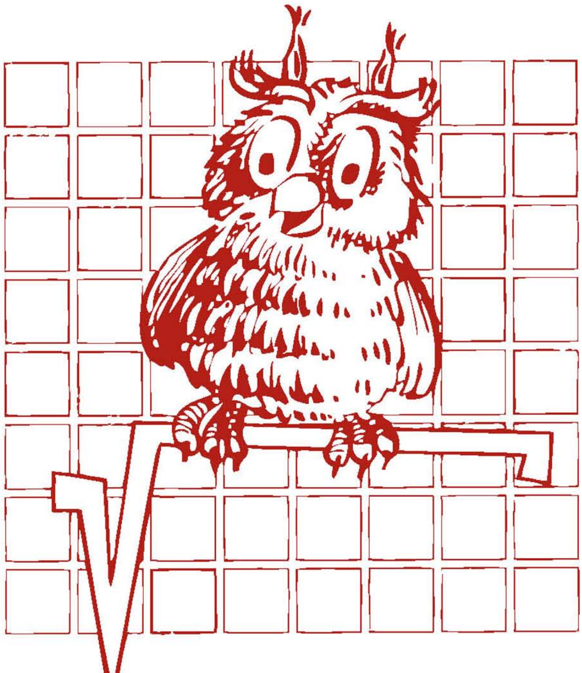
А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ



ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ

А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Под редакцией В. О. Бугаенко

Издание девятое, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 51(023)
ББК 22.12
К19

Художник: В. К. Ковальджи

Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.

К19 Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. — 9-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2015. — 96 с.

ISBN 978-5-4439-0332-3

В книге описан ряд классических идей решения олимпиадных задач, которые для большинства школьников являются нестандартными. Каждая идея снабжена комментарием, примерами решения задач и задачами для самостоятельного решения. Приведены подборки задач олимпиадного и исследовательского типов (всего 200 задач), которые сгруппированы по классам.

Сборник адресован старшеклассникам, учителям, руководителям кружков и всем любителям математики.

Предыдущее издание книги вышло в 2014 г.

ББК 22.12

ISBN 978-5-4439-0332-3

© Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., 2009
© МЦНМО, 2009

Содержание

Предисловие

Решение олимпиадных задач служит хорошей подготовкой к будущей научной деятельности, заостряет интеллект.

На основе опыта работы в Вечерней математической школе отобраны задачи, часто используемые на занятиях математических кружков. Эти задачи, интересные и сами по себе, служат материалом для описания ряда общематематических идей решения задач.

В книге описаны классические идеи[1] решения олимпиадных задач. К этим идеям подобраны примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Сложность задач существенно различна. Для решения некоторых из них достаточно смекалки, логики и пространственного воображения. Другие задачи требуют некоторого опыта, интуиции и наблюдательности. Чтобы решить наиболее трудные задачи потребуется умение организовать работу над задачей (прояснить ситуацию, выявить круг идей, подобрать удобный «язык») и овладеть определённой техникой.

В части II приведены задачи олимпиадного и исследовательского типов, которые сгруппированы по классам.

Кроме задач и идей решения, в книге есть словарик математических понятий и советы участникам олимпиады.

Мы благодарим Григория Кондакова за большое участие в подготовке темы «Процессы».

Мы будем благодарны читателям за любую критику, как по содержанию, так и по форме. Мы будем рады, если читатели найдут другие интересные идеи и пришлют нам соответствующие подборки задач. Мы обязательно выразим за это благодарность в следующем издании.

Адрес: 119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
E-mail: *koval-dji@yandex.ru, Александр Кириллович*

[1] Отметим, что слова «идея» и «метод» иногда используются как синонимы, хотя «метод» — это алгоритм решения, а «идея» — это путь к решению.

Как работать с книгой

Осваивать идеи и методы решения задач можно двумя способами: 1) сначала прочитать описание идеи, потом разобрать примеры, потом порешать задачи на эту тему, или 2) сразу начать с задач, чтобы самим найти идею, а уже потом прочитать комментарии и разобрать примеры.

Решать задачи мы советуем не все, а выбирая те, которые вам интересны.

Если какая-то задача особенно понравилась, то, решив её, не переходите сразу к следующей, а подумайте еще над этой. Попробуйте понять:

- какие идеи привели к решению, чем эта задача похожа или не похожа на другие задачи;
- где в решении использованы те или иные данные, перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить;
- можно ли данные и ответ поменять местами, т. е. верно ли обратное утверждение;
- можно ли обобщить задачу или вывести интересные следствия.

Не стремитесь решать много задач. Если вы решите за день одну–две задачи и хорошо всё продумаете, то это будет лучше, чем решить десять задач поверхностно. Важно не количество решенных задач, а то новое, что удалось понять.

Если у вас после решения хорошей задачи поднимается настроение — это признак успешной работы.

Часть I

Идеи и методы решения задач

Поиск родственных задач

Если задача трудна, то попытайтесь найти и решить более простую «родственную» задачу. Это часто даёт ключ к решению исходной. Помогают следующие соображения:

- рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;
- разбить задачу на подзадачи (например, необходимость и достаточность);
- обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);
- свести задачу к более простой (см. тему «Причёсывание задач»).

Пример 1. В угловой клетке таблицы 5×5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

Решение. Возьмём квадрат поменьше, размера 2×2, в котором стоят один плюс и три минуса. Можно ли сделать все знаки плюсами? Несложный перебор показывает, что нельзя.

Воспользуемся этим результатом: выделим в квадрате 5×5 квадратик 2×2, содержащий один плюс. Про него уже известно, что сделать все знаки плюсами нельзя. Значит, в квадрате 5×5 и подавно.

Пример 2. Постройте общую внешнюю касательную к двум окружностям.

Решение. Если одна из окружностей будет точкой, то задача станет легче (вспомните, как из точки провести касательную).

Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус меньшей окружности, O_2 и r_2 — центр и радиус большей окружности. Рассмотрим прямую, проходящую через O_1 и параллельную общей касательной. (рис. 1). Эта прямая удалена от O_2 на расстояние $r_2 - r_1$, значит, является касательной к окружности с центром O_2 и радиусом $r_2 - r_1$. Построим эту окружность и проведём из точки O_1 касательную к ней. Пусть C — точка касания. На прямой O_2C лежит искомая точка касания.

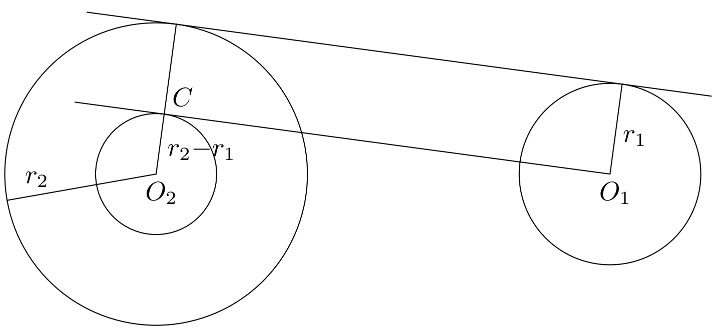


Рис. 1

Задачи

- **1.** Легко распилить кубик $3 \times 3 \times 3$ на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается перекладывать части перед тем как их пилить?
- **2.** Докажите, что в выпуклом n-угольнике сумма внутренних углов равна $180°(n-2)$.
- **3.** Докажите, что $n(n+1)(n+2)$ делится на 6 при любом целом n.

▸ **4.** Решите уравнение $(x^2+x-3)^2+2x^2+2x-5=0$.
▸ **5** (для тех, кто знаком с понятием инверсии). Постройте окружность, касательную к трём данным.
▸ **6** Постройте общую внутреннюю касательную к двум окружностям.

Причёсывание задач (или «можно считать, что...»)

Известно, что человек некультурный ест как придётся, а культурный сначала приготовит пищу. Так и некультурный математик решает задачу как придётся, а культурный «приготовит» задачу, т. е. преобразует её к удобному для решения виду.

Приготовление задачи может состоять в переформулировке условия на более удобном языке (например, на языке графов), отщеплении простых случаев, сведении общего случая к частному.

Такие преобразования сопровождаются фразами «в силу симметрии», «явно не хуже», «для определённости», «не нарушая общности», «можно считать, что...».

Пример 1. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.

Решение. «Лобовое» решение состоит в рассмотрении количеств мальчиков, ходивших только в первый поход, ходивших только во второй поход, ходивших в оба похода, то же для девочек, составлении и решении системы уравнений и неравенств. Этого делать не хочется, поэтому будем избавляться от лишних параметров, сводя задачу к её частному случаю. Мы проделаем это в несколько шагов. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг.

Будем увеличивать долю мальчиков в классе, сохраняя условие задачи.

1 шаг. «Впишем» всех девочек в число участников обоих походов. От этого доля мальчиков в походах уменьшится, а в классе — не изменится. Это позволит добавить новых мальчиков в каждый поход, увеличив их долю в классе. Итак, можно считать, что все девочки ходили в оба похода.

2 шаг. Если мальчик ходил в первый поход, то освободим его от посещения второго. Доля мальчиков в походах уменьшится. Добавим новых мальчиков в пределах $2/5$ участников походов. Итак, можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход.

3 шаг. Если в одном походе было меньше мальчиков, чем в другом, то добавим в класс мальчиков. Доля мальчиков в походах останется не больше $2/5$, а доля мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков было в походах поровну.

4 шаг. Задача стала тривиальной: в обоих походах были все девочки и ровно половина мальчиков. Обозначим число девочек $3x$, тогда мальчиков в походах было не больше $2x$, а во всём классе — не больше $4x$. Максимальное число мальчиков в классе $4x$, а это $4/7$ класса.

Пример 2. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

Решение. Трудность состоит в том, что положение параллелограмма внутри треугольника произвольное. Будем преобразовывать параллелограмм, не уменьшая его площадь (рис. 2).

1 шаг. «Удлиним» параллелограмм так, чтобы одна его вершина попала на сторону треугольника.

2 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы его сторона попала на сторону треугольника.

3 шаг. «Удлиним» параллелограмм вдоль общей с треугольником стороны так, чтобы все четыре вершины попали на стороны треугольника.

4 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы один его угол совпал с углом треугольника.

5 шаг. Теперь задача решается легко. Например, покроем параллелограмм дополняющими его треугольниками (один из треугольников отражается центрально симметрично относительно середины его общей с параллелограммом стороны, а второй параллельно переносится).

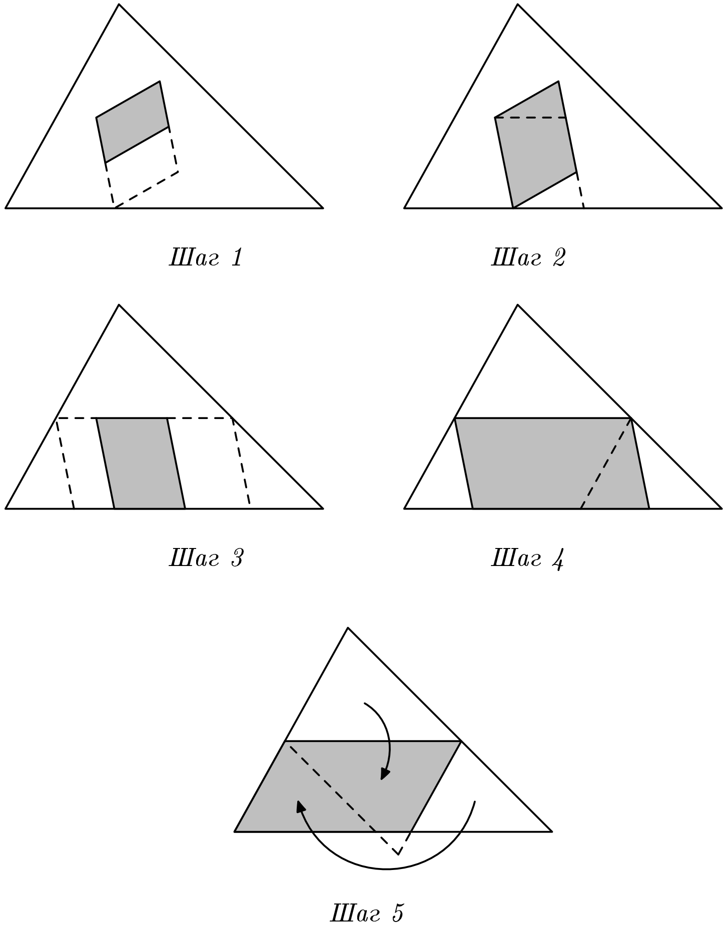


Рис. 2

Пример 3. В 9 ячейках записаны числа: в первой — единица, в остальных — нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке?

Решение. Нетрудно получить число $\frac{1}{2^8}$, усредняя число в первой ячейке со всеми остальными по очереди. Труднее доказать, что меньше получить нельзя.

Изменим условие задачи. Пусть после каждой операции все ненулевые числа становятся равными наименьшему из них. Эта новая операция даёт результат в каждой ячейке не больше, чем исходная операция.

Теперь всё ясно: новая операция либо ничего не меняет (если числа равны), либо уничтожает один нуль и уменьшает все числа в два раза. Поскольку новая операция не позволяет получить число меньшее $\frac{1}{2^8}$, то исходная операция — тем более.

Задачи

▸ **1.** В кладовой лежат 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём левых и правых поровну — по 150. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.

▸ **2.** Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади параллелограмма.

▸ **3.** На плоскости нарисовано несколько точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Отрезки могут выходить из одной точки, но не должны пересекаться. Кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что при любых ходах игроков победителем будет один и тот же, а кто именно — определяется лишь начальной позицией.

Указание. Игра заканчивается, если рисунок представляет собой многоугольник, разбитый на треугольники.

▸ **4.** Дан выпуклый многоугольник площади 9. Его пересекают десять параллельных прямых на расстоянии 1 друг от друга. Докажите, что сумма длин отрезков, высеченных многоугольником на этих прямых, не более десяти.

▸ **5.** В кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее трёх рёбер. (Аналогично, в n-мерном кубе покрашено не менее n рёбер.)

▸ **6*.** Дан многогранник с n вершинами и точка A внутри него. Пусть $\vec{e_i}$ — единичный вектор, направленный из точки A к i-й вершине многогранника. Докажите, что $|\sum \vec{e_i}| < n - 2$.

▸ **7*.** Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{n^k} \leqslant 1$.

Указание. Попробуйте заменить слова максимальной длины на меньшие слова.

Доказательство от противного

Рассуждают примерно так: «Допустим, исходное утверждение неверно. Если из этого можно вывести противоречие, то исходное утверждение верно».

Пример 1. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Решение. Предположим противное, пусть p_1, p_2, $\ldots$, p_n — все простые числа. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \ldots p_n +$ 1. Оно не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, иными словами, ни на одно простое число. Получаем противоречие с тем, что любое число имеет хотя бы один простой делитель.

Пример 2. Пять мальчиков нашли девять грибов. Докажите, что хотя бы двое из них нашли грибов поровну.

Решение. Допустим, что мальчики нашли разное количество грибов. Расставим их по возрастанию числа найденных грибов. Первый собрал не меньше нуля, второй — не меньше одного, третий — не меньше двух, четвёртый не меньше трёх, пятый — не меньше четырёх. Всего — не меньше десяти. Противоречие.

Пример 3. Докажите, что не существует треугольной пирамиды, у которой к каждому ребру примыкает тупой угол одной из граней.

Решение. Допустим, что такая пирамида существует. Поскольку в треугольнике против тупого угла лежит самая длинная сторона, то для каждого ребра найдётся более длинное ребро. Это невозможно, так как количество рёбер у пирамиды конечно. Противоречие.

Замечание. Вместе с рассуждением от противного мы использовали «Метод крайнего».

Пример 4. Докажите, что число $\log_2 3$ иррационально.

Решение. Предположим противное. Пусть $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Тогда $2^{\frac{p}{q}} = 3$ или $2^p = 3^q$. Последнее равенство невозможно, ибо чётное число не равно нечётному. Противоречие.

Задачи

- ▸ **1.** По кругу расставлены 100 чисел. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.
- ▸ **2.** На плоскости отмечено несколько точек. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что все отмеченные точки являются вершинами выпуклого многоугольника.
- ▸ **3.** Докажите, что если $(m-1)!+1$ делится на m, то число m — простое.
- ▸ **4.** Существует ли выпуклый многоугольник, у которого больше трёх острых углов?
- ▸ **5.** Докажите, что не существует многогранника, у которого число граней нечётно и каждая грань имеет нечётное число вершин.
- ▸ **6.** Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, имеющих вид а) $4k+3$; б) $3k+2$; в) $6k+5$.

Чётность

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определённую чётность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую чётность, невозможны. Иногда эту величину (функцию) надо сконструировать, например, рассмотреть чётность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в два цвета. Чётность в играх — это возможность сохранить чётность некоторой величины при своем ходе (см. темы «Инварианты», «Делимость», «Игры»).

Пример 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Решение. Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, число прыжков вправо равно числу прыжков влево, поэтому общее число прыжков чётно.

Пример 2. Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

Решение. Допустим, что существует. Тогда пересекающиеся звенья образуют пары. Следовательно, количество звеньев должно быть чётным. Противоречие.

Пример 3. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.

Решение. Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным — нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук чётно. Общее число рук у чётных марсиан чётно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже чётно. Следовательно, число нечётных марсиан чётно.

Задачи

► **1.** Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей ?

► **2.** Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n?

► **3.** В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

► **4.** Даны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

► **5.** Все кости домино выложили в цепочку по правилам игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может оказаться на другом конце?

► **6.** Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

► **7.** На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

► **8.** В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы». Означают ли одно и то же слова «уыу» и «ыуы» ?

► **9.** На доске написаны числа 1, 2, …, 101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

► **10.** Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на 90°. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

► **11.** В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

Обратный ход

Если в задаче задана некоторая операция, и эта операция обратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. (Например, надо вынести шкаф из комнаты. Пройдёт ли он через дверь? Пройдёт, потому что через дверь его внесли.) Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

Пример 1. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

Решение. Начнем с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! И это будет 20-й день.

Ответ: за 19 дней.

Пример 2. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Решение. Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было по 20, а у Толи — 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т. е. у Пети было 10, у Толи — 40, а у Вани — 70. И, наконец, возьмём половину фантиков у Вани и Толи и вернем Пете.

Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани — 20, а у Толи — 35.

Пример 3. В квадрате $ABCD$ на стороне AB внутри квадрата построили равнобедренный треугольник ABE с углами при основании AB равными $15°$. Докажите, что треугольник CDE правильный.

Решение. Решим обратную задачу: докажем, что если треугольник CDE_1 правильный, то у треугольника ABE_1 углы при основании AB равны $15°$ (рис. 3).

Поскольку $\angle ADE_1 = 30°$ и $DE_1 = AD$, то $\angle E_1AD = \angle AE_1D = 75°$. Значит, $\angle E_1AB = 15°$. Аналогично $\angle E_1BA = 15°$.

Итак, мы доказали, что вершина E_1 правильного треугольника CDE_1 попадает как раз в ту точку E, которая дана в условии задачи, т. е. $E = E_1$. Значит, треугольник CDE правильный.

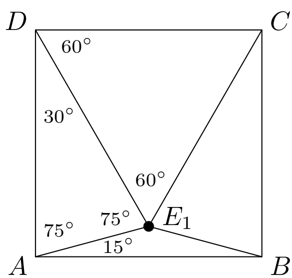


Рис. 3

Задачи

► **1.** Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несёшь, и ещё одно». То же ему сказали второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

► **2.** Трём братьям дали 24 бублика так, что каждый получил столько бубликов, сколько ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: «Я, — сказал он, — оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же». Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

► **3.** Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

► **4*.** На Олимпе есть игра: всем богам наливают поровну нектара, затем один из них переливает другому столько нектара, сколько у того уже было, и это повторяется несколько раз. Однажды удалось слить весь нектар в чашу Зевса. Докажите, что число богов было степенью двойки.

Подсчёт двумя способами

При составлении уравнений выражают некоторую величину двумя способами (например, площадь, путь или время). Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают неравенство или величины разной чётности. Эта идея тесно связана с идеей инварианта. Она бывает источником противоречия (см. тему «Доказательство от противного»).

Пример 1. Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5×5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

Решение. Допустим, что можно. Найдем сумму всех чисел. Если считать её по строкам, то сумма будет положительной, а если по столбцам — то отрицательной. Противоречие. Значит, так расставить числа нельзя.

Пример 2. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Решение. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек. Найдем общее количество «дружб» двумя способами. Поскольку каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, это число равно $4m$. С другой стороны, каждая девочка дружит с пятью мальчиками, значит это число равно $5d$. Получаем уравнение $4m = 5d$. Поскольку $m + d = 27$, то $m = 15$, $d = 12$.

Пример 3. Найдите сумму геометрической прогрессии

$$S_n = 1 + 3 + 9 + \ldots + 3^n.$$

Решение. Заметим, что зная S_n, можно получить следующую сумму S_{n+1} двумя способами: либо добавить 3^{n+1}, либо умножить все слагаемые на 3, а потом прибавить 1. Получаем уравнение: $S_n + 3^{n+1} = 3 \cdot S_n + 1$. Отсюда $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Пример 4. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, O — точка пересечения медиан AA_1 и CC_1. Проведём отрезки BO и OB_1. Обозначим площади шести треугольников, на которые разбился треугольник ABC как на рис. 4. Воспользуемся тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Действительно, у этих треугольников равны основания и общая высота. Поэтому $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$, $S_5 = S_6$. Кроме того треугольники ACC_1 и CAA_1 равновелики, поскольку площадь каждого

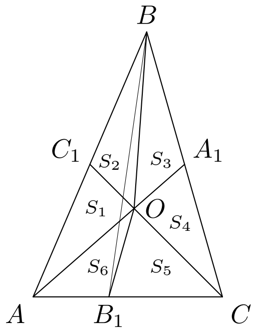


Рис. 4

из них составляет половину площади исходного треугольника ABC. Выбрасывая из них общую часть — треугольник AOC, получаем равновеликость треугольников AOC_1 и COA_1, т. е. $S_1 = S_4$. Следовательно, $S_6 + 2S_1 = S_5 + 2S_4$, значит четырёхугольники $ABOB_1$ и $CBOB_1$ равновелики. С другой стороны, медиана BB_1 тоже делит ABC на две равновеликие части, поэтому точка O должна лежать на отрезке BB_1.

Пример 5. Могут ли все грани выпуклого многогранника иметь 6 и более сторон?

Решение. Нет, не могут. Оценим двумя способами среднее арифметическое всех углов всех граней. С одной стороны, среднее арифметическое углов n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$. С другой стороны, к каждой вершине многогранника примыкают не менее трёх граней, и сумма примыкающих углов строго меньше $360°$. Поэтому среднее арифметическое углов при каждой вершине строго меньше $120°$.

Полученное противоречие доказывает, что такого многогранника не существует.

Задачи

▸ **1.** Можно ли соединить 5 городов дорогами так, чтобы каждый город был соединён с тремя другими?

▸ **2.** В каждой клетке прямоугольной таблицы размером $m \times k$ клеток написано число. Сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что $m = k$.

► **3.** Существует ли выпуклый 1978-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

► **4.** Найдите сумму коэффициентов многочлена

$$(x^3 - x + 1)^{100}.$$

► **5.** Докажите, что не существует многогранника, у которого

а) все грани — шестиугольники;

б) в каждой вершине сходятся 6 граней.

► **6.** Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше $120°$.

► **7.** В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5 (улица соединяет две площади).

► **8.** В квадрате со стороной единица поместили несколько отрезков, параллельных сторонам квадрата (квадрату принадлежит граница, а отрезкам принадлежат концы). Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма их длин равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбит объединением отрезков, найдётся такая, площадь которой не меньше 0.01.

Указание. Оцените двумя способами сумму периметров частей. Чем меньше площадь, тем относительно больший периметр на неё приходится.

► **9.** Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут одновременно оказаться в вершинах квадрата большего размера.

Соответствие

Мы говорим, что между двумя множествами установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие элемент второго множества, при этом каждый элемент второго множества соответствует ровно одному элементу первого множества. Иначе говоря, мы разбили элементы обоих множеств на пары, причём в каждую пару входит по элементу из каждого множества.

Если между двумя конечными множествами установлено взаимно однозначное соответствие, то можно утверждать, что они содержат одинаковое количество элементов, даже если пересчитать элементы этих множеств мы не можем. К примеру, чтобы узнать, равное ли количество дам и кавалеров пришло на бал, достаточно объявить танец. Если никто не остался без пары, значит тех и других поровну.

Если же мы установили соответствие между всеми элементами одного конечного множества и частью элементов другого множества, то количество элементов в первом множестве меньше, чем во втором.

Пример 1. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих диагоналей? (Концы диагоналей не считаются точками пересечения.)

Решение. Каждой точке пересечения диагоналей соответствует четвёрка вершин — концов соответствующих диагоналей. Имеется и обратное соответствие: каждой четвёрке вершин соответствует точка пересечения диагоналей образованного ими четырёхугольника. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно количеству четвёрок вершин, т. е. числу сочетаний из n по 4.

Пример 2. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

Решение. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот (рис. 5).

В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки, будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным расположению стрелок на обычных часах.

Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Причем интервалу хорошего времени соответствует интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.

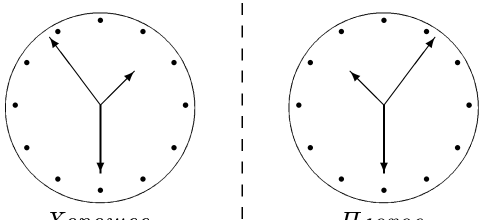


Рис. 5

Пример 3. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр. Билет называют *счастливым*, если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме трёх последних цифр. Каких автобусных билетов больше: счастливых или тех, чьи номера делятся на 11?

Решение. Счастливые билеты, упомянутые в условии, будем называть счастливыми по-московски. Назовём билет счастливым по-питерски, если сумма цифр его номера, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах.

Выясним сначала, каких счастливых билетов больше — по-московски или по-питерски? Их поровну, поскольку между ними можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом. Переставим цифры номера билета, счастливого по-московски: первые три цифры поставим на нечётные места (первое, третье и пятое), а последние три цифры — на чётные (например, номер 129345 превратится в 132495.) Получим счастливый по-питерски билет.

Теперь заметим, что номер любого билета, счастливого по-питерски делится на 11[1]. Обратное неверно: существуют не счастливые по-питерски билеты, номера которых делятся на 11, например, если разность сумм цифр, стоящих на нечётных и чётных местах, равна 11. Поэтому билетов с номерами, делящимися на 11 больше, чем счастливых по-питерски, а значит и по-московски.

[1] Признак делимости на 11: «Число делится на 11, тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих на чётных местах, минус сумма цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11».

Соответствие помогает не только определять, какое множество больше, но и решать другие задачи. Приведём несколько примеров. (см. также тему «Игры»).

Пример 4. Найдите сумму чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Решение (его, согласно легенде, придумал маленький Гаусс). Напишем ту же сумму в обратном порядке и сложим числа по столбцам:

$$\begin{array}{rcrcrcrcccrcr} x & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 & & \\ x & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 & & \\ \hline 2x & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & = & 10100 \end{array}$$

Ответ: 5050.

Объект может стать более естественным, если у него найдётся пара. Например, вместе с иррациональностью $x + y\sqrt{D}$ рассматривают сопряжённую иррациональность $x - y\sqrt{D}$.

Пример 5. Докажите, что в числе $(6 + \sqrt{37})^{999}$ первые 999 цифр справа после запятой — нули.

Идея решения. Добавим сопряжённую иррациональность $(6-\sqrt{37})^{999}$ и заметим, что сумма $(6+\sqrt{37})^{999} + (6-\sqrt{37})^{999}$ есть число целое, а член $(6 - \sqrt{37})^{999}$ достаточно мал.

Задачи

▸ **1.** Докажите, что дроби $\frac{1000}{1993}$ и $\frac{993}{1993}$ имеют одинаковую длину периодов.

▸ **2.** Докажите, что сумма номеров счастливых билетов делится на 13. (Определение см. в примере 3.)

▸ **3.** По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

▸ **4.** На окружности даны 1987 точек, одна из них отмечена. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше:

тех, которые содержат отмеченную точку, или тех, которые её не содержат?

▸ **5.** Докажите, что число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{999}$ представимо в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, причём $3a^2-2b^2=1$.

▸ **6.** Существуют ли такие рациональные α_i и β_i, что

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})^2+(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})^2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\ ?$$

▸ **7.** Докажите, что число $(\sqrt{2}-1)^n$ представимо в виде $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где $m\in\mathbb{N}$.

▸ **8*.** Двое бросают монетку: один бросил её 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

▸ **9*.** В самолёте 100 мест, на авиарейс проданы 100 билетов, пронумерованных соответственно местам. В салон пассажиры входят по очереди. Первой входит сумасшедшая старушка, которая, не глядя на билет занимает первое попавшееся место. Каждый следующий пассажир, входя в салон ищет своё место, и если оно свободно, то занимает его. Если же его место занято, то садится на произвольное место. Какова вероятность того, что последний вошедший пассажир сядет на своё место?

Графы

Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними — линиями или стрелками. Такой способ представления называется *графом.* Например, схема метро — это граф. Точки называют *вершинами* графа, а линии — *ребрами.*

Вершину называют *чётной*, если из неё выходит чётное число рёбер и *нечётной* в противном случае. Граф называют *связным*, если между любыми вершинами существует путь, состоящий из рёбер графа, *ориентированным* — если на каждом ребре указано направление, *плоским* — если он нарисован на плоскости и его ребра не пересекаются (во внутренних точках).

При решении многих олимпиадных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу рёбер графа:

1) если в графе больше двух нечётных вершин, то его правильный обход (т. е. обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз) невозможен;
2) для всякого чётного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, с которой начался;
3) если в связном графе ровно две нечётные вершины, то существует правильный обход, причём в одной из них он начинается, а в другой — кончается;
4) в любом графе количество нечётных вершин чётно.

Пример 1. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два чёрных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

Решение. Отметим центры клеток доски и соединим отрезками пары отмеченных точек, если из одной в другую можно пройти ходом коня. Мы получим граф, содержащий «цикл» из восьми точек и одну изолированную точку (рис. 6). Перемещение коней по доске соответствует движению по ребрам этого цикла. Ясно, что при движении по циклу нельзя изменить порядок следования коней.

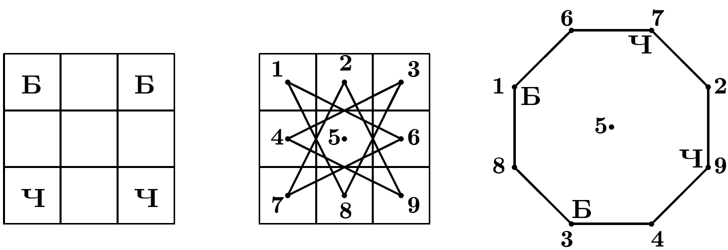


Рис. 6

Пример 2. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось хотя бы на одно из чисел: 7 или 13.

Решение. Напишем цифры на листе. Соединим стрелками те цифры, которые могут следовать друг за другом (рис. 7а). Теперь ясно, что первой идёт 7, затем 8 и 4. Уберём «лишние» стрелки, ведущие в уже использованные цифры 8 и 4 (рис. 7б). Если после 4 идёт 9, то дальше идёт 1, и дальнейший путь определяется однозначно. Если из 4 пойти в 2, то несложным перебором убедимся, что этот путь тупиковый.

Ответ: 784913526.

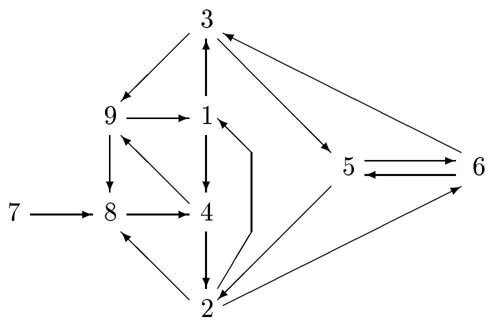


Рис. 7а

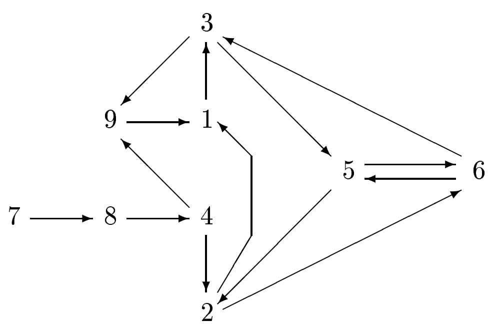


Рис. 7б

Пример 3. В стране Радонежии некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 1985 авиалиний, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (быть может, с пересадками).

Решение. Рассмотрим множество городов, до которых можно добраться из столицы. Это граф: его вершины — города, ребра — авиалинии, их соединяющие. Из каждой вершины графа выходит столько рёбер, сколько всего авиалиний выходит из соответствующего города. Граф содержит нечётную вершину — столицу. Поскольку число нечётных вершин в графе чётно, в нем есть ещё одна нечётная вершина. Этой вершиной может быть только город Дальний.

Задачи

▸ **1.** Расположите на плоскости 6 точек и соедините их непересекающимися линиями так, чтобы из каждой точки выходили четыре линии.

▸ **2.** В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?

▸ **3.** В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.

▸ **4.** На математической олимпиаде было предложено 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причём выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.

▸ **5*.** Докажите, что в плоском графе найдётся вершина, из которой выходит не более 5 рёбер.

▸ **6.** а) Вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разный цвет.

б) Конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.

Указание. а) Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи — найдите вершину, из которой выходит не более 5 рёбер. Далее примените индукцию — если удалось покрасить все вершины, кроме этой одной, то и для неё цвет найдётся.

► **7.** В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1 кг, 2 кг, …, 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого?

► **8.** Клетчатая плоскость раскрашена десятью красками так, что соседние (т. е. имеющие общую сторону) клетки покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Каково минимально возможное число пар соседних красок? (Две краски называются *соседними*, если ими покрашены какие-то две соседние клетки.)

► **9.** В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

► **10.** В городе на каждом перекрестке сходится чётное число улиц. Известно, что с любой улицы города можно проехать на любую другую. Докажите, что все улицы города можно объехать, побывав на каждой по одному разу.

► **11.** Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с пяти нулей. Среди пятёрок подряд стоящих цифр встречаются все 32 возможные комбинации. Найдите пять последних цифр последовательности.

► **12.** Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами.

Указание. Рассмотреть полный граф, вершины которого суть цифры от 0 до 9. Задача сводится к его обходу.

► **13.** Докажите, что можно расположить по кругу символы 0 и 1 так, чтобы любой возможный набор из n символов, идущих подряд, встретился один раз.

Указание. Рассмотреть граф, вершины которого суть слова длины $n-1$. Две вершины u и v соединяются стрелкой, если существует слово длины n, у которого u является началом, а v — концом.

► **14.** Рёбра дерева окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Можно ли все дерево сделать одноцветным?

► **15.** Докажите, что количество вершин любого дерева на единицу больше количества его рёбер.

Инварианты

Инвариант — величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска.* В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* — величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

Пример 1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

Решение. Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если число бананов было нечётным, то — банан.

Пример 2. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

Решение. Заменим знак «+» на число 1 и знак «−» на число -1. Заметим, что *произведение всех чисел в таблице* не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно -1, а в таблице из одних плюсов $+1$, чем и доказана невозможность перехода.

Пример 3. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Решение. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации — нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

Пример 4. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

Указание. Обозначим количества хамелеонов каждого цвета $Б$, $С$ и $М$ соответственно. Докажите, что остатки от деления на 3 разностей $Б-С$, $С-М$ и $М-Б$ не меняются.

Пример 5. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по одному веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают один по часовой стрелке, а другой — против, каждый — на соседнее дерево. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Решение. Пронумеруем деревья по кругу от 1 до 44. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи, либо не меняется, либо уменьшается на 44, либо увеличивается на 44. Тем самым, остаток от деления этой суммы номеров на 44 не меняется. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.

Пример 6. Можно ли круг разрезать на конечное число частей, из которых сложить квадрат? (Разрезы — это участки прямых и дуги окружностей.)

Решение. Рассмотрим инвариант: разность сумм длин вогнутых и выпуклых граничных дуг всех частей. Эта величина не изменяется при разрезании одной части на две и при складывании одной части из двух.

Для единичного круга этот инвариант равен 2π, а для квадрата — нулю. Поэтому «квадратура круга» невозможна.

Задачи

► **1.** Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

► **2.** Можно ли круг разрезать на несколько частей и сложить из них квадрат? (Границы частей состоят из конечного числа отрезков и дуг окружностей.)

► **3.** Болельщик Вася нарисовал расположения игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.

► **4*.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр есть величина постоянная.

► **5*** (сизифов труд). На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

► **6.** Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город соединён авиалиниями ровно с 10 городами (кроме столицы). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

► **7.** Во время перемирия за круглом столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4. (В каждом стане все рыцари дружат).

▸ **8.** В одном бидоне находится 1 л воды, а в другом — 1 л спирта. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного бидона в другой. Можно ли добиться, чтобы в первом бидоне концентрация спирта оказалась больше 50%

▸ **9.** Круг разрезали на части и сложили выпуклую фигуру. Докажите, что это опять круг. (Разрезы — это участки прямых и дуги окружностей.)

▸ **10.** Можно ли разрезать правильный треугольник на части и сложить квадрат, если части можно параллельно переносить, но не поворачивать?

Метод крайнего

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

Пример 1. Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения (см. словарик). Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

Решение. Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (подумайте, почему).

Пример 2. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань G, число её сторон n. К каждой стороне G примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней n. Число сторон у каждой грани заключено между 3 и $n-1$, всего $n-3$ возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по принципу Дирихле (см. тему «Принцип Дирихле») одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Пример 3. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

Пример 4. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.
Указание. Рассмотрите ближайшую точку границы.

Пример 5. Докажите, что число $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым.
Указание. Рассмотрите максимальную из степеней двойки, входящих в знаменатели слагаемых.

Задачи

▸ **1.** Путешественник отправился из своего родного города A в самый удалённый от него город страны B; затем из B — в самый удалённый от него город C и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами страны различны).

▸ **2.** Назовём автобусный билет (с шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

▸ **3.** В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)

► **4.** На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

► **5.** На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

► **6.** На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

► **7.** На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

► **8.** На окружности стоят 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа и порядок их следования по окружности.

► **9.** На прямой расположена колония из конечного числа бактерий. В моменты 1, 2, 3, ... некоторые из бактерий могут погибать; новых бактерий не возникает ни в один момент. Погибают те и только те бактерии, от которых ни слева на расстоянии ровно 1, ни справа на расстоянии ровно $\sqrt{2}$ нет бактерий. Существует ли колония бактерий, которая будет жить вечно?

► **10.** В течение дня в библиотеке побывало 100 читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 100 человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз.)

► **11.** На плоскости отмечено несколько прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух отмеченных прямых, проходит по крайней мере ещё одна. Докажите, что все отмеченные прямые проходят через одну точку.

► **12.** На плоскости отметили несколько точек. Точки, находящиеся от данной на наименьшем для неё расстоянии, назовём ближайшими (их может быть несколько). Докажите, что найдётся точка, у которой не больше трёх ближайших.

► **13.** Найдите наибольшее значение выражения $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{99}x_{100}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Уход на бесконечность и малые шевеления

Методу крайнего родственны рассмотрение ситуации на бесконечности (в *асимптотике*) и метод малых шевелений.

Пример 1. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

Идея решения. Выберем направление, не перпендикулярное ни одной из прямых. Будем двигать по этому направлению точку с единичной скоростью. Скорость удаления этой точки относительно любой отмеченной точки стремится к единице, а скорость её удаления относительно любой отмеченной прямой меньше единицы.

Пример 2. Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь $S > 1$. Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

Решение. Пусть расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит d. Рассмотрим сдвиги нашей фигуры на всевозможные целочисленные векторы. Нарисуем на плоскости два квадрата с общим центром и сторонами, параллельными координатным осям — один со стороной l, а другой — со стороной $l + 2d$ (значение l мы определим позже, оно должно быть достаточно велико). Большой квадрат «окаймляет» малый, ширина «каймы» равна d. Поэтому любой из рассматриваемых образов фигуры, пересекающий малый квадрат, целиком лежит внутри большого. Левый нижний угол маленького квадрата расположим так, чтобы он принадлежал рассматриваемой фигуре.

Оценим площадь фигур, пересекающих малый квадрат. Таких фигур не меньше l^2, так как сдвиги на векторы вида (m, n) $(0 \leqslant m < l,\ 0 \leqslant n < l)$ переводят левый нижний угол квадрата в точку внутри квадрата, а таких сдвигов всего имеется $([l]+1)^2 > l^2$. Если предположить, что образы фигуры не пересекаются, то их суммарная площадь должна не превосходить площади большого квадрата. Получаем

неравенство
$$Sl^2 \leqslant (l+2d)^2$$
или
$$(S-1)l^2 - 4dl - 4d^2 \leqslant 0.$$
В левой части последнего неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно l со старшим коэффициентом большим нуля. При достаточно больших l он принимает положительные значения (его график — парабола с ветвями вверх). Значит, можно подобрать такое l, при котором последнее неравенство не будет выполняться. Поэтому предположение, что образы нашей фигуры не пересекаются приводит к противоречию.

Так как два образа рассматриваемой фигуры при сдвигах на целочисленные векторы пересекаются, то при сдвиге исходной фигуры на разность этих векторов получим фигуру, пересекающую её.

Пример 3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде x^2+y^3, где x и y — натуральные числа.

Решение. Рассмотрим натуральное число N и оценим, сколько чисел, не превосходящих его, может быть представлено в указанном виде. Очевидно, что число x в таком представлении должно не превосходить $\sqrt{N}$, а y — не превосходить $\sqrt[3]{N}$. Количество всевозможных таких пар (x,y) не больше $\sqrt{N}\sqrt[3]{N} = N^{\frac{5}{6}}$. Поэтому и количество представимых чисел не больше этой величины. Значит, среди чисел, не превосходящих N, доля тех, которые представимы в указанном виде, не превосходит $\frac{N^{\frac{5}{6}}}{N} = \frac{1}{\sqrt[6]{N}}$. При достаточно больших N она будет сколь угодно мала.

Задачи

▸ **1.** Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом «внутренностей парабол». (Под внутренностью параболы мы понимаем выпуклую фигуру, границей которой является парабола.)

▸ **2.** Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в целых точках, не содержащего внутри и на границе других целых точек, равна единице.

▸ **3.** Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь $S > 10$. Докажите, что её можно параллельно перенести так, чтобы она покрыла не менее 11 целых точек.

▸ **4** (лемма Минковского). Докажите, что центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит ещё хотя бы одну целую точку. *Указание.* Произведите гомотетию с коэффициентом 1/2 и воспользуйтесь результатом примера 2.

▸ **5.** Прямая пересекает замкнутую ломаную в 1995 точках. Докажите, что некоторая прямая, не параллельная ни одному звену ломаной, пересекает её не более чем в 1995 точках.

▸ **6.** Проведены 100 хорд одной окружности, любые две из них пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

▸ **7.** Докажите, что если натуральные числа k_1, k_2, $\ldots$, k_s таковы, что

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_s} < 1,$$

то существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \ldots + n_s^{k_s}$ для некоторых целых неотрицательных чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_s.

▸ **8.** Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n-й степенью натурального числа.

Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух».

Общая формулировка: *«Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем $\frac{n}{k}$ кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем $\frac{n}{k}$ кроликов».* Пусть вас не смущает дробное число кроликов — в предыдущем случае получается, что в ящике не меньше 10/9 кроликов, значит, не меньше двух.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем $\frac{n}{k}$ кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем $\frac{n}{k} \cdot k = n$. Противоречие.

Принцип Дирихле кажется очевидным, однако, чтобы его применить, бывает не просто догадаться, что считать кроликами, а что — ящиками.

Зная принцип Дирихле, можно догадаться, в каких случаях его применять. Например, если каждому элементу множества A соответствует ровно один элемент множества B, то элементы A можно назвать кроликами, а элементы B — ящиками.

Принцип Дирихле бывает непрерывным: *«Если n кроликов съели m кг травы, то какой-то кролик съел не меньше $\frac{m}{n}$ кг и какой-то съел не больше $\frac{m}{n}$ кг»* (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего).

Заметим, что в последней формулировке кролики играют роль ящиков для травы, а трава — роль кроликов, сидящих в ящиках.

Пример 1. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Решение. Всего в году бывает 366 дней. Назовём дни ящиками, а учеников — кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше $\frac{400}{366}$ кроликов, т. е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

Пример 2. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

Решение. Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться в пределах от -6 до $+6$. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит составить такой квадрат невозможно.

Пример 3. На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

Решение. Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмём эту точку вместе с противоположной к ней.

Пример 4. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

Решение. Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 4^3 или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

Задачи

▸ **1.** В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

▸ **2.** На Земле больше шести миллиардов жителей, людей старше 150 лет не существует. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся одновременно с точностью до секунды.

▸ **3.** На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше $15°$.

▸ **4.** В ящике лежат носки: 10 чёрных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее число носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?

▸ **5.** На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг, ..., 665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

▸ **6.** Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?

▸ **7.** Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы.)

▸ **8.** Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

▸ **9.** Квадратная таблица $(2n+1)\times(2n+1)$ заполнена числами от 1 до $2n+1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно диагонали таблицы, то на этой диагонали тоже представлены все эти числа.

▸ **10.** В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

▸ **11.** Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

▸ **12.** Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

▸ **13.** Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

Индукция

Метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n=1$ верно, что ...», «Для $n=2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или основанием) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *шаг индукции*: *«Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $(n+1)$»*. Шаг индукции также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции, и верен шаг индукции, то все утверждения верны (это *принцип математической индукции*).

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на все предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: *«Если верны все утверждения с номерами от* 1 *до* n*, то верно утверждение с номером* $(n+1)$*»*.

Бывает удобен *индуктивный спуск или «обратная индукция »* — если утверждение с номером n $(n > 1)$ можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

Пример 1. Докажите, что число состоящее из 243 единиц, делится на 243.

Решение. Заметим, что $243 = 3^5$. Попробуем доказать более общее утверждение, что число, составленное из 3^n единиц, делится на 3^n. Оказывается, это проще.

Для $n = 1$ утверждение верно (111 делится на 3).

Заметим, что $111111111 = 111 \cdot 1001001$, и вообще число из 3^n единиц разлагается на множители:

$$\underbrace{1\ldots1}_{3^{n+1}} = \underbrace{1\ldots1}_{3^n} \cdot 10\ldots010\ldots01$$

причём, второй множитель делится на 3 (по признаку делимости на 3). Итак, в последовательности чисел 111, 111111111, $\ldots$, «3^n единиц» каждое следующее равно предыдущему, умноженному на число, кратное трём. Поэтому, если $\underbrace{1\ldots1}_{3^{n-1}}$ делится на 3^{n-1}, то $\underbrace{1\ldots1}_{3^n}$ делится на 3^n. Теперь индукция очевидна.

Замечание. Мы специально не произносили слов «база индукции» и «шаг индукции », чтобы не отвлекать внимание от более существенных моментов.

Пример 2. На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Докажите, что части на которые разбита плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (граничащие по отрезку или дуге) были покрашены в разные цвета.

Решение. Сначала сотрём все прямые и окружности, но запомним где они находились. Покрасим всю плоскость в один цвет, а потом будем восстанавливать границы, перекрашивая при этом части, на которые они делят плоскость.

Каждый раз, добавляя прямую, мы перекрашиваем в противоположный цвет все части, лежащие по одну её сторону, и оставляем без изменения части, лежащие по другую сторону. Добавляя окружность, мы перекрашиваем все части, лежащие внутри неё и оставляем без изменения, лежащие снаружи. Таким образом, каждый участок любой из нарисованных линий будет являться границей двух областей разного цвета.

Пример 3. Докажите, что если $x+\frac{1}{x}$ — целое, то $x^n+\frac{1}{x^n}$ — тоже целое.

Решение. Пусть $T_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. Заметим, что $T_0 = 2$ и $T_1 = x+\frac{1}{x}$ — целые. Рассмотрим произведение $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+2+\frac{1}{x^2} = T_2+2$.

Отсюда $T_2 = T_1^2 - 2$ — целое. Обобщим идею и рассмотрим произведение

$$T_nT_1 = \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = \\ = \left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) = T_{n+1}+T_{n-1}.$$

Отсюда получим, что $T_{n+1} = T_nT_1 - T_{n-1}$. Поэтому, если T_n и T_{n-1} — целые числа, то T_{n+1} — тоже целое. Теперь по индукции получим, что T_n — целое при всех n.

Пример 4. Пятеро разбойников добыли мешок золотого песка. Они хотят поделить его так, чтобы каждый был уверен, что он получил не меньше одной пятой золота. Никаких способов измерения у них нет, однако каждый умеет оценивать на глаз величину кучи песка. Мнения разбойников о величине куч могут расходиться. Как им поделить добычу?

Решение. Первый способ. Пусть сначала два разбойника поделят добычу между собой: один поделит песок на две равные, по его мнению, кучи, а второй выберет себе кучу. Затем каждый из них поделит свою кучу на три равные, по его мнению, кучи, а третий возьмёт у каждого по одной куче. Затем эти трое делят свои кучи на четыре равные, по их мнению, части, а четвёртый разбойник возьмёт у каждого по одной куче. Аналогично для пятого разбойника.

Второй способ. Найдём «самого скромного» разбойника и отдадим ему его долю. Для этого попросим первого разбойника отделить $1/5$ часть мешка и спросим второго разбойника о размере отделённой части: если он считает, что она больше $1/5$, то пусть уменьшит ее до $1/5$, а если считает, что она не больше $1/5$, то позовём третьего разбойника и повторим процедуру. В итоге отдадим кучу тому, кто последним к ней приложил руку. Среди оставшихся разбойников опять найдём самого скромного и отдадим ему полученную кучу и т. д.

Пример 5. Докажите, что нельзя построить правильный 7-угольник с вершинами в целочисленной решетке.

Решение. Допустим, что это возможно. Заметим, что сторона 7-угольника меньше радиуса описанной около него окружности. Сделаем параллельный перенос всех сторон 7-угольника в одну точку. Получим «ёжик ». Соединив концы «иголок ёжика », получим новый правильный 7-угольник с вершинами в целых точках, но меньшего размера. Но 7-угольники с вершинами в целых точках нельзя уменьшать до бесконечности. Противоречие. Значит такой 7-угольник построить нельзя.

Задачи

- ▸ **1.** Докажите, что любое число рублей большее семи можно разменять трёшками и пятёрками. (Трёшками и пятёрками назывались купюры в 3 и 5 рублей соответственно, которые находились в обращении в Советском Союзе до 1991 года).
- ▸ **2.** Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая «заштрихована» с одной стороны. Докажите, что у одной из частей все границы «заштрихованы» изнутри.
- ▸ **3.** Из квадрата 128×128 вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трёх клеток.
- ▸ **4.** Докажите, что простых чисел бесконечно много.
- ▸ **5.** Для любого натурального k докажите неравенство $2^k > k$.
- ▸ **6.** Докажите неравенство Коши:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа.

Указание. Используйте более сложную схему индукции по количеству переменных: сначала по степеням двойки, потом от степени двойки к меньшему числу.

▸ **7.** Четыре одинаковые банки наполнены красками на три четверти; цвета всех красок различны. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)

▸ **8.** В городе N домов. Какое наибольшее число заборов можно построить в этом городе, если 1) заборы не пересекаются, 2) каждый забор огораживает хотя бы один дом, 3) никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

▸ **9.** Докажите, что предпоследняя цифра десятичной записи любой степени тройки чётна.

▸ **10.** Для любого $x \geqslant -1$ и натурального n докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

▸ **11.** *Ханойская башня.* Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три штырька, на один из которых нанизаны семь колец убывающих размеров, как показано на рис. 8. Разрешается снимать по одному кольцу с любого штырька и нанизывать его на любой другой штырёк, но при этом запрещается класть большее кольцо поверх меньшего. Можно ли, соблюдая эти правила, переложить все кольца на другой штырёк?

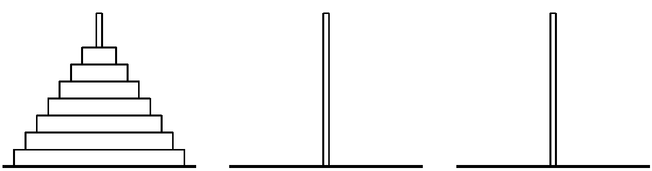


Рис. 8

Делимость и остатки

Если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что a *сравнимо* с b по модулю m и записывают

$$a \equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$$

Два числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Сравнения можно складывать и умножать. Если $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$ и $c \equiv d\,(\mathrm{mod}\ m)$, n — произвольное целое положительное число, то $a+c \equiv b+d\,(\mathrm{mod}\ m)$, $ac \equiv bd\,(\mathrm{mod}\ m)$ и $a^n \equiv b^n\,(\mathrm{mod}\ m)$. Таким образом определяется *арифметика остатков. Остатки называют вычетами.*

В случае, если $m = 10$ приведённое утверждение особенно наглядно: чтобы найти последнюю цифру десятичной записи суммы (произведения), достаточно сложить (перемножить) последние цифры слагаемых (сомножителей) и взять последнюю цифру результата.

Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

Пример 1. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6 при всех целых n.

Решение. Разложим данное выражение на множители: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$. Мы получили произведение трёх последовательных целых чисел. Одно из них делится на 3, поэтому произведение делится на 3. По крайней мере одно из трёх последовательных чисел чётно, поэтому произведение чётно. Число, делящееся на 2 и 3, делится на 6.

Пример 2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.

Решение. Квадрат целого числа при делении на 8 даёт остаток 0, 1 или 4. Чтобы убедиться в этом достаточно проверить квадраты всевозможных остатков от деления на 8 — числа от 0 до 8. Но из трех чисел вида $0, 1, 4$ нельзя получить 7. Поэтому сумма трёх квадратов не может иметь остаток 7.

Пример 3. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

Решение. Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Противоречие.

Задачи

► **1.** Какие числа можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?

► **2.** Если p — простое число, большее трёх, то p^2-1 делится на 24.

► **3.** При каких n число 2^n-1 делится на 7?

► **4.** Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.

► **5*.** Докажите, что если целочисленная арифметическая прогрессия содержит квадрат целого числа, то она содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

► **6.** Три целых числа связаны соотношением $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что x или y делится на 3.

► **7.** Шестизначное число делится на 7. Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

► **8.** Найдите три попарно взаимно простых числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

► **9.** Докажите, что простые числа большие трёх можно записать в одном из двух видов: $6n+1$ либо $6n-1$, где n — натуральное число.

► **10.** Докажите, что если сумма квадратов двух чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел тоже делится на 3.

► **11*.** Дано натуральное число N. К нему справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

► **12.** Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые нельзя представить в виде суммы

а) трёх кубов;

б) семи шестых степеней целых чисел.

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель чисел, решать линейные уравнения в целых числах. Алгоритм основан на следующем факте: *«Если при делении числа a на b получается остаток r, то* НОД$(a,b)=$ НОД(b,r)*»*.

Применение алгоритма Евклида заключается в последовательном делении с остатком. Сначала мы делим большее из двух чисел на меньшее. На каждом следующем шагу мы делим число, которое на предыдущем шагу было делителем, на число, которое на предыдущем шагу было остатком. Так поступаем до тех пор, пока не получим нулевой остаток. Это обязательно произойдёт через конечное число шагов, поскольку остатки всё время уменьшаются. Последний ненулевой остаток и будет наибольшим общим делителем исходных чисел.

Отметим, что этот алгоритм может быть применён для нахождения наибольшего общего делителя не только чисел, но также многочленов и других объектов более общей природы.

Пример 1. Даны углы m° и n°, где m и n — взаимно простые целые числа. Построить угол 1°.

Решение. Пусть при делении m на n получается частное q и остаток r. Вычитая q раз из угла m° угол n°, получим угол r°. Аналогично мы можем получить все углы, градусная мера которых равна остаткам, возникающим при применении алгоритма Евклида к числам m и n. Поскольку m и n взаимно просты, последний из этих остатков — 1.

Пример 2. Докажите, что числа 2^m-1 и 2^n-1 взаимно просты тогда и только тогда, когда числа n и m взаимно просты.

Решение. Пусть $n > m$. Обозначим $F(n, m) = \text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1)$. Тогда $F(m, n) = \text{НОД}(2^n - 1 - (2^m - 1), 2^m - 1) = \text{НОД}((2^{n-m}-1)\cdot 2^m, 2^m-1) = \text{НОД}(2^{n-m}-1, 2^m-1) = F(n-m, n)$. Таким образом, пару чисел (m, n) можно заменить на пару $(n-m, n)$. С помощью алгоритма Евклида мы придём к паре $(d, 0)$, где $d = \text{НОД}(m, n)$. Итак, $\text{НОД}(2^n-1, 2^m-1) = \text{НОД}(2^d-1, 2^0-1) = 2^d-1$. В нашем случае $d = 1$, $2^d-1 = 1$, поэтому числа $2^n - 1$ и $2^m - 1$ взаимно просты.

Задачи

- ▸ **1.** Решите уравнение в натуральных числах $7x - 11y = 1$.
- ▸ **2.** Разделить угол 19° на 19 равных частей.
- ▸ **3.** Числа m и n — взаимно просты. Докажите, что уравнение $mx + ny = 1$ имеет решение в целых числах.
- ▸ **4.** Докажите, что при любых целых неотрицательных m и n числа $2^{2^m} + 1$ и $2^{2^n} + 1$ являются взаимно простыми.

▸ **5.** Выведите из предыдущей задачи, что простых чисел бесконечно много. (Другое доказательство бесконечности простых чисел вы найдёте в главе «Доказательство от противного», пример 1.)

▸ **6.** Числа m и n нечётные. Докажите, что числа 2^m+1 и 2^n+1 взаимно просты тогда и только тогда, когда n и m взаимно просты.

▸ **7.** Один прибор делает пометки на длинной ленте через каждые m см, другой — через каждые n см (m и n — взаимно простые). Верно ли, что какая-то синяя пометка окажется на расстоянии не большем 1 см от какой-то красной?

▸ **8.** Периодическая последовательность имеет периоды m и n. Докажите, что НОД(m,n) — тоже её период.

▸ **9.** Разрешается сдвигать фишку вдоль числовой прямой на ± 1 и на $\pm\sqrt{2}$. Докажите, что из любого начального положения её можно придвинуть к началу координат ближе чем на 0.0001.

▸ **10.** «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N=2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких N «крокодил» может пройти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

▸ **11.** Дан прямоугольник со сторонами 1 и α. От него отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником проводят ту же процедуру. Рассматривается последовательность отношений сторон получившихся прямоугольников (большей к меньшей). Периодична ли эта последовательность, если число α равно

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{2001}$.

▸ **12.** *Словом* называется последовательность букв, *произведением* uv двух слов u и v называется результат приписывания одного к другому. Докажите, что если $uv=vu$, то существует такое слово s и натуральные числа k и l, что $u=s^k$, $v=s^l$.

▸ **13.** Решить уравнение в целых положительных числах

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}.$$

Покрытия, упаковки и замощения

Если объединение нескольких фигур содержит данную фигуру Ф, то говорят, что эти фигуры образуют *покрытие* фигуры Ф. При этом покрывающие фигуры могут пересекаться.

Упаковка — это размещение внутри данной фигуры нескольких фигур, не имеющих общих точек, кроме, быть может, граничных.

В некоторых задачах фигура разрезается на меньшие части (например, на две одинаковые), или наоборот, из нескольких данных фигур составляется одна большая. Это — задачи на *разрезание* или *замощение*.

Замощение является одновременно покрытием и упаковкой.

Пример 1. Можно ли покрыть равносторонний треугольник двумя равносторонними треугольниками меньшего размера?

Решение. Каждый из меньших треугольников может покрыть только одну вершину большего, но вершин три, а треугольников только два.

Пример 2. На поле 10×10 для игры в «морской бой» нужно расставить один корабль 1×4, два корабля 1×3, три корабля 1×2 и четыре корабля 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что если расставлять их в указанном порядке (начиная с больших), то каждому кораблю всегда найдётся место (как бы их ни ставили на любое свободное место).

Решение. Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого нарисуем 8 вспомогательных кораблей 1×3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки. Поставленные корабли могут задеть (пересечь или коснуться) не больше двух вспомогательных, поэтому останется незадетый вспомогательный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

Пусть уже расставлены корабли 1×4, два 1×3 и меньше трёх 1×2. Докажем, что ещё один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2 параллельных друг другу с интервалом две клетки. Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух вспомогательных, поэтому останется незадетый вспомогательный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1×1 с интервалом две клетки. Поставленные корабли задевают не больше 15 вспомогательных.

Пример 3. Внутри круглого блина радиуса R запекли монету радиуса r. Каким наименьшим числом прямых разрезов можно наверняка задеть монету?

Решение. Если разрезы проводить параллельно, то монету можно задеть за $\frac{R}{2r}$ разрезов, если число $\frac{R}{2r}$ — целое, и за $\left[\frac{R}{2r}\right]+1$ разрезов, если $\frac{R}{2r}$ — нецелое. Трудность состоит в доказательстве того, что меньшим числом разрезов обойтись нельзя.

Рассмотрим множество возможных положений центра монеты. Каждому прямолинейному разрезу соответствует полоса ширины $2r$, отвечающая множеству возможных центров монеты, задетой этим разрезом. Таким образом, задача переформулируется следующим образом: найти минимальное число полос ширины $2r$, покрывающих круг радиуса R.

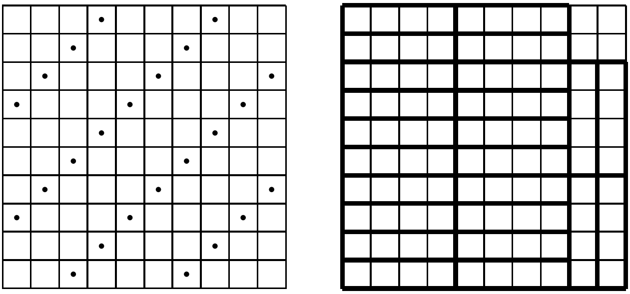
Воспользуемся следующим замечательным фактом: если сферу пересечь двумя параллельными плоскостями, то площадь сферы между ними зависит только от расстояния между плоскостями и не зависит от их положения.

Опишем вокруг блина сферу. Через края каждой полосы проведём две перпендикулярные к ней плоскости. Они высекут на сфере кольца одинаковой площади. Осталось покрыть сферу наименьшим числом колец известной площади.

Пример 4. За какое наименьшее количество выстрелов можно с гарантией подбить четырёхклеточный корабль в игре «морской бой»?

Решение. Произведем выстрелы по полям, отмеченным на рис. 9а. Любое положение корабля 1×4 накрывает одно отмеченное поле. Поэтому 24 выстрелов хватит.

Покажем, что нельзя ограничиться меньшим числом выстрелов. Разместим на доске 24 корабля 1×4 (рис. 9б). В каждый из них должен попасть выстрел. Значит, нужно сделать не менее 24 выстрелов. А почему нельзя расположить 25 кораблей?



а) б)

Рис. 9

Задачи

▸ **1.** Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?

▸ **2.** Можно ли точечный источник света на плоскости заслонить тремя кругами (чтобы любой луч, выходящий из источника, пересекал хотя бы один круг)?

▸ **3.** Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы

а) коридор был полностью покрыт, а общая длина оставшихся дорожек была не больше удвоенной длины коридора;

б) оставшиеся дорожки не перекрывались и их суммарная длина была не меньше половины длины коридора.

▸ **4.** Пол в прямоугольной комнате 6×3 кв. м покрыт квадратными коврами разных размеров, края которых параллельны стенам. Докажите, что можно убрать несколько ковров так, чтобы оставшиеся ковры покрывали не менее 2 кв. м.

▸ **5.** На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее $8/15$ площади стола.

▸ **6.** Круглый стол покрыт круглыми салфетками разных размеров. Докажите, что можно выбрать несколько салфеток, которые не пересекаются и закрывают не менее 1/9 площади стола.

▸ **7.** Любые три из четырёх выпуклых фигур на плоскости пересекаются. Докажите, что все фигуры пересекаются.

▸ **8.** Плоскость покрыта конечным числом полуплоскостей. Докажите, что из них можно выбрать три (или две) полуплоскости, которые покрывают всю плоскость.

▸ **9.** Прожектор освещает прямой угол. Четыре прожектора поместили в произвольных точках плоскости. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.

▸ **10.** На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей?

▸ **11.** Из листа клетчатой бумаги 29×29 клеток вырезали 99 квадратов 2×2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.

▸ **12.** Пусть A — наибольшее число попарно непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, B — наименьшее число кругов диаметра 2, которыми можно покрыть многоугольник. Что больше: A или B?

▸ **13.** На круглом столе радиуса R лежат без наложений n круглых монет радиуса r. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right) \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{R}{r}.$$

▸ **14.** Пусть S — площадь выпуклого многоугольника, P — его периметр, R — радиус максимального вписанного круга. Докажите, что

$$\frac{S}{P} \leqslant R \leqslant \frac{2S}{P}.$$

▸ **15.** Окружность покрыта бесконечным числом открытых дуг. Докажите, что можно выбрать несколько дуг, которые покрывают окружность и имеют суммарную длину не более 720°?

▸ **16.** На листе бумаги расположено несколько прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Каждые два прямоугольника имеют общие точки. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам.

► **17.** На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не меньше $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

► **18.** Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырёх цветов: белого, красного, чёрного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

► **19.** Двое по очереди ставят на шахматную доску коня, причём его можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из уже стоящих коней. Тот, кто не может поставить коня, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

Указание. Разбейте доску на пары центрально симметричных клеток.

► **20.** Из шахматной доски вырезаны одна чёрная и одна белая клетки. Докажите, что её можно замостить прямоугольниками из двух клеток.

Раскраски

Говорят, что фигура покрашена в несколько цветов, если каждой точке фигуры приписан определённый цвет. Бывают задачи, где раскраска уже дана, например для шахматной доски, бывают задачи, где раскраску с данными свойствами нужно придумать, и бывают задачи, где раскраска используется как идея решения.

Пример 1. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на «домино» из двух клеток

Решение. Каждая фигура «домино» содержит одну белую и одну чёрную клетку. Но в нашей фигуре 32 чёрных и 30 белых клеток (или наоборот).

Пример 2. Можно ли все клетки доски 9×9 обойти конем по одному разу и вернуться в исходную клетку?

Решение. Каждым ходом конь меняет цвет клетки, поэтому, если существует обход, то число чёрных клеток равно числу белых, что неверно.

Пример 3. Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Найдите максимально возможное число параллелепипедов $4 \times 1 \times 1$ (со сторонами параллельными сторонам куба), которые можно поместить в этот куб без пересечений.

Идея решения. Легко поместить 52 параллелепипеда внутрь куба. Докажем, что нельзя больше. Разобьем куб на 27 кубиков $2 \times 2 \times 2$. Раскрасим их в шахматном порядке. При этом образуется 104 клетки одного цвета (белого) и 112 другого (чёрного). Осталось заметить, что каждый параллелепипед содержит две чёрных и две белых клетки.

Ответ: 52.

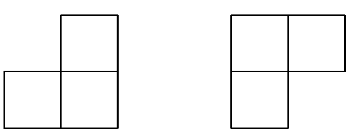
Пример 4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1. По принципу Дирихле по крайней мере две из его трёх вершин должны быть покрашены в один цвет.

Задачи

► **1.** В каждой клетке доски 5×5 сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка.

► **2.** Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки из трёх клеток. Докажите, что разность между числом уголков, ориентированных как на рис. 10а), и числом уголков, ориентированных как на рис. 10б), делится на 3.



а) б)

Рис. 10

► **3.** Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся 3 точки A, B, C одного цвета такие, что $AB = BC$.

- ▶ **4.** Раскрасьте прямую в три цвета так, чтобы нельзя было найти трёх точек A, B, C разного цвета таких, что $AB = BC$.
- ▶ **5.** Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.
- ▶ **6.** Раскрасьте плоскость а) в 9, б) в 7 цветов так, чтобы не нашлось двух точек одного цвета на расстоянии 1.
- ▶ **7.** Можно ли замостить доску 6×6 клеток полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?
- ▶ **8.** Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 4×1?
- ▶ **9.** Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трёх клеток в несколько слоев (чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом уголков)?

  Указание. Расставить числа, чтобы общая сумма была положительна, а сумма в каждом уголке — отрицательна.

Игры

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики–нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и *ничейной стратегии*, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо ничейные стратегии для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например крестики–нолики (на доске 3×3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

Пример 1. Двое кладут по очереди пятаки на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередной пятак. Кто выигрывает?

Решение. Выигрывает первый. Он кладёт пятак в центр стола, после чего на любой ход второго у первого всегда есть симметричный ответ.

Пример 2. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто победит?

Идея решения. Случаи 0 и 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего, поскольку из них можно перейти только в позицию, выигрышную для противника. Рассуждая аналогично, легко установить периодичность выигрышных и проигрышных позиций и получить ответ.

Пример 3. Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

Решение. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут с тем же успехом воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак. (Когда крестикам приходится ходить на поле, где крестик уже стоит, они ходят куда угодно.)

Пример 4. Две компании A и B получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на неосвещённый перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90°). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Допустим, у B есть выигрышная стратегия. Тогда у неё есть выигрышный ответ на ход A, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но с этого же хода может начать игру A и затем воспользоваться выигрышной стратегией B! Противоречие. Значит, выигрышная стратегия есть у A.

Задачи

▸ **1.** Есть куча из n спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких n выигрывает начинающий?

▸ **2.** В крайних клетках полоски 1×20 стоят белая и чёрная шашки. двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Как играть начинающему, чтобы выиграть?

► **3.** По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто победит при правильной игре?

► **4.** В строчку выписаны натуральные числа от 1 до 20. Двое по очереди ставят перед этими числами знак + или − (знак можно ставить перед любым числом, перед которым он ещё не стоит, включая первое). Игра заканчивается после того, как проставлены все 20 знаков, затем вычисляется значение получившегося выражения. Первый хочет добиться, чтобы оно было по абсолютной величине как можно меньше, а второй — как можно больше. Какое наибольшее по абсолютной величине значение может обеспечить в итоге второй игрок?

► **5*.** В строчку выписаны 1992 звёздочки. Двое игроков по очереди заменяют их на цифры от 0 до 9. Может ли второй игрок добиться того, чтобы окончательное число делилось бы на 1993?

► **6.** Есть две кучи камней, причём в большей — 8 камней. Два игрока по очереди берут либо несколько камней из одной кучи, либо по равному количеству камней из обеих куч. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

► **7.** На трёх крайних справа полях доски $1 \times n$ стоит по фишке. Двое по очереди берут одну из фишек и передвигают её на несколько полей влево. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход. Кто выигрывает при правильной игре?

► **8.** В 50 коробках лежат 100 конфет. Девочка и мальчик берут поочередно по конфете. Может ли мальчик добиться того, чтобы последние две конфеты лежали в одной коробке?

► **9.** В одной куче 18 конфет, а в другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят ещё на две кучи. Тот, кто не сможет поделить кучу (если там одна конфета), проигрывает. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

- ▸ **10.** На бесконечном листе клетчатой бумаги двое по очереди соединяют узлы соседних клеток по вертикали или горизонтали, один красным отрезком, другой — синим. Нельзя обводить один отрезок дважды. Может ли первый игрок создать замкнутый контур красного цвета?
- ▸ **11.** Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?
- ▸ **12*.** На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой — одну из овец. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

Процессы и операции

При решении многих олимпиадных задач организуют процессы. Бывают процессы построения нужного объекта, «причесывания задачи», последовательного улучшения некоторой величины и другие. Отметим, что спуск и индукция тоже являются процессами.

Пример 1. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

Решение. Нет никакой надежды сразу указать нужное разбиение парламента, но можно построить это разбиение поэтапно с помощью процесса. Самое простое, что можно придумать, — пересаживать парламентариев по одному.

Разобьем парламент произвольным образом на две палаты и организуем процесс пересаживания: выберем парламентария, имеющего не менее двух врагов в своей палате, и пересадим его в другую палату. Общее число пар врагов, сидящих в одной палате, при этом уменьшается. Процесс остановится, поскольку число враждующих пар конечно.

Остановка процесса означает построение нужного разбиения.

Пример 2. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, были неотрицательны.

Решение. Организуем процесс: если сумма чисел в какой-то строке (или в каком-то столбце) отрицательна, то поменяем знак у чисел этой строки (столбца). Для доказательства остановки этого процесса найдем некоторую характеристику таблицы, которая монотонно возрастает при каждом шаге. Искомая характеристика — сумма всех чисел. На каждом шаге эта сумма увеличивается. Процесс закончится, поскольку количество расстановок знаков при числах конечно.

Пример 3. В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Решение. Рассмотрим число дорог с концами в городах с различным цветом флагов. Это число целое положительное и каждое утро оно уменьшается. Значит, процесс закончится.

Пример 4. На плоскости дано N точек. Некоторые точки соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно.

Идея решения. На каждом шаге сокращается суммарная длина всех проведенных отрезков (это следует из неравенства треугольника), и всего существует лишь конечное число расположений отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому данный процесс не может продолжаться бесконечно.

Пример 5. На плоскости расположены N точек. Постройте замкнутую ломаную без самопересечений, проходящую через каждую точку.

Указание. Организуйте процесс как в примере 4.

Замечание. Решения, полученные с помощью процессов, часто оформляют с помощью метода крайнего — рассматривая экстремальные объекты. Например, решение этой задачи можно оформить и без понятия процесса, рассмотрев кратчайшую замкнутую ломаную, соединяющую данные N точек.

Пример 6. Вокруг города Зурбагана проходит кольцевая дорога. Все улицы начинаются или кончаются только на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение на всех улицах и кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один микрорайон можно объехать по правилам.

Решение. Выберем любую улицу, она разбивает город на две части. Эта улица вместе с одной из частей кольцевой дороги образует новое кольцо с односторонним движением. Внутри этого кольца все улицы образуют меньший город аналогичный Зурбагану. Снова выделим одну улицу и т. д. Поскольку число улиц уменьшается, то мы придём к городу, состоящему из одного квартала.

Пример 7. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Общее количество бензина в них достаточно, чтобы объехать круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком может стартовать от некоторой бензоколонки и, заправляясь по дороге, объехать весь круг. (Бак достаточно большой.)

Решение. Попробуем упростить задачу — разрешим автомобилю ездить только в одном направлении. Рассмотрим для каждой бензоколонки её «область доезда» — максимальный путь, который может проехать автомобиль с пустым баком, стартовав от этой бензоколонки и заправляясь по дороге. Ясно, что области доезда для попутных бензоколонок содержатся внутри области доезда исходной, поэтому можно считать, что весь их бензин перелит в исходную бензоколонку. К чему приведёт такой процесс переливания? Число бензоколонок будет уменьшаться. Но поскольку суммарная длина областей доезда равна длине круга, то они перекрываются и процесс переливания возможен, пока весь бензин не окажется в одной бензоколонке. С неё-то и можно объехать весь круг. (Это очевидно, поскольку её область доезда после переливаний не менялась.)

Пример 8. Существует ли на координатной плоскости правильный многоугольник, имеющий более шести сторон, все вершины которого — целые точки.

Решение. Заметим, что если стороны многоугольника перенести параллельно в один узел решетки, то их вторые концы образуют правильный n-угольник с вершинами в узлах решетки, но длина его стороны будет меньше, чем у исходного (докажите).

Для решения задачи организуем процесс. Пускай такой n-угольник существует. Тогда построим многоугольник меньшего размера, вершины которого также принадлежат узлам решетки. Повторив эту операцию несколько раз (докажите, что при таком процессе длина стороны n-угольника стремится к нулю), получим n-угольник, который может поместиться внутри одной клетки, но, с другой стороны, все его вершины лежат в узлах решетки. Из этого противоречия вытекает невозможность построения исходного n-угольника.

Задачи

▸ **1.** Есть N прямых общего положения и N точек. Докажите, что их можно занумеровать так, что перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямые с теми же номерами, не будут пересекаться.

▸ **2.** На заседании каждый член парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что парламент можно разбить на три фракции так, что члены одной фракции пощёчин друг другу не давали.

▸ **3.** Запись числа состоит из нулей и единиц. Любой фрагмент числа «10» заменяют на «0001». Докажите, что наступит момент, когда заменять будет нечего.

▸ **4.** Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 12. (Расстояние между кругами — это расстояние между их ближайшими точками.)

▸ **5.** Шахматную доску 8×8 покрыли 32 прямоугольниками из двух клеток (доминошками). Докажите, что найдутся две доминошки, образующие квадрат 2×2.

► **6.** N доминошек уложены в виде прямоугольника. Если две доминошки образуют квадрат, то их можно повернуть на $90°$. Докажите, что можно все доминошки сориентировать одинаково.

► **7.** Дан произвольный набор из n целых чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из него получается новый набор: $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_2+a_3}{2}$, $\ldots$, $\frac{a_n+a_1}{2}$; из этого набора — следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа — целые, то первоначальные числа равны между собой.

► **8.** Дан треугольник с разными сторонами. В него вписывают окружность. В точках касания строят новый треугольник. В него снова вписывают окружность и т. д. Докажите, что среди получившихся треугольников нет двух подобных.

► **9.** Докажите, что если последняя цифра числа n не нуль, то существует такое целое k, что в десятичной записи числа kn нет нулей.

► **10.** В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

► **11.** Дан ориентированный граф. Из каждой его вершины выходит n стрелок, и в каждую его вершину входит n стрелок. Докажите, что можно убрать часть рёбер так, чтобы он разбился на циклы.

► **12.** Имеется неограниченное число чёрных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

► **13.** Две карты Москвы разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обоих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

► **14.** а) Внутри квадрата со стороной 1 расположены четыре точки. Докажите, что из них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1.

б) Та же задача для куба с восемью точками.

Часть II

Задачи

Старайтесь решать задачи красиво, без лишних выкладок и перебора случаев. Для математика важна не сумма методов решения задач, но, прежде всего, математическая интуиция, которая ведет к цели.

Давид Гильберт говорил, что тот, кто может решить следующую задачу в уме без вычислений, — тот прирождённый математик.

Пример. Из чашки с кофе в чашку с молоком перелили ложку кофе, затем такую же ложку смеси перелили обратно. Чего больше: молока в чашке с кофе или кофе в чашке с молоком?

Решение. Попробуем угадать ответ. Для этого рассмотрим крайний случай (это первая идея). Пусть в чашках налито по одной ложке, тогда заберем весь кофе и получим равномерную смесь. Кофе и молока будет поровну.

Всегда ли будет поровну? Поскольку перелили «туда» и обратно одну ложку, то объем жидкости в чашках не изменился (вторая идея). Следовательно, сколько кофе убыло — столько молока прибыло (третья идея).

Замечание. Объёмы кофе и молока в чашках могут быть неравными, можно переливать ложку туда и обратно хоть десять раз, можно плохо размешивать перелитую ложку — все равно молока в кофе будет столько же, сколько кофе в молоке!

8 класс

▸ **1.** На числовой прямой отмечены две точки. Где расположено их среднее арифметическое?

▸ **2.** Можно ли в клетках таблицы 5×5 записать числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительной, а в каждом столбце — отрицательной.

▸ **3.** Есть две кучи камней. Два игрока по очереди берут любое количество камней, но только из одной кучи. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Может ли кто-то из них гарантированно выиграть?

▸ **4.** Докажите, что произведение цифр любого числа не больше его самого.

▸ **5.** Постройте треугольник, если известны все его углы и периметр.

▸ **6.** Существует ли такая бесконечная последовательность из двух букв, что никакая комбинация из нескольких букв не повторится два раза подряд?

▸ **7.** Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено 8 квадратов.

▸ **8.** Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

▸ **9.** Можно ли какой-нибудь треугольник поместить внутрь круга, радиус которого меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности?

▸ **10.** Президент акционерного общества «Не обманешь — не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход превысил расход. Должны ли акционеры подать на него в суд?

▸ **11.** Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идёт со скоростью 4 км/час, в гору — 3 км/час, под гору — 6 км/час. Найдите расстояние, которое прошёл путешественник, если он шёл без отдыха.

► **12.** Докажите, что любые 100 точек на плоскости можно разбить на две группы так, чтобы никакая прямая не отделяла одну группу от другой.

► **13.** Верен ли следующий признак равенства треугольников: по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

► **14.** Когда я сбегаю по эскалатору станции метро «Октябрьская», то успеваю насчитать 100 ступенек, а когда бегу вниз по эскалатору, идущему вверх, насчитываю 300 ступенек. Сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

► **15.** Волк и волчонок, медведь и медвежонок, лис и лисенок решили переправиться с левого берега реки на правый. У них была лодка, в которую помещались любые двое из них. Как им переправиться на другой берег, если нельзя оставлять детёнышей с чужими папами без своего?

► **16.** В легенде об изобретателе шахматной игры говорится, что на первую клетку доски он просил положить одно рисовое зёрнышко, на вторую — два, на третью — четыре и так далее, каждый раз удваивая количество зёрен. Выразите общее количество зёрен на доске простой формулой.

► **17.** Вася считает пальцы от большого до мизинца, затем в обратном порядке (каждый счет приходится на другой палец), затем обратно и т. д. На какой палец придется счет 1990?

► **18.** Докажите неравенство: $1-(1-a)(1-b)(1-c)>c$, если $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$.

► **19.** Три целых числа связаны соотношением $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что x или y делится на 3.

► **20.** Катер, плывя вверх по реке, потерял под мостом бутылку. Обнаружив потерю через 10 минут, он повернул обратно и нагнал бутылку на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость реки.

► **21.** Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат

а) на данной полуокружности;

б) на фигуре, являющейся объединением диагоналей квадрата.

► **22.** Если напечатать все числа от 1 до 1000, то сколько раз встретится цифра 3?

► **23.** Сколько чисел среди 1, 2, 3, ..., 1000 содержат в своей записи хотя бы одну тройку?

► **24.** На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей? (Клетка, на которой стоит король, считается битой.)

► **25.** Шестизначное число делится на 7. Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

► **26.** Построить четырёхугольник, зная все его стороны и угол между двумя противоположными сторонами.

► **27.** Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

► **28.** На прямой в точке с координатой ноль сидит бактерия. Каждую минуту бактерия делится (если бактерия находилась в точке J, то через минуту две бактерии находятся в точках с координатами $J - 1$ и $J + 1$). Если в одну точку попадают две бактерии, то они обе погибают. Как будут расположены бактерии на прямой через 2 часа и 8 минут?

► **29.** Удвоить отрезок с помощью одного циркуля.

► **30.** Имеется 10 мешков монет.

а) В девяти мешках монеты настоящие, каждая весит 10 г, а в одном — фальшивые, каждая весит 11 г. Как одним взвешиванием с помощью рычажных весов без гирь определить этот мешок?

б) Тот же вопрос для случая, когда мешков с фальшивыми монетами несколько.

► **31.** Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

► **32.** Хромой слон ходит только на одну клетку по диагонали. Какое количество ходов требуется хромому слону, чтобы обойти все белые клетки доски 10×10?

► **33.** В каплю воды, где находились 1000 бактерий, посадили один вирус. После этого каждую минуту стало происходить следующее: каждый вирус уничтожал по одной бактерии, после чего каждая бактерия делилась на две бактерии, а каждый вирус — на два вируса. Верно ли, что через некоторое время не останется ни одной бактерии?

► **34.** Каждый из четырёх гномов — Беня, Веня, Женя, Сеня — либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор. Веня — Бене: «Ты врун». Женя — Вене: «Сам ты врун». Сеня — Жене: «Да оба они вруны, (подумав) впрочем, и ты тоже». Кто из них говорит правду?

► **35.** Внутри выпуклого 10-угольника отметили 10 точек и разбили его на треугольники с вершинами в этих точках и вершинах 10-угольника. Может ли при этом получиться 30 треугольников?

► **36.** По кругу стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Разрешается взять любые два соседних числа и вместо них записать на их места среднее арифметическое этих чисел. Можно ли, повторив много раз эту операцию, получить 8 одинаковых чисел?

► **37.** Последовательные нечётные числа сгруппированы следующим образом: (1) $(3, 5)$ $(7, 9, 11)$ $(13, 15, 17, 19)$ ... Найдите сумму чисел в сотой группе.

► **38.** Ваня, Андрей и Алёша играли в настольный теннис. Проигравший партию всякий раз уступал место тому, кто в ней не участвовал. За день Ваня сыграл 10 партий, Андрей — 21 партию. Сколько партий сыграл Алёша?

► **39.** Каждые двое из 17 ученых переписываются по одной из трёх тем. Докажите, что есть трое ученых, пишущих друг другу по одной и той же теме.

► **40.** При данной сумме положительных чисел произведение максимально тогда, когда они равны. При данном произведении положительных чисел сумма минимальна тогда, когда эти числа равны. Докажите.

9 класс

► **1.** Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого, причём разные вершины — на разных сторонах. Докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

► **2.** Сумма 10 различных натуральных чисел равна 1994. Какое наибольшее значение может принимать сумма трёх наименьших из них?

► **3.** Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов — целые числа, а все остальные члены не являются целыми?

► **4.** Даны четыре точки A, B, C и D. Известно, что C ближе к A, чем к B, и D ближе к A, чем к B. Докажите, что любая точка на отрезке CD ближе к A, чем к B.

► **5.** Может ли случиться так, что

а) длины всех высот треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 100 см^2?

б) длины всех высот треугольника больше 2 см, а его площадь меньше 2 см^2?

► **6.** Два поезда едут по перпендикулярным путям к точке пересечения. Один поезд находится на расстоянии 80 км от точки пересечения, и его скорость 30 км/ч. Другой поезд — на расстоянии 40 км, и его скорость 40 км/ч. Через какое время поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга и чему равно это расстояние?

► **7.** Из бумаги вырезан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, а из картона — $PQRS$. Картонный положили на бумажный так, что по одной его вершине попало на каждую сторону бумажного и перегнули оставшиеся части бумажного, при этом картонный оказался закрыт в один слой. Докажите, что у бумажного четырёхугольника либо есть параллельные стороны, либо перпендикулярные диагонали.

► **8.** а) В треугольник T_1 вписана окружность. T_2 — треугольник образованный точками касания. Докажите, что биссектрисы треугольника T_1 являются серединными перпендикулярами треугольника T_2.

б) Середины сторон треугольника T_2 образуют треугольник T_3. Докажите, что биссектрисы T_1 являются высотами T_3.

в) Основания высот T_3 образуют треугольник T_4. Докажите, что биссектрисы T_1 являются биссектрисами T_4.

► **9.** Найдите две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13 такие, что они не равны нулю и разность между большей и меньшей из них наименьшая.

► **10.** Через данную точку на плоскости проводятся всевозможные прямые, пересекающие данную окружность. Найдите геометрическое место середин получившихся хорд.

► **11.** В круге проведены два радиуса. Постройте хорду, которая делится ими на три равные части.

► **12.** Докажите, что оси симметрии многоугольника пересекаются в одной точке.

► **13.** Дана единичная окружность с центром в начале координат. Рассматриваются прямые, заданные уравнениями

$ax+by=c$, с рациональными коэффициентами, проходящие через точку $(1,0)$. Докажите, что точки пересечения этих прямых с окружностью имеют рациональные координаты.

► **14.** С помощью циркуля и линейки провести из данной точки A прямую, перпендикулярную данной прямой l, проведя не более трёх линий (третья линия есть искомый перпендикуляр). Рассмотрите случаи, когда $A \notin l$ и когда $A \in l$.

► **15.** Пусть $P(x)$ — многочлен, дающий остаток A при делении на $x-a$, остаток B при делении на $x-b$, остаток C при делении на $x-c$. Найдите остаток $P(x)$ при делении на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

► **16.** В государстве 1990 городов. Докажите, что их можно соединить дорогами с односторонним движением так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый либо по одной, либо по двум дорогам.

► **17.** Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

► **18.** Дана таблица 8×8, в одной из клеток которой стоит знак «$-$», а в остальных — «$+$». Разрешается за один ход менять все знаки на противоположные в клетках произвольного квадрата 2×2. Можно ли добиться того, чтобы во всех клетках стояли знаки «$+$»?

► **19.** Три окружности равного радиуса с центрами в точках A, B, C пересекаются в одной точке O. Докажите, что площади трёх множеств точек, принадлежащих только одной из окружностей, равны удвоенной площади треугольника ABC.

► **20.** На плоскости отметили два миллиона различных точек. Существует ли прямая, по каждую сторону от которой находится ровно по миллиону точек?

► **21.** На каждой стороне прямоугольника взяли по точке. Докажите, что периметр полученного четырёхугольника не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

► **22.** Можно ли разрезать квадрат на конечное число

а) остроугольных,

б) тупоугольных треугольников?

► **23.** Назовём *ядром* n-угольника множество точек, из которых целиком видны все его стороны. Докажите, что ядро n-угольника — выпуклый многоугольник, имеющий не более n сторон. Сколько сторон может иметь ядро n-угольника?

► **24.** На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. В каждой точке записано число, причём сумма чисел в точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

▶ **25.** По правилам турнира, если два рыцаря A и B дрались с C, то они не дерутся между собой. Найдите минимальное число поединков, если в турнире участвуют $2n$ рыцарей.

▶ **26.** На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи выбрасывают камень, а затем одну из куч делят на две. (Выброшенный камень исчезает.) Можно ли добиться того, чтобы через несколько ходов на столе остались только кучи, состоящие из трёх камней?

▶ **27.** На плоскости n точек попарно соединены отрезками. Самый длинный из них назовём диаметром. Докажите, что диаметров не больше n.

▶ **28.** При $n > 3$ вписанный четырёхугольник можно разрезать на n вписанных четырёхугольников. Докажите.

▶ **29.** Прямоугольник разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на mn частей ($m-1$ прямая параллельна одной паре сторон прямоугольника, и $n-1$ прямая — другой). Каждая часть покрыта карточкой, на обороте которой написана площадь этой части. Какое наименьшее число карточек надо перевернуть, чтобы определить площадь исходного прямоугольника?

▶ **30.** Брат и сестра делят треугольный торт. Брат указывает точку на торте, а сестра проводит через неё прямой разрез и берет одну часть. Каждый хочет получить побольше. Где брату следует указать точку и какую часть торта он при этом получит?

▶ **31.** Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более чем в 1000 раз превышает сумму цифр самого числа.

▶ **32.** Две касательные к кругу неподвижны, а третья движется. Докажите, что отрезок подвижной касательной, заключенный между двумя неподвижными, виден из центра круга под постоянным углом.

▶ **33.** Найдите сумму $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n}$.

▶ **34.** Докажите, что если n пробегает все натуральные значения, то $[n+\sqrt{n+0.5}]$ пробегает все натуральные значения за исключением точных квадратов.

▶ **35.** Докажите, что если четырёхугольник вписан и описан, то его площадь равна корню из произведения сторон.

▶ **36.** На окружности проведено 100 хорд, из которых любые две пересекаются. Всегда ли можно провести еще одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

► **37.** Докажите, что для любого целого d произведение чисел вида $x^2 + dy^2$ снова представимо в таком же виде. То же верно для чисел вида $x^2 + xy + y^2$.

► **38.** Какова максимальная длина последовательности чисел, сумма любых семи последовательных членов которой положительна, а сумма любых одиннадцати — отрицательна?

► **39.** В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с 10 городами (если A соединен с B, то B соединен с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

► **40.** Дан неравносторонний треугольник. В него вписывают окружность. В точках касания строят новый треугольник. В него снова вписывают окружность и т.д. Докажите, что среди получившихся треугольников нет двух подобных.

► **41.** 50 клеток шахматной доски и 50 шашек занумерованы числами от 1 до 50. Шашки поставили на доску произвольным образом. За один ход любую шашку можно поставить на любое свободное место. Докажите, что для расстановки шашек на свои места требуется не больше 75 ходов.

► **42.** Многоугольник, вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного прямоугольника быть больше периметра первоначального?

► **43.** Десять пятаков расположены в виде замкнутой цепочки (т.е. первый касается второго, второй — третьего и т.д., десятый — первого). Одиннадцатый пятак катится без скольжения по внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из этих пятаков. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение?

► **44.** Груз весом 13.5 т упакован в ящики. Вес каждого ящика не больше 350 кг. Какое наибольшее число полуторатонных грузовиков может понадобиться для перевозки груза?

► **45.** а) Докажите, что для некоторого p в десятичной записи числа $2^{100}p$ нет ни одного нуля.

б) Докажите, что если последняя цифра числа k не нуль, то для некоторого p в десятичной записи числа kp нет нулей.

► **46.** Через данную точку M провести прямую, отсекающую от сторон угла треугольник заданного периметра.

► **47.** Назовём натуральные числа m и n *родственными* если, во-первых, они имеют одни и те же простые делители, и, во-вторых, числа $m-1$ и $n-1$ обладают тем же свойством. Докажите, что существует бесконечно много пар различных родственных чисел.

► **48.** Докажите, что две замкнутые кривые имеют чётное число точек пересечения (касание пересечением не считается).

► **49.** Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?

► **50.** Если 17-угольник переходит в себя при некотором повороте, то он — правильный. Докажите.

► **51.** Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле ровно один раз и сделать наименьшее число поворотов? (Если ладья пронеслась над клеткой, то она там побывала.)

► **52.** Имеется 100 монет на общую сумму 2 рубля. Докажите, что из них всегда можно выбрать несколько на сумму 1 рубль.

► **53.** В компании 18 человек. Докажите, что среди них есть 4 попарно незнакомых человека или 4 попарно знакомых.

► **54.** Докажите, что в выпуклом многоугольнике с чётным числом сторон есть диагональ, которая не параллельна ни одной из сторон.

► **55.** Найдите геометрическое место ортоцентров (точек пересечения высот) всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.

► **56.** Правильный шестиугольник разрезан на N равновеликих параллелограммов. Докажите, что N делится на 3.

► **57.** На плоскости дано n точек, соединенных непересекающимися отрезками. Может ли оказаться так, что каждая точка будет соединена ровно с шестью другими?

► **58.** Найдите 10-значное число $\overline{a_0 \ldots a_9}$, у которого a_0 равно количеству нулей в десятичной записи, a_1 — количеству единиц, … a_9 — количеству девяток.

► **59.** Двое играют на клетчатом листе бумаги 30×30. Начинающий делает разрез вдоль одной стороны квадратика от края листа, второй продолжает этот разрез вдоль одной стороны квадратика и т. д. Выигрывает тот, после чьего хода от листа отвалится кусок. Кто выиграет при правильной игре?

► **60.** В окружность вписан $2n$-угольник, стороны которого занумерованы по часовой стрелке. Докажите, что для любой точки окружности произведение расстояний до сторон с чётными номерами равно произведению расстояний до сторон с нечётными номерами.

10 класс

► **1.** На одной стороне угла с вершиной O отложены равные отрезки $OA = AB = BC$, а на другой стороне — равные отрезки $OD = DE = EF$. Докажите, что треугольники AEC и DBF равновелики.

► **2.** Дано 1995 предметов. Докажите, что из них можно выбрать чётное число предметов столькими же способами, сколькими нечётное.

► **3.** Найдите наибольшее значение отношения трёхзначного числа к сумме его цифр.

► **4.** Найдите сумму: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{100\cdot 101}$.

► **5.** Докажите, что

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{101}}$;

б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101} > \frac{1}{\sqrt{101}}$.

► **6.** Известно, что уравнение $ax^5 + bx^4 + c = 0$ имеет три разных корня. Докажите, что уравнение $cx^5 + bx + a = 0$ также имеет три разных корня.

► **7.** Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KLMN$. Докажите, что середины отрезков AK, BL, CM, DN также являются вершинами квадрата.

► **8.** На столе лежат 100 спичек. Двое ходят по очереди. За один ход можно взять 1, 2, 4, 8, … (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр?

► **9.** Вписать в квадрат правильный треугольник наибольшей площади.

► **10.** В каждой клетке бесконечного листа бумаги написано число. Докажите, что найдется число, которое не превосходит по крайней мере четырёх из восьми чисел, стоящих с ним рядом.

► **11.** Можно ли в кубе проделать дыру так, чтобы протащить через неё такой же куб?

► **12.** Среди многочленов вида $x^2 + px + q$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке $[-1, 1]$ минимален.

► **13.** На бесконечном листе в клетку рисуют круги и считают, сколько узлов сетки в него попало. Для каждого ли натурального числа n существует круг, содержащий ровно n узлов?

► **14.** Можно ли все натуральные числа раскрасить в два цвета так, чтобы не было бесконечной арифметической прогрессии одного цвета?

► **15.** Суммы коэффициентов многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны единице. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$.

► **16.** Докажите, что если $x + y = z + t$, $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, то $x^{100} + y^{100} = z^{100} + t^{100}$.

► **17.** Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек. А при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

► **18.** Докажите, что четыре круга, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника, как на диаметрах, полностью его покрывают.

► **19.** Числа $a, b \leqslant n$ дают одинаковые остатки при делении на все простые числа, меньшие n. Докажите, что $a = b$.

► **20.** Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 13 минут и выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6 и 7 минут. За какое наименьшее время они могут позавтракать тортом, банкой варенья и кастрюлей молока?

► **21.** Каких чисел в пределах миллиона больше: в записи которых встречается цифра 1 или в записи которых цифра

1 не встречается?

► **22.** Сколько всего четырёхзначных чисел, цифры которых идут в неубывающем порядке?

► **23.** Какое максимальное число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

► **24.** Может ли десятичная запись степени двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

► **25.** Даны две строки по n чисел в каждой. Как переставить числа в одной из них, чтобы сумма произведений чисел верхней строки на стоящие под ними числа нижней была бы а) максимальна, б) минимальна?

► **26.** Какое наибольшее количество лучей, образующих попарно тупые углы, можно провести из одной точки в пространстве?

► **27.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр, есть величина постоянная.

► **28.** Постройте центр окружности с помощью одного циркуля.

► **29.** Найдите на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

► **30.** Даны n отрезков. Их соединили в некотором порядке и получили n-угольник. Может ли так случиться, что, соединив отрезки в другом порядке и меняя произвольно углы между ними, всегда будут получаться многоугольники меньшей площади?

► **31.** Докажите, что из всех n-угольников с данным набором сторон наибольшую площадь имеет тот, который вписан в окружность.

► **32.** Можно ли разбить равносторонний треугольник на конечное число попарно различных равносторонних треугольников?

► **33.** Докажите, что любой (даже невыпуклый) многоугольник можно разрезать на треугольники непересекающимися диагоналями.

► **34.** Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус не меньше $1/2$.

► **35.** Могут ли числа 7, 8 и 9 быть (не обязательно соседними) членами одной геометрической прогрессии?

► **36.** Существует ли квадратный трёхчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа

n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

► **37.** Докажите, что из любых 13 последовательных натуральных чисел хотя бы одно меньше суммы своих делителей (кроме себя и 1).

► **38.** Может ли $3^n + 1$ делиться на 10^{10}?

► **39.** Имеются 20 гирь. Каждая весит целое число граммов. Докажите, что если общий вес всех гирь меньше тонны, то можно положить несколько гирь на одну чашу весов и несколько на другую, чтобы весы оказались в равновесии.

► **40.** Сколько на шахматной доске существует путей длины 15 с вертикальными и горизонтальными звеньями

а) соединяющих углы a1 и h8;

б) соединяющих эти углы и не проходящих через клетку e4?

► **41.** Соревнуются 10 фигуристов. Трое судей, каждый посвоему, распределяют между фигуристами места с первого по десятое, после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма у победителя, если победитель единственный?

► **42.** Постройте выпуклый четырёхугольник, если даны все его стороны и отрезок, соединяющий середины диагоналей.

► **43.** На плоскости расположен выпуклый n-угольник и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит точка P (или что она лежит на прямой). Какое наименьшее количество таких вопросов нужно задать, чтобы определить, лежит ли точка P внутри многоугольника?

► **44.** В стране Метрополии каждый город связан с каждым дорогой. Злой волшебник установил на всех дорогах одностороннее движение. Тем не менее оказалось, что из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что существует замкнутый путь, проходящий через все города Метрополии один раз.

► **45.** На окружности дано 10 точек. Сколькими способами можно провести 5 хорд с концами в этих точках, которые не пересекаются?

11 класс

► **1.** Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой две противоположные грани перпендикулярны плоскости основания?

► **2.** В пространстве отмечено несколько попарно пересекающихся прямых. Докажите, что либо все они либо проходят через одну точку, либо лежат в одной плоскости.

► **3.** При каком натуральном n величина $\frac{n^2}{1.001^n}$ принимает наибольшее значение?

► **4.** В ящиках лежат орехи. Известно, что среднее число орехов в ящиках равно 10, а средний квадрат числа орехов не больше 1000. Докажите, что по крайней мере 10% ящиков не пустые.

► **5.** Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что $P(a) - P(b) = 1$ при некоторых целых a и b. Докажите, что $|a - b| = 1$.

► **6.** Можно ли разбить пространство на попарно конгруэнтные тетраэдры?

► **7.** Внутри произвольной трапеции укажите точку, для которой сумма расстояний до сторон или их продолжений минимальна.

► **8.** Найдите максимум выражения $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

► **9.** Докажите, что показатель, с которым простое число p входит в разложение $n!$ на простые множители равен $\sum\limits_k \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

► **10.** Найдите сечение наибольшей площади правильного тетраэдра, параллельное двум его противоположным рёбрам.

► **11.** Какие n-угольники могут быть сечениями куба? Площадь какого сечения наибольшая?

► **12.** На рёбрах произвольного тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулю?

► **13.** Дан прямой трёхгранный угол с вершиной S. ABC — его сечение. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней тетраэдра $SABC$.

► **14.** Пусть n — целое. Докажите, что все коэффициенты бинома Ньютона $(1 + x)^n$ нечётны тогда и только тогда, когда $n = 2^k - 1$.

► **15.** Дана сфера S, точка P вне её и окружность на S. Докажите, что вторые точки пересечения сферы с прямыми, соединяющими точку P с точками окружности, лежат на другой окружности.

► **16.** Найдите предел последовательности: $\sqrt{1}$, $\sqrt{1+\sqrt{1}}$, $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \ldots$

► **17.** Докажите, что при $0 < a < \pi/2$, $0 < b < 1$ выполняется неравенство:

$$\int\limits_0^a \sin x dx + \int\limits_0^b \arcsin x dx \geqslant ab.$$

► **18.** Если два кубических многочлена с целыми коэффициентами имеют общий иррациональный корень, то они имеют еще один общий корень. Докажите.

► **19.** Докажите, что выпуклое тело, имеющее две оси вращения, является шаром.

► **20.** В любом тетраэдре есть такая вершина, что выходящие из неё рёбра удовлетворяют неравенству треугольника. Докажите.

► **21.** Четыре пешехода шли по плоскости с постоянными скоростями вдоль прямых. Известно, что первый встретился со вторым, третьим и четвертым, второй — с третьим и четвертым. Докажите, что третий встретился с четвертым.

► **22.** В треугольнике ABC взята точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Где нужно выбрать точку O, чтобы площадь треугольника $A_1B_1C_1$ была наибольшей?

► **23.** Существует ли функция, непрерывная на вещественной оси и принимающая каждое свое значение ровно два раза?

► **24.** Можно ли построить ломаную в квадрате со стороной 1, которую никакая прямая, параллельная стороне квадрата, не пересекает дважды?

а) ломаная имеет длину 1.9;

б) ломаная имеет длину 2.

► **25.** Один из коэффициентов квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ изменили на 0.001. Может ли его корень измениться более, чем на 1000?

► **26.** Решите уравнение:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{x}}}$$

► **27.** Через данные точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости α, проводятся сферы, касательные к α. Найдите множество точек касания.

► **28.** Докажите, что сумма телесных углов тетраэдра меньше 2π.

► **29.** Докажите, что площадь проекции единичного куба на плоскость численно равна длине его проекции на ортогональную плоскости прямую.

► **30.** В тетраэдре две высоты пересекаются. Докажите, что две другие высоты тоже пересекаются.

► **31.** Четыре самонаводящиеся ракеты выпущены одновременно из вершин единичного квадрата $A_1A_2A_3A_4$. Ракета, выпущенная из A_1, летит всё время по направлению к ракете, выпущенной из A_2. Ракета, выпущенная из A_2 — по направлению к ракете, выпущенной из A_3, и т.д. Скорости всех ракет равны. Каков путь каждой ракеты до столкновения?

► **32.** Докажите, что у любого несамопересекающегося многоугольника найдется диагональ, целиком лежащая внутри него.

► **33.** Найдите множество центров правильных треугольников со сторонами, проходящими через три данные точки.

► **34.** Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?

► **35.** В квадратной таблице $N \times N$ записаны неотрицательные числа так, что их сумма в любой строке и в любом столбце равна 1. Докажите, что в этой таблице можно выбрать N положительных чисел, никакие два из которых не будут находиться в одной строке или столбце.

► **36.** Докажите, что ортогональную проекцию треугольника можно покрыть этим треугольником.

► **37.** Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников черный, остальные — белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного треугольника. Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?

► **38.** Докажите, что треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник нельзя разрезать на выпуклые семиугольники.

► **39.** Найдите кривую наименьшей длины, которая соединяет какие-нибудь две точки, лежащие на сторонах правильного треугольника, и делит его площадь пополам.

► **40.** Найдите максимальную площадь проекции правильного тетраэдра с единичными рёбрами.

► **41.** Перед шеренгой из N солдат стоит капрал и командует: «Нале-во!». По этой команде некоторые солдаты поворачиваются налево, а некоторые — направо. Затем каждую секунду каждые два солдата, оказавшиеся лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками.

а) Докажите, что движение прекратится.

б) Через какое время это заведомо произойдет?

► **42.** Докажите, что существует миллион последовательных целых чисел, каждое из которых делится на сотую степень некоторого простого числа.

► **43.** Докажите, что центры двух окружностей и четыре точки пересечения внешних и внутренних касательных лежат на одной окружности.

► **44.** Докажите, что сумма длин ребер многогранника не меньше его утроенного диаметра.

► **45.** Пусть $s(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} s(2^n) = +\infty$.

► **46.** Какова максимальная длина замкнутой пятизвенной ломаной, вписанной в единичный круг?

► **47.** В единичном квадрате находятся n точек. Докажите, что существует несамопересекающаяся ломаная, на которой лежат все эти точки и длина которой меньше, чем $3\sqrt{n}$.

► **48.** Разбейте множество натуральных чисел на два подмножества A и B так, чтобы множество средних арифметических двух различных элементов из A содержало множество

B и не пересекалось с множеством A.

► **49.** Докажите, что если последняя цифра числа n не нуль, то существует целое k такое, что в десятичной записи числа kn нет ни одного нуля.

► **50.** Докажите, что внутри выпуклого многоугольника M можно поместить его образ при гомотетии с коэффициентом $-1/2$.

► **51.** Дана четвёрка чисел (a, b, c, d). Из неё получают новую четвёрку, вычитая соседние числа, а из последнего первое: $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Докажите, что рано или поздно получится четвёрка, одно из чисел которой будет по модулю превосходить 1990, за исключением случая, когда в начальный момент $a = b = c = d$.

► **52.** Любая проекция выпуклого многоугольника имеет диаметр не меньше единицы. Докажите, что внутри него можно поместить окружность радиуса $1/3$.

► **53.** Последовательность $\{a_n\}$ состоит из неотрицательных чисел, и для любых m и n $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$. Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

► **54.** В стране 1988 городов и 4000 дорог. Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов (каждая дорога соединяет два города).

► **55.** Среди треугольников с вершинами в 100 данных на плоскости точках общего положения не менее 70% остроугольных. Докажите.

Приложение

Советы участнику олимпиады

1. Прочитайте условия всех задач и наметьте, в каком порядке вы будете их решать. Учтите, что обычно задачи упорядочены по возрастанию их трудности.

2. Если условие, на ваш взгляд, можно понять разными способами, то не выбирайте самый удобный для себя, а обращайтесь к дежурному с вопросом.

3. Если задача решилась слишком легко — это подозрительно, возможно, вы неправильно поняли условие или где-то ошиблись.

4. Если задача не решается — попробуйте её упростить (взять меньшие числа, рассмотреть частные случаи и т.д.) или порешать ее «от противного», или заменить числа буквами и т. д.

5. Если неясно, верно ли некоторое утверждение, то пытайтесь его поочередно то доказывать, то опровергать (совет А. Н. Колмогорова).

6. Не зацикливайтесь на одной задаче: иногда отрывайтесь от нее и оценивайте положение. Если есть хоть небольшие успехи, то можно продолжать, а если мысль ходит по кругу, то задачу лучше оставить (хотя бы на время).

7. Если устали, отвлекитесь на несколько минут (посмотрите на облака или просто отдохните).

8. Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить его правильность и освободит внимание для других задач.

9. Каждый шаг решения надо формулировать, даже если он кажется очевидным. Удобно записывать решение в виде несколь-

ких утверждений (лемм). Это помогает при проверке и обсуждении работы.

10. Перед тем как сдать работу, перечитайте её «глазами проверяющих» — смогут ли они в ней разобраться?

Критерии оценки работ

Проверка работ на олимпиаде отличается от проверки контрольных. В школе внимание учителя сосредоточено на недостатках, поскольку это помогает отработать навыки и довести их до автоматизма. На олимпиаде цель другая — выявить позитивные идеи, найти думающих школьников, и потому отношение к опискам и даже ошибкам довольно снисходительное (тем более что многие школьники не умеют чётко выражать свои мысли). Был случай, когда специальный приз был присужден за самую красивую ошибку.

В соответствии с целями проведения олимпиады строится и система оценок. Традиционными стали следующие оценки:

$+$ задача решена правильно;

$\underset{\cdot}{+}$ задача решена, но имеются мелкие замечания к решению;

$\pm$ задача в целом решена (в решении имеются легко устранимые пробелы);

$+/\mathbf{2}$ имеется значительное продвижение в решении, но полное решение требует привлечения других существенных идей (задача решена «наполовину»);

$\mp$ задача не решена, но подход к решению правилен;

$\underset{\cdot}{-}$ задача не решена, но имеются некоторые разумные соображения;

$-$ задача решена неправильно;

0 задача не решалась или решение не записывалось;

! добавляется к оценке, если решение содержит яркие идеи.

Математический словарик

Выпуклая оболочка множества точек — минимальная выпуклая фигура, содержащая это множество. Минимальность означает, что любая выпуклая фигура, содержащая множество, содержит и его выпуклую оболочку. Выпуклая оболочка множества является пересечением всех выпуклых фигур, его содержащих.

Выпуклая фигура — фигура, вместе с любыми двумя своими точками содержащая отрезок, их соединяющий.

Свойства выпуклых фигур: а) пересечение любого (даже бесконечного) количества выпуклых фигур является выпуклой фигурой. б) если точка лежит вне фигуры, то существует разделяющая прямая, по одну сторону от которой лежит фигура, а по другую — данная точка.

Выпуклый многоугольник — многоугольник, обладающий любым из следующих эквивалентных свойств:

а) он является выпуклой фигурой;

б) он лежит по одну сторону от прямой, содержащей любую его сторону;

в) все его углы меньше 180°;

г) он является пересечением нескольких полуплоскостей;

д) он является выпуклой оболочкой конечного числа точек.

Выпуклая функция. Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (или просто выпуклой), если её подграфик (т. е. множество точек $\{(x,y) : y \leqslant f(x)\}$) является выпуклым. Функция называется выпуклой вниз (или вогнутой), если её надграфик является выпуклым множеством. Важный критерий выпуклости: неотрицательность второй производной. При решении задач применяется неравенство Йенсена для выпуклых вниз функций:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Граф. Во многих ситуациях удобно изображать объекты точками, а связи между ними — линиями или стрелками. Такой способ представления называется графом. Например схема метро — это граф. Точки называют вершинами графа, а линии — ребрами (см. тему «Графы»).

Дерево — граф без циклов.

Доказательство от противного. Косвенное доказательство, основанное на принципе: «Если противоположное утверждение неверно, то исходное утверждение верно». Рассуждают примерно так: «Допустим, исходное утверждение неверно. Если из этого получим противоречие, то исходное утверждение верно».

Дробная часть числа — разность между числом и его целой частью (всегда неотрицательна и меньше единицы). Обозначение $\{a\}$. Примеры: $\{5\} = 0$, $\{1.9\} = 0.9$, $\{-0.3\} = 0.7$.

Игра. Математические игры отличаются от обычных тем, что в них можно заранее определить исход игры. В таких играх предполагается, что игроки не делают ошибок, т. е. играют наилучшим образом.

Инвариант — величина, которая не изменяется в результате заданных операций (например, площадь фигуры относительно операций разрезания и перестановки частей).

Индукция (см. математическая индукция).

Композиция (суперпозиция) функций $f(y)$ и $g(x)$ — это функция $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Константа — постоянная величина относительно некоторой переменной. Обозначение const. Например, $f(x) = \text{const}$.

Контрпример — пример, опровергающий заданное утверждение.

Контур — замкнутая несамопересекающаяся линия.

Лемма — вспомогательное утверждение, которое используется как теорема. Изложение научных результатов и решений задач с помощью лемм облегчает восприятие основных идей и сокращает объем текста. (Аналогичную роль выполняет подпрограмма в структурном программировании.)

Математическая индукция. Метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального числа n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...», и т.д. (см. введение к теме «Индукция»).

Метод крайнего. Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, вершину многоугольника, предельный случай.

Натуральное число — одно из чисел 1, 2, 3, ... Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}_+$.

Обратный ход. Если в задаче задана некоторая операция, и эта операция обратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным.

Общее положение. а) точек на плоскости: точки не совпадают и любые три из них образуют треугольник (не лежат на одной прямой); б) прямых на плоскости: среди прямых нет параллельных и любые три из них образуют треугольник (никакие три не проходят через одну точку).

Олимпиадные задачи. Это тип задач, занимающих промежуточное положение между школьными задами и научными проблемами. Поскольку время на олимпиаде ограничено, желательно, чтобы отыскание пути к решению было главной трудностью, а оформление решения не требовало больших усилий.

Ориентированный граф — это граф, на каждом ребре которого указано направление. Ориентированный граф задают, соединяя вершины стрелками. Обход ориентированного графа производят, двигаясь только вдоль направления стрелок.

Парадокс — очевидно неверный результат, полученный внешне правильными рассуждениями. Причина парадокса заключается либо в тонкой логической ошибке, либо в неверных исходных предпосылках.

Параметр — величина, которая считается известной или которую можно выбрать. Например в уравнении прямой $y = ax + b$ буквами a и b обозначены параметры.

Принцип Дирихле. В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух кроликов» (см. введение к теме «Принцип Дирихле»).

Подслово — часть слова из букв, идущих в нем подряд.

Равновеликие фигуры — фигуры на плоскости, имеющие одинаковую площадь, или в пространстве, имеющие одинаковый объем.

Равносоставленные фигуры — две фигуры, одну из которых можно разрезать на части, из которых можно сложить другую.

Разбиение — представление фигуры в виде объединения нескольких непересекающихся (кроме, быть может, по границе) фигур.

Раскраска. Говорят, что фигура покрашена в несколько цветов, если каждой точке фигуры приписан определенный цвет.

Рациональная точка — точка с рациональными координатами.

Редукция — сведение исходной задачи к другой, более простой (например, чтобы найти сумму внутренних углов многоугольника, можно разрезать его на треугольники).

Слово — упорядоченный набор букв (символов).

Суперпозиция функций (см. композиция функций).

Тривиальный — легко осуществимый, хорошо известный, не требующий новых идей (в средние века «тривиум» — это начальный курс из трех наук: грамматики, риторики и диалектики).

Факториал — произведение всех натуральных чисел от единицы до некоторого числа. Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (соглашение: $0!=1$).

Целая точка — точка с целочисленными координатами.

Целая часть числа — наибольшее целое число, не превосходящее данное. Обозначение $[a]$. Примеры: $[5] = 5$, $[1.9] = 1$, $[-0.3] = -1$.

Целочисленный вектор — вектор с целочисленными координатами.

Цикл — замкнутый путь по ребрам графа, вдоль которого вершины не повторяются. Цикл в ориентированном графе должен проходить по направлению стрелок.

Обозначения

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных (вещественных) чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\varnothing$	пустое множество
$[a]$	целая часть числа
$\{a\}$	дробная часть числа
$a \vdots b$	a делится на b
$a \mid b$	a делит b (b делится на a)
$\text{НОД}(m,n)$	наибольший общий делитель чисел m и n
$\text{НОК}(m,n)$	наименьшее общее кратное чисел m и n
$\Rightarrow$	следует, влечет за собой (например, $a=1 \Rightarrow a^2=1$)
$\Leftrightarrow$	равносильно; эквивалентно; необходимо и достаточно; тогда и только тогда; если и только если (пример: $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ и $b=0$)
$\overline{abc}$	десятичная запись числа ($\overline{abc}=100a+10b+c$)
$n!$	факториал, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ (соглашение: $0!=1$)
$\max(a,b)$	максимум — наибольшее из двух чисел a и b
$\min(a,b)$	минимум — наименьшее из двух чисел a и b
$[a,b]$	отрезок числовой прямой (концы ему принадлежат)
(a,b)	интервал числовой прямой (концы ему не принадлежат)
$[a,b)$	полуинтервал
$f([a,b])$	множество значений функции на отрезке $[a,b]$
ΔABC	треугольник с вершинами A, B и C
$\angle A$	угол A
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$	сумма $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
$\prod\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$	произведение $f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$
$f\circ g(x)$	$f(g(x))$ — композиция (суперпозиция) функций
$f^{(k)}(x)$	k-я производная функции $f(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty}$	предел при n, стремящемся к бесконечности
const	константа, постоянная величина

Советуем почитать

Книги, рекомендуемые для подготовки к олимпиадам, отмечены звёздочкой.

Книги о математике и математиках

[1] С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках. — М., МЦНМО, 2001.

[2] А. Гротендик. Урожаи и посевы. Размышление о прошлом математика. — М., Регулярная и хаотическая динамика, 1999. М., Наука, 1982.

[3] М. Кац, С. Улам. Математика и логика. — М., Мир, 1971.

[4] А. Н. Колмогоров. Математика — наука и профессия. — М., Наука, 1988.

[5] Дж. Литлвуд. Математическая смесь. — М., Наука, 1990.

[6] Д. Пидоу. Геометрия и искусство. — М., Мир, 1979.

*[7] Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. — М., Наука, 1975.

*[8] Д. Пойа. Математическое открытие. — М., Наука, 1976.

*[9] Д. Пойа. Как решать задачу. — М., Учпедгиз, 1961.

[10] Рассказы о математике и математиках. Сост. С. М. Львовский — М., МЦНМО, 2000.

[11] У. Сойер. Путь в современную математику. — М., Мир, 1972.

[12] Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. — М., Наука, 1984.

[13] С. Сингх. Великая теорема Ферма. — М., МЦНМО, 2000.

Книги для первого чтения

*[14] У. Болл, Г. Кокстер. Математические эссе и развлечения. — М., Мир, 1986.

[15] Н. Я. Виленкин. Популярная комбинаторика. — М., Наука, 1965.

[16] Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах. — М., Наука, 1965.

*[17] С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки. — Киров, АСА, 1994.

∗[18] М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. — М., Мир, 1999.

∗[19] М. Гарднер. Математические досуги. — М., Мир, 2000.

∗[20] М. Гарднер. Математические новеллы. — М., Мир, 2000.

[21] И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат. — М., Наука, 1973.

[22] Е. Я. Гик. Математика на шахматной доске. — М., Наука, 1986.

[23] В. Н. Дубровский, А. Т. Калинин. Математические головоломки. — М., Знание, 1990.

[24] Е. И. Игнатьев. В царстве смекалки. — Ростов-на-Дону, 1995.

[25] Л. Кэрролл. История с узелками. — М., Мир, 2000.

[26] Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. Лучшие задачи на смекалку. — М., АСТ Пресс, 1999.

[27] Я. И. Перельман. Занимательная алгебра. — М., Наука, 1974.

∗[28] В. В. Произволов. Задачи на вырост. — М., МИРОС, 1995.

[29] А. П. Савин. Математические миниатюры. — М., 1991.

∗[30] А. В. Спивак. Тысяча и одна задача по математике — М., Просвещение, 2002.

∗[31] В. А. Уфнаровский. Математический аквариум. — М., Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

∗[32] Г. Штейнгауз. Задачи и размышления. — М., Мир, 1974.

[33] Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп. — М., Наука, 1981.

[34] Энциклопедический словарь юного математика. Составитель А. П. Савин. — М., Педагогика, 1985.

Книги для продвинутых читателей

[35] М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. Геометрия масс. — М., Наука, 1987.

[36] В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология. — М., Наука, 1982.

∗[37] И. М. Виноградов. Основы теории чисел. — М., Наука, 1972.

∗[38] Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. — М., МЦНМО, 2000.

∗[39] Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи. — М., Наука, 1992.

[40] И. М. Гельфанд, А. Х. Шень. Алгебра. — М., Наука, 1981.

[41] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. — М., Наука, 1981.

[42] Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. — М., МЦНМО, 2003.

[43] Б. М. Давидович, П. Е. Пушкарь, Ю. В. Чеканов. Математический анализ в 57 школе. — М., МЦНМО, 1998.

[44] Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский. Математические беседы. — М.–Л., 1952.

[45] А. А. Кириллов. Пределы. — М., Фазис, 1995.

[46] Ф. Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М., Наука, 1987.

[47] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. — М., Мир. 1998.

[48] Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. — М., Наука, 1966.

∗[49] Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. — М., Наука, 1978.

[50] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? — М., МЦНМО, 2001.

[51] Математические задачи. Под редакцией А. Шеня. — М., МЦНМО, 2000.

[52] Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М., Наука, 1985. М., Наука, 1983.

[53] Е. П. Ожигова. Что такое теория чисел. — М., Знание, 1970.

[54] О. Оре. Графы и их применение. — М., Мир, 1965.

∗[55] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М., МЦНМО, 2001.

∗[56] В. В. Прасолов. Рассказы о числах, многочленах и фигурах. — М., Фазис, 1997.

∗[57] В. В. Прасолов. Геометрические задачи древнего мира. — М., Фазис, 1997.

∗[58] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. — М., Наука, 1989.

[59] Г. Радемахер, О. Теплиц. Числа и фигуры (опыты математического мышления). — М., Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

[60] С. Л. Табачников. Многочлены. — М., Фазис, 1996.

[61] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сендс. Фейнмановские лекции по физике. — М., Мир, 1977. (том 1, глава "Алгебра")

[62] А. Я. Хинчин. Цепные дроби. — М., Наука, 1978.

∗[63] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. — М., Физматлит, 2001.

*[64] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы планиметрии.— М., Физматлит, 2001.

*[65] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. Стереометрия. — М., Физматлит, 2000.

*[66] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М., Наука, 1970.

*[67] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М., Наука, 1974.

[68] Энциклопедия элементарной математики. В 5 томах. — М., Наука, 1951–1966.

*[69] А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. —- М., Наука, 1954.

Сборники олимпиадных задач

*[70] Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. Математические олимпиады школьников. 9 класс. — М., Просвещение, 1997.

*[71] Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. Математические олимпиады школьников. 10 класс. — М., Просвещение, 1998.

*[72] Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Резниченко, А. М. Слинько. Математические олимпиады школьников. 11 класс. — М., Просвещение, 1999.

*[73] Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. Математические олимпиады Московской области. — М., МФТИ, 2003.

*[74] Б. Д. Белоусов и др. Республиканские математические олимпиады. — Кишинев, Штиинца, 1986.

*[75] С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К. П. Кохась. Петербургские математические олимпиады. С.-Пб., М., Краснодар, Лань, 2003.

*[76] В. О. Бугаенко. Турниры им. Ломоносова (конкурсы по математике) — М., МЦНМО–ЧеРо. 1998.

*[77] Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. Заочные математические олимпиады. — М., Наука, 1986.

*[78] Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М., Наука, 1988.

*[79] В. А. Вышенский и др. Сборник задач Киевских математических олимпиад. — Киев, Вища школа, 1984.

*[80] Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. Венгерские математические олимпиады. — М., Мир, 1976.

*[81] Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. Московские математические олимпиады. — М., Просвещение, 1986.

*[82] Двенадцать турниров. Математические Турниры городов с 1 по 12-й. Под редакцией Н. Н. Константинова. — М., ИЦТГ, 1991.

*[83] С. А. Дориченко, И. В. Ященко. LVIII московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач, — М., ТЕИС, 1994

*[84] Зарубежные математические олимпиады. Под редакцией И. Н. Сергеева. — М., Наука, 1987.

*[85] Избранные задачи (из журнала American Mathematical Monthly) М., Мир, 1977.

*[86] А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, Н. Б. Васильев — Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года, 8–11 класс. — М., 1994.

*[87] А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. Московские математические олимпиады. 60 лет спустя. — М., Бюро Квантум, 1995. (Приложение к журналу «Квант» 6/95.)

*[88] А. А. Леман. Сборник задач московских математических олимпиад. — М., Просвещение, 1965.

*[89] Л. Э. Медников, А. С. Мерзляков. Математические олимпиады. — М., Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

*[90] Международные математические олимпиады. Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. — М., Дрофа, 1998.

*[91] Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. Международные математические олимпиады. — М., Просвещение, 1976.

*[92] С. Е. Рукшин. Математические соревнования в Ленинграде–Санкт-Петербурге. — Ростов-на-Дону, Март, 2000.

*[93] С. Сташевич, Е. Бровкин. Польские математические олимпиады. — М., Мир, 1978.

*[94] А.П. Савин и др. Физико-математические олимпиады. — М., Знание, 1977.

*[95] Д. В. Фомин. Санкт-Петербургские математические олимпиады. — С-Пб., Политехника, 1994.

*[96] Г. Штейнгауз. Сто задач. — М., Наука, 1976.

*[97] Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. Всероссийские математические олимпиады школьников. — М., Просвещение, 1992.

Алексей Яковлевич Канель-Белов
Александр Кириллович Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Под редакцией В. О. Бугаенко

Подписано в печать 06.10.2014 г. Формат $84 \times 108\ ^1\!/_{32}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,04.
Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования. 119002, Москва,
Б. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8».
Тел. 8 (495) 363-48-86.
http://capitalpress.ru