его применения.

Применим критерий тождественной истинности к формуле A. Если окажется, что формула A — тождественно истинная, то задача решена. Если же окажется, что формула A не тождественно истинная, то применим критерий тождественной истинности к формуле $\overline{A}$. Если окажется, что формула $\overline{A}$ — тождественно истинная, то ясно, что формула A — тождественно ложная, и задача решена. Если же формула $\overline{A}$ не тождественно истинная, то остается единственно возможный результат: формула A выполнима.

Установим теперь критерий тождественной истинности произвольной формулы алгебры логики. С этой целью предварительно сформулируем и докажем критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции.

Теорема 1. *Для того, чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть элементарная дизъюнкция тождественно истинна, но в нее одновременно не входит некоторая переменная и ее отрицание. Придадим каждой переменной, входящей в элементарную дизъюнкцию без знака отрицания, значение «ложь», а каждой переменной, входящей в элементарную дизъюнкцию под знаком отрицания — значение «истина». Тогда, очевидно, вся элементарная дизъюнкция примет значение «ложь», что противоречит условию.

Достаточность. Пусть теперь элементарная дизъюнкция содержит переменную и ее отрицание. Так как $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$, то и вся элементарная дизъюнкция будет тождественно истинной.

Критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции позволяет сформулировать и доказать критерий тождественной истинности произвольной формулы алгебры логики.

Теорема 2. *Для того, чтобы формула алгебры логики A была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержала переменную и ее отрицание.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A тождественно истинна. Тогда и КНФ A — тождественно истинна. Но КНФ $A \equiv A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$, где A_i — элементарные дизъюнкции $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как КНФ $A \equiv 1$, то $A_i \equiv$ $\equiv 1\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. Но тогда по теореме 1 каждая элементарная дизъюнкция A_i содержит переменную и ее отрицание.

Достаточность. Пусть любая элементарная дизъюнкция A_i, входящая в КНФ A, содержит переменную и ее отрицание. Тогда по теореме 1 $A_i \equiv 1\,(i = 1, 2, \ldots, n)$. При этом и КНФ $A \equiv 1$.

Например, выясним, является ли формула $A \equiv y \vee \overline{y} \& x \vee$ $\vee\, \overline{x} \& \overline{y}$ тождественно истинной.

Так как $A \equiv y \vee \overline{y} \& (x \vee \overline{x}) \equiv (y \vee \overline{y}) \& (y \vee x \vee \overline{x})$, то ясно, что каждая элементарная дизъюнкция $y \vee \overline{y}$ и $y \vee x \vee \overline{x}$, входящая в КНФ A, содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, $A \equiv 1$.

Аналогично можно установить критерий тождественной ложности формулы алгебры логики, используя ее ДНФ.

Теорема 3. *Для того, чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.*

Теорема 4. *Для того, чтобы формула алгебры логики А была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы любая конъюнкция, входящая в ДНФ А, содержала переменную и ее отрицание.*

§ 13. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. Приложения алгебры логики в технике (релейно-контактные схемы).

Среди технических средств автоматизации значительное место занимают устройства релейно-контактного действия. Они широко используются в технике автоматического управления, в электронно-вычислительной технике и т. д.

Эти устройства (их в общем случае называют переключательными схемами) содержат сотни реле, электронных ламп, полупроводников и электромагнитных элементов. Описание и конструирование таких схем в силу их громоздкости весьма затруднительно.

Еще в 1910 году физик П. С. Эренфест указал на возможность применения аппарата алгебры логики при исследовании релейно-контактных схем (РКС). Однако его идеи стали реализовываться значительно позже, когда создание общей теории конструирования РКС стало остро необходимым.

Использование алгебры логики в конструировании РКС оказалось возможным в связи с тем, что каждой схеме можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики, и каждая формула алгебры логики реализуется с помощью некоторой схемы.

Это обстоятельство позволяет выявить возможности заданной схемы, изучая соответствующую формулу, а упрощение схемы свести к упрощению формулы.

С другой стороны, до построения схемы можно заранее описать с помощью формулы те функции, которые схема должна выполнять.

Рассмотрим, как устанавливается связь между формулами алгебры логики и переключательными схемами.

Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из следующих элементов:

1) *переключателей*, которыми могут быть механические действующие устройства (выключатели, переключающие ключи, кнопочные устройства и т. д.), электромагнитные реле, электронные лампы, полупроводниковые элементы и т. п.;

2) соединяющих их *проводников*;

3) *входов* в схему и *выходов* из нее (клемм, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами схемы.

Сопротивления, конденсаторы и т. д. на схемах не изображаются.

Переключательной схемой принимается в расчет только два состояния каждого переключателя, которые называют «замкнутым» и «разомкнутым».

Рассмотрим простейшую схему, содержащую один переключатель P и имеющую один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание p, гласящее: «Переключатель P замкнут». Если p истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения. Будем в этом случае говорить, что схема проводит ток. Если p ложно, то переключатель разомкнут, и схема тока не проводит или на полюсе B снимается минимальное напряжение при подаче на полюс A максимального напряжения.

Если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема 1.

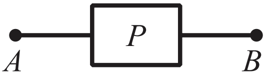


Схема 1.

Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Конъюнкция двух высказываний p и q будет представлена двухполюсной схемой с последовательным соединением двух переключателей P и Q (схема 2).

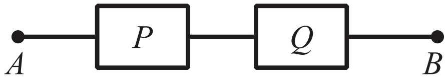


Схема 2.

Эта схема пропускает ток тогда и только тогда, когда истинны и p, и q одновременно, то есть истинна конъюнкция $p\&q$.

Дизъюнкция двух высказываний p и q изобразится двухполюсной схемой с параллельным соединением двух переключателей P и Q (схема 3).

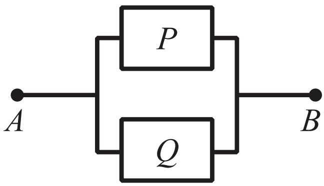


Схема 3.

Эта схема пропускает ток в случае, если истинно высказывание p или истинно высказывание q, то есть истинна дизъюнкция $p \vee q$.

Из схем 1, 2 и 3 путем последовательного и параллельного их соединения могут быть построены новые двухполюсные переключательные схемы, которые называют П-схемами.

Если высказывание $\overline{p}$ есть отрицание высказывания p, то тождественно истинная формула $p \vee \overline{p}$ изображается схемой, которая проводит ток всегда (схема 4), а тождественно ложная формула $p\&\overline{p}$ изобразится схемой, которая всегда разомкнута (схема 5).

Как было показано, всякая формула алгебры логики путем равносильных преобразований может быть представлена в виде формулы, содержащей только две операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание. Из этого следует, что всякая формула алгебры логики может быть изображена П-схемой и, обратно, для любой П-схемы может быть записана формула, которая изображается этой схемой.

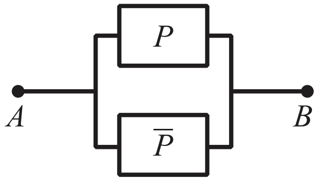


Схема 4.

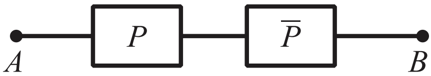


Схема 5.

Пример 1. Формуле $L \equiv (x \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y})$ соответствует схема 6:

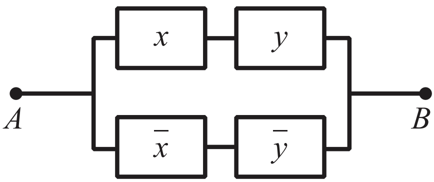


Схема 6.

Пример 2. Для П-схемы 7 соответствующая формула алгебры логики имеет вид:

$$L \equiv (x\&y\&z) \vee (\overline{x}\&y\&z) \vee (x\&\overline{y}\&z) \vee (x\&y\&\overline{z}).$$

Упростим эту формулу следующим образом:

$$L \equiv ((x\&y\&z) \vee (\overline{x}\&y\&z)) \vee ((x\&y\&z) \vee (x\&\overline{y}\&z)) \vee \\ \vee ((x\&y\&z) \vee (x\&y\&\overline{z})) \equiv ((y\&z) \,\&\, (x \vee \overline{x})) \vee \\ \vee ((x\&z) \,\&\, (y \vee \overline{y})) \vee ((x\&y) \,\&\, (x \vee \overline{z})) \equiv \\ \equiv (y\&z) \vee (x\&z) \vee (x\&y) \equiv ((x \vee y) \,\&z) \vee (x\&y).$$

Последней формуле соответствует П-схема 8:

Из примера 2 следует, что для некоторых РКС путем равносильных преобразований соответствующей формулы алгебры логики можно получить РКС, содержащую меньшее число

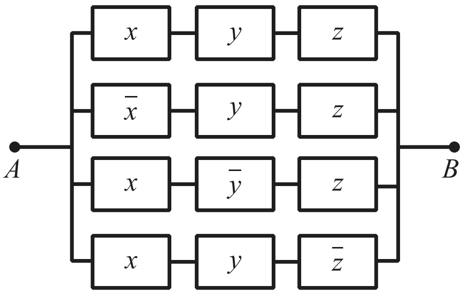


Схема 7.

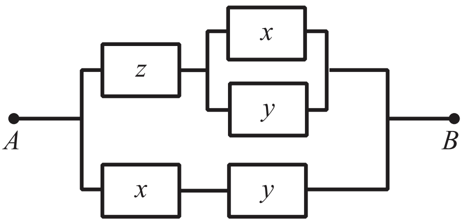


Схема 8.

переключателей. Проблема решения этой задачи носит название *проблемы минимизации*.

Приведем пример построения РКС по заданным условиям с оценкой числа контактов.

Пример 3. Построить контактную схему для оценки результатов некоторого спортивного соревнования тремя судьями при следующих условиях: судья, засчитывающий результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, должна загореться лампочка (положительное решение судей принято простым большинством голосов).

Решение. Ясно, что работа нужной РКС описывается функцией Буля трех переменных $F(x, y, z)$, где переменные высказывания x, y, z означают:

x — судья x голосует «за»,

y — судья y голосует «за»,

z — судья z голосует «за».

Таблица истинности функции $F(x, y, z)$, очевидно, имеет вид:

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

В связи с этим СДНФ формулы (функции) $F(x, y, z)$ запишется в виде

$$F(x, y, z) \equiv x \& y \& z \vee x \& y \& \overline{z} \vee x \& \overline{y} \& z \vee \overline{x} \& y \& z.$$

А этой формуле соответствует РКС, изображенная на схеме 7, которая содержит двенадцать переключателей.

Но как было показано, в результате равносильных преобразований формула $F(x, y, z)$ может быть приведена к виду:

$$F(x, y, z) \equiv (x \vee y) \& z \vee (x \& y),$$

которому соответствует РКС, изображенная на схеме 8, содержащей пять переключателей.

2. Решение логических задач методами алгебры логики. Суть применения методов алгебры логики к решению логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде формулы алгебры логики. В дальнейшем, путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу. Простейший вид формулы, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи.

Покажем на ряде конкретных примеров, как использовать возможности алгебры логики для решения элементарных логических задач.

Пример 1. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

1) Антон был вторым, а Борис — пятым.
2) Виктор был вторым, а Денис — третьим.
3) Григорий был первым, а Борис — третьим.
4) Антон был третьим, а Евгений — шестым.
5) Виктор был третьим, а Евгений — четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

Решение. Будем обозначать высказывания зрителей символом X_y, где X — первая буква имени участника, а y — номер места, которое он занял в турнире.

Так как в паре высказываний каждого зрителя одно истинно, а второе ложно, то будут истинными дизъюнкции этих высказываний

$$А_2 \vee Б_5 \equiv 1, \quad В_2 \vee Д_3 \equiv 1, \quad Г_1 \vee Б_3 \equiv 1, \quad А_3 \vee Е_6 \equiv 1, \quad В_3 \vee Е_4 \equiv 1.$$

Но тогда будет истинной и формула

$$L \equiv (А_2 \vee Б_5) \,\&\, (В_2 \vee Д_3) \,\&\, (Г_1 \vee Б_3) \,\&\, (А_3 \vee Е_6) \,\&\, (В_3 \vee Е_4)\,.$$

Путем простых равносильных преобразований легко показать, что $L \equiv А_3 \& Б_5 \& В_2 \& Г_1 \& Е_4$. Но $L \equiv 1$, и, значит, $А_3 \equiv 1$, $Б_5 \equiv 1$, $В_2 \equiv 1$, $Г_1 \equiv 1$, $Е_4 \equiv 1$, что и дает ответ на вопрос задачи.

Пример 2. Жили четыре мальчика: Альберт, Карл, Дидрих и Фридрих. Фамилии друзей те же, что и имена, только так, что ни ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха не была Альберт. Требуется определить фамилию каждого из мальчиков, если известно, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого — фамилия Карла.

Решение. Поставим в соответствие каждому мальчику символ X_Y, где X — имя, а Y — фамилия мальчика.

Тогда по условию задачи ложны высказывания:

$$А_А, К_К, Д_Д, Ф_Ф, Д_А,$$

но есть мальчик Y_X такой, что истинна конъюнкция

$$X_Ф \& Y_X \& К_Y.$$

Очевидно, что $X \not\equiv Ф$, $X \not\equiv К$, $Y \not\equiv Ф$, $Y \not\equiv К$.

Тогда возможны два случая:

1) $X \equiv А$ и $Y \equiv Д$,

2) $X \equiv Д$ и $Y \equiv А$.

Но первый случай невозможен, так как здесь $Y_X \equiv Д_А$, а по условию $Д_А \equiv 0$.

Следовательно, имеет место второй случай. Значит, Дидрих имеет фамилию Фридрих, Альберт имеет фамилию Дидрих, Карл имеет фамилию Альберт, а Фридрих имеет фамилию Карл.

Пример 3. По подозрению в совершении преступления задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой был малоизвестным чиновником, третий — известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом — ложь. Вот что они утверждали:

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».

Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виновен Браун».

Определите имя старика, мошенника и чиновника и кто из них виноват, если известно, что преступник один.

Решение. Обозначим буквами $Б$, $Д$ и $С$ высказывания: виноват Браун, виноват Джон, виноват Смит соответственно. Тогда утверждения, высказанные задержанными, можно записать в виде конъюнкций: $Б\&\overline{Д}$, $\overline{Б}\&С$, $Б\&\overline{С}$, из которых, по условию задачи, две ложны, а одна истинна.

Поэтому будет истинной формула

$$L \equiv \left(Б\&\overline{Д}\right) \vee \left(\overline{Б}\&С\right) \vee \left(Б\&\overline{С}\right).$$

Таблица истинности этой формулы имеет вид:

$Б$	$Д$	$С$	$Б\&\overline{Д}$	$\overline{С}\&Б$	$\overline{Б}\&С$	L
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Отсюда видно, что формула L истинна в пяти из восьми занумерованных случаев. Случай 4 следует исключить из рассмотрения, так как здесь оказываются истинными две конъюнкции, а это противоречит условию задачи. В случаях 2, 3 и 5 оказываются истинными по два высказывания: $Б$ и $Д$, $Б$ и $С$, $Д$ и $С$ соответственно, что также противоречит условию задачи. Следовательно, справедлив случай 7, то есть преступник — Смит. Он — известный мошенник, и оба его высказывания ложны: $Б\&\overline{С} \equiv 0$. При этом высказывания $Б$ и $Д$ ложны. Значит, истинна пара высказываний Джона, а у Брауна первое высказывание ложно, а второе истинно. Отсюда ясно, что Джон — уважаемый в городе старик, а Браун — малоизвестный чиновник.

Глава 2

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Давая описание алгебры высказываний, мы пользовались логическими значениями высказываний (истина, ложь). Но эти понятия истинности и ложности не математические. Эти понятия во многих случаях субъективны и скорее относятся к философии.

В связи с этим желательно построить математическую логику, не пользуясь понятиями истинности и ложности. Необходимо также при этом построении не применять самих законов логики.

Исчисление высказываний — это аксиоматическая логическая система, интерпретацией которой является алгебра высказываний.

§ 1. ПОНЯТИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Описание всякого исчисления включает в себя описание символов этого исчисления (алфавита), формул, являющихся конечными конфигурациями символов, и определение выводимых формул.

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. Символы первой категории: x, y, z, ..., x_1, x_2, ... Эти символы будем называть переменными высказываниями.

2. Символы второй категории: $\vee$, $\&$, $\to$, $-$. Они носят общее название логических связок. Первый из них — знак дизъюнкции или логического сложения, второй — знак конъюнкции или логического умножения, третий — знак импликации или логического следования и четвертый — знак отрицания.

3. Третью категорию составляет пара символов ( ), называемая скобками.

Других символов исчисление высказываний не имеет. *Формулы исчисления высказываний* представляют собой последовательности символов алфавита исчисления высказываний. Для обозначения формул будем пользоваться большими буквами латинского алфавита. Эти буквы не являются символами исчисления. Они представляют собой только условные обозначения формул.

1. Определение формулы исчисления высказываний.

1. Всякая переменная x, y, z, $\ldots$ является формулой.
2. Если A и B — формулы, то слова $(A \vee B)$, $(A \& B)$, $(A \to B)$, $\overline{A}$ — также формулы.
3. Никакая другая строчка символов не является формулой.

Переменные высказывания будем называть элементарными формулами.

Приведем примеры формул исчисления высказываний.

Переменные высказывания x, y, z являются формулами согласно п. 1 определения формулы. Но тогда слова $(x \& y)$, $(x \vee z)$, $(y \to z)$, $\overline{x}$ являются формулами согласно п. 2 определения. По этой же причине будут формулами слова: $\overline{(x \& y)}$, $((x \vee z) \& (y \to z))$, $((x \& y) \to (y \to z))$.

Очевидно, не являются формулами слова: $x\overline{y}$, $\& x$, $(x \& y$, $x \vee y$ (в третьем из этих слов содержится незакрытая скобка, а в четвертом — нет скобок).

Одновременно с понятием формулы вводится понятие *подформулы* или части формулы.

1. Подформулой элементарной формулы является только она сама.
2. Если формула имеет вид $\overline{A}$, то ее подформулами являются: она сама, формула A и все подформулы формулы A.
3. Если формула имеет вид $(A * B)$ (здесь и в дальнейшем под символом $*$ будем понимать любой из трех символов $\vee$, $\&$, $\to$), то ее подформулами являются: она сама, формулы A и B и все подформулы формул A и B.

Например, для формулы $\Big((x \& \overline{y}) \to \overline{((\overline{z} \vee y)}\Big)$ ее подформулами будут:

$\Big((x\&\overline{y}) \to \overline{(\overline{z} \vee y)}\Big)$ — подформула нулевой глубины,

$(x\&\overline{y})$, $\overline{(\overline{z} \vee y)}$ — подформулы первой глубины,

x, $\overline{y}$, $(\overline{z} \vee y)$ — подформулы второй глубины,

y, $\overline{z}$ — подформулы третьей глубины,

z — подформула четвертой глубины.

Очевидно, что на самой большой глубине находятся лишь элементарные формулы. Однако элементарные формулы могут быть и на других глубинах.

Введем в запись формул некоторые упрощения. Будем опускать в записи формул скобки по тем же правилам, что и в алгебре высказываний.

В связи с этими правилами формулы $((A\&B) \vee C)$, $\big(\overline{A \vee B}\big)$, $((A \vee B) \to (C\&D))$ будем писать $A\&B \vee C$, $\overline{A \vee B}$, $A \vee B \to$ $\to C\&D$ соответственно.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОКАЗУЕМОЙ ФОРМУЛЫ

Следующим этапом в построении исчисления высказываний является выделение класса доказуемых формул.

Определение доказуемых формул имеет тот же характер, что и определение формулы.

Сначала определяются исходные доказуемые формулы (аксиомы), а затем определяются правила вывода, которые позволяют из имеющихся доказуемых формул получить новые доказуемые формулы.

Образование доказуемой формулы из исходных доказуемых формул путем применения правил вывода, называется выводом данной формулы из аксиом.

1. Система аксиом исчисления высказываний.

Система аксиом исчисления высказываний состоит их 11 аксиом, которые делятся на четыре группы.

Первая группа аксиом:

I_1 $x \to (y \to x)$.

I_2 $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Вторая группа аксиом:

II_1 $x\&y \to x$.

II_2 $x\&y \to y$.

II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x\&y))$.

Третья группа аксиом:

III_1 $x \to x \vee y$.
III_2 $y \to x \vee y$.
III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Четвертая группа аксиом:

IV_1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.
IV_2 $x \to \overline{\overline{x}}$.
IV_3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

2. Правила вывода.

1. Правило подстановки. Если формула A доказуема в исчислении высказываний, x — переменная, B — произвольная формула исчисления высказываний, то формула, полученная в результате замены в формуле A переменной x всюду, где она входит, формулой B, является также доказуемой формулой.

Операция замены в формуле A переменной x формулой B носит название подстановки и символически записывается так:

$$\int_x^B (A)\,.$$

Уточним сформулированное правило.

а) Если формула A есть переменная x, то подстановка $\int_x^B (A)$ дает B.

б) Если формула A есть переменная y, отличная от x, то подстановка $\int_x^B (A)$ дает A.

в) Если A — формула, для которой подстановка уже определена, то подстановка B вместо x в отрицание A есть отрицание подстановки, то есть подстановка $\int_x^B (\overline{A})$ дает $\overline{\int_x^B (A)}$.

г) Если A_1 и A_2 — формулы, для которых подстановки уже определены, то подстановка $\int_x^B (A_1 * A_2)$ дает $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$.

Если A — доказуемая формула, то будем писать $\vdash A$. Тогда правило подстановки можно записать схематически следующим образом:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int\limits_x^B (A)}.$$

И читается эта запись так: «Если формула A доказуема, то доказуема формула $\int\limits_x^B (A)$ ».

2. Правило заключения. Если формулы A и $A \to B$ доказуемы в исчислении высказываний, то формула B также доказуема.

Схематическая запись этого правила имеет вид:

$$\frac{\vdash A; \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

3. Определение доказуемой формулы.

а) Всякая аксиома является доказуемой формулой.

б) Формула, полученная из доказуемой формулы путем применения подстановки вместо переменной x произвольной формулы B, есть доказуемая формула.

в) Формула B, полученная из доказуемых формул A и $A \to B$ путем применения правила заключения, есть доказуемая формула.

г) Никакая другая формула исчисления высказываний не считается доказуемой.

Процесс получения доказуемых формул будем называть доказательством.

Приведем примеры доказательств.

1. Доказать, что $\vdash A \to A$ (рефлексивность импликации).

Воспользуемся аксиомой I_2:

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$$

и выполним подстановку $\int\limits_z^x (\mathrm{I}_2)$. Тогда получим

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)). \qquad (1)$$

Применяя правило заключения к аксиоме I_1 и формуле (1), получим

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x)\,. \tag{2}$$

В формуле (2) осуществим подстановку

$$\int_{y}^{\overline{\overline{x}}} (2)\,.$$

В результате получим доказуемую формулу

$$\vdash \left(x \to \overline{\overline{x}}\right) \to (x \to x)\,. \tag{3}$$

Применим правило заключения к аксиоме IV_2 и формуле (3). Это приводит к доказуемой формуле

$$\vdash x \to x. \tag{4}$$

Наконец, осуществив подстановку в формуле (4) вместо x формулы A, получим

$$\vdash A \to A.$$

2. Доказать, что $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y}$.

Возьмем аксиому II_3 и выполним в ней последовательно две подстановки, заменяя сначала x на $\overline{x}$, а затем y на $\overline{y}$. В результате получим доказуемую формулу

$$\vdash (z \to \overline{x}) \to ((z \to \overline{y}) \to (z \to \overline{x}\&\overline{y}))\,. \tag{1}$$

В формуле (1) выполним подстановку $\int\limits_{z}^{\overline{x \vee y}} (1)$, получим

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to y) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y}))\,. \tag{2}$$

Докажем, что формулы

$$\overline{x \vee y} \to \overline{x} \tag{3}$$

и

$$\overline{x \vee y} \to \overline{y} \tag{4}$$

доказуемы.

Возьмем аксиому IV_1 и выполним подстановку $\int_y^{x \vee y} (\mathrm{IV}_1)$, получим

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x}). \qquad (5)$$

Применяя к формуле (5) и аксиоме III_1 правило заключения получаем доказуемость формулы (3). Аналогично устанавливается доказуемость формулы (4).

Применим правило заключения к формулам (3) и (2), получим доказуемую формулу

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \& \overline{y}). \qquad (6)$$

Применяя правило заключения к формулам (4) и (6), получаем доказуемость исходной формулы.

3. Доказать, что $\vdash A \to R$, где A — произвольная формула исчисления высказываний, а R — любая доказуемая формула.

Возьмем аксиому I_1:

$$\vdash x \to (y \to x)$$

и выполним в ней подстановку $\int_{x,y}^{R,A} (\mathrm{I}_1)$. Получим

$$\vdash R \to (A \to R). \qquad (1)$$

По условию

$$\vdash R. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) по правилу заключения $\vdash A \to R$.

§ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА

Производные правила вывода, как и рассмотренные правила подстановки и заключения, позволяют получать новые доказуемые формулы. Они получаются с помощью правил подстановки и заключения, а поэтому являются производными от них.

1. Правило одновременной подстановки.

Пусть A — доказуемая формула; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — любые формулы исчисления высказываний. Тогда результат одновременной подстановки в A вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$ является доказуемой формулой.

Для доказательства этого правила выберем переменные $z_1, z_2, \ldots, z_n$ попарно различные и отличные от всех переменных, входящих в формулы $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$. Теперь последовательно сделаем в формуле A_n подстановок, заменяя сначала x_1 на z_1, затем x_2 на z_2 и так далее и, наконец, x_n на z_n. Эти подстановки дают доказуемые формулы:

$$\vdash \int\limits_{x_1}^{z_1} (A) \quad \text{дает} \quad \vdash A_1, \vdash \int\limits_{x_2}^{z_2} (A_1) \quad \text{дает} \quad \vdash A_2, \ldots,$$

$$\vdash \int\limits_{x_n}^{z_n} (A_{n-1}) \quad \text{дает} \quad \vdash A_n.$$

Далее проведем последовательно еще n подстановок в формулу A_n, заменяя сначала z_1 на B_1, затем z_2 на B_2 и так далее и, наконец, z_n на B_n. Эти подстановки дают доказуемые формулы:

$$\vdash \int\limits_{z_1}^{B_1} (A_n) \text{ дает } \vdash C_1, \vdash \int\limits_{z_2}^{B_2} (C_1) \text{ дает } \vdash C_2, \ldots, \vdash \int\limits_{z_n}^{B_n} (C_{n-1}) \text{ дает } \vdash C_n.$$

Ясно, что доказуемая формула C_n получается в результате одновременной подстановки в формулу A вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Схематично операция одновременной подстановки записывается в виде:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{B_1, B_2, \ldots, B_n} (A)}.$$

2. Правило сложного заключения.

Второе производное правило применяется к формулам вида

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots (A_n \to L) \ldots)))$$

и формулируется так.

Если формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и

$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots (A_n \to L) \ldots)))$ доказуемы, то и формула L доказуема.

Это утверждение легко доказывается последовательным применением правила заключения.

Действительно, если формулы

$$A_1 \quad \text{и} \quad A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)))$$

доказуемы, то по правилу заключения доказуема формула

$$A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)).$$

Но так как формулы A_2 и $A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots))$ доказуемы, то доказуема формула $A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)$.

Продолжая эти рассуждения, мы докажем, наконец, что формула L доказуема.

Правило сложного заключения схематично записывается так:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \ldots, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)))}{\vdash L}.$$

3. Правило силлогизма.

Если доказуемы формулы $A \to B$ и $B \to C$, то доказуема формула $A \to C$, то есть

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}.$$

Для доказательства этого правила сделаем следующие одновременные подстановки:

$$\int_{x,y,z}^{A,B,C} (\mathrm{I}_2) \quad \text{и} \quad \int_{x,y}^{B\to C,A} (\mathrm{I}_1).$$

Получим доказуемые формулы:

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \tag{1}$$

$$\vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C)). \tag{2}$$

Кроме того, по условию доказуемы формулы:

$$\vdash A \to B, \tag{3}$$

$$\vdash B \to C. \tag{4}$$

Из формул (4) и (2) по правилу заключения получаем

$$\vdash A \to (B \to C). \tag{5}$$

Но тогда из формул (5), (3) и (1) по правилу сложного заключения имеем $\vdash A \to C$.

4. Правило контрпозиции.

Если доказуема формула $A \to B$, то доказуема формула $\overline{B} \to \overline{A}$, то есть

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}.$$

Для доказательства этого правила сделаем одновременную подстановку:

$$\int_{x,y}^{A,B} (\mathrm{IV}_1)\,,$$

получим доказуемую формулу

$$\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{1}$$

Но по условию доказуема формула

$$\vdash A \to B. \tag{2}$$

Из формул (2) и (1) по правилу заключения имеем $\vdash \overline{B} \to$ $\to \overline{A}$.

5. Правило снятия двойного отрицания.

а) Если доказуема формула $A \to \overline{\overline{B}}$, то доказуема формула $A \to B$.

б) Если доказуема формула $\overline{\overline{A}} \to B$, то доказуема формула $A \to B$.

То есть

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad \text{и} \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}.$$

Для доказательства этого правила выполним подстановки

$$\int_{x}^{A} (\mathrm{IV}_2) \quad \text{и} \quad \int_{x}^{B} (\mathrm{IV}_3)\,,$$

получим доказуемые формулы

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \tag{1}$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B. \tag{2}$$

Но по условию а) доказуема формула

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}, \tag{3}$$

а по условию б) доказуема формула

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено условие а), то из формул (3) и (2) по правилу силлогизма получаем $\vdash A \to B$.

Если же выполнено условие б), то из формул (1) и (4) получаем $\vdash A \to B$.

§ 4. ПОНЯТИЕ ВЫВОДИМОСТИ ФОРМУЛЫ ИЗ СОВОКУПНОСТИ ФОРМУЛ

Будем рассматривать конечную совокупность формул $H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

1. Определение формулы, выводимой из совокупности H.

1) Всякая формула $A_i \in H$ является формулой, выводимой из H.

2) Всякая доказуемая формула выводима из H.

3) Если формулы C и $C \to B$ выводимы из совокупности H, то формула B также выводима из H.

Если некоторая формула B выводима из совокупности H, то записывают $H \vdash B$.

Нетрудно видеть, что класс формул, выводимых из совокупности H, совпадает с классом доказуемых формул в случае, когда совокупность H содержит только доказуемые формулы, и в случае, когда H пуста.

Если же совокупность формул H содержит хотя бы одну не доказуемую формулу, то класс формул, выводимых из H, шире класса доказуемых формул.

Пример. Доказать, что из совокупности формул $H = \{A, B\}$ выводима формула $A \& B$.

Доказательство. Так как $A \in H$ и $B \in H$, то по определению выводимой формулы

$$H \vdash A, \tag{1}$$

$$H \vdash B. \tag{2}$$

Возьмем аксиомы II_3 и I_1 и выполним подстановки $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(II_3)$ и $\int_{x,y}^{B,A}(I_1)$. В результате получим доказуемые формулы, которые выводимы из H по определению выводимой формулы, то есть

$$H \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B)), \tag{3}$$

$$H \vdash B \to (A \to B). \tag{4}$$

Так как формула $A \to A$ доказуема, то

$$H \vdash A \to A. \tag{5}$$

Из формул (5) и (3) по правилу заключения получаем:

$$H \vdash (A \to B) \to (A \to A\&B). \tag{6}$$

Из формул (2) и (4) по правилу заключения получаем:

$$H \vdash A \to B. \tag{7}$$

Из формул (7) и (6) по правилу заключения получаем:

$$H \vdash A \to A\&B. \tag{8}$$

И, наконец, из формул (1) и (8) получаем:

$$H \vdash A\&B. \tag{9}$$

Ясно, что при доказательстве выводимости формулы из совокупности формул можно пользоваться не только основным правилом заключения, но и правилом сложного заключения. Тогда, пользуясь этим правилом, предложение (9) можно получить из предложений (5), (7), (1) и (3).

§ 5. ПОНЯТИЕ ВЫВОДА

Определение. *Выводом* из конечной совокупности формул H называется всякая конечная последовательность формул B_1, B_2, …, B_k, всякий член которой удовлетворяет одному из следующих трех условий:

1) он является одной из формул совокупности H,

2) он является доказуемой формулой,

3) он получается по правилу заключения из двух любых предшествующих членов последовательности B_1, B_2, ..., B_k.

Как было показано в предыдущем примере, выводом из совокупности формул $H = \{A, B\}$ является конечная последовательность формул:

$$A, B, (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B)), B \to (A \to B),$$
$$A \to A, (A \to B) \to (A \to A\&B), A \to B, A \to A\&B, A\&B.$$

Если же здесь воспользоваться правилом сложного заключения, то вывод можно записать так:

$$A, B, (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B)), B \to (A \to B),$$
$$A \to A, A \to B, A\&B.$$

Из определений выводимой формулы и вывода из совокупности формул следуют очевидные *свойства вывода*:

1) Всякий начальный отрезок вывода из совокупности H есть вывод из H.

В самом деле, все формулы начального отрезка вывода удовлетворяют определению вывода.

2) Если между двумя соседними членами вывода из H (или в начале, или в конце его) вставить некоторый вывод из H, то полученная новая последовательность формул будет выводом из H.

Действительно, если совокупности формул B_1, $B_2, \ldots, B_i, B_{i+1}, \ldots, B_k$ и $C_1, C_2, \ldots, C_m$ являются выводами из H, то совокупность B_1, B_2, ..., B_i, C_1, C_2, ..., C_m, B_{i+1}, ..., B_k, по определению вывода, является выводом из H.

3) Всякий член вывода из совокупности H является формулой, выводимой из H.

Всякий вывод из H является выводом его последней формулы.

4) Если $H \subset W$, то всякий вывод из H является выводом из W.

5) Для того, чтобы формула B была выводима из совокупности H, необходимо и достаточно, чтобы существовал вывод этой формулы из H.

§ 6. ПРАВИЛА ВЫВОДИМОСТИ

Пусть H и W — две совокупности формул исчисления высказываний. Будем обозначать через H, W их объединение, то есть $H, W = H \cup W$.

В частности, если совокупность W состоит из одной формулы C, то будем записывать объединение $H \cup \{C\}$ в виде H, C.

Рассмотрим основные *правила выводимости.*

I. $\dfrac{H \vdash A}{H, W \vdash A}$.

Это правило следует непосредственно из определения вывода из совокупности формул.

II. $\dfrac{H, C \vdash A; H \vdash C}{H \vdash A}$.

Доказательство. Так как по условию из совокупности формул H, C выводима формула A, то существует вывод из H, C, последней формулой которого является A:

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, A. \tag{1}$$

Так как по условию из совокупности формул H выводима формула C, то существует вывод из H, последней формулой которого является C:

$$C_1, C_2, \dots, C_m, C. \tag{2}$$

Если в выводе (1) отсутствует формула C, то он является выводом только из совокупности H, и, значит, из H выводима A.

Если в выводе (1) одна из формул есть формула C (например, формула B_i), то вставим между формулами B_{i-1} и B_{i+1} вывод из H (2). В результате получим вывод только из H:

$$B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, C_1, C_2, \dots, C_m, C, B_{i+1}, \dots, B_{k-1}, A.$$

И, следовательно, формула A выводима из H.

III. $\dfrac{H, C \vdash A; W \vdash C}{H, W \vdash A}$.

Доказательство. Так как $H, C \vdash A$, то по правилу I H, W, $C \vdash A$.

Так как $W \vdash C$, то также по правилу I $H, W \vdash C$.

Используя теперь правило II, получаем $H, W \vdash A$.

IV. $\dfrac{H \vdash C \to A}{H, C \vdash A}$.

Доказательство. Так как из H выводима формула $C \to A$, то существует вывод из H, на конце которого стоит формула $C \to A$:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, C \to A. \tag{1}$$

Присоединим теперь к совокупности формул H формулу C. Получим совокупность формул H, C. При этом, добавляя к выводу (1) формулу C, мы получим вывод:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, C \to A, C, \tag{2}$$

который является выводом из H, C.

Но в конце вывода (2) можно записать формулу A, которая получается из формул $C \to A$ и C по правилу заключения.

Следовательно, имеем вывод из совокупности H, C:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, C \to A, C, A,$$

последней формулой которого является формула A, то есть $H, C \vdash A$.

V. **Теорема дедукции:** $\dfrac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$.

Доказательство. Предварительно докажем, что для любого вывода B_1, B_2, $\ldots$, B_k из совокупности H, C справедливо утверждение: $H \vdash C \to B_k$. Доказательство проведем методом математической индукции.

1. При $k = 1$ утверждение справедливо. Действительно если B_1 есть вывод из H, C, то возможны три случая:

а) $B_1 \in H$,

б) B_1 — доказуемая формула,

в) B_1 есть C.

В случаях а) и б) можно записать вывод из H: B_1, $B_1 \to$ $\to (C \to B_1)$, $C \to B_1$ и, следовательно, $H \vdash C \to B_1$.

В случае в) фактически нужно доказать, что $H \vdash C \to C$. Но формула $C \to C$ доказуема и поэтому выводима из любой совокупности.

2. Предположим теперь, что утверждение справедливо для любого вывода длины $i < k$, и докажем, что оно справедливо для вывода длины k.

Пусть B_1, B_2, $\ldots$, B_k — вывод из H, C. Ясно, что здесь $k > 1$, и поэтому относительно формулы B_k возможны четыре случая:

а) $B_k \in H$,

б) B_k — доказуемая формула,

в) B_k есть C,

г) B_k получается по правилу заключения из двух формул, предшествующих ей в выводе.

Для первых трех случаев доказательство утверждения $H \vdash C \to B_k$ полностью совпадает с доказательством, проведенным при $k = 1$.

Рассмотрим четвертый случай. Так как здесь формула B_k получается из двух формул B_i и B_j при $i < k$ и $j < k$, то формула B_j должна иметь вид $B_i \to B_k$, причем справедливы утверждения:

$$H \vdash C \to B_i, \tag{1}$$

$$H \vdash C \to (B_i \to B_k)\,. \tag{2}$$

Воспользуемся аксиомой I_2, выполнив в ней подстановку

$$\int_{x,y,z}^{C,B_i,B_k} (\mathrm{I}_2)\,.$$

Получим доказуемую формулу

$$\vdash (C \to (B_i \to B_k)) \to ((C \to B_i) \to (C \to B_k))\,. \tag{3}$$

Формулы (1), (2) и (3) выводимы из H. Применяя к ним правило сложного заключения, получим $H \vdash C \to B_k$.

Вернемся теперь к общему случаю. Пусть $H, C \vdash A$. Тогда существует вывод B_1, B_2, $\ldots$, B_{k-1}, A из H, C. При этом по доказанному справедливо утверждение $H \vdash C \to A$.

Важным следствием из теоремы дедукции является

Обобщенная теорема дедукции:

$$\frac{\{C_1, C_2, \ldots, C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots))}.$$

Доказательство. Обозначим через H_k совокупность формул

$$H_k = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}.$$

По условию $H_k \vdash A$ или $H_{k-1}, C_k \vdash A$. Но тогда по теореме дедукции справедливо утверждение $H_{k-1} \vdash C_k \to A$.

Так как $H_{k-1} = H_{k-2}, C_{k-1}$, то справедливо утверждение:

$$H_{k-2}, C_{k-1} \vdash C_k \to A.$$

Используя и здесь теорему дедукции, получим:

$$H_{k-2} \vdash C_{k-1} \to (C_k \to A)\,.$$

Проделав эту процедуру k раз, мы придем к утверждению:

$$H_0 = \varnothing \vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots))\,.$$

Но из пустого множества выводимы только доказуемые формулы, то есть

$$\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots))\,.$$

В частном случае при $k = 1$, очевидно, имеем:

$$\frac{C \vdash A}{\vdash C \to A}.$$

VI. **Правило введения конъюнкции:** $\dfrac{H \vdash A, H \vdash B}{H \vdash A \& B}$.

Доказательство. По условию

$$H \vdash A, \tag{1}$$
$$H \vdash B. \tag{2}$$

Как было доказано ранее, из совокупности формул $\{A, B\}$ выводима конъюнкция $A\&B$, то есть

$$\{A, B\} \vdash A\&B. \tag{3}$$

Используя правило I выводимости, можно записать:

$$H, A, B \vdash A\&B, \tag{4}$$
$$H, A \vdash B. \tag{5}$$

Теперь, используя правило II выводимости, из (4) и (5) получаем

$$H, A \vdash A\&B. \tag{6}$$

Также по правилу II из (1) и (6) получаем $H \vdash A\&B$.

VII. **Правило введения дизъюнкции:** $\dfrac{H, A \vdash C; H, B \vdash C}{H, A \vee B \vdash C}$.

Доказательство. Из условия $H, A \vdash C; H, B \vdash C$ по теореме дедукции имеем:

$$H \vdash A \to C, \tag{1}$$
$$H \vdash B \to C. \tag{2}$$

Возьмем аксиому III_3. Она выводима из совокупности H как доказуемая формула, то есть

$$H \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)). \tag{3}$$

Применяя к формулам (1), (2) и (3) правило сложного заключения, получим

$$H \vdash A \vee B \to C. \tag{4}$$

Используя теперь правило IV выводимости, получим H, $A \vee B \vdash C$.

§ 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОВ ЛОГИКИ

Правила выводимости, и особенно теорема дедукции, позволяют доказать ряд законов логики.

I. **Закон перестановки посылок:**

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) \,. \tag{1}$$

Доказательство. Так как из совокупности формул $H = \{x \to (y \to z)\,, y, x\}$ следует вывод $x \to (y \to z)$, y, x, $y \to z$, z, то из совокупности H выводима формула z. Тогда по обобщенной теореме дедукции доказуема формула (1).

Из закона перестановки посылок вытекает *правило перестановки посылок* в доказуемых формулах:

$$\frac{\vdash (x \to (y \to z))}{\vdash (y \to (x \to z))}.$$

Действительно, если

$$\vdash x \to (y \to z)\,, \tag{2}$$

то из формул (1) и (2) по правилу заключения следует $\vdash y \to (x \to z)$.

II. **Закон соединения посылок:**

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to (x\&y \to z)\,. \tag{3}$$

Доказательство. Так как из совокупности формул $H = \{x \to (y \to z)\,, x\&y\}$ следует вывод: $x \to (y \to z)$, $x\&y$, $x\&y \to x$, $x\&y \to y$, x, y, $y \to z$, z, то из совокупности H выводима формула z. Тогда по обобщенной теореме дедукции доказуема формула (3).

Из закона соединения посылок вытекает *правило соединения посылок* в доказуемых формулах:

$$\frac{\vdash (x \to (y \to z))}{\vdash x\&y \to z}.$$

Действительно, если

$$\vdash x \to (y \to z)\,, \tag{4}$$

то из формул (3) и (4) по правилу заключения следует $\vdash x\&y \to z$.

III. **Закон разъединения посылок:**

$$\vdash (x\&y \to z) \to (x \to (y \to z)) \,. \tag{5}$$

Доказательство. Так как из совокупности формул $H = \{x, y, x\&y \to z\}$ следует вывод: x, y, $x\&y \to z$, $x\&y$, z, то из совокупности формул H выводима формула z. Тогда по обобщенной теореме дедукции доказуема формула (5).

Из закона разъединения посылок вытекает *правило разъединения посылок* в доказуемых формулах:

$$\frac{\vdash x\&y \to z}{\vdash x \to (y \to z)}.$$

Действительно, если

$$\vdash x\&y \to z, \tag{6}$$

то из формул (5) и (6) по правилу заключения следует $\vdash x \to (y \to z)$.

IV.
$$\vdash x \to (\overline{x} \to y) \,. \tag{7}$$

Доказательство. Сделаем подстановки в аксиомы I_1 и IV_1:

$$\int_{y}^{\overline{y}} (\mathrm{I}_1) \quad \text{и} \quad \int_{x,y}^{\overline{y},x} (\mathrm{IV}_1) \,.$$

В результате получим доказуемые формулы:

$$\vdash x \to (\overline{y} \to x) \,, \tag{8}$$

$$\vdash (\overline{y} \to x) \to \left(\overline{x} \to \overline{\overline{y}}\right) . \tag{9}$$

Из формул (8) и (9) по правилу силлогизма следует

$$\vdash x \to \left(\overline{x} \to \overline{\overline{y}}\right) .$$

Используя закон соединения посылок, получим

$$\vdash x\&\overline{x} \to \overline{\overline{y}}.$$

Используя правило снятия двойного отрицания, получим

$$\vdash x\&\overline{x} \to y.$$

И, наконец, применяя закон разъединения посылок, получим формулу (7).

Используя формулу (7), легко доказать, что $\vdash F \to B$, где через F обозначено $\overline{R}$ (R — любая доказуемая формула исчисления высказываний), а B — произвольная формула исчисления высказываний.

Действительно, выполним подстановку $\int\limits_{x,y}^{R,B} \big((7)\big)$. Получим $\vdash R \to (\overline{R} \to B)$. А так как по условию $\vdash R$, то остается применить правило заключения.

V. **Закон исключенного третьего:** $\vdash x \vee \overline{x}$.

Доказательство. Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y} \tag{10}$$

и, сделав в ней подстановку $\int\limits_{y}^{\overline{x}}(10)$, получим

$$\vdash \overline{x \vee \overline{x}} \to \overline{x}\&\overline{\overline{x}}. \tag{11}$$

Также сделаем подстановку в формуле (7), заменяя x на $\overline{x}$, а y на $\overline{y}$:

$$\vdash \overline{x} \to \left(\overline{\overline{x}} \to \overline{y}\right). \tag{12}$$

Используя закон соединения посылок, будем иметь:

$$\vdash \overline{x}\&\overline{\overline{x}} \to \overline{y}. \tag{13}$$

Из формул (11) и (13) по правилу силлогизма получаем

$$\vdash \overline{x \vee \overline{x}} \to \overline{y}. \tag{14}$$

Из формулы (14) по правилу контрпозиции следует

$$\vdash \overline{\overline{y}} \to \overline{\overline{x \vee \overline{x}}}.$$

Используя оба правила снятия двойного отрицания, получаем

$$\vdash y \to x \vee \overline{x}. \tag{15}$$

Пусть теперь y — любая доказуемая формула R, тогда из формул $\vdash R$, $\vdash R \to x \vee \overline{x}$ по правилу заключения получаем

$$\vdash x \vee \overline{x}.$$

VI. $\vdash \overline{x}\&\overline{y} \to \overline{x \vee y}$.

Доказательство. Сделаем подстановку в аксиоме III_3, заменяя в ней z на $\overline{\overline{x}\&\overline{y}}$:

$$\vdash \left(x \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}\right) \to \left(\left(y \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}\right) \to \left(x \vee y \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}\right)\right). \tag{16}$$

Из аксиом II_1 и II_2 имеем:

$$\vdash \overline{x}\&\overline{y} \to \overline{x}, \tag{17}$$

$$\vdash \overline{x}\&\overline{y} \to \overline{y}. \tag{18}$$

Применяя к формулам (17) и (18) правило контрпозиции, получим:

$$\vdash \overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}, \tag{19}$$

$$\vdash \overline{\overline{y}} \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}. \tag{20}$$

Используя правило снятия двойного отрицания, будем иметь:

$$\vdash x \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}, \tag{21}$$

$$\vdash y \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}. \tag{22}$$

Применяя к формулам (16), (21) и (22) правило сложного заключения, получаем

$$\vdash x \vee y \to \overline{\overline{x}\&\overline{y}}. \tag{23}$$

Применяя к формуле (23) правило контрпозиции, а затем правило снятия двойного отрицания, получаем $\vdash \overline{x}\&\overline{y} \to \overline{x \vee y}$.

§ 8. СВЯЗЬ МЕЖДУ АЛГЕБРОЙ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ИСЧИСЛЕНИЕМ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Формулы исчисления высказываний можно интерпретировать как формулы алгебры высказываний. Для этого будем трактовать переменные исчисления высказываний как переменные алгебры высказываний, то есть переменные в содержательном смысле, принимающие два значения: истина и ложь (1 и 0).

Операции &, $\vee$, $\to$, и $-$ определим так же, как в алгебре высказываний. При этом всякая формула исчисления высказываний при любых входящих в нее переменных будет принимать одно из значений 1 или 0, вычисляемое по правилам алгебры высказываний.

Введем понятие значения формулы исчисления высказываний.

Пусть A — формула исчисления высказываний; x_1, x_2, $\ldots$, x_n — попарно различные переменные, среди которых находятся все переменные, входящие в формулу A. Обозначим через α_1, α_2, $\ldots$, α_n набор значений этих переменных, состоящий из 1 и 0, длины n. Очевидно, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ имеет 2^n значений.

Определим значение формулы A на одном таком наборе значений переменных, обозначая его через $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A)$:

1. Если для формулы A ее подформула самой большой глубины есть x_i, то $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x_i) = \alpha_i$.

2. Если определены значения всех подформул глубины $k+1$, то подформулы глубины k, полученные в результате операций $A_i \& A_j$, $A_i \vee A_j$, $A_i \to A_j$, $\overline{A}_i$, будут иметь значения:

$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \& A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \& R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$
$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \vee A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \vee R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$
$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \to A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \to R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$
$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\left(\overline{A}_i\right) = \overline{R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i)}.$$

Например, формула $x_1 \vee \overline{x}_4 \to \overline{x_2 \& \overline{x}_3}$ на наборе значений $(0,1,1,0)$ переменных x_1, x_2, x_3, x_4, имеет значение $R_{0110}\left(x_1 \vee \overline{x}_4 \to \overline{x_2 \& \overline{x}_3}\right) = 1$.

Действительно, эта формула имеет:

$x_1 \vee \overline{x}_4$, $\overline{x_2 \& \overline{x}_3}$ — подформулы первой глубины,

x_1, $\overline{x}_4$, $x_2 \& \overline{x}_3$ — подформулы второй глубины,

x_4, x_2, $\overline{x}_3$ — подформулы третьей глубины,

x_3 — подформула четвертой глубины.

Отсюда $R_{0110}(x_3) = 1$, $R_{0110}(\overline{x}_3) = \overline{R_{0110}(x_3)} = 0$, $R_{0110}(x_2) = 1$, $R_{0110}(x_4) = 0$, $R_{0110}(x_2 \& \overline{x}_3) = R_{0110}(x_2) \& R_{0110}(\overline{x}_3) = 0$,

$R_{0110}(\overline{x}_4) = \overline{R_{0110}(x_4)} = 1$, $R_{0110}(x_1) = 0$,

$$R_{0110}\left(x_1 \vee \overline{x}_4\right) = R_{0110}\left(x_1\right) \vee R_{0110}\left(\overline{x}_4\right) = 1,$$
$$R_{0110}\left(\overline{x_2 \& \overline{x}_3}\right) = \overline{R_{0110}\left(x_2 \& \overline{x}_3\right)} = 1,$$
$$R_{0110}\left(x_1 \vee \overline{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \& \overline{x}_3}\right) = R_{0110}\left(x_1 \vee \overline{x}_4\right) \rightarrow R_{0110}\left(\overline{x_2 \& \overline{x}_3}\right) = 1,$$

Докажем три теоремы, которые устанавливают связь между основными фактами алгебры высказываний и исчисления высказываний.

Теорема 1. *Каждая формула, доказуемая в исчислении высказываний, является тождественно истинной в алгебре высказываний.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы, очевидно, следует доказать три положения:

1) Каждая аксиома исчисления высказываний — тождественно истинная формула в алгебре высказываний.

2) Правило подстановки, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам.

3) Правило заключения, примененное к тождественно истинным формулам, приводит к тождественно истинным формулам.

1) Тождественная истинность аксиом исчисления высказываний может быть проверена перебором всех возможных значений входящих в них переменных, то есть с помощью таблиц истинности, которые имеют вид:

а) для аксиом, содержащих одну переменную

x	IV_2	IV_3
1	1	1
0	1	1

б) для аксиом, содержащих две переменные

x	y	I_1	II_1	II_2	III_1	III_2	IV_1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

в) для аксиом, содержащих три переменные

x	y	z	I_2	II_3	III_3
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

2) **Лемма.** *Пусть x_1, x_2, ..., x_n, x — перечень переменных, который содержит все переменные, входящие в формулы A и B, и пусть α_1, α_2, ..., α_n, α — произвольный фиксированный набор из 0 и 1. Тогда, если $R_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n,\alpha}B = \beta$, то*

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A).$$

Доказательство леммы приведем по индукции, учитывающей построение формулы.

а) Пусть A есть переменная x_i, отличная от x. Тогда

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(x_i) = \alpha_i, \quad \int_x^B (x_i) = x_i,$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = \alpha_i, \quad R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A) = \alpha_i,$$

то есть утверждение леммы справедливо.

б) Пусть A есть переменная x. Тогда подстановка

$$\int_x^B (A) \quad \text{дает} \quad B, R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B (A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(B) = \beta,$$

то есть утверждение леммы справедливо.

в) Пусть теперь формула A имеет вид: $A_1 * A_2$, и для формул A_1 и A_2 утверждение леммы справедливо. Ее справедливость для формулы A следует из цепочки равенств:

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B (A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B (A_1 * A_2)\right) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B (A_1) * \int\limits_x^B (A_2)\right) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\int\limits_x^B (A_1) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\int\limits_x^B (A_2) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_1) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_2) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_1 * A_2) =$$
$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A).$$

Аналогично проводится доказательство леммы в случае, когда формула A имеет вид $\overline{A_1}$.

Докажем теперь второе положение теоремы.

Пусть A — данная формула, x — переменная, а B — любая формула исчисления высказываний. Если A — тождественно истинная формула, то и $\int\limits_x^B (A)$ — тождественно истинная формула.

Доказательство. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_n, x — полный перечень переменных, входящих в формулы A и B. Нужно показать, что на всех наборах значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha)$ формула $\int\limits_x^B (A)$ принимает значение 1. Предположим, что $\int\limits_x^B (A)$ — не тождественная истина. Тогда существует набор значений переменных $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0, \alpha^0\right)$ такой, что $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0\alpha^0}\left(\int\limits_x^B (A)\right) = 0$. Но тогда согласно лемме $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0\beta}(A) = 0$, а это противоречит тому, что A — тождественно истинная формула.

3) *Если формулы C и $C \to A$ — тождественно истинные, то и формула A — тождественно истинная.*

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — полный набор переменных, входящих в формулы C и A. Предположим, что A — не тождественно истинная формула. Тогда существует набор значений переменных $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0\right)$ такой, что $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0}(A) = 0$. Но при этом $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0}(C \to A) = R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0}(C) \to R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0}(A) = 1 \to 0 = 0$, что противоречит тождественной истинности формулы $C \to A$.

Теорема 2 (о выводимости). *Пусть A — некоторая формула исчисления высказываний; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор переменных, содержащий все переменные, входящие в формулу A; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольный фиксированный набор значений этих переменных. Обозначим через H конечную совокупность формул $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$, где* $x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad \alpha_i = 1, \\ \overline{x}_i, & \text{если} \quad \alpha_i = 0. \end{cases}$

1. Если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 1$, то $H \vdash A$.

2. Если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 0$, то $H \vdash \overline{A}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по индукции (индукция по построению формулы).

1. Пусть формула A есть переменная x_i.

а) Если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 1$, то, очевидно, $x_i \vdash x_i$ или, что то же, $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i$, то есть $x_i^{\alpha_i} \vdash A$, и тем более, $H \vdash A$.

б) Если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 0$, то, очевидно, $\overline{x}_i \vdash \overline{x}_i$ или, что то же, $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{x}_i$, то есть $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{A}$, и тем более, $H \vdash \overline{A}$.

2. Предположим теперь, что формула A имеет один из следующих четырех видов:

I. $B_1 \& B_2$,

II. $B_1 \vee B_2$,

III. $B_1 \to B_2$,

IV. $\overline{B}_1$

и для формул B_1 и B_2 теорема справедлива. Рассмотрим каждый из четырех случаев.

I. Пусть A имеет вид $B_1 \& B_2$.

а) Если $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1 \& B_2) = 1$, то $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1) = 1$ и $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_2) = 1$, но тогда по предположению $H \vdash B_1$ и

$H \vdash B_2$. Отсюда по правилу введения конъюнкции $H \vdash B_1 \& B_2$, то есть $H \vdash A$.

б) Если $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1 \& B_2) = 0$, то либо $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$, либо $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_2) = 0$. Пусть, например, $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$. Тогда по предположению

$$H \vdash \overline{B}_1 \tag{1}$$

Воспользуемся аксиомой II_1: $\vdash B_1 \& B_2 \to B_1$. Отсюда по правилу контрпозиции

$$\vdash \overline{B}_1 \to \overline{B_1 \& B_2}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) по правилу заключения получаем $H \vdash \overline{B_1 \& B_2}$, то есть $H \vdash \overline{A}$.

II. Пусть A имеет вид $B_1 \vee B_2$.

а) Если $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 1$, то истинно хотя бы одно из значений $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1)$ или $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_2)$. Пусть $R_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(B_1) = 1$. Тогда по предположению

$$H \vdash B_1. \tag{3}$$

Воспользуемся аксиомой III_1:

$$\vdash B_1 \to B_1 \vee B_2. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) по правилу заключения получаем $H \vdash B_1 \vee B_2$, то есть $H \vdash A$.

б) Если $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 0$, то $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$ и $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 0$. Отсюда следует, что $H \vdash \overline{B}_1$ и $H \vdash \overline{B}_2$. Но тогда по правилу введения конъюнкции

$$H \vdash \overline{B}_1 \& \overline{B}_2. \tag{5}$$

Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash \overline{B}_1 \& \overline{B}_2 \to \overline{B_1 \vee B_2}. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) по правилу заключения имеем $H \vdash \overline{B_1 \vee B_2}$, то есть $H \vdash \overline{A}$.

III. Пусть A имеет вид $B_1 \to B_2$.

а) Если $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1 \to B_2) = 1$, то либо $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1) = 0$, либо $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_2) = 1$.

Если $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1) = 0$, то

$$H \vdash \overline{B}_1 \tag{7}$$

Воспользуемся доказуемой формулой $\vdash B_1 \to \left(\overline{B}_1 \to B_2\right)$. Из этой формулы по правилу перестановки посылок получим

$$\vdash \overline{B}_1 \to (B_1 \to B_2)\,. \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) по правилу заключения получим $H \vdash B_1 \to B_2$, то есть $H \vdash A$. Если $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_2) = 1$, то

$$H \vdash B_2. \tag{9}$$

Воспользуемся аксиомой I_1:

$$\vdash B_2 \to (B_1 \to B_2)\,. \tag{10}$$

Из формул (9) и (10) по правилу заключения имеем $H \vdash B_1 \to B_2$, то есть $H \vdash A$.

б) Если $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1 \to B_2) = 0$, то $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_1) = 1$, а $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(B_2) = 0$. Отсюда по предположению

$$H \vdash B_1 \tag{11}$$

и

$$H \vdash \overline{B}_2 \tag{12}$$

Воспользуемся доказуемой формулой:

$$\vdash (B_1 \to B_2) \to (B_1 \to B_2)\,.$$

Из этой формулы по правилу перестановки посылок получаем

$$\vdash B_1 \to ((B_1 \to B_2) \to B_2)\,. \tag{13}$$

Из формул (11) и (13) по правилу заключения получим

$$H \vdash ((B_1 \to B_2) \to B_2)\,. \tag{14}$$

Из формулы (14) по правилу контрпозиции имеем

$$H \vdash \overline{B}_2 \to \overline{(B_1 \to B_2)}. \tag{15}$$

Из формул (12) и (15) по правилу заключения получаем $H \vdash \overline{(B_1 \to B_2)}$, то есть $H \vdash \overline{A}$.

IV. Пусть A имеет вид $\overline{B}_1$.

а) Если $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\left(\overline{B}_1\right) = 1$, то $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$, и, значит, $H \vdash \overline{B}_1$, то есть $H \vdash A$.

б) Если $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\left(\overline{B}_1\right) = 0$, то $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$, и, значит,

$$H \vdash B_1. \tag{16}$$

Воспользуемся аксиомой IV_2:

$$H \vdash B_1 \to \overline{\overline{B_1}}. \tag{17}$$

Из формул (16) и (17) по правилу заключения получаем $H \vdash \overline{\overline{B_1}}$, то есть $H \vdash \overline{A}$.

Теорема 3. *Каждая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний.*

Доказательство. Пусть A — тождественно истинная в алгебре высказываний формула, а x_1, x_2, ..., x_n — перечень всех переменных, входящих в формулу A.

Возьмем любой набор значений этих переменных $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Так как формула A — тождественно истинная, то $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A) = 1$. Отсюда по теореме 2 следует, что

$$H_n \vdash A, \tag{1}$$

где $H_n = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$.

Так как всего наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 2^n, то соотношение (1) справедливо в 2^n случаях.

Если $H_{n-1} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$, то, очевидно, $H_{n-1}, x_n \vdash A$ и $H_{n-1}, \overline{x}_n \vdash A$. Тогда по правилу введения дизъюнкции $H_{n-1}, x_n \vee \overline{x}_n \vdash A$. Но формула $x_n \vee \overline{x}_n$ доказуема, и ее можно опустить из совокупности формул $H_{n-1}, x_n \vee \overline{x}_n$. Значит, $H_{n-1} \vdash A$.

Аналогично, обозначая через $H_{n-2} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\}$, ..., $H_2 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$, $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\}$, последовательно докажем, что $H_{n-2} \vdash A$, ..., $H_2 \vdash A$, $H_1 \vdash A$. Но соотношение $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\} \vdash A$ справедливо при $\alpha_1 = 1$ и при $\alpha_1 = 0$, то есть $x_1 \vdash A$ и $\overline{x}_1 \vdash A$. Отсюда по правилу введения дизъюнкции имеем $x_1 \vee \overline{x}_1 \vdash A$. Но формула $x_1 \vee \overline{x}_1$ доказуема, и поэтому ее можно опустить. Следовательно, $\varnothing \vdash A$, а это означает, что формула A доказуема.

§ 9. ПРОБЛЕМЫ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Всякая аксиоматическая теория для ее обоснования требует рассмотрения четырех проблем:

1) проблемы разрешимости,
2) проблемы непротиворечивости,
3) проблемы полноты,
4) проблемы независимости.

1. Проблема разрешимости исчисления высказываний. *Проблема разрешимости* исчисления высказываний заключается в доказательстве существования алгоритма, который позволил бы для любой заданной формулы исчисления высказываний определить, является ли она доказуемой или не является.

Теорема. *Проблема разрешимости для исчисления высказываний разрешима.*

Доказательство. Любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний, и, следовательно, можно рассматривать ее логические значения на различных наборах значений входящих в нее переменных.

Пусть A — любая формула исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — перечень входящих в нее переменных.

Вычислим $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A)$ на всех наборах значений α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 1$ на всех наборах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то формула A — тождественно истинная, и, значит, по теореме о доказуемости тождественно истинной формулы она доказуема.

Если же набор значений переменных $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0$ такой, что $R_{\alpha_1^0\alpha_2^0\ldots\alpha_n^0}(A) = 0$, то формула A — не тождественно истинная, и, значит, по теореме 1 § 8 она не доказуема.

2. Проблема непротиворечивости исчисления высказываний. Логическое исчисление называется непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Иначе говоря, аксиоматическое исчисление называется *непротиворечивым*, если в нем не существует такая формула A, что доказуема A и доказуема $\overline{A}$.

Проблема непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет?

Если в исчислении обнаруживаются доказуемые формулы вида A и $\overline{A}$, то такое исчисление называется *противоречивым*.

Если бы в исчислении высказываний некоторые формулы A и $\overline{A}$ оказались доказуемы, то в нем бы оказалась доказуемой любая формула B.

Действительно, выполним подстановку в четвертом законе логики (см. § 7) $\int\limits_{x,y}^{A,B} \big(x \to (\overline{x} \to y)\big)$.

Получим

$$\vdash A \to (\overline{A} \to B). \tag{1}$$

По предположению

$$\vdash A. \tag{2}$$

и

$$\vdash \overline{A}. \tag{3}$$

Применяя к (1), (2) и (3) правило сложного заключения, получим $\vdash B$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Исчисление высказываний непротиворечиво.*

Доказательство. Докажем, что в исчислении высказываний нет такой формулы A, для которой доказуемы A и $\overline{A}$.

Пусть A — любая формула исчисления высказываний. Если A доказуема, то по теореме 1 § 8 она тождественно истинна, и, значит, $\overline{A}$ — тождественно ложная формула, а поэтому не доказуема.

3. Проблема полноты исчисления высказываний.

Определение 1. Аксиоматическое исчисление называется *полным* в *узком смысле*, если добавление к списку его аксиом любой недоказуемой в исчислении формулы в качестве новой аксиомы приводит к противоречивому исчислению.

Определение 2. Исчисление высказываний называется *полным* в *широком смысле*, если любая тождественно истинная формула в нем доказуема.

Из этих определений следует, что проблема полноты исчисления высказываний должна решить два вопроса:

1) Можно ли расширить систему аксиом аксиоматического исчисления путем добавления к ней в качестве новой аксиомы какой-нибудь недоказуемой в этом исчислении формулы?

2) Является ли всякая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуемой в исчислении высказываний?

Ответы на эти вопросы дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Исчисление высказываний полно в узком смысле.*

Доказательство. Пусть A — любая недоказуемая формула исчисления высказываний, а x_1, x_2, …, x_n — полный перечень входящих в формулу A переменных.

Так как A — недоказуемая формула, то она не является тождественно истинной. Следовательно, существует набор значений переменных α_1, α_2, …, α_n таких, что

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\left(A\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right) = 0. \tag{1}$$

Пусть B_1, B_2, …, B_n — любые тождественно истинные формулы, зависящие от тех же переменных x_1, x_2, …, x_n. Рассмотрим набор $B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}$, где $B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ \overline{B_i}, & \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases}$

Осуществим следующую подстановку в формулу A:

$$\int\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}} (A).$$

Получим формулу

$$A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}\right). \tag{2}$$

Докажем, что формула (2) — тождественно ложная. Возьмем любой набор σ_1, σ_2, …, σ_n значений переменных x_1, x_2, …, x_n. Так как формулы B_1, B_2, …, B_n — тождественно истинные, то $R_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}\left(B_i\right) = 1$. Но тогда $R_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}\left(B_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_i$, и, следовательно,

$$R_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n} A\left(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}\right) = A\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = 0.$$

Отсюда следует, что формула $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})}$ — тождественно истинная и, значит, по теореме 3 § 8 является доказуемой.

С другой стороны, если к списку аксиом исчисления высказываний присоединить в качестве новой аксиомы формулу $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то она в новом исчислении будет доказуемой как аксиома. В то же время в новом исчислении будет доказуемой и формула $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})$ как формула, полученная из доказуемой в результате подстановки.

Итак, в новом исчислении оказываются доказуемыми формулы $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})$ и $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})}$, что приводит к противоречивому исчислению.

Теорема 2. *Исчисление высказываний полно в широком смысле.*

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 3 § 8.

4. Проблема независимости аксиом исчисления высказываний.

Для всякого аксиоматического исчисления возникает вопрос о независимости его аксиом, вопрос этот ставится так: можно ли какую-нибудь аксиому вывести из остальных аксиом, применяя правила вывода данной системы?

Если для некоторой аксиомы системы это возможно, то эту аксиому можно исключить из списка аксиом системы, и логическое исчисление при этом не изменится, то есть класс доказуемых формул останется без изменения.

Определение. *Аксиома A называется независимой* от всех остальных аксиом исчисления, если она не может быть выведена из остальных аксиом.

Система аксиом исчисления называется независимой, если каждая аксиома системы независима.

Теорема. *Система аксиом исчисления высказываний независима.*

Доказательство. Для доказательства независимости аксиомы A исчисления проведем некоторую интерпретацию исчисления высказываний. Будем интерпретировать переменные исчисления как переменные, принимающие два значения, которые будем обозначать буквами α, β, где α играет роль истины, а β — лжи.

Операции $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$ определим с таким расчетом, чтобы соблюдались следующие условия:

1. Все аксиомы, кроме аксиомы A, при всех значениях переменных принимают значение α.

2. Каждая формула, выводимая из совокупности всех отличных от A аксиом системы, также принимает значение α при всех значениях входящих переменных.

3. Аксиома A принимает значение β при некоторых значениях входящих в нее переменных.

Ясно, что, если удастся провести такую интерпретацию, то независимость аксиомы A от других аксиом исчисления будет доказана. Действительно, если бы аксиома A была выводима из остальных аксиом исчисления, то она, согласно пункту 2, принимала бы значение α при всех значениях переменных, а это бы противоречило пункту 3.

Условимся, что формулы, в которых вместо переменных подставлены некоторые их значения, также имеют смысл. Например, $\alpha\&\beta$, $\alpha \to A$ и т. д.

Формулы, которые принимают одинаковые значения при всех заменах входящих в них переменных на значения α, β, будем считать равными: $A = B$.

При этом будем считать, что знак равенства связывает слабее логических связок $\&$, $\vee$, $\to$.

Теперь докажем независимость аксиомы II_1.

С этой целью определим все логические операции, кроме конъюнкции, как в алгебре высказываний. Операцию конъюнкции определим равенством $x\&y = y$.

Выпишем эту интерпретацию подробно:

$$\begin{array}{llll}
\alpha \to \alpha = \alpha; & \beta \to \beta = \alpha; & \beta \to \alpha = \alpha; & \alpha \to \beta = \beta; \\
\alpha \vee \alpha = \alpha; & \alpha \vee \beta = \alpha; & \beta \vee \alpha = \alpha; & \beta \vee \beta = \beta; \\
\overline{\alpha} = \beta; & \overline{\beta} = \alpha; & & \\
\alpha\&\alpha = \alpha; & \alpha\&\beta = \beta; & \beta\&\alpha = \alpha; & \beta\&\beta = \beta.
\end{array}$$

Покажем теперь, что три перечисленные условия (см. выше) при этой интерпретации выполняются.

Легко видеть, что аксиомы исчисления высказываний, кроме аксиомы II_1, при этой интерпретации принимают значение α.

Действительно, во все аксиомы групп I, III и IV операция конъюнкции не входит; остальные же операции определены так же, как в алгебре высказываний. Так как в алгебре высказываний эти формулы являются тождественно истинными, то и в данной интерпретации они принимают значение α при всех значениях переменных.

Рассмотрим аксиомы II_1, II_2, II_3.

Аксиомы II_2 и II_3 в данной интерпретации принимают вид $y \to y$ и $(x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to z))$. Эти формулы не содержат операцию конъюнкции и являются тождественно истинными в алгебре высказываний. Поэтому они всегда принимают значение α.

Аксиома II_1 не равна тождественно α, так как в данной интерпретации она равносильна формуле $y \to x$, которая при $x = \beta$, $y = \alpha$ принимает значение β.

Теперь остается доказать, что формулы, полученные путем правил вывода из таких, которые тождественно равны α, сами равны α. Но ранее было доказано, что правила подстановки и заключения, примененные к тождественно истинным формулам, приводят нас к тождественно истинным формулам.

Следовательно, условие пункта 2 выполняется.

Таким образом, независимость аксиомы II_1 доказана.

По аналогичной схеме доказывается независимость остальных аксиом исчисления высказываний групп II, III и IV. Несколько сложнее доказывается независимость аксиом группы I.

Глава 3

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА

В алгебре логики высказывания рассматриваются как нераздельные целые и только с точки зрения их истинности или ложности. Ни структура высказываний, ни, тем более, их содержание не затрагиваются. В то же время и в науке, и в практике используются заключения, существенным образом зависящие как от структуры, так и от содержания используемых в них высказываний.

Например, в рассуждении: «Всякий ромб — параллелограмм; $ABCD$ — ромб; следовательно, $ABCD$ — параллелограмм» посылки и заключение являются элементарными высказываниями логики высказываний и с точки зрения этой логики рассматриваются как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры. Следовательно, алгебра логики, будучи важной частью логики, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

В связи с этим возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов, содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

Логика предикатов, как и традиционная формальная логика, расчленяет элементарное высказывание на *субъект* (буквально — подлежащее, хотя оно и может играть роль дополнения) и *предикат* (буквально — сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — это то, о чем что-то утверждается в высказывании; *предикат* — это то, что утверждается о субъекте.

Например, в высказывании «7 — простое число», «7»— субъект, «простое число» — предикат. Это высказывание утверждает, что «7» обладает свойством «быть простым числом».

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим *высказывательную форму* «x — простое число». При одних значениях x (например, $x = 13$, $x = 17$) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, $x = 10$, $x = 18$) эта форма дает ложные высказывания.

Ясно, что эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной x, определенной на множестве $\mathbf{N}$, принимающую значения из множества $\{1, 0\}$. Здесь предикат становится функцией субъекта и выражает свойства субъекта.

Определение. *Одноместным предикатом* $P(x)$ называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{1, 0\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется *областью определения предиката*.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется *множеством истинности* предиката $P(x)$, то есть множество истинности предиката $P(x)$ — это множество $I_P = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$.

Так, предикат $P(x)$ — «x — простое число» определен на множестве $\mathbf{N}$, а множество I_P для него есть множество всех простых чисел. Предикат $Q(x)$ — «$\sin x = 0$» определен на множестве $\mathbf{R}$, а его множество истинности $I_Q = \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Предикат $F(x)$ — «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.

Определение. Предикат $P(x)$, определенный на множестве M, называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*), если $I_P = M$ ($I_P = \varnothing$).

Естественным обобщением понятия одноместного предиката является *понятие многоместного предиката*, с помощью которого выражаются отношения между предметами.

Примером бинарного отношения (отношения между двумя предметами) является отношение «меньше». Пусть это отношение введено на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел. Оно может быть охарактеризовано высказывательной формой «$x < y$», где $x, y \in \mathbf{Z}$, то есть является функцией двух переменных $P(x, y)$, определенной на множестве $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ с множеством значений $\{1, 0\}$.

Определение. *Двухместным предикатом* $P(x, y)$ называется функция двух переменных x и y, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{1, 0\}$.

В числе примеров двухместных предикатов можно назвать предикаты: $Q(x, y)$ — «$x = y$» предикат равенства, определенный на множестве $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $F(x, y)$ — «$x \parallel y$» прямая x параллельна прямой y, определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Аналогично определяется n-местный предикат.

§ 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Предикаты, так же, как высказывания, принимают два значения *и* и *л* (1, 0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний.

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов.

Пусть на некотором множестве M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение 1. *Конъюнкцией* двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \& Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Очевидно, что областью истинности предиката $P(x)\,\&Q(x)$ является общая часть областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то есть пересечение $I_P \cap I_Q$.

Так, например, для предикатов $P(x)$: «x — четное число» и $Q(x)$: «x кратно 3» конъюнкцией $P(x)\,\&Q(x)$ является предикат «x — четное число и x кратно 3», то есть предикат «x делится на 6».

Определение 2. *Дизъюнкцией* двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Ясно, что областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то есть объединение $I_P \cup I_Q$.

Определение 3. *Отрицанием* предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина».

Из этого определения следует, что $I_{\overline{P}} = M \backslash I_P = CI_P$.

Определение 4. *Импликацией* предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \to Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ — значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Так как при каждом фиксированном $x \in M$ справедлива равносильность $P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$, то $I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$.

§ 3. КВАНТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Пусть имеется предикат $P(x)$, определенный на множестве M. Если a — некоторый элемент из множества M, то подстановка его вместо x в предикат $P(x)$ превращает этот предикат в высказывание $P(a)$. Такое высказывание называется единичным. Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматриваются еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

1. **Квантор всеобщности.** Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества M и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет «Для всякого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называют *квантором всеобщности*.

Переменную x в предикате $P(x)$ называют *свободной* (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют *связанной* квантором $\forall$.

2. **Квантор существования.** Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют *квантором существования*. В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

Приведем пример употребления кванторов. Пусть на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x \in \mathbf{N} P(x)$ — «Все натуральные числа кратны 5»; $\exists x \in \mathbf{N} P(x)$ — «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно.

Ясно, что высказывание $\forall x P(x)$ истинно только в том единственном случае, когда $P(x)$ — тождественно истинный предикат, а высказывание $\exists x P(x)$ ложно только в том единственном случае, когда $P(x)$ — тождественно ложный предикат.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Пусть, например, на множестве M задан двухместный предикат $P(x, y)$. Применение кванторной операции к предикату $P(x, y)$ по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату $P(x, y)$ одноместный предикат $\forall x P(x)$ (или одноместный предикат $\exists x P(x)$), зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x. К ним можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут уже к высказываниям следующих видов: $\forall y \forall x P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$, $\exists y \exists x P(x, y)$.

Например, рассмотрим предикат $P(x, y)$: «$x \vdots y$», определенный на множестве $\mathbf{N}$. Применение кванторных операций к предикату $P(x, y)$ приводит к восьми возможным высказываниям:

1. $\forall y \forall x P(x, y)$ — «Для всякого y и для всякого x y является делителем x».
2. $\exists y \forall x P(x, y)$ — «Существует y, который яляется делителем всякого x».
3. $\forall y \exists x P(x, y)$ — «Для всякого y существует x такое, что x делится на y».
4. $\exists y \exists x P(x, y)$ — «Существует y и существует x такие, что y является делителем x».
5. $\forall x \forall y P(x, y)$ — «Для всякого x и всякого y y является делителем x».
6. $\forall x \exists y P(x, y)$ — «Для всякого x существует такое y, что x делится на y».
7. $\exists x \exists y P(x, y)$ — «Существует x и существует y такие, что y является делителем x».
8. $\exists x \forall y P(x, y)$ — «Существует x такое, что для всякого y x делится на y».

Легко видеть, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6, 7 истинны.

Из рассмотренных примеров видно, что в общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания, а значит, и его логическое значение (например, высказывания 3 и 8).

Рассмотрим предикат $P(x)$, определенный на множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащем конечное число элементов. Если предикат $P(x)$ является тождественно истинным, то истинными будут высказывания $P(a_1)$, $P(a_2)$, ..., $P(a_n)$. При этом истинными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \& P(a_2) \& \ldots \& P(a_n)$.

Если же хотя бы для одного элемента $a_k \in M$ $P(a_k)$ окажется ложным, то ложными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \& P(a_2) \& \ldots \& P(a_n)$. Следовательно, справедлива равносильность

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \& P(a_2) \& \ldots \& P(a_n).$$

Нетрудно показать, что справедлива и равносильность

$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n).$$

Отсюда видно, что кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей.

§ 4. ПОНЯТИЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

В логике предикатов будем пользоваться следующей символикой:

1. Символы p, q, r, $\ldots$ — переменные высказывания, принимающие два значения: 1 — истина, 0 — ложь.

2. Предметные переменные — x, y, z, $\ldots$, которые пробегают значения из некоторого множества M; x^0, y^0, z^0, $\ldots$ — предметные константы, то есть значения предметных переменных.

3. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ — одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — n-местные предикатные переменные.

$P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — символы постоянных предикатов.

4. Символы логических операций: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$.

5. Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.

6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение формулы логики предикатов.

1. Каждое высказывание, как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).

2. Если $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2, $\ldots$, x_n — предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула.

Такая формула называется элементарной, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.

3. Если A и B — формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой — свободной, то слова $A \vee B$, $A \& B$, $A \to B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

4. Если A — формула, то $\overline{A}$ — формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{A}$ не меняется.

5. Если $A\,(x)$ — формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall x A\,(x)$ и $\exists x A\,(x)$ являются формулами, причем предметная переменная входит в них связанно.

6. Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в пунктах 1– 5, не является формулой.

Например, если $P\,(x)$ и $Q\,(x, y)$ — одноместный и двухместный предикаты, а q, r — переменные высказывания, то формулами будут слова: q, $P\,(x)$, $P\,(x) \& Q\left(x^0, y\right)$, $\forall x P\,(x) \to$ $\to \exists x Q\,(x, y)$, $\left(\overline{Q\,(x, y)} \vee q\right) \to r$.

Не является формулой слово: $\forall x Q\,(x, y) \to P\,(x)$. Здесь нарушено условие п. 3, так как в формулу $\forall x Q\,(x, y)$ переменная x входит связанно, а в формулу $P\,(x)$ переменная x входит свободно.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.

§ 5. ЗНАЧЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значений трех видов переменных: 1) значений входящих в формулу переменных высказываний, 2) значений свободных предметных переменных из множества M, 3) значений предикатных переменных.

При конкретных значениях каждого из трех видов переменных формула логики предикатов становится высказыванием, имеющим истинное или ложное значение.

В качестве примера рассмотрим формулу

$$\exists y \forall z \left(P\left(x, y\right) \to P\left(y, z\right)\right), \tag{1}$$

в которой двухместный предикат $P\left(x, y\right)$ определен на множестве $M \times M$, где $M = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

В формулу (1) входит переменный предикат $P\left(x, y\right)$, предметные переменные x, y, z, две из которых y и z — связанные кванторами, а x — свободная.

Возьмем за конкретное значение предиката $P\left(x, y\right)$ фиксированный предикат $P^0\left(x, y\right)$: «$x < y$», а свободной переменной x придадим значение $x^0 = 5 \in M$. Тогда при значениях y, меньших $x^0 = 5$, предикат $P^0\left(x^0, y\right)$ принимает значение «ложь», а импликация $P\left(x, y\right) \to P\left(y, z\right)$ при всех $z \in M$ принимает значение «истина», то есть высказывание $\exists y \forall z \left(P^0\left(x, y\right) \to P^0\left(y, z\right)\right)$ имеет значение «истина».

§ 6. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Определение 1. Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными на области* M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Определение 2. Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Здесь, как в алгебре высказываний, для равносильных формул принято обозначение $A \equiv B$.

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов. Рассмотрим основные из этих равносильностей. Пусть $A\left(x\right)$ и $B\left(x\right)$ — переменные предикаты, а c — переменное высказывание. Тогда

1. $\overline{\forall x A\left(x\right)} \equiv \exists x \overline{A\left(x\right)}$,
2. $\overline{\exists x A\left(x\right)} \equiv \forall x \overline{A\left(x\right)}$,

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x \overline{A(x)}}}$,
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\overline{\forall x \overline{A(x)}}}$,
5. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \& B(x)]$,
6. $c \& \forall x B(x) \equiv \forall x[c \& B(x)]$,
7. $c \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[c \vee B(x)]$,
8. $c \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x\,[c \rightarrow B(x)]$,
9. $\forall x\,[B(x) \rightarrow c] \equiv \exists x B(x) \rightarrow c$,
10. $\exists x\,[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,
11. $\exists x\,[c \vee B(x)] \equiv c \vee \exists x B(x)$,
12. $\exists x\,[c \& B(x)] \equiv c \& \exists x B(x)$,
13. $\exists x A(x) \& \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y\,[A(x) \& B(y)]$,
14. $\exists x\,[c \rightarrow B(x)] \equiv c \rightarrow \exists x B(x)$,
15. $\exists x\,[B(x) \rightarrow c] \equiv \forall x B(x) \rightarrow c$.

Равносильность 1 означает тот простой факт, что, если не для всех x истинно $A(x)$, то существует x, при котором будет истинной $\overline{A}(x)$.

Равносильность 2 означает тот простой факт, что, если не существует x, при котором истинно $A(x)$, то для всех x будет истинной $\overline{A}(x)$.

Равносильности 3 и 4 получаются из равносильностей 1 и 2, соответственно, если от обеих их частей взять отрицания и воспользоваться законом снятия двойного отрицания.

Докажем равносильность 5. Если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ одновременно тождественно истинные, то будет тождественно истинным и предикат $A(x) \& B(x)$, а поэтому будут истинными высказывания:

$$\forall x A(x)\,, \qquad \forall x B(x)\,, \qquad \forall x\,[A(x) \& B(x)]\,.$$

То есть в этом случае обе части равносильности 5 принимают значение «истина».

Пусть теперь хотя бы один из предикатов, например $A(x)$, будет не тождественно истинным. Тогда не тождественно истинным будет и предикат $A(x) \& B(x)$, а поэтому ложными будут высказывания:

$$\forall x A(x)\,, \qquad \forall x A(x) \& \forall x B(x)\,, \qquad \forall x\,[A(x) \& B(x)]\,,$$

то есть и в этом случае обе части равносильности 5 принимают одинаковые (ложные) значения. Этим исчерпывается доказательство равносильности 5.

Докажем равносильность 8. Пусть переменное высказывание c принимает значение «ложь». Тогда тождественно истинным будет предикат $c \to B(x)$ и, очевидно, истинными будут высказывания $c \to \forall x B(x)$ и $\forall x [c \to B(x)]$, то есть в этом случае обе части равносильности 8 принимают одинаковые (истинные) значения.

Пусть теперь переменное высказывание c принимает значение «истина». Если при этом переменный предикат является тождественно истинным, то будет тождественно истинным и предикат $c \to B(x)$, и, значит, истинными будут высказывания $\forall x B(x)$, $c \to \forall x B(x)$, $\forall x [c \to B(x)]$, то есть и в этом случае обе части равносильности 8 принимают одинаковые (истинные) значения.

Если же предикат $B(x)$ не является тождественно истинным, то не будет тождественно истинным и предикат $c \to B(x)$, а поэтому ложными будут высказывания: $\forall x B(x)$, $c \to \forall x B(x)$, $\forall x [c \to B(x)]$.

Следовательно, и здесь обе части равносильности 8 принимают одинаковые (ложные) значения. Этим исчерпывается доказательство равносильности 8.

Аналогично доказывают остальные из перечисленных равносильностей.

В заключение отметим, что формула $\forall x [A(x) \vee B(x)]$ не равносильна формуле $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$, а формула $\exists x [A(x) \& B(x)]$ не равносильна формуле $\exists x A(x) \& \exists x B(x)$.

Однако, справедливы равносильности:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv$$
$$\equiv \forall x (A(x) \vee \forall y B(y)) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y)),$$

$$\exists x A(x) \& \exists x B(x) \equiv \exists x A(x) \& \exists y B(y) \equiv$$
$$\equiv \exists x (A(x) \& \exists y B(y)) \equiv \exists x \exists y (A(x) \& B(y)).$$

§ 7. ПРЕДВАРЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Определение. Говорят, что формула логики предикатов имеет *нормальную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Очевидно, что, используя равносильности алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме. Например, приведем к нормальной форме формулу

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z).$$

Пользуясь равносильными преобразованиями, получим:

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$
$$\equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \& \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x) \& \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют так называемые *предваренные нормальные формы* (п.н.ф.). В них кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики, то есть предваренная нормальная форма формулы логики предикатов имеет вид:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_n) A(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad n \leqslant m,$$

где под символом (σx_i) понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Теорема. *Всякая формула логики предикатов может быть приведена к предваренной нормальной форме.*

Доказательство. Будем считать, что формула уже приведена к нормальной форме и покажем, что ее можно привести к предваренной нормальной форме.

Если данная формула является элементарной, то она кванторов не содержит, и, следовательно, уже имеет предваренную нормальную форму.

Предположим теперь, что теорема справедлива для формул, содержащих не более k операций, и докажем, что при этом предположении она будет справедлива и для формул, содержащих ровно $k+1$ операцию.

Пусть формула A содержит $k+1$ операцию и имеет вид $\sigma x L(x)$, где σx обозначает один из кванторов.

Так как $L(x)$ содержит k операций, и, следовательно, ее можно считать приведенной к предваренной нормальной форме, то у нее все кванторные операции стоят впереди. Но тогда формула $\sigma x L(x)$, очевидно, имеет предваренную нормальную форму.

Пусть формула A имеет вид $\overline{L}$, где формула L приведена к предваренной нормальной форме и содержит k операций. Тогда с помощью равносильностей 1 и 2 отрицание можно ввести под знак кванторов, и это приведет формулу A к предваренной нормальной форме.

Пусть формула A имеет вид $L_1 \vee L_2$, где L_1 и L_2 приведены к предваренной нормальной форме.

Переименуем в формуле L_2 связанные предметные переменные так, чтобы в формулах L_1 и L_2 все связанные предметные переменные были различными. При этом формулы L_1 и L_2 могут быть записаны в виде

$$L_1 = (\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_m)\,\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad m \leqslant n;$$
$$L_2 = (\sigma y_1)(\sigma y_2)\ldots(\sigma y_p)\,\alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q), \qquad p \leqslant q.$$

Используя равносильности 7 и 11, запишем формулу A, вводя формулу L_2 под знаки кванторов (σx_1), (σx_2), $\ldots$, (σx_m):

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_m)\,(\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \\ \vee (\sigma y_1)(\sigma y_2)\ldots(\sigma y_p)\,\alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q)).$$

Затем введем под знаки кванторов (σy_1), (σy_2), $\ldots$, (σy_p) формулу $\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда для формулы A получим предваренную нормальную форму:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2)\ldots(\sigma y_p)(\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \\ \vee \alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q)).$$

Аналогично проводится доказательство и в случае, когда формула A имеет вид $L_1 \& L_2$.

Замечание. Если в процессе приведения формулы логики предикатов к п.н.ф. приходится рассматривать выражение $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ или выражение $\forall x A(x) \& \forall x B(x)$, то следует воспользоваться равносильностями 5 и 10.

Например, приведем к предваренной нормальной форме формулу $A \equiv \exists x \forall y P(x,y) \vee \overline{\forall x \exists y Q(x,y)}$.

$$A \equiv \exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y \overline{Q(x,y)} \equiv \exists x \left[\forall y P(x,y) \vee \forall y \overline{Q(x,y)} \right] \equiv$$
$$\equiv \exists x \left[\forall y P(x,y) \vee \forall z \overline{Q(x,z)} \right] \equiv \exists x \forall y \forall z \left(P(x,y) \vee \overline{Q(x,z)} \right).$$

§ 8. ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ И ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Определение 1. Формула A логики предикатов называется *выполнимой в области* M, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула A принимает истинные значения.

Определение 2. Формула A называется *выполнимой*, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Из определения 2 следует, что, если формула выполнима, то это еще не означает, что она выполнима в любой области.

Определение 3. Формула A называется *тождественно истинной в области* M, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Определение 4. Формула A называется *общезначимой*, если она тождественно истинная на всякой области.

Определение 5. Формула A называется *тождественно ложной в области* M, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Из приведенных определений следует:

1. Если формула A общезначима, то она и выполнима на всякой области.
2. Если формула A тождественно истинная в области M, то она и выполнима в этой области.
3. Если формула A тождественно ложная в области M, то она не выполнима в этой области.
4. Если формула A не выполнима, то она тождественно ложна на всякой области.

В связи с данными определениями естественно выделить два класса формул логики предикатов: выполнимых и не выполнимых формул.

Отметим, что общезначимую формулу называют *логическим законом*.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Формула $\forall x \exists y P(x, y)$ выполнима. Действительно, если $P(x, y)$ — предикат «$x < y$», определенный в области $M = E \times E$, где $E = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то формула $\forall x \exists y P(x, y)$ тождественно истинная в области M, и, следовательно, выполнима в этой области. Однако, если предикат «$x < y$» рассматривается в конечной области $M_1 = E_1 \times E_1$, где $E_1 = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, то формула $\forall x \exists y P(x, y)$ будет тождественно ложной в области M_1, и, следовательно, на выполнима в области M_1. При этом ясно, что формула $\forall x \exists y P(x, y)$ не общезначима.

Пример 2. Формула $\exists x \exists y \left[P(x) \& \overline{P(y)}\right]$ выполнима. Действительно, если $P(x)$ — предикат «Число x — четно», определенный в области $M = E \times E$, где $E = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то эта формула тождественно истинная в области M, и, следовательно, выполнима в области M. Однако, если предикат «Число x — четно» рассматривать в области $M_1 = E_1 \times E_1$, где E_1 — множество четных чисел, то формула $\exists x \exists y \left[P(x) \& \overline{P(y)}\right]$ будет тождественно ложной в области M_1, и, следовательно, не выполнимой.

Пример 3. Формула $\forall x \left[P(x) \vee \overline{P(x)}\right]$ тождественно истинная в любой области M. Значит, она является общезначимой, то есть является логическим законом (закон исключенного третьего).

Пример 4. Формула $\forall x \left[P(x) \& \overline{P(x)}\right]$ тождественно ложная в любой области M, и поэтому она не выполнима.

Легко установить связь между общезначимостью и выполнимостью формул логики предикатов.

Теорема 1. *Для того, чтобы формула A была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было не выполнимо.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть формула A общезначима. Тогда, очевидно, $\overline{A}$ — тождественно ложная формула в любой области, и поэтому формула $\overline{A}$ не выполнима.

Достаточность. Пусть формула $\overline{A}$ не выполнима в любой области. Тогда по определению невыполнимой формулы $\overline{A}$ — тождественно ложная формула в любой области. Значит, формула A — тождественно истинная формула в любой области, и, следовательно, она общезначима.

Теорема 2. *Для того, чтобы формула A была выполнима, необходимо и достаточно, чтобы формула $\overline{A}$ была не общезначима.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть формула A выполнима. Это означает, что существует область M и набор значений переменных, входящих в формулу A, при которых формула A принимает истинное значение. Очевидно, что на этом наборе значений переменных формула $\overline{A}$ принимает ложное значение, и, следовательно, формула $\overline{A}$ не общезначима.

Достаточность. Пусть формула $\overline{A}$ не общезначима. Тогда существует область M и набор значений переменных, входящих в формулу, при которых формула $\overline{A}$ принимает ложное значение. При этом наборе значений переменных формула A принимает значение «истина», и поэтому формула A выполнима.

§ 9. ПРИМЕР ФОРМУЛЫ, ВЫПОЛНИМОЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ И НЕ ВЫПОЛНИМОЙ НИ В КАКОЙ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Покажем, что формула

$$\forall x\forall y\forall z\Big(P(x,x)\&\Big(\overline{P(x,y)}\to\Big(\overline{P(y,z)}\to\overline{P(x,z)}\Big)\Big)\&\overline{P(x,u)}\Big) \quad (1)$$

выполнима в бесконечной области и не выполнима ни в какой конечной области.

Допустим, что формула (1) выполнима в некоторой области M. В таком случае должен существовать фиксированный предикат $P^*(x,y)$, для которого формула (1) принимает значение 1. Тогда для всех элементов x, y, z и хотя бы для одного элемента u из области M формула

$$P^*(x,x)\,\&\left(\overline{P^*(x,y)} \to \left(\overline{P^*(y,z)} \to \overline{P^*(x,z)}\right)\right)\&\overline{P^*(x,u)}$$

принимает значение 1. Но в этом случае принимают значение 1 и формулы:

$$\overline{P^*(x,y)} \to \left(\overline{P^*(y,z)} \to \overline{P^*(x,z)}\right), \tag{2}$$

$$P^*(x,x)\,. \tag{3}$$

Кроме того, для любого x из области M существует хотя бы один элемент u, для которого

$$\overline{P^*(x,u)} \tag{4}$$

тоже принимает значение 1.

Нетрудно убедиться, что в таком случае предикат $\overline{P^*(x,y)}$ представляет собой предикат, устанавливающий отношение порядка между элементами области M. Действительно, из истинности формул (2) и (3) следует, что предикат $\overline{P^*(x,y)}$ удовлетворяет аксиомам порядка:

1. $\overline{P^*(x,x)}$ — ложь.
2. $\overline{P^*(x,y)} \to \left(\overline{P^*(y,z)} \to \overline{P^*(x,z)}\right)$ — истина.

В связи с этим условимся $\overline{P^*(x,y)}$ выражать словами «x предшествует y». Как видно из истинности формулы (4), для каждого x должно существовать такое u, что истинно $\overline{P^*(x,u)}$, то есть «x предшествует u». Возьмем произвольный элемент области x_1; среди элементов области должен найтись такой элемент x_2, что «x_1 предшествует x_2». Точно также должен найтись такой элемент x_3, что «x_2 предшествует x_3» и т. д. Получаем последовательность элементов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots . \tag{5}$$

В силу аксиом 1 и 2 каждый элемент этой последовательности отличен от каждого элемента с меньшим индексом, так как будет иметь место «x_1 предшествует x_n». Но это означает, что любые два элемента последовательности (5) различны и область M бесконечна.

Покажем, что существует область, на которой формула (1) выполнима. Пусть $M = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, а $P(x, y)$ означает «$x \geqslant y$». Тогда $\overline{P(x, y)}$ означает «$x < y$». При такой замене предиката $P(x, y)$ формула (1) принимает вид

$$\forall x \forall y \forall z \exists u [\overline{x < x} \& ((x < y) \to (y < z \to x < z)) \& (x < u)].$$

Очевидно, что на множестве $M = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ эта формула истинна.

Из доказанного ясно, что, если область, на которой рассматривается формула (1), конечна, то формула (1) тождественно ложна на M, и, значит, не выполнима.

§ 10. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ И ВЫПОЛНИМОСТИ, НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЕЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ (БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА)

Проблема разрешимости в логике предикатов ставится так же, как и в алгебре логики: существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы A логики предикатов установить, к какому классу она относится, то есть является ли она или общезначимой, или выполнимой, или тождественно ложной. Если бы такой алгоритм существовал, то, как и в алгебре высказываний, он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы логики предикатов.

Отметим, что в отличие от алгебры логики, в логике предикатов не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество.

В 1936 году американский математик А. Чёрч доказал, что *проблема разрешимости логики предикатов в общем виде алгоритмически не разрешима*, то есть не существует алгоритма, который бы позволил установить, к какому классу формул относится любая формула логики предикатов.

§ 11. АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

1. Проблема разрешимости в случае конечных областей.

Очевидно, что проблема разрешимости в случае конечных областей разрешима. Действительно, в этом случае кванторные операции можно заменить операциями конъюнкции и дизъюнкции и тем самым свести формулу логики предикатов к формуле алгебры логики, для которой проблема разрешимости разрешима.

Например, формула $\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ в области $M = \{a, b\}$, состоящей из двух элементов, приводится к виду:

$$\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x [P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee P(x,b)] \equiv$$
$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \& [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)].$$

Так как каждый член последней конъюнкции является дизъюнкцией, содержащей высказывание и его отрицание, то формула истинна.

2. Проблема разрешимости для формул, содержащих в предваренной нормальной форме кванторы одного типа.

Определение 1. Формула логики предикатов называется *замкнутой*, если она не содержит свободных предметных переменных.

Определение 2. Если формула логики предикатов C содержит свободные переменные x_1, x_2, ..., x_n, то формула

$$A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется *замыканием общности* формулы C, а формула

$$B = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется *замыканием существования* формулы C.

Теорема 1. *Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы существования, число которых равно n, и тождественно истинна на любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.*

Доказательство. Пусть формула логики предикатов в предваренной нормальной форме имеет вид

$$B = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n C\left(q_1, q_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots\right), \quad (1)$$

где C кванторов не содержит; q_i — логические переменные, P_i — одноместные предикаты, Q_i — двухместные предикаты.

Значение истинности этой формулы зависит от входящих в нее переменных q_1, q_2, ..., предикатов P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ... и так далее.

По условию теоремы на любой области $M = \{a\}$, содержащей только один элемент a, данная формула тождественно истинна, то есть тождественно истинной является формула

$$C\left(q_1, q_2, \ldots, P_1(a), P_2(a), \ldots, Q_1(a,a), Q_2(a,a), \ldots\right). \quad (2)$$

Формула (2), очевидно, является формулой алгебры логики.

Предположим, что формула (1) не является общезначимой. Тогда существует такая область M_1 и такой набор значений переменных q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ..., на котором формула (1) принимает значение «ложь», то есть

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим отрицание формулы (3).

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)} \equiv$$
$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \overline{C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)} = 1.$$

Отсюда следует, что формула

$$\overline{C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)} \quad (4)$$

тождественно истинна, независимо от выбора предметных переменных из области M_1.

Возьмем из области M_1 какой-нибудь элемент x_0 и подставим его в формулу (4) вместо всех предметных переменных. Тогда

$$\overline{C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \ldots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \ldots\right)} = 1.$$

И, значит,

$$C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \ldots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \ldots\right) = 0,$$

а это противоречит тождественной истинности формулы (2).

Теорема 2. *Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы общности, число которых равно n, и тождественно истинна на всяком множестве, содержащем не более чем n элементов, то она общезначима.*

Доказательство. Пусть формула логики предикатов в предваренной нормальной форме имеет вид

$$A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C\left(q_1, q_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots\right), \quad (1)$$

где, как и раньше, q_1, q_2, ... — логические переменные, P_1, P_2, ... — одноместные предикаты, Q_1, Q_2, ... — двухместные предикаты и т. д.

Предположим, что формула (1) не является общезначимой. Тогда существует область M_1 с числом элементов, большим n, на которой она не является тождественно истинной, то есть существует набор значений переменных q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ..., на котором формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right), \quad (2)$$

принимает ложное значение. Отсюда

$$\begin{gathered}\overline{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)} \equiv \\ \equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \overline{C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)} = 1.\end{gathered}$$

Таким образом, существует набор предметных переменных x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 из области M_1, при котором формула $\overline{C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)}$ имеет значение 1, а формула $C\left(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots\right)$ имеет значение 0.

Значит, из области M_1 можно выделить область M_2, содержащую не более n элементов, на которой данная формула не является тождественно истинной, а это противоречит условию теоремы.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ ДЛЯ ЗАПИСИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОСТРОЕНИЯ ОТРИЦАНИЯ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

1. Запись математических предложений в виде формул логики предикатов.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства. Приведем ряд примеров таких записей.

1. *Определение предела числовой последовательности.*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \in N\, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Здесь использован трехместный предикат $Q\,(\varepsilon, n, n_0)$: $(n \geqslant n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$.

2. *Определение предела функции в точке.*

$$b = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Здесь использован трехместный предикат $P\,(\varepsilon, \delta, x)$: $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f\,(x) - b| < \varepsilon)$.

3. *Определение непрерывности функции в точке.*

Функция $f\,(x)$, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in E\, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f\,(x) - f\,(x_0)\,| < \varepsilon)\,.$$

Здесь также использован трехместный предикат $P\,(\varepsilon, \delta, x)$.

4. *Определение возрастающей функции.*

Функция $f\,(x)$, определенная на множестве E, возрастает на этом множестве, если

$$\forall x_1 \in E\, \forall x_2 \in E\, (x_1 < x_2 \Rightarrow f\,(x_1) < f\,(x_2))\,.$$

Здесь использован двухместный предикат $W\,(x_1, x_2)$: $(x_1 < x_2 \Rightarrow f\,(x_1) < f\,(x_2))$.

5. *Определение ограниченной функции.*

Функция $f\,(x)$, определенная на множестве E, ограничена на этом множестве, если

$$\exists M \in R_+\, \forall x \in E\, (|f\,(x)\,| \leqslant M)\,.$$

Здесь использован двухместный предикат $L(x, M)$: $(|f(x)| \leqslant M)$.

Как известно, многие теоремы математики допускают формулировку в виде условных предложений. Например, рассмотрим следующую теорему: «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла». Условием этой теоремы является предложение «Точка лежит на биссектрисе угла», а заключением — предложение «Точка равноудалена от сторон угла». Видим, что и условие, и заключение теоремы представляют собой предикаты, заданные на множестве R^2. Обозначая эти предикаты соответственно через $P(x)$ и $Q(x)$, где $x \in R^2$, теорему можем записать в виде формулы:

$$\forall x \in R^2\,(P(x) \to Q(x))\,.$$

В связи с этим, говоря о строении теоремы, можно выделить в ней три части: 1) условие теоремы: предикат $P(x)$, заданный на множестве R^2; 2) заключение теоремы: предикат $Q(x)$, заданный на множестве R^2; 3) разъяснительная часть: в ней описывается множество объектов, о которых идет речь в теореме.

2. Построение противоположных утверждений.

Пусть дано некоторое математическое утверждение A. Ему противоположным будет утверждение $\overline{A}$.

Логика предикатов позволяет путем равносильных преобразований формулы $\overline{A}$ придать ей хорошо обозримый вид.

Так, например, определение ограниченной функции дается формулой

$$\exists M \in R_+\,\forall x \in E\,(|f(x)| \leqslant M)\,.$$

Определение неограниченной функции мы получим, взяв отрицание этой формулы и проводя равносильные преобразования:

$$\overline{\exists M \in R_+ \forall x \in E(|f(x)| \leqslant M)} \equiv \forall M \in R_+ \overline{\forall x \in E(|f(x)| \leqslant M)} \equiv$$
$$\equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E\overline{(|f(x)| \leqslant M)} \equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E(|f(x)| > M).$$

Последняя формула дает не негативное, а положительное определение неограниченной функции.

Из приведенного определения видно, что для построения противоположного утверждения к утверждению, заданному формулой логики предикатов, содержащей все кванторы впереди, необходимо заменить все кванторы на противоположные и взять отрицание от предиката, стоящего под знаком кванторов.

Так, утверждение, что $b \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, даст формула:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in E\, (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$
$$\equiv \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in E\overline{(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$
$$\equiv \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in E\, (0 < |x - x_0| < \delta \& |f(x) - b| \geqslant \varepsilon).$$

Особый интерес представляет построение утверждения, отрицающего справедливость некоторой теоремы: $\forall x \in E\, (P(x) \to Q(x))$. Это будет утверждение:

$$\overline{\forall x \in E\, (P(x) \to Q(x))} \equiv \exists x \in E\overline{(P(x) \to Q(x))} \equiv$$
$$\equiv \exists x \in E \left(P(x)\, \& \overline{Q(x)}\right).$$

Следовательно, чтобы доказать, что теорема $\forall x(P(x \to \to Q(x))$ неверна, достаточно указать такой элемент $x \in E$, для которого $P(x)$ — истина, а $Q(x)$ — ложь, то есть привести *контрпример*.

3. Прямая, обратная и противоположная теоремы.

Рассмотрим четыре теоремы:

$$\forall x \in E\, (P(x) \to Q(x)), \tag{1}$$
$$\forall x \in E\, (Q(x) \to P(x)), \tag{2}$$
$$\forall x \in E\, \left(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)\right), \tag{3}$$
$$\forall x \in E\, \left(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)\right). \tag{4}$$

Пара теорем, у которых условие одной теоремы является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются *взаимно обратными* друг другу.

Так, теоремы (1) и (2), а также (3) и (4) — взаимно обратные теоремы. При этом, если одну из них называют прямой теоремой, то вторая называется обратной.

Пара теорем, у которых условие и заключение одной является отрицанием соответственно условия и заключения другой, называют *взаимно противоположными*.

Так, теоремы (1) и (3), а также теоремы (2) и (4) являются взаимно противоположными теоремами.

Например для теоремы «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником» (1) обратной является теорема «Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны» (2). Для теоремы (1) противоположной является теорема «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником» (3), а для теоремы (2) противоположной является теорема «Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны» (4).

В рассмотренном примере теоремы (1) и (4) являются одновременно ложными, а теоремы (2) и (3) одновременно истинными. Контрпримером к теореме (1) является равнобочная трапеция.

Ясно, что прямая и обратная теоремы, вообще говоря, не равносильны, то есть одна из них может быть истинной, а другая ложной. Однако легко показать, что теоремы (1) и (4), а также теоремы (2) и (3) всегда равносильны. Действительно,

$$\forall x \in E\left(P(x) \to Q(x)\right) \equiv \forall x \in E\left(\overline{P}(x) \vee Q(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \forall x \in E\left(\overline{\overline{Q}}(x) \vee \overline{P}(x)\right) \equiv \forall x \in E\left(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)\right).$$

Аналогично доказывается равносильность

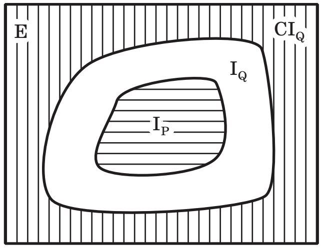
$$\forall x \in E\left(Q(x) \to P(x)\right) \equiv \forall x \in E\left(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)\right).$$

Из этих равносильностей следует, что, если доказана теорема (1), то доказана и теорема (4), а если доказана теорема (2), то доказана и теорема (3).

4. Необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим теорему

$$\forall x \in E\left(P(x) \to Q(x)\right). \tag{1}$$



Как отмечалось, множество истинности предиката $P(x) \to \to Q(x)$ есть множество $CI_P \cup \cup I_Q$. Но тогда множеством ложности этого предиката будет $C(CI_P \cup I_Q) = I_P \cap CI_Q$. Последнее множество будет пустым лишь в случае, когда $I_P \subset I_Q$.

Итак, предикат $P(x) \to Q(x)$ является истинным для всех $x \in E$ в том и только том случае, когда множество истинности предиката $P(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q(x)$. При этом говорят, что предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, и предикат $Q(x)$ называют необходимым условием для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ — достаточным условием для $Q(x)$. Так, в теореме «Если x — число натуральное, то оно целое» предикат $Q(x)$: «x — число целое» логически следует из предиката $P(x)$: «x — число натуральное», а предикат «x — число натуральное» является достаточным условием для предиката «x — число целое».

Часто встречается ситуация, при которой истинны взаимно обратные теоремы:

$$\forall x \in E\,(P(x) \to Q(x)) \tag{1}$$

и

$$\forall x \in E\,(Q(x) \to P(x))\,. \tag{2}$$

Это, очевидно, возможно при условии, что $I_P = I_Q$.

В таком случае из теоремы (1) следует, что условие $P(x)$ является достаточным для $Q(x)$, а из теоремы (2) следует, что условие $P(x)$ является необходимым для $Q(x)$.

Таким образом, если истинны теоремы (1) и (2), то условие $P(x)$ является и необходимым, и достаточным для $Q(x)$. Аналогично в этом случае условие $Q(x)$ является необходимым и достаточным для $P(x)$.

Иногда вместо логической связки «необходимо и достаточно» употребляют логическую связку «тогда и только тогда».

Так как здесь истинны высказывания (1) и (2), то истинно высказывание

$$\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))\,\&\forall x \in E\,(Q\,(x) \to P\,(x)) \equiv$$
$$\equiv \forall x \in E\,(P\,(x) \leftrightarrow Q\,(x))\,.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Теорема «Если число ℓ делится на 12, то оно делится на 3» истинна. Поэтому здесь делимость числа ℓ на 12 является достаточным условием для делимости числа ℓ на 3, а делимость числа ℓ на 3 является необходимым условием для делимости числа ℓ на 12. В то же время обратная теорема «Если число ℓ делится на 3, то оно делится на 12» не верна. Поэтому делимость числа ℓ на 3 не является достаточным условием делимости числа ℓ на 12, а делимость числа ℓ на 12 не является необходимым условием делимости числа ℓ на 3.

Пример 2. Теоремы «В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой» и «Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность» взаимно обратны. Обе они истинны, и, следовательно, здесь можно употребить логическую связку «необходимо и достаточно»:

«Для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противоположных сторон были равны между собой».

5. Доказательство методом от противного.

Доказательство методом от противного обычно проводится по следующей схеме: предполагается, что теорема

$$\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x)) \tag{1}$$

не верна, то есть существует такой объект x, что условие $P\,(x)$ истинно, а заключение $Q\,(x)$ ложно. Если из этих предположений путем логических рассуждений приходят к противоречивому утверждению, то делают вывод о том что исходное предположение не верно, и верна теорема (1).

Покажем, что такой подход дает доказательство истинности теоремы (1).

Действительно, предположение о том, что теорема (1) не справедлива, означает истинность формулы

$$\overline{\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))}.$$

Противоречивое утверждение, которое получается из допущенного предположения, есть конъюнкция $C\&\overline{C}$, где C — некоторое высказывание. Таким образом, схема доказательства от противного сводится к доказательству истинности формулы

$$\overline{\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))} \to C\&\overline{C}.$$

Легко видеть, что эта формула равносильна формуле (1).

Действительно,

$$\begin{aligned} &\overline{\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))} \to C\&\overline{C} \equiv \\ &\qquad \equiv \overline{\overline{\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))}} \vee C\&\overline{C} \equiv \\ &\qquad\qquad \equiv \forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))\,. \end{aligned}$$

§ 13. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРЕДИКАТОВ

Аналогично тому, как была построена аксиоматическая теория высказываний, может быть построена и аксиоматическая теория предикатов. При этом необходимо отметить следующее:

1. Определение формулы исчисления предикатов совпадает с определением формулы логики предикатов, которое вводилось нами ранее.

2. Выбор системы аксиом исчисления предикатов, как и в случае исчисления высказываний, может осуществляться по-разному. Одной из таких систем аксиом может быть система, в которую включены одиннадцать аксиом исчисления высказываний, использованные нами, и две дополнительные аксиомы:

$$\forall x\,(F\,(x) \to F\,(y))\,,$$

$$F\,(t) \to \exists x F\,(x)\,,$$

где t не содержит переменной x.

3. К правилам вывода, которые использовались в исчислении высказываний, добавляются еще два правила:

а) правило введения квантора общности

$$\frac{F \to G(x)}{F \to \forall x G(x)};$$

б) правило введения квантора существования

$$\frac{G(x) \to F}{\exists x G(x) \to F},$$

если F не зависит от x.

4. Понятия вывода и доказуемой формулы определяются аналогично этим понятиям в исчислении высказываний.

5. Как и во всякой аксиоматической теории, рассматриваются проблемы:

а) разрешимости,
б) непротиворечивости,
в) полноты,
г) независимости.

Глава 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

В алгебре высказываний и исчислении высказываний использование таблиц истинности давало достаточно эффективный способ решения вопроса о том, является ли данная формула тавтологией.

Ситуация принципиально меняется при переходе к логике предикатов. Здесь нет эффективного способа, позволяющего для каждой формулы решить вопрос о том, является ли она общезначимой. В связи с этим в математических теориях, которые используют понятие предиката и связанные с ним понятия кванторных операций, необходимым становится аксиоматический метод.

Имеются и другие доводы в пользу аксиоматического метода, и они состоят в следующем: аксиоматический метод базируется на простых отношениях между символами и выражениями точных формальных языков и использует достаточно простые арифметические методы. Это обстоятельство обеспечивает надежность аксиоматического метода.

В этой главе рассматривается сущность аксиоматического метода и те проблемы, которые возникают при его использовании.

Под *аксиоматической теорией*, построенной на основе данной системы аксиом, понимается совокупность всех теорем, доказываемых исходя из этой системы аксиом.

Аксиоматические теории делятся на *формальные* и *неформальные*.

Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико-множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и в значительной степени опирается на здравый смысл.

Формальная аксиоматическая теория считается определенной, если выполнены следующие условия:

1. Задан язык теории.
2. Определено понятие формулы этой теории.
3. Выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами.
4. Определены правила вывода в этой теории.

Среди математических теорий выделяют *теории первого порядка*. Они отличаются от теорий высших порядков тем, что не допускают в своем изложении предикаты, которые имеют в качестве возможных значений своих аргументов другие предикаты и функции. Кроме того, они не допускают кванторные операции по предикатам или функциям.

Теорий первого порядка достаточно для выражений большинства известных математических теорий.

В нашем курсе математической логики мы ограничимся только математическими теориями первого порядка, которые называют иногда *элементарными теориями*.

§ 1. ЯЗЫК ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 1. *Алфавитом* A называется всякое непустое конечное множество символов. Символы алфавита называются буквами.

Определение 2. *Словом* в алфавите A называется всякая конечная последовательность букв алфавита A. Пустая последовательность букв называется пустым словом и обозначается через Λ.

Будем говорить, что два конкретных слова $a_1a_2\ldots a_n$ и $b_1b_2\ldots b_k$ алфавита A *равны* и писать $a_1\,a_2\,\ldots\,a_n = b_1\,b_2\,\ldots\,b_k$, если $n = k$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. При этом число n называют *длиной* этого слова.

Пусть T — некоторая теория. Обозначим через $A(T)$ алфавит этой теории. Множество $E(T)$ слов алфавита $A(T)$ называют *множеством выражений* теории T.

Пару $\langle A(T), E(T)\rangle$, состоящую из алфавита $A(T)$ и множества выражений $E(T)$ теории T, называют *языком теории* T.

Языки первого порядка обслуживают теории первого порядка. В алфавит всякой теории T первого порядка входят по существу те же символы, которые были введены ранее. Это символы логических операций $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$; символы кванторных операций $\forall$, $\exists$ вспомогательные символы — скобки, запятые; счетное множество n-местных предикатных букв $A_j^n (n, j \geqslant 1)$, где верхний индекс указывает на число мест, а нижний — номер предикатной буквы; конечное (возможно, и пустое) или счетное множество функциональных букв $f_j^n (n, j \geqslant 1)$, где верхний индекс указывает на число переменных, входящих в функцию, а нижний — номер функциональной буквы; конечное (возможно, пустое) или счетное множество предметных констант $a_i (i \geqslant 1)$.

В частности, под функциональной буквой может пониматься цепочка логических операций.

Множество предикатных букв вместе с множеством функциональных букв и констант называется *сигнатурой* языка данной теории и является его специфической частью.

Таким образом, в теории T первого порядка могут отсутствовать некоторые или даже все функциональные буквы и предметные константы, а также некоторые, но не все, предикатные буквы.

Различные теории первого порядка могут отличаться друг от друга по составу букв в алфавите.

§ 2. ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Дальнейшее описание теории T требует прежде всего индуктивных определений терма и формулы. *Термы* и *формулы* — это два класса слов множества $E(T)$.

Определение терма. 1. Предметная переменная и предметная константа — суть термы.

2. Если r_1, r_2, $\ldots$, r_n — термы и A — символ n-местной операции, то $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — терм.

3. Никаких других термов, кроме определенных в п. 1 и п. 2, в T нет.

Согласно естественной интерпретации, терм — это имя некоторого предмета. Кроме переменных и предметных констант, термами являются цепочки, образованные из переменных и предметных констант посредством символов операций, т. к. в подразумеваемой интерпретации он истолковывается как значение некоторой функции.

Определение формулы. 1. Если A — символ n-местного отношения (предикат или функция), а r_1, r_2, ..., r_n — термы, то $A(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — формула. В частности, если A — предикатная буква A_i^n, то $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ называется элементарной формулой.

2. Если A и B — формулы, то $A\&B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\overline{A}$ — формулы.

3. Если A — формула, а y — предметная переменная, которая входит в A свободно или не содержится в A, то выражения $\forall y A$, $\exists y A$ — формулы. При этом A называется областью действия квантора.

4. Никаких других формул, кроме определенных в п. 1–3, нет.

§ 3. ЛОГИЧЕСКИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ АКСИОМЫ. ПРАВИЛА ВЫВОДА

Аксиомы теории первого порядка T разбиваются на два класса: *логические аксиомы* и *специальные* (нелогические или собственные аксиомы).

Логические аксиомы. Каковы бы ни были формулы A, B, C теории T, следующие формулы являются логическими аксиомами теории T:

1) $A \to (B \to A)$;

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

3) $\left(\overline{B} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{B} \to A\right) \to B\right)$;

4) $\forall x_i A\,(x_i) \to A\,(t)$, где $A\,(x_i)$ есть формула теории T и t есть терм теории T, свободный в $A\,(x_i)$. Отметим, что t может совпадать с x_i, и тогда мы приходим к аксиоме $\forall x_i A\,(x_i) \to$ $\to A\,(x_i)$;

5) $\forall x_i\,(A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$, если x_i не входит свободно в формулу A.

Замечание. Ранее в главе 2 было построено классическое исчисление высказываний, содержащее 11 аксиом. Однако может быть построено исчисление высказываний с меньшим числом аксиом (в частности, с логическими аксиомами 1)–3).

Специальные аксиомы. Они не могут быть сформулированы в общем случае, так как меняются от теории к теории.

Теория первого порядка, не содержащая собственных аксиом, очевидно, представляет собой чисто логическую теорию. Она носит название исчисления предикатов первого порядка.

Во многих теориях, которые могут быть аксиоматизированы как теории первого порядка, используется понятие равенства. Оно вводится путем добавления двухместного предиката «$x = y$», и в связи с этим добавляются две специальные аксиомы: 1) $\forall x\,(x = x)$; 2) Если x, y, z — различные предметные переменные и $F(z)$ — формула, то $\forall x \forall y\,(x = y \to F\,(x) = F\,(y))$.

Правила вывода. Как и в исчислении высказываний, будем пользоваться понятиями вывода из совокупности формул (высказываний) H. Высказывания, входящие в H, будем называть допущениями (или посылками). Если последним высказыванием в выводе из H стоит высказывание A, то будем говорить, что предложение A выводимо из H и записывать: $H \vdash A$. В частном случае, если $H = \varnothing$, то пишут $\vdash A$.

В число правил вывода теории первого порядка включаются два правила:

1. Правило заключения (или modus ponens):

$$\frac{\vdash A, \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2. Правило связывания квантором всеобщности (или правило обобщения):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$

§ 4. ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ИЗ АЛГЕБРЫ, АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИИ

1. Теория частичного упорядочения.

Пусть теория T содержит одну предикатную букву A_1^2 и не содержит функциональных букв и предметных констант. Вместо формул $A_1^2(x_1, x_2)$ и $\overline{A_1^2(x_1, x_2)}$ обычно пишут $x_1 < x_2$ и $x_1 \nless x_2$.

Пусть T содержит две специальные аксиомы:

а) $\forall x_1 (x_1 \nless x_1)$ — иррефлексивность;

б) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \,\&\, (x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ — транзитивность.

Всякая модель этой теории называется *частично упорядоченной структурой*.

2. Теория групп.

Пусть теория T содержит одну предикатную букву A_1^2, одну функциональную букву f_1^2 и одну предметную константу a_1. Пользуясь принятыми в алгебре обозначениями, будем писать:

$t = s$ вместо $A_1^2(t, s)$,

$t + s$ вместо $f_1^2(t, s)$,

0 вместо a_1.

Специальными аксиомами теории T здесь являются формулы:

а) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$ — ассоциативность;

б) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$ — свойство нуля;

в) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$ — существование обратного элемента;

г) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ — рефлексивность равенства;

д) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \to (x_2 = x_1))$ — симметричность равенства;

е) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2) \to ((x_2 = x_3) \to (x_1 = x_3)))$ — транзитивность равенства;

ж) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \to ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \,\&$
$\&\, (x_2 + x_1 = x_3 + x_1)))$ — подстановочность равенства.

Всякая модель этой теории называется *группой*. Если в группе истинна формула $\forall x_1 \forall x_2\, (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$, то группа называется *абелевой* или *коммутативной*.

Примерами групп являются:

1) множество всех взаимно однозначных отображений множества M на себя, рассматриваемое вместе с операцией суперпозиции отображений;

2) множество Z всех целых чисел, рассматриваемое вместе с операцией сложения целых чисел;

3) множество V_2 всех векторов плоскости, рассматриваемое вместе с операцией сложения векторов по правилу треугольника или параллелограмма;

4) пространство R_2^n всех векторов n-мерного пространства с операцией сложения векторов, определяемой как покоординатное сложение;

5) $C_{[a,b]}$ — пространство всех непрерывных на $[a, b]$ функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f\,(x)\,|$ и обычной операцией сложения.

Теория частичного упорядочения и теория групп являются эффективно аксиоматизированными, то есть имеется возможность для любой данной формулы эффективно выяснить, принадлежит ли она к числу логических аксиом.

3. Аффинная геометрия.

Первичными терминами этой теории являются: множество $\mathcal{P}$ (элементы которого, называемые точками, будут обозначаться прописными латинскими буквами P, Q, ...), множество $\mathcal{L}$ (элементы которого, называемые прямыми, будут обозначаться строчными латинскими буквами ℓ, m, ...) и множество $\mathcal{J}$, называемое отношением инцидентности.

Специальными аксиомами теории T здесь являются формулы:

а) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}\,(< P, \ell > \in \mathcal{J})$ читается «P лежит на ℓ», или «ℓ содержит P», или «ℓ проходит через P», или «P и ℓ инцидентны».

б) Для любых двух различных точек P и Q существует в точности одна прямая, проходящая через P и Q.

(Будем обозначать такую прямую через $P + Q$).

в) Для любой точки P и любой прямой ℓ существует в точности одна прямая m, проходящая через P и параллельная прямой ℓ (т. е. либо $m = \ell$, либо не существует точек, лежащих на обеих прямых ℓ и m).

г) Если A, B, C, D, E и F — шесть различных точек, причем $A+B$ параллельна $C+D$, $C+D$ параллельна $E+F$, $A+C$ параллельна $B+D$ и $C+E$ параллельна $D+E$, то $A+E$ параллельна и $B+F$.

д) Существуют три различные точки, не лежащие на одной прямой.

4. Геометрия (теория равенства отрезков).

Первичные термины: множество S — множество всех отрезков и «=» — отношение равенства, так что выражение «$x = y$» читается так: «отрезок x равен отрезку y».

Специальные аксиомы:

а) $\forall x \in S\,(x = x)$;

б) $\forall x \forall y \forall z\,((x = z)\,\&\,(y = z) \to (x = y))$.

5. Аксиоматическая теория натуральных чисел, построенная итальянским математиком Дж. Пеано.

Первоначальные понятия: непустое множество $\mathbf{N}$, отношение следования «$'$» и выделенный элемент 1.

Специальные аксиомы:

а) $\forall x \in \mathbf{N}\,(x' \neq 1)$;

б) $\forall x \forall y \in \mathbf{N}\,(x = y \to x' = y')$;

в) $\forall x \forall y \in \mathbf{N}\,(x' = y' \to x = y)$;

г) Пусть $M \subset \mathbf{N}$. Тогда $(1 \in M)\,\&\,(\forall x \in M \to x' \in M) \to M = \mathbf{N}$.

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ТЕОРИИ

Доказательство в широком смысле этого слова есть способ обоснования истинности некоторого суждения. Степень убедительности доказательства решающим образом зависит от средств, используемых для обоснования истинности.

Так, в точных науках выработаны определенные требования к эксперименту, при которых факт, полученный в результате эксперимента, может считаться доказанным. В математике, для которой характерен аксиоматический метод, взгляд на доказательство определяется взглядом на аксиоматическую теорию. Слово «теория» понимается здесь в определенном специальном смысле. Термин «теория» применяют по отношению к двум множествам высказываний, одно из которых есть собственное подмножество другого. Большое (объемлющее) множество высказываний определяет предметную область теории, элементы же меньшего (охватывающего) множества высказываний — это высказывания теории, которые считаются в ней истинными или доказуемыми (или теоремами). Они определяются как высказывания, выводимые чисто логическим путем из некоторых заранее выбранных и фиксированных высказываний, называемых аксиомами.

В аксиоматической теории понятию истинности нет места — понятие истинного высказывания имеет смысл лишь в связи с возможными приложениями теории.

Определение 1 (доказательства). *Доказательством* называют конечную последовательность s_1, s_2, ..., s_k высказываний рассматриваемой теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по логическим правилам вывода.

Определение 2 (теоремы). *Теоремой*, или *доказуемым высказыванием*, называется высказывание, являющееся последним высказыванием некоторого доказательства.

Ясно, что любая аксиома является теоремой, причем ее доказательство состоит из одного шага.

Вывод высказывания C из пустого множества посылок есть, очевидно, доказательство высказывания C.

§ 6. ДОКАЗУЕМОСТЬ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ ТАВТОЛОГИЙ

Теорема. *Если формула A теории первого порядка T есть частный случай тавтологии, то A есть теорема в T и может быть выведена с употреблением схем логических аксиом (1), (2) и (3) и правила заключения.*

Доказательство. Пусть формула A получена из некоторой тавтологии B с помощью подстановок, и x_1, x_2, ..., x_n — набор переменных, входящих в B. Как известно, в этом случае существует вывод B из совокупности $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Сделаем в этом выводе всюду подстановки по следующим правилам:

1) если какая-нибудь переменная x_i входит в B, то на места всех ее вхождений в каждую формулу вывода подставляем ту формулу теории T, которая подставлялась в B на места вхождения той же буквы при построении A;

2) если некоторая переменная x_k не входит в B, то на места всех ее вхождений в формулы вывода подставляем произвольную (одну и ту же для данной буквы) формулу теории T.

Полученная таким образом последовательность формул и будет выводом формулы A в теории T. При этих рассуждениях использовались только аксиомы (1), (2), (3) и правило заключения.

§ 7. ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ

Как известно, в исчислении высказываний справедлива

Теорема дедукции. $\dfrac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$.

Эта теорема без соответствующих изменений не справедлива для произвольных теорий первого порядка T.

Например, в любой теории первого порядка всегда $A \vdash \forall x A$, но не всегда доказуема формула $A \to \forall x A$. Действительно, рассмотрим область, содержащую по крайней мере два элемента $M = \{a, b, \dots\}$.

Пусть T — исчисление предикатов, и пусть формула A есть $A_1^1(x)$. Проинтерпретируем A_1^1 каким-нибудь свойством, которым обладает только элемент a. Тогда $A_1^1(x)$ выполнима на множестве, которое содержит a, при этом формула $\forall x A(x)$ не выполнима на множестве M.

Однако теорема дедукции в теории первого порядка имеет место, но в несколько ослабленной форме. Прежде, чем формулировать теорему дедукции для теорий первого порядка, уточним понятие вывода из совокупности формул в этом случае и докажем одно вспомогательное предложение.

Рассмотрим совокупность формул H, A и вывод из этой совокупности B_1, B_2, $\dots$, B_n. Будем говорить, что формула B_k зависит от формулы A в этом выводе в двух случаях:

1) формула B_k есть A, и она включена в вывод как формула, содержащаяся в совокупности H, A;

2) формула B_k получена по правилам заключения и связывания квантором из формул, предшествующих ей в выводе, из которых по крайней мере одна зависит от A.

Например, из совокупности формул $\{\forall x A \to C, A\}$ можно получить вывод

$$A, \quad \forall x A, \quad \forall x A \to C, \quad \forall x C,$$

каждая формула которого зависит от A.

Лемма. *Если в выводе B_1, B_2, ..., B_{n-1} из совокупности H, A формула B не зависит от A, то $H \vdash B$.*

Доказательство леммы проведем методом математической индукции.

1. При $n = 1$ утверждение справедливо. Действительно, если B есть вывод из H, A и не зависит от A, то либо $B \in H$, либо B — доказуемая формула, и в обоих случаях $H \vdash B$.

2. Предположим теперь, что утверждение справедливо для любого вывода длины $k < n$ и докажем его для вывода длины n. Если при этом $B \in H$ или B — доказуемая формула, то $H \vdash B$. Если же B получена из каких-то (одной или двух) формул, предшествующих ей в выводе, то она не зависит от формулы A, так как по индуктивному предположению не зависят от A все формулы, предшествующие ей в выводе. Следовательно, $H \vdash B$.

Теорема дедукции. Пусть H, $A \vdash B$, и при этом пусть существует такой вывод B из H, A, в котором ни при каком применении правила связывания квантором к формулам, зависящим в этом выводе от A, не связывается квантором никакая свободная переменная, входящая в A. Тогда $H \vdash A \to B$.

Доказательство. Пусть B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B есть вывод из H, A, удовлетворяющий условию теоремы. Доказательство проведем методом математической индукции.

1. При $n = 1$ утверждение справедливо. Действительно, если B есть вывод из H, A, то:

а) либо $B \in H$,

б) либо B — доказуемая формула,

в) либо B есть A.

В случаях а) и б) так как $H \vdash B$, и формула $B \to (A \to B)$ доказуема, то по правилу заключения получаем $H \vdash A \to B$. В случае в) формула $A \to B$ есть формула $A \to A$, то есть доказуема, и поэтому выводима из H.

2. Предположим теперь, что утверждение справедливо для любого вывода длины $k < n$ и докажем его справедливость для вывода длины n. Так как $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B$ есть вывод из H, A, то возможны пять случаев:

а) $B \in H$;

б) B — доказуемая формула;

в) B есть A;

г) B получается из предшествующих ей в выводе формул B_i и B_j $(i < j < n)$ по правилу заключения;

д) B получается из формулы B_i, предшествующей ей в выводе $(i < n)$, по правилу связывания квантором.

Для первых трех случаев доказательство утверждения полностью совпадает с доказательством, проведенным для $n = 1$. Рассмотрим четвертый случай. Так как здесь формула B получается из двух формул B_i и B_j при $i < j < n$, то B_j должна иметь вид $B_i \to B$, причем справедливы утверждения

$$H \vdash A \to B_i, \tag{1}$$

$$H \vdash A \to (B_i \to B)\,. \tag{2}$$

Используя аксиому 2), получим

$$H \vdash (A \to (B_i \to B)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B))\,. \tag{3}$$

Из формул (3), (2), (1) по правилу сложного заключения получаем $H \vdash A \to B$.

Рассмотрим, наконец, пятый случай. Пусть в выводе из H, A есть формула B_i $(i < n)$ такая, что B есть $\forall x_1 B_i$. По предположению $H \vdash A \to B_i$ и либо B_i не зависит от A, либо x_1 не является свободной переменной формулы A.

Если B_i не зависит от A, то согласно лемме, $H \vdash B_i$, и тогда, применяя правило связывания квантором, получаем $H \vdash \forall x_1 B_i$, т. е. $H \vdash B$. Далее, используя аксиому 1), имеем $H \vdash B \to (A \to B)$ и, следовательно, $H \vdash A \to B$.

Если x_1 не является свободной переменной формулы A, то используем аксиому 5): $\forall x_1\,(A \to B_i) \to (A \to \forall x_1 B_i)$. Так как $H \vdash A \to B_i$, то по правилу связывания квантором получаем $H \vdash \forall x_1\,(A \to B)$, и тогда по правилу заключения имеем: $H \vdash A \to \forall x_1 B_i$ или $H \vdash A \to B$.

Следствие. *Если H, $A \vdash B$ и существует вывод, для получения которого не использовалось правило связывания квантором к свободным переменным, входящим в формулу A, то $H \vdash A \to B$.*

§ 8. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЯЗЫКА ТЕОРИИ

Под интерпретацией языка теории T понимают всякую систему, включающую в себя:

1. Непустое множество M, называемое областью интерпретации.

2. Какое-либо соответствие, которое каждому элементу языка теории T ставит в соответствие единственный элемент множества M, то есть функцию f с областью определения $\langle A\,(T)\,, E\,(T)\rangle$ и множеством значений, содержащимся в M.

В частности, каждой предикатной букве $A_j^n \in \langle A(T), E(T)\rangle$ ставится в соответствие некоторое n-местное соотношение в M, каждой функциональной букве $f_j^n \in \langle A\,(T)\,, E\,(T)\rangle$ ставится в соответствие некоторая n-местная операция в M, то есть функция $M^n \to M$, и каждой предметной постоянной a_i — некоторый элемент из M.

При заданной интерпретации предметные переменные рассматриваются как переменные, пробегающие область M, а символам логических и кванторных операций придается их обычный смысл.

Для такой интерпретации всякая формула без свободных переменных, т. е. замкнутая формула, представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторое отношение на области интерпретации. Это отношение может быть истинно для одних значений из области интерпретации и ложно для других.

Например, если взять в качестве области интерпретации множество целых положительных чисел и интерпретировать

$A_1^2(x_1, x_2)$ как отношение $x_1 \leqslant x_2$, то $A_1^2(x_1, x_2)$ истинно для всех упорядоченных пар (a, b) положительных чисел таких, что $a \leqslant b$, а формула $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ представляет собой отношение «для каждого целого положительного x_2 $x_1 \leqslant x_2$», которое истинно только для одного числа 1.

И, наконец, формула $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ утверждает существование наименьшего положительного числа и является истинной на множестве целых положительных чисел.

§ 9. ИСТИННОСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФОРМУЛ В ИНТЕРПРЕТАЦИИ. МОДЕЛЬ ТЕОРИИ

Пусть дана некоторая интерпретация с областью M, а G — множество всех счетных последовательностей элементов из M. Определим понятие выполнимости формулы A на последовательности $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in G$.

Функция S^*одной переменной, определенная на множестве всех термов со значениями в M, определяется индуктивно следующим образом:

1. Если терм t есть предметная переменная x_i, то $S^*(t) = b_i$.

2. Если терм t есть предметная константа, то $S^*(t)$ совпадает с интерпретацией этой константы в M.

3. Если f_j^n есть функциональная буква, интерпретируемая операцией g в M и t_1, t_2, $\ldots$, t_n — термы, то

$$S^*\left(f_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)\right) = g\left(S^*(t_1), \ldots, S^*(t_n)\right).$$

Таким образом, S^* — это функция, определяемая последовательностью S и отображающая множество всех термов в M.

Просто говоря, для любой последовательности $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ и для любого t $S^*(t)$ есть элемент множества M, который получается в результате подстановки при каждом i элемента b_i на места всех вхождений переменной x_i в терм t и затем выполнения всех операций интерпретации, соответствующий функциональным буквам терма t.

Например, t есть $f_2^2\left(x_3, f_1^2(x_1, a_1)\right)$, областью интерпретации служит множество целых чисел, f_2^2 интерпретируется как обычное умножение, f_1^2 — как сложение, а a_1 как число 5. Тогда для всякой последовательности $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ целых чисел S^* представляет собой целое число $b_3 \times \times (b_1 + 5)$.

Определим теперь понятие *выполненной формулы*, следуя индуктивному определению формулы.

1. Если A есть элементарная формула $A_j^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и B_j^n есть соответствующее ей отношение в интерпретации, то формула A считается выполненной на последовательности S тогда и только тогда, когда $B_j^n(S^*(t_1), S^*(t_2), \ldots, S^*(t_n))$ принадлежит отношению B_j^n.

2. Формула $\overline{A}$ выполнена на S тогда и только тогда, когда формула A не выполнена на S.

3. Формула $A \to B$ выполнена на S тогда и только тогда, когда формула A не выполнена на S или когда формула B выполнена на S.

4. Формула $\forall x_i A$ выполнена на S тогда и только тогда, когда формула A выполнена на любой последовательности из G, отличающейся от S не более, чем своей i-ой компонентой.

Отсюда ясно, что формула A выполнена на последовательности $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ тогда и только тогда, когда подстановка при каждом i символа, представляющего b_i, на места всех свободных вхождений x_i в A приводит к истинному в данной интерпретации предложению.

Определение 1. Формула A называется *истинной* (в данной интерпретации) тогда и только тогда, когда она выполнена на всякой последовательности из G.

Определение 2. Формула A называется *ложной* (в данной интерпретации), если она не выполнена ни на одной последовательности из G.

Модель теории.

Моделью теории называется интерпретация языка этой теории.

Проще говоря, имея некоторую теорию T, мы приписываем первоначальным понятиям этой теории некоторый новый смысл. Если некоторая совокупность предметов и отношений между ними, выбранных в качестве значений первоначальных понятий аксиоматической теории, т. е. в качестве ее интерпретации, удовлетворяет всем аксиомам теории, то она называется *моделью* данной аксиоматической теории.

Так, ранее мы определили алгебру Буля и получили две ее модели: алгебру логики и алгебру множеств. Или в § 4 были рассмотрены различные модели теории групп.

§ 10. ИЗОМОРФИЗМ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ. КАТЕГОРИЧНОСТЬ ТЕОРИИ

Определение 1. Интерпретация I_1 данной теории T первого порядка *изоморфна* другой интерпретации I_2 теории T, если существует такое взаимно однозначное отображение g (называемое *изоморфизмом*) области M_1 интерпретации I_1 на область M_2 интерпретации I_2, что:

1. если $\left(A_j^n\right)^1$ и $\left(A_j^n\right)^2$ — интерпретации предикатной буквы A_j^n соответственно в I_1 и I_2, то каковы бы ни были $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из M_1, $\left(A_j^n\right)^1(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\left(A_j^n\right)^2(g(b_1), g(b_2), \ldots, g(b_n))$;
2. если $\left(f_j^n\right)^1$ и $\left(f_j^n\right)^2$ — интерпретации функциональной буквы f_j^n соответственно в I_1 и I_2, то для любых $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из M_1, $\left(f_j^n\right)^1(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \left(f_j^n\right)^2(g(b_1), g(b_2), \ldots, g(b_n))$;
3. если a_j^1 и a_j^2 — интерпретации предметной постоянной соответственно в I_1 и I_2, то $a_j^2 = g\left(a_j^1\right)$.

Ясно, что если интерпретации I_1 и I_2 изоморфны, то их области имеют одинаковую мощность.

Определение 2. Математическая теория T называется *категоричной*, если все ее модели изоморфны.

Определение 3. Пусть μ — мощность некоторого множества. Теория T первого порядка называется μ-категоричной если:

1) теория T имеет хотя бы одну модель мощности μ;

2) всякие две модели теории T, имеющие мощность μ, изоморфны.

Например, теория групп некатегорична, т. к. существуют неизоморфные группы. Однако можно говорить, что теория групп категорична в некоторых мощностях, в частности в мощности $\mu = 3$.

Геометрия Евклида является категоричной математической теорией. Любые ее две модели изоморфны. Действительно, нетрудно показать, что любая модель геометрии Евклида изоморфна арифметической модели.

Возьмем в данной модели прямую и на ней фиксируем точку O, затем на этой прямой выбираем точку ℓ, отличную от точки O. Отрезок $O\ell$ примем за единицу. Выбирая положительное направление на прямой, получим числовую ось.

Две взаимно перпендикулярные числовые прямые (прямоугольная декартова система координат) позволяют каждой точке плоскости поставить во взаимно однозначное соответствие координаты этой точки, а каждой прямой на плоскости — уравнение этой прямой. Точно так же поступаем и в другой модели геометрии Евклида на плоскости.

Установить изоморфизм между разными моделями геометрии Евклида позволяет однозначное введение аналитической геометрии.

§ 11. ПРОБЛЕМЫ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, ПОЛНОТЫ, РАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИИ

1. Проблема непротиворечивости.

Теория T называется *противоречивой* (или *несовместной*), если она содержит такое высказывание S, что и S, и его отрицание $\overline{S}$ являются теоремами. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*. Таким образом, теория T называется непротиворечивой, если в ней нет такого высказывания S, что и S, и $\overline{S}$ являются теоремами.

Так как теория T одним из правил вывода содержит правило заключения, то в противоречивой теории любое предложение такой теории является теоремой. Действительно, для любого предложения A теории T $S \to \left(\overline{S} \to A\right)$ есть теорема, т. к. это высказывание — тавтология. Учитывая, что здесь S и $\overline{S}$ — теоремы, и пользуясь дважды правилом заключения, приходим к выводу, что A — теорема.

Для аксиоматических теорий вопрос об их непротиворечивости во многих случаях удается решить с помощью понятия модели. В самом деле, если теория T противоречива, то каждая ее модель содержит противоречие, т. к. пара противоречащих друг другу теорем теории переводится в два противоречащих друг другу высказывания о модели. Значит, теория непротиворечива, если для нее можно указать свободную от противоречий модель. Именно так доказывалась нами непротиворечивость исчисления высказываний.

Если для теории T можно найти такую интерпретацию, что интерпретацией T является конечное множество, то вопрос об отсутствии противоречий в интерпретации решается прямым рассмотрением конечного множества. Так, одноэлементное множество, содержащее единственный элемент ℓ, вместе с определенной на нем операцией $\ell \cdot \ell = \ell$ является моделью теории групп, лишенной противоречий, и, следовательно, теория групп непротиворечива. Однако часто доказательство непротиворечивости модели требует очень сложных рассуждений. В частности, это бывает в случае, когда теория T имеет только бесконечные модели.

Так, вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского можно свети к вопросу о непротиворечивости геометрии Евклида, если использовать для интерпретации геометрии Лобачевского средства геометрии Евклида, или к вопросу о непротиворечивости множества действительных чисел, если использовать соответствующую интерпретацию.

Кстати сказать, что непротиворечивость геометрии Евклида и непротиворечивость теории действительных чисел до сих пор не доказана.

2. Проблема полноты.

В предположении о том, что непротиворечивость некоторой теории доказана (или считается, что может быть доказана), имеет смысл поставить проблему полноты теории.

Определение 1. Теория T называется *абсолютно полной*, если для любого высказывания S этой теории или S, или $\overline{S}$ есть теорема.

Это определение учитывает то обстоятельство, что любое высказывание S теории T, будучи интерпретированной в некоторой модели, оказывается или истинным, или ложным. Но тогда или S, или $\overline{S}$ должно быть теоремой в теории T.

Теория, являющаяся одновременно непротиворечивой и полной, будет максимальной в отношении непротиворечивости — в том смысле, что добавление к такой теории в качестве аксиомы любого предложения, которое можно сформулировать в этой теории, но не являющегося ее теоремой, приводит к противоречивой теории.

Отметим, что для многих математических теорий наличие одновременно обоих качеств (непротиворечивости и полноты) не имеет места.

Определение 2. Аксиоматическая теория называется *полной в узком смысле*, если добавление к ее аксиомам любого недоказуемого в ней утверждения с сохранением в ней всех правил вывода приводит к противоречивой теории. Всякая абсолютно полная теория будет полна и в узком смысле. Действительно, пусть некоторая абсолютно полная теория не полна в узком смысле. Тогда найдется такое утверждение U этой теории, недоказуемое в ней, что новая теория, построенная на основе прежних аксиом и утверждения U в качестве новой аксиомы, непротиворечива. Тогда U принадлежит новой теории. Кроме того, в связи с абсолютной полнотой исходной теории и недоказуемостью в ней утверждения U будет доказуемо утверждение $\overline{U}$. Таким образом, в новой теории оказались доказуемыми U и $\overline{U}$, т. е. получили противоречие.

3. Проблема разрешимости.

Проблема разрешимости является алгоритмической проблемой, в которой для заданного множества A требуется построить алгоритм, разрешающий A относительно другого множества B, включающего $A\,(A \subset B)$, т. е. такой алгоритм U, который применим ко всякому элементу из B, причем $U\,(x) = 1$, если $x \in A$ и $U\,(x) = 0$, если $x \in B \backslash A$.

Простейшим примером проблемы разрешимости является проблема разрешимости алгебры логики, в которой она состоит в отыскании алгоритма, позволяющего для каждой формулы алгебры логики установить, является ли она или тождественно истинной, или тождественно ложной, или выполнимой. Важным классом алгоритмических проблем является проблема разрешимости для формальных теорий, то есть проблема разрешимости для множества всех доказуемых (выводимых) в теории формул (множество A) относительно множества всех формул теории (множество B). Выше она была рассмотрена для аксиоматической теории исчисления высказываний.

§ 12. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ (ТЕОРИИ БЕЗ СПЕЦИАЛЬНЫХ АКСИОМ)

Теорема. *Всякое исчисление предикатов первого порядка T непротиворечиво.*

Доказательство. Для произвольной формулы A обозначим через $H(A)$ выражение, которое получается из формулы A путем следующего ее преобразования: в формуле A опускаются все кванторы и термы вместе с соответствующими скобками и запятыми. Так, например, формула $\forall x A_1^2(x,y) \to A_1^1(z)$ в результате такого преобразования примет вид $A_1^2 \to A_1^1$, т. е. $H\left(\forall x A_1^2(x,y) \to A_1^1(z)\right)$ есть $A_1^2 \to A_1^1$, а формула $H\left(\overline{\exists t A_2^3(x,y,t)} \to A_3^1(z)\right)$ есть $\overline{A_2^3} \to A_3^1$ и т. д. Ясно, что $H\left(\overline{A}\right) \equiv \overline{H(A)}$, и $H(A \to B) \equiv H(A) \to H(B)$. Легко видеть, что для формулы исчисления предикатов A формула $H(A)$ есть формула исчисления высказываний, а для всякой аксиомы A, полученной по какой-нибудь из схем с помощью аксиом 1)–5), $H(A)$ является тавтологией. Это очевидно для аксиом 1)–3). Для аксиомы $\forall x A(x) \to A(t)$ формула $H(\forall x A(x) \to A(t))$ есть $A \to A$, т. е. тавтология, а для аксиомы $\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ формула $H(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x)))$ есть $(A \to B) \to (A \to B)$, то есть также тавтология.

Как известно, в исчислении высказываний правило заключения, примененное к тавтологиям A, $A \to B$ приводит к тавтологии B. Таким образом, если $H(A)$ и $H(A \to B)$ являются тавтологиями, то $H(B)$ — тавтология.

И, наконец, если $H(A)$ — тавтология, то и $H(\forall x A)$ — тавтология, так как результаты применения операции H к A и $\forall x A$ совпадают.

Следовательно, если A есть теорема в исчислении предикатов, то $H(A)$ — тавтология.

Из сказанного следует, что если бы в исчислении предикатов существовала формула B такая, что в этой теории были бы доказуемы B и $\overline{B}$, то выражения $H(B)$ и $H\left(\overline{B}\right)$ были бы тавтологиями в исчислении высказываний, то есть доказуемыми формулами, что невозможно. Значит, исчисление предикатов непротиворечиво.

Замечание. Операция H равносильна интерпретации исчисления предикатов в области, состоящей из одного элемента. Все теоремы исчисления предикатов истинны в такой интерпретации.

§ 13. ТЕОРИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В построении теории натуральных чисел обычно рассматривается два подхода: первый из них основан на рассмотрении натуральных чисел как мощностей конечных множеств, а во втором используется аксиоматический метод.

Аксиоматическое построение арифметики натуральных чисел обычно связывают с именем Пеано, хотя аксиоматическая характеристика натурального ряда немного ранее (в 1888 г.) была дана Дедекиндом.

Язык наиболее употребимого варианта аксиоматики натуральных чисел содержит константу 0, числовые переменные, символ равенства, функциональные символы $+$, $\cdot$, $'$ (прибавление единицы) и логические связки.

Термы строятся из константы 0 и переменных с помощью функциональных символов. В частности, натуральные числа изображаются термами вида $0, 0', 0'', \ldots$.

Элементарными формулами здесь являются равенства термов, остальные формулы строятся из элементарных с помощью логических связок $\&$, $\vee$, $\to$, $-$, $\forall$, $\exists$. Формулы в аксиоматической теории натуральных чисел называют арифметическими формулами.

Таким образом, эта теория первого порядка имеет одну предикатную букву A_1^2, единственную предметную константу 0 и три функциональных буквы f_1^1, f_1^2, f_2^2. Но пользуясь привычными в арифметике обозначениями, будем писать:

$t = s$ вместо $A_1^2\,(t, s)$,

t' вместо $f_1^1\,(t)$,

$t + s$ вместо $f_1^2\,(t, s)$,

$t \cdot s$ вместо $f_2^2\,(t, s)$.

Специальные аксиомы.

Системы аксиом Пеано вместе в некоторыми положениями теории множеств вполне достаточно не только для построения теории натуральных чисел, но и теории рациональных, действительных и комплексных чисел. Однако в аксиомах Пеано содержатся интуитивные понятия, такие, как, например, «свойство», что лишает систему строгого формального подхода. В связи с этим будем рассматривать теорию натуральных чисел, которая основана на системе аксиом Пеано, но несколько более конкретизирована. Эта теория содержит следующие специальные аксиомы:

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$;
2. $x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$;
3. $0 \neq (x_1)'$;
4. $x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$;
5. $x_1 + 0 = x_1$;
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$;
7. $x_1 \cdot 0 = 0$;
8. $x_1' \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$;
9. $A(0) \to (\forall x\, (A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x))$,

где $A(x)$ — произвольная формула теории натуральных чисел.

Отметим, что аксиомы 1–8 являются конкретными формулами, а аксиома 9 является схемой аксиом, порождающей бесконечное множество аксиом. Ее обычно называют принципом математической индукции.

Аксиомы 1–2 обеспечивают некоторые необходимые свойства равенства (в исходной системе аксиом Пеано–Дедекинда эти свойства равенства предполагались интуитивно очевидными).

Аксиомы 5–8 представляют собой рекурсивные равенства, служащие определениями операций сложения и умножения (в исходной системе аксиом Пеано–Дедекинда подобные аксиомы не формулировались, т. к. допускалось интуитивное использование теории множеств, в которой существование операций $+$ и $\cdot$, удовлетворяющих аксиомам 5–8, выводимо).

Из аксиомы 9 можно получить и следующее правило индукции: Если $A(0)$ и $\forall x\, (A(x) \to A(x'))$, то $\forall x A(x)$.

Средства сформулированной теории натуральных чисел оказываются достаточными для вывода теорем, установленных в стандартных курсах элементарной теории чисел. В настоящее время неизвестно ни одной содержательной теоретико-числовой теоремы, которая не была бы выводима в аксиоматической теории натуральных чисел.

§ 14. ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Под теоремой Гёделя о неполноте понимается обычно общее название двух теорем Гёделя.

Первая теорема Гёделя (о неполноте). *В любой непротиворечивой формальной системе, содержащей минимум арифметики, а, следовательно, и в теории натуральных чисел, найдется формально неразрешимое суждение, т. е. такая замкнутая формула* A*, что ни* A*, ни* $\overline{A}$ *не являются выводимыми в системе.*

Вторая теорема Гёделя (о неполноте) утверждает, что при выполнении естественных дополнительных условий в качестве A можно взять утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы.

Первая теорема Гёделя означает, что какая бы система аксиом для арифметики ни была выбрана, всегда найдется такое высказывание о натуральных числах, выраженное на языке этой формальной теории, которое в данной теории не может быть ни доказано, ни опровергнуто.

Глава 5

АЛГОРИТМЫ

§ 1. ПОНЯТИЕ АЛГОРИТМА И ЕГО ХАРАКТЕРНЫЕ ЧЕРТЫ

Понятие алгоритма принадлежит к числу основных понятий математики. Оно прошло большой путь развития. Еще в период зарождения математики в ней стали возникать различные вычислительные процессы чисто механического характера, с помощью которых искомые величины целого класса задач вычислялись последовательно из данных исходных величин по определенным правилам. Со временем такие процессы в математике получили название алгоритмов. Примерами алгоритмов являются:

1. Правила выполнения арифметических действий над числами.
2. Правило отыскания наибольшего общего делителя (алгоритм Евклида).
3. Правило извлечения квадратного корня.
4. Правило отыскания решений квадратного уравнения.
5. Правило отыскания производной многочлена n-й степени.
6. Правило интегрирования рациональной функции.

В каждом из приведенных примеров приходится иметь дело с классом однотипных задач, или, как говорят, с *массовой проблемой*. Задачи такого класса отличаются друг от друга значениями входящих в них параметров. Так, в задаче отыскания решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ участвует три параметра a, b и c; меняя их, получаем различные задачи одного класса.

В связи со сказанным можно дать следующее **определение** понятия алгоритма.

Алгоритмом называется общий единообразный, точно определенный способ решения любой задачи из данной массовой проблемы.

Такое определение нельзя считать строгим. Действительно, в нем встречаются слова, точный смысл которых не установлен. В частности, это касается слова «способ». В связи с этим не строгое определение алгоритма называют интуитивным.

Отметим характерные черты понятия алгоритма.

1. **Дискретность алгоритма**. Алгоритм — это процесс последовательного построения величин таким образом, что в начальный момент задается исходная конечная система величин, а в каждый следующий момент система величин получается по определенному закону из системы величин, имевшихся в предыдущий момент.
2. **Детерминированность алгоритма**. Система величин, получаемых в какой-то неначальный момент, однозначно определяется системой величин, полученных в предшествующие моменты времени.
3. **Элементарность шагов алгоритма**. Закон получения последующей системы величин из предшествующей должен быть простым.
4. **Массовость алгоритма**. Начальная система величин может выбираться из некоторого потенциально бесконечного множества.
5. **Результативность алгоритма**. Последовательный процесс построения величин должен быть конечным и давать результат, то есть решение задачи.

Алгоритмы, в которых основную роль играют математические действия, называют численными алгоритмами. От численных алгоритмов отделяют логические алгоритмы игр. В качестве примера, дающего логический алгоритм, рассмотрим следующую игру.

Имеется 15 предметов. В игре участвуют двое: начинающий и противник. Каждый игрок по очереди берет один, два или три предмета. Выигрывает тот, кто берет последний предмет. Какой стратегии должен придерживаться начинающий, чтобы выиграть?

Выигрышная стратегия начинающего может быть описана в форме следующей таблицы:

Номер хода	Ход начинающего	Ход противника
1	3	n
2	$4-n$	m
3	$4-m$	p
4	$4-p$	0

Действительно, в итоге такой стратегии начинающий возьмет $3+(4-n)+(4-m)+(4-p)=15-(n+m+p)$ предметов, а противник возьмет $n+m+p$ предметов, т. е. в сумме они возьмут 15 предметов, и последний предмет будет взят начинающим.

Слово «алгоритм» происходит от имени узбекского математика XIII в. Абу Абдалла Мухаммед ибн Муса ал Хорезми ал Меджуси. Оно претерпело эволюцию: ал Хорезми — ал Горезми — алгоритм.

§ 2. РАЗРЕШИМЫЕ И ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть имеется некоторый алфавит. Обозначим через S множество всех слов в данном алфавите, а через M — подмножество множества S.

Определение 1. Множество M называется *разрешимым*, если для него существует алгоритм, разрешающий проблему вхождения слова x в M.

Определение 2. Множество M называется *эффективно перечислимым*, если существует алгоритм, позволяющий перечислить все элементы этого множества (возможно, с повторениями).

Теорема 1. *Если множества M и L эффективно перечислимы, то эффективно перечислимы множества $M \cup L$ и $M \cap L$.*

Доказательство. Пусть множества M и L эффективно перечислимы. Тогда для каждого из них существует свой алгоритм, позволяющий перечислить все элементы данного множества. Алгоритм для эффективного перечисления множеств $M \cup L$ и $M \cap L$ получается путем одновременного применения алгоритмов для эффективного перечисления множеств M и L.

Теорема 2 (Поста). *Множество M разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение эффективно перечислимы.*

Доказательство. Пусть множество M и его дополнение CM эффективно перечислимы, то есть существуют алгоритмы A и B, с помощью которых можно перечислить элементы этих множеств. Но тогда при перечислении элементов множеств M и CM в их списке встретится элемент x. Следовательно, существует алгоритм C, позволяющий узнать, принадлежит элемент x множеству M или не принадлежит.

Пусть множество M разрешимо. Тогда существует алгоритм, решающий проблему вхождения x в M. Пользуясь этим алгоритмом, составим список элементов, входящих в M, и список элементов, входящих в CM. Следовательно, мы получим два алгоритма A и B, позволяющих перечислить множества M и CM. Примерами эффективно перечислимых множеств являются:

1) множество $M = \left\{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\right\}$ квадратов натуральных чисел,

2) множество упорядоченных пар натуральных чисел.

Действительно, множество $M = \left\{n^2\right\}$ перечислимо, т. к. для получения его элементов нужно последовательно брать натуральные числа и возводить их в квадрат. Более того, это множество является также и разрешимым: для проверки того, принадлежит ли некоторое натуральное число x множеству M, нужно разложить число на простые множители, и это даст возможность установить, является ли оно точным квадратом.

Множество упорядоченных пар натуральных чисел может быть эффективно перечислено с помощью так называемого диагонального метода. Действительно, выпишем все упорядоченные пары натуральных чисел в следующем виде:

$$\begin{array}{cccccccccc}
(0,0), & & (0,1), & & (0,2), & & (0,3), & & (0,4), & \ldots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
(1,0), & & (1,1), & & (1,2), & & (1,3), & & (1,4), & \ldots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
(2,0), & & (2,1), & & (2,2), & & (2,3), & & (2,4), & \ldots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
(3,0), & & (3,1), & & (3,2), & & (3,3), & & (3,4), & \ldots \\
\multicolumn{10}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

Перечисление осуществляется последовательным прохождением по диагоналям, начиная с верхнего левого угла. Начальный список этих пар запишется так:

(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), (4,0), $\ldots$.

Теорема 3. *Существует эффективно перечислимое, но неразрешимое множество натуральных чисел.*

Для доказательства теоремы, как это следует из теоремы Поста, достаточно привести пример такого множества натуральных чисел U, которое само было бы перечислимым, а его дополнение CU перечислимым не было.

Пусть M_0, M_1, M_2, $\ldots$ — эффективное перечисление всех перечислимых множеств натуральных чисел, т. е. такое перечисление, что по любому $n \in N$ можно восстановить само множество M_n.

Рассмотрим теперь алгоритм A, который последовательно перечисляет все элементы множества U. На шаге с номером (m, n) этот алгоритм вычисляет элемент с номером m множества M_n, и если этот элемент совпадает с n, то он относит его в множество U, т. е. $n \in U \Leftrightarrow n \in M_n$.

Отсюда ясно, что множество CU отличается от любого перечислимого множества хотя бы одним элементом, т. к. CU состоит из всех таких элементов n, что $n \notin M_n$. Поэтому CU не является перечислимым. Следовательно, согласно теореме Поста U неразрешимо.

Доказанная теорема фактически включает в себя в неявном виде теорему Гёделя о неполноте формальной арифметики, приведенную ранее без доказательства.

§ 3. УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ АЛГОРИТМА

В истории математики накопилось много случаев длительных и часто безрезультатных поисков тех или иных алгоритмов. При этом естественно возникало сомнение в существовании алгоритма.

Одним из ярких примеров такого случая является история решения десятой проблемы Д. Гильберта.

В 1900 году на втором международном математическом конгрессе в Париже немецкий математик Давид Гильберт огласил список 23 трудных проблем, на важность решения которых он обращал внимание математической общественности. Среди них была и следующая 10-я проблема Гильберта: требуется выработать алгоритм, позволяющий для любого диофантова уравнения выяснить, имеет ли оно целочисленное решение.

Рассмотрим всевозможные диофантовы уравнения, т. е. уравнения вида $P = 0$, где P является многочленом с целочисленными коэффициентами. Такими будут, например, уравнения:

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0,$$
$$10x^5 + 7x^2 + 5 = 0,$$

из которых первое с тремя неизвестными, а второе с одним неизвестным. В общем случае рассматривают уравнения с любым числом неизвестных. Такие уравнения могут иметь целочисленные решения, а могут и не иметь.

Уравнение $x^2 + y^2 - 2xz = 0$ имеет бесконечное множество целочисленных решений, а уравнение $10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$ таких решений не имеет.

Для частного случая диофантова уравнения с одним неизвестным давно известен алгоритм, позволяющий найти все его целочисленные решения. Установлено, что если уравнение

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целочисленными коэффициентами имеет целый корень, то он обязательно является делителем a_n. В связи с этим можно предложить такой алгоритм:

1. Найти все делители числа a_n: d_1, d_2, …, d_n.
2. Вычислить $P_n(x)$ для каждого из делителей числа a_n.
3. Если при некотором i из совокупности 1, 2, …, k $P_n(d_i) = 0$, то d_i — корень уравнения. Если при всех $i = 1, 2, \dots, k$ $P_n(d_i) \neq 0$, то уравнение не имеет целочисленных решений.

Поиски решения десятой проблемы Гильберта привлекли внимание многих математиков и длились около 70 лет. Только 1968 году молодым математиком Ю. Мятиясевичем было доказано, что нет алгоритма, дающего решение поставленной задачи.

Интуитивное определение алгоритма хотя и не строгое, но настолько ясное, что не дает оснований для сомнений в тех случаях, когда речь идет о найденном алгоритме решения конкретной задачи.

Положение существенно меняется, когда возникает алгоритмическая проблема, решение которой не найдено, и требуется установить, имеет ли она решение.

Действительно, в этом случае нужно либо доказать существование алгоритма, либо доказать его отсутствие.

В первом случае достаточно дать описание фактического процесса, решающего задачу. В этом случае достаточно и интуитивного понятия алгоритма, чтобы удостовериться в том, что описанный процесс есть алгоритм.

Во втором случае нужно доказать несуществование алгоритма, а для этого нужно точно знать, что такое алгоритм. Между тем для общего понятия алгоритма точного определения до тридцатых годов XX в. не было, и поэтому выработка такого определения стала одной из важных задач современной математики. При формулировке этого определения пришлось преодолеть многие трудности.

Во-первых, такое определение должно было правильно отражать сущность интуитивного определения алгоритма.

Во-вторых, оно должно было быть совершенным с точки зрения формальной точности.

И, наконец, различные исследователи этой проблемы исходили из разных технических и логических соображений, и вследствие этого было выработано несколько определений алгоритма. Однако со временем выяснилось, что все эти определения равносильны, т. е. определяют одно и то же понятие. Это и есть современное понятие алгоритма.

В подходах к определению понятия алгоритма можно выделить *три основных направления*.

Первое направление связано с уточнением понятия эффективно вычислимой функции. Этим занимались А. Чёрч, К. Гёдель, С. Клини. В результате был выделен класс так называемых частично рекурсивных функций, имеющих строгое математическое определение. Анализ идей, приведших к этому классу функций, дал им возможность высказать гипотезу о том, что класс эффективно вычислимых функций совпадает с классом частично рекурсивных функций.

Второе направление связано с машинной математикой. Здесь сущность понятия алгоритма раскрывается путем рассмотрения процессов, осуществляемых в машине. Впервые это было сделано Тьюрингом, который предложил самую общую и вместе с тем самую простую концепцию вычислительной машины. Ее описание было дано Тьюрингом в 1937 году. При этом Тьюринг исходил лишь из общей идеи работы машины как работы вычислителя, оперирующего в соответствии с некоторым строгим предписанием.

Третье направление связано с понятием нормальных алгоритмов, введенным и разработанным российским математиком А. А. Марковым.

§ 4. ВЫЧИСЛИМЫЕ ФУНКЦИИ. ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЕ И ОБЩЕРЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Для алгоритмических проблем типичным является то обстоятельство, что требуется найти алгоритм для решения задачи, в условиях которой входят значения некоторой конечной системы целочисленных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а искомым результатом также является целое число y. Следовательно, стоит вопрос о существовании алгоритма для вычисления значений числовой функции y, зависящей от целочисленных значений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 1. Функция $g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *эффективно вычислимой*, если существует алгоритм, позволяющий вычислить ее значения.

Так как в этом определении алгоритм понимается в интуитивном смысле, то и понятие эффективно вычислимой функции является интуитивным.

Однако переход от алгоритма к эффективно вычислимой функции дает определенные преимущества. Дело в том, что те требования, которые предъявляются к алгоритму в его характерных чертах, выполняются для совокупности всех вычислимых функций, которая носит название совокупности рекурсивных функций.

Гёдель впервые описал класс всех рекурсивных функций как класс всех числовых функций, определяемых в некоторой нормальной системе. Чёрч в 1936 году пришел к том же классу функций, исходя из других предпосылок. Здесь построение класса вычислимых функций строится следующим образом.

Выбираются *простейшие функции*:

$\lambda(x) = x + 1$ (оператор сдвига),

$O(x) = 0$ (оператор аннулирования),

$I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$ (оператор проектирования).

Ясно, что все три простейшие функции всюду определены и интуитивно вычислимы.

Далее вводятся операции над функциями.

1. Суперпозиция функций.

Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; функцию $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемую равенством

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \varphi(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n), \ldots, f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)).$$

Будем говорить, что функция ψ получена из функций φ и f_1, f_2, $\ldots$, f_m *суперпозицией*.

Если мы каким-либо образом умеем вычислять функции f_1, f_2, $\ldots$, f_m и φ, то функция ψ может быть вычислена так: придадим переменным x_1, x_2, $\ldots$, x_n некоторые значения a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Вычисляя все $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, найдем $b_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Вычисляя теперь $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, найдем $c = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ясно, что если все функции f_1, f_2, $\ldots$, f_m и φ всюду определены, то функция ψ всюду определена. Функция ψ будет не всюду определенной, если хотя бы одна из функций f_1, f_2, $\ldots$, f_m не всюду определена, или если можно найти такие значения аргументов a_1, a_2, $\ldots$, a_n, что $b_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, но $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ не определено ($i = \overline{1, m}$).

Таким образом, если функции f_1, f_2, $\ldots$, f_m, φ интуитивно вычислимы, то будет интуитивно вычислима и функция ψ.

Отметим, что возможны случаи, когда не все функции f_1, f_2, ..., f_m зависят от всех n аргументов x_1, x_2, ..., x_n. В этих случаях для получения суперпозиции используются фиктивные аргументы и функции $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Например, функция $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ получается суперпозицией из функций $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, и $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)$.

2. Схема примитивной рекурсии.

Пусть имеется две функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $n > 1$. Рассмотрим новую функцию, которая удовлетворяет следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \\ &f(y+1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \psi(y, f(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Отметим, что функция φ зависит от $n-1$ аргументов, функция ψ — от $n+1$ аргументов, а функция f — от n аргументов.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из функций φ и ψ с помощью равенства (1), то говорят, что функция f получена из функций φ и ψ по *схеме примитивной рекурсии*.

Если функции φ и ψ интуитивно вычислимы, то будет интуитивно вычислима и функция f. Действительно, пусть a_1, a_2, ..., a_n — набор значений аргументов x_1, x_2, ..., x_n. Тогда последовательно находим

$$f(0, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \varphi(a_2, a_3, \ldots, a_n) = b_0,$$
$$f(1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3, \ldots, a_n) = b_1,$$
$$f(2, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = b_2 \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что если функции φ и ψ всюду определены, то будет всюду определена и функция f.

Рассмотрим примеры получения функций по схеме примитивной рекурсии.

Пример 1. Пусть функция $f(y, x)$ задана равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, x) = x, \\ &f(y+1, x) = f(y, x) + 1. \end{aligned}\right\}$$

Здесь функция $\varphi(x) = x$, а $\psi(x, y, z) = y + 1$.

Вычислим значение функции $f(y,x)$ при $y = 5$, $x = 2$. Т. к. $f(0,2) = \varphi(2) = 2$, то из второго равенства последовательно имеем:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2) = \psi(0,2,2) = 2+1 = 3 \\ f(2,2) = \psi(1,3,2) = 3+1 = 4 \\ f(3,2) = \psi(2,4,2) = 4+1 = 5 \\ f(4,2) = \psi(3,5,2) = 5+1 = 6 \\ f(5,2) = \psi(4,6,2) = 6+1 = 7 \end{array}\right\}$$

Нетрудно показать, что $f(y,x) = y + x$. Действительно, $f(y+z,x) = f(y,x) + z$. Полагая в этом равенстве $y = 0$, получим $f(z,x) = f(0,x) + z$ или $f(z,x) = x + z$.

Пример 2. Пусть функция $f(y,x)$ задана равенствами:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,x) = 0, \\ f(y+1,x) = f(y,x) + x. \end{array}\right\}$$

Здесь $\varphi(x) = 0$, $\psi(x,y,z) = y + z$.

Вычислим значение функции $f(y,x)$ при $y = 2$, $x = 2$. Так как $f(0,x) = \varphi(x) = 0$, то $f(0,2) = 0$, а значения $f(1,2)$ и $f(2,2)$ находим последовательно:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2) = \psi(1,0,2) = 0+2 = 2 \\ f(2,2) = \psi(2,2,2) = 2+2 = 4. \end{array}\right\}$$

Легко показать, что в этом примере $f(y,x) = x \cdot y$. Действительно, $f(y+z,x) = f(y,x) + z \cdot x$. Полагая в этом равенстве $y = 0$, получим $f(z,x) = f(0,x) + z \cdot x$ или $f(z,x) = z \cdot x$.

3. Операция минимизации (μ-оператор)**.**

Пусть задана некоторая функция $f(x,y)$. Зафиксируем значение x и выясним, при каком y $f(x,y) = 0$.

Более сложной задачей является отыскание для данной функции $f(x,y)$ и фиксированного x *наименьшего* из тех значений y, при которых функция $f(x,y) = 0$. Так как результат решения задачи зависит от x, то наименьшее значение y, при котором функция $f(x,y) = 0$, есть функция x. Принято обозначение

$$\varphi(x) = \mu y\,[f(x,y) = 0]\,.$$

(Читается: «наименьшее y такое, что $f(x,y) = 0$».)

Аналогично определяется функция многих переменных:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu y\,[f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0]\,.$$

Переход от функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ к функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принято называть *применением μ-оператора*.

Для вычисления функции φ можно предложить следующий алгоритм:

1. Вычислим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)$. Если это значение f равно нулю, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

2. Вычислим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) = 0$, то полагаем $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Если же $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \neq 0$, то переходим к следующему шагу. И т. д.

Если окажется, что для всех y функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \neq \neq 0$, то функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в этом случае считают неопределенной. Но возможно, что существует такое y_0, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_0) = 0$ и, значит, есть и наименьшее y, при котором $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$; и в то же время может случиться, что при некотором z $(0 < z < y_0)$ значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ не определено. Очевидно, что в этом случае процесс вычисления наименьшего y, при котором $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ не дойдет до y_0. И здесь функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ считают неопределенной.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x - y$, которая может быть получена с помощью оператора минимизации:

$$f(x,y) = \mu z(y + z = x) = \mu z\left[I_3^2(x,y,z) + I_3^3(x,y,z) = I_3^1(x,y,z)\right].$$

Вычислим, например, $f(7, 2)$, то есть значение функции при $y = 2$, $x = 7$. Для этого положим $y = 2$ и будем придавать x последовательно значения:

$$\begin{aligned}
z &= 0, \qquad 2 + 0 = 2 \neq 7,\\
z &= 1, \qquad 2 + 1 = 3 \neq 7,\\
z &= 2, \qquad 2 + 2 = 4 \neq 7,\\
z &= 3, \qquad 2 + 3 = 5 \neq 7,\\
z &= 4, \qquad 2 + 4 = 6 \neq 7,\\
z &= 5, \qquad 2 + 5 = 7 = 7.
\end{aligned}$$

Таким образом, $f(7, 2) = 5$.

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена в конечное число шагов из простейших функций при помощи операций суперпозиции, схем примитивной рекурсии и μ-оператора.

Определение 3. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *общерекурсивной*, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Примерами общерекурсивных функций являются функции:

1. $\lambda(x)$,
2. $O(x)$,
3. $I_n^m(x)$,
4. $f(y, x) = y + x$,
5. $f(y, x) = x \cdot y$,
6. $f(y, x) = x + n$.

Тезис А. Чёрча. *Каждая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.*

Этот тезис нельзя доказать, т. к. он связывает нестрогое математическое понятие интуитивно вычислимой функции со строгим математическим понятием частично рекурсивной функции.

Но этот тезис может быть опровергнут, если построить пример функции интуитивно вычислимой, но не являющейся частично рекурсивной.

§ 5. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Если для решения некоторой массовой проблемы известен алгоритм, то для его реализации необходимо лишь четкое выполнение предписаний этого алгоритма. Автоматизм, необходимый при реализации алгоритма естественно приводит к мысли о передаче функций человека, реализующего алгоритм, машине. Идею такой машины предложили в тридцатые годы американский математик Э. Пост и английский математик А. Тьюринг.

Рассмотрим один из вариантов указанной машины, которая носит название *машины Тьюринга*.

Устройство машины Тьюринга включает в себя:

1. **Внешний алфавит,** то есть конечное множество символов $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. В этом алфавите в виде слова

кодируется та информация, которая подается в машину. Машина перерабатывает информацию, поданную в виде слова, в новое слово.

2. **Внутренний алфавит** машины, состоящий из символов $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$, п, л, н. Символы $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ выражают конечное число состояний машины. Для любой машины число состояний фиксировано. Два состояния имеют особое назначение: q_1 — начальное состояние машины, q_0 — заключительное состояние (стоп-состояние). Символы п, л, н — это символы сдвига (вправо, влево, на месте).

3. **Бесконечная в обе стороны лента** (внешняя память машины). Она разбита на клетки, В каждую клетку может быть записана только одна буква. Пустую клетку будем обозначать символом a_0.

4. **Управляющая головка.** Она передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки, т. е. воспринимать символ. В одном такте работы машины управляющая головка может сдвигаться только на одну клетку (вправо, влево) или оставаться на месте.

	a_0	a_3	a_2	a_2	a_4	a_1	
		q_1					

Рис. 1

Каждое сведение, хранящееся на ленте, изображается конечным набором символов (букв) внешнего алфавита, отличного от a_0. К началу работы машины на ленту подается начальное сведение (начальная информация). В этом случае управляющая головка, как правило, находится у крайнего левого знака с указанием начального состояния q_1 (рис. 1) (начальная конфигурация). Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточные информации.

В качестве начальной информации на ленту можно подать любую конечную систему знаков внешнего алфавита (любое слово в этом алфавите), расставленную произвольным образом по ячейкам. Но в зависимости от того, какая была подана начальная информация, возможны два случая:

1. После конечного числа тактов машина останавливается (переходит в стоп-состояние q_0), и при этом на ленте оказывается изображенной информация B. В таком случае говорят, что машина применима к начальной информации A и перерабатывает ее в результирующую информацию B.

2. Машина никогда не останавливается (не переходит в стоп-состояние). В таком случае говорят, что машина не применима к начальной информации A.

В каждом такте работы машины она действует по функциональной схеме, которая имеет вид:

$$a_i q_j \Rightarrow a_\nu \begin{matrix} \text{п} \\ \text{л} \\ \text{н} \end{matrix} q_s.$$

Здесь a_i, a_ν — буквы внешнего алфавита; q_j, q_s — состояния машины; п, л, н — символы сдвига.

В зависимости от того, какая буква на ленте обозревается управляющей головкой (в нашей записи a_i), и в каком состоянии (в нашей записи q_j) находится машина, в данном такте вырабатывается команда, состоящая из трех элементов:

1. Буква внешнего алфавита, на которую заменяется обозреваемая буква (a_ν).

2. Адрес внешней памяти для следующего такта $\begin{pmatrix} \text{п} \\ \text{л} \\ \text{н} \end{pmatrix}$.

3. Следующее состояние машины (q_s).

Совокупность всех команд образует *программу машины Тьюринга*. Программа представляется в виде двумерной таблицы и называется Тьюринговой функциональной схемой.

Пример такой схемы изображен на рис. 2 (машина Тьюринга 1).

	a_0	a_1	a_2
q_1	a_2 л q_3	a_1 п q_2	a_2 л q_1
q_2	a_0 н q_2	a_2 н q_1	a_1 н q_2
q_3	a_0 п q_0	a_1 п q_4	a_2 н q_1
q_4	a_1 н q_3	a_0 п q_4	a_2 п q_4

Рис. 2

Ясно, что работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой. Иными словами, две машины Тьюринга с общей функциональной схемой неразличимы, и различные машины Тьюринга имеют различные программы.

Для простоты изображения различных конфигураций машины Тьюринга будем в дальнейшем записывать информацию в виде слова, не изображая ленты и ее разбивки на клетки, а вместо изображения управляющей головки и состояния машины записывать только состояние машины.

Рассмотрим, как работает машина Тьюринга, заданная функциональной схемой 1.

Пример 1. Пусть начальная конфигурация имеет вид:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & q_1 & \end{array}$$

.

Так как управляющей головкой обозревается буква a_2, а машина находится в состоянии q_1, то машина вырабатывает команду a_2л q_1, и в результате получаем вторую конфигурацию:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & q_1 & & \end{array}$$

.

Очевидно, следующие конфигурации имеют вид:

$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 \\ q_1 & & & \end{array}$ — третья конфигурация,

$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 \\ q_3 & & & & \end{array}$ — четвертая конфигурация,

$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & q_0 & & & \end{array}$ — пятая конфигурация.

Так как при пятой конфигурации машина находится в состоянии q_0, то слово $a_2\,a_2\,a_2$ является результатом.

Пример 2. Пусть начальная конфигурация имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & & q_1 & \end{array}$$

.

Используя функциональную схему 1, мы придем к следующим конфигурациям:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & q_1 & & \end{matrix} \quad \text{— вторая конфигурация,}$$

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & q_1 & & & \end{matrix} \quad \text{— третья конфигурация,}$$

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & q_2 & & \end{matrix} \quad \text{— четвертая конфигурация,}$$

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_0 \\ & & & q_2 & & \end{matrix} \quad \text{— пятая конфигурация,}$$

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 \\ & & & q_1 & & \end{matrix} \quad \text{— шестая конфигурация.}$$

Как видно из второй и шестой конфигураций, процесс работы машины начал повторяться, и, следовательно, результата не будет.

Реализация алгоритма в машине Тьюринга.

На ряде примеров покажем, как строятся тьюринговы машины, реализующие некоторые простые арифметические алгоритмы.

Пример 1. *Реализация в машине Тьюринга алгоритма перехода от n к $n+1$ в десятичной системе счисления.*

Пусть дана десятичная запись натурального числа n и требуется указать десятичную запись числа $n+1$, т. е. вычислить функцию $f(n) = n + 1$.

Ясно, что здесь внешний алфавит машины должен содержать все цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и символ пустой клетки a_0. Число n будем записывать в десятичной системе на ленте, причем цифры будут помещаться по одной в каждой клетке подряд без пропусков.

Чтобы решить поставленную задачу, машина должна в первом такте работы стереть последнюю цифру числа n, заменить ее цифрой на единицу большей и перейти в стоп-состояние, если последняя цифра была меньше цифры 9.

Если же последняя цифра числа n была 9, то машина должна, стерев цифру 9, записать в освободившуюся клетку цифру 0 и произвести сдвиг влево к соседнему более высокому разряду, оставаясь в том же начальном состоянии. Здесь во втором такте работы машина должна прибавить единицу к цифре более высокого разряда.

Очевидно, что в случае сдвига влево, управлявшая головка машины может выйти на пустую клетку в случае, когда цифры более высокого разряда нет. При этом машина вписывает в пустую клетку цифру 1.

Из сказанного следует, что при реализации алгоритма вычисления функции $f(n) = n + 1$ машина может пребывать лишь в двух состояниях: q_1 и q_0.

Таким образом, машина Тьюринга, реализующая алгоритм перехода от n к $n + 1$ в десятичной системе счисления будет иметь вид:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	1нq_0	1нq_0	2нq_0	3нq_0	4нq_0	5нq_0	6нq_0	7нq_0	8нq_0	9нq_0	0л q_1

Рис. 3

На рис. 4 и 5 выписаны соответствующие конфигурации для $n = 183$ и $n = 399$:

$$
\begin{array}{ccc}
a_0 & \underset{q_1}{18\,3} & a_0 \\[1em]
a_0 & \underset{q_0}{18\,4} & a_0
\end{array}
$$

Рис. 4

$$
\begin{array}{ccc}
a_0 & \underset{\;\;\;\;q_1}{399} & a_0 \\[1em]
a_0 & \underset{q_1}{390} & a_0 \\[1em]
a_0 & \underset{q_1\;\;\;\;}{300} & a_0 \\[1em]
a_0 & \underset{q_0\;\;\;\;}{400} & a_0
\end{array}
$$

Рис. 5

Пример 2. *Алгоритм сложения натуральных чисел.*

Пусть на ленту подается два числа, заданных наборами палочек; например, 2 и 3. Нужно сложить эти два числа.

Будем обозначать символ сложения звездочкой. Таким образом, на ленте машины будет записано слово

$$a_0 \,||* |||\, a_0. \tag{1}$$

Требуется предложить функциональную схему, которая будучи примененной к слову (1), давала бы в результате сумму чисел 2 и 3, то есть слово

$$a_0\,|||||\,a_0. \tag{2}$$

Опишем процесс работы машины для решения задачи. Пусть в начальный момент обозревается самая левая палочка. Ее нужно сдвинуть вправо, минуя все палочки и звездочку до тех пор, пока не будет достигнута первая пустая клетка. В эту пустую клетку выписывается первая палочка. Затем нужно вернуться за второй палочкой и ее перенести вправо так же, как это делалось с первой палочкой. После этой процедуры нужно вернуться к звездочке, стереть ее и остановиться. Изобразим все такты работы машины в виде соответствующих конфигураций:

1) $a_0\,\underset{q_1}{|}|\ast|||\,a_0$

2) $a_0\,\underset{q_2}{|}\ast|||\,a_0$

3) $a_0\,|\underset{q_2}{\ast}|||\,a_0$

4) $a_0\,|\ast\underset{q_2}{|}||\,a_0$

5) $a_0\,|\ast|\underset{q_2}{|}|\,a_0$

6) $a_0\,|\ast||\underset{q_2}{|}\,a_0$

7) $a_0\,|\ast|||\,\underset{q_2}{a_0}$

8) $a_0\,|\ast|||\underset{q_3}{|}\,a_0$

9) $a_0\,|\ast||\underset{q_3}{|}|\,a_0$

10) $a_0\,|\ast|\underset{q_3}{|}||\,a_0$

11) $a_0\,|\ast\underset{q_3}{|}|||\,a_0$

12) $a_0\,|\underset{q_3}{\ast}||||\,a_0$

13) $a_0\,\underset{q_3}{|}\ast||||\,a_0$

14) $\underset{q_3}{a_0}\,|\ast||||\,a_0$

15) $a_0\,\underset{q_1}{|}\ast||||\,a_0$

16) $a_0 a_0\underset{q_2}{\ast}||||\,a_0$

17) $a_0\ast\underset{q_2}{|}|||\,a_0$

18) $a_0\ast|\underset{q_2}{|}||\,a_0$

19) $a_0\ast||\underset{q_2}{|}|\,a_0$

20) $a_0\ast|||\underset{q_2}{|}\,a_0$

21) $a_0\ast||||\,\underset{q_2}{a_0}$

22) $a_0\ast||||\underset{q_3}{|}\,a_0$

23) $a_0\ast|||\underset{q_3}{|}|\,a_0$

24) $a_0\ast||\underset{q_3}{|}||\,a_0$

25) $a_0\ast|\underset{q_3}{|}|||\,a_0$

26) $a_0\ast\underset{q_3}{|}||||\,a_0$

27) $a_0\underset{q_3}{\ast}|||||\,a_0$

28) $\underset{q_3}{a_0}\ast|||||\,a_0$

29) $a_0\underset{q_1}{\ast}|||||\,a_0$

30) $a_0\underset{q_0}{a_0}\,|||||\,a_0$

Этот процесс позволяет записать алгоритм в виде двумерной таблицы, изображенной на рис. 6.

	a_0	$*$	$\vert$
q_1		a_0н q_0	a_0п q_2
q_2	$\vert$ н q_3	$*$п q_2	$\vert$ п q_2
q_3	a_0п q_1	$*$л q_3	$\vert$ л q_3

Рис. 6

Таким образом, здесь использован внешний алфавит $\langle a_0, *, |\rangle$ и состояния машины q_0, q_1, q_2, q_3.

Пример 3. *Алгоритм Евклида.*

Алгоритм Евклида решает задачи вида: для двух данных натуральных чисел найти их наибольший общий делитель.

Как известно, алгоритм Евклида сводится к построению убывающей последовательности чисел, из которых первое является большим из двух данных чисел, второе — меньшим, третье получается как остаток от деления первого на второе, четвертое — как остаток от деления второго на третье и так далее, пока не будет совершено деление без остатка. Делитель в этом последнем делении и будет результатом решения задачи.

Нам требуется задать алгоритм Евклида в виде программы машины Тьюринга. Эта программа должна обеспечить попеременное чередование циклов сравнения и циклов вычитания чисел.

Будем использовать внешний алфавит, состоящий из четырех букв: $\langle a_0, |, \alpha, \beta\rangle$. Здесь a_0 — символ пустой клетки, $|$ — палочка, α и β — буквы, играющие роль временных палочек. Пусть, для конкретности, требуется найти НОД чисел 4 и 6 при начальной конфигурации

$$\begin{array}{c} a_0\,||||||||||\,a_0 \\ q_1 \end{array}$$

Сначала машина должна сравнить числа, изображенные на ленте. С этой целью она должна заменять палочки, изображающие первое число, буквами α, а палочки, изображающие второе число, — буквами β. При этом конфигурации, соответствующие первым четырем тактам работы машины, будут иметь вид:

1) $\begin{array}{l} a_0 \,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\; q_1 \end{array}$,

2) $\begin{array}{l} a_0 \,|\,|\,|\, \alpha \,|\,|\,|\,|\,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\; q_2 \end{array}$,

3) $\begin{array}{l} a_0 \,|\,|\,|\, \alpha \,|\,|\,|\,|\,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\quad\quad q_2 \end{array}$,

4) $\begin{array}{l} a_0 \,|\,|\,|\, \alpha\, \beta \,|\,|\,|\,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\quad\quad q_1 \end{array}$.

После этих четырех тактов управляющая головка должна двигаться влево в поисках еще не отмеченной ближайшей палочки первого числа, которая должна быть заменена на α, а затем начинается движение управляющей головки вправо в поисках ближайшей палочки второго числа, которая должна быть заменена на β. После соответствующего числа тактов работы машины на ленте возникнет конфигурация:

$$\begin{array}{l} a_0\, \alpha\, \alpha\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, \beta\, \beta \,|\,|\, a_0 \\ q_1 \end{array}.$$

На этом заканчивается цикл сравнения исходных чисел и начинается цикл вычитания, в результате которого меньшее число должно быть стерто целиком, палочки второго числа, помеченные буквой β, заменяются на обычные палочки, и, следовательно, большее число 6 будет разбито на два числа 4 и 2.

Этим операциям соответствует ряд конфигураций. Выпишем некоторые из них, пропуская очевидные конфигурации.

$$\begin{array}{l} a_0\, \alpha\, \alpha\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, \beta\, \beta \,|\,|\, a_0 \\ q_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_0\;\; \alpha\;\; \alpha\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, \beta\, \beta \,|\,|\, a_0 \\ \quad\;\, q_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_0\, a_0\;\; \alpha\;\; \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, \beta\, \beta \,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\;\;\, q_3 \end{array}$$

. . . .

$$\begin{array}{l} a_0\, a_0\, a_0\, a_0\, a_0\;\; \beta\;\; \beta\, \beta\, \beta \,|\,|\, a_0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; q_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & | & \beta & \beta & \beta & | & | & a_0 \\ & & & & & & q_3 & & & & & \end{array}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & | & | & | & | & | & | & a_0 \\ & & & & & & & & & q_3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & a_0 & | & | & | & | & | & | & a_0 \\ & & & & & & & & & q_2 & & \end{array}.$$

На этом заканчивается цикл вычитания. Теперь машина должна сравнить числа 4 и 2. Цикл сравнения этих чисел приводит к конфигурации:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & | & | & \alpha & \alpha & \beta & \beta & a_0 \\ & & & & & & & q_4 \end{array},$$

а цикл вычитания — к конфигурации:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & | & | & | & | & a_0 \\ & & q_1 & & & \end{array}.$$

Третий цикл сравнения чисел 2 и 2 приводит к конфигурации:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & \alpha & \alpha & \beta & \beta & a_0 \\ q_3 & & & & & \end{array},$$

а цикл вычитания — к заключительной конфигурации:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & | & | & a_0 \\ & & & q_0 \end{array}.$$

В связи с этим функциональная схема Тьюринга имеет вид:

	a_0	$\vert$	α	β
q_1	a_0 П q_3	α Н q_2	α Л q_1	β Л q_1
q_2	a_0 Л q_4	β Н q_1	α П q_2	β П q_2
q_3	a_0 Н q_0	$\vert$ Н q_2	a_0 П q_3	$\vert$ П q_3
q_4	a_0 Н q_0	$\vert$ Н q_1	$\vert$ Л q_4	a_0 Л q_4

Рис. 7

1. Основная гипотеза теории алгоритмов. Машина Тьюринга дает один из путей уточнения понятия алгоритма. В связи с этим возникают вопросы: насколько общим является понятие машины Тьюринга? Можно ли считать, что способ задания алгоритмов с помощью машины Тьюринга является универсальным? Может ли всякий алгоритм задаваться таким образом?

На эти вопросы современная теория алгоритмов предлагает ответ в виде следующей гипотезы.

Всякий алгоритм может быть задан посредством тьюринговой функциональной схемы и реализован в соответствующей машине Тьюринга.

Эта гипотеза называется *тезисом Тьюринга*. Ее нельзя доказать, так как она связывает нестрогое определение понятия алгоритма со строгим определением понятия машины Тьюринга.

Эта гипотеза может быть опровергнута, если удастся привести пример алгоритма, который не может быть реализован с помощью тьюринговой функциональной схемы.

Однако все известные до сих пор алгоритмы могут быть заданы посредством тьюринговых функциональных схем.

Напомним также, что другие способы уточнения понятия алгоритма (понятие нормального алгоритма А. А. Маркова, понятие рекурсивного алгоритма(рекурсивной функции), введенного Чёрчем, Гёделем и Клини) оказались равносильными.

Этот факт является важным доводом в пользу сформулированной гипотезы.

Кроме того, следует сказать, что внутри самой теории алгоритмов эта гипотеза не применяется, то есть при доказательстве теорем теории алгоритмов никаких ссылок на гипотезу не делается.

§ 6. НОРМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МАРКОВА

Как и ранее, будем называть *алфавитом A* всякое непустое конечное множество символов, а сами символы алфавита будем называть буквами.

Словом в алфавите A называется всякая конечная последовательность букв алфавита A. Пустая последовательность букв называется *пустым словом* и обозначается через $\square$.

Если P обозначает слово $S_{j_1}S_{j_2}\ldots S_{j_k}$, и Q обозначает слово $S_{r_1}S_{r_2}\ldots S_{r_m}$, то PQ обозначает объединение $S_{j_1}\ldots S_{j_k}S_{r_1}\ldots S_{r_m}$. В частности, $P\Lambda = \Lambda P = P$. Кроме того, $(P_1P_2)\,P_3 = P_1\,(P_2P_3)$.

Алфавит A называется *расширением* алфавита B, если $B \subset A$. Очевидно, что в этом случае всякое слово в алфавите B является словом в алфавите A.

Алгоритмом в алфавите A называется эффективно вычислимая функция, областью определения которой служит какое-нибудь подмножество множества всех слов в алфавите A и значениями которой являются также слова в алфавите A. Пусть P есть слово в алфавите A; говорят, что алгоритм U *применим* к слову P, если P содержится в области определения U. Если алфавит B является расширением алфавита A, то всякий алгоритм в алфавите B называется *алгоритмом над алфавитом* A.

Большинство известных алгоритмов можно разбить на некоторые простейшие шаги. Следуя А. А. Маркову, в качестве элементарной операции, на базе которой строятся алгоритмы, выделим *подстановку* одного слова вместо другого. Если P и Q — слова в алфавите A, то выражения $P \to Q$ и $P \to \cdot Q$ будем называть формулами подстановки в алфавите A. При этом предполагается, что символы стрелка $\to$ и точка $\cdot$ не являются буквами алфавита A, а каждое слово P и Q может быть и пустым словом. Формула подстановки $P \to Q$ называется *простой*, а формула подстановки $P \to \cdot Q$ называется *заключительной*.

Пусть $P \to (\cdot)Q$ обозначает одну из формул подстановки $P \to Q$ или $P \to \cdot Q$. Конечный список формул подстановки в алфавите

$$\begin{cases} P_1 \to (\cdot)\,Q_1 \\ P_2 \to (\cdot)\,Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_r \to (\cdot)\,Q_r \end{cases}$$

называется *схемой алгоритма* и порождает следующий алгоритм в алфавите A.

Принято говорить, что слово T входит в слово Q, если существуют такие (возможно пустые) слова W, V, что $Q = WTV$.

Пусть P — слово в алфавите A. Здесь может быть одно из двух:

1. Ни одно из слов P_1, P_2, …, P_r не входит в слово P (обозначается: $U : P \supset$).

2. Среди слов P_1, P_2, …, P_r существуют такие, которые входят в P. Пусть m — наименьшее целое число такое, что $1 \leqslant m \leqslant r$, и P_m входит в P, и R — слово, которое получается, если самое левое вхождение слова P_m в слово P заменить словом Q_m. Тот факт, что P и R находятся в описанном отношении, коротко запишем в виде

$$U : P \vdash R, \tag{a}$$

если формула подстановки $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ — простая, или в виде

$$U : P \vdash \cdot R, \tag{b}$$

если формула $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ — заключительная.

В случае (a) говорят, что алгоритм U просто переводит слово P в слово R; в случае (b) говорят, что алгоритм U заключительно переводит слово P в слово R.

Пусть, далее, $U : P \models R$ означает, что существует такая последовательность R_0, R_1, …, R_k слов в алфавите A, что $P = R_0$, $R = R_k$, $U : R_j \vdash R_{j+1}$ для $j = 0, 1, \ldots, k-2$ и либо $U : R_{k-1} \vdash R_k$, либо $U : R_{k-1} \vdash \cdot R_k$ (в этом последнем случае вместо $U : P \models R$ пишут $U : P \models \cdot R$).

Положим теперь $U\,(P) = R$ тогда и только тогда, когда либо $U : P \models \cdot R$), либо $U : P \models R$ и $U : R \supset$.

Алгоритм, определенный таким образом, называется *нормальным алгоритмом* или *алгоритмом Маркова*.

Работа алгоритма U может быть описана следующим образом. Пусть дано слово P в алфавите A. Находим первую в схеме алгоритма U формулу подстановки $P_m \to (\cdot)\, Q_m$, такую, что P_m входит в P. Совершаем подстановку слова Q_m вместо самого левого вхождения слова P_m в слово P. Пусть R_1 — результат такой подстановки. Если $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ — заключительная формула подстановки, то работа алгоритма заканчивается, и его значением является R_1. Если формула подстановки $P_m \to (\cdot)\, Q_m$ — простая, то применим к R_1 тот же поиск, который был только что применим к P и т. д. Если на конечном этапе будет получено такое слово R_i, что $U : R_i \supset$, то есть ни одно из слов $P_1, \ldots, P_r$ не входит в R_i, то работа алгоритма заканчивается, и R_i будет его значением.

Если описанный процесс на конечном этапе не заканчивается, то говорят, что алгоритма U не применим к слову P.

Пример 1. Пусть A есть алфавит $\{b, c\}$. Рассмотрим схему:

$$\begin{cases} b \to \cdot\wedge \\ c \to c \end{cases} .$$

Определяемый этой схемой нормальный алгоритм U перерабатывает всякое слово P в алфавите A, содержащее хотя бы одно вхождение буквы b, в слово, которое получается вычеркиванием в P самого левого вхождения буквы b.

Действительно, всякая буква c, находящаяся в слове левее самой левой буквы b, простой подстановкой $c \to c$ переводится в букву c, а самая левая буква b заключительной подстановкой переводится в пустое слово $\square$.

Например, если $P = ccbbc$, то $P \to \cdot Q$, где $Q = ccbc$.

Пустое слово U перерабатывает в само себя.

U не применим к непустым словам, не содержащим вхождения буквы b. Действительно, если слово P содержит только буквы c, то простой подстановкой $c \to c$ оно будет перерабатываться в себя, но тогда всегда $P \to P$, и мы не приходим к заключительной подстановке, т. е. процесс будет продолжаться бесконечно.

Пример 2. Пусть A есть алфавит $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Рассмотрим схему:

$$\forall i \, (a_i \to \wedge) \quad (a_i \in A) .$$

Эта схема определяет нормальный алгоритм U, перерабатывающий всякое слово в алфавите A в пустое слово. Например,

$$U : a_1a_2a_1a_3a_0 \vdash a_1a_2a_1a_3 \vdash a_2a_1a_3 \vdash a_2a_3 \vdash a_3 \vdash \wedge,$$

и, наконец, $U : \wedge \supset$. Следовательно, $U\,(a_1a_2a_1a_3a_0) = \wedge$.

§ 7. НЕРАЗРЕШИМЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ (ОБЗОР)

Переход от интуитивного понятия алгоритма к точному понятию машины Тьюринга позволяет уточнить и вопрос об алгоритмической разрешимости данной массовой проблемы. Теперь этот вопрос можно сформулировать так: существует ли машина Тьюринга, решающая данную массовую проблему, или же такой машины не существует?

На этот вопрос теория алгоритмов в ряде случаев дает отрицательный ответ. Один из первых результатов такого типа получен американским математиком Чёрчем в 1936 году. Он касается проблемы распознавания выводимости в математической логике.

1. Неразрешимость проблемы распознавания выводимости в математической логике.

Как известно, аксиоматический метод в математике заключается в том, что все предположения (теоремы) данной теории получаются посредством формально-логического вывода из нескольких предложений (аксиом), принимаемых в данной теории без доказательства.

В математической логике описывается специальный язык формул, позволяющий любое предложение математической теории записать в виде вполне определенной формулы, а процесс логического вывода из посылки A следствия B может быть описан в виде процесса формальных преобразований исходной формулы. Это достигается путем использования логического исчисления, в котором указана система допустимых преобразований, изображающих элементарные акты логического умозаключения, из которых складывается любой, сколь угодно сложный формально-логический вывод.

Вопрос о логической выводимости предложения B из посылки A в избранном логическом исчислении является вопросом о существовании дедуктивной цепочки, ведущей от формулы A к формуле B.

В связи с этим возникает *проблема распознавания выводимости*: для любых двух формул A и B в логическом исчислении узнать, существует ли дедуктивная цепочка, ведущая от A к B, или нет.

Решение этой проблемы понимается в смысле вопроса о существовании алгоритма, дающего ответ при любых A и B. Результат Чёрча формулируется следующим образом:

Теорема Чёрча. *Проблема распознавания выводимости алгоритмически неразрешима.*

2. Неразрешимость проблемы распознавания самоприменимости.

Введем предварительно понятие шифра машины Тьюринга. До сих пор мы записывали программу машины Тьюринга в виде двумерной таблицы $m \times n$. Однако ее можно изобразить в одномерном варианте, записывая последовательно пятерки символов так, что первый символ пятерки указывает столбец таблицы, второй — строчку таблицы, а последующие три — символы той тройки, которая располагается в таблице на пересечении указанных строки и столбца.

Так, например, вместо схемы, изображенной на рис. 7, будет получена одномерная строка:

$$a_0 q_1 a_0 \text{п}\ q_3 \mid q_1 \alpha \text{н}\ q_2 \alpha q_1 \alpha \text{л}\ q_1 \beta q_1 \beta \text{л}\ q_1 a_0 q_2 a_0 \text{л}\ q_4 \ldots . \tag{1}$$

Поступая аналогично, можно при рассмотрении конфигураций условиться о том, чтобы букву состояния писать не под обозреваемой буквой, а непосредственно левее ее. Например, ранее встречающуюся конфигурацию

$$\begin{array}{cccccc} | & | & | & | & | & | \\ & & & & q_4 & \end{array}$$

будем записывать в виде $||||\, q_4\, ||$.

Ясно, что каждую букву строки (1) можно переименовать. Сделаем это, соблюдая следующие условия:

1) строка (1) должна однозначно разбиваться на отдельные кодовые группы;

2) кодовые символы должны быть трех видов:

а) для букв л, п, н;

б) для букв внешнего алфавита;

в) для букв, изображающих состояния машины.

В связи с этим будем пользоваться следующей таблицей кодирования:

Алфавит	Буква	Кодовая группа	Примечания
Буквы адресов	л	101	Один нуль между 1
	н	1001	два нуля между 1
	п	10001	три нуля между 1
Внешний алфавит	a_0	100001 4 нуля	четное число нулей, большее двух
	a_1	10000001 6 нулей	
	$\dots$	....	
	a_n	$10\dots01$ $2(n+2)$ нулей	
Внутренний алфавит	q_1	1000001 5 нулей	нечетное число нулей, большее трех
	q_2	100000001 7 нулей	
	$\dots$	....	
	q_m	$10\dots01$ $2(n+1)+1$ нулей	

Если в строке (1) считать $|$, α, β соответственно буквами a_1, a_2, a_3, то при такой системе кодирования строка (1) запишется так:

$$1000011000000110000110001100000000001100000011000001100000001 \dots. \quad (2)$$

Подобную строчку из единиц и нулей, составленную для функциональной схемы или для отдельной конфигурации, называют *шифром функциональной схемы* или *шифром конфигурации*.

Пусть теперь на ленте машины Тьюринга изображен ее же собственный шифр, записанный в алфавите машины. Возможны два случая:

1. Машина применима к своему шифру, т. е. она перерабатывает этот шифр и после конечного числа тактов останавливается.

2. Машина не применима к своему шифру, т. е. машина никогда не переходит в стоп-состояние.

Таким образом, сами машины (их шифры) разбиваются на два класса: класс самоприменимых и класс несамоприменимых тьюринговых машин. Поэтому возникает следующая массовая проблема: *проблема распознаваемости самоприменимости*. По любому заданному шифру установить, к какому классу относится машина, зашифрованная им: к классу самоприменимых или несамоприменимых?

Теорема. *Проблема распознавания самоприменимости алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть такая машина A существует. Тогда в A всякий самоприменимый шифр перерабатывается в какой-то символ σ (имеющий смысл утвердительного ответа на поставленный вопрос о самоприменимости), а всякий несамоприменимый шифр — в другой символ τ (имеющий смысл отрицательного ответа на поставленный вопрос). В таком случае можно было построить и такую машину B, которая по-прежнему перерабатывает несамоприменимые шифры в τ, в то время как к самоприменимым шифрам B уже не применима. Этого можно было добиться путем такого изменения схемы машины B, чтобы после появления символа σ вместо появления стоп-состояния, машина начала бы неограниченно повторять этот же символ.

Таким образом, B применима ко всякому несамоприменимому шифру (вырабатывается при этом символ τ) и не применима к самоприменимым шифрам. Но это приводит к противоречию. Действительно:

1) пусть машина B самоприменима, тогда она применима к своему шифру B и перерабатывает его в символ τ; но появление этого символа как раз и должно означать, что B несамоприменима;

2) пусть B несамоприменима, тогда она неприменима к B, что должно означать как раз, что B самоприменима. Полученное противоречие доказывает теорему.

Кроме проблемы распознавания самоприменимости существует проблема распознавания применимости. Она состоит в следующем. Заданы программа (функциональная схема) какой-нибудь машины Тьюринга и начальная конфигурация. Нужно узнать, применима машина к данной конфигурации или нет. Если бы существовал алгоритм для решения этой проблемы, то с его помощью можно было бы узнать, применима ли машина к слову, кодирующему ее собственную программу, т. е. самоприменима ли она. Но уже доказано, что такого алгоритма не существует. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Проблема распознавания применимости машин Тьюринга алгоритмически неразрешима.*

3. Проблема эквивалентности слов для ассоциативных исчислений.

Первые результаты об алгоритмической неразрешимости были установлены для проблем, возникающих в самой математической логике и в теории алгоритмов. Сюда относятся и рассмотренные проблемы: «проблема выводимости» и «проблема самоприменимости». Но позже выяснилось, что аналогичные проблемы возникают в самых различных специальных разделах математики. Сюда относятся, в первую очередь, алгебраические проблемы, приводящие к различным вариантам проблемы слов.

Рассмотрим некоторый алфавит $A = \{a, b, c, \dots\}$ и множество слов в этом алфавите. Если слово L является частью слова M, то говорят, что слово L входит в слово M. Так, слово aca входит в слово $bcacab$, начиная с буквы a.

Будем рассматривать преобразование одних слов в другие с помощью некоторых допустимых подстановок вида

$$P - Q \quad \text{или} \quad P \to Q,$$

где P и Q — два слова в том же алфавите A.

Применение ориентированной подстановки $P \to Q$ к слову R возможно в том случае, когда в нем имеется хотя бы одно вхождение левой части P; оно заключается в замене любого такого вхождения соответствующей правой частью Q.

Применение неориентированной подстановки $P - Q$ допускает как замену вхождения левой части правой, так и замену вхождения правой части левой.

Будем рассматривать, в основном, неориентированные подстановки.

Пример. Постановка $ac - aca$ применима к слову $bcacab$ двумя способами; замена вхождения aca в это слово дает слово $bcacab$, а замена вхождения ac дает слово $bcacaab$.

К слову $abcab$ эта подстановка не применима.

Определение. *Ассоциативным исчислением* называется совокупность всех слов в некотором алфавите вместе с какой-нибудь конечной системой допустимых подстановок.

Для задания ассоциативного исчисления достаточно указать соответствующие алфавит и систему подстановок.

Если слово R может быть преобразовано в слово S посредством однократного применения допустимой подстановки, то и S может быть преобразовано в R таким же путем. В таком случае R и S называют *смежными словами*. Последовательность слов

$$R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_n$$

таких, что каждая пара слов R_i и R_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ являются смежными, называют *дедуктивной цепочкой*, ведущей от слова R к слову S.

Если существует дедуктивная цепочка, ведущая от слова R к слову S, то, очевидно, существует и дедуктивная цепочка, ведущая от слова S к слову R, в этом случае слова R и S называют эквивалентными и обозначают: $R \sim S$.

Для каждого ассоциативного исчисления возникает своя специальная *проблема эквивалентности слов*.

Для любых двух слов в данном исчислении требуется узнать, эквивалентны они или нет.

Проблема эквивалентности слов для ассоциативных исчислений была сформулирована в 1911 г. Тогда же был предложен алгоритм для распознавания эквивалентности слов в некоторых ассоциативных исчислениях специального вида.

Естественно возникла задача об отыскании такого общего алгоритма, который был бы применим к любому ассоциативному исчислению.

В 1946 и 1947 г. российский математик А. А. Марков и американский математик Э. Пост, независимо один от другого, построили конкретные примеры ассоциативных исчислений, для каждого их которых проблема эквивалентности слов алгоритмически не разрешима, и, следовательно, не существует алгоритма для распознавания эквивалентности слов в любом исчислении.

В 1955 году российский математик П. С. Новиков доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы тождества групп, формально эта проблема представляет собой частный случай проблемы эквивалентности слов в ассоциативном исчислении.

Примеры, построенные А. А. Марковым и П. С. Новиковым для опровержения алгоритмической разрешимости исследуемых проблем, были громоздкими и насчитывали сотни допустимых подстановок.

Петербургскому математику Г. С. Цейтину удалось построить пример алгоритмически неразрешимого исчисления, в котором используется лишь семь допустимых подстановок.

4. Неразрешимость десятой проблемы Гильберта о диофантовых уравнениях.

Сущность этой проблемы излагалась нами выше в § 3, и там же указывалось, что доказательство алгоритмической разрешимости этой проблемы было дано в 1960 году молодым петербургским математиком Ю. Матиясевичем.

Часть II

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Глава 1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Понятие высказывания является основным неопределяемым понятием математической логики. Под высказыванием понимают любое повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическое значение высказывания «истина» («ложь») обозначается или буквой *и*, (*л*) или цифрой 1, (0). Высказывания обычно обозначают малыми латинскими буквами.

Отрицанием высказывания a называется высказывание $\overline{a}$, которое истинно, если a ложно, и ложно, если a истинно. Высказывание $\overline{a}$ читается так: «Не a». Таблица истинности для $\overline{a}$ имеет вид:

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Конъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \wedge b$ ($a\&b$), которое истинно, если a и b истинны, и ложно, если хотя бы одно из них ложно. Высказывание $a \wedge b$ читается: «a и b».

Дизъюнкцией высказываний a, b называется высказывание $a \vee b$, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний a или b истинно, и ложно, если оба они ложны. Читается: «a или b».

Импликацией высказываний a, b называется высказывание $a \to b$, которое ложно, если a истинно и b ложно, и истинно во всех остальных случаях. Читается: «Если a, то b».

Эквивалентностью (или эквиваленцией) высказываний a, b называется высказывание $a \leftrightarrow b$, которое истинно, если оба высказывания a и b одновременно истинны или ложны, и ложно во всех остальных случаях. Читается: «a тогда и только тогда, когда b».

Таблица истинности для этих логических операций такова:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Все высказывания можно разделить на простые (или элементарные) и составные (или сложные).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения выше определенных пяти логических операций, называется *формулой алгебры логики*.

Формулы алгебры логики будем обозначать большими латинскими буквами. Логические значения формулы при различных комбинациях значений входящих в нее высказываний можно описать посредством таблицы, которая называется таблицей истинности формулы.

Формула A, всегда истинная, называется *тождественно истинной формулой* или *тавтологией* и записывается $A \equiv 1$. Формула B, всегда ложная, называется *тождественно ложной формулой* и записывается $B \equiv 0$.

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волхов впадает в озеро Ильмень;
2) всякий человек имеет брата;
3) пейте томатный сок!;
4) существует человек, который моложе своего отца;
5) который час?;

6) ни один человек не весит более 1000 кг;

7) $23 < 5$;

8) для всех действительных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$;

9) $x^2 - 7x + 12$;

10) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) — истинные, а высказывания 1), 2), 7) — ложные. Предложения 3), 5), 9), 10 не являются высказываниями.

Пример 2. Пусть a — высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b — высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \overline{b}$; 2) $a \to b$; 3) $\overline{b} \leftrightarrow \overline{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; б) «Если студент Иванов изучает английский язык, то он успевает по математической логике»; в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Пример 3. Составить таблицу истинности для высказывания $a \vee \overline{b}$.

Решение. Таблица истинности для высказывания $a \vee \overline{b}$ имеет вид:

a	b	$\overline{b}$	$a \vee \overline{b}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

1.1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

1) Москва — столица России;

2) студент физико-математического факультета;

3) $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 28$;

4) Луна есть спутник Марса;

5) $a > 0$.

1.2. Приведите примеры предложений,

1) являющихся высказываниями;

2) не являющихся высказываниями.

1.3. Верны ли утверждения:

1) сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

2) сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

3) существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену?

1.4. Установите, истинно или ложно высказывание:

1) $2 \in \left\{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\right\}$;

2) $-3 \in \left\{x | \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2} < -2, x \in \mathbf{R}\right\}$;

3) $3 \in \left\{\dfrac{2n+1}{3n-2} | n \in \mathbf{N}\right\}$;

4) $\{1\} \in \mathbf{N}$;

5) $\{1\} \in P(\mathbf{N})$, где $P(\mathbf{N})$ — множество всех подмножеств множества $\mathbf{N}$;

6) $\varnothing \in \varnothing$;

7) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

8) $\{1, -1, 2\} \subset \left\{x | x^3 + x^2 - x - 1 = 0, x \in \mathbf{Z}\right\}$;

9) $\left\{x | x^3 + x^2 - x - 1 = 0, x \in \mathbf{Z}\right\} \subset \{1, -1, 2\}$;

10) $\varnothing \subset \mathbf{N}$;

11) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$;

12) $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

1.5. Является ли высказыванием следующее предложение: «Это предложение ложно»?

1.6. Среди следующих высказываний указать элементарные и составные. В составных высказываниях выделить грамматические связки:

1) число 27 не делится на 3;

2) число 15 делится на 5 и на 3;

3) если число 126 делится на 9, то оно делится на 3;

4) число 7 является делителем числа 42;

5) число 1269 делится на 9 тогда и только тогда, когда 18 делится на 9.

1.7. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

1) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;
2) 45 кратно 3 и 12 не кратно 3;
3) $\sqrt{25} = 5$ или $\sqrt{25} = -5$;
4) $2 \leqslant 5$;
5) если число 212 делится на 3 и 4 , от оно делится на 12;
6) число 212 — трехзначное и кратно 3 или 4.

1.8. Пусть p и q обозначают высказывания:

p — «Я учусь в школе»,

q — «Я люблю математику».

Прочтите следующие сложные высказывания:

1) $\overline{p}$;
2) $\overline{\overline{p}}$;
3) $p\&q$;
4) $p\&\overline{q}$;
5) $\overline{p}\&q$;
6) $\overline{p}\&\overline{q}$;
7) $\overline{p\&q}$;
8) $p \to q$.

1.9. Какие из следующих импликаций истинны:

1) если $2 \times 2 = 4$, то $2 < 3$;
2) если $2 \times 2 = 4$, то $2 > 3$;
3) если $2 \times 2 = 5$, то $2 < 3$;
4) если $2 \times 2 = 5$, то $2 > 3$?

1.10. Выясните, в каких случаях приведенные ниже данные противоречивы:

1) $a = 1$, $a\&b = 0$;
2) $a = 1$, $a \vee b = 0$;
3) $a = 1$, $a\&b = 1$;
4) $a = 1$, $a \vee b = 1$;
5) $a = 0$, $a\&b = 1$;
6) $a = 0$, $a \vee b = 1$;
7) $a = 0$, $a\&b = 0$;
8) $a = 0$, $a \vee b = 0$.

1.11. Пусть x, $x\prime$, y, $y\prime$ означают соответственно «7 — простое число», «7 — составное число», «8 — простое число», «8 — составное число»:

1) какие из предложений $x\&y$, $x\&y\prime$, $x\prime\&y$, $x\prime\&y\prime$ истинны и какие ложны?

2) то же с заменой конъюнкции на дизъюнкцию;

3) то же для предложений $\overline{x}$, $\overline{x\prime}$, $\overline{y}$, $\overline{y\prime}$.

1.12. Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $p \to p$;
2) $p \vee \overline{p}$;
3) $\overline{p \wedge \overline{p}}$;
4) $p \leftrightarrow \overline{p}$;
5) $\overline{p} \to p$;
6) $p \leftrightarrow p$;
7) $(p \vee p) \to p$;
8) $\overline{p\& (p \leftrightarrow \overline{p})}$;
9) $(p \to p) \vee \overline{p}$;
10) $p \leftrightarrow p\& (\overline{p} \to p\&p)$;
11) $p \vee (p \leftrightarrow \overline{p})$;
12) $\overline{p \to \overline{p}}$;
13) $\overline{p \leftrightarrow \overline{p}}$;
14) $(p \vee p) \to (p \wedge p)$.

1.13. Найдите логические значения x и y, при которых выполняются равенства:

1) $(1 \to x) \to y = 0$;
2) $x \vee y = \overline{x}$.

1.14.

1) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

2) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значении $\overline{x} \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow \overline{y}$?

3) Известно, что x имеет значение 1. Что можно сказать о значениях импликации $\overline{x} \wedge y \to z$; $\overline{x} \to (y \vee z)$?

4) Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{(x \to y)} \to y$; $(x \to y) \to z$?

1.15. Пусть $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Определить логические значения нижеследующих сложных высказываний:

1) $x \wedge (y \wedge z)$;
2) $(x \wedge y) \wedge y$;
3) $x \to (y \to z)$;
4) $x \wedge y \to z$;
5) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \overline{y})$;
6) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$.

1.16. Показать, что логические связки $\overline{b} \to \overline{a}$, $a\&\overline{b} \to \overline{a}$, $a\&\overline{b} \to b$, $a\&\overline{b} \to л$, где $л$ — фиксированное ложное высказывание, имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

1.17.

1) Постройте с помощью отрицания и дизъюнкции формулу, таблица истинности для которой совпадала бы с таблицей для импликации.

2) Аналогично этому постройте с помощью отрицания и импликации формулу, таблица для которой совпадает с таблицей для дизъюнкции, и вторую формулу с таблицей, совпадающей с таблицей для конъюнкции.

1.18. Составить таблицы истинности для формул:

1) $\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;
2) $(x \vee y) \to (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \to \overline{y})$;
3) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$;
4) $x \wedge \overline{y} \to (y \vee \overline{x} \to \overline{z})$;
5) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{x_3})$;
6) $(\overline{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$;
7) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to x_n)\ldots)$;
8) $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_n$.

1.19. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:

1) $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \& y}}$;
2) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;
3) $\overline{p_1 \to (p_2 \to p_1)}$;
4) $\overline{p_1} \to (p_1 \to p_2)$;
5) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$;
6) $((p \to q) \& (q \to r)) \to (p \to r)$;
7) $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$;
8) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$;
9) $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;
10) $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

§ 2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Определение. Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний ($A \equiv B$).

Важнейшие равносильности можно разбить на три группы:

I. Основные равносильности.

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & x\&x \equiv x\,(x\&x\&\ldots\&x \equiv x) \\ 2. & x \vee x \equiv x\,(x \vee x \vee \cdots \vee x \equiv x) \end{array}\right\} \text{— законы идемпотентности.}$$

3. $x\&1 \equiv x$.

4. $x \vee 1 \equiv 1$.
5. $x\&0 \equiv 0$.
6. $x \vee 0 \equiv x$.
7. $x\&\overline{x} \equiv 0$ — закон противоречия.
8. $x \vee \overline{x} \equiv 1$ — закон исключенного третьего.
9. $\overline{\overline{x}} \equiv x$ — закон снятия двойного отрицания.

$$\left.\begin{array}{l} 10.\ x\&(y \vee x) \equiv x \\ 11.\ x \vee (y\&x) \equiv x \end{array}\right\} \text{— законы поглощения.}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y)\&(y \to x)$.
2. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \overline{x\&y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \\ 4.\ \overline{x \vee y} \equiv \overline{x}\&\overline{y} \end{array}\right\} \text{— законы де Моргана.}$$

5. $x\&y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
6. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x}\&\overline{y}}$.

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1) $x\&y \equiv y\&x$.
2) $x \vee y \equiv y \vee x$.
3) $x\&(y\&z) \equiv (x\&y)\&z$.
4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.
5) $x\&(y \vee z) \equiv (x\&y) \vee (x\&z)$.
6) $x \vee (y\&z) \equiv (x \vee y)\&(x \vee z)$.

Используя равносильности групп I, II, III, можно часть формулы алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования называются равносильными. Равносильные преобразования формул применяются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Пример 1. Доказать равносильность $x \to y \equiv x\&\overline{y}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнем ее левую часть равносильным преобразованиям:

$$\overline{x \to y} \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \equiv \overline{\overline{x}}\&\overline{y} \equiv x\&\overline{y}.$$

Пример 2. Упростить формулу $A \equiv (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \vee y)\&y$.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:

$$A \equiv (\overline{x \vee y} \to \overline{x} \vee y)\,\&y \equiv \left(\overline{\overline{x \vee y}} \vee \overline{x} \vee y\right)\&y \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee \overline{x} \vee y)\,\&y \equiv ((x \vee \overline{x}) \vee (y \vee y))\,\&y \equiv$$
$$\equiv (1 \vee y)\,\&y \equiv 1\&y \equiv y.$$

Пример 3. Доказать что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение. Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:

$$A \equiv x \to (y \to x) \equiv \overline{x} \vee (\overline{y} \vee x) \equiv \overline{x} \vee (x \vee \overline{y}) \equiv$$
$$\equiv (\overline{x} \vee x) \vee \overline{y} \equiv 1 \vee \overline{y} \equiv 1.$$

1.20. Доказать равносильность:

1) $(x \vee y)\,\&\,(x \vee \overline{y}) \equiv x$;
2) $x \vee (\overline{x}\&y) \equiv x \vee y$;
3) $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}$;
4) $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \equiv x \to y$[1];
5) $x \to \overline{y} \equiv y \to \overline{x}$;
6) $x \to (y \to z) \equiv x\&y \to z$;
7) $x \equiv (x\&y\&z) \vee (x\&y\&\overline{z}) \vee (x\&\overline{y}\&z) \vee (x\&\overline{y}\&\overline{z})$;
8) $(x \vee y)\,\&\,(z \vee t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt$;
9) $xy \vee zt \equiv (x \vee z)\,(y \vee z)\,(x \vee t)\,(y \vee t)$;
10) $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \to y \equiv x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_n \to y)\ldots))$.

1.21. Упростить формулу:

1) $(x \to x) \to x$;
2) $x \to (x \to y)$;
3) $\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} \vee (x \to y) \cdot x$;
4) $(x \leftrightarrow y)\,\&\,(x \vee y)$;
5) $(x \to y)\,\&\,(y \to z) \to (z \to x)$;
6) $(x \vee \overline{y} \to (z \to y \vee \overline{y} \vee x))\,\&\left(x \vee \overline{x \to (x \to x)}\right) \to y$;
7) $\left(x\&\overline{x\&\overline{x} \to y\&\overline{y}} \to z\right) \vee x \vee (y\&z) \vee (y\&z)$;
8) $(x\&\,(y \vee z \to y \vee z)) \vee (y\&x\&\overline{y}) \vee x \vee \left(y\&\overline{x\&\overline{x}}\right)$;
9) $(x \to y)\,\&\,(y \to z) \to (x \to z)$;
10) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z)$.

---

[1]Здесь и в дальнейшем запись xy $(x \cdot y)$ означает $x\&y$, подобно тому, как в алгебре не пишется знак умножения (или пишется $x \cdot y$ вместо $x \times y$).

1.22. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

1) $x \wedge y \to x$;
2) $x \to (x \vee y)$;
3) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;
4) $(\overline{y} \to \overline{x}) \to (x \to y)$;
5) $(x \to y) \,\&\, (x \to \overline{y}) \to \overline{x}$;
6) $x \& \,(x \to y) \,\&\, (x \to \overline{y})$;
7) $x \vee \overline{x} \to y \wedge \overline{y}$;
8) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;
9) $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$;
10) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;
11) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;
12) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;
13) $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \,\&\, (x_1 \vee \cdots \vee x_n \to \overline{y}) \,\& y$;
14) $x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to (x_n \to y \vee \overline{y})) \ldots)$;
15) $\left(\overline{\overline{\overline{x \wedge \overline{x} \to y_1} \to y_2} \to \ldots \to y_{n-1}} \to y_n\right) \to (z \wedge \overline{z})$.

1.23. Пусть F — тождественно ложная формула. Доказать, что $x \& \overline{y} \to F \equiv x \to y$.

1.24. Найдите x, если $\overline{x \vee a} \vee \left(\overline{x \vee \overline{a}}\right) \equiv b$.

1.25. Последовательность высказываний (a_n) определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$a_n = a_{n-1} \wedge (a_{n-2} \vee a_{n-3}), \qquad n > 3.$$

Высказывания a_1, a_2, a_3 заданы, причем a_1 и a_3 истинны, а a_2 ложно. Истинно или ложно высказывание a_n? Как выражается a_n через a_1, a_2, a_3?

1.26. Выразить все основные операции:

1) через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;
2) через конъюнкцию и отрицание;
3) через дизъюнкцию и отрицание;
4) через импликацию и отрицание.

1.27. 1) Выразить отрицание импликации через основные операции так, чтобы отрицания стояли только над аргументами.

2) Выразить операцию дизъюнкции через импликацию.

1.28. Исключающей дизъюнкцией двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a\veebar b$ (читают «либо a, либо b»), которое истинно, когда одно и только одно из данных высказываний истинно, и ложно в остальных случаях. Составить таблицу истинности исключающей дизъюнкции и выразить ее через основные операции над высказываниями.

1.29. Штрихом Шеффера двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a|b$ (читают «a не совместно с b»), которое ложно только тогда, когда оба данные высказывания истинны. Составить таблицу истинности штриха Шеффера и выразить его через основные операции над высказываниями. Доказать, что все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

1.30. Штрихом Лукасевича двух высказываний a и b называется новое высказывание $a \downarrow b$ (читают «ни a, ни b»), которое истинно в том и только том случае, когда оба данные высказывания ложны. Составить таблицу истинности штриха Лукасевича и выразить его через основные операции над высказываниями. Доказать, что все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.

1.31. Доказать, что операция отрицания не может быть выражена через основные операции (бинарные) над высказываниями.

1.32. Можно ли для каждой формулы найти равносильную, не содержащую знака отрицания?

1.33. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? В ответе отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях.

§ 3. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1. *Функцией алгебры логики n переменных* называется любая функция n переменных $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которой принимают два значения 1 и 0, и сама функция принимает одно из двух значений: 1 или 0.

Всякая формула алгебры логики есть функция алгебры логики. Тождественно истинная и тождественно ложная формулы есть постоянные функции.

Можно показать, что всякую функцию алгебры логики можно представить в виде формулы алгебры логики, и это представление таково:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(1, 1, \ldots, 1) \& x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n \vee$$
$$\vee F(1, 1, \ldots, 0) \& x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_{n-1} \& \overline{x_n} \vee \cdots \vee$$
$$\vee F(0, 0, \ldots, 0) \& \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \ldots \& \overline{x_n}. \qquad (*)$$

Формулу (*) можно преобразовать к формуле, которая содержит только элементарные переменные высказывания и обладает следующими свойствами совершенства (или свойствами (C)):

1) каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) все логические слагаемые формулы различны;

3) ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание;

4) ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

С помощью таблицы истинности, определяющей функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, легко получить соответствующую формулу алгебры логики, обладающую свойствами (C). Действительно, для каждого набора значений переменных, на котором функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, запишем конъюнкцию элементарных переменных высказываний, взяв за член конъюнкции x_k, если значение x_k на указанном наборе значений переменных есть 1, и отрицание x_k, если значение x_k есть 0. Дизъюнкция всех полученных таким образом конъюнкций и будет искомой формулой.

Определение 2. *Элементарной конъюнкцией* n переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.

Определение 3. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Определение 4. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) формулы A называется ДНФ A, обладающая свойствами (C).

СДНФ можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности (см. выше); б) с помощью равносильных преобразований.

Правило получения СДНФ из формулы A с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы A получаем любую ДНФ.
2. Из ДНФ A путем равносильных преобразований получаем СДНФ, последовательно добиваясь выполнения четырех свойств СДНФ:

1) Пусть B есть слагаемое ДНФ, не содержащее x_i. Тогда надо заменить слагаемое B в ДНФ A на слагаемое $B\&(x_i \vee \overline{x_i}) \equiv (B\&x_i) \vee (B\&\overline{x_i})$.

2) Если в ДНФ A встретится два одинаковых слагаемых $B \vee B$, то лишнее нужно отбросить, так как $B \vee B \equiv B$.

3) Если слагаемое B в ДНФ A содержит конъюнкцию $x_i\&\overline{x_i}$, то это слагаемое можно отбросить, так как $x_i\&\overline{x_i} \equiv 0$, и следовательно, $B \equiv 0$, а ложное высказывание из дизъюнкции можно выбросить (в силу равносильности $C \vee 0 \equiv C$).

4) Если в некоторое слагаемое B в ДНФ A переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную надо отбросить, так как $x_i\&x_i \equiv x_i$.

Определение 5. *Элементарной дизъюнкцией* n переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.

Определение 6. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Определение 7. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой формулы A* (СКНФ A) называется КНФ A, удовлетворяющая четырем свойствам:

1) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные;

2) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны;

3) ни одна элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит переменную и ее отрицание;

4) каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную один раз.

СКНФ A можно получить двумя способами: а) с помощью таблицы истинности (используя закон двойственности СКНФ$A \equiv \overline{\text{СДНФ}\overline{A}}$, получаем с помощью таблицы истинности СДНФ $\overline{A}$, и, взяв отрицание СДНФ $\overline{A}$, получаем СКНФ A); б) с помощью равносильных преобразований.

Правило получения СКНФ из формулы A с помощью равносильных преобразований.

1. Для формулы A получаем любую КНФ.

2. Из КНФ A путем равносильных преобразований получаем СКНФ A, последовательно добиваясь выполнения четырех свойств СКНФ.

1) Если элементарная дизъюнкция B, входящая в КНФ A, не содержит переменную x_i, тогда заменяем B на $B \vee (x_i \& \overline{x_i}) \equiv \equiv (B \vee x_i) \& (B \vee \overline{x_i})$.

2) Если КНФ A содержит две одинаковых элементарных дизъюнкции, то одну можно отбросить, так как $B \& B \equiv B$.

3) Если в элементарную дизъюнкцию B входит пара $x_i \vee \overline{x_i}$, а значит и $B \equiv 1$, то ее можно отбросить, так как $x_i \vee \overline{x_i} \equiv 1$, и истинное высказывание из конъюнкции можно выбросить (в силу равносильности $C \& 1 \equiv C$).

4) Если в некоторую элементарную дизъюнкцию B переменная x_i входит дважды, то лишнюю переменную нужно отбросить, так как $x_i \vee x_i \equiv x_i$.

Пример 1. Найти формулу, определяющую функцию $\Phi(x, y, z)$, по заданной таблице истинности:

x	y	z	$\Phi(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Решение. Используя правило получения формулы алгебры логики из таблицы истинности для функции $\Phi(x, y, z)$, получим:

$$\Phi(x, y, z) \equiv xyz \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\, y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}.$$

Упростив эту формулу, получим:

$$yz(x \vee \overline{x}) \vee \overline{x}\,\overline{z}(y \vee \overline{y}) \vee \overline{x}\,\overline{y}z \equiv yz \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \equiv$$

$$\equiv yz \vee \overline{x}(\overline{z} \vee \overline{y}z) \equiv yz \vee \overline{x}(\overline{z} \vee \overline{y})(\overline{z} \vee z) \equiv yz \vee \overline{x}(\overline{z} \vee \overline{y}) \equiv$$

$$\equiv (yz \vee \overline{x}) \& (yz \vee \overline{z} \vee \overline{y}) \equiv (y \vee \overline{x})(z \vee \overline{x})(y \vee \overline{z} \vee \overline{y})(z \vee \overline{z} \vee \overline{y}) \equiv$$

$$\equiv (y \vee \overline{x})(z \vee \overline{x}) \equiv \overline{x} \vee yz \equiv x \to yz.$$

Таким образом, искомой формулой, определяющей функцию $\Phi(x, y, z)$, можно считать $x \to yz$, или $\overline{x} \vee yz$, или какую-нибудь другую из равносильных им формул.

Пример 2. Следующую формулу привести к СДНФ, предварительно приведя ее равносильными преобразованиями к ДНФ: $A \equiv a(bc \to ab)$.

Решение. $A \equiv a(bc \to ab) \equiv a\left(\overline{bc} \vee ab\right) \equiv a\left(\overline{b} \vee \overline{c} \vee ab\right) \equiv \equiv a\overline{b} \vee a\overline{c} \vee ab \equiv$ ДНФ A.

$$A \equiv \text{ДНФ}\, A \equiv a\overline{b}(c \vee \overline{c}) \vee a\overline{c}\left(b \vee \overline{b}\right) \vee ab(c \vee \overline{c}) \equiv$$

$$\equiv a\overline{b}\,c \vee a\overline{b}\,\overline{c} \vee ab\overline{c} \vee a\overline{b}\,\overline{c} \vee abc \vee ab\overline{c} \equiv$$

$$\equiv a\overline{b}\,c \vee a\overline{b}\,\overline{c} \vee ab\overline{c} \vee abc \equiv \text{СДНФ}\, A.$$

Ответ. СДНФ $A \equiv a\overline{b}\,c \vee a\overline{b}\,\overline{c} \vee ab\overline{c} \vee abc$.

Пример 3. Для формулы из примера 2 найти СДНФ путем составления таблицы истинности.

Решение. Составим таблицу истинности для формулы $A \equiv \equiv a(bc \to ab)$.

a	b	c	bc	ab	$bc \to ab$	A
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0

Тогда СДНФ $A \equiv abc \vee ab\overline{c} \vee a\overline{b}\,c \vee a\overline{b}\,\overline{c}$.

Пример 4. Для формулы из примера 2 найти СКНФ путем равносильных преобразований, предварительно приведя ее к КНФ.

Решение. Из примера 2: $A \equiv a\overline{b} \vee a\overline{c} \vee ab$. Далее $A \equiv$ $\equiv a\left(\overline{b} \vee \overline{c} \vee b\right) \equiv a\&1 \equiv a \equiv$ КНФ A.

$$A \equiv \text{КНФ}\, A \equiv a \vee \left(b\&\overline{b}\right) \equiv (a \vee b)\,\&\,\left(a \vee \overline{b}\right) \equiv$$
$$\equiv ((a \vee b) \vee c\&\overline{c})\,\&\,\left(\left(a \vee \overline{b}\right) \vee c\&\overline{c}\right) \equiv$$
$$\equiv (a \vee b \vee c)\,\&\,(a \vee b \vee \overline{c})\,\&\,\left(a \vee \overline{b} \vee c\right)\,\&\,\left(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right) \equiv \text{СКНФ}\, A.$$

Ответ. СКНФ $A \equiv (a \vee b \vee c)\&(a \vee b \vee \overline{c})\&\left(a \vee \overline{b} \vee c\right)\&\left(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right)$.

Пример 5. Для формулы из примера 2 найти СКНФ, записав предварительно СДНФ ее отрицания, а потом воспользовавшись формулой двойственности.

Решение. СДНФ $\overline{A} \equiv \overline{a}\,bc \vee \overline{a}\,b\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

$$\text{СКНФ}\, A \equiv \overline{\text{СДНФ}\, \overline{A}} \equiv \overline{\overline{a}\,bc \vee \overline{a}\,b\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}} \equiv$$
$$\equiv \left(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right)\,\&\,\left(a \vee \overline{b} \vee c\right)\,\&\,(a \vee b \vee \overline{c})\,\&\,(a \vee b \vee c)\,.$$

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1) тождественно истинные;
2) тождественно ложные;
3) выполнимые.

Формулу A называют *выполнимой*, если она принимает значение 1 хотя бы на одном наборе значений входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

Теорема. *Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно истинна (ложна), необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), входящая в* КНФ A (ДНФ A), *содержала переменную и ее отрицание.*

Пример 6. Будет ли формула $(x \to y) \to \overline{x}\,y \vee \overline{y}$ тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой?

Решение. Приведем формулу к какой-либо нормальной форме:

$$(x \to y) \to \overline{x}\,y \vee \overline{y} \equiv \overline{x} \vee y \to \overline{x}\,y \vee \overline{y} \equiv \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x}\,y \vee \overline{y} \equiv$$
$$\equiv x\overline{y} \vee \overline{x}\,y \vee \overline{y}.$$

Полученная ДНФ не является тождественно ложной, так как каждая элементарная конъюнкция не содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, исходная формула тождественно истинна или выполнима. Преобразуем данную формулу к КНФ.

$$(x \to y) \to \overline{x}\, y \vee \overline{y} \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}\, y \vee \overline{y} \equiv (x\overline{y} \vee \overline{y}) \vee \overline{x}\, y \equiv \overline{y} \vee \overline{x}\, y \equiv$$
$$\equiv (\overline{y} \vee \overline{x})\, \&\, (\overline{y} \vee y) \equiv \overline{y} \vee \overline{x}.$$

Это произведение не является тождественно истинным, так как элементарная сумма $\overline{y} \vee \overline{x}$ не тождественно истинна. Таким образом, исходная формула не тождественно ложна и не тождественно истинна, следовательно, она выполнима.

1.34. По таблицам истинности найдите формулы, определяющие функции $F_1\,(x, y, z)$, $F_2\,(x, y, z)$, $F_3\,(x, y, z)$, $F_4\,(x, y, z)$, и придайте им более простой вид:

x	y	z	$F_1\,(x, y, z)$	$F_2\,(x, y, z)$	$F_3\,(x, y, z)$	$F_4\,(x, y, z)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

1.35. Пусть $F\,(l_1, l_2, l_3)$ — булева функция, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда точно одна из переменных принимает значение 1. Составьте таблицу для функции $F\,(l_1, l_2, l_3)$ и выразите эту функцию через основные логические операции.

1.36. Назовем функцией большинства $l_1|l_2|l_3$ булеву функцию от трех переменных, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных.

а) Составьте таблицу, определяющую функцию большинства и выразите эту функцию через основные операции.

б) Упростите выражение $l_1|l_2|l_3$.

1.37. Булева функция $F^*(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ называется двойственной по отношению к булевой функции $F(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, если

$$\overline{F^*(l_1, l_2, \ldots, l_n)} \equiv F\left(\overline{l_1}, \overline{l_2}, \ldots, \overline{l_n}\right).$$

Для каждой булевой функции от двух переменных найдите двойственную ей булеву функцию.

1.38. Булева функция $F(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ называется:

а) сохраняющей 0, если $F(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

б) сохраняющей 1, если $F(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Среди булевых функций от одной и двух переменных найти все функции, сохраняющие 1, и все функции, сохраняющие 0.

1.39. Для следующих формул найти СДНФ и СКНФ, каждую двумя способами (путем равносильных преобразований и используя таблицы истинности):

1) $x\&(x \to y)$;
2) $(\overline{xy} \to \overline{x})\,\&\left(\overline{xy \to \overline{y}}\right)$;
3) $(x \to y) \to (y \to x)$;
4) $(x \vee \overline{z}) \to y\&z$;
5) $(x \vee \overline{y} \to x \wedge z) \to \left(\overline{x \to \overline{x}}\right) \vee y \wedge \overline{z}$;
6) $(ab \to bc) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;
7) $(\overline{a} \to c) \to \left(\overline{\overline{b} \to \overline{a}}\right)$;
8) $\left(\overline{a} \to \overline{b}\right) \to (bc \to ac)$;
9) $x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_{n-1} \to x_n)\ldots))$;
10) $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \to y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots \wedge y_n$.

1.40. Найдите СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей: 1) одно переменное, 2) два переменных, 3) три переменных.

1.41. Найдите СКНФ для всякой тождественно ложной формулы, содержащей: 1) одно переменное, 2) два переменных, 3) три переменных.

1.42. Докажите равносильность формул $\overline{x\overline{y}} \to (\overline{y} \to x)$ и $\overline{x \to y} \vee x \vee y$ сравнением их совершенных нормальных форм (конъюнктивных или дизъюнктивных).

1.43. Найдите более простой вид формул, имеющих следующие совершенные нормальные формы:

1) $xy \vee x\overline{y} \vee \overline{x}\,y$;
2) $(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)\,(\overline{x} \vee \overline{y})$;

3) $xyz \vee \overline{x}\,yz \vee x\overline{y}\,z$;
4) $(x \vee y \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee y \vee z)\,(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

1.44. Используя критерий тождественной истинности и тождественной ложности формулы, установить, будет ли данная формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой:
1) $\overline{x\overline{y}} \leftrightarrow \overline{x} \vee xy$;
2) $(x \leftrightarrow y)\,\&\,(x\overline{y} \vee \overline{x}\,y)$;
3) $xy \rightarrow (x \rightarrow \overline{y})$;
4) $x \vee y \rightarrow (x \leftrightarrow y)$;
5) $x \vee y \rightarrow z$;
6) $(x \rightarrow z)\,(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)$.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

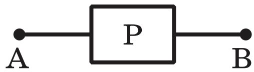
I. Приложение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам (РКС).

Релейно-контактные схемы (их часто называют переключательными схемами) широко используются в технике автоматического управления.

Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из следующих элементов:

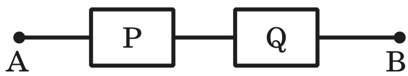
1) *переключателей*, которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и т. д.;
2) соединяющие их *проводники*;
3) *входы* в схему и *выходы из нее* (клеммы, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами.

Простейшая схема содержит один переключатель P и имеет один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание p, гласящее: «Переключатель P замкнут». Если p истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения, т. е. схема пропускает ток. Если p ложно, то переключатель разомкнут, и схема тока не проводит. Таким образом, если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема с двумя полюсами (двухполюсная схема).

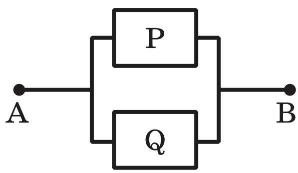


Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Так, конъюнкции двух высказываний $p\&q$ ставится с соответствие схема:



а дизъюнкции схема:



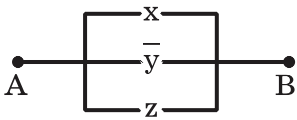
Так как любая формула алгебры логики может быть записана в ДНФ или КНФ, то ясно, что каждой формуле алгебры логики можно поставить в соответствие некоторую РКС, а каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Поэтому возможности схемы можно выявить, изучая соответствующую ей формулу, а упрощение схемы можно свести к упрощению формулы.

Пример 1. Составить РКС для формулы $(\overline{x} \wedge y) \rightarrow (z \vee x)$.

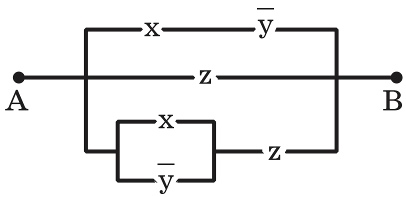
Решение. Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований:

$$\overline{x} \wedge y \rightarrow (z \vee x) \equiv \overline{\overline{x} \wedge y} \vee z \vee x \equiv x \vee \overline{y} \vee z \vee x \equiv x \vee \overline{y} \vee z.$$

Тогда РКС для данной формулы имеет вид:*



Пример 2. Упростить РКС:

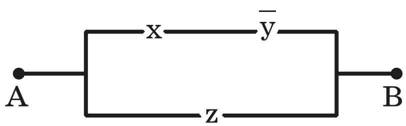


Решение. Составим по данной РКС формулу (функцию проводимости) и упростим ее:

$$(x \& \overline{y}) \vee z \vee (x \vee \overline{y})\,\& z \equiv x \& \overline{y} \vee z$$

(к последним двум слагаемым применили закон поглощения).

Тогда упрощенная схема выглядит так:



II. Решение логических задач с помощью алгебры логики.

Условие логической задачи с помощью соответствующих обозначений записывают в виде формулы алгебры логики. После равносильных преобразований формулы получают ответ на все вопросы задачи.

Пример 3. После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполняться два условия:

---

* Для простоты часто переключатель —$\boxed{\text{P}}$— изображают в виде — p — .

а) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский;

б) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин.

Требуется:

1) ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую принятое решение в символической форме;

2) для полученной формулы найти возможно более простую равносильную формулу;

3) пользуясь найденной более простой формулой, дать новую и более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников экспедиции.

Решение. 1. Назначение в экспедицию Арбузова, Брюквина и Вишневского обозначим буквами A, $Б$, $В$ соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде $A \to Б \vee В$, а условие б) в виде $A\&В \to Б$. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то они должны быть соединены логической связкой «и». Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы:

$$(A \to Б \vee В)\,\&\,(A\&В \to Б)\,.$$

2. $$(A \to Б \vee В)\,\&\,(A\&В \to Б) \equiv \left(\overline{A} \vee Б \vee В\right)\&\left(\overline{A} \vee \overline{В} \vee Б\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\overline{A} \vee Б\right) \vee \left(В\&\overline{В}\right) \equiv A \to Б.$$

3. Символическую формулу читаем так: «Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин». Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе экспедиции.

1.45. Составить РКС для формулы:

1) $x\,(\overline{y}\,z \vee x \vee y)$;
2) $xyz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y$;
3) $x\,(yz \vee \overline{y}\,\overline{z}) \vee \overline{x}\,(\overline{y}\,z \vee y\overline{z})$;
4) $(\overline{x} \vee y)\,\&\,(zy \vee x) \vee u$;
5) $(x \to y)\,\&\,(y \to z)$;
6) $(x \to y) \to (\overline{x}\&\,(y \vee z))$;
7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;
8) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

1.46. Построить схемы, реализующие следующие булевы операции:

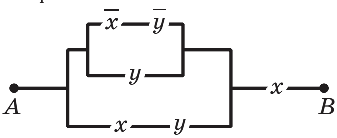
1) импликацию $x \to y$;
2) эквивалентность $x \leftrightarrow y$;
3) альтернативу (см. задачу 1.28);
4) штрих Шеффера (см. задачу 1.29);
5) штрих Лукасевича (см. задачу 1.30).

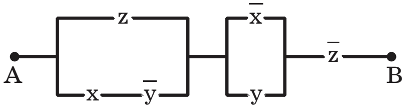
1.47. Построить РКС для $F(x, y, z)$, если известно, что:

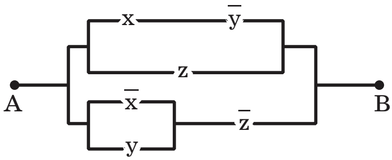
1) $F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;
2) $F(1,0,1) = F(1,1,0) = 1$;
3) $F(0,0,1) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$;
4) $F(1,1,0) = F(1,1,1) = 1$;
5) $F(0,0,1) = F(1,0,1) = F(1,0,0) = 1$;
6) $F(0,0,1) = F(0,1,0) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = 1$,

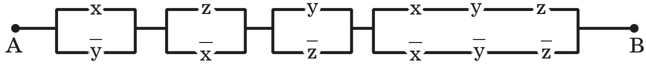
а остальные значения функции F равны нулю.

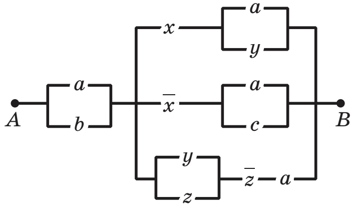
1.48. Упростить РКС:

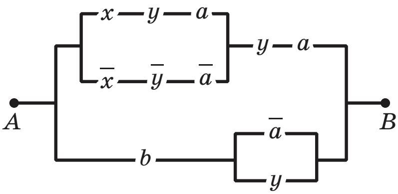
1) 

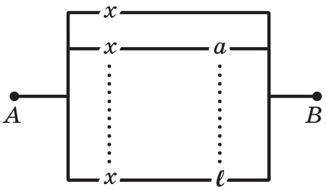
2) 

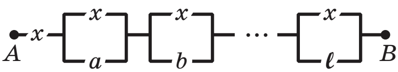
3) 

4) 

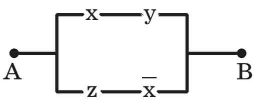
5) 

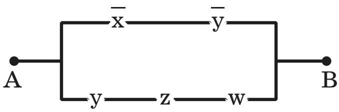
6) 

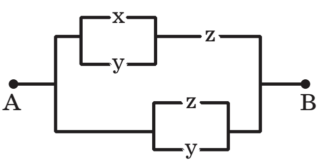
7) 

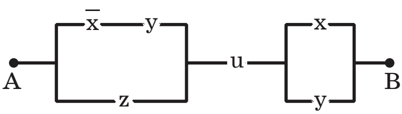
8) 

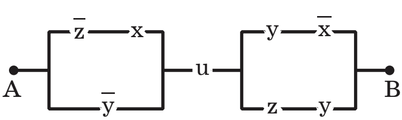
1.49. По данной схеме найти функцию проводимости и условия работы:

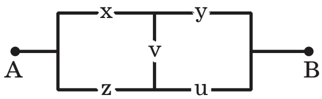
1) 

2) 

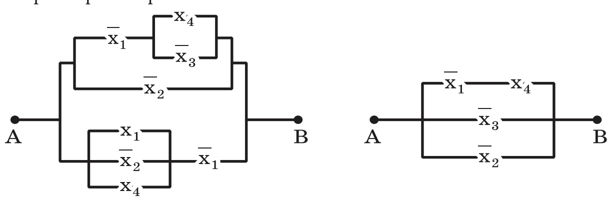
3) 

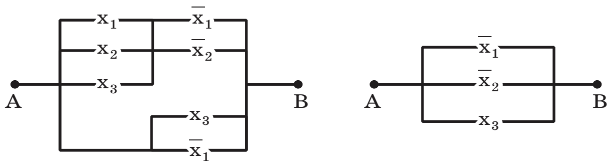
4) 

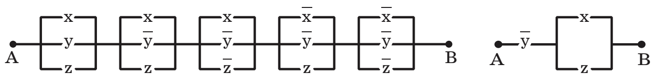
5) 

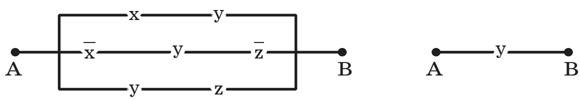
6) 

1.50. Проверить равносильность схем:

1) 

2) 

3) 

4) 

1.51. Электрическая цепь, изображенная на рис. 1, содержит только двухпозиционные выключатели (при одном состоянии переключателя ток через него проходит, при другом не проходит). Можно ли эту цепь заменить более простой цепью, изображенной на рис. 2?

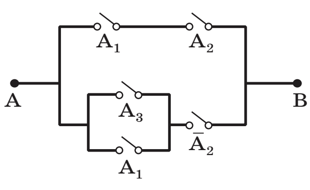


Рис. 1

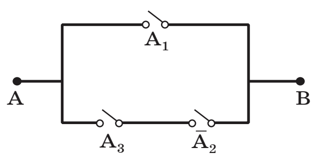


Рис. 2

1.52. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1. Андреев: «Я убирал 9-й класс, а Савельев — 7-й».
2. Костин: «Я убирал 9-й класс, а Андреев — 8-й».
3. Савельев: «Я убирал 8-й класс, а Костин — 10-й».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

1.53. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Новозыбкова».

Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров — из Трубчевска».

Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Дятькова».

Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов — из Жуковки».

Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове».

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

1.54. Семья, состоящая из отца A, матери B и трех дочерей C, D, E купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:

1. Когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же.
2. Дочери D и E, обе или одна из них, смотрят передачу.
3. Из двух членов семьи — мать B и дочь C — смотрят передачу одна и только одна.
4. Дочери C и D или обе смотрят, или обе не смотрят.
5. Если дочь E смотрит передачу, то отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

1.55. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ — «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

1.56. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:

1. Если первый сдал, то и второй сдал.
2. Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
3. Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
4. Если четвертый сдал, то и первый сдал.

1.57. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

1.58. Четыре студентки, имена которых начинаются буквами A, E, C, P посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

1. Понедельник — день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
2. C и P не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
3. Если C выйдет в среду или P — в четверг, то E согласится побывать на занятиях в пятницу.
4. Если A не пойдет в ВУЗ в четверг, то E позволит себе сходить туда в среду.
5. Если A и P будут в институте в среду, то C сможет пойти в пятницу.
6. Если P в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то A придется сходить в институт во вторник, а C — в четверг.

1.59. Четыре друга — Антонов (*А*), Вехов (*В*), Сомов (*С*), Деев (*Д*) решили провести каникулы в четырех различных городах — Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определите, какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1. Если *А* не едет в Москву, то *С* не едет в Одессу.
2. Если *В* не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то *А* едет в Москву.

3. Если *С* не едет в Ташкент, то *В* едет в Киев.
4. Если *Д* не едет в Москву, то *В* не едет в Москву.
5. Если *Д* не едет в Одессу, то *В* не едет в Москву.

1.60. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.

1. Клод утверждал, что Жак лжет.
2. Жак обвинял во лжи Дика.
3. Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

Глава 2

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ — переменные.
2. $-$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ — логические связки.
3. () — скобки.

1. Понятие формулы исчисления высказываний

1. Всякое переменное высказывание x есть формула.
2. Если A — формула, то $\overline{A}$ — формула.
3. Если A и B — формулы, то $A * B$ — формулы, где $*$ обозначает один их символов: $\&$, $\vee$, $\rightarrow$.
4. Никакая другая строчка символов не является формулой.

2. Понятие подформулы

1. Если формула A есть переменная x, то ее подформулой является x.
2. Если $\overline{A}$ — формула, то ее подформулами являются $\overline{A}$, A и все подформулы формулы A.
3. Если $A * B$ — формула, то ее подформулы $A * B$, A, B и все подформулы формул A и B.

Пример 1. Выписать все подформулы формулы A, имеющей вид $\overline{x \rightarrow y} \& (\overline{x} \vee y)$.

Решение. Формула A — подформула нулевой глубины; $\overline{x \rightarrow y}$, $\overline{x} \vee y$ — подформулы первой глубины; $x \rightarrow y$, $\overline{x}$, y — подформулы второй глубины; x, y — подформулы третьей глубины.

3. Аксиомы исчисления высказываний

I_1 $x \rightarrow (y \rightarrow x)$;

I_2 $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$;

II_1 $x\&y \to x$;
II_2 $x\&y \to y$;
II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x\&y))$;
III_1 $x \to x \vee y$;
III_2 $y \to x \vee y$;
III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$;
IV_1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;
IV_2 $x \to \overline{\overline{x}}$;
IV_3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

Аксиомы исчисления высказываний определяют исходный класс доказуемых формул. Доказуемая формула A обозначается $\vdash A$.

Правила вывода

1. Правило подстановки. Пусть A — доказуемая формула исчисления высказываний, x — переменная, B — любая формула исчисления высказываний; тогда формула, которая получается из формулы A путем подстановки в нее вместо x формулы B, доказуема.

Подстановка обозначается так:

$$\int_x^B (A)\,.$$

Коротко правило подстановки записывается так:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}.$$

2. Правило заключения. Если формулы B, $B \to C$ — доказуемые формулы исчисления высказываний, то формула C доказуема.

Коротко это правило записывается так:

$$\frac{\vdash B, \vdash B \to C}{\vdash C}.$$

В дальнейшем условимся для краткости правило заключения записывать как ПЗ.

Определение. *Доказуемой* формулой называется всякая формула, которая или является аксиомой, или получается из доказуемых формул с помощью правил подстановки и заключения.

Будем обозначать любую доказуемую формулу символом R, а ее отрицание — символом F.

Пример 2. Доказать, что $\vdash x \to x$.

Решение. Возьмем аксиому I_2 и сделаем в ней подстановку $\int_z^x (\mathrm{I}_2)$. Получим

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x))\,. \tag{1}$$

Возьмем аксиому I_1:

$$\vdash x \to (y \to x)\,. \tag{2}$$

Из (1) и (2) по ПЗ:

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x)\,. \tag{3}$$

В формуле (3) сделаем подстановку $\int_y^{\overline{\overline{x}}} (3)$:

$$\vdash \left(x \to \overline{\overline{x}}\right) \to (x \to x)\,. \tag{4}$$

Запишем аксиому IV_2:

$$\vdash x \to \overline{\overline{x}}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) по ПЗ

$$\vdash x \to x. \tag{6}$$

Пример 3. Доказать, что $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x} \& \overline{y}$.

Решение. Возьмем II_3 и сделаем $\int_x^{\overline{x}} (\mathrm{II}_3)$. В полученной формуле A сделаем подстановку $\int_y^{\overline{y}} (A)$. Далее в полученной формуле B сделаем подстановку $\int_z^{\overline{x \vee y}} (B)$.

В итоге

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y}))\,. \qquad (1)$$

Запишем $\int\limits_{y}^{x\vee y}(\mathrm{IV}_1)$:

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x})\,. \qquad (2)$$

Запишем III_1:

$$\vdash x \to x \vee y. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) по ПЗ:

$$\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x}. \qquad (4)$$

Из (1) и (4) по ПЗ:

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \overline{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y})\,. \qquad (5)$$

Аналогично устанавливается доказуемость формулы

$$\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{y}. \qquad (6)$$

Из (6) и (5) по ПЗ: $\vdash \overline{x \vee y} \to \overline{x}\&\overline{y}$.

Производные правила вывода

I. $\dfrac{\vdash A}{\int\limits_{x_1,\ldots,x_n}^{B_1,\ldots,B_n}(A)}$ — правило одновременной подстановки.

II. $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$ — правило силлогизма.

III. $\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}$ — правило контрпозиции.

IV. а) $\dfrac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B}$, б) $\dfrac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}$ — правило снятия двойного отрицания.

V. $\dfrac{\vdash A_1, \vdash A_2, \ldots, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)))}{\vdash L}$ — правило сложного заключения.

Понятие выводимости формулы из совокупности формул

Пусть имеется конечная совокупность формул $H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Говорят, что формула B выводима из совокупности H ($H \vdash B$), если а) либо $B \in H$,

б) либо B — доказуемая формула исчисления высказываний,

в) либо B получается по ПЗ из формул C и $C \to B$, которые выводимы из совокупности H.

Также говорят, что конечная совокупность формул $B_1, B_2, \ldots, B_k$ есть вывод из H, если для каждой формулы B_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ этой совокупности

а) либо $B_i \in H$,

б) либо B_i доказуема,

в) либо получается по ПЗ из формул C и $C \to B_i$, которые находятся в выводе, предшествуя B_i.

Пример 4. Доказать, что из совокупности $H = \{A, B\}$ можно вывести $A\&B$. Записать полученный вывод.

Решение.

1. $H \vdash A$, так как $A \in H$;
2. $H \vdash B$, так как $B \in H$;
3. $H \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B))$, как доказуемая формула (получается подстановкой $\int\limits_{x,y,z}^{A,B,A} (\mathrm{II}_3)$);
4. $H \vdash A \to A$, как доказуемая формула;
5. $H \vdash (A \to B) \to (A \to A\&B)$ — из 3. и 4. по ПЗ;
6. $H \vdash B \to (A \to B) \left(\int\limits_{x,y}^{B,A} (\mathrm{I}_1)\right)$;
7. $H \vdash A \to B$ — из 2. и 6. по ПЗ;
8. $H \vdash A \to A\&B$ — по ПЗ из 5. и 7;
9. $H \vdash A\&B$ — по ПЗ из 1. и 8.

Запишем вывод: A, B, $(A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B))$, $A \to A$, $(A \to B) \to (A \to A\&B)$, $B \to (A \to B)$, $A \to B$, $A \to \to A\&B$, $A\&B$.

Правила вывода

I. $\dfrac{H \vdash A}{H, W \vdash A}$.

II. $\dfrac{H, C \vdash A; H \vdash C}{H \vdash A}$.

III. $\dfrac{H, C \vdash A; W \vdash C}{H, W \vdash A}$.

IV. $\dfrac{H \vdash C \to A}{H, C \vdash A}$.

V. $\dfrac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$ — теорема дедукции.

VI. $\dfrac{\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_n \to A)))}$ — обобщенная теорема дедукции.

VII. $\dfrac{H \vdash A, H \vdash B}{H \vdash A\&B}$ — правило введения конъюнкции.

VIII. $\dfrac{H, A \vdash C; H, B \vdash C}{H, A \vee B \vdash C}$ — правило введения дизъюнкции.

IX. $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to (A \to C)}$ — правило перестановки посылок.

X. $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash A\&B \to C}$ — правило соединения посылок.

XI. $\dfrac{\vdash A\&B \to C}{\vdash A \to (B \to C)}$ — правило разъединения посылок.

Теорема (о выводимости). *Пусть A — некоторая формула; x_1, x_2, ..., x_n — набор переменных, содержащихся в формуле A; α_1, α_2, ..., α_n — произвольный набор значений переменных. Тогда:*

а) если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 1$, то $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\} \vdash A$,
б) если $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 0$, то $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\} \vdash \overline{A}$.

Пример 5. Пусть $A = x_1\&\overline{x}_2 \to x_3$ и наборы значений переменных (1, 0, 1) и (1, 0, 0). Тогда $\{x_1, \overline{x}_2, x_3\} \vdash A$, а $\{x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\} \vdash \overline{A}$.

Записать выводы в обоих случаях.

Решение.

а) Покажем, что $\{x_1, \overline{x}_2, x_3\} \vdash A$.
$H \vdash x_1, \overline{x}_2, x_3, x_3 \to (x_1\&\overline{x}_2 \to x_3), x_1\&\overline{x}_2 \to x_3$, т. е. $H \vdash A$.
б) Покажем, что $\{x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\} \vdash \overline{A}$.
$H \vdash x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, x_1\&\overline{x}_2, (x_1\&\overline{x}_2 \to x_3) \to (x_1\&\overline{x}_2 \to x_3)$, по правилу перестановки посылок $x_1\&\overline{x}_2 \to ((x_1\&\overline{x}_2 \to x_3) \to x_3)$, по ПЗ $(x_1\&\overline{x}_2 \to x_3) \to x_3$, по правилу контрпозиции $\overline{x}_3 \to \to \overline{x_1\&\overline{x}_2 \to x_3}$, по ПЗ $\overline{x_1\&\overline{x}_2 \to x_3}$, т. е. $H \vdash \overline{A}$.

2.1. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления высказываний:

1) $(\overline{p}_1 \wedge \overline{p}_2) \to (p_1 \vee p_2)$;
2) $((p_1 \vee p_2) \vee (p_1 p_2)) \to \overline{p}_3$;
3) $(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \to p_3$;
4) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to \overline{p}_2) \to p_1)$;
5) $(p_1 \wedge (\to p_2)) \to (p_2 \to \overline{p}_1)$;
6) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3))$;
7) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_1 \to p_3)) \to (p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$;
8) $\big((p_1 \wedge \overline{p}_2) \to \big(\overline{\overline{p}}_1 \vee \vee p_2\big)\big) \to (\vee p_1 \vee p_2)$.

2.2. Выписать все подформулы формул:

1) $x \to (y \to x)$;
2) $\overline{a \vee b} \to c$;
3) $a\&\overline{c \vee b}$;
4) $x \to y\&z$;
5) $x \vee yz \to x$;
6) $\overline{x \to y} \vee x\&y$;
7) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (\overline{x} \vee z)$;
8) $(x \to y) \to ((x \to \overline{y}) \to \overline{y})$.

2.3. Для формул $L_1 = (A \to B) \to \big(\overline{B} \to \overline{A}\big)$, $L_2 = A \vee B$, $L_3 = A \to B \vee C$ записать результаты каждой из следующих подстановок:

1) $\int\limits_{A,B}^{B,C} (L_1)$;
2) $\int\limits_{A}^{A \to B} (L_2)$;
3) $\int\limits_{A,C}^{B \to A\&B,B} (L_3)$;
4) $\int\limits_{A,B}^{A\&B,A \vee B} (L_1)$;
5) $\int\limits_{A,B}^{B,A} (L_2)$;
6) $\int\limits_{A,B,C}^{A\&\overline{A},C,\overline{A}} (L_3)$.

2.4. Применяя правило подстановки, доказать, что доказуема формула:

1) $(A \to B)\,\&B \to B$;
2) $A\&B \to A\&B \vee C$;
3) $\big(\overline{A} \to B\big) \to \big((C \to B) \to \big(\overline{A} \vee C \to B\big)\big)$;
4) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$;
5) $(A\&B \to (C \to B\&C)) \to ((A\&B \to C) \to (A\&B \to B\&C))$.

2.5. Применяя правило подстановки и правило заключения, установить доказуемость формул:

1) $A \vee A \to A$;
2) $A \vee A\&A$;
3) $A\&B \to B\&A$;
4) $A \vee B \to B \vee A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$;
6) $\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

2.6. Применяя производные правила вывода, показать, что доказуемы формулы:

1) $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \& B}$;
2) $A \to R$;
3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$;
4) $F \to A$;
5) $(A \to B) \to (A \to A)$;
6) $A \& \overline{A} \to F$;
7) $(A \to B) \& \overline{B} \to \overline{A}$.
8) $\overline{A} \& \overline{B} \to \overline{A \vee B}$.

2.7. Доказать, что:

1) $H = \{A\} \vdash B \to A$;
2) $H = \{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$;
3) $H = \{A \to C\} \vdash \overline{C} \to \overline{A}$;
4) $H = \left\{A \to B, \overline{B}\right\} \vdash \overline{A}$;
5) $H = \left\{A, \overline{\overline{A}} \to B\right\} \vdash B$;
6) $H = \{A \to B\} \vdash A \& C \to B \& C$;
7) $H = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;
8) $H = \{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;
9) $H = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$;
10) $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$.

2.8. Показать доказуемость формулы, используя обобщенную теорему дедукции:

1) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$;
2) $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;
3) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

2.9. Показать, что справедливы законы математической логики (доказуемы формулы):

1) $x \to (\overline{x} \to y)$; 2) $x \vee \overline{x}$; 3) $\overline{x} \& \overline{y} \to \overline{x \vee y}$.

2.10. Используя правила перестановки посылок, соединения посылок и разъединения посылок, доказать, что:

1) $\vdash x \to (y \to x \& y)$;
2) $\vdash (A \to B) \& \overline{B} \to \overline{A}$;
3) $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$.

2.11. Доказать производные правила вывода:

1) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash \overline{A \& B}}$;
2) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A \vee B}$;
3) $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash A \to B}$;
4) $\dfrac{\vdash B}{\vdash A \to B}$;
5) $\dfrac{\vdash A \& B}{\vdash A}$;
6) $\dfrac{\vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \& B}}$;

7) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$;

8) $\dfrac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \& B}$;

9) $\dfrac{\vdash \overline{A}, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \vee B}}$;

10) $\dfrac{\vdash A, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$;

11) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$;

12) $\dfrac{\vdash \overline{A} \to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$;

14) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash A \to \overline{B}}{\vdash \overline{A}}$.

2.12. Дана формула $A = x_1 \vee x_2 \to x_3$ и наборы значений переменных: 1) (0, 0, 1), 2) (1, 0, 0). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

2.13. Дана формула $A = \overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3$ и наборы значений переменных: 1) (1, 1, 1), 2) (1, 0, 1), 3) (0, 1, 0). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

2.14. Дана формула $A = (x \vee \overline{y}) \to \overline{x} \& \overline{z}$ и наборы значений переменных: 1) (1, 0, 0), 2) (0, 1, 1). Записать вывод формулы A или ее отрицания из соответствующей совокупности формул.

Глава 3

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРЕДИКАТА. ЛОГИЧЕСКИЕ И КВАНТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Определение 1. *Одноместным предикатом* $P(x)$ называется всякая функция одного переменного, в которой аргумент x пробегает значения из некоторого множества M, а функция при этом принимает одно из двух значений: истина или ложь.

Множество M, на котором задан предикат, называется *областью определения* предиката.

Множество $I_P \subset M$, на котором предикат принимает только истинные значения, называется *областью истинности* предиката $P(x)$.

Предикат $P(x)$ называется *тождественно истинным (тождественно ложным)* на множестве M, если $I_P = M (I_P = \varnothing)$.

Определение 2. *n-местным предикатом* называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и принимающая на этом множестве одно из двух значений: истина или ложь.

Как и для одноместных предикатов для n-местных предикатов можно определить область истинности, понятие тождественно истинного и тождественно ложного предиката.

Говорят, что предикат $P(x)$ является *следствием* предиката $Q(x)$ $(Q(x) \Rightarrow P(x))$, если $I_Q \subset I_P$; и предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ *равносильны* $(Q(x) \Leftrightarrow P(x))$, если $I_Q = I_P$.

Пример 1. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $M = \mathbf{R}$ для одноместных предикатов и $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для двухместных предикатов:

1) $x + 5 = 1$;
2) при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
4) существует такое число x, что $x^2 - 2x + 1 = 0$;
5) $x + 2 < 3x - 4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x + 2) - (3x - 4)$;
8) $x^2 + y^2 > 0$.

Решение.

1) Предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{-4\}$;

2) предложение не является предикатом. Это ложное высказывание;

3) предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{1\}$;

4) предложение не является предикатом. Это истинное высказывание;

5) предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = (3; +\infty)$;

6) предложение является одноместным предикатом $P(x)$, $I_P = \{0; 3; 6; 9\}$;

7) предложение не является предикатом;

8) предложение является двухместным предикатом $Q(x, y)$, $I_Q = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{0, 0\}$.

Пример 2. Выяснить, какие из следующих предикатов являются тождественно истинными:

1) $x^2 + y^2 \geqslant 0$;
2) $x^2 + y^2 > 0$;
3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
4) $(x + 1)^2 > x - 1$;
5) $x^2 + 1 \geqslant (x + 1)^2$.

Решение. Очевидно, предикаты 1), 3), 4) являются тождественно истинными. В предикате 2) при $x = 0$, $y = 0$ неравенство нарушается, а в предикате 5) неравенство нарушается при всех положительных значениях x. Следовательно, предикаты 2) и 5) не тождественно истинны.

Так как предикаты могут принимать два значения 1 и 0, то к ним применимы все операции алгебры высказываний.

Например, конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x)\&Q(x)$, который принимает значение 1 при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение 1 и принимает значение 0 во всех остальных случаях. Очевидно, что $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q$.

Аналогично определяются операции дизъюнкция, импликация, эквивалентность двух предикатов и отрицание предиката. Легко видеть, что $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q$, $I_{\overline{P}} = CI_P$, $I_{P\to Q} = CI_P \cup I_Q$.

Ясно, что при выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.

Пример 3. Пусть даны предикаты: $P(x)$: «x — четное число» и $Q(x)$: «x кратно 3», определенные на множестве $\mathbf{N}$. Найти области истинности предикатов: 1) $P(x)\&Q(x)$; 2) $P(x)\vee Q(x)$; 3) $\overline{P}(x)$; 4) $P(x)\to Q(x)$.

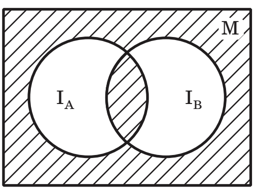
Решение. Так как

$I_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$, то

1) $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}$;
2) $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 2n, 3n, \ldots\}$;
3) $I_{\overline{P}} = CI_P = \mathbf{N}\backslash I_P = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$;
4) $I_{P\to Q} = CI_P \cup I_Q = \{1,3,5,,\ldots,2n-1,\ldots\}\cup\{3,6,9,\ldots,3n,\ldots\}$.

Сказанное позволяет находить области истинности более сложных предикатов, полученных в результате применения к исходным предикатам логических операций.

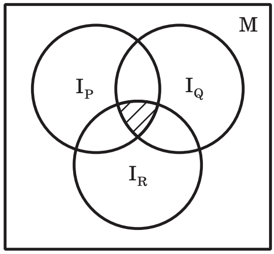
Пример 4. Пусть даны предикаты $A(x, y)$ и $B(x, y)$, определенные на множестве $M = M_1 \times M_2 \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Найти множество истинности предиката $A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$ и изобразить ее с помощью кругов Эйлера-Венна.



Решение. Так как $A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y))\&(B(x,y) \to A(x,y))$, то $I_{A\leftrightarrow B} = (A \to B) \cap (I_{B\to A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B)$. $I_{A\leftrightarrow B}$ изображена заштрихованной частью рисунка.

Можно рассматривать и обратную задачу: зная область истинности предиката, полученного в результате применения логических операций к некоторым предикатам, записать этот предикат.

Пример 5. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, область истинности которого I заштрихована на рисунке.



Решение. Так как здесь $I = I_P \cap I_Q \cap I_R$, то искомый предикат имеет вид $P(x) \& Q(x) \& R(x)$.

Пусть имеется предикат $P(x)$, определенный на множестве M. Если $a \in M$, то подстановка a вместо x в предикат $P(x)$ превращает этот предикат в высказывание $P(a)$. Такое высказывание называется *единичным*. Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматривается еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Определение 3. Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание истинное, когда $P(x)$ тождественно истинный на множестве M предикат и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Для всякого x $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называют *квантором всеобщности*. Переменную x в предикате $P(x)$ называют свободной (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют связанной квантором $\forall$.

Определение 4. Пусть $P(x)$ — предикат, определенный на множестве M. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называют *квантором существования*. В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x связана квантором $\exists$.

Пример 6. Даны предикаты $P(x)$: $x^2+x+1>0$ и $Q(x)$: $x^2-4x+3=0$, определенные на множестве $\mathbf{R}$. Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:

1) $\forall x P(x)$; 2) $\exists x P(x)$; 3) $\forall x Q(x)$; 4) $\exists x Q(x)$.

Решение. Так как $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ при всех x, то будут истинны высказывания $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$. Так как уравнение $x^2-4x+3=0$ имеет только два действительных корня $x_1=3$ и $x_2=1$, то предикат $Q(x)$ принимает значение 1 только при $x=3$ и $x=1$ и 0 в остальных случаях. Но тогда высказывание $\forall x Q(x)$ ложно, а высказывание $\exists x Q(x)$ истинно.

Нетрудно видеть, что когда предикат $P(x)$ определен на конечном множестве $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, то

$$\forall x P(x)=P(a_1)\,\&P(a_2)\,\&\ldots\&P(a_n)\,,$$

а

$$\exists x P(x)=P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)\,,$$

то есть кванторные операции обобщают операции конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Так, применение к двухместному предикату $Q(x,y)$ квантора всеобщности по переменной x дает одноместный предикат $\forall x Q(x,y)$, зависящий от y. К этому предикату можно применить кванторную операцию по переменной y. В результате получим или высказывание $\forall y\forall x Q(x,y)$, или высказывание $\exists y\forall x Q(x,y)$.

Таким образом, может быть получено одно из восьми высказываний: $\forall y\forall x Q(x,y)$, $\exists y\forall x Q(x,y)$, $\forall y\exists x Q(x,y)$, $\exists y\exists x Q(x,y)$, $\forall x\forall y Q(x,y)$, $\forall x\exists y Q(x,y)$, $\exists x\forall y Q(x,y)$, $\exists x\exists y Q(x,y)$.

Легко показать, что перестановка любых кванторов местами, вообще говоря, изменяет логическое значение высказывания.

Пример 7. Пусть предикат $Q(x,y)$: «$x\,\vdots\,y$» определен на множестве $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$. Показать, что высказывания $\forall y\exists x Q(x,y)$ и $\exists x\forall y Q(x,y)$ имеют различные логические значения.

Решение. Так как высказывание $\forall y \exists x Q(x, y)$ означает, что для всякого натурального числа y существует натуральное число x такое, что y является делителем x, то это высказывание истинно.

Высказывание $\exists x \forall y Q(x, y)$ означает, что есть натуральное число x, которое делится на любое натуральное число y. Это высказывание, очевидно, ложно.

3.1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из предикатов укажите одну из возможных областей определения и в соответствии с ней область истинности:

1) Луна есть спутник Венеры;
2) планеты x и y принадлежат Солнечной системе;
3) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{10} > 150$;
4) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
5) $x^4 - 3x + 8$;
6) любое простое число p не имеет делителей, отличных от себя и 1;
7) натуральное число n не меньше 1;
8) треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;
9) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
10) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11) $\ln x < \sin x$.

3.2. Даны предикаты $P(x)$: «$x^2 - 4 = 0$» и $Q(x)$: «$3x - 2 < 17$». Найдите области истинности этих предикатов, если их область определения есть: 1) $\mathbf{R}$; 2) $\mathbf{N}$.

3.3. На множестве $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы два предиката $P(x)$: «x — простое число», $Q(x)$: «x — нечетное число». Составьте их таблицы истинности. Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве $L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

3.4. Будут ли следующие предикаты равносильны, или один из них является следствием другого? (Предметные переменные в предикатах принадлежат $\mathbf{R}$.)

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$ и $\sqrt{xy} = 15$;
2) $\lg ab = 1$ и $\lg a + \lg b = 1$;
3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
4) $2^{\log_2 x} = y$ и $y = x$;

5) $x^2 \leqslant 0$ и $2^{|x|} = \cos x$;
6) $x + y = z$ и $(x + y)(x - z) = -zy$;
7) $x^3 + y^3 = 0$ и $x^2 - y^2 = 0$.

3.5. Найти области истинности предикатов:

1) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$;

2) $\sqrt{x^2 - 1} = -3$;

3) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geqslant 0 \\ 2x^2 + x - 30 < 0 \end{cases}$;

4) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3} < 0$.

3.6. Изобразите на декартовой плоскости области истинности предикатов:

1) $x + y = 1$;
2) $x + 3y = 3$;
3) $x - y^2 \geqslant 0$;
4) $\sin x = \sin y$;
5) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$;
6) $\lg x = \lg y$.

3.7. На множестве $M = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 20\}$ заданы предикаты:

$A(x)$: «x не делится на 5»;
$B(x)$: «x — четное число»;
$C(x)$: «x — простое число»;
$D(x)$: «x кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

1) $A(x) \& B(x)$;
2) $C(x) \& B(x)$;
3) $C(x) \& D(x)$;
4) $B(x) \& D(x)$;
5) $\overline{B}(x) \& D(x)$;
6) $A(x) \& \overline{D}(x)$;
7) $\overline{B}(x) \& \overline{D}(x)$;
8) $A(x) \& B(x) \& D(x)$;
9) $A(x) \vee B(x)$;
10) $B(x) \vee C(x)$;
11) $C(x) \vee D(x)$;
12) $B(x) \vee D(x)$;
13) $\overline{B}(x) \vee D(x)$;
14) $B(x) \vee \overline{D}(x)$;
15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;
16) $C(x) \to A(x)$;
17) $D(x) \to \overline{C}(x)$;
18) $A(x) \to B(x)$;
19) $(A(x) \& C(x)) \to \overline{D}(x)$;
20) $(A(x) \& D(x)) \to \overline{C}(x)$.

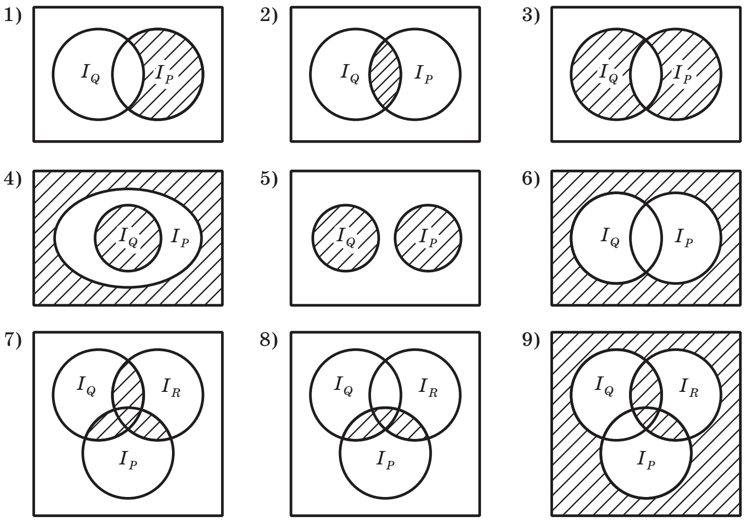
3.8. Изобразите на диаграммах Эйлера-Венна области истинности для следующих предикатов:

1) $\overline{P}(x) \& \overline{Q}(x)$;
2) $\overline{P}(x) \leftrightarrow \overline{Q}(x)$;
3) $(P(x) \to Q(x)) \vee R(x) \& \overline{Q}(x)$;
4) $P(x) \to \big(Q(x) \vee \overline{Q}(x)\big)$;
5) $P(x) \& Q(x) \to \overline{R}(x)$.

3.9. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

1) $\overline{(x > 2)}\,\&\,(x < y)$;
2) $(x \leqslant y) \vee (|x| \leqslant 1)$;
3) $(x \geqslant 3) \rightarrow (y < 5)$;
4) $((x > 2)\,\&\,(y \geqslant 1))\,\&\,((x < -1) \vee (y < -2))$;
5) $((x > 2) \vee (y > 1))\,\&\,((x < -1) \vee (y < -2))$.

3.10. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, области истинности которых (I) заштрихованы на следующих рисунках:



3.11. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с $\mathbf{R}$:

1) $\exists x\,(x + 5 = x + 3)$;
2) $\exists x\left(x^2 + x + \frac{1}{2} = 0\right)$;
3) $\forall x\left(x^2 + x + 1 > 0\right)$;
4) $\forall x\left(x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\right)$;
5) $\exists x\left(\left(x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\right)\,\&\,\left(x^2 - 2x + 1 > 0\right)\right)$;
6) $\exists x\left(\left(x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\right)\,\&\,\left(x^2 - 6x + 8 \leqslant 0\right)\right)$;
7) $\forall x\left(\left(x^2 - 6x + 8 \geqslant 0\right) \vee \left(x^2 - 6x + 8 < 0\right)\right)$;

8) $\exists x\Big((x \in \{2,5\}) \to \big(x^2 - 6x + 8 = 0\big)\Big)$;
9) $\forall x\Big((x \in \{3,5\}) \to \big(x^2 - 6x + 8 < 0\big)\Big)$.

3.12. Приведите примеры таких значений a, для которых данное высказывание: а) истинно; б) ложно. ($M = \mathbf{R}$).
1) $\exists x < 0\,\big(x^2 + ax + a = 0\big)$;
2) $\forall x \in [0,1]\,\big(x^2 + x + a < 0\big)$;
3) $\forall x > 7\,\big(x^2 + ax + 1 > 0\big)$;
4) $\exists x \in [a, a+1]\,\big(x^2 - x - 2 < 0\big)$.

§ 2. ПОНЯТИЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

В логике предикатов используется следующая символика:

1. Символы p, q, r, … — переменные высказывания, принимающие два значения: 1 — истина, 0 — ложь.
2. Предметные переменные — x, y, z, …, которые пробегают значения из некоторого множества M; x^0, y^0, z^0, … — предметные константы, то есть значения предметных переменных.
3. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ — одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — n-местные предикатные переменные. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — символы постоянных предикатов.
4. Символы логических операций: $\&$, $\vee$, $\to$, $-$.
5. Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.
6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение 1. (формулы логики предикатов).

1. Каждое высказывание, как переменное, так и постоянное, является формулой.
2. Если $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ — n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2, …, x_n — предметные переменные или предметные постоянные, не обязательно все различные, то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула. В этой формуле предметные переменные являются свободными. Формулы вида 1 и 2 называются элементарными.
3. Если A и B — формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой свободной, то $A \vee B$, $A\&B$, $A \to B$ есть формулы.

В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

4. Если A — формула, то $\overline{A}$ — формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{A}$ не меняется.

5. Если A — формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ являются формулами, причем предметная переменная в них входит связанно.

6. Никакая другая строка символов формулой не является.

Пример 1. Какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов? В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные.

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))}$;
2) $(p \to q) \,\&\, (\overline{r} \vee \overline{p})$;
3) $P(x) \,\& \forall x Q(x)$;
4) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \forall x R(x,y))$;
5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall y R(y))$;
6) $\exists x \forall z (P(x,y) \to P(y,z))$.

Решение. Выражения 1), 2), 4), 6) являются формулами, так как записаны в соответствии с определением формулы логики предикатов. Выражения 3) и 5) не являются формулами. В выражении 3) операция конъюнкции применена к формулам $P(x)$ и $\forall x Q(x)$; в первой из них переменная x свободна, а во второй связана квантором общности, что противоречит определению формулы. В выражении 5) квантор существования по переменной y навешен на формулу $\forall y R(y)$, в которой переменная y связана квантором общности, что также противоречит определению формулы.

В формуле 1) переменная y свободна, а переменные x и z связаны. В формуле 2) нет предметных переменных. В формуле 4) переменная x связана, а переменная y свободна.

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значения трех видов переменных, входящих в формулу:

а) переменных высказываний;

б) свободных предметных переменных из множества M;

в) предикатных переменных.

При конкретных значениях этих переменных формула принимает конкретное логическое значение.

Пример 2. Дана формула $\forall x\,(P\,(x)\,\&Q\,(x) \to R\,(x))$, где предикаты $P\,(x)$, $Q\,(x)$ и $R\,(x)$ определены на множестве $\mathbf{N}$. Найти ее значение, если

1) $P\,(x)$: «число x делится на 3», $Q\,(x)$: «число x делится на 4», $R\,(x)$: «число x делится на 2»;

2) $P\,(x)$: «число x делится на 3», $Q\,(x)$: «число x делится на 4», $R\,(x)$: «число x делится на 5»;

Решение. В обоих случаях конъюнкция $P\,(x)\,\&Q\,(x)$ есть утверждение, что число x делится на 12. Но тогда при всех x, если число x делится на 12, то оно делится и на 2, и, значит, в случае 1) формула истинна.

Так как из делимости числа x на 12 не при всех x следует делимость числа x на 5, то в случае 2) формула ложна.

Пример 3. Вычислить значение формулы $\forall x \exists y P\,(x,y) \to$ $\to\ \exists x \forall y P\,(x,y)$, если предикат $P\,(x,y)$ имеет значение $P^0\,(x,y)$ — «число x меньше числа y» и определен на множестве $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Решение. Так как при указанном значении предиката $P\,(x,y)$ высказывание $\forall x \exists y P\,(x,y)$ означает утверждение, что для любого натурального числа x найдется натуральное число y, большее числа x, то это высказывание истинно. В то же время высказывание $\exists x \forall y P\,(x,y)$ означает утверждение, что существует натуральное число x, которое меньше любого натурального числа y, которое ложно. При этом исходная формула, очевидно, ложна.

Определение 2. Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными на области* M, если они принимают одинаковые значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Здесь, как и в алгебре высказываний, для равносильных формул принято обозначение $A \equiv B$.

Ясно, что все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы логики предикатов. Но, кроме того, имеют место равносильности самой логики предикатов. Сюда, в первую очередь, следует отнести равносильности:

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}, \qquad \overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}.$$

Они широко используются в логике предикатов при равносильных преобразованиях, если приходится иметь дело с выражениями, содержащими операцию отрицания.

Пример 4. Найти отрицание следующих формул:

1) $\forall x\,(P(x)\,\&Q(x))$;
2) $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$;
3) $\forall x \exists y\,(R(x,y) \to L(x,y))$.

Решение.

1) $\overline{\forall x(P(x)\&Q(x))} \equiv \exists x\left(\overline{P(x)\&Q(x)}\right) \equiv \exists x\left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right)$;
2) $\overline{\exists x(P(x) \vee Q(x))} \equiv \forall x\left(\overline{P(x) \vee Q(x)}\right) \equiv \forall x\left(\overline{P(x)}\&\overline{Q(x)}\right)$;
3) $\overline{\forall x \exists y(R(x,y) \to L(x,y))} \equiv \exists x \overline{\exists y(R(x,y) \to L(x,y))} \equiv$
$\equiv \exists x \forall y \overline{(R(x,y) \to L(x,y))} \equiv \exists x \forall y \overline{\left(\overline{R(x,y)}\&L(x,y)\right)} \equiv$
$\equiv \exists x \forall y\left(R(x,y)\,\&\overline{L(x,y)}\right)$.

Доказательство равносильностей логики предикатов требует или детального рассмотрения значений формул, или использования известных равносильностей.

Пример 5. Доказать равносильность $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \equiv$ $\equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

Решение. Для доказательства равносильности достаточно рассмотреть два случая:

1. Пусть предикаты $A(x)$ и $B(x)$ тождественно ложны. Тогда будет тождественно ложным и предикат $A(x) \vee B(x)$. При этом будут ложными высказывания $\exists x\,(A(x) \vee B(x))$ и $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

2. Пусть теперь хотя бы один из предикатов (например, $A(x)$) не тождественно ложный. Тогда будет не тождественно ложным и предикат $A(x) \vee B(x)$. При этом будут истинными высказывания $\exists x A(x)$ и $\exists x\,(A(x) \vee B(x))$, а, значит, будут истинными и исходные формулы.

Следовательно, $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\,(A(x) \vee B(x))$.

Пример 6. Доказать равносильность $c\&\forall x A(x) \equiv \equiv \forall x (c\&A(x))$.

Решение. I способ. Рассмотрим два случая:

1. Пусть высказывание c ложно. Тогда для любого предиката $A(x)$ будет ложным высказывание $c\&\forall x A(x)$ и предикат $c\&A(x) \equiv 0$, и, следовательно, высказывание $\forall x (c\&A(x)) = = 0$. Значит, в этом случае обе исходные формулы ложны.

2. Пусть теперь высказывание c истинно. Тогда, очевидно, значения исходных формул будут целиком зависеть от значений предиката $A(x)$. Если $A(x)$ — тождественно истинный предикат, то будет тождественно истинным и предикат $c\&A(x)$, и, следовательно, будут истинными высказывания $\forall x A(x)$, $c\&\forall x A(x)$, $\forall x (c\&\forall x A(x))$, то есть исходные формулы истинны. Если же предикат $A(x)$ не тождественно истинный, тогда будет не тождественно истинным предикат $c\&A(x)$, а высказывания $\forall x A(x)$, $c\&\forall x A(x)$, $\forall x (c\&\forall x A(x))$ будут ложными, то есть ложные значения принимают обе исходные формулы, что в итоге доказывает их равносильность.

II способ. Рассмотрим два случая:

1. $c=0$. Тогда левая и правая часть принимает значение 0.

2. $c=1$. Тогда левая и правая часть равносильны одной и той же формуле $\forall x\ A(x)$ (в силу того, что $1\&a \equiv a$).

Равносильность доказана.

3.13. Укажите, какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов. В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные:

1) $\exists x \exists y P(x, y)$;
2) $\exists x, y P(x, y)$;
3) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$;
4) $\forall x \exists y P(x, y)$;
5) $p \to \forall x P(x, y)$;
6) $\exists x P(x, y)\, \& Q(y, z)$.

3.14. Даны утверждения $A(n)$: «число n делится на 3», $B(n)$: «число n делится на 2», $C(n)$: «число n делится на 4», $D(n)$: «число n делится на 6», $E(n)$: «число n делится на 12». Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

1) $\forall n (A(n)\, \& B(n) \to E(n))$;
2) $\forall n (B(n)\, \& D(n) \to E(n))$;
3) $\exists n (C(n)\, \& D(n) \to E(n))$;
4) $\forall n (E(n) \to C(n)\, \& D(n))$;

5) $\forall n\left(\overline{E(n)} \to B(n) \to D(n)\right)$;

6) $\exists n\left(B(n)\,\&C(n) \to \overline{D(n)}\right)$;

7) $\forall n\left(\overline{A(n)} \to \overline{E(n)}\right)$.

3.15. Пусть предикат $P(x, y)$ определен на множестве $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ и означает «$x < y$».

1) Какие из следующих предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные: а) $\exists xP(x, y)$; б) $\forall xP(x, y)$; в) $\exists yP(x, y)$; г) $\forall xP(x, y)$?

2) Для тех предикатов из 1), которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными, указать область истинности и область ложности.

3) Какие из следующих предложений истинны и какие ложны:

а) $\exists x\forall yP(x, y)$;
б) $\forall x\exists yP(x, y)$;
в) $\forall y\exists xP(x, y)$;
г) $\forall x\forall yP(x, y)$;
д) $\forall y\forall xP(x, y)$;
е) $\exists y\forall xP(x, y)$;
ж) $\exists x\exists yP(x, y)$;
з) $\exists y\exists xP(x, y)$?

3.16. Показать, что кванторы общности и существования не перестановочны, то есть высказывания $\forall x\exists yF(x, y)$ и $\exists y\forall xP(x, y)$ могут, вообще говоря, иметь различные значения.

3.17. Среди следующих пар предикатов выберите те, в которых предикаты являются отрицаниями друг друга:

1) «$a < b$» и «$b < a$»;

2) «Треугольник ABC прямоугольный» и «Треугольник ABC тупоугольный»;

3) «Целое число k четно» и «Целое число k нечетно»;

4) «Функция f нечетна» и «Функция f четна»;

5) «Натуральное число n — простое» и «Натуральное число n — составное».

3.18. Доказать следующие равносильности:

1) $\forall xA(x) \equiv \overline{\exists x\overline{A(x)}}$;

2) $\exists xA(x) \equiv \overline{\forall x\overline{A(x)}}$;

3) $c\&\forall xA(x) \equiv \forall x(c\&A(x))$;

4) $c \vee \forall xA(x) \equiv \forall x(c \vee A(x))$;

5) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$;

6) $\exists x\,(c \vee A(x)) \equiv c \vee \exists x A(x)$;
7) $\exists x\,(c \& A(x)) \equiv c \& \exists x A(x)$;
8) $\exists x A(x) \& \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y\,(A(x) \& B(x))$;
9) $\forall x\,(A(x) \to c) \equiv \exists x A(x) \to c$;
10) $\exists x\,(c \to A(x)) \equiv c \to \exists x A(x)$;
11) $\exists x\,(A(x) \to c) \equiv \forall x A(x) \to c$.

3.19. Найти отрицания следующих формул:
1) $\exists x\,(A(x) \& B(x) \& C(x))$;
2) $\forall x\,(A(x) \to \forall y B(y))$;
3) $\forall x\,(A(x) \vee \exists y B(y))$;
4) $\forall x\,(A(x) \to B(x)) \& \exists x \left(S(x) \& \overline{R(x)}\right)$;
5) $\exists x\,(R(x) \leftrightarrow Q(x))$;
6) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$.

3.20. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — любые предикаты. Какие из следующих формул равносильны формуле $A(x) \to B(x)$ (*)?
1) $A(x) \vee B(x)$;
2) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$;
3) $\overline{A(x)} \to B(x)$;
4) $\overline{B(x)} \to A(x)$;
5) $\overline{\overline{A(x)} \& B(x)}$;
6) $\overline{A(x) \& \overline{B(x)}}$;
7) $B(x) \to \overline{A(x)}$.

3.21. Доказать, что для любой формулы логики предикатов можно построить ей равносильную формулу, не содержащую:
1) кванторов существования;
2) кванторов общности.

3.22. Доказать, что формулы $\exists x\,(P(x) \& Q(x))$ и $\exists x P(x) \& \exists x Q(x)$ не равносильны.

3.23. Доказать, что формулы $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ и $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ не равносильны.

3.24. Доказать, что:
1) $\exists x \forall y\,(F(x) \& G(y)) \equiv \forall y \exists x\,(F(x) \& G(y))$;
2) то же с заменой $\&$ на $\vee$;
3) можно ли в 1) и 2) заменить $F(x)$ и $G(y)$ двухместными предикатами, зависящими от x и y?

3.25. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — два одноместных предиката, определенных на множестве M таких, что высказывание $\exists x \left(A(x) \to \left(\overline{A(x)} \vee \overline{\left(\overline{B(x)} \to A(x)\right)}\right)\right)$ истинно. Доказать, что высказывание $\forall x A(x)$ ложно.

3.26. Даны два предиката $Q(x, y)$ и $R(x, y)$, определенные на множестве $M \times M$, где $M = \{a, b, c\}$. Для следующих предложений записать их выражения без использования кванторных операций:

1) $\exists x Q(x, y) \& \forall z R(y, z)$;
2) $\forall x \exists y (Q(x, y) \vee R(y, z))$;
3) $\forall x \exists y Q(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$;
4) $\forall x \forall y Q(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x R(x, y)$.

3.27. Каким условиям будут удовлетворять области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M, если истинны высказывания:

1) $\forall x (A(x) \to B(x)) \& \exists x \left(\overline{A(x)} \& B(x)\right)$;
2) $\overline{\exists x (A(x) \& B(x))} \& (\forall x (A(x) \to B(x)))$;
3) $\exists x (A(x) \& B(x)) \to (\forall x (A(x) \to B(x)))$?

§ 3. ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ И ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ. ПРЕДВАРЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (П.Н.Ф.)

Определение 1. Формула логики предикатов называется *выполнимой в области M*, если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к области M, при которых формула принимает истинные значения.

Определение 2. Формула A называется *выполнимой*, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Определение 3. Формула логики предикатов называется *тождественно истинной в области M*, если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Определение 4. Формула A называется *общезначимой*, если она тождественно истинная во всякой области.

Определение 5. Формула A называется *тождественно ложной в области M*, если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесенных к этой области.

Из приведенных определений следует:

1. Если формула общезначима, то она и выполнима на всякой области.

2. Если формула тождественно истинна в области, то она выполнима в этой области.

3. Если формула невыполнима, то она тождественно ложна в любой области.

Пример 1. Доказать, что формула $A \equiv \exists x \forall y P(x, y)$ выполнима.

Решение. Для доказательства выполнимости формулы A достаточно найти область определения двухместного предиката $P(x, y)$ и такое его значение, что в этой области формула принимает истинные значения. Такой областью определения предиката, в частности, будет множество $M = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Действительно, если $P(x, y)$ — предикат «$y \vdots x$», то формула A тождественно истинна в области M, и, следовательно, выполнима в этой области. Однако, если в качестве предиката $P(x, y)$ взять предикат «$y < x$», то формула A будет тождественно ложной в области M и, следовательно, невыполнимой в области M. При этом ясно, что формула A не общезначима.

Пример 2. Доказать, что формула $A \equiv \forall x \left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)}$ является общезначимой.

Решение. Считая, что формула A определена на любой области M, проведем равносильные преобразования:

$$
\begin{gathered}
A \equiv \forall x \left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)} \equiv \\
\equiv \overline{\forall x \left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right)} \vee \overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)} \equiv \\
\equiv \exists x \left(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv \\
\equiv \exists x (P(x) \& Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv \\
\equiv \exists x (P(x) \& Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \\
\equiv \exists x \left(P(x) \& Q(x) \vee \overline{Q(x)}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \\
\equiv \exists x \left(P(x) \vee \overline{Q(x)}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \\
\equiv \left(\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}\right) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,
\end{gathered}
$$

т. е. формула A тождественно истинна для любых одноместных предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ и в любой области.

Пример 3. Доказать, что формула $A \equiv \exists x \left(\left(F(x) \to \overline{F(x)} \right) \& \right.$ $\left. \& \left(\overline{F(x)} \to F(x) \right) \right)$ тождественно ложна.

Решение. Так как формула $\left(F(x) \to \overline{F(x)} \right) \& \left(\overline{F(x)} \to \right.$ $\left. \to F(x) \right) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, а формула $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, очевидно, тождественно ложна, то тождественна ложна и формула A.

Говорят, что формула логики предикатов имеет *нормальную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют так называемые *предваренные нормальные формы*. В них кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо используются после всех операций алгебры логики.

Справедливо утверждение о том, что всякая формула логики предикатов путем равносильных преобразований может быть приведена к предваренной нормальной форме (п.н.ф.). При этом следует использовать равносильности логики предикатов, которые позволяют выносить за скобки кванторы существования и всеобщности, т. е. равносильности:

$$\forall x P(x) \& \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \& Q(x));$$
$$p \& \forall x P(x) \equiv \forall x (p \& P(x));$$
$$p \vee \forall x P(x) \equiv \forall x (p \vee P(x));$$
$$p \to \forall x P(x) \equiv \forall x (p \to P(x));$$
$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x));$$
$$c \vee \exists x P(x) \equiv \exists x (c \vee P(x));$$
$$c \& \exists x P(x) \equiv \exists x (c \& P(x));$$
$$c \to \exists x P(x) \equiv \exists x (c \to P(x));$$
$$\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \equiv \exists x \exists y (P(x) \& Q(y));$$
$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)).$$

Пример 4.

Привести к п.н.ф. формулу $A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \& \overline{\exists x \forall y Q(x,y)}$.

Решение. Проводя равносильные преобразования, получим:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x,y) \& \forall x \exists y \overline{Q(x,y)} \equiv$$
$$\equiv \forall x \left(\exists y P(x,y) \& \exists z \overline{Q(x,z)}\right) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y \left(P(x,y) \& \exists z \overline{Q(x,z)}\right) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y \exists z \left(P(x,y) \& \overline{Q(x,z)}\right).$$

3.28. Выполнимы ли следующие формулы:

1) $A \equiv \exists x P(x)$; 2) $A \equiv \forall x P(x)$.

3.29. Можно ли привести пример формулы $A(x)$ такой, что выполнима формула:

1) $B \equiv \overline{\forall x A(x) \to A(t)}$; 2) $B \equiv \overline{A(t) \to \forall x A(x)}$.

3.30. Доказать, что формула $\exists x (P(x) \& (r \to Q(x))) \to \to \left(\forall x \left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \overline{r}\right)$ является общезначимой.

3.31. Какие из нижеприведенных формул являются общезначимыми:

1) $\exists x (P_1(x) \& P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x))$;
2) $\exists x (P_1(x) \& P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x))$;
3) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x (P_1(x) \vee P_2(x))$;
4) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \leftrightarrow \forall x (P_1(x) \vee P_2(x))$;
5) $\forall x (q \to P_1(x)) \leftrightarrow (q \to \forall x P_1(x))$;
6) $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\forall x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
7) $\exists x (P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \to \exists x P_2(x))$;
8) $\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
9) $\forall x (\Phi_1(x) \to \Phi_2(x)) \to (\forall x \Phi_1(x) \to \forall x \Phi_2(x))$;
10) $\forall x (\Phi_1(x) \to \Phi_2(x)) \to (\exists x \Phi_1(x) \to \exists x \Phi_2(x))$;
11) $\exists x (\Phi_1(x) \to \Phi_2(x)) \leftrightarrow (\forall x \Phi_1(x) \to \exists x \Phi_2(x))$;
12) $\exists x R(x) \to \forall x R(x)$;
13) $\forall x R(x) \to \exists x R(x)$;
14) $\forall x R(x) \& \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (R(x) \& Q(x))$;
15) $\forall x R(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (R(x) \vee Q(x))$;
16) $\exists x R(x) \& \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (R(x) \& Q(x))$;
17) $\exists x R(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (R(x) \vee Q(x))$;

3.32. Доказать тождественную ложность формулы $\exists x \exists y \left((F(x) \to F(y)) \& \left(F(x) \to \overline{F(x)}\right) \& F(x)\right)$.

3.33. Привести к п.н.ф. следующие формулы логики предикатов:

1) $B \equiv \overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)}$;
2) $B \equiv \overline{\forall x R(x)} \vee \exists x Q(x, y)$;
3) $B \equiv \overline{p \to \exists x R(x)}$;
4) $B \equiv \overline{\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow A(y))}$;
5) $B \equiv \overline{\forall x (A(x) \to \exists y B(y))}$;
6) $B \equiv \exists x \forall y P(x, y) \& \exists x \forall y Q(x, y)$;
7) $B \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y)$;
8) $B \equiv \exists x \forall y P(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ В МАТЕМАТИКЕ

I. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, определений.

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Пример 1. Записать на языке логики предикатов определение предела числовой последовательности.

Решение. Число a является пределом числовой последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех натуральных чисел, больших или равных n_0, справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Используя язык логики предикатов, можно записать это определение в компактной форме:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} \left(n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right).$$

Как известно, многие теоремы допускают формулировку в виде условных предложений: «Если любой элемент x из множества M обладает свойством $P(x)$, то он обладает свойством $Q(x)$», т. е. $\forall x (P(x) \to Q(x))$.

Например, если $\{x\}$ — множество всех треугольников на плоскости, $P(x)$ — свойство x быть прямоугольным, $Q(x)$ —

свойство x иметь гипотенузу, квадрат длины которой равен сумме квадратов длин катетов, то формула $\forall x\,(P\,(x) \to Q\,(x))$ дает запись формулировки теоремы Пифагора.

Пример 2. Записать на языке логики предикатов формулировку теоремы о необходимом признаке сходимости числового ряда.

Решение. Пусть $M = \{x\}$ — множество всех числовых рядов, $P\,(x)$ — свойство x быть сходящимся рядом, $Q\,(x)$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, где a_n — общий член ряда x. Тогда формула $\forall x\,(P\,(x) \to Q\,(x))$ представляет собой формулировку указанной теоремы.

II. Построение противоположных утверждений.

Пусть дано некоторое математическое утверждение A. Противоположным утверждением для A будет утверждение $\overline{A}$. Логика предикатов позволяет путем равносильных преобразований формулы $\overline{A}$ придать ей хорошо обозримый вид.

Пример 3. Определение предела числовой последовательности дано в примере 1. Ему противоположным утверждением будет:

$$a \neq \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \overline{\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}\,(n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)} \equiv$$
$$\equiv \exists\varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbf{N} \exists n \in \mathbf{N}\,((n \geqslant n_0)\,\&\,(|a_n - a| \geqslant \varepsilon))\,.$$

Очевидно, если теорема $\forall x \in M\,(P\,(x) \to Q\,(x))$ несправедлива, то будет истинным утверждение $\overline{\forall x \in M\,(P\,(x) \to Q\,(x))} \equiv \exists x \in M\left(P\,(x)\,\&\overline{Q\,(x)}\right)$. Следовательно, чтобы доказать, что теорема $\forall x\,(P\,(x) \to Q\,(x))$ несправедлива, нужно указать хотя бы один элемент из M, при котором условие теоремы $P\,(x)$ истинно, а значение $Q\,(x)$ ложно, т. е. привести контрпример.

Пример 4. Докажите, что неверна теорема: «Если функция $f\,(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, то она и интегрируема на этом сегменте».

Решение. Пусть M — множество всех функций, определенных на сегменте $[a, b]$, $P\,(x)$ — свойство f быть ограниченной на $[a, b]$, $Q\,(x)$ — свойство f быть интегрируемой на $[a, b]$. Чтобы доказать несправедливость теоремы $\forall f \in M(P\,(f) \to$

$\to Q(f)$, нужно доказать справедливость утверждения $\exists f \in \in M\left(P(f)\,\&\overline{Q(f)}\right)$. Нужным контрпримером здесь может быть функция Дирихле, рассматриваемая на $[a,b]$. Она, как известно, ограничена на любом сегменте, но неинтегрируема на этом сегменте.

III. Прямая, обратная и противоположная теоремы.

Рассмотрим четыре теоремы:

$$\forall x \in E\,(P(x) \to Q(x))\,; \tag{1}$$

$$\forall x \in E\,(Q(x) \to P(x))\,; \tag{2}$$

$$\forall x \in E\left(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}\right); \tag{3}$$

$$\forall x \in E\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right). \tag{4}$$

Определение 1. Пара теорем, у которых условие одной теоремы является заключением второй, а условие второй теоремы является заключением первой, называются *взаимно обратными* друг другу.

Так, теоремы (1) и (2), а также (3) и (4) — взаимно обратные теоремы. При этом, если одну из них называют прямой теоремой, то вторую называют обратной.

Определение 2. Пара теорем, у которых условие и заключение являются отрицанием соответствующего условия и заключения другой, называются *взаимно противоположными*.

Так, теоремы (1) и (3), а также (2) и (4) являются взаимно противоположными.

Пример 5. Для теоремы:«Если четырехугольник является прямоугольником, то в четырехугольнике диагонали равны» сформулируйте теоремы (2)–(4).

Решение. Пусть $E = \{x\}$ — множество всех четырехугольников на плоскости, $P(x)$ — свойство x быть прямоугольником, $Q(x)$ — свойство x иметь равные диагонали. В сформулированной теореме $P(x)$ является условием, а $Q(x)$ — заключением. Поэтому теорема (2), обратная данной, формулируется так: «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником»; теорема (3), противоположная прямой, формулируется так: «Если четырехугольник не является прямоугольником, то в четырехугольнике диагонали не равны». И, наконец, теорема (4), противоположная обратной, формулируется так: «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником».

Нетрудно видеть, что первая и последняя теоремы истинны, а вторая и третья ложны (приведите контрпример!). Ясно, что прямая и обратная теоремы, вообще говоря, не равносильны (одна их них может быть истинной, а вторая — ложной). Однако легко показать, что теоремы (1) и (4), а также теоремы (2) и (3) всегда равносильны.

IV. Необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим теорему

$$\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))\,. \tag{1}$$

Множество истинности предиката $P\,(x) \to Q\,(x)$ есть множество $CI_P \cup I_Q$. Но тогда множество ложности этого предиката будет $C\,(CI_P \cup I_Q) = I_P \cap CI_Q$. Последнее множество будет пустым лишь в том случае, когда $I_P \subset I_Q$. Отсюда следует, что предикат $P\,(x) \to Q\,(x)$ является истинным для всех $x \in E$ тогда и только тогда, когда множество истинности предиката $P\,(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q\,(x)$, т. е. предикат $Q\,(x)$ является следствием предиката $P\,(x)$. При этом предикат $Q\,(x)$ называют необходимым условием для предиката $P\,(x)$, а предикат $P\,(x)$ — достаточным условием для $Q\,(x)$.

Пример 6. Рассмотрим утверждение:«Если число x делится на 6, то число x делится на 3». Здесь предикат $P\,(x)$: «Число x делится на 6», а предикат $Q\,(x)$: «Число x делится на 3». Предикат $Q\,(x)$ логически следует из предиката $P\,(x)$ $(P\,(x) \Rightarrow Q\,(x))$. Предикат $P\,(x)$ (делимость числа x на 6) является достаточным условием предиката $Q\,(x)$ (делимость числа x на 3). Предикат $Q\,(x)$ (делимость числа x на 3) является необходимым условием для предиката $P\,(x)$ (делимость числа x на 6).

Часто встречается ситуация, при которой истинны взаимно обратные теоремы:

$$\forall x \in E\,(P\,(x) \to Q\,(x))\,; \tag{1}$$

$$\forall x \in E\,(Q\,(x) \to P\,(x))\,. \tag{2}$$

Это, очевидно, возможно при условии, что $I_P = I_Q$, т. е. когда предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны ($P(x) \Leftrightarrow Q(x)$). В таком случае из теоремы (1) следует, что условие $P(x)$ является достаточным для $Q(x)$, а из теоремы (2) следует, что условие $P(x)$ является необходимым для $Q(x)$. Таким образом, в этом случае условие $P(x)$ является и необходимым, и достаточным условием для $Q(x)$. Аналогично, условие $Q(x)$ является необходимым и достаточным для $P(x)$.

Пример 7. Рассмотрим теоремы: «В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой» и «Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность». Эти теоремы взаимно обратны. Обе они истинны. Следовательно, каждое из условий «В четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны» и «В четырехугольник можно вписать окружность» является и необходимым, и достаточным.

3.34. Запишите на языке логики предикатов определения:

1) линейно упорядоченного множества (упорядоченное множество называется линейным, если для любых элементов этого множества x и y либо $x = y$, либо $x < y$, либо $x > y$);

2) ограниченной функции (функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве M, если существует такое неотрицательное число L, что для всех $x \in M$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant L$);

3) четной функции (функция f называется четной, если область ее определения симметрична относительно начала координат, и для каждого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$);

4) периодической функции (функция f называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения f элементы $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области, и при этом выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$);

5) возрастающей функции на множестве M (функция f называется возрастающей на множестве M, если для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f_1(x) < f_2(x)$).

3.35. Пользуясь полученными в задаче 3.34 формулами, ответьте на следующие вопросы. Что значит:

1) Упорядоченное множество не является линейным?
2) Функция не является ограниченной?
3) Функция не является четной?
4) Функция не является периодической?
5) Функция не является возрастающей на множестве M?

3.36. Доказать несправедливость следующих утверждений:

1. «Если функция непрерывна в точке x_0, то она и дифференцируема в этой точке».

2. «Если предел n-го члена числового ряда равен нулю, что ряд сходится».

3. «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником».

4. «Если функция интегрируема на $[a, b]$, то она непрерывна на нем».

5. «Если функция интегрируема на $[a, b]$, то она монотонна на нем».

6. «Если числовая последовательность имеет предел, то она монотонна».

7. «Если числовая последовательность ограничена, то она имеет предел».

8. «Если формула логики предикатов выполнима, то она общезначима».

9. «Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 первую производную, равную нулю $\left(y'(x_0) = 0\right)$, то точка x_0 — точка экстремума функции».

10. «Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную, равную нулю $\left(y''(x_0) = 0\right)$, то точка x_0 — точка перегиба графика функции».

3.37.

1) Докажите равносильность теорем 1 и 3 (см. п. III).
2) Докажите равносильность теорем 2 и 4 (см. п. III).

3.38. Для каждого из следующих условий выясните, является ли оно необходимым и является ли оно достаточным для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$:

1) $x = 0$;
2) $x \geqslant -3$;
3) $x > -2$;
4) $x \geqslant -1$ и $x \leqslant 3$;
5) $x \geqslant -1$ и $x < 10$;
6) $-2 \leqslant x \leqslant 10$.

3.39. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но недостаточно» или «достаточно, но не необходимо», или же «не необходимо и недостаточно», а где возможно «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное утверждение:

1) Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником ..., чтобы длины его диагоналей были равны.

2) Для того, чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ ..., чтобы $x = 3$.

3) Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом ..., чтобы каждое слагаемое было четным.

4) Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на сегменте $[a, b]$, ..., чтобы $f(x)$ была ограничена.

5) Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на сегменте $[a, b]$, ..., чтобы $f(x)$ была непрерывна на $[a, b]$.

6) Для того, чтобы числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходился, ..., чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7) Для того, чтобы окружность можно было вписать в четырехугольник, ..., чтобы суммы длин его противоположных сторон были равны.

8) Для того, чтобы множество A было счетным, ..., чтобы его элементы можно было записать в виде занумерованной последовательности.

9) Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, ..., чтобы она была ограниченной.

10) Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, ..., чтобы она была монотонна и ограничена.

3.40. Сформулируйте:

1) Необходимый и достаточный признак параллелограмма.

2) Необходимый, но недостаточный признак параллелограмма.

3) Достаточный, но не необходимый признак параллелограмма.

4) Необходимое, но недостаточное условие того, чтобы уравнение $\sin x = a$ имело решение.

5) Достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы уравнение $\sin x = a$ имело решение.

6) Достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы уравнение $x^2 + px + q = 0$ имело вещественные корни.

3.41. Папа сказал детям: «Если мы с мамой поедем летом в дом отдыха, то вы все поедете в детский лагерь». В школе детей спросили, куда они поедут летом. Петя ответил: «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха». Галя сказала: «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Нет, не так, — вмешался Коля. — Если мы не поедем в лагерь, то кто-то из родителей не поедет в дом отдыха».

Чей ответ равносилен тому, что сказали родители?

Глава 4

АЛГОРИТМЫ

Понятие алгоритма принадлежит к числу основных понятий математики. Можно дать следующее его неформальное описание.

Алгоритмом называется общий единообразный, точно определенный способ решения любой задачи из данной массовой проблемы, т. е. некоторого класса однотипных задач.

Такое определение нельзя считать строгим, т. к. в нем встречаются слова, точный смысл которых не установлен. В частности, это касается слова «способ». В связи с этим это нестрогое определение алгоритма называется интуитивным.

Интуитивное определение алгоритма хотя и нестрогое, но настолько ясное, что не дает оснований для сомнений в тех случаях, когда речь идет о найденном алгоритме решения конкретной задачи. Положение существенно меняется, когда идут поиски алгоритма нерешенной задачи и требуется установить, имеет ли она решение. В этом случае, очевидно, нужно либо доказать существование алгоритма, либо доказать его отсутствие.

Для доказательства существования алгоритма достаточно дать описание фактического процесса, дающего решение задачи. Здесь достаточно и интуитивного понятия алгоритма. При доказательстве несуществования алгоритма, очевидно, нужно точно знать, что такое алгоритм.

В тридцатые годы XX в. шли поиски строгого определения понятия алгоритма. В подходе к решению этой задачи можно выделить три основных направления.

Первое направление связано с уточнением понятия эффективно вычислимой функции. Этим занимались А. Чёрч, К. Гёдель, С. Клини. В результате был выделен класс частично рекурсивных функций, имеющих строгое математическое определение. Частично рекурсивная функция эффективно вычислима (или просто вычислима), т. е. существует алгоритм для ее вычисления. Поэтому выдвигается гипотеза о том, что каждая интуитивно вычислимая функция есть функция частично рекурсивная (тезис Чёрча).

Второе направление связано с машинной математикой. Здесь сущность понятия алгоритма раскрывается путем рассмотрения процессов, осуществляемых в машине. Впервые это было сделано Тьюрингом в 1937 году. Он исходил лишь их общей идеи работы машины или работы вычислителя, оперирующего с некоторым строгим предписанием, т. е. с алгоритмом.

Третье направление связано с понятием нормальных алгоритмов, введенным и разработанным российским математиком А. А. Марковым.

§ 1. ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЕ И ОБЩЕРЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Частично рекурсивные функции — это класс числовых функций, который строится следующим образом. Выбираются простейшие функции:

1) $\lambda(x) = x + 1$, — оператор сдвига,
2) $O(x) = 0$, — оператор аннулирования,
3) $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, I_n^m — оператор проектирования.

Ясно, что все три простейшие функции всюду определены и интуитивно вычислимы.

Далее вводятся операции над функциями.

1. Суперпозиция функций.

Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функцию $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Функцию $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную равенством $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \phi(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n))$, называют функцией, полученной суперпозицией из функций ϕ и f_1, f_2, $\ldots$, f_m.

Например, постоянные функции 1 и 2 получаются суперпозицией из простейших функций $\lambda(x)$ и $O(x)$ следующим образом:

$$\lambda(O(x)) = \lambda(0) = 1; \qquad \lambda(\lambda(O(x))) = \lambda(O(x)) = \lambda(1) = 2.$$

2. Схема примитивной рекурсии.

Пусть имеются две функции $\phi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$. Рассмотрим новую функцию $f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, x_2, \ldots, x_n) = \phi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \\ &f(y+1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \psi(y, f(y, x_2, x_3, \ldots, x_n), x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Отметим, что функция ϕ зависит от $n-1$ аргументов, функция ψ — от $n+1$ аргументов, а функция f — от n аргументов.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из функций ϕ и ψ с помощью равенств (1), то говорят, что функция f получена из функций ϕ и ψ по схеме примитивной рекурсии.

Пример 1. Функция двух переменных $S(x, y) = x + y$ может быть получена по схеме примитивной рекурсии. Действительно, для функции $x + y$ верны тождества:

$$\begin{gathered} x + 0 = x, \\ x + (y + 1) = (x + y) + 1, \end{gathered}$$

которые можно записать в виде

$$\begin{gathered} S(x, 0) = x, \\ S(x, y + 1) = S(x, y) + 1, \end{gathered}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &S(x, 0) = I_1^1(x), \\ &S(x, y + 1) = \lambda(S(x + y)) \end{aligned}\right\}. \tag{1'}$$

Из равенств (1') видно, что функция двух переменных $S(x, y)$ получается по схеме примитивной рекурсии из функции одной переменной $\phi(x) = I_1^1(x)$ и функции трех переменных $\psi(x, y, z) = \lambda(S(x, y))$.

3. Операция минимизации (μ-оператор).

Пусть задана некоторая функция $f(x, y)$. Зафиксируем значение x и выясним, при каком y $f(x, y) = 0$.

Более сложной задачей является отыскание для данной функции $f(x, y)$ и фиксированного x *наименьшего* из тех значений y, при которых функция $f(x, y) = 0$.

Т. к. результат решения задачи зависит от x, то наименьшее значение y, при котором функция $f(x, y)$ есть функция x. Принято обозначение

$$\phi(x) = \mu_y [f(x, y) = 0].$$

Аналогично определяется функция многих переменных:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y [f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Здесь предполагается выполнение условия: для любых x_1, x_2, ..., x_n существует по крайней мере одно значение y, для которого $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена за конечное число шагов из простейших функций при помощи операций суперпозиции, схем примитивной рекурсии и μ-оператора.

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ называется *общерекурсивной*, если она частично рекурсивна и всюду определена.

Пример 2. Простейшие функции $\lambda(x)$, $O(x)$, $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ частично рекурсивны, а т. к. они всюду определены на множестве всех натуральных чисел, то они и общерекурсивны.

Пример 3. Функция $C_k(x)$ (постоянная и $C_k(x) = k$) получается как суперпозиция функций $\lambda(x)$ и $O(x)$. Действительно, $\lambda(O(x)) = 1$, $\lambda(\lambda(O(x))) = 2$ и т. д. Значит, функция C_k частично рекурсивна. Но функция $C_k(x)$ всюду определена, а поэтому она и общерекурсивна.

Пример 4. Функция $S(x, y) = x + y$ получается по схеме примитивной рекурсии из функций $I_1^1(x)$ и $\lambda(S(x, y))$, которые общерекурсивны. Поэтому функция $S(x, y) = x + y$ общерекурсивна.

Пример 5. Функция $F_k(x) = x + k$ получается как сумма функций $I_1^1(x) = x$ и $C_k = k$, каждая из которых общерекурсивна, а поэтому и функция $F_k(x) = x + k$ общерекурсивна.

Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является *примитивно рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применения оператора суперпозиции и примитивной рекурсии.

4.1. Доказать, что любая примитивно рекурсивная функция всюду определена.

4.2. Доказать, что если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ примитивно рекурсивна, то следующие функции примитивно рекурсивны:

1) $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ (перестановка аргументов);

2) $\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$ (циклическая перестановка аргументов);

3) $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ (введение фиктивного аргумента);

4) $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ (отождествление аргументов).

4.3. Доказать, что из функций $O(x)$ и $I_n^m(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью суперпозиции и схем примитивной рекурсии нельзя получить функции $x + 1$ и $2x$.

4.4. Доказать, что следующие функции общерекурсивны:

1) $P(x, y) = x \cdot y$;

2) $G(x, y) = x^y$;

3) $\delta(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

4) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$ (усеченная разность);

5) $|x - y|$;

6) $\mathrm{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \end{cases}$

7) $\overline{\mathrm{sgn}\,(x)}$;

8) $x!$.

§ 2. МАШИНА ТЬЮРИНГА

Устройство машины Тьюринга включает в себя:

1. *Внешний алфавит*, то есть конечное множество символов $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. В этом алфавите в виде слова кодируется та информация, которая подается в машину. Машина перерабатывает информацию, поданную в виде слова, в новое слово.

2. *Внутренний алфавит* машины, состоящий из символов q_0, q_1, q_2, ..., q_m, П, Л, Н. Символы q_0, q_1, q_2, ..., q_m выражают конечное число состояний машины. Для каждой машины число состояний фиксировано. Два состояния имеют особое назначение: q_1 — начальное состояние машины, q_0 — заключительное состояние (стоп-состояние). Символы П, Л, Н — это символы сдвига (вправо, влево, на месте).

3. *Бесконечная в обе стороны лента* (внешняя память машины). Она разбита на клетки. В каждую клетку может быть записана только одна буква. Пустая клетка обозначается символом a_0.

4. *Управляющая головка*. Она передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки, т. е. воспринимать символ. В одном такте работы машины управляющая головка может сдвигаться только на одну клетку (вправо, влево) или оставаться на месте.

Каждое сведение, хранящееся на ленте, изображается конечным набором символов (букв) внешнего алфавита, отличного от a_0. К началу работы машины на ленту подается начальное сведение (начальная информация). В этом случае управляющая головка может обозревать любую букву слова, записанного на ленте. Например, левую крайнюю букву (q_1 — начальная конфигурация):

	a_0	a_3	a_1	a_2	a_4	a_1	a_0	
		q_1						

Говорят, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ воспринимается машиной в *стандартном положении*, если оно записано в последовательных клетках ленты, все другие клетки пусты, и машина обозревает крайнюю справа клетку из тех, в которых записано слово α.

Стандартное положение называется *начальным* (*заключительным*), если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (в состоянии q_0).

Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточные информации.

В качестве начальной информации на ленту можно подать любую систему знаков внешнего алфавита (любое слово в этом алфавите), расставленную по клеткам. Но в зависимости от того, какая была подана начальная информация α, возможны два случая:

1. После конечного числа тактов машина останавливается (переходит в стоп-состояние q_0), и при этом на ленте оказывается изображенной информация β. В таком случае говорят, что машина применима к начальной информации α и перерабатывает ее в результирующую информацию β.
2. Машина никогда не останавливается (не переходит в стоп-состояние). В таком случае говорят, что машина не применима к начальной информации α.

В каждом такте работы машины она действует по функциональной схеме, которая имеет вид:

$$a_i q_j \to a_\nu \begin{matrix}\text{П}\\ \text{Л}\\ \text{Н}\end{matrix}\ q_s.$$

Здесь a_i, a_ν — буквы внешнего алфавита; q_j, q_s — состояния машины; П, Л, Н — символы сдвига.

В зависимости от того, какая буква на ленте обозревается управляющей головкой (в нашей записи a_i), и в каком состоянии (в нашей записи q_j) находится машина, в данном такте вырабатывается команда, состоящая из трех элементов:

1) буквы внешнего алфавита, на которую заменяется обозреваемая буква (a_ν);

2) адреса внешней памяти для следующего такта $\begin{pmatrix} \text{П} \\ \text{Л} \\ \text{Н} \end{pmatrix}$;

3) следующее состояние машины (q_s).

Совокупность всех команд образует *программу машины Тьюринга*. Программа представляется в виде двумерной таблицы и называется *Тьюринговой функциональной схемой*.

Ясно, что работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой. Иными словами, две машины Тьюринга с общей функциональной схемой неразличимы, и различные машины Тьюринга имеют различные программы.

Для простоты изображения различных конфигураций машины Тьюринга обычно записывают информацию в виде слова, не изображая ленты и ее разбивки на клетки, а вместо изображения управляющей головки и состояния машины записывают только состояние машины в позиции управляющей головки.

Так как рассматриваются вычислимые функции натурального аргумента, то обычно натуральные числа на ленте машины Тьюринга записываются в виде соответствующих наборов палочек, и результат вычисления функции будет так же записан в виде набора палочек.

Пример 1. Определить, какую функцию вычисляет машина Тьюринга со следующей программой команд:

	a_0	$\vert$
q_1	$\vert$ Н q_0	$\vert$ П q_0

программа 1.

Решение. Пусть число n записано на ленте машины в виде набора n палочек:

	a_0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\dots$	$\vert$	$\vert$	a_0	

q_1

Тогда для любой начальной конфигурации, при которой управляющая головка обозревает одну из палочек, машина Тьюринга будет работать так: в каждом такте она будет оставлять обозреваемую палочку на месте и сдвигаться вправо на одну клетку. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока управляющая головка не выйдет на пустую клетку. Здесь, согласно программе, в пустую клетку будет вписана палочка, и машина перейдет в стоп-состояние. В результате на ленте будет записана $n+1$ палочка.

Таким образом, машина Тьюринга по программе 1 вычисляет функцию $\phi(n) = n+1$.

Выпишем все конфигурации для частного случая $n = 3$.

1) $\begin{matrix} a_0 & | & | & | & a_0 \\ & q_1 & & & \end{matrix},$

2) $\begin{matrix} a_0 & | & | & | & a_0 \\ & & q_1 & & \end{matrix},$

3) $\begin{matrix} a_0 & | & | & | & a_0 \\ & & & q_1 & \end{matrix},$

4) $\begin{matrix} a_0 & | & | & | & a_0 \\ & & & & q_1 \end{matrix},$

5) $\begin{matrix} a_0 & | & | & | & | & a_0 \\ & & & & q_1 & \end{matrix}.$

Конечно, можно предложить машину Тьюринга, которая бы при вычислении функции натурального аргумента пользовалась аппаратом десятичной системы счисления.

Пример 2. Построить машину Тьюринга, реализующую алгоритм вычисления функции $\phi(n) = n+2$.

Решение. Возьмем за внешний алфавит множество символов $\{a_0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и будем записывать число n на ленте машины в десятичной системе счисления. Тогда для реализации указанного алгоритма необходимо, чтобы машина, находясь в стандартном состоянии, заменяла последнюю цифру числа n (если эта цифра меньше 8) цифрой, на две единицы большей, и переходила в стоп-состояние. Если последняя цифра числа n равна 8, то ее нужно заменить на 0 и перейти влево в новое состояние q_2, которое добавляло бы к следующему разряду 1. Аналогично, если последняя цифра числа n равна 9, то ее нужно заменить на 1 и перейти влево в состояние q_2.

Ясно, что эта машина имеет три состояния: q_0, q_1, q_2, а программа машины имеет вид:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1		2Нq_0	3Нq_0	4Нq_0	5Нq_0	6Нq_0	7Нq_0	8Нq_0	9Нq_0	0Лq_2	1Лq_2
q_2	1Нq_0	1Нq_0	2Нq_0	3Нq_0	4Нq_0	5Нq_0	6Нq_0	7Нq_0	8Нq_0	9Нq_0	0Лq_2

Например, при вычислении $\phi(98)$ будем иметь следующие конфигурации:

1) $\begin{matrix} a_0 & 9 & 8 & a_0 \\ & & q_1 & \end{matrix}$, 3) $\begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & a_0 \\ q_2 & & & \end{matrix}$,

2) $\begin{matrix} a_0 & 9 & 0 & a_0 \\ & q_1 & & \end{matrix}$, 4) $\begin{matrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & a_0 \\ & q_2 & & & \end{matrix}$.

4.5. Реализовать на машине Тьюринга алгоритм вычисления функции $\phi(n) = n + 4$.

4.6. Реализовать на машине Тьюринга алгоритм вычисления функции $\phi(n) = 0$.

4.7. Построить машину Тьюринга, которая из n записанных единиц оставляла бы на ленте $n - 2$ единицы; так же записанных подряд, если $n \geqslant 2$, и работала бы вечно, если $n = 0$ или $n = 1$.

4.8. Построить машину Тьюринга, которая применима ко всем словам в алфавите $\{a_0, a_1, a_2\}$ и делает следующее: любое слово $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i = a_1$ или $x_i = a_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, преобразует в слово $x_2x_3\ldots x_nx_1$.

4.9. Построить машину Тьюринга для вычисления функции $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}$

4.10. Построить машину Тьюринга для вычисления функции $\overline{\operatorname{sgn} x} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}$

4.11. Убедиться, что машина с алфавитом $\{a_0, |\}$ и программой:

	a_0	$\vert$
q_1	$a_0 \text{П} \overline{q_2}$	$\vert \text{Л} q_2$
q_2	$a_0 \text{П} \overline{q_2}$	$\vert \text{Л} q_3$
q_3	$a_0 \text{П} \overline{q_3}$	$\vert \text{Л} q_1$
$\overline{q_1}$	$a_0 \text{Н} q_0$	$a_0 \text{Н} q_4$
q_4	$a_0 \text{П} \overline{q_1}$	
$\overline{q_2}$	$\vert \text{Н} q_0$	$a_0 \text{Н} q_0$
q_5	$a_0 \text{П} \overline{q_2}$	
$\overline{q_3}$	$\vert \text{Н} q_7$	$a_0 \text{Н} q_6$
q_6	$a_0 \text{П} \overline{q_3}$	
q_7	$\vert \text{Н} q_0$	$\vert \text{П} q_4$

каждое слово длины n алфавита $\{a_0, |\}$ перерабатывает в слово длины r (r — остаток от деления числа n на 3).

4.12. Построить машину Тьюринга для реализации алгоритма (вычисления функции) $\phi(n) = 2n$.

4.13. Записать в алфавите $\{a_0, |\}$ программу машины Тьюринга для вычисления функции

$$f_p(n) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n \quad \text{делится на} \quad p, \\ 0, & \text{если} \quad n \quad \text{не делится на} \quad p. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. Высказываниями являются 1) и 4).

1.3. 1) утверждение не является высказыванием, на заданный вопрос ответить нельзя;

2) утверждение является высказыванием, оно ложно, что показывает контрпример $x^2 - 1 = 0$;

3) утверждение является высказыванием, причем истинным, сумма корней уравнения $x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{9}{2} = 0$ равна свободному члену.

1.4. Высказывания 1), 4), 6), 8) ложны, а остальные истинны.

1.5. Нет. **Указание.** Предположение об истинности или ложности данного предложения приводит к противоречию.

1.10. Противоречивы данные 2) и 5).

1.12. Тождественно истинными являются формулы 1), 2), 3), 6) – 10), 13), 14).

1.13. 1) $x = 1$, $y = 0$; 2) $x = 0$, $y = 1$.

1.15. Истинны высказывания 3), 4), 6), а остальные — ложны.

1.19. Тождественно ложны формулы 1), 3), 7), 10), а остальные — тождественно истинны.

1.21. 1) x; 2) $\overline{x} \vee y$; 3) $x \vee y$; 4) $x \& y$; 5) $x \vee \overline{z}$; 6) $x \to y$; 7) 1; 8) $x \vee y$; 9) 1; 10) $x \vee yz$.

1.22. Формулы 6), 7), 13), 15) — тождественно ложны, а остальные — тождественно истинны.

1.24. $x \equiv \overline{b}$.

1.25. Используя законы алгебры логики, получаем

$$a_5 \equiv a_4 \& (a_3 \vee a_2) \equiv (a_3 \& (a_2 \vee a_1)) \& (a_3 \vee a_2) \equiv$$
$$\equiv (a_3 \& (a_3 \vee a_2)) \& (a_2 \vee a_1) \equiv a_3 \& (a_2 \vee a_1) \equiv a_4.$$

Аналогично можно показать, что $a_6 \equiv a_4$. Докажем, что $a_n \equiv a_4$ $(n > 3)$. Для $n = 4, 5, 6$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для всех номеров, не превосходящих n, тогда $a_{n+1} = a_n \& (a_{n-1} \vee a_{n-2}) \equiv a_4 \& (a_4 \vee a_4) \equiv a_4$. Высказывание a_4, очевидно, истинно, следовательно, истинно и a_n. Итак, $a_n = 1$ и $a_n \equiv a_3 \& (a_2 \vee a_1)$.

1.26. 1) $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$, $a \leftrightarrow b \equiv (\overline{a} \vee b)\left(\overline{b} \vee a\right)$;

2) $a \to b \equiv \overline{a \& \overline{b}}$, $a \vee b \equiv \overline{\overline{a} \& \overline{b}}$, $a \leftrightarrow b \equiv \overline{a \& \overline{b}} \& \overline{b \& \overline{a}}$;

3) $a \& b \equiv \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$, $a \to b \equiv \overline{a} \vee b$, $a \leftrightarrow b \equiv \overline{\overline{(\overline{a} \vee b)} \vee \overline{\left(\overline{b} \vee a\right)}}$;

4) $a \vee b \equiv \overline{a} \to b$, $a \& b \equiv \overline{a \to \overline{b}}$, $a \leftrightarrow b \equiv \overline{(a \to b) \to \overline{(b \to a)}}$.

1.27. 1) $\overline{a \to b} \equiv a \& \overline{b}$; 2) $a \vee b \equiv (a \to b) \to b$.

1.28. $a \veebar\!\!\vee b \equiv \overline{a \leftrightarrow b}$.

1.29. $a \,|\, b \equiv \overline{a \& b}$, $\overline{a} \equiv a \,|\, a$, $a \& b \equiv (a \,|\, b) \mid (a \,|\, b)$, $a \vee b \equiv$ $\equiv (a \,|\, a) \mid (b \,|\, b)$.

1.30. $a \downarrow b \equiv \overline{a \vee b}$, $\overline{a} \equiv a \downarrow a$, $a \vee b \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$, $a \& b \equiv (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$.

1.33. Решение мальчика не выполнено, если он не закончил чтение книги или не сходил ни в музей, ни в кино, или, хотя была хорошая погода, он не купался.

1.34. $F_1(x, y, z) \equiv x\overline{z} \vee \overline{y}\, z$; $F_2(x, y, z) \equiv y\,(x \vee \overline{z})$; $F_3(x, y, z) \equiv xy \vee \overline{x}\,(y\overline{z} \vee \overline{y}\, z)$; $F_4(x, y, z) \equiv xz \vee \overline{y}\,(x\overline{z} \vee \overline{x}\, z)$.

1.35. $F(l_1, l_2, l_3) \equiv \overline{l_3}\left(l_1\overline{l_2} \vee \overline{l_1} l_2\right) \vee \overline{l_1}\,\overline{l_2}\, l_3$.

1.36. $l_1 \,|\, l_2 \,|\, l_3 \equiv l_1\,(l_2 \vee l_3) \vee l_2\, l_3$.

1.39. 1) СДНФ$A \equiv xy$, СКНФ$A \equiv (\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y})(x \vee y)$;

2) см. п. 1);

3) СДНФ$A \equiv x\overline{y} \vee xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$, СКНФ$A \equiv x \vee \overline{y}$;

4) СДНФ$A \equiv \overline{x}\, yz \vee xyz \vee \overline{x}\,\overline{y}\, z$,
СКНФ$A \equiv (\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)$;

5) СДНФ$A \equiv x\overline{y}\, z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\, y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z$, СКНФ$A \equiv x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$;

6) СДНФ$A \equiv a\overline{b}\, c \vee a\overline{b}\,\overline{c} \vee abc \vee ab\overline{c} \vee \overline{a}\, bc \vee \overline{a}b\overline{c} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}$, СКНФ$A \equiv$ $\equiv (a \vee b \vee \overline{c})$;

7) СДНФ$A \equiv ab\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee a\overline{b}\, c \vee a\overline{b}\,\overline{c}$,
СКНФ$A \equiv (a \vee b \vee \overline{c})\left(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right)\left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c\right)\left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}\right)$;

8) СДНФ$A \equiv \overline{a}\, bc \vee \overline{a}\, b\overline{c} \vee a\overline{b}c \vee a\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}\,\overline{b}\, c \vee \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \vee ab\overline{c} \vee abc$, СКНФ$A \equiv 1$;

9) СДНФA содержит все слагаемые вида $x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n}$, кроме одного $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}\overline{x_n}$, СКНФ$A \equiv \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \cdots \vee \overline{x_{n-1}} \vee x_n$.

1.40. 1) $x \vee \overline{x}$; 2) $xy \vee x\overline{y} \vee \overline{x}\, y \vee \overline{x}\,\overline{y}$;

3) $xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\, y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\, z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

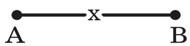
1.41. 1) $x \& \overline{x}$; 2) $(\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)(x \vee \overline{y})(x \vee y)$;

3) $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)\,(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})\,(\overline{x} \vee y \vee z)\,(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})\,\&$
$\&\,(x \vee \overline{y} \vee z)\,(x \vee y \vee \overline{z})\,(x \vee y \vee z)$.

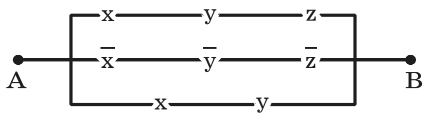
1.43. 1) $x \vee y$; 2) $\overline{x}\,\overline{y}$; 3) $z\,(x \vee y)$; 4) $x\,(y \vee z) \vee \overline{z}\,(\overline{x} \vee y)$.

1.44. Формула 1) — тождественно истинна, 2) — тождественно ложна, а остальные — выполнимы.

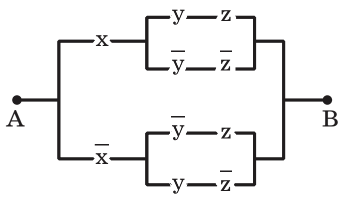
1.45. 1)



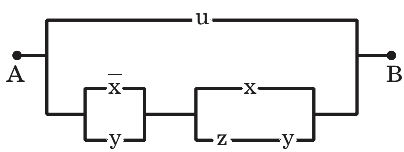
2)



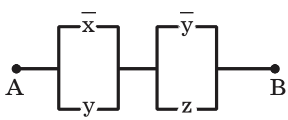
3)



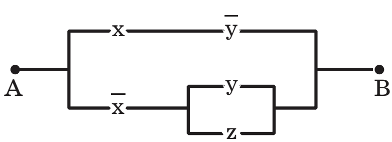
4)



5)

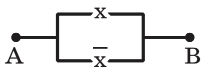


6)

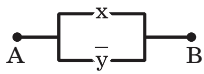


7)

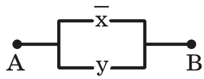
или



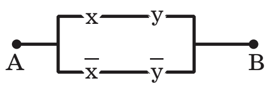
8)



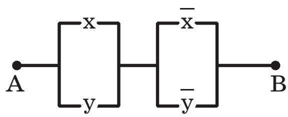
1.46. 1)



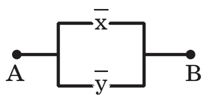
2)



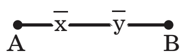
3)



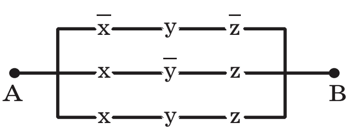
4)



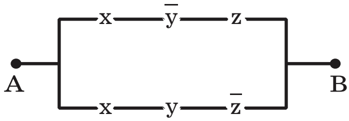
5)



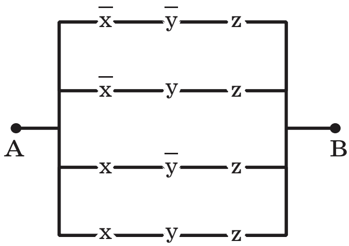
1.47. 1)



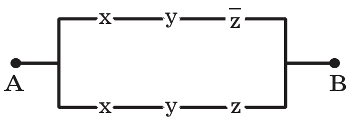
2)


x $\bar{y}$ z
A
B
x y $\bar{z}$

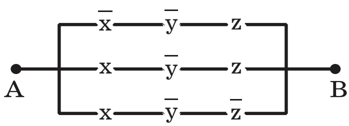
3)


$\bar{x}$ $\bar{y}$ z
$\bar{x}$ y z
A
B
x $\bar{y}$ z
x y z

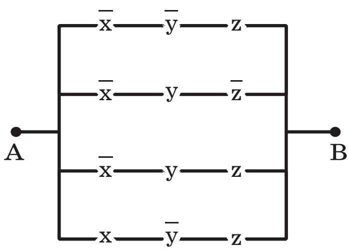
4)


x y $\bar{z}$
A
B
x y z

5)

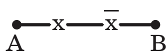

$\bar{x}$ $\bar{y}$ z
x $\bar{y}$ z
A
B
x $\bar{y}$ $\bar{z}$

6)


$\bar{x}$ $\bar{y}$ z
$\bar{x}$ y $\bar{z}$
A
B
$\bar{x}$ y z
x $\bar{y}$ z

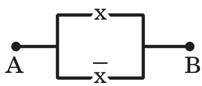
1.48. 1)

2)



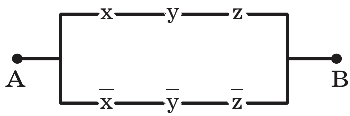
или


3)

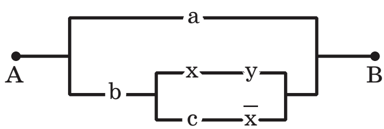


или

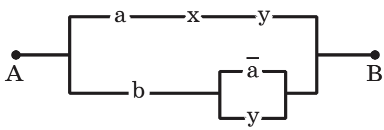

4)



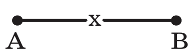
5)



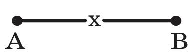
6)



7)



8)



1.49. 1) $f(1,1,1) = f(1,1,0) = f(0,1,1) = f(0,0,1) = 1$,

2) $f(0,0,1,1) = f(0,0,0,1) = f(0,0,1,0) = f(0,0,0,0) = f(1,1,1,1) = f(0,1,1,1) = 1$,

3) $f(0,0,1) = f(1,1,0) = f(0,1,0) = f(1,1,1) = f(0,1,1) = f(1,0,1) = 1$,

4) $f(1,1,1,1) = f(1,0,1,1) = f(0,1,1,1) = f(0,1,0,1) = 1$,

5) $f(x,y,z,u) \equiv 0$,

6) функция проводимости имеет вид:

$$xvu \vee zvy \vee xy \vee zu.$$

1.50. В случае 1) схемы не равносильны, в остальных случаях равносильны.

1.51. Можно.

1.52. Андреев убирал 8-й класс, Давыдов — 9-й, Костин — 10-й, Савельев — 7-й.

1.53. Ефимов — из Жуковки, Дмитриев — из Дятькова, Петров — из Трубчевска, Иванов — из Клинцов, Сидоров — из Новозыбкова.

1.54. Передачу смотрят дочери C и D.

1.55. Логику изучает второй студент.

1.56. Экзамены сдали все студенты.

1.57. Коля ходил в кино.

1.58. График посещения такой: A — во вторник, E — в среду, C — в четверг, P — в пятницу.

1.59. С учетом обозначения X_Y — «X должен поехать в город Y», ответ запишется так:

$$\text{А}_\text{М}\text{В}_\text{К}\text{С}_\text{Т}\text{Д}_\text{О} \vee \text{А}_\text{М}\text{В}_\text{О}\text{С}_\text{Т}\text{Д}_\text{К} \vee \text{А}_\text{М}\text{В}_\text{К}\text{С}_\text{О}\text{Д}_\text{Т}.$$

1.60. Правду говорил Жак.

Указание. Обозначить показания свидетелей соответственно Ж, К, Д. Тогда условие задачи можно записать в виде:

1 $\left(\text{К} \wedge \overline{\text{Ж}}\right) \vee \left(\overline{\text{К}} \wedge \text{Ж}\right)$,

2 $\left(\text{Ж} \wedge \overline{\text{Д}}\right) \vee \left(\overline{\text{Ж}} \wedge \text{Д}\right)$,

3 $\left(\text{Д} \wedge \overline{\text{К}} \wedge \overline{\text{Ж}}\right) \vee \left(\overline{\text{Д}} \wedge (\text{К} \vee \text{Ж})\right)$.

Каждая из этих формул истинна, поэтому истинной будет и их конъюнкция. Результат находится путем равносильных преобразований.

Глава 2

2.1. Формулы — 1), 3), 4), 6), 7).

2.4. 1) $\overset{A\to B,B}{\underset{x,y}{\int}}(\mathrm{II}_2)$; 2) $\overset{A\&B,C}{\underset{x,y}{\int}}(\mathrm{III}_1)$; 3) $\overset{\overline{A},C,B}{\underset{x,y,z}{\int}}(\mathrm{III}_3)$; 4) $\overset{C\vee D}{\underset{x}{\int}}(\mathrm{IV}_3)$; 5) $\overset{A\&B,C,B\&C}{\underset{x,y,z}{\int}}(\mathrm{I}_2)$.

2.5. 1) Возьмем аксиому III_3 и сделаем в ней подстановку $\overset{A,A,A}{\underset{x,y,z}{\int}}(\mathrm{III}_3)$. Получим доказуемую формулу

$$\vdash (A \to A) \to ((A \to A) \to (A \vee A \to A)) . \tag{1}$$

Но

$$\vdash A \to A. \tag{2}$$

Применяя к формулам (2) и (1) правило сложного заключения (ПСЗ), получим $\vdash A \vee A \to A$.

2) Возьмем аксиому II_3 и сделаем в ней подстановку $\overset{A,A,A}{\underset{x,y,z}{\int}}(\mathrm{II}_3)$. Получим

$$\vdash (A \to A) \to ((A \to A) \to (A \to A\&A)) , \tag{1}$$

но

$$\vdash A \to A. \tag{2}$$

Применяя к (1) и (2) ПСЗ, получим $\vdash A \to A\&A$.

3) Возьмем аксиому II_3 и сделаем в ней подстановку $\overset{B,A,A\&B}{\underset{x,y,z}{\int}}(\mathrm{II}_3)$. Получим

$$\vdash (A\&B \to B) \to ((A\&B \to A) \to (A\&B \to B\&A)) . \tag{1}$$

Но

$$\vdash A\&B \to B, \tag{2}$$

$$\vdash A\&B \to A. \tag{3}$$

Применяя к формулам (1), (2) и (3) ПСЗ, получим $\vdash A\&B \to B\&A$.

4) Возьмем аксиому III_3 и сделаем в ней подстановку $\int\limits_{x,y,z}^{A,B,B\vee A}(III_3)$.

Получим

$$\vdash (A \to B \vee A) \to ((B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)). \qquad (1)$$

Но

$$\vdash A \to B \vee A, \qquad (2)$$

$$\vdash B \to B \vee A. \qquad (3)$$

Применяя к формулам (1), (2) и (3) ПСЗ, получим $\vdash A \vee B \to B \vee A$.

5) Возьмем аксиому I_2 и сделаем в ней подстановку $\int\limits_{x,y,z}^{A,B,A}(I_2)$. Получим:

$$\vdash (A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A)). \qquad (1)$$

Но

$$\vdash A \to (B \to A). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) по ПЗ получим $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$.

6) Возьмем аксиому IV_3 и сделаем в ней подстановку $\int\limits_{x}^{\overline{A}}(IV_3)$. Получим $\vdash \overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}$.

2.6. 1) В аксиоме III_3 делаем подстановку $\int\limits_{x,y,z}^{\overline{A},\overline{B},\overline{A\&B}}(III_3)$. Получим

$$\vdash \left(\overline{A} \to \overline{A\&B}\right) \to \left(\overline{B} \to \left(\overline{A\&B}\right) \to \left(\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A\&B}\right)\right). \qquad (1)$$

Возьмем аксиомы II_1 и II_2 и применим к ним правило контрпозиции. Получим:

$$\vdash \overline{A} \to \overline{A\&B}, \qquad (2)$$

$$\vdash \overline{B} \to \overline{A\&B}. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) по ПСЗ $\vdash \overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A\&B}$.

2) В аксиоме I_1 сделаем подстановку $\int\limits_{x,y}^{R,A} (\mathrm{I}_1)$. Получим

$$\vdash R \to (A \to R)\,. \tag{1}$$

Но по условию

$$\vdash R. \tag{2}$$

Из (1) и (2) по ПЗ $\vdash A \to R$.

3) Т.к. $\vdash A \to (A \vee B)$ (аксиома III_1), а формула $A \to B$ есть некоторая формула C, то исходная формула имеет вид $C \to R$, которая доказуема.

4) Возьмем доказуемую формулу

$$\vdash \overline{A} \to R. \tag{1}$$

Применим к (1) правило контрпозиции. Получим формулу $\vdash \overline{R} \to \overline{\overline{A}}$ или

$$\vdash F \to \overline{\overline{A}}. \tag{2}$$

Применяя к формуле (2) правило снятия двойного отрицания, получим $\vdash F \to A$.

5) Т.к. $\vdash A \to A$, то исходная формула имеет вид $C \to R$, которая доказуема.

6) Т.к. $\vdash A \to \left(\overline{A} \to B\right)$, где B — любая формула, то используя правило соединения посылок и подставляя F вместо B, получим $\vdash A \& \overline{A} \to F$.

7) В аксиоме I_2 делаем подстановку $\int\limits_{x,y,z}^{(A\to B)\&\overline{B},\overline{B},\overline{A}} (\mathrm{I}_2)$. Получим:

$$\vdash \left((A \to B)\,\&\overline{B} \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)\right) \to \left((A \to B)\,\&\overline{B} \to \overline{B}\right) \to \\ \to \left((A \to B)\,\&\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{1}$$

В аксиоме II_2 делаем подстановку $\int\limits_{x,y}^{A\to B,\overline{B}} (\mathrm{II}_2)$:

$$\vdash (A \to B)\,\&\overline{B} \to \overline{B}, \tag{2}$$

$$\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{3}$$

В аксиоме II_1 делаем подстановку $\int\limits_{x,y}^{A\to B,\overline{B}} (\mathrm{II}_1)$:

$$\vdash (A \to B)\,\&\overline{B} \to (A \to B)\,. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получим

$$\vdash (A \to B)\,\&\overline{B} \to \big(\overline{B} \to \overline{A}\big)\,. \tag{5}$$

Из (1), (2), (5) по ПСЗ $\vdash (A \to B)\,\&\overline{B} \to \overline{A}$.

8) **Указание.** См. § 7 главы 2 части I.

2.7. 1) Запишем вывод из H: A, $A \to (B \to A)$, $B \to A$.

2) Запишем вывод из H: $A \to B$, $B \to C$, $(A\to(B\to C))\to \to ((A\to B)\to(A\to C))$, $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$, $A \to \to (B \to C)$, $(A \to B) \to (A \to C)$, $A \to C$.

3) Запишем вывод из H: $A \to C$, $(A \to C) \to \big(\overline{C} \to \overline{A}\big)$, $\overline{C} \to \overline{A}$.

4) Запишем вывод из H: $A \to B$, $\overline{B}$, $A \to B \to \big(\overline{B} \to \overline{A}\big)$, $\overline{B} \to \overline{A}$, $\overline{A}$.

5) Запишем вывод из H: A, $\overline{\overline{A}} \to B$, $A \to \overline{\overline{A}}$, $A \to B$, B.

6) Докажем, что из $H_1 = \{A \to B, A\&C\} \vdash B\&C$. Тогда останется применить теорему дедукции. Запишем вывод: $A \to \to B$, $A\&C$, $A\&C \to A$, $A\&C \to C$, A, B, C, $B\&C$. Тогда по теореме дедукции

$$\frac{\{A \to B, A\&C\} \vdash B\&C}{\{A \to B\} \vdash A\&C \to B\&C}.$$

7) Запишем вывод из H: $A \to B$, $(C \to (A \to B)) \to \to ((C \to A) \to (C \to B))$, $(A \to B) \to (C \to (A \to B))$, $C \to \to (A \to B)$, $(C \to A) \to (C \to B)$.

8) Из $H_1 = \{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$. Тогда по теореме дедукции $\{A \to B\} \vdash \{B \to C\} \to (A \to C)$.

9) Запишем вывод из H: $A \to (B \to C)$, $(A \to (B \to C)) \to \to (B \to (A \to C))$, $B \to (A \to C)$.

10) Докажем, что $\{A \to B, A \vee C\} \vdash B\vee C$. Тогда останется применить теорему дедукции. Для доказательства достаточно установить, что

$$\{A \to B, A\} \vdash B \vee C \quad \text{и} \quad \{A \to B, C\} \vdash B \vee C.$$

Тогда по правилу введения дизъюнкции получим требуемое. Запишем выводы.

$$\{A \to B, A\} \vdash A \to B, A, B, B \to B \vee C, B \vee C.$$
$$\{A \to B, C\} \vdash A \to B, C, C \to B \vee C, B \vee C.$$

2.8. 1) Возьмем совокупность формул

$$H = \{x \to y, y \to z, x\}.$$

Докажем, что $H \vdash z$. Запишем вывод из H: $x \to y$, $y \to z$, x, y, z. Тогда по обобщенной теореме дедукции $\vdash (x \to y) \to$ $\to ((y \to z) \to (x \to z))$.

2) Из $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$ (см. № 2.7.10). Тогда по теореме дедукции $\vdash (A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$.

3) Из $H = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$ (см. № 2.7.7). Тогда по теореме дедукции $\vdash (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

2.9. Указание. См. § 7 главы 2 части I.

2.10. 1) $\vdash x \& y \to x \& y$. Используя правило разъединения посылок, получим $\vdash x \to (y \to x \& y)$.

2) $\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$. Используя правило соединения посылок, получим $\vdash (A \to B) \& \overline{B} \to \overline{A}$.

3) $$\vdash x \to (\overline{x} \to y). \tag{1}$$

Используя подстановку $\int\limits_{x,y}^{A,B}$ (1), получим

$$\vdash A \to \left(\overline{A} \to B\right).$$

Используя правило перестановки посылок, получим $\vdash \overline{A} \to$ $\to (A \to B)$.

2.11. 1) По условию

$$\vdash \overline{A}. \tag{1}$$

Используем аксиому II_1:

$$\vdash A \& B \to A. \tag{2}$$

Применим к формуле (2) правило контрпозиции. Получим:

$$\vdash \overline{A} \to \overline{A \& B}. \tag{3}$$

Из формул (1) и (3) по ПЗ получим $\vdash \overline{A \& B}$.

2) По условию
$$\vdash A. \tag{1}$$

Используя аксиому III_1:
$$\vdash A \to A \vee B. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) по ПЗ получаем $\vdash A \vee B$.

3) По условию
$$\vdash \overline{A}. \tag{1}$$

Запишем доказуемые формулы:
$$\vdash \overline{A} \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right), \tag{2}$$
$$\vdash \left(\overline{B} \to \overline{A}\right) \to \left(\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}\right). \tag{3}$$

Применяя правило силлогизма к формулам (2) и (3), получим
$$\vdash \overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}. \tag{4}$$

Применяя оба правила снятия двойного отрицания к формуле (4), получим $\vdash A \to B$.

4) По условию
$$\vdash B. \tag{1}$$

Воспользуемся аксиомой I_1:
$$\vdash B \to (A \to B). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) по ПЗ получаем $\vdash A \to B$.

5) По условию
$$\vdash A \& B. \tag{1}$$

Используем аксиому II_1:
$$\vdash A \& B \to A. \tag{2}$$

Из (1) и (2) по ПЗ $\vdash A$.

6) По условию
$$\vdash \overline{B}. \tag{1}$$

Используем аксиому II_2:

$$\vdash A\&B \to B. \tag{2}$$

Применим к формуле (2) правило контрпозиции. Получим

$$\vdash \overline{B} \to \overline{A\&B}. \tag{3}$$

Применяя к формулам (1) и (3) ПЗ, получим $\vdash \overline{A\&B}$.
7) По условию

$$\vdash A \to B, \tag{1}$$
$$\vdash \overline{B}. \tag{2}$$

Воспользуемся аксиомой IV_1:

$$\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{3}$$

Применяя к формулам (1), (2) и (3) ПСЗ, получим $\vdash \overline{A}$.
8) По условию

$$\vdash A, \tag{1}$$
$$\vdash B. \tag{2}$$

Возьмем аксиому II_3 и сделаем в ней подстановку $\int\limits_{x,y,z}^{A,B,A} (\mathrm{II}_3)$, получим

$$\vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A\&B)). \tag{3}$$

Воспользуемся доказуемыми формулами:

$$\vdash A \to A, \tag{4}$$
$$\vdash B \to (A \to B). \tag{5}$$

Из (3) и (4) по ПЗ

$$\vdash (A \to B) \to (A \to A\&B). \tag{6}$$

Из (5) и (6) по правилу силлогизма

$$\vdash B \to (A \to A\&B). \tag{7}$$

Из (1), (2) и (7) по ПСЗ $\vdash A\&B$.

9) По условию

$$\vdash \overline{A}, \tag{1}$$
$$\vdash \overline{B}. \tag{2}$$

Как было доказано при условиях (1) и (2)

$$\vdash \overline{A}\&\overline{B}. \tag{3}$$

Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash \overline{A}\&\overline{B} \to \overline{A \vee B}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) по ПЗ $\vdash \overline{A \vee B}$.

10) По условию

$$\vdash A, \tag{1}$$
$$\vdash \overline{B}. \tag{2}$$

Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash (A \to B) \to (A \to B)\,. \tag{3}$$

По правилу перестановки посылок из формулы (3) получаем

$$\vdash A \to ((A \to B) \to B)\,. \tag{4}$$

Из формул (1) и (4) по ПЗ

$$\vdash (A \to B) \to B. \tag{5}$$

Из формулы (5) по правилу контрпозиции

$$\vdash \overline{B} \to \overline{A \to B}. \tag{6}$$

Из (1) и (6) по ПЗ $\vdash \overline{A \to B}$.

11) **Указание.** В аксиоме III_3 выполнить подстановку $\int_{x,y,z}^{A,\overline{A},\overline{A}} (\mathrm{III}_3)$ и затем воспользоваться ПСЗ.

12) Решение аналогично пункту 11).

2.13. 1) $R_{111}(A) = 0 \Rightarrow H = \{x_1, x_2, x_3\} \vdash \overline{A}$. $H \vdash x_1$, x_2, x_3, $(\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3) \to (\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3)$, $(\overline{x}_1 \vee x_2) \to ((\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3) \to \overline{x}_3)$, $x_2 \to \overline{x}_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1 \vee x_2$, $(\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3) \to \overline{x}_3$, $\overline{\overline{x}}_3 \to \overline{\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3}$, $x_3 \to \overline{(\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3)}$, $\overline{\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3}$, т.е. $H \vdash \overline{A}$.

2) $R_{101}(A) = 1 \Rightarrow H = \{x_1, \overline{x}_2, x_3\} \vdash A$. $H \vdash x_1$, $\overline{x}_2$, x_3, $\overline{x}_1 \vee x_2 \to \left(\overline{\overline{x}_1 \vee x_2} \to \overline{x}_3\right)$, $\overline{\overline{x}_1 \vee x_2} \to (\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3)$, $x_1 \to \overline{\overline{x}}_1$, $\overline{\overline{x}}_1$, $\overline{\overline{x}}_1 \& \overline{x}_2$, $\overline{\overline{x}}_1 \& \overline{x}_2 \to \overline{\overline{x}_1 \vee x_2}$, $\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3$.

3) $R_{010}(A) = 1 \Rightarrow H = \{\overline{x}_1, x_2, \overline{x}_3\} \vdash A$. $H \vdash \overline{x}_1$, x_2, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_3 \to (\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3)$, $\overline{x}_1 \vee x_2 \to \overline{x}_3$.

2.14. 1) $R_{100}(A) = 0 \Rightarrow H = \{x, \overline{y}, \overline{z}\} \vdash \overline{A}$. $H \vdash x, \overline{y}, \overline{z}$, $(x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}) \to (x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z})$, $x \vee \overline{y} \to \left((x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}) \to \overline{x} \& \overline{z}\right)$, $x \to x \vee \overline{y}$, $x \vee \overline{y}$, $(x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}) \to \overline{x} \& \overline{z}$, $\overline{\overline{x} \& \overline{z}} \to \overline{x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}}$, $x \to x \vee z$, $x \vee z$, $x \vee z \to \overline{\overline{x} \& \overline{z}}$, $\overline{\overline{x} \& \overline{z}}$, $\overline{x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}}$.

2) $R_{011}(A) = 1 \Rightarrow H = \{\overline{x}, y, z\} \vdash A$. $H \vdash \overline{x}$, y, z, $\overline{x \vee \overline{y}} \to (x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z})$, $\overline{x} \& \overline{\overline{y}} \to \overline{x \vee \overline{y}}$, $y \to \overline{\overline{y}}$, $\overline{\overline{y}}$, $\overline{x} \& \overline{\overline{y}}$, $\overline{x} \& \overline{\overline{y}}$, $\overline{x \vee \overline{y}}$, $x \vee \overline{y} \to \overline{x} \& \overline{z}$.

Глава 3

3.1. Предикатами являются предложения 2), 4), 7) – 11).

3.2. 1) $I_P = \{-2, 2\}$, $I_Q = \left(-\infty, \frac{19}{3}\right)$;

2) $I_P = \{2\}$, $I_Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3.3. Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны на множестве M, а на множествах L и K не равносильны.

3.4. 1) Предикат $\sqrt{xy} = 15$ является следствием предиката $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$;

2) предикат $\lg ab = 1$ является следствием предиката $\lg a + \lg b = 1$;

3) предикат $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ является следствием предиката $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$;

4) предикат $x = y$ является следствием предиката $2^{\log_2 x} = y$;

5) данные предикаты равносильны;

6) предикат $(x + y)(x - y) = -zy$ является следствием предиката $x + y = z$;

7) предикат $x^2 - y^2 = 0$ является следствием предиката $x^3 + y^3 = 0$.

3.5. 1) $I_P = \{-2\}$; 2) $I_P = \varnothing$; 4) $I_P = (-1; 2)$.

13) По условию

$$\vdash A \to B, \tag{1}$$
$$\vdash \overline{A} \to B. \tag{2}$$

Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{3}$$

Из (1) и (3) по ПЗ

$$\vdash \overline{B} \to \overline{A}. \tag{4}$$

Из (4) и (2) по правилу силлогизма

$$\vdash \overline{B} \to \overline{B}. \tag{5}$$

Из (5) по ранее доказанному $\vdash B$.
14) По условию

$$\vdash A \to B, \tag{1}$$
$$\vdash A \to \overline{B}. \tag{2}$$

Воспользуемся доказуемой формулой

$$\vdash (A \to B) \to \left(\overline{B} \to \overline{A}\right). \tag{3}$$

Из (1) и (3) по ПЗ

$$\vdash \overline{B} \to \overline{A}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) по правилу силлогизма

$$\vdash A \to \overline{A}. \tag{5}$$

Из формулы (5) по ранее доказанному $\vdash \overline{A}$.

2.12. 1) $R_{001}(A) = 1 \Rightarrow H = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, x_3\} \vdash A$. Вывод: $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, x_3, $x_3 \to (x_1 \vee x_2 \to x_3)$, $x_1 \vee x_3 \to x_3$.

2) $R_{100}(A) = 0 \Rightarrow H = \{x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\} \vdash \overline{A}$. Вывод: x_1, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $(x_1 \vee x_2 \to x_3) \to (x_1 \vee x_2 \to x_3)$, $x_1 \vee x_2 \to ((x_1 \vee x_2 \to x_3) \to x_3)$, $x_1 \to x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee x_2$, $(x_1 \vee x_2 \to x_3) \to x_3$, $\overline{x_3} \to \overline{(x_2 \vee x_2 \to x_3)}$, $\overline{x_1 \vee x_2 \to x_3}$.

3.7. 1) $I_{A\&B} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$;
2) $I_{B\&C} = \{2\}$;
3) $I_{C\&D} = \{3\}$;
4) $I_{B\&D} = \{6,12,18\}$;
5) $I_{\overline{B}\&D} = \{3,9,15\}$;
6) $I_{A\&\overline{D}} = \{1,2,4,7,8,11,13,14,16,17,19\}$;
7) $I_{\overline{B}\&\overline{D}} = \{1,5,7,11,13,17,19\}$;
8) $I_{A\&B\&D} = \{6,12,18\}$;
9) $I_{A\vee B} = M\setminus\{5,15\}$;
10) $I_{B\vee C} = M\setminus\{9,15\}$;
11) $I_{C\vee D} = \{2,3,5,6,7,9,11,12,13,15,17,18,19\}$;
12) $I_{B\vee D} = I_B \cup \{3,9,15\}$;
13) $I_{\overline{B}\vee D} = (M\setminus I_B) \cup \{6,12,18\}$;
14) $I_{B\vee\overline{D}} = I_B \cup \{1,5,7,11,13,17,19\}$;
15) $I_{A\vee B\vee D} = M\setminus\{5\}$;
16) $I_{C\to A} = I_{\overline{C}\vee A} = M\setminus\{5\}$;
17) $I_{D\to\overline{C}} = I_{\overline{D}\vee\overline{C}} = M\setminus\{3\}$;
18) $I_{A\to B} = I_{\overline{A}\vee B} = M\setminus\{1,3,7,9,11,13,17,19\}$;
19) $I_{(A\&C)\to\overline{D}} = I_{\overline{A}\vee\overline{C}\vee\overline{D}} = \{1,2,3,4,5,6\}$;
20) $I_{A\&D\to\overline{C}} = I_{\overline{A\&D}\vee\overline{C}} = I_{\overline{A\&D\&C}} = \complement I_{A\&D\&C} = M\setminus\{3\}$;

3.10. 1) $P(x)\,\&\overline{Q}(x)$;
2) $P(x)\,\&Q(x)$;
3) $P(x)\,\&\overline{Q}(x) \vee \overline{P}(x)\,\&Q(x)$;
4) $\overline{P}(x) \vee Q(x)$;
5) $P(x) \vee Q(x)$;
6) $\overline{P(x) \vee Q(x)}$;
7) $(P(x)\,\&Q(x)) \vee (P(x)\,\&R(x)) \vee (Q(x)\,\&R(x))$;
8) $(P(x)\,\&Q(x)) \vee (P(x)\,\&R(x))$;
9) $\overline{P(x)\vee Q(x)\vee R(x)}\vee P(x)\&R(x)\vee Q(x)\&R(x)$.

3.11. Истинны высказывания 3), 5), 6), 7), 8), а остальные высказывания ложны.

3.12. 1) Данное высказывание истинно при $a \in (-\infty, 0] \cup \cup [4, +\infty)$ и ложно при $a \in (0, 4)$;

2) например, при $a = -\frac{15}{4}$ данное высказывание истинно, а при $a = 0$ ложно;

3) например, при $a = -4$ данное высказывание истинно, а при $a = -20$ ложно;

4) например, при $a = -\frac{3}{2}$ данное высказывание истинно, а при $a > 2$ или $a < -2$ ложно.

3.13. Выражения 1), 4), 5), 6) являются формулами, а остальные — нет.

3.14. Истинные утверждения 1), 3), 4), 6), 7), а ложные — 2) и 5).

3.15. 1) а) — не тождественно истинный и не тождественно ложный предикат;

б) — тождественно ложный предикат;

в) — тождественно истинный предикат;

г) — тождественно ложный предикат.

2) Для предиката а) $\exists x P(x, y) = Q(y)$, $I_Q = \{2, 3, 4, \ldots\}$.

3) Истинны предложения б), ж), з), а остальные — ложны.

3.16. См. решение задачи **3.15.** п. 3) (б) и е)).

3.17. Парой предикатов, из которых один является отрицанием другого, является только пара пункта 3).

3.19. 1) $\forall x \left(\overline{A}(x) \vee \overline{B}(x) \vee \overline{C}(x)\right)$,

2) $\exists x A(x) \& \exists y \overline{B}(y)$,

3) $\exists x \overline{A}(x) \& \forall y \overline{B}(y)$,

4) $\exists x \left(A(x) \& \overline{B}(x)\right) \vee \forall x \left(\overline{S}(x) \vee R(x)\right)$,

5) $\forall x \left(\left(R(x) \& \overline{Q}(x)\right) \vee \left(Q(x) \& \overline{R}(x)\right)\right)$,

6) $\exists x \forall y \exists z \left(P(x, y, z) \& \overline{Q}(x, y, z)\right)$.

3.20. Формуле (*) равносильны формулы 2) и 7), а остальные не равносильны.

3.21. 1) Справедливость утверждения следует из равносильности $\exists x F(x) \equiv \overline{\forall x \overline{F}(x)}$;

2) справедливость утверждения следует из равносильности $\forall x F(x) \equiv \overline{\exists x \overline{F}(x)}$.

3.22. Приведем контрпример: пусть $P(x)$ — любой не тождественно истинный и не тождественно ложный предикат, а $Q(x)$ тоже не тождественно истинный и не тождественно ложный предикат. Тогда $\exists x P(x) = 1$, $\exists x Q(x) = 1$, $\exists x P(x) \& \& \exists x Q(x) = 1$, а $\exists x (P(x) \& Q(x)) = 0$ $(Q \equiv \overline{P})$.

3.23. Доказательство аналогично **3.22**.

3.24. 1) Равносильность справедлива, т. к.
$\exists x \forall y (F(x) \& G(y)) \equiv \exists x (F(x) \& \forall y G(y)) \equiv \exists x F(x) \& \forall y G(y)$,
$\forall y \exists x (F(x) \& G(y)) \equiv \forall y (\exists x F(x) \& G(y)) \equiv \exists x F(x) \& \forall y G(y)$;

2) Доказательство аналогично п. 1);

3) См. решение задачи **3.16**.

3.25. **Указание.** Для доказательства достаточно данную формулу упростить с помощью равносильных преобразований.

3.27. 1) $I_A \subset I_B$;

2) $I_A = \varnothing$, I_B — любое подмножество M;

3) $I_A \subset I_B$ или $I_A \cap I_B = \varnothing$.

3.28. 1) выполнима, если $P(x)$ — не тождественно ложный предикат;

2) выполнима, если $P(x)$ — тождественно истинный предикат.

3.29. 1) нельзя; 2) можно.

3.30. **Указание.** Путем равносильных преобразований доказать, что данная формула является тождественно истинной.

3.31. Общезначимыми являются формулы 1), 3), 5), 9), 10), 11), 13), 14), 17).

3.32. **Указание.** Подвергнуть данную формулу равносильным преобразованиям.

3.33. 1) $\forall x \exists y \forall z \exists u \overline{P}(x, y, z, u)$;

2) $\exists x \left(\overline{R}(x) \vee Q(x, y)\right)$;

3) $\forall x \left(p \& \overline{R}(x)\right)$;

4) $\exists x \forall y \left(A(x) \& \overline{A}(y) \vee A(y) \& \overline{A}(x)\right)$;

5) $\forall x \exists y \left(\overline{A}(x) \vee B(y)\right)$;

6) $\exists x \exists z \forall y \left(P(x, y) \& Q(z, y)\right)$;

7) $\exists x \forall y \forall z \left(P(x, y) \vee Q(x, z)\right)$;

8) $\forall x \exists y \forall z \left(\overline{P}(x, y) \vee Q(y, z)\right)$.

3.34. 1) $\forall x \in M \forall y \in M \left((x = y) \vee (x > y) \vee (x < y)\right)$;

2) $\exists L \in \mathbf{R}_+ \forall x \in M \left(|f(x)| \leqslant L\right)$;

3) $\forall x \in M \left((-x \in M) \& (f(-x) = f(x))\right)$;

4) $\exists T \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \, \forall x \in M \left((x \pm T \in M) \& (f(x \pm T) = f(x))\right)$;

5) $\forall x_1 \in M \forall x_2 \in M \left((x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))\right)$.

3.35. 1) $\exists x \in M \exists y \in M \left((\overline{x = y}) \& (\overline{x > y}) \& (\overline{x < y})\right)$;

2) $\forall L \in \mathbf{R}_+ \exists x \in M \left(|f(x)| > L\right)$;

3) $\exists x \in M \left((-x \notin M) \vee (f(x) \neq f(-x))\right)$;

4) $\forall T \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \, \exists x \in M \left((x \pm T \notin M) \vee (f(x \pm T) \neq f(x))\right)$;

5) $\exists x_1 \in M \exists x_2 \in M \left((x_1 < x_2) \& (f(x_1) \geqslant f(x_2))\right)$.

3.36. Доказательством несправедливости утверждений являются контрпримеры:

1) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

2) гармонический ряд;

3) равнобочная трапеция;

4) функция $y = \operatorname{sgn}(x)$ на $[-1, 1]$;

5) функция $y = x^2$ на сегменте $[-1, 1]$;

6) числовая последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$;

7) числовая последовательность с общим членом $a_n = (-1)^n$;

8) формула $\exists x P(x)$, очевидно, является выполнимой, но не общезначимой;

9) функция $y = x^3$, $x_0 = 0$;

10) функция $y = x^4$, $x_0 = 0$.

3.38. 1) Условие $x = 0$ является достаточным, но не является необходимым;

2) условие $x \geqslant -3$ является необходимым, но не является достаточным;

3) условие $x > -2$ является необходимым, но не является достаточным;

4) условие $x \geqslant -1$ и $x \leqslant 3$ является достаточным, но не является необходимым;

5) условие $x \geqslant -1$ и $x < 10$ не является ни необходимым, ни достаточным;

6) условие $-2 \leqslant x \leqslant 10$ является необходимым, но не является достаточным.

3.39. 1. Необходимо, но не достаточно.

2. Достаточно, но не необходимо.

3. Достаточно, но не необходимо.

4. Необходимо, но недостаточно.

5. Достаточно, но не необходимо.

6. Необходимо, но недостаточно.

7. Необходимо и достаточно.

8. Необходимо и достаточно.

9. Необходимо, но недостаточно.

10. Достаточно, но не необходимо.

3.40. 1. Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно одно из условий: противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, или две противоположные стороны равны и параллельны.

2. Необходимыми, но недостаточными признаками параллелограмма являются:

а) пара противоположных сторон четырехугольника параллельна,

б) две противоположные стороны четырехугольника равны.

3. Достаточными, но не необходимыми признаками параллелограмма являются:

а) в четырехугольнике все углы прямые,

б) в четырехугольнике диагонали взаимно-перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

4. $|a| < 2$.

5. $a = \frac{1}{2}$.

6. $q = 0$.

3.41. Ответ Коли равносилен тому, что сказали родители.

Глава 4

4.1. Любая примитивно рекурсивная функция получается из простейших функций с помощью конечного числа применения операций суперпозиции и примитивной рекурсии. Но простейшие функции $\lambda(x)$, $O(x)$ и $I_n^m(x_1, \ldots, x_n)$ всюду определены, а применение к ним операции суперпозиции и схемы примитивной рекурсии приводит к функциям, которые всюду определены.

4.2. Функции $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$ и $h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})$ получаются из функций $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $I_n^m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ суперпозициями:

1) $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f\left[I_n^2(x_1, \ldots, x_n), I_n^1(x_1, \ldots, x_n), I_n^3(x_1, \ldots, x_n), \ldots, I_n^n(x_1, \ldots, x_n)\right]$;

2) $\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f\left[I_n^2(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ I_n^n(x_1, \ldots, x_n), I_n^1(x_1, \ldots, x_n)\right]$;

3) $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f\left[I_{n+1}^1(x_1, \ldots, x_{n+1}), \ldots, I_{n+1}^n(x_1, \ldots, x_{n+1})\right]$;

4) $h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) = f\left[I_{n-1}^1(x_1, \ldots, x_{n-1}), I_{n-1}^2(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, I_{n-1}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\right]$.

4.3. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получена из функций $O(x)$ и $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с помощью суперпозиции и схем примитивной рекурсии. Тогда $f(0, \ldots, 0) = 0$, и из условия $x_1 \leqslant 1$,

$x_2 \leqslant 1, \ldots, x_n \leqslant 1$ следует, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1$. Функции $x + 1$ и $2x$ этим двум условиям одновременно не удовлетворяют.

4.4. 1) Функция $P(x, y) = x \cdot y$ может быть получена из простейших функций с помощью схемы примитивной рекурсии. Действительно, т. к. для функции $P(x, y)$ верны тождества

$$\begin{cases} P(0, x) = x \cdot 0 = 0 = O(x), \\ P(y+1, x) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = x + P(x, y) = S(x, P(x, y)), \end{cases}$$

то функция $P(x, y)$ получается по схеме примитивной рекурсии из функций $O(x)$ и $S(x, y) = x + y$, которые являются общерекурсивными и, значит, функция $P(x, y)$ общерекурсивна.

2) Функция $G(x, y) = x^y$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} x^0 = 1, \\ x^{y+1} = x^y \cdot x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} G(0, x) = C_1(x), \\ G(y+1, x) = P(G(x, y), x) \end{cases}.$$

Следовательно, функция $G(x, y)$ может быть получена по схеме примитивной рекурсии из общерекурсивных функций C_1 и P и поэтому является общерекурсивной.

3) Функция $\delta(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} \delta(0) = 0, \\ \delta(y+1) = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \delta(0) = O(y), \\ \delta(y+1) = I_2^2(\delta(y), y) \end{cases}.$$

Значит, функция $\delta(x)$ получается по схеме примитивной рекурсии из общерекурсивных функций, и поэтому сама является общерекурсивной.

4) Чтобы доказать, что усеченная разность является общерекурсивной функцией, докажем предварительно, что общерекурсивной функцией является функция одной переменной $x \dot{-} 1$, которая получается из усеченной разности путем фиксирования второго аргумента. Действительно, функция $x \dot{-} 1$, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{cases} 0 \dot{-} 1 = 0 = O(x), \\ (x+1) \dot{-} 1 = x = I_2^1(x, y), \end{cases}$$

и, значит, может быть получена из простейших функций по схеме простейшей рекурсии и поэтому является общерекурсивной.

Теперь ясно, что функция $x\dot{-}y$ при любых x и y удовлетворяет равенствам:

$$\begin{cases} x\dot{-}0 = x = I_2^1(x, y), \\ x\dot{-}(y+1) = \left(x\dot{-}y\right)\dot{-}1 \end{cases}.$$

Эти тождества показывают, что усеченная разность может быть получена из функций $\phi(x) = I_2^1(x, y)$ и $\psi(z, x, y) = \lambda(z)$ по схеме примитивной рекурсии и значит, является общерекурсивной.

5) Функция $|x-y|$ может быть представлена в виде:

$$|x-y| = \left(x\dot{-}y\right) + \left(y\dot{-}x\right) = S\left(x\dot{-}y, y\dot{-}x\right),$$

т. е. функция $|x-y|$ получается из общерекурсивных функций S, $x\dot{-}y$, $y\dot{-}x$ с помощью операции суперпозиции и, следовательно, является общерекурсивной.

6) Функцию $\mathrm{sgn}\,(x)$ можно определить с помощью простейшей рекурсии, используя равенства:

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}\,(0) = 0, \\ \mathrm{sgn}\,(y+1) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathrm{sgn}\,(0) = O(x), \\ \mathrm{sgn}\,(y+1) = C_1(y) \end{cases}.$$

7) Функция $\overline{\mathrm{sgn}}\,(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$ и, следовательно, $\overline{\mathrm{sgn}}\,(x) = 1\dot{-}\mathrm{sgn}\,(x)$. Таким образом, функция $\overline{\mathrm{sgn}}\,(x)$ получается с помощью операции суперпозиции из функций $\dot{-}$ и $\mathrm{sgn}\,(x)$, каждая из которых общерекурсивна и поэтому функция $\overline{\mathrm{sgn}}\,(x)$ общерекурсивна.

8) Функция $x!$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ (y+1)! = y!\,(y+1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0! = C_1(x), \\ (y+1)! = I_3^1(P(y!, \lambda(y)), x, y), \end{cases}$$

т. е. функция $x!$ может быть получена по схеме примитивной рекурсии из общерекурсивных функций C_1 и $I_3^1(P(y!, y+1), x, y)$ и поэтому функция $x!$ общерекурсивна.

4.5. Программа реализации на машине Тьюринга алгоритма вычисления функции имеет вид:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1		4Нq_0	5Нq_0	6Нq_0	7Нq_0	8Нq_0	9Нq_0	0Лq_2	1Лq_2	2Лq_2	3Лq_2
q_2	1Нq_0	1Нq_0	2Нq_0	3Нq_0	4Нq_0	5Нq_0	6Нq_0	7Нq_0	8Нq_0	9Нq_0	0Лq_2

4.6. Программа реализации на машине Тьюринга алгоритма вычисления функции $\phi(n) = 0$ имеет вид:

	a_0	$\vert$
q_1	a_0Нq_2	$\vert$ Пq_1
q_2	a_0Лq_3	
q_3	a_0Нq_0	a_0Лq_3

Здесь внешний алфавит машины — есть множество символов $\{a_0, |\}$, а начальная конфигурация может быть любой, при которой управляющая головка обозревает клетку, содержащую палочку.

4.7. Внешний алфавит машины, очевидно, состоит из двух символов $\{a_0, |\}$. Пусть при начальной конфигурации запись на ленте воспринимается машиной в стандартном положении. Своевременной остановки машины можно добиться путем смены состояний машины после каждого такта. Это и учтено программой машины, внутренний алфавит которой содержит три состояния — q_1, q_2, q_3.

	a_0	$\vert$
q_1	a_0Пq_1	a_0Лq_2
q_2	a_0Пq_2	a_0Лq_3
q_3	a_0Нq_0	$\vert$ Нq_0

4.8. Очевидно, для решения задачи машине в начальном состоянии при конфигурации

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & a_0 \\ & q_1 & & & & \end{array}$$

необходимо заменить букву x_1 на a_0 и, двигаясь вправо до первой пустой клетки, вписать в нее букву x_1. Т. к. в алфавите всего две буквы a_1 и a_2, то для правильного решения задачи необходимо еще два состояния: q_2 вписывает букву a_1, если $x_1 = a_1$, q_3 вписывает букву a_2, если $x_1 = a_2$. Поэтому программа машины имеет вид:

	a_0	a_1	a_2
q_1		$a_0\Pi q_2$	$a_0\Pi q_3$
q_2	$a_1\text{H}q_0$	$a_1\Pi q_2$	$a_2\Pi q_2$
q_3	$a_2\text{H}q_0$	$a_1\Pi q_3$	$a_2\Pi q_3$

4.9. Ясно, что в начальной конфигурации управляющая головка машины должна обозревать пустую клетку, первую от слова x справа, если $x \neq 0$, и любую, если $x = 0$:

	a_0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	a_0
						q_1

В первом такте работы машины необходим сдвиг ее влево и переход в новое состояние q_2. Если и здесь обозревается пустая клетка, то $x = 0$, и машине необходим сдвиг вправо и переход в стоп-состояние. Если в состоянии q_2 управляющая головка обозревает символ $|$, то $x \neq 0$, и палочку следует оставить, переходя влево в новом состоянии q_3. Если при этом обозревается пустая клетка, то процесс вычисления закончен, и нужно перейти вправо в стоп-состояние. Если же в состоянии q_3 обозревается вновь символ $|$, то его нужно стереть и перейти влево в том же состоянии q_3. В этом состоянии машина должна работать до тех пор, пока управляющая головка не выйдет на пустую клетку. На этом процесс вычисления заканчивается, и необходимо для оформления результата перейти в состояние q_4, которое будет совершать сдвиги машины до единственного оставшегося символа $|$, на котором и следует перейти в стоп-состояние. Т. о., программа машины имеет вид:

	a_0	$\vert$
q_1	a_0Лq_2	
q_2	a_0Пq_0	$\vert$ Лq_3
q_3	a_0Пq_4	a_0Лq_3
q_4	a_0Пq_4	$\vert$ Нq_4

4.10. Нетрудно видеть, что, проводя рассуждения как и в задаче 4.9, можно ограничиться тремя активными состояниями q_1, q_2, q_3 и получить программу машины в виде:

	a_0	$\vert$
q_1	$\vert$ Лq_2	
q_2	a_0Пq_0	$\vert$ Нq_3
q_3	a_0Нq_4	a_0Лq_3

4.12. Для решения поставленной задачи работу машины Тьюринга можно представить следующим образом: во внешний алфавит машины включены четыре буквы: $\{a_0, |, \alpha, \beta\}$. Символ | (палочка) обозначает единицу, а α и β играют роль временных палочек. Число записано на ленте в виде набора n палочек. Это слово воспринимается машиной в стандартном положении. Например,

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & | & | & | & | & a_0 \\ & & & & q_1 & \end{array}$$

В первом такте работы машины осуществляется сдвиг вправо, и машина остается в состоянии q_1. При этом машина вписывает в пустую клетку букву α, сдвигается влево и переходит в состояние q_2. В состоянии q_2 машина в каждом такте сдвигается влево, оставляя без изменений буквы α и β. При достижении буквы | в состоянии q_2 буква | заменяется на β, осуществляется сдвиг влево и переход в состояние q_3. Если при этом управляющая головка обозревает пустую клетку, то машина переходит в состояние q_4. Если же управляющая головка в состоянии машины q_3 обозревает букву |, то, оставаясь на месте, машина переходит в состояние q_1. В состоянии q_1 машина движется вправо до первой пустой клетки, оставляя при этом на месте буквы $|$, α, β. Достигнув пустой клетки в состоянии q_1, машина вписывает в нее букву α, и далее процесс повторяется. Машина будет работать до тех пор, пока все палочки не будут заменены на буквы β (столько же букв α будет вписано в пустые клетки).

При этом машина перейдет в состояние q_4. В состоянии q_4 машина двигается вправо, заменяя буквы α и β на палочки. Достигнув пустой клетки в состоянии q_4, машина переходит в стоп-состояние. Следовательно, программа машины имеет вид:

	a_0	$\vert$	α	β
q_1	αЛq_2	$\vert$ Пq_1	αПq_1	βПq_1
q_2		βЛq_3	αЛq_2	βЛq_2
q_3	a_0Пq_4	$\vert$ Нq_1		
q_4	a_0Нq_0		$\vert$ Пq_4	$\vert$ Пq_4

4.13. Будем записывать число n на ленте в виде набора n палочек. Работу машины Тьюринга можно представить следующим образом. Пусть начальная конфигурация совпадает со стандартным положением машины. Тогда машина начинает двигаться влево, меняя состояния q_1 на q_2, q_2 на q_3 и т. д., q_{p-1} на q_p, а q_p на q_1. Тогда возможны два случая:

1) машина увидит пустую клетку в состоянии q_1 (это значит, что число непустых клеток было кратно p). Тогда машина переходит в состояние q_{p+1} и далее «стирает» все палочки, ставит одну палочку и переходит в стоп-состояние;

2) машина увидит пустую клетку в состоянии q_k $(k \neq 1)$ (это значит, что число непустых ячеек было не кратно p). Тогда машина переходит в состояние q_{p+3} и далее «стирает» все палочки и останавливается.

В связи со сказанным программа машины запишется так:

	a_0	$\mid$
q_1	$a_0 \Pi q_{p+1}$	$\mid Л q_2$
q_2	$a_0 \Pi q_{p+3}$	$\mid Л q_3$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
q_{p-1}	$a_0 \Pi q_{p+3}$	$\mid Л q_p$
q_p	$a_0 \Pi q_{p+1}$	$\mid Л q_1$
q_{p+1}	$\mid Н q_0$	$a_0 Н q_{p+2}$
q_{p+2}	$a_0 \Pi q_{p+1}$	
q_{p+3}	$a_0 Н q_0$	$a_0 Н q_{p+4}$
q_{p+4}	$a_0 \Pi q_{p+3}$	

В частном случае при $p = 3$ эта программа будет иметь вид:

	a_0	$\mid$
q_1	$\mid \Pi q_4$	$\mid Л q_2$
q_2	$a_0 \Pi q_6$	$\mid Л q_3$
q_3	$a_0 \Pi q_6$	$\mid Л q_1$
q_4	$\mid Н q_0$	$a_0 Н q_5$
q_5	$a_0 \Pi q_4$	
q_6	$a_0 Н q_0$	$\mid Н q_7$
q_7	$a_0 \Pi q_6$	$a_0 \Pi q_6$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1991.
2. *Игошин В. И.* Задачник-практикум по математической логике. М.: Просвещение, 1986.
3. *Кейслер Г., Чен Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
4. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1975.
5. *Лихтарников Л. М.* Задачи мудрецов: Книга для учащихся. М.: Просвещение: АО "Учебная литература", 1996.
6. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
7. Математическая логика / Под общей редакцией А. А. Столяра и др. Минск: Высшая школа, 1991.
8. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
9. *Михайлов А. Б., Плоткин А. И.* Введение в алгебру и математический анализ. Сборник задач 1. Высказывания. Предикаты. Множества. СПб., 1992.
10. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.
11. *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Мир, 1960.
12. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. Задачник-практикум по математической логике

Леонид Моисеевич ЛИХТАРНИКОВ
Тамара Геннадьевна СУКАЧЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
Задачник-практикум и решения

Учебное пособие

Издание четвертое, стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 24.04.08.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 23,13. Тираж 2000 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru