*Уважаемый читатель!*

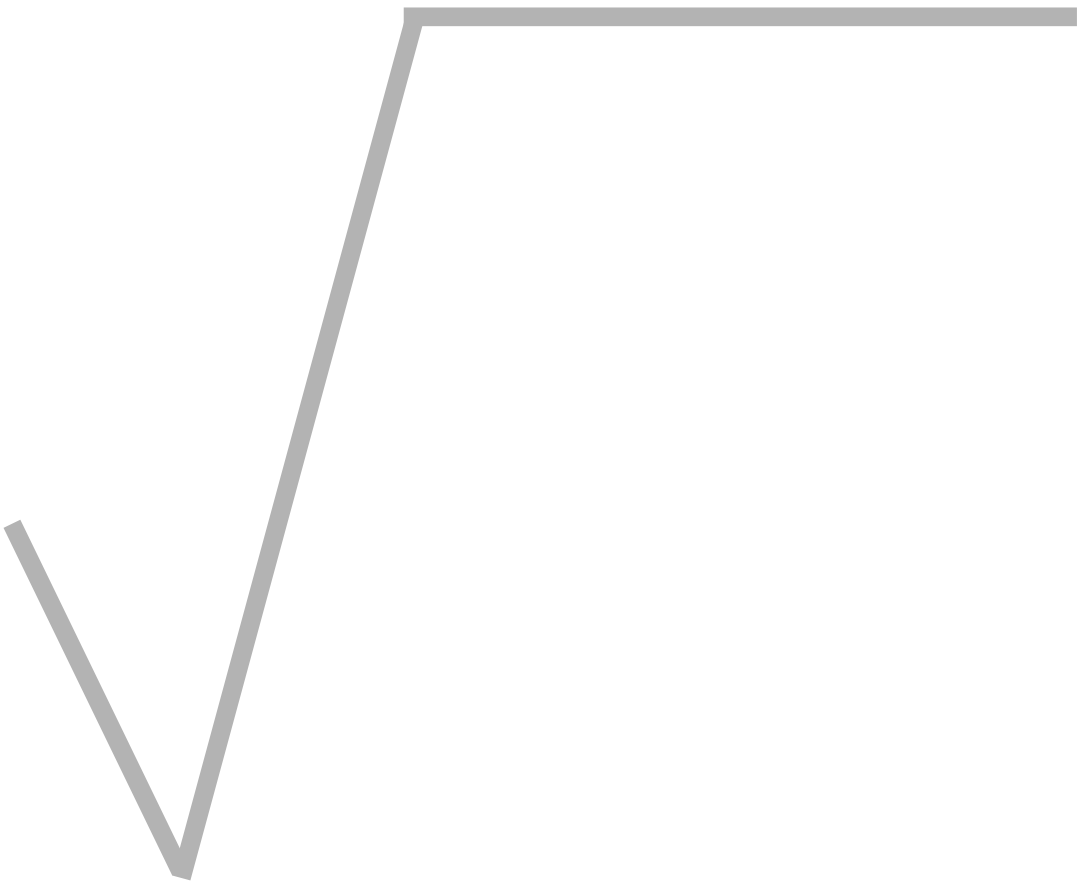
*Вы держите в руках один из учебников нового поколения по математике для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественно-научным направлениям и специальностям. Учебник написан известными специалистами в области математики и прошел сложный и длительный путь конкурсного отбора на Всероссийском конкурсе учебников нового поколения по общим фундаментальным естественнонаучным дисциплинам. Этот конкурс был инициирован Госкомвузом (в дальнейшем — Минобразованием России) впервые в истории российской высшей школы в связи с реформированием структуры и содержания программ высшего образования и проведен в 1995—1998 годах на базе Российского университета дружбы народов.*

*В конкурсе по одиннадцати номинациям приняли участие свыше трехсот пятидесяти авторских коллективов, чьи разработки более всего соответствовали как новым учебным программам, так и государственным образовательным стандартам по каждой дисциплине.*

*Конкурсная комиссия выражает надежду, что данный учебник внесет вклад в дело дальнейшего совершенствования российского высшего профессионального образования, и желает всем читателям — студентам и преподавателям — больших творческих успехов.*

*Академик Российской академии образования,*
*председатель конкурсной комиссии*
*профессор В. Д. ШАДРИКОВ*

# MATE



Б. М. ВЛАДИМИРСКИЙ
А. Б. ГОРСТКО
Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ

# МАТИКА

## ОБЩИЙ КУРС

УЧЕБНИК

Издание четвертое,
стереотипное

*Допущено*
*Министерством образования Российской Федерации*
*в качестве учебника*
*для бакалавров естественнонаучных направлений*

ЛАНЬ®
• Санкт-Петербург • 2008 • Москва • Краснодар

ББК 22.1
В 57

**Владимирский Б. М., Горстко А. Б. Ерусалимский Я. М.**

**В 57** Математика. Общий курс: Учебник. 4-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 960 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0445-2**

Данный учебник содержит в себе весь курс математики, необходимой для подготовки бакалавра по новым образовательным стандартам. Книга будет полезна студентам, изучающим естественные науки, а также преподавателям, читающим математические курсы.

ББК 22.1

Рецензенты:
кафедра высшей математики Казанского государственного университета
(зав. кафедрой проф. Н. Г. Гурьянов),
проф. В. Ф. Бутузов
(Московский физико-технический институт)

Обложка
*А. Ф. ЛУРЬЕ*

***Охраняется законом РФ об авторском праве.***
***Воспроизведение всей книги или любой ее части***
***запрещается без письменного разрешения издателя.***
***Любые попытки нарушения закона будут***
***преследоваться в судебном порядке.***

© Издательство «Лань», 2008
© Б. М. Владимирский,
А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский, 2008
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2008

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие ко второму изданию . . . 12
Предисловие к первому изданию . . . 13
Вводная глава . . . 16

**I. Алгебра и геометрия** . . . 23

**I. Метод координат** . . . 25
§ 1.1. Числовая прямая (ось). Координаты точек на оси. Направленные отрезки. Аналитическая геометрия на прямой . . . 25
§ 1.2. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве . . . 28
§ 1.3. Деление отрезка в заданном отношении . . . 29
§ 1.4. Полярные координаты на плоскости. Сферические и цилиндрические координаты в пространстве . . . 31
§ 1.5. Преобразования координат . . . 33
§ 1.6. Понятие об уравнениях линий и поверхностей . . . 35

**II. Прямая на плоскости** . . . 37
§ 2.1. Векторы и их координаты. Простейшие понятия . . . 37
§ 2.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом . . . 38
§ 2.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой коэффициент . . . 39
§ 2.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки . . . 39
§ 2.5. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор . . . 40
§ 2.6. Уравнение прямой в отрезках на осях . . . 40
§ 2.7. Параметрические уравнения прямой . . . 41
§ 2.8. Нормальное уравнение прямой . . . 42
§ 2.9. Общее уравнение прямой . . . 43
§ 2.10. Линейная и кусочно-линейная интерполяция . . . 45

**III. Кривые второго порядка** . . . 47
§ 3.1. Канонические уравнения . . . 47
§ 3.2. Общая теория кривых второго порядка . . . 55

**IV. Алгебра матриц** . . . 60
§ 4.1. Понятие о матрице . . . 60
§ 4.2. Сумма матриц и умножение матрицы на число . . . 61
§ 4.3. Умножение матриц . . . 64
§ 4.4. Обратная матрица . . . 69

**V. Системы линейных уравнений (СЛУ)** . . . 72
§ 5.1. СЛУ. Матричная запись . . . 72
§ 5.2. Равносильные преобразования СЛУ . . . 75
§ 5.3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса) . . . 75
§ 5.4. Решение матричных уравнений методом Гаусса . . . 77
**VI. Определители** . . . 80
§ 6.1. Перестановки и подстановки . . . 80
§ 6.2. Определители . . . 83
§ 6.3. Свойства определителей . . . 85
§ 6.4. Миноры и алгебраические дополнения . . . 87
§ 6.5. Критерий обратимости матрицы . . . 90
**VII. Комплексные числа** . . . 94
§ 7.1. Комплексные числа: алгебраический подход . . . 94
§ 7.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел . . . 96
§ 7.3. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме . . . 97
§ 7.4. Деление комплексных чисел . . . 98
§ 7.5. Свойства модуля и комплексного сопряжения . . . 98
§ 7.6. Корни из комплексных чисел . . . 99
**VIII. Многочлены (алгебраическая теория)** . . . 101
§ 8.1. Определение многочлена. Степень многочлена . . . 101
§ 8.2. Деление во множестве многочленов . . . 103
§ 8.3. Корни многочлена. Разложение по корням . . . 105
§ 8.4. Многочлены с вещественными коэффициентами . . . 107
**IX. Линейные пространства** . . . 110
§ 9.1. Определение и примеры линейных пространств . . . 110
§ 9.2. Линейная зависимость и линейная независимость . . . 112
§ 9.3. Размерность и базис линейного пространства . . . 114
§ 9.4. Изоморфизм линейных пространств . . . 116
§ 9.5. Матрица перехода от базиса к базису . . . 117
**X. Векторы. Аналитическая геометрия в пространстве** . . . 119
§ 10.1. Сумма векторов и умножение вектора на число . . . 119
§ 10.2. Проекция вектора на ось . . . 120
§ 10.3. Скалярное произведение векторов . . . 121
§ 10.4. Векторное произведение векторов . . . 123
§ 10.5. Смешанное произведение векторов . . . 124
§ 10.6. Прямая и плоскость в пространстве . . . 125
§ 10.7. Поверхности второго порядка . . . 128
§ 10.8. О проблеме обоснования метода координат и оснований геометрии . . . 135
**XI. Ранг матрицы и его приложения** . . . 137
§ 11.1. Ранг матрицы и его определения . . . 137
§ 11.2. Вычисление ранга . . . 140
§ 11.3. Приложения понятия «ранг матрицы» . . . 141
§ 11.4. Пространство решений ОСЛУ . . . 142
**XII. Линейные пространства со скалярным произведением (евклидовы пространства)** . . . 144
§ 12.1. Скалярное произведение в $\mathbb{R}_n$ . . . 144
§ 12.2. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского . . . 145
§ 12.3. Ортогональный базис. Ортогонализация. Проекция вектора на подпространство. Ортогональная составляющая, расстояние до подпространства . . . 148
**XIII. Линейные операторы и их матрицы** . . . 152
§ 13.1. Линейный оператор . . . 152
§ 13.2. Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матрицы . . . 153
§ 13.3. Композиция линейных операторов . . . 155
§ 13.4. Собственные значения и собственные векторы . . . 155
§ 13.5. Ядро и образ линейного оператора. Линейные уравнения в конечномерных пространствах . . . 160

**XIV. Квадратичные формы** . . . 165
§ 14.1. Квадратичные формы и их матрицы . . . 165
§ 14.2. Канонический вид квадратичной формы . . . 166
§ 14.3. Классификация квадратичных форм. Знакоопределенные формы . . . 171

**II. Математический анализ** . . . 175
**XV. Введение в анализ** . . . 177
§ 15.1. Высказывания и логические операции над ними . . . 177
§ 15.2. Понятие о прямой и обратной теоремах . . . 181
§ 15.3. Предикаты и кванторы . . . 181
§ 15.4. Множества и операции над ними . . . 184
§ 15.5. Отображения ( $\Leftrightarrow$ Функции) . . . 188
§ 15.6. Элементы комбинаторики . . . 192
**XVI. Предел последовательности** . . . 208
§ 16.1. Вещественные числа. Множества на числовой оси . . . 208
§ 16.2. Последовательности. Предел последовательности . . . 210
§ 16.3. Теоремы об арифметических операциях над последовательностями, имеющими предел . . . 215
§ 16.4. Число $e$ . . . 216
§ 16.5. Дополнения и пояснения . . . 217
**XVII. Предел функции. Непрерывность** . . . 219
§ 17.1. Определение предела функции . . . 219
§ 17.2. Арифметические операции над функциями, имеющими предел . . . 222
§ 17.3. Замечательные пределы . . . 223
§ 17.4. Непрерывность функции в точке и на множестве . . . 225
§ 17.5. Непрерывность элементарных функций . . . 227
§ 17.6. Свойства непрерывных функций . . . 229
§ 17.7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . 232
§ 17.8. Сравнение бесконечно малых . . . 235
**XVIII. Производная функции** . . . 239
§ 18.1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл . . . 239
§ 18.2. Простейшие правила нахождения производной . . . 241
§ 18.3. Производная обратной функции . . . 243
§ 18.4. Производные элементарных функций (табличные производные) . . . 243
§ 18.5. Производная сложной функции (композиции) . . . 245
§ 18.6. Дифференциал . . . 246
§ 18.7. Производные и дифференциалы высших порядков . . . 249
§ 18.8. Основные теоремы о дифференцируемых на отрезке функциях . . . 252
§ 18.9. Формула Тейлора и ее применения . . . 257
**XIX. Исследование функций с помощью производных** . . . 265
§ 19.1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значение функции . . . 265
§ 19.2. Выпуклость вверх и вниз, точки перегиба . . . 268
§ 19.3. Асимптоты кривых . . . 270
§ 19.4. Исследование функций и построение их графиков . . . 271
§ 19.5. Задачи на экстремум . . . 273
**XX. Неопределенный интеграл** . . . 274
§ 20.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла . . . 274
§ 20.2. Геометрический смысл неопределенного интеграла . . . 276
§ 20.3. Таблица интегралов и простейшие методы интегрирования . . . 277
§ 20.4. Интегрирование тригонометрических функций . . . 285
§ 20.5. Интегралы некоторых иррациональных выражений . . . 288
§ 20.6. Общие замечания и советы . . . 291

**XXI. Определенный интеграл и его приложения** . . . 292
§ 21.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла . . . 292
§ 21.2. Интегральные суммы. Определенный интеграл как предел интегральных сумм . . . 294
§ 21.3. Теорема о среднем значении и ее приложение . . . 299
§ 21.4. Приложения определенного интеграла . . . 302
§ 21.5. Приближенные методы вычисления определенных интегралов . . . 309
§ 21.6. Несобственные интегралы . . . 313
§ 21.7. Замечания в конце главы . . . 317
**XXII. Функции многих переменных** . . . 319
§ 22.1. Функции многих переменных . . . 319
§ 22.2. Предел и непрерывность функции многих переменных . . . 321
§ 22.3. Частные производные . . . 324
§ 22.4. Дифференциал функции многих переменных . . . 327
§ 22.5. Дифференцирование композиции функций (сложной функции) и неявных функций . . . 330
§ 22.6. Градиент, его геометрический смысл. Касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности и ее уравнение . . . 334
§ 22.7. Экстремум функции многих переменных . . . 339
**XXIII. Кратные и криволинейные интегралы** . . . 343
§ 23.1. Двойной интеграл . . . 343
§ 23.2. Тройной интеграл . . . 353
§ 23.3. Криволинейный интеграл . . . 356
§ 23.4. Векторные поля . . . 360
§ 23.5. Криволинейный интеграл I рода (криволинейный интеграл по кривой от скалярной функции) и интеграл по поверхности . . . 367
§ 23.6. Приложения интеграла по поверхности . . . 370
**XXIV. Ряды** . . . 379
§ 24.1. Числовые ряды . . . 379
§ 24.2. Ряды с положительными членами. Знакоопределенные ряды . . . 384
§ 24.3. Знакопеременные числовые ряды . . . 390
§ 24.4. Остаток ряда и его оценка . . . 394
§ 24.5. Функциональные ряды . . . 396
§ 24.6. Степенные ряды . . . 399
§ 24.7. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена . . . 405
**XXV. Ряды Фурье** . . . 414
§ 25.1. Периодические процессы и периодические функции . . . 414
§ 25.2. Ряды Фурье . . . 416
§ 25.3. Ряды Фурье четных и нечетных функций. Ряды Фурье по «нестандартному отрезку». Ряд Фурье как способ продолжения функции . . . 419

**III. Теория функций комплексного переменного. Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики** 423
**XXVI. Последовательности и функции комплексного переменного** . . . 425
§ 26.1. Последовательности комплексных чисел. Предел последовательности . . . 425
§ 26.2. Кривые и области на комплексной плоскости. Геометрическое истолкование функции . . . 427
**XXVII. Производная функции комплексного переменного** . . . 431
§ 27.1. Предел функции. Непрерывность функции. Производная . . . 431
§ 27.2. Аналитичность функции. Аналитичность многозначной функции . . . 436
**XXVIII. Интегралы и ряды** . . . 438
§ 28.1. Ряды с комплексными числами. Степенные ряды в комплексной плоскости . . . 438
§ 28.2. Элементарные функции $\sin z$, $\cos z$, $e^z$, $\ln z$ на комплексной плоскости . . . 443
§ 28.3. Интеграл от функции комплексного переменного . . . 446
§ 28.4. Теорема Коши и интегральная формула Коши . . . 450
§ 28.5. Ряд Тейлора. Особые точки функции . . . 456
§ 28.6. Корни аналитической функции . . . 461
§ 28.7. Ряд Лорана . . . 462
§ 28.8. Изолированные особые точки однозначного характера . . . 466
§ 28.9. Вычеты и их приложения . . . 468
§ 28.10. Применение ТФКП к гидромеханике . . . 477

**XXIX. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка** . . . . . 482
§ 29.1. Геометрическая интерпретация . . . . . 484
§ 29.2. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка, которые легко интегрируются 486
§ 29.3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений . . . . . 495
§ 29.4. Модели реальных ситуаций . . . . . 498
**XXX. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков** . . . . . 504
§ 30.1. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $n$-го порядка . . . . . 504
§ 30.2. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка . . . . . 505
§ 30.3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . . 511
§ 30.4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов . . . . . 518
§ 30.5. Краевые задачи . . . . . 519
§ 30.6. Системы дифференциальных уравнений . . . . . 520
§ 30.7. Системы линейных дифференциальных уравнений . . . . . 524
§ 30.8. Теория устойчивости . . . . . 532
§ 30.9. Модели реальных ситуаций . . . . . 538
**XXXI. Математическое моделирование физических процессов** . . . . . 548
§ 31.1. Классификация уравнений в частных производных . . . . . 549
**XXXII. Уравнения гиперболического типа** . . . . . 552
§ 32.1. Уравнение колебаний струны . . . . . 552
§ 32.2. Решение уравнения колебаний струны. Задача Штурма–Лиувилля . . . . . 553
**XXXIII. Уравнения параболического типа** . . . . . 558
§ 33.1. Вывод уравнения теплопроводности . . . . . 558
§ 33.2. Начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности . . . . . 560
§ 33.3. Метод разделения переменных . . . . . 561
**XXXIV. Уравнения эллиптического типа** . . . . . 569
§ 34.1. Уравнение Лапласа в различных системах координат . . . . . 570
§ 34.2. Решение краевой задачи для круга . . . . . 572
**XXXV. Интегральные уравнения** . . . . . 577
§ 35.1. Метод итераций . . . . . 578
§ 35.2. Связь между интегральными и линейными алгебраическими уравнениями . . . . . 581
§ 35.3. Важный частный случай . . . . . 587
§ 35.4. Применение интегральных уравнений к теории колебаний . . . . . 590

**IV. Основы теории вероятностей и математической статистики** 595
**XXXVI. Основные понятия теории вероятностей** . . . . . 599
§ 36.1. Пространство элементарных событий и вероятность . . . . . 599
§ 36.2. Геометрическая вероятность . . . . . 602
§ 36.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей . . . . . 605
§ 36.4. Условная вероятность . . . . . 607
§ 36.5. Полная вероятность и формула Байеса . . . . . 610
**XXXVII. Случайные величины и распределения вероятностей** . . . . . 618
§ 37.1. Понятия о случайных величинах и функциях распределения . . . . . 618
§ 37.2. Теоретические распределения вероятностей . . . . . 621
§ 37.3. Числовые характеристики случайных величин . . . . . 630
**XXXVIII. Предельные теоремы теории вероятностей** . . . . . 637
§ 38.1. Закон больших чисел . . . . . 637
§ 38.2. Центральные предельные теоремы . . . . . 640
**XXXIX. Основы теории информации** . . . . . 645
§ 39.1. Мера количества информации . . . . . 646
§ 39.2. Энтропия и ее свойства . . . . . 648
**XL. Общие вопросы статистического анализа экспериментальных данных** . . . . . 656
§ 40.1. Документирование и представление первичных данных . . . . . 658
§ 40.2. Программное обеспечение прикладной статистики . . . . . 664

**XLI. Описательные статистики** . . . 666
§ 41.1. Концепция сжатия экспериментальных данных . . . 666
§ 41.2. Показатели центральной тенденции . . . 668
§ 41.3. Показатели изменчивости . . . 672
§ 41.4. Показатели асимметрии и эксцесса . . . 678
**XLII. Оценка взаимосвязей** . . . 684
§ 42.1. Корреляция и причинная зависимость . . . 684
§ 42.2. Коэффициент корреляции . . . 685
§ 42.3. Интерпретация коэффициента корреляции . . . 690
§ 42.4. Другие меры связи . . . 692
**XLIII. Регрессионный анализ** . . . 701
§ 43.1. Метод наименьших квадратов . . . 703
§ 43.2. Выбор формы функциональной зависимости . . . 705
§ 43.3. Линейные регрессионные уравнения . . . 707
§ 43.4. Частная и множественная корреляция . . . 710
**XLIV. Статистическое оценивание и проверка гипотез** . . . 717
§ 44.1. Теоретические распределения, используемые в статистических выводах . . . 717
§ 44.2. Выборочные распределения и свойства оценок . . . 720
§ 44.3. Методы получения точечных оценок . . . 724
§ 44.4. Интервальное оценивание . . . 727
§ 44.5. Проверка статистических гипотез . . . 730
**XLV. Использование критериев согласия** . . . 737
§ 45.1. Критерии согласия для средних . . . 737
§ 45.2. Критерии согласия для дисперсий . . . 743
§ 45.3. Критерии согласия для корреляционных показателей . . . 746
§ 45.4. Критерии согласия относительно долей . . . 748
§ 45.5. Критерии для сравнения распределений численностей . . . 751
§ 45.6. Критерии для проверки случайности и оценки резко выделяющихся наблюдений . . . 760
**XLVI. Основы дисперсионного анализа** . . . 765
§ 46.1. Две модели дисперсионного анализа . . . 765
§ 46.2. Разбиение суммы квадратов . . . 767
§ 46.3. Однофакторный дисперсионный анализ с постоянными эффектами . . . 768
§ 46.4. Множественное сравнение средних . . . 770
**XLVII. Элементы анализа динамических рядов** . . . 775
§ 47.1. Обнаружение и выделение тренда . . . 776
§ 47.2. Обнаружение колебательных составляющих динамического ряда . . . 780
§ 47.3. Другие вопросы анализа динамических рядов . . . 786
**XLVIII. Применения многомерного статистического анализа** . . . 790
§ 48.1. Проверка гипотез о равенстве средних . . . 791
§ 48.2. Проверка гипотезы независимости . . . 794
§ 48.3. Дискриминантный анализ . . . 795
§ 48.4. Кластерный анализ . . . 798
§ 48.5. Метод главных компонент . . . 801
§ 48.6. Факторный анализ . . . 804

**V. Дискретная математика. Методы оптимизации. Математическое моделирование** . . . 811
**XLIX. Основы дискретной математики** . . . 813
§ 49.1. Общее определение графа. Локальные характеристики . . . 813
§ 49.2. Изоморфизм графов. Геометрические графы. Плоские и неплоские графы. Реализуемость в $\mathbb{R}_3$. Пути, цепи, контуры, циклы . . . 816
§ 49.3. Части графа: подграф, частичный граф. Связность и сильная связность, компоненты. Мосты графа. Эйлеровость графа . . . 822
§ 49.4. Эйлеровы графы, критерий эйлеровости . . . 826
§ 49.5. Деревья и леса . . . 829
§ 49.6. Помеченные графы. Перечисление помеченных деревьев . . . 833

**L. Матрицы графа. Алгоритмы анализа графов** . . . 836
§ 50.1. Способы задания конечных графов. Матрицы графов . . . 836
§ 50.2. Алгоритмы нахождения компонент связности и сильной связности и другие алгоритмы анализа графов . . . 843
§ 50.3. Задача о соединении городов . . . 848
§ 50.4. Кратчайшие пути на графе . . . 851
§ 50.5. Матрица расстояний . . . 853
§ 50.6. Потоки в сетях . . . 855
**LI. Классические методы оптимизации** . . . 865
§ 51.1. Необходимые условия экстремума . . . 866
§ 51.2. Условный экстремум . . . 867
§ 51.3. Процедуры одномерного поиска . . . 872
**LII. Линейное программирование** . . . 876
§ 52.1. Простейшая модель линейного программирования — задача о раскрое . . . 877
§ 52.2. Общая задача линейного программирования . . . 886
§ 52.3. Симплекс-метод . . . 889
§ 52.4. Транспортная задача . . . 893
**LIII. Общая постановка оптимизационной задачи** . . . 898
§ 53.1. Математическое программирование . . . 898
§ 53.2. Нелинейное программирование . . . 899
§ 53.3. Прямые методы поиска экстремума . . . 903
§ 53.4. Необходимые условия экстремума . . . 908
§ 53.5. Динамическое программирование . . . 910
§ 53.6. Вариационное исчисление . . . 914
**LIV. Что такое имитационное моделирование** . . . 920
§ 54.1. Как построить имитационную модель. Простейший пример . . . 922
§ 54.2. Основные этапы имитационного моделирования . . . 927
§ 54.3. Идентификация и верификация имитационной модели . . . 932
**LV. Работа с имитационной моделью** . . . 936
§ 55.1. Планирование имитационных экспериментов . . . 936

**VI. Статистические таблицы** . . . 939
Литература . . . 948
По алгебре и геометрии . . . 948
По математическому анализу . . . 948
По введению в анализ и дискретной математике . . . 948
По дифференциальным уравнениям . . . 949
По уравнениям математической физики . . . 949
По теории функций комплексного переменного . . . 949
По теории вероятностей и математической статистике . . . 949
По методам оптимизации и вариационному исчислению . . . 950
По математическому моделированию . . . 950
Задачники по курсу «Высшая математика» . . . 950
А также . . . 950
Предметный указатель . . . 951

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

После первого издания этого учебника (2002 г.) мы получили отзывы от преподавателей и студентов, опробовавших его в «деле». Наши опасения, относительно объема книги оказались напрасными. Более того, целому ряду читателей понравилось, что практически весь необходимый теоретический материал по математике оказался собранным под одной обложкой. В связи с этим мы приносим свою благодарность редакторам и менеджерам издательства «Лань», настоявшим на такой форме представления материала.

Положительный отклик получил широкий круг рассмотренных примеров из разных областей знаний с содержательными пояснениями в необходимых случаях. Использование в отдельных главах изложения от общего к частному (дедуктивный подход), а в других формулирование обобщающих понятий на примере частных проблем (индуктивный подход) также оценено положительно, так как позволяет учесть некоторые индивидуальные особенности студентов.

Во второе издание внесены незначительные изменения и исправлены допущенные опечатки.

Авторы по-прежнему с благодарностью ознакомятся и примут к сведению все замечания и предложения, направленные на улучшение по форме и содержанию этого учебника.

*Владимирский Б. М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М.*
г. Ростов-на-Дону,
ноябрь 2003 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Высшая школа России перешла на многоуровневую систему подготовки специалистов. Законом РФ о высшем образовании предусмотрены следующие уровни высшего образования: бакалавр, специалист, магистр. Содержание образования определяется образовательными стандартами направлений подготовки (бакалавр-магистр) и специальностей. Новые образовательные стандарты отличаются усилением требований к фундаментальной составляющей в подготовке выпускников. В первую очередь это нашло свое отражение в образовательных стандартах подготовки бакалавров. Бакалавр должен обладать в полном объеме знаниями по всем фундаментальным дисциплинам, а свою специализацию в конкретной (узкой) области он осуществит или самостоятельно, или на ступени магистерской или специальной подготовки. Существенно изменилось содержание курса математики, как одной из базовых дисциплин, ответственных за фундаментальную подготовку специалиста.

Наш учебник адресован всем студентам-бакалаврам, проходящим в университетах и других высших учебных заведениях подготовку в области естественных наук: биологии, химии, географии и т. п. (полный список направлений подготовки см. на титульном листе учебника).

При написании учебника мы руководствовались следующими принципами:

- учебник должен соответствовать новым образовательным стандартам;
- изложение материала должно соответствовать положению математики в системе человеческого знания как цельной самостоятельной науки, имеющей свой язык, свои методы и свой предмет исследования;
- выработать у читателя четкое представление о том, что математика является одним из важнейших инструментов в арсенале исследователя-естествоиспытателя;
- изложение должно сохранять меру между математической строгостью и утилитарными запросами, естественными для большинства читателей, избравших для себя профессиональную деятельность в одной из областей естествознания, а не в математике;
- учебник должен дать представление о математике не только как о науке, но и как оригинальной ветви общечеловеческой культуры.

Что принципиально новое отличает этот учебник от существующих? Наряду с традиционными разделами: геометрия и алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, в него вошли: элементы

математической логики, теории множеств и комбинаторики (названные в соответствии с принятыми на Западе традициями «Введение в анализ»), основы дискретной математики (введение в теорию графов), теория функций комплексного переменного, уравнения математической физики, методы оптимизации, имитационное моделирование. Ясно, что программы подготовки специалистов по конкретным направлениям будут отличаться различной степенью детализации разделов учебника. Естественно, мы не могли учесть запросы каждого из направлений подготовки, а стремились к той степени общности, которая позволит на основе этого учебника построить курсы «Математика для химиков», «Математика для биологов» и т. п.

Обратимся теперь непосредственно к читателям с некоторыми методическими советами и указаниями (они будут наиболее полезны тем, кто учится заочно или, как теперь говорят, дистанционно). Изучение математики — тяжелый интеллектуальный труд. Изучить математику — это не означает прочесть учебник и запомнить теоремы и факты, которые в нем приведены. Изучать математику — это, в первую очередь, работать с ручкой или карандашом в руках, имея бумагу для записей. Чтобы понять и освоить математику и ее методы, необходимо:

- овладеть системой понятий и фактов;
- освоить язык математики и ее символику;
- освоить систему математического мышления, базирующуюся на аксиоматическом подходе и индуктивном и дедуктивном методах получения результатов;
- освоить основные методы и приемы приложения математики и ее аппарата в естественных науках.

С целью побуждения читателя к активному освоению курса, мы включили в текст учебника подробно разобранные примеры и задачи, а также снабдили каждую главу книги (и даже отдельные параграфы) вопросами для самопроверки. Постарайтесь самостоятельно решить эти примеры и задачи, а уже потом сверьтесь с приведенным решением. Вопросы для самопроверки заставят Вас вернуться к наиболее важным, ключевым моментам изученного, а также дадут Вам первый опыт и навыки творческой деятельности.

Работая с учебником, научитесь пользоваться предметным указателем. Встретившись с термином или понятием, смысл которого к этому времени уже забыт, обратитесь к предметному указателю, там жирным шрифтом указан номер страницы, на которой приведено определение термина или введено понятие, обычным шрифтом набраны номера страниц, на которых понятие или термин расширяются или дополняются. Не обходите вниманием и имеющиеся исторические ссылки. Знание истории науки — элемент Вашей общей культуры. Большинство исторических ссылок подготовлено по книге: *Бородин А. И.*, *Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики / Пер. с укр. К.: Радяньска школа, 1979. 607 с.

Учебник состоит из пяти разделов, каждый из которых может рассматриваться как учебник по соответствующему разделу (разделам) курса математики, но каждый раздел не является абсолютно замкнутым в себе (такое в математике просто невозможно). Чтобы сохранить целостность учебника и изложенного в нем курса математики, мы применили сплошную нумерацию глав и снабдили учебник сводным предметным указателем. При нумерации параграфов, теорем, формул и проч. мы используем двойную нумерацию: номер главы — номер параграфа (теоремы, формулы и т. п.). Так, § 21.3 — параграф 3 в 21-й главе, а (17.34) — формула 34 в главе 17.

Полезным для изучения должен быть и список литературы, помещенный в конце книги. Желательно, но необязательно, чтобы изучающие курс математики имели

возможность пользоваться компьютером и имели навыки программирования на каком-нибудь алгоритмическом языке. Это позволит в необходимых случаях воспользоваться существующими программными продуктами (типа Maple или Mathcad) или написать свою собственную несложную программу, чтобы облегчить себе выполнение рутинных, чисто вычислительных операций, а также разовьет у Вас культуру организации вычислительного эксперимента.

У нашего учебника три автора, фамилии которых приведены на обложке. Однако наш труд был коллективным лишь на этапах определения структуры учебника и его окончательной сборки в единое целое. Разделы учебника: геометрия и алгебра, введение в анализ, математический анализ, теория функций комплексного переменного, элементы дискретной математики написаны Я. М. Ерусалимским, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, методы оптимизации, имитационное моделирование — А. Б. Горстко, теория вероятностей и математическая статистика — Б. М. Владимирским.

Авторы выражают благодарность:

- Министерству образования РФ, организовавшему конкурс на написание учебников нового поколения и выделившему грант на написание этого учебника;
- своим коллегам по Ростовскому государственному университету — доцентам И. А. Чернявской и Л. И. Сазонову, взявшим на себя нелегкий труд рецензирования учебника на этапе его написания. Их ценные замечания и советы существенно улучшили как содержание, так и стиль изложения. Л. И. Сазонов явился фактическим соавтором отдельных параграфов в разделах «Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики»;
- Е. В. Пацеевой и О. А. Цывенковой за компьютерный набор текста;
- рецензентам учебника — профессору МФТИ В. Ф. Бутузову и профессору КазГУ Н. Г. Гурьянову;
- Международному научному фонду Дж. Сороса, трижды присуждавшему Я. М. Ерусалимскому грант Соросовского доцента;
- своим родным и близким за долготерпение и понимание важности этой работы.

Каким получился учебник судить не авторам, а читателям. Мы будем благодарны за все замечания, советы и рекомендации, которые будут высказаны. Их можно направлять в издательство или непосредственно авторам по электронной почте: dnjme@ms.math.rsu.ru

# ВВОДНАЯ ГЛАВА

## МАТЕМАТИКА — ЯЗЫК ПОЗНАНИЯ МИРА

Современный этап развития естествознания характеризуется широким проникновением во все его разделы идей и методов математики. Математика из покрытой ореолом таинственности науки все больше превращается в обычный инструмент исследования, потребность в использовании которого ощущает все большее число специалистов в самых разных областях знания. Математика была, есть и будет элементом общей культуры. Но если в этом качестве раньше она была уделом небольшого числа посвященных людей, то теперь, особенно с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ), объективные тенденции научно-технического прогресса делают математические методы достоянием широкого круга людей, занятых в самых различных сферах науки и техники. Чем же вызвана наблюдаемая в последнее время интенсивная математизация человеческого знания? Вся история развития цивилизации на Земле проникнута идеями числа и измерения. По мере перехода от накопления фактов об окружающей людей природе к организованному знанию точность становилась все более необходимой. Возникла потребность в методах, которые бы обеспечили эту точность при формулировке представлений об окружающем мире. Так возникла математика, так она заняла главенствующее место во всех тех случаях, когда требовалась точность и однозначность суждений. За несколько тысячелетий существования и совершенствования математикой выработан особый язык абстракций, который позволяет привести к единому виду описание самых разнообразных по своей природе объектов и процессов. Поэтому считается, что любая наука получает ранг «точной» только тогда, когда она в достаточной мере использует эту систему универсальных методов анализа, вырабатывая хорошо развитую систему строгих понятий, позволяющих делать широкие теоретические обобщения и предсказания. На этом пути одним из важнейших этапов, венчающим переход науки в разряд точных, является математическое моделирование.

## ЗАЧЕМ НУЖНЫ МОДЕЛИ?

Прежде чем ответить этот вопрос, следовало бы определить, что такое модель. Однако мы поступим иначе. Сначала приведем несколько примеров, которые помогут сформировать интуитивное представление о понятии «модель», а уж потом дадим определение. Архитектор готовится построить здание невиданного доселе типа. Но прежде чем воздвигнуть его, он сооружает это здание из кубиков на столе, чтобы посмотреть, как оно будет выглядеть. Это модель. Перед тем как запустить в производство новый самолет, его помещают в аэродинамическую трубу и с помощью соответствующих датчиков

определяют величины напряжений, возникающих в различных местах конструкций. Это модель. Перечислять примеры моделей можно сколь угодно долго. Не будем этого делать, а попытаемся понять, какова роль их в уже приведенных примерах. Конечно, архитектор мог бы построить здание без предварительных экспериментов с кубиками. Но... он не уверен, что здание будет выглядеть достаточно хорошо. Если оно окажется некрасивым, то многие годы потом оно будет служить немым укором своему создателю, лучше уж поэкспериментировать с кубиками. Конечно, можно запустить самолет в производство и не зная, какие напряжения возникают, скажем, в крыльях. Но... эти напряжения, если они окажутся достаточно большими, вполне могут привести к разрушению самолета. Лучше уж сначала исследовать самолет в аэродинамической трубе. В приведенных примерах имеет место сопоставление некоторого объекта с другим, его заменяющим: реальное здание — здание из кубиков; серийный самолет — единичный самолет в аэродинамической трубе. И при этом предполагается, что какое-то свойство (свойства) сохраняется при переходе от исходного объекта к его заменяющему или по крайней мере позволяет судить об исходном свойстве. Хотя здание из кубиков и много меньше настоящего, но оно позволяет судить о внешнем виде этого здания. Хотя самолет, находящийся в аэродинамической трубе, и не летит, но напряжения, возникающие в его корпусе, соответствуют условиям полета. После всего сказанного становится понятным такое определение. Модель — это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект — оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. С незапамятных времен при изучении сложных процессов, явлений, конструировании новых сооружений и т. п. человек применяет модели. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом: недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны в познавательных целях; принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым или, скажем, с планетами Солнечной системы и т. д. Другое не менее важное назначение модели состоит в том, что с ее помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, поскольку сама модель отражает лишь некоторые основные характеристики исходного объекта. Модель позволяет также научиться правильно управлять объектом, апробируя различные варианты управления на модели этого объекта. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени, риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т. п.). Если объект исследования обладает динамическими характеристиками, т. е. характеристиками, зависящими от времени, особое значение приобретает задача прогнозирования динамики состояния такого объекта под действием различных факторов. При ее решении использование модели также может оказать неоценимую помощь. Итак, резюмируя, можно сказать, что модель нужна: во-первых, для того чтобы понять, как устроен конкретный объект (процесс), какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром; во-вторых, для того чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях; в-третьих, для того чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект. До сих пор мы говорили об использовании моделей в достаточно общих терминах. Конкретизируя эту проблему применительно, например, к биологии, увидим, что перечисленные выше

цели, для которых нужны модели, сохраняются. Допустим, что требуется понять, как протекает, скажем, процесс роста дерева. Можно перечислить факторы, определяющие течение этого процесса, но это не дает полного понимания. А вот если будет показано как, на что и в какой мере воздействуют эти факторы, т. е., если будет создана модель роста дерева, то тогда придет и понимание. Или допустим, что требуется управлять хемостатом — устройством для культивирования микроорганизмов (регулировать скорость потока, выбирать концентрацию поступающего питательного бульона и т. д.) так, чтобы за некоторое фиксированное время получить на выходе наибольшую массу микробной популяции. Только используя математическую модель хемостата, можно избежать далекого от совершенства метода проб и ошибок. Очень важно понимать, что одному объекту может сопоставляться не одна, а множество моделей. В связи с этим, естественно возникает вопрос — а какая же из них самая лучшая? Это непростой вопрос, и мы к нему будем неоднократно возвращаться в дальнейшем. Пока лишь отметим, что качество модели определяется ее ролью в проводимом исследовании. Может она дать ответы на вопросы, стоящие перед исследователем — модель хороша. Не может — значит она плоха для данного исследования. Хорошая модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает некоторые новые знания об объекте — оригинале. Это, безусловно, очень важное свойство, играющее притягательную роль для лиц, занимающихся построением и изучением моделей

## КАКИЕ БЫВАЮТ МОДЕЛИ

Процесс построения модели называется моделированием. Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно объединить в две большие группы: материальное (предметное) и идеальное моделирование. К материальным относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Основными разновидностями материального моделирования являются физическое и аналоговое моделирование. Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту сопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явления с модели на объект на основе теории подобия. Вот несколько примеров физических моделей: в астрономии — планетарий, в гидротехнике — лотки с водой, моделирующие реки и водоемы, в архитектуре — макеты зданий, в самолетостроении — модели летательных аппаратов, в экологии — аквариумы с водными организмами, моделирующими водные экосистемы и т. п. Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями, логическими схемами, т. п.). Наиболее простой пример — изучение механических колебаний с помощью электрической схемы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями. Заметим, что в обоих типах материального моделирования модели являлись материальным отражением исходного объекта и были связаны с ним своими геометрическими, физическими и другими характеристиками, причем процесс исследования был тесно связан с материальным воздействием на модель, т. е. состоял в натурном эксперименте

с ней. Таким образом, физическое моделирование по своей природе является экспериментальным методом. От предметного моделирования принципиально отличается идеальное моделирование, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Идеальное моделирование носит теоретический характер. Различают два типа идеального моделирования: интуитивное и знаковое. Под интуитивным понимаем моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающемся в ней. В этом смысле, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира. Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т. д., а также включающее совокупность законов, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и их элементами. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики, с использованием тех или иных математических методов. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование И. Ньютоном основных законов механики средствами математики.

## КАК МАТЕМАТИКА ПРОНИКАЕТ В ДРУГИЕ НАУКИ

С незапамятных времен человек познает окружающий мир. На заре цивилизации этот процесс шел стихийно. По мере накопления знаний оказалось целесообразным упорядочить их с помощью некоторых структур — так возникли различные науки. В рамках одной науки собирались не какие угодно знания, а лишь те, которые к этой науке относились. Здесь же разрабатывались методы, позволяющие получать новые знания, относящиеся именно к этой науке. Мало того, на место ученых античного мира, которые изучали мир во всем его многообразии, пришли гораздо более узкие специалисты, которые изучают мир с позиций конкретных наук. С течением времени специализация наук достигла такого уровня, науки настолько разошлись в своем развитии, что знания, полученные в одной, зачастую совершенно не понятны в другой. По сути, представители разных наук говорят на различных языках. Чем более глубокие факты устанавливаются в современной науке, тем специфичнее делается ее язык, тем сложнее понять его представителям другой науки и, тем более, людям от науки далеким. Такое явление не может не огорчать, так как для многих оно скрывает всеобъемлющую картину мира. По счастью, однако, дело не так уж и безнадежно. Существует, оказывается, такой язык, которым, в той или иной степени, пользуются представители всех наук. Этот язык — математика. Проследим путь, по которому математика проникает в самые разнообразные науки — в биологию и почвоведение, в химию и географию, в геологию и гидрометеорологию, а также многие, многие другие. Всякая наука в своем развитии проходит ряд этапов, которые, следуя академику А. Д. Дородницыну, можно представить в виде следующей схемы (Рис. 1). Прокомментируем ее. Естественно, развитие любой науки начинается с целенаправленного накопления фактов, сбора информации. Поскольку задача науки состоит в объяснении законов природы, одновременно с накоплением фактов происходит их классификация, систематизация, попытка установления взаимосвязей между объектами и явлениями. На каждом из первых трех этапов, которые вместе могут быть охарактеризованы как описательные,

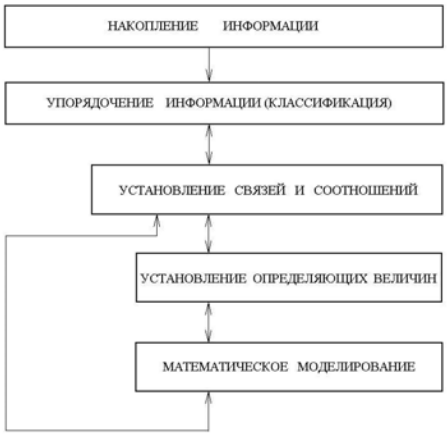



*Рис. 1.*

есть место для математики. И не просто место, а важная роль! Накопление фактов можно существенно рационализировать, используя развитый в математике метод планирования эксперимента. Объективная классификация немыслима без современного кластерного анализа, теории распознавания образов. Ну а при поиске взаимосвязей между изучаемыми объектами или явлениями не обойтись без корреляционного анализа и других методов статистики. Регулярно в процессе развития науки возникают ситуации, когда знания, накопленные на описательных этапах развития, позволяют выделить некие главные или определяющие величины. Успешный выбор этих величин чрезвычайно важен для перехода от описательного знания к точному, для создания возможности построения математических моделей различных процессов, явлений. Сколь часто возникают такие ситуации, сказать трудно, так как этап, связанный с поиском определяющих величин, наиболее трудно формализуем и пока, да и, по-видимому, в обозримом будущем основан на интуиции ученого. Хороший пример важности установления определяющих величин для прогресса науки дает физика. Еще во времена Архимеда фактически были известны основные эмпирические факты, связанные с движением тел. Но потребовалось почти две тысячи лет и гений Ньютона, чтобы установить, что определяющей величиной, связывающей силу и массу, является ускорение, а не скорость, как думали раньше. И только тогда появились законы Ньютона, дающие точные знания о движении тел под действием внешних сил. Теперь уже понятно, что этап, венчающий переход науки в разряд точных, — математическое моделирование — базируется на «двух китах»: знании определяющих величин и фактов конкретной науки, знании языка и методов математики, позволяющем строить модели. Только наличие обоих типов знаний может позволить ученому продуктивно работать на этом этапе развития науки. Какими же математическими знаниями должен владеть современный ученый не математик? Они достаточно обширны. Именно поэтому в этой книге читатель найдет элементы математического анализа и алгебры, теории множеств и дискретной математики, дифференциальных уравнений, теории вероятности и статистики. Изучив их, он познакомится с тем языком, на котором пишутся математические модели. Но знакомство еще не означает подлинного владения языком. В настоящий учебник включен большой набор иллюстративных моделей, которые позволят читателю приобрести опыт построения математических моделей, позволят как бы «заговорить на новом языке».

Сделаем одно замечание. Выше мы говорили об этапах развития наук. Важно отметить, что, в связи с относительностью нашего знания, этапы, сменяя друг друга, никогда не заканчиваются, а лишь дополняют друг друга. Сколь бы ни была математизирована та или иная наука, в ней всегда продолжаются и сбор информации, и ее классификация, и поиск связей между наблюдаемыми явлениями.

## КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Как уже говорилось, значительное внимание в этой книге уделяется математическим моделям. Поэтому представляется целесообразным провести прежде всего некоторую их классификацию, иллюстрируя ее приведенными моделями. В том случае, когда относительно моделируемого объекта (явления, системы) предполагается, что происходящие в нем процессы детерминированны и средства, используемые при построении модели, также относятся к средствам детерминированного анализа, будем говорить, что и модель относится к классу детерминированных. Если происходящие в моделируемом объекте процессы имеют случайный (стохастический) характер, а средства, используемые при построении модели, относятся к детерминированному анализу, то такую модель будем относить к классу детерминированно-стохастических. Если же и процессы в моделируемом объекте, и средства моделирования имеют стохастическую природу, то модель относится к классу стохастических. Среди стохастических моделей важное место занимает класс имитационных моделей. Так называются модели, сопоставляющие объекту (процессу, явлению) алгоритм его функционирования. Свой вклад в классификацию вносят и цели моделирования. Если модель нужна, чтобы описать какие-то процессы, явления, то такая модель называется дескриптивной (description — описание, англ.). Если модель нужна для того, чтобы найти в каком-то смысле наилучший способ управления моделируемым объектом (скажем, определить, какой «урожай» следует собирать каждый год с популяции, чтобы максимизировать «урожай» за N лет), то такая модель относится к классу оптимизационных. Если модель позволяет определить не зависящую от времени характеристику объекта (процесса, явления), то она называется статической. В противном случае она называется динамической. Разумеется, одна и та же модель может входить в разные классы в зависимости от признака, по которому ведется классификация.

## КАК ВЕДУТСЯ МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исходным пунктом такого исследования, его отправной точкой служит некоторая задача из той или иной предметной области (биология, химия, география, геология и др.). Для этой задачи строится математическая модель. Прежде чем говорить о том, как строится модель, откуда она берется, сделаем два замечания общего порядка. Всякий объект (система), модель которой мы создаем, при своем функционировании подчиняется определенным законам — биологическим, физическим, химическим и др. Причем вполне возможно, и это очень важно отметить, что далеко не все эти законы нам на сегодняшний день уже могут быть известны. Мы будем считать, что знание законов предполагает известными количественные соотношения, связывающие те или иные характеристики моделируемого объекта (системы). Можно сказать и иначе: законы формулируются в результате обработки результатов наблюдений за теми или иными характеристиками моделируемого объекта (системы). Всякая модель создается для определенной цели — для ответа на некоторое множество вопросов о

моделируемом объекте (системе). Иными словами, интересуясь некоторым набором вопросов относительно этого объекта (системы), мы должны взглянуть на этот объект под вполне определенным «углом зрения». Выбранный «угол зрения» в значительной степени и определяет выбор модели. После этих общих замечаний перейдем к описанию процесса построения математической модели некоторого объекта (системы). Его можно представить себе состоящим из следующих этапов:

1. Формируются основные вопросы о поведении системы, ответы на которые мы хотим получить с помощью модели.
2. Из множества законов, управляющих поведением системы, учитываются те, влияние которых существенно при поиске ответов на поставленные вопросы (здесь проявляется искусство модельера).
3. В дополнение к этим законам, если необходимо, для системы в целом или отдельных ее частей формулируются определенные гипотезы о функционировании. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что могут быть приведены некоторые теоретические доводы в пользу их принятия. (Здесь проявляется как искусство модельера, так и специалиста по функционированию моделируемой системы).
4. Гипотезы так же, как и законы выражаются в форме определенных математических соотношений, которые объединяются в некоторое формальное описание моделей.

В последующих главах читатель найдет примеры, иллюстрирующие все вышеуказанные этапы построения математических моделей. Но пусть модель построена. Что делать дальше? На следующем этапе разрабатывается или используется созданный ранее алгоритм для анализа этой модели. Если модель и алгоритм не слишком сложны, то может оказаться возможным аналитическое исследование модели. В противном случае составляется программа, реализующая этот алгоритм на ЭВМ. После выполнения расчетов по модели на ЭВМ их результаты обязательно сравниваются с фактической информацией из соответствующей предметной области. Это сравнение необходимо для того, чтобы убедиться в адекватности модели, в том, что модельным расчетам можно верить, их можно использовать. Если окажется, что результаты расчетов не имеют ничего общего с реальной действительностью, то следует вернуться к построенной модели — быть может, она нуждается в усовершенствовании. Возможны также ошибки в алгоритме и (или) в программе для ЭВМ. Такие повторные просмотры продолжаются до тех пор, пока результаты расчетов не удовлетворят исследователя. Теперь модель готова к использованию. Подводя некоторый итог сказанному, обратим внимание на следующее. Не всякое использование математических формул представляет собой построение математических моделей. В тех случаях, когда существует теория изучаемых явлений, пусть на вербальном уровне, использование формул позволяет построить математический аппарат теории. И только тогда, когда уровень наших знаний в некоторой области еще недостаточен для построения теории, математический формализм приобретает самостоятельное значение и может послужить зародышем будущей теории. При этом новые знания возникают не только из экспериментального изучения реальных явлений, но и с помощью анализа математических формул. Именно в этом случае можно говорить о построении и исследовании математических моделей. А в заключение обратим внимание, что ни ЭВМ, ни математическая модель, ни алгоритм ее исследования порознь не могут решить достаточно сложную исходную задачу. Только вместе (включая, естественно, человека-исследователя) они представляют ту силу, которая позволяет познавать окружающий мир, управлять им в наших интересах.

# I

# АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

# I

# МЕТОД КООРДИНАТ

Как во всей математике, в аналитической геометрии существуют основные понятия, с которых все начинается. Основные понятия не определяются. Считается, что у каждого из нас существуют интуитивные представления о них. В этих интуитивных представлениях спрессован и исторический опыт человечества в области математических знаний. Такими основными понятиями для нас являются здесь точка, прямая, плоскость, множество.

Естественным образом возникают и производные от основных геометрических понятий — отрезок, луч, угол и т. п. Так, под отрезком понимают часть прямой, ограниченную двумя точками, или множество точек прямой, лежащих между двумя точками, называемыми концами отрезка.

Мы не будем здесь заниматься определениями этих простейших геометрических объектов, считая, что все они нам известны.

## § 1.1. ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ (ОСЬ). КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ОСИ. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

**Определение 1.1.** *Числовой прямой ($\Leftrightarrow$ осью)*[1] *называется прямая, на которой*

1. *отмечена точка, называемая началом (обычно обозначается "$O$");*
2. *отмечена единичная точка (обычно обозначается "$E$"или "1") $E \neq O$;*
3. *зафиксировано направление от начальной точки $O$ к единичной $E$ (на рисунке обозначается стрелкой);*
4. *введена длина отрезка $OE$ (обозначается $|OE|$): $|OE| \stackrel{\text{def}}{=} 1$.*[2]

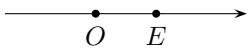



*Рис. 1.1.*

**Определение 1.2.** *Направленным отрезком оси будем называть упорядоченную пару точек оси; направленный отрезок, отвечающий паре точек $(A; B)$, будем обозначать $\overline{AB}$.*

[1] Запись $\Leftrightarrow$ здесь и далее обозначает синоним термина.

[2] Надпись над знаком равенства *def* означает — «введение по определению»: слева от знака $\stackrel{\text{def}}{=}$ — «определяемое», справа от знака $\stackrel{\text{def}}{=}$ — «определяющее».

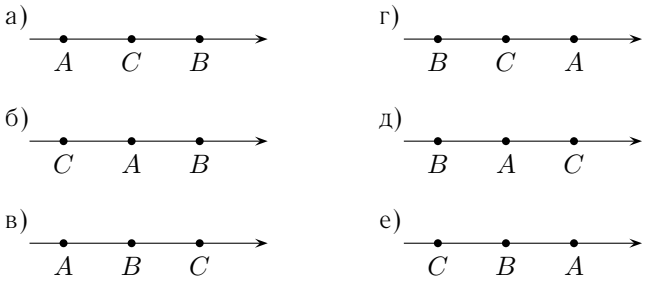



*Рис. 1.2.*

С направленным отрезком $\overline{AB}$ свяжем две числовые характеристики: длину и величину.

**Определение 1.3.** *Длиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называют длину отрезка $AB$ (вещественное число), измеренную с помощью масштабного отрезка $OE$. Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$. Очевидно, имеют место следующие свойства:*

*1°.* $|\overline{AB}| \geqslant 0$ *и* $|\overline{AB}| = 0 \iff A = B$;

*2°.* $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$;

*3°. Если точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$, то* $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$ *(аддитивное свойство длины).*

**Определение 1.4.** *Величиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называют числовую характеристику, обозначаемую $\mu(\overline{AB})$ и определяемую следующим:*

$$\mu\left(\overline{AB}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = B; \\ |\overline{AB}|, & \text{если направление отрезка } \overline{AB} \text{ совпадает с направлением оси;} \\ -\left|\overline{AB}\right|, & \text{если направление отрезка } \overline{AB} \text{ противоположно направлению оси.} \end{cases} \tag{1.1}$$

*Замечание.* Направленный отрезок $\overline{AA}$ называют нулевым.

Имеют место свойства:

1°. $\mu(\overline{AB}) = 0 \iff A = B$;

2°. $\mu(\overline{AB}) = -\mu(\overline{BA})$ (антисимметричность величины);

3°. Для любых трех точек $A, B, C$ оси $\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AC}) + \mu(\overline{CB})$ (аддитивное свойство величины).

Свойства 1° и 2° очевидны, докажем свойство 3°.

● Ясно, что когда какие-либо две из трех точек $A, B, C$ или все три точки совпадают, свойство 3° выполнено. Осталось рассмотреть случай, когда все три точки различны. Возможные расположения трех различных точек на оси приведены на рисунках 1.2. Рассмотрим случай а)

$$\mu(\overline{AB}) = |\overline{AB}| \overset{\text{адд. св-во длины}}{=} |\overline{AC}| + |\overline{CB}| = \mu(\overline{AC}) + \mu(\overline{CB}).$$

Рассмотрим случай б)

$$\mu(\overline{CB}) \overset{\text{a)}}{=} \mu(|\overline{CA}|) + \mu(|\overline{AB}|),$$
$$\mu(|\overline{AB}|) = \mu(|\overline{CB}|) - \mu(|\overline{CA}|) = \mu(|\overline{CB}|) + \mu(|\overline{AC}|) =$$
$$= \mu(|\overline{AC}|) + \mu(|\overline{CB}|).$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи (проделайте это самостоятельно). ● [3]

Теперь можно определить фундаментальное понятие аналитической геометрии прямой — координату точки.

**Определение 1.5.** *Пусть $M$ точка оси, тогда координатой точки $M$ на оси называется числовая характеристика, обозначаемая $x_M$ и определяемая следующим образом:*

$$x_M \overset{\text{def}}{=} \mu(\overline{OM}). \tag{1.2}$$

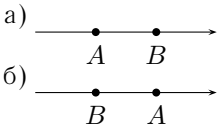
Ясно, что формула (1.2) задает взаимно-однозначное соответствие между множеством точек числовой прямой и множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Это и есть первый шаг на пути перевода языка геометрии на язык алгебры и математического анализа.

● *ЗАДАЧА 1.1 (Расстояние между двумя точками на прямой. Длина отрезка).* Пусть на оси заданы две точки $A, B$ своими координатами $x_A$ и $x_B$. Требуется найти расстояние $\rho(A, B)$ между двумя этими точками.

● Очевидно, имеет место формула

$$\rho(A, B) = |\overline{AB}| = |x_A - x_B|. \tag{1.3}$$

Заметим, что $\rho(A, B) \overset{\text{def}}{=} |\overline{AB}|$. В случае, когда $A = B$, формула (1.3) справедлива. Рассмотрим случай $A \neq B$. Он сводится к двум возможным расположениям точек $A, B$ на оси:




Рассмотрим их отдельно.

а) $\rho(A, B) = |\overline{AB}| = \mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AO}) + \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OB}) - \mu(\overline{OA}) = x_B - x_A = |x_B - x_A|$.

б) $\rho(A, B) = |\overline{AB}| = |\overline{BA}| \overset{\text{a)}}{=} x_A - x_B = |x_B - x_A|$. ●

● *ЗАДАЧА 1.2 (Величина направленного отрезка).* Направленный отрезок $\overline{AB}$ задан координатами точек $A$ и $B$. Требуется найти величину направленного отрезка $\overline{AB}$.

● Очевидно, имеет место формула

$$\mu(\overline{AB}) = x_B - x_A. \tag{1.4}$$

Действительно,

$$\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AO}) + \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OB}) - \mu(\overline{OA}) = x_B - x_A. \quad ●$$

[3] Здесь и далее ● обозначает начало и конец доказательства (определения, решения).

## § 1.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ[4] КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Зафиксируем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси с общим началом $O$: $Ox$ и $Oy$. (см. рис. 1.3).

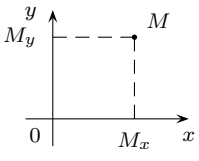


*Рис. 1.3.*

В этом случае говорят, что на плоскости задана (введена) декартова прямоугольная система координат $xOy$. Пусть $M$ — произвольная точка плоскости. Поставим ей в соответствие точки $M_x$ и $M_y$ — ее ортогональные проекции на ось $Ox$ и $Oy$ соответственно. Абсциссой точки $M$ называется координата $x_{M_x}$ точки $M_x$ на оси $Ox$, ординатой точки $M$ называется координата $y_{M_y}$ точки $M_y$ на оси $Oy$.

**Определение 1.6.** *Координатами точки $M$ на плоскости в системе координат $xOy$ называется упорядоченная пара чисел — (абсцисса точки $M$, ордината точки $M$) $(x_{M_x}, y_{M_y})$.*

*Замечание.* Нижние индексы в обозначениях координат точки $M$ обычно опускают и пишут $(x_M; y_M)$.

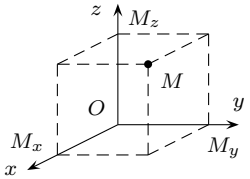


*Рис. 1.4.*

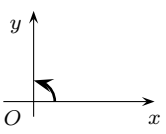
Декартовы прямоугольные координаты в пространстве вводятся тройкой попарно перпендикулярных осей с общим началом $O$: $Ox$; $Oy$; $Oz$ (см. рис. 1.4).

Координата точки $M$ в этом случае — упорядоченная тройка чисел $(x_M, y_M, z_M)$. Третья координата $z_M \stackrel{\text{def}}{=} z_{M_z}$ называется аппликатой точки.

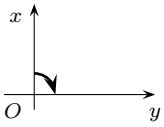
Заметим, что на плоскости и пространстве существует два типа декартовых систем координат — так называемые «правые» и «левые». Приведем картинки, иллюстрирующие эти понятия.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только правые системы.

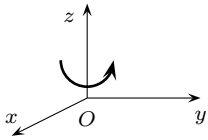
● *ЗАДАЧА 1.3 (Расстояние между точками на плоскости и в пространстве).* Точки $A$, $B$ заданы своими координатами. Требуется найти расстояние между точками.



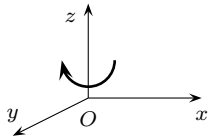
а) правая система на плоскости



б) левая система на плоскости



в) правая система в пространстве



г) левая система в пространстве

● Ясно, что

$$\rho(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \tag{1.5}$$

[4] Рене Декарт (1596–1650) знаменит в двух областях человеческого разума — философии и математике. Со времен Декарта алгебра и геометрия стали сотрудничать между собой к обоюдной выгоде двух этих дисциплин. Декарту принадлежит открытие системы координат на плоскости и в пространстве, которую теперь во всем мире называют декартовой. Следует отметить, что параллельно с Декартом к тем же идеям подошел и Пьер Ферма (1601–1665) — великий математик, занимавшийся наукой в свободное от государственной службы время. П. Ферма о своих математических открытиях сообщал в письмах к своим друзьям и никогда не публиковал их в другой форме. Однако многое из созданного Ферма вошло в математику (математический анализ, теорию чисел) под его именем.

$$\rho(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{1.6}$$

Очевидно, что формулы (1.5) и (1.6) — плоский и пространственный варианты теоремы Пифагора. ●

*Замечание.* Ясно, что формула (1.3) — частный случай формул (1.5) и (1.6), так как

$$|x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}.$$

## § 1.3. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Рассмотрим две различные точки $A$, $B$ (на прямой, плоскости или в пространстве) и прямую $l(A,B)$, проходящую через эти точки. Будем считать, что $l(A,B)$ — ось.

**Определение 1.7.** *Говорят, что точка* $C\ (\neq B) \in l(A,B)$ *делит отрезок* $\overline{AB}$ *в отношении* $\lambda_C$ *равном*

$$\lambda_C = \frac{\mu(\overline{AC})}{\mu(\overline{CB})}. \tag{1.7}$$

*Замечание.* Отношение $(\mu(\overline{AC}))/(\mu(\overline{CB}))$ не зависит от способа превращения $l(A,B)$ в ось.

● *ЗАДАЧА 1.4.* Точки $A$, $B$, $C$ заданы своими координатами. Требуется найти выражение для $\lambda_C$.

● Рассмотрим случай, когда $A$, $B$, $C$ — точки плоскости, и прямая $l(A,B)$ не параллельна ни одной из координатных осей (см. рис. 1.5).

Очевидно, точка $C_x$ $(C_y)$ делит отрезок $\overline{A_xB_x}$ $(\overline{A_yB_y})$ в том же отношении, что и точка $C$ отрезок $\overline{AB}$, тогда

$$\lambda_C = \frac{\mu(\overline{A_xC_x})}{\mu(\overline{C_xB_x})} = \frac{\mu(\overline{A_yC_y})}{\mu(\overline{C_yB_y})}.$$

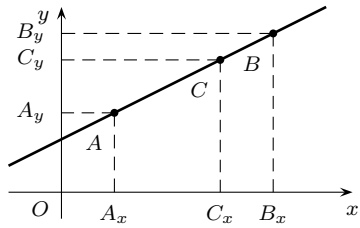



*Рис. 1.5.*

Учитывая формулу (1.4), получаем

$$\lambda_C = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}. \quad ● \tag{1.8}$$

*Замечания:*

- В случае, когда $l(A,B)$ параллельна оси $Oy$ $(Ox)$, отношение $(x_C - x_A)/(x_B - x_C)$ $((y_C - y_A)/(y_B - y_C))$ вырождается в отношение $0/0$, а содержательным для определения $\lambda_C$ становится только отношение $(y_C - y_A)/(y_B - y_C)$ $((x_C - x_A)/(x_B - x_C))$.
- Равенство $(x_C - x_A)/(x_B - x_C) = (y_C - y_A)/(y_B - y_C)$ можно рассматривать как условие принадлежности точки $C$ прямой $l(A,B)$.
- В пространственном случае соотношение (1.8) выглядит так:

$$\lambda_C = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Отметим, что:

а) $\lambda_C = 0 \iff C = A$;
б) $\lambda_C > 0 \iff$ когда точка $C$ лежит внутри отрезка $AB$;
в) $\lambda_C = 1 \iff$ когда точка $C$ — середина отрезка $AB$;
г) $\lambda_C < 0 \iff$ когда точка $C$ лежит вне отрезка $AB$;

д) $-1 < \lambda_C < 0 \iff$ когда точки $C$ и $B$ лежат по разные стороны от точки $A$;
е) $\lambda_C < -1 \iff$ когда точка $C$ лежит вне отрезка $AB$ по ту же сторону от $A$, что и точка $B$;

Резюмируя сказанное, график значений $\lambda_C$ в зависимости от положения точки $C$ на прямой $l(A,B)$ приведен на рис. 1.6.

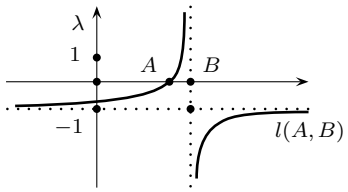


*Рис. 1.6.*

Изучая поведение $\lambda_C$, мы обнаружили, что $\lambda_C$ не бывает равным $-1$.

● *ЗАДАЧА 1.5.* Даны две точки $A$, $B$, $A \neq B$ своими координатами и вещественное число $\lambda \neq -1$. Требуется найти координаты точки $C$ на $l(A,B)$ такой, что $\lambda_C = \lambda$.

● Ясно, что координаты точки $C$ должны удовлетворять соотношениям (1.8), поэтому будем рассматривать их как систему уравнений с неизвестными $x_C$, $y_C$

$$\begin{cases} \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \lambda; \\ \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \lambda. \end{cases}$$

Решая отдельно уравнения системы, получаем

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{1.9}$$

Ясно, что в пространственном случае получаем:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{1.9'}$$

**Вывод:** При любом $\lambda(\in \mathbb{R}) \neq -1$ задача 1.5 разрешима и имеет единственное решение, задаваемое формулами (1.9) или (1.9′). ●

*Следствие из решения задачи 1.5.* Координаты середины отрезка задаются формулами:

$$x_{\text{сер}} = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_{\text{сер}} = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad z_{\text{сер}} = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Теперь мы готовы в качестве приложения рассмотреть задачу о нахождении координат центра масс системы материальных точек.

● *ЗАДАЧА 1.6.* При решении этой задачи будем исходить из двух физических предпосылок:

Дано:

1) центр масс системы из двух точек $M_1$ и $M_2$ с массами $m_1$ и $m_2$ находится на отрезке $\overline{M_1M_2}$ и делит его в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$;
2) центр масс системы точек $M_1$, $M_2$, …, $M_n$ с массами $m_1$, $m_2$, …, $m_n$ совпадает с центром масс системы из двух точек, одна из которых находится в центре масс системы точек $M_1$, $M_2$, …, $M_{n-1}$ и имеет массу $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$, а вторая — точка $M_n$ с массой $m_n$.

● Из предпосылки 1 и формулы (1.9′) получаем, что координаты $(x, y)$ центра масс системы из двух точек вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}; \\ y &= \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}; \\ z &= \frac{z_1 + \frac{m_2}{m_1}z_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) позволяют сделать предположение, что в случае системы из $n$ точек формулы координат центра масс имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}; \\ y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}; \\ z &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Формулы (1.11) докажем по индукции, используя предпосылку 2.

Допустим, что для системы из $n-1$ точек формулы (1.11) справедливы, и докажем, что тогда они справедливы и для $n$ точек. Используя наше предположение и предпосылку 2, возьмем в качестве первой точки центр масс системы точек $M_1$, $M_2$, …, $M_{n-1}$ с массами $m_1$, $m_2$, …, $m_{n-1}$, а в качестве второй точки — точку $M_n$ с массой $m_n$. По формуле (1.10) получим

$$x = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1})\frac{m_1x_1 + \cdots + m_{n-1}x_{n-1}}{m_1 + \cdots + m_{n-1}} + m_nx_n}{(m_1 + \cdots + m_{n-1}) + m_n} = \\ = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_{n-1}x_{n-1} + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Для координат $y$ и $z$ доказательство аналогично. ●

## § 1.4. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ. СФЕРИЧЕСКИЕ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

### 1.4.1. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Для определения положения точки на плоскости кроме рассмотренной декартовой системы координат применяется полярная система координат.

Пусть на плоскости зафиксирована точка $O$ (называемая полюсом) и проходящая через нее ось $OP$ (называемая полярной осью). Положение произвольной точки $M$ на плоскости будем определять по отношению к полюсу и полярной оси.

Полярным радиусом точки $M$ называют величину $\rho_M \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{OM}|$. Полярным углом $\varphi_M$ называют угол $\varphi_M$ между положительным направлением полярной оси и лучом,

содержащим $\overline{OM}$ (направление вращения луча $OP$ до совмещения с $\overline{OM}$ при измерении $\varphi_M$ против часовой стрелки, см. рис. 1.7).

*Замечание.*

1) Ясно, что если $M = O$, то $\varphi_M$ не определен (обычно $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$).
2) $\rho_M \geqslant 0$ и $\rho_M = 0 \Longleftrightarrow M = O$, $0 \leqslant \varphi_M < 2\pi$.

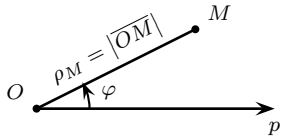



*Рис. 1.7.*

Пару чисел $(\rho_M; \varphi_M)$ называют полярными координатами точки $M$.

### 1.4.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ И ПОЛЯРНЫМИ КООРДИНАТАМИ

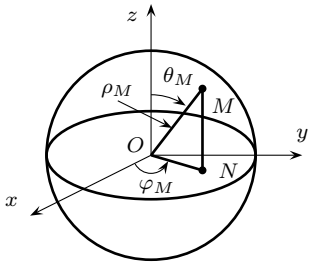



*Рис. 1.8.*

Пусть на плоскости введена декартова система координат $xOy$ и полярная система координат с полюсом в точке $O$ и полярной осью $Ox$. Тогда каждой точке $M$ плоскости соответствуют ее декартовы и полярные координаты. Используя определение тригонометрических функций, получаем

$$\begin{cases} x_M = \rho_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_M \sin\varphi_M, \end{cases} \tag{1.12}$$

а привлекая в рассмотрение и теорему Пифагора, получаем

$$\begin{cases} \rho_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}, \\ \sin\varphi_M = \frac{y_M}{\rho_M} = \frac{y_M}{\sqrt{x_M^2+y_M^2}}, \\ \cos\varphi_M = \frac{x_M}{\rho_M} = \frac{x_M}{\sqrt{x_M^2+y_M^2}}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Соотношения (1.12) и (1.13) устанавливают связь между декартовыми и полярными координатами точки.

### 1.4.3. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

При введении сферических координат в пространстве рассматривают три взаимно перпендикулярные оси: $Ox$, $Oy$, $Oz$ с общим началом. Положение произвольной точки $M$, отличной от точки $O$, однозначно описывается заданием $\rho_M \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{OM}|$ и двух углов $\varphi_M$ и $\theta_M$ (см. рис. 1.8).

Углы $\theta_M$ и $\varphi_M$ называют широтой и долготой соответственно.

Ясно, что

$$\begin{cases} x_M = \rho_M \sin\theta_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_M \sin\theta_M \sin\varphi_M, \\ z_M = \rho_M \cos\theta_M. \end{cases} \tag{1.14}$$

*Замечание.* В географии применяют несколько иное понятие широты.

### 1.4.4. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Для введения цилиндрической системы координат в пространстве рассмотрим декартову систему координат $Oxyz$ и в тройке координат точки $M$ $(x_M, y_M, z_M)$ выделим первые две $(x_M, y_M)$, в которых перейдем к полярным $\rho_M$, $\varphi_M$, вводя полярную систему координат в плоскости $Oxy$, приняв $O$ за полюс, а $Ox$ за полярную ось. Таким образом,

для точки $M$ мы получили тройку чисел $(\rho_M, \varphi_M, z_M)$, называемую ее цилиндрическими координатами. Ясно, что

$$\begin{cases} x_M = \rho_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_M \sin\varphi_M, \\ z_M = z_M. \end{cases} \tag{1.15}$$

*Замечание.* В случае полярных, сферических и цилиндрических координат при совпадении точки $M$ с точкой $O$ обычно полагают $\varphi_0 = \theta_0 = 0$.

## § 1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

### 1.5.1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Пусть на плоскости введено две декартовых системы координат $xOy$ и $x'O'y'$ с параллельными и одинаково направленными осями и одинаковыми по длине единичными отрезками (см. рис. 1.9). Первую систему координат — $xOy$ будем называть «старой», вторую — $x'O'y'$ будем называть «новой». Координаты точки в системе $xOy$ будем называть «старыми», в системе $x'O'y'$ — «новыми». Положение «новой» системы координат относительно «старой» однозначно определяется «старыми» координатами точки $O'$. Обозначим их $(a, b)$.

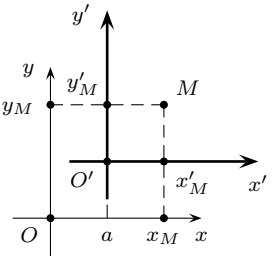



*Рис. 1.9.*

О новой системе $x'O'y'$ говорят, что она получена из старой параллельным переносом в точку $O'$.

*ЗАДАЧА 1.7.* Установить связь между «старыми» и «новыми» координатами точки.

Очевидно, справедливы формулы:

$$\begin{cases} x'_M = x_M - a, \\ y'_M = y_M - b \end{cases} \tag{1.16}$$

— выражение «новых» координат через «старые»;

$$\begin{cases} x_M = x'_M + a, \\ y_M = y'_M + b \end{cases} \tag{1.17}$$

— выражение «старых» координат через «новые».

### 1.5.2. ПОВОРОТ ОТНОСИТЕЛЬНО НАЧАЛА

Пусть две системы декартовых координат — «старая» $xOy$ и «новая» $x'Oy'$ имеют общее начало и одинаковые по длине единичные отрезки. Обозначим через $\alpha$ угол между положительными направлениями осей $Ox$ и $Ox'$ (см. рис. 1.10).

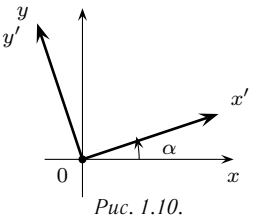



*Рис. 1.10.*

Говорят, что «новая» система координат получена из «старой» системы координат поворотом относительно начала на угол $\alpha$.

Найдем, как связаны между собой «старые» и «новые» координаты точки. Для этого введем в рассмотрение две полярные системы координат: «старую» и «новую» с общим полюсом $O$ и полярной осью $Ox$ у «старой» и $Ox'$ у «новой».

● Очевидно, «старые» и «новые» полярные координаты точки $M$ связаны формулами:

$$\rho'_M = \rho_M, \qquad \varphi'_M = \varphi_M - \alpha.$$

Тогда, вспоминая связь между декартовыми и полярными координатами (1.12), получаем

$$\begin{aligned} x'_M &= \rho'_M \cdot \cos\varphi'_M = \\ &= \rho_M \cos(\varphi_M - \alpha) = \rho_M(\cos\varphi_M \cdot \cos\alpha + \sin\varphi_M \cdot \sin\alpha) = \\ &= \rho_M \cos\varphi_M \cos\alpha + \rho_M \sin\varphi_M \sin\alpha = x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha. \\ y'_M &= \rho'_M \cdot \sin\varphi'_M = \\ &= \rho_M \sin(\varphi_M - \alpha) = \rho_M(\sin\varphi_M \cdot \cos\alpha - \cos\varphi_M \cdot \sin\alpha) = \\ &= \rho_M \sin\varphi_M \cos\alpha - \rho_M \cos\varphi_M \sin\alpha = -x_M \sin\alpha + y_M \cos\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\begin{cases} x'_M = x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha, \\ y'_M = -x_M \sin\alpha + y_M \cos\alpha \end{cases} \tag{1.18}$$

— выражение «новых» координат через «старые» при повороте относительно начала координат на угол $\alpha$.

Учитывая, что «старая» система координат получается из «новой» поворотом на угол $-\alpha$, из формул (1.18) получаем

$$\begin{cases} x_M = x'_M \cos\alpha - y'_M \sin\alpha, \\ y_M = x'_M \sin\alpha + y'_M \cos\alpha \end{cases} \tag{1.19}$$

— выражение «старых» координат через «новые» при повороте относительно начала на угол $\alpha$. ●

### 1.5.3. ОБЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Пусть на плоскости введены две декартовых системы координат $xOy$ и $x'O'y'$ с одинаковыми по длине единичными отрезками. Положение «новой» системы координат однозначно определяется «старыми» координатами точки $O'$ и углом $\alpha$ между положительными направлениями осей $Ox$ и $O'x'$.

Какова связь между «старыми» и «новыми» координатами точки? Введем еще одну «промежуточную» систему координат $x''O'y''$, полученную из «старой» параллельным переносом начала в точку $O'$. Ясно, что «новая» система получается из «промежуточной» поворотом на угол $\alpha$. Используем соотношения (1.18) и (1.16):

$$\begin{cases} x'_M = x''_M \cos\alpha + y''_M \sin\alpha, \\ y'_M = -x''_M \sin\alpha + y''_M \cos\alpha; \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} x''_M = x_M - a, \\ y''_M = y_M - b. \end{cases} \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) получаем

$$\begin{cases} x'_M = (x_M - a)\cos\alpha + (y_M - b)\sin\alpha, \\ y'_M = -(x_M - a)\sin\alpha + (y_M - b)\cos\alpha \end{cases} \tag{1.22}$$

— выражение «новых» декартовых координат через «старые» при общем преобразовании декартовых координат.

## § 1.6. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом пункте мы будем говорить об уравнениях линий и поверхностей на плоскости и в пространстве. При этом будем считать, что понятия «линия» и «поверхность» для нас первичны и необсуждаемы.

Пусть на координатной плоскости $xOy$ задана линия $L$ (например, окружность радиуса $r\ (>0)$ с центром в точке $C(x_C, y_C)$ может быть задана следующим: «Множество точек плоскости, находящихся от точки $C$ на расстоянии, равном $r$»).

**Определение 1.8.** *Уравнение*

$$F(x, y) = 0 \tag{1.23}$$

*называется общим уравнением линии $L$, если выполнено два условия:*

*а) для любого решения $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ уравнения* (1.23) *точка $M(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ принадлежит линии $L$;*

*б) для любой точки $M(x_M, y_M) \in L$ пара чисел $(x_M, y_M)$ является решением уравнения* (1.23).

*ПРИМЕР 1.1.* Очевидно, $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$ является общим уравнением окружности радиуса $4$ с центром в точке $C(2, -3)$.

Если уравнение (1.23) удается разрешить относительно одной из переменных, т. е. привести к виду:

$$y = f(x) \tag{1.24}$$

или

$$x = g(y), \tag{1.25}$$

то такие уравнения называют явными.

*Замечание.* Ясно, что явное уравнение линии легко преобразуется в общее $y - f(x) = 0$ или $x - g(y) = 0$.

Всегда ли можно от общего уравнения линии перейти к явному?

**Определение 1.9.** *Пусть $T \subset \mathbb{R}$ и пусть на множестве $T$ задано две функции $x(t)$ и $y(t)$. Пара функций*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in T \tag{1.26}$$

*называется параметрическими уравнениями линии $L$, если выполнено два условия:*

*1) для любого $t_0 \in T$ точка с координатами $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ принадлежит $L$;*

*2) для любой точки $M(x_M, y_M) \in L$ существует хотя бы одно значение параметра $t_M \in T$ такое, что $x_M = x(t_M)$, $y_M = y(t_M)$.*

*ПРИМЕР 1.2.*

$$\begin{cases} x = 2\,\sin t, \\ y = 2\,\cos t \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi)$$

— параметрические уравнения окружности радиуса $2$ с центром в начале координат.

*Замечание.* Пусть $y = f(x),\ x \in X$ — явное уравнение линии $L$, тогда

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \end{cases} \qquad x \in X$$

— параметрические уравнения линии $L$.

Мы ничего не сказали о поверхностях и их уравнениях, так как во всем этом полная аналогия с линией на плоскости, только нужно перейти в пространство, т. е.

$F(x, y, z) = 0$ — общее уравнение поверхности;

$x = f(y, z)$ или $y = g(x, z)$ или $z = r(x, y)$ — явные уравнения поверхности;

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in T$$

— параметрические уравнения поверхности.

## Контрольные вопросы и задания

1. Чем характеризуется направленный отрезок оси?
2. Справедливо ли утверждение: «Направленные отрезки равны тогда и только тогда, когда их величины равны»?
3. Что такое аддитивное свойство величины направленного отрезка?
4. Почему отношение, в котором точка $C$ делит отрезок $AB$, не зависит от направления оси, на которой лежат точки $A$, $B$, $C$?
5. Какие системы координат на плоскости и в пространстве Вам известны? Какие из них применяются в географии, геодезии, астрономии?
6. Что такое общее уравнение линии (поверхности)? Всегда ли возможен переход от общего уравнения к явному; параметрическому?

# II

# ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе будут выведены различные уравнения прямой на плоскости. Их «различный внешний вид» и различные названия связаны с различными геометрическими способами задания прямой. Каждое уравнение сориентировано на решение задач определенного типа. Общим с математической точки зрения всех полученных уравнений является то, что все они являются уравнениями первой степени ($\Leftrightarrow$ уравнениями первого порядка). Важнейшей теоремой этой главы является теорема о том, что любое уравнение первой степени $Ax+By+C=0$, $A^2+B^2\neq 0$ является уравнением прямой на плоскости. Таким образом, множество линий на плоскости, уравнения которых — уравнения первой степени, и множество прямых на плоскости совпадают. Поэтому прямые называют линиями первого порядка.

## § 2.1. ВЕКТОРЫ И ИХ КООРДИНАТЫ. ПРОСТЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ

В этом параграфе мы напоминаем, что такое вектор и его координаты.

**Определение 2.1.** *Вектором плоскости (пространства) называют направленный отрезок ($\Leftrightarrow$ упорядоченную пару точек) плоскости (пространства).*

*Вектор, заданный упорядоченной парой точек $A$, $B$, будем обозначать $\overrightarrow{AB}$. Точка $A$ называется началом вектора, точка $B$ — концом вектора.*

Ясно, что вектор характеризуется длиной ($\Leftrightarrow$ расстоянием между началом и концом вектора) и направлением. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть равными, если их длины равны и они одинаково направлены.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и обозначают $|\overrightarrow{AB}|$. Длина вектора на плоскости вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \tag{2.1}$$

Координатами вектора называют координаты конца вектора, когда начало его — начало координат, т. е. если $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, то координаты вектора $\vec{a}$: $(x_A, y_A) \stackrel{\text{def}}{=} (x_{\vec{a}},\ y_{\vec{a}})$.

Очевидно, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_{\vec{a}}^2+y_{\vec{a}}^2}. \tag{2.2}$$

Если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то

$$x_{\vec{a}} = x_B - x_A, \qquad y_{\vec{a}} = y_B - y_A \tag{2.3}$$

— выражение координат вектора через координаты начала и конца.

## § 2.2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

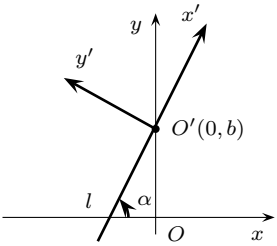


*Рис. 2.1.*

Положение прямой $l$, не параллельной оси ординат, однозначно определяется точкой пересечения этой прямой с осью ординат и углом, который образует эта прямая с положительным направлением оси $Ox$. Обозначим координаты точки пересечения прямой $l$ с осью ординат $(0, b)$, а угол $\widehat{lOx}$ — $\alpha$ (см. рис. 2.1).

Введем на плоскости «новую» систему координат $x'O'y'$, полученную из «старой» переносом начала в точку $(0, b)$ и поворотом на угол $\alpha$. Пусть $M$ произвольная точка плоскости, обозначим ее «старые» координаты $(x, y)$, а «новые» — $(x', y')$. В «новой» системе координат прямая $l$ совпадает с осью $O'x'$ и, значит, точка $M \in l \Leftrightarrow y' = 0$. Последнее и является уравнением прямой $l$ в новых координатах. Подставим в уравнение $y' = 0$ выражение $y'$ через «старые» координаты по формуле (1.22), тогда

$$-x \sin\alpha + (y - b)\cos\alpha = 0.$$

Разделив обе части равенства на $\cos\alpha$ $(x \neq 0)$, получим

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b.$$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha$ через $k$, уравнение прямой $l$ примет вид:

$$y = kx + b \tag{2.4}$$

итак, мы доказали теорему:

**ТЕОРЕМА 2.1**
Уравнение

$$y = kx + b$$

является уравнением прямой, проходящей через точку $(0, b)$ и наклоненной к положительному направлению оси $Ox$ под углом, тангенс которого равен $k$.

Уравнение (2.4) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, $k$ называют угловым коэффициентом этой прямой.

● *ЗАДАЧА 2.1.* Даны прямые

$$l_1\colon\ y = k_1 x + b_1 \qquad \text{и} \qquad l_2\colon\ y = k_2 x + b_2.$$

Требуется найти угол между ними.

●

$$\operatorname{tg}\widehat{l_1 l_2} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.5}$$

Обозначения и их смысл см. на рис. 2.2. ●

*Следствие 2.1 (Условие совпадения прямых).* Две прямые $l_1\colon y = k_1x + b_1$ и $l_2\colon y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

*Следствие 2.2 (Условие параллельности прямых).* Две прямые $l_1\colon y = k_1x + b_1$ и $l_2\colon y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

*Следствие 2.3 (Условие перпендикулярности прямых).* Две прямые $l_1\colon y = k_1x + b_1$ и $l_2\colon y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

● Действительно, прямые перпендикулярны $\iff \widehat{l_1 l_2} = \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{tg} \widehat{l_1 l_2}$ не существует $\overset{(2.5)}{\iff} 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \iff k_1 \cdot k_2 = -1$. ●

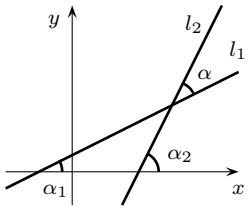


*Рис. 2.2.*

## § 2.3. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ И ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННЫЙ УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ

● *ЗАДАЧА 2.2.* Дано: $k$ — угловой коэффициент прямой $l$ и точка $M(x_M, y_M) \in l$. Требуется найти уравнение прямой $l$.

● Уравнение прямой $l$ с угловым коэффициентом $k$ имеет вид $y = kx + b$, определим в нем $b$, исходя из условия, что $M \in l$. Значит, $y_M = kx_M + b$, тогда $b = y_M - kx_M$. Подставляя это значение в исходное уравнение прямой $l$, получаем

$$y = kx + (y_M - kx_M) \qquad \text{или}$$
$$y - y_M = k(x - x_M). \tag{2.6}$$

Полученное уравнение называют уравнением прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку. ●

## § 2.4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

● *ЗАДАЧА 2.3.* Дано: $(x_1, y_1) \in l$, $(x_2, y_2) \in l$. Требуется найти уравнение прямой $l$.

● Будем считать, что $l$ не вертикальная прямая, тогда у нее есть уравнение с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точки $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2) \in l$, то имеем два верных равенства:

$$\begin{cases} y_2 = kx_2 + b, \\ y_1 = kx_1 + b. \end{cases}$$

Вычитая из первого второе, получаем $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (прямая $l$ не вертикальная $\iff x_2 - x_1 \neq 0$). Подставляя выражение для $k$ в (2.6), получаем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

и если $y_2 - y_1 \neq 0$ ($\iff l$ — не горизонтальная прямая), то

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2.7}$$

— уравнение прямой, проходящей через две точки. ●

*Замечание.* Уравнение (2.7) не описывает вертикальные ($x_2 - x_1 = 0$) и горизонтальные ($y_2 - y_1 = 0$) прямые. Если «разрешить» в (2.7) обращаться в ноль знаменателям при условии одновременного

обращения в ноль числителя, то мы получаем в случае вертикальной прямой $x - x_1 = 0$ или $x = x_1$ (искомая вертикаль), а в случае горизонтальной прямой $y - y_1 = 0$ или $y = y_1$ (искомая горизонталь).

● *ЗАДАЧА 2.4.* $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(2,1)$ — вершины треугольника. Найти уравнение высоты, проходящей через вершину $A$.

● Составим уравнение прямой, проходящей через точки $B$ и $C$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \text{ (по условию перпендикулярности) } \Longrightarrow \quad k_1 = -3,$$

где $k_1$ — угловой коэффициент высоты.

Составим уравнение высоты как прямой, имеющей угловой коэффициент $k_1$ и проходящей через точку $A$ (уравнение (2.6))

$$(y-1) = -3(x-1); \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x + 4. \quad ●$$

## § 2.5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ И ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННЫЙ НАПРАВЛЯЮЩИЙ ВЕКТОР

**Определение 2.2.** *Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный прямой.*

Очевидно, положение прямой определяется заданием точки, принадлежащей этой прямой, и направляющего вектора прямой.

● *ЗАДАЧА 2.5.* Дано: $\vec{l} = (a,b)$ — направляющий вектор прямой $l$;
$M_1(x_1, y_1) \in l$.

Требуется составить уравнение $l$.

● Ясно, что точка $M_2(x_1 + a, y_1 + b) \in l$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$ (см. (2.7))

$$\frac{x - x_1}{(x_1 + a) - x_1} = \frac{y - y_1}{(y_1 + b) - y_1}.$$

Преобразовав знаменатели, получим

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \tag{2.8}$$

— уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор. ●

## § 2.6. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ НА ОСЯХ

Пусть прямая $l$ не проходит через начало координат и пересекает координатные оси в точках $A\ (a,0)$, $B\ (0,b)$ (см. рис. 2.3). Составим уравнение $l$ как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$-\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{2.9}$$

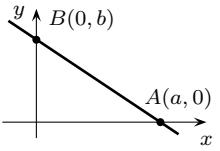



*Рис. 2.3.*

Полученное уравнение называется уравнением в отрезках на осях.

● *ЗАДАЧА 2.6.* Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $y=2x-3$ и координатными осями.

● Преобразуем уравнение прямой к виду (2.9)

$$2x-y=3 \quad \Longleftrightarrow \tag{2.10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{3/2}+\frac{y}{-3}=1; \qquad \text{значит } a=\frac{3}{2};\ b=-3. \tag{2.11}$$

Тогда площадь искомого прямоугольного треугольника равна

$$\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot|b|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}. \quad ●$$

## § 2.7. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Вернемся к уравнению (2.8) $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$.

Обозначим через $t$ $(\in\mathbb{R})$ значение отношений в равенстве (2.8). Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{a}=t,\\ \dfrac{y-y_1}{b}=t,\end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=x_1+at,\\ y=y_1+bt,\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) называются параметрическими уравнениями прямой.

Придавая в (2.12) параметру $t$ конкретные значения, мы будем получать координаты точек, лежащих на прямой.

● *ЗАДАЧА 2.7.* На прямой $l$: $y=2x-1$ найти точки, находящиеся от точки $(1,1)$ на расстоянии, равном 1.

● Очевидно, что, когда $|\vec{l}|=1$ ($\vec{l}$ — направляющий вектор прямой $l$), геометрический смысл параметра в (2.12) — уклонение точки $\big(x(t),y(t)\big)$ от точки $(x_1,y_1)$.

Для прямой $l$ найдем направляющий вектор, преобразовав уравнение $y=2x-1$ к виду (2.8):

$$\frac{x-0}{1/2}=\frac{y-(-1)}{1}; \qquad \text{значит} \qquad \vec{l}=\left(\frac{1}{2};1\right).$$

Рассмотрим вектор $\vec{l}_1=\vec{l}/|\vec{l}|$; $|\vec{l}|=\sqrt{1/4+1}=\sqrt{5}/2$; $\vec{l}_1=(1/\sqrt{5};2/\sqrt{5})$. Составим параметрические уравнения $l$ относительно точки $(1,1)$.

$$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}t.\end{cases}$$

Полагая $t=\pm1$, получим точки $(1+\sqrt{5}/5;1+2\sqrt{5}/5)$; $(1-\sqrt{5}/5;1-2\sqrt{5}/5)$. ●

## § 2.8. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

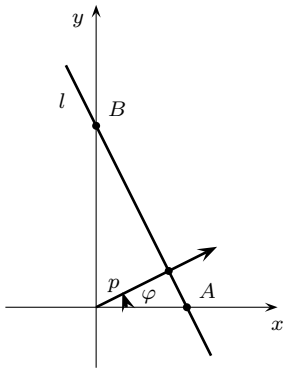



*Рис. 2.4.*

Ясно, что положение прямой на плоскости однозначно определяется указанием расстояния $p$ от начала координат до прямой ($p \geqslant 0$) и угла $\varphi$, который образует вектор, перпендикулярный к прямой, с положительным направлением оси $Ox$ (см. рис. 2.4). Очевидно, точки $A$ и $B$, отмеченные на чертеже, имеют координаты $\left(\frac{p}{\cos\varphi}; 0\right)$; $\left(0; \frac{p}{\sin\varphi}\right)$ соответственно. Составим уравнение $l$ в отрезках на осях

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\varphi}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\varphi}} = 1 \qquad \text{или}$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \quad p \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Это уравнение называется нормальным уравнением прямой.

● *ЗАДАЧА 2.8 (Задача о нахождении расстояния от точки до прямой).* Дана прямая $l$ и $M(x_M, y_M) \notin l$. Требуется найти $\rho(M, l)$ — расстояние от точки $M$ до прямой $l$.

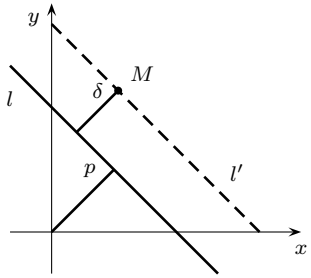



*Рис. 2.5.*

● Составим нормальное уравнение прямой $l$: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ и составим нормальное уравнение параллельной ей прямой $l'$, проходящей через точку $M$:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p \pm \delta) = 0. \tag{2.14}$$

(При расположении $M$, указанном на рис. 2.5, в скобке стоит $p + \delta$.) Подставляя координаты точки $M$ в (2.14), получим верное равенство:

$$x_M\cos\varphi + y_M\sin\varphi - (p \pm \delta) = 0,$$

откуда получаем $\delta = |x_M\cos\varphi + y_M\sin\varphi - p|$.

Таким образом, мы вывели формулу для нахождения расстояния от точки до прямой

$$\rho(M, l) = |x_M\cos\varphi + y_M\sin\varphi - p| \quad ● \tag{2.15}$$

Решая задачу о расстоянии от точки до прямой, мы фактически доказали теорему:

**ТЕОРЕМА 2.2**
Прямая, заданная нормальным уравнением, разбивает плоскость на 3 части: собственно прямую $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ и две полуплоскости, в одной из которых $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p > 0$, в другой $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p < 0$.

*Замечание.* Вектор $\vec{n}$ с координатами $(p\cos\varphi, p\sin\varphi)$ перпендикулярен прямой $l$: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$. Он называется вектором нормали к прямой $l$. Вектор $\vec{n_0} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — единичный вектор нормали ($|\vec{n_0}| = 1$).

## § 2.9. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Рассмотрим линейное уравнение переменных $x$, $y$.

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R}; \quad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{2.16}$$

Все уравнения прямых, которые мы рассматривали до этого, приводятся к виду (2.16). Покажем, что уравнение вида (2.16) задает прямую. Возможны два случая:

а) $B \neq 0$, но тогда уравнение (2.16) приводится к виду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$, а это уравнение прямой (с угловым коэффициентом);

б) $B = 0$, но так как $A^2 + B^2 \neq 0$, то $A \neq 0$, значит, $x = -\frac{C}{A}$. Мы получили уравнение вертикальной прямой, проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ называют общим уравнением прямой.

### 2.9.1. СВОЙСТВА ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Перечислим очевидные свойства:

$1^o$. Общее уравнение прямой определено с точностью до отличного от нуля постоянного множителя.

*Следствие (из $1^o$).* Необходимым и достаточным условием совпадения прямых $l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0$ является пропорциональность всех коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.17}$$

$2^o$. Прямая $Ax + By + C = 0$ проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $C = 0$.

$3^o$. $B = 0 \iff l$ — вертикальная прямая, $A = 0 \iff l$ — горизонтальная прямая.

$4^o$. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ является вектором нормали к прямой $Ax + By + C = 0$.

● $_4$ Переход от уравнения $l\colon Ax + By + C = 0$ к нормальному уравнению осуществляется умножением на нормирующий множитель $\frac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\left(\frac{-\operatorname{sign} C \cdot A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)x + \left(\frac{-\operatorname{sign} C \cdot B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)y - \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Вектор $\vec{n_1} = \left((-\operatorname{sign} C \cdot A)/\sqrt{A^2 + B^2}), (-\operatorname{sign} C \cdot B)/\sqrt{A^2 + B^2})\right)$ является единичным вектором нормали к прямой $l$ (см. § 2.8. «Нормальное уравнение прямой»), а значит, и вектор $(A, B)$ ортогонален $l$. ●$_4$

### 2.9.2. ТЕОРЕМА О РАЗДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ ПРЯМОЙ

**ТЕОРЕМА 2.3**

Прямая $Ax + By + C = 0$ разделяет плоскость на две полуплоскости, в одной из которых $Ax + By + C > 0$, а в другой — $Ax + By + C < 0$.

● Так как переход от общего уравнения к нормальному осуществляется умножением на постоянный, отличный от нуля, множитель, то следует вспомнить теорему о

разделении плоскости на полуплоскости нормальным уравнением. При этом, если $-\operatorname{sign} C/\sqrt{A^2+B^2} > 0$, то «знаки» полуплоскостей такие же, как и для нормального уравнения, и если $-\operatorname{sign} C/\sqrt{A^2+B^2} < 0$, то знаки полуплоскостей противоположны знакам полуплоскостей для нормального уравнения. ●

### 2.9.3. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad — \quad \text{условие параллельности прямых;} \tag{2.18}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad — \quad \text{условие перпендикулярности прямых.} \tag{2.19}$$

● $l_1 \perp l_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Здесь $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ — скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. В декартовых прямоугольных координатах скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат векторов. ●

### 2.9.4. ТЕОРЕМА ОБ «УСТОЙЧИВОСТИ» ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

**ТЕОРЕМА 2.4**
При общем преобразовании декартовых координат прямая переходит в прямую.

● Рассмотрим прямую $l$: $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Общее преобразование декартовых координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b \end{cases}.$$

В координатах $x'O'y'$ имеем уравнение прямой $l$

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a) + B(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b) + C = 0 \qquad \text{или}$$

$$A'x' + B'y' + C' = 0, \qquad \text{где}$$

$$\begin{aligned} A' &= A\cos\alpha + B\sin\alpha, \\ B' &= -A\sin\alpha + B\cos\alpha, \\ C' &= Aa + Bb + C. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} (A')^2 + (B')^2 &= (A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (-A\sin\alpha + B\cos\alpha)^2 = \\ &= A^2\cos^2\alpha + B^2\sin^2\alpha + A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = \\ &= A^2 + B^2 \neq 0, \end{aligned}$$

т. е. мы опять получили общее уравнение прямой. ●

### 2.9.5. ПУЧОК ПРЯМЫХ

Ясно, что уравнения

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0 \tag{2.20}$$

задают множество прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ в случае их пересечения и множество прямых, параллельных им, когда $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ параллельны.

Уравнение (2.20) называется уравнением пучка прямых.

*Замечание.* Мы закончили изучать уравнения прямой на плоскости. Их оказалось много: общее, с угловым коэффициентом, нормальное и т. д. При решении задач на эту тему важно выработать:

1. умение легко переходить от одного уравнения к другому.
2. ощущение, какое из уравнений полезно и необходимо использовать в конкретной ситуации.

## § 2.10. ЛИНЕЙНАЯ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Во многих практических задачах бывает необходимым по отдельным экспериментальным данным попытаться «восстановить» неизвестную функциональную зависимость между переменными (или как-то приблизиться к ней). При этом возникает так называемая интерполяционная задача.

Пусть для неизвестной функции $y = f(x)$, $x \in X$ известны ее значения $f(x_i)$ в точках $x_i \in X$; $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Требуется построить функцию $g(x)$, $x \in X$ из заданного класса функций, удовлетворяющую условиям

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом желательно, чтобы эта функция была достаточно «близка» к функции $f$ на всем множестве $X$.

**Линейная интерполяция.** Если узлов интерполяции ($\Leftrightarrow x_i$) два, то естественным классом интерполирующих функций являются прямые. Ясно, что решение задачи о линейной интерполяции задается формулами

$$\begin{cases} x = x_0(1-t) + x_1t, \\ y = y_0(1-t) + y_1t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

при этом, когда $t$ пробегает отрезок $[0, 1]$, $x$ пробегает отрезок $[x_0, x_1]$, а $y$ — $[y_0, y_1]$.

**Кусочно-линейная интерполяция.** Когда узлов интерполяции больше двух и рассматриваются ломаные, составленные из отрезков прямых, то говорят о кусочно-линейной интерполяции. Параметрическое уравнение, задающее интерполяционную функцию на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, выглядит так:

$$\begin{cases} x(t) = x_{i-1}(1-t_i) + x_it_i, \\ y(t) = y_{i-1}(1-t_i) + y_it_i, \end{cases} \qquad t_i \in [0; 1].$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Назовите различные способы задания прямой. Приведите примеры.
2. Перейдите от уравнения прямой в общем виде к нормальному виду уравнения прямой.
3. Почему прямая, параллельная оси $Oy$, не может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
4. Сформулируйте условия совпадения, параллельности, перпендикулярности прямых в терминах различных уравнений прямых.
5. Рассматривая биссектрису как множество точек, равноудаленных от сторон угла, составить уравнения прямых, делящих пополам углы между прямыми $l_1$ и $l_2$ и проходящих черех точку пересечения прямых $l_1$ и $l_2$.
6. Для прямой $y = -2x + 3$ составьте другие ее уравнения.
7. Сформулируйте различия между линейной и кусочно-линейной интерполяцией.

# III

# КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## § 3.1. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этом параграфе мы получим канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, т. е. такие уравнения, которые получаются при специальном выборе системы координат.

### 3.1.1. ЭЛЛИПС

**Определение 3.1.** *Эллипсом называют множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.*

Будем считать, что фокусы $F_1$ и $F_2$ имеют координаты $(c,0)$ и $(-c,0)$ соответственно, $c \geqslant 0$. $M(x,y)$ — произвольная точка эллипса $\mathcal{E}$, $r_1 = \rho(M,F_1)$, $r_2 = \rho(M,F_2)$.

Из определения эллипса имеем

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad a > c \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Ясно, что

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.1), получаем

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a, \qquad \text{или}$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводя обе части в квадрат (так как они неотрицательны), получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx. \tag{3.3}$$

Возводя еще раз обе части в квадрат $(a^2 - cx \geqslant 0)$, получаем

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$, тогда мы имеем

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{3.4}$$

Разделим обе части в (3.4) на $a^2b^2$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

Проанализируем полученное уравнение.

1. Так как уравнение содержит только четные степени $x$ и $y$, то вместе с точкой $M(x,y) \in \mathcal{E}$, точки $M_1(-x,y)$, $M_2(x,-y)$, $M_3(-x,-y)$ также принадлежат эллипсу. Из этого следует, что координатные оси являются осями симметрии канонического эллипса, а начало координат — центром симметрии.
2. Из уравнения (3.5) следует, что $x^2/a^2 \leqslant 1$ и $y^2/b^2 \leqslant 1$. Значит, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Это означает, что канонический эллипс — ограниченная кривая, расположенная внутри прямоугольника: $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$.

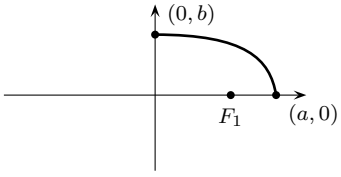



*Рис. 3.1.*

3. Чтобы изобразить канонический эллипс, рассмотрим только его часть, лежащую в первом квадранте. В нем уравнение эллипса можно разрешить относительно $y$: $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Ясно, что когда $x$ пробегает множество $[0;a]$, $y$ убывает от $b$ до 0 (см. рис. 3.1).

Все остальное для канонического эллипса можно дорисовать из соображений симметрии.

Числа $a, b$ называют полуосями эллипса ($a$ — большой, $b$ — малой).

Введем в рассмотрение эксцентриситет эллипса $e$ — характеристику, определенную следующим равенством:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{a}.$$

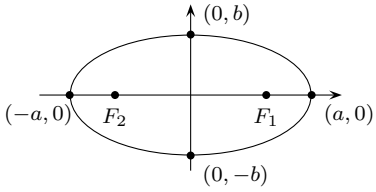



*Рис. 3.2.*

Ясно, что $0 \leqslant e < 1$. При $e = 0$ ($\Longleftrightarrow$ $c = 0$, $b = a$) эллипс вырождается в окружность радиуса $a$, чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше малая полуось (эллипс «сплющивается»). Таким образом, эксцентриситет характеризует «меру сплющенности» эллипса.

Оказывается, что у эллипса существует второе геометрическое определение. Рассмотрим две вертикальные прямые $d_1$: $x = \frac{a}{e}$ и $d_2$: $x = -\frac{a}{e}$. Их называют директрисами эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (см. рис. 3.3). Справедлива

**ТЕОРЕМА 3.1**

Отношение расстояния от точки эллипса до ближайшего фокуса к расстоянию от точки эллипса до ближайшей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, т. е.

$$\frac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,d_1)} = e, \text{ если ближайший фокус } F_1; \tag{3.6}$$

$$\frac{\rho(M,F_2)}{\rho(M,d_2)} = e, \text{ если ближайший фокус } F_2. \tag{3.7}$$

● Рассмотрим произвольную точку $M$ эллипса, лежащую в правой полуплоскости (см. рис. 3.3). Ясно, что

$$\rho(M, d_1) = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}. \tag{3.8}$$

Из (3.3) следует

$$\rho(M, F_1) = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.8) и (3.9) в (3.6), получаем

$$\frac{\rho(M, F1)}{\rho(M, d_1)} = e.$$

Аналогично доказывается соотношение (3.7). ●

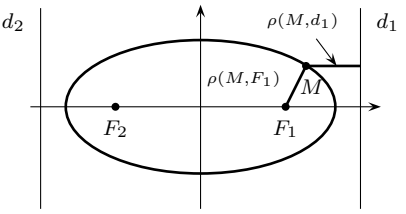



*Рис. 3.3.*

**Касательная к плоской кривой.** Прежде чем заниматься касательной к эллипсу, нам нужно понять, что такое касательная к плоской кривой $L$, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Возьмем на $L$ две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ и рассмотрим прямую, проходящую через эти две точки (такую прямую называют секущей). Устремим точку $M_1$ вдоль $L$ к точке $M_0$. Если можно говорить о предельном положении секущей, то ее предельное положение называется касательной к кривой $L$ в точке $M_0$.

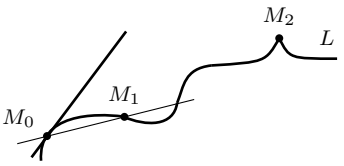



*Рис. 3.4.*

На рисунке 3.4 указана точка $M_0$ кривой $L$, в которой можно говорить о касательной, и точка $M_2$, в которой нет касательной.

*Замечание.* Из рисунка видно, что касательная может пересекать кривую.

**Касательная к эллипсу.** Пусть

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— канонический эллипс, $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

Возьмем точку $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$ и составим уравнение секущей:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Приведем его к виду $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); \qquad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Так как точки $(x_0, y_0)$ и $(x_1, y_1)$ принадлежат эллипсу, то

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

— верные равенства, вычитая из первого второе, получим

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} = 0.$$

Применяя формулы «разности квадратов» и преобразуя, получаем

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{b^2(x_1 + x_0)}{a_2(y_1 + y_0)}.$$

Ясно, что когда точка $M_1(x_1, y_1)$ движется по эллипсу к точке $M_0(x_0, y_0)$, имеет место: $x_1 \to x_0$; $y_1 \to y_0$. Значит,

$$k_{\text{кас}} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned} \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} &= 0; \\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} &= 0; \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &\overset{M_0 \in \mathcal{E}}{=} 1. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{3.10}$$

— уравнение касательной к эллипсу в точке $(x_0, y_0)$.

Зададимся теперь вопросом: «Каковы условия, при которых прямая $l\colon\ Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\mathcal{E}\colon\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?»

Оказывается, справедлива

**ТЕОРЕМА 3.2**
Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тогда и только тогда, когда

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2. \tag{3.11}$$

● Пусть $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ — точка касания прямой $l\colon\ Ax + By + C = 0$ и эллипса. Составим уравнение касательной

$$l_1\colon\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

По нашему предположению прямые $l$ и $l_1$ совпадают, но по условию совпадения

$$\frac{A}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{B}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{C}{-1}.$$

Отсюда

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C}; \qquad y_0 = -\frac{Bb^2}{C}.$$

Вспомним еще раз, что $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \qquad \text{получаем} \qquad \frac{A^2a^2}{C^2} + \frac{B^2b^2}{C^2} = 1, \qquad \text{или}$$

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2.$$

Итак, мы показали, что если прямая касается эллипса, то условие (3.11) выполнено.

Покажем теперь обратное. Пусть выполнено условие (3.11). Рассмотрим точку $(x_0, y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C}; \qquad y_0 = -\frac{Bb^2}{C}.$$

Из условия (3.11) следует, что точка $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$. Составим уравнение касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Подставляя в него выражения для $x_0$ и $y_0$, получим

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1,$$

или, приводя к общему знаменателю,

$$Ax + By + C = 0.$$

Мы получили, что исходная прямая является касательной к эллипсу. ●

### 3.1.2. ГИПЕРБОЛА

**Определение 3.2.** *Гипербола — множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Выберем систему координат так же, как и при выводе уравнения эллипса. Пусть $M(x, y)$ — точка гиперболы $G$ (см. рис. 3.5), по определению гиперболы

$$r_2 - r_1 = \pm 2a, \quad 0 < a < c$$
$$r_1 = \rho(M, F_1), \qquad r_2 = \rho(M, F_2),$$

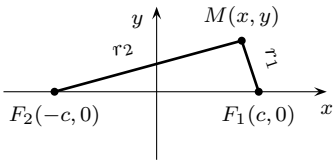



*Рис. 3.5.*

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

возводя в квадрат, получим

$$(x+c)^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2;$$

$$a^2 - xc = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

возводя еще раз в квадрат, получим

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2;$$
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Обозначим $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$, тогда получаем

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделим обе части на $a^2b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.12}$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы. Проанализируем полученное уравнение.

1. Так как уравнение содержит только четные степени $x$ и $y$, то вместе с точкой $M(x,y) \in G$ точки $M_1(-x,-y)$, $M_2(-x,y)$, $M_3(x,-y)$ принадлежат гиперболе. Из этого следует, что оси координат являются ее осями симметрии, и начало координат — центром симметрии.

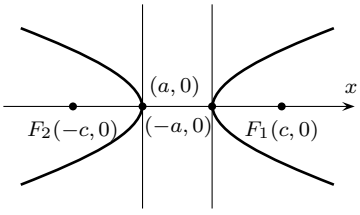



*Рис. 3.6.*

2. Из канонического уравнения гиперболы получаем, что
$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 = b^2(x^2 - a^2). \tag{3.13}$$
Так как левая часть (3.13) неотрицательна, то $x^2 - a^2 \geqslant 0$ или $x^2 \geqslant a^2$ или $|x| \geqslant a$, т. е. гипербола располагается вне вертикальной полосы $|x| < a$ (см. рис. 3.6) и чем больше $x$ по модулю, тем больше и $y$ по модулю.

3. Преобразуем (3.13), считая, что $y$ находится в первом квадранте
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \tag{3.14}$$
Из (3.14) следует, что чем больше $x$, тем ближе соответствующая ветвь гиперболы к прямой $y = \frac{b}{a}x$, оставаясь ниже ее. Эта прямая называется асимптотой гиперболы. Тем самым мы установили, что у гиперболы имеются при $|x| \longrightarrow \infty$ асимптоты (см. рис. 3.7)

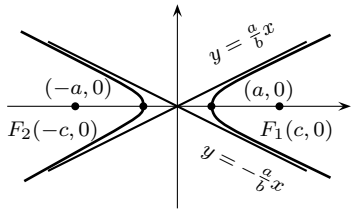



*Рис. 3.7.*

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x. \tag{3.15}$$

Анализ канонического уравнения гиперболы позволяет теперь представить себе форму гиперболы (см. рис. 3.7).

Так как каноническая гипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ пересекает ось $Ox$ в точках $(a,0)$ и $(-a,0)$ и не пересекает оси $Oy$, параметр $a$ называется вещественной полуосью гиперболы, а $b$ — мнимой полуосью.

Так же, как и для эллипса, вводится эксцентриситет гиперболы $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$ и директрисы $x = \pm\frac{a}{e}$.

**ТЕОРЕМА 3.3**
Отношение расстояния от точки гиперболы до фокуса к расстоянию от точки гиперболы до ближайшей к фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы, т. е.

$$\frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, d_1)} = e \tag{3.16}$$

и

$$\frac{\rho(M, F_2)}{\rho(M, d_2)} = e. \tag{3.16'}$$

**Касательная к гиперболе.** Нетрудно показать (аналогия с эллипсом), что уравнение касательной к гиперболе $G\colon\ x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{3.17}$$

а условие касания прямой $l\colon\ Ax + By + C = 0$ и гиперболы $G\colon\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет вид

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2. \tag{3.18}$$

*Замечание.* В курсе элементарной математики гиперболой называлась кривая, заданная уравнением $y = k/x$. Покажем, что в случае $a = b$ мы можем от канонического уравнения прийти к уравнению $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$.

● Совершим поворот плоскости относительно начала координат на угол $-\pi/4$. По формулам (1.19) получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y'). \end{cases} \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в каноническое уравнение гиперболы при условии, что $b = a$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{(x' - y')^2}{2} = a^2 \quad &\Longleftrightarrow \\ 4x'y' = 2a^2 \quad &\Longleftrightarrow \\ y' = \frac{a^2}{2x'} = \frac{k}{x'}, \quad x' \neq 0,\ k = \frac{a^2}{2}. \quad &\bullet \end{aligned}$$

### 3.1.3. ПАРАБОЛА

**Определение 3.3.** *Пусть на плоскости дана прямая $d$ (директриса) и точка $F$ (фокус) вне ее. Параболой $\mathcal{P}$ называется множество точек плоскости, для которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы, т. е.*

$$M \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = 1.$$

*Замечание.* Таким образом, мы определили параболу, как кривую с единичным эксцентриситетом.

Составим уравнение параболы, когда директриса и фокус расположены, как изображено на рисунке 3.8.

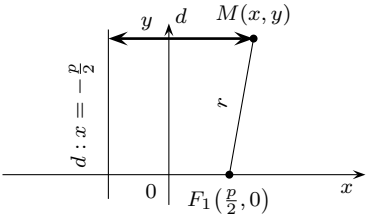



*Рис. 3.8.*

Пусть $M(x,y) \in \mathcal{P}$, тогда $\rho(M,F) = \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$; $\rho(M,d) = x+\frac{p}{2}$. Из определения параболы имеем:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \iff$$
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 \iff \quad (3.20)$$
$$y^2 = 2px \quad (3.21)$$

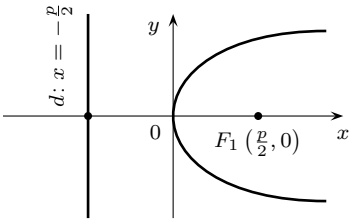



*Рис. 3.9.*

— каноническое уравнение параболы.

Отметим, что это привычная нам из элементарной математики парабола, у которой $x$ и $y$ поменялись местами (см. рис. 3.9).

**Касательная к параболе.** Нетрудно доказать (по аналогии с эллипсом), что уравнение касательной к параболе $\mathcal{P}$: $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$ имеет вид

$$yy_0 = p(x+x_0), \quad (3.22)$$

а условие касания прямой $l$: $Ax+By+C=0$ и параболы $\mathcal{P}$: $y^2=2px$ имеет вид

$$B^2p = 2AC. \quad (3.23)$$

**Оптическое свойство параболы.** Сейчас мы докажем, что парабола обладает замечательным оптическим свойством: *Точечный источник света, помещенный в фокус параболы, отражаясь от нее (считаем, что в каждой точке параболы находится плоское зеркало, касательное к ней), образует пучок света, параллельный оси симметрии параболы.*

● Пусть $\mathcal{P}$: $y^2=2px$; $M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$. Уравнение касательной (зеркала) имеет вид $l$: $yy_0 = p(x+x_0)$.

Составим уравнение светового луча $l_1$ из точки $F$ в точку $M_0$ (см. рис. 3.10).

$$\frac{x-x_0}{\frac{p}{2}-x_0} = \frac{y-y_0}{-y_0}.$$

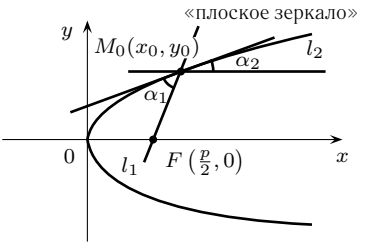



*Рис. 3.10.*

Преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)-\left(x_0-\frac{p}{2}\right)}{\frac{p}{2}-x_0} = -\frac{y}{y_0}+1 \iff$$
$$l: \quad \frac{x-\frac{p}{2}}{x_0-\frac{p}{2}} = \frac{y}{y_0}.$$

Уравнение горизонтальной прямой $l_2$, проходящей через точку $M_0$, имеет вид $l_2$: $y = y_0$.

Покажем, что для пары прямых $l_1$ и $l_2$ и зеркала $l$ выполнен закон отражения: $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2 \iff \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$.

$\operatorname{tg}\alpha_2 = k$, где $k$ — угловой коэффициент $l$, т. е. $k = \frac{p}{y_0}$.

$\operatorname{tg}\alpha_1$ по формуле (2.5) равен

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}, \quad \text{где} \quad k_1 = \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}},$$

тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\frac{y_0}{x_0 - p/2} - \frac{p}{y_0}}{1 + \frac{y_0 p}{(x_0 - p/2)y_0}} = \frac{y_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{2}}{x_0 y_0 - \frac{p}{2}y_0 + y_0 p} \overset{y_0^2 = 2px_0}{=}$$

$$= \frac{px_0 + \frac{p^2}{2}}{x_0 y_0 + \frac{p}{2}y_0} = \frac{p}{y_0}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. ●

## § 3.2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Заметим, что канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы оказались уравнениями второй степени от переменных $x, y$.

Рассмотрим теперь общее алгебраическое уравнение второго порядка:

$$F(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{3.24}$$

где $A$, $B$, $C$ не равны нулю одновременно, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Выясним, при каких условиях кривая (3.24) имеет начало координат центром симметрии.

**ТЕОРЕМА 3.4**
Для того чтобы начало координат являлось центром симметрии кривой второго порядка $F(x, y) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы в ее уравнении отсутствовали слагаемые первой степени ($D = E = 0$).

● Достаточность очевидна, так как если $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F$, то $F(x_0, y_0) = F(-x_0, -y_0)$.

Докажем необходимость. Заметим, что точки $(x_0, y_0)$ и $(-x_0, -y_0)$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (ее уравнение — $y = k_0 x$). Тогда $y_0 = k_0 x_0$, подставляя $k_0 x_0$ в $F(x_0, y_0) = 0$ вместо $y_0$, получаем:

$$Ax_0^2 + 2Bk_0 x_0^2 + Ck_0^2 x_0^2 + 2Dx_0 + 2Ek_0 x_0 + F = 0;$$
$$x_0^2(A + 2Bk_0 + Ck_0^2) + x_0(2D + 2k_0 E) + F = 0.$$

Из теоремы Виетта следует, что последнее уравнение вместе с корнем $x_0$ имеет и корень $-x_0$ только в случае, когда

$$2D + 2k_0 E = 0 \iff D + k_0 E = 0.$$

Меняя положение точки $M(x_0, y_0)$ на кривой, мы меняем $k_0$. Последнее соотношение для центрально-симметричной кривой должно выполняться для всех значений $k_0$, но это возможно только тогда, когда

$$D = E = 0. \quad \bullet$$

Совершим параллельный перенос в «гипотетический» центр кривой второго порядка

$$\begin{gathered}
\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b; \end{cases} \\
A(x'+a)^2 + 2B(y'+b)(x'+a) + C(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + \\
+ 2E(y'+b) + F = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + \\
+ (2Aa + 2Bb + 2D)x' + (2Ba + 2Cb + 2E)y' + \\
+ (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) = 0.
\end{gathered}$$

Таким образом, координаты «гипотетического» центра должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{cases} Aa + Bb + D = 0, \\ Ba + Cb + E = 0, \end{cases}$$

т. е. должны являться решениями системы уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ Bx + Cy + E = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Множество решений каждого из уравнений системы (3.25) — прямая линия, а две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке (центр кривой второго порядка), либо совпадают (прямая центров), либо не пересекаются (нецентральная кривая). Вспоминая условия параллельности и совпадения прямых, получаем:

1) $\frac{A}{B} \neq \frac{B}{C} \iff AC - B^2 \neq 0$ — кривая имеет единственную точку, являющуюся центром симметрии, координаты которой $(a, b)$ — единственное решение системы (3.25).
2) $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ — кривая имеет прямую центров; ее уравнение — любое из уравнений системы (3.25).
3) $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$ — кривая не имеет центра.

*Замечание.* Попутно мы показали, что при параллельном переносе группа слагаемых второй степени в уравнении кривой второго порядка не меняется.

Изучим теперь влияние поворота координатных осей на уравнение кривой второго порядка.

Выполним поворот на угол $\alpha$, тогда

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим правые части формул поворота в уравнение кривой второго порядка

$$\begin{aligned}
A(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)^2 &+ 2B(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + \\
&+ C(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)^2 + 2D(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) + \\
&+ 2E(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + F = 0 \quad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)x_1^2 + \\
&\quad + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y_1^2 + \\
&\quad + (-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha)x_1y_1 + \\
&\quad + (2D\cos\alpha + 2E\sin\alpha)x_1 + (-2D\sin\alpha + 2E\cos\alpha)y_1 + F = 0.
\end{aligned}
$$

Мы показали, что при повороте координат свободный член в уравнении кривых второго порядка не меняется.

*ЗАДАЧА 3.1.* При повороте на какой угол $\alpha$ в уравнении кривой второго порядка пропадет произведение переменных?

Это происходит при

$$
\begin{aligned}
-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 &\iff \\
-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0.& \\
(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0,& \\
\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}, \quad A \neq C.& \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Выполнив поворот на $\alpha$, удовлетворяющий (3.26), получаем

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2Ey_1 + F = 0. \qquad (3.27)$$

Такое преобразование называется приведением к главным осям.

**Определение 3.4.**

- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет эллиптический тип, если* $A_1$ *и* $C_1$ *в* (3.27) *отличны от нуля и имеют одинаковый знак, т. е.* $A_1C_1 > 0$.
- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет гиперболический тип, если* $A_1$ *и* $C_1$ *в* (3.27) *отличны от нуля и имеют разные знаки, т. е.* $A_1C_1 < 0$.
- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет параболический тип, если* $A_1 = 0$, $C_1 \neq 0$ *или* $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$ ($\Leftrightarrow A_1C_1 = 0$, $A_1^2 + C_1^2 > 0$).

Рассмотрим эти случаи отдельно.

**Эллиптический и гиперболический тип.** Покажем, что в этом случае имеем дело с кривой, имеющей центр. Составим систему (3.25)

$$
\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ C_1y + E_1 = 0; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{D_1}{A_1}, \\ y = -\dfrac{E_1}{C_1}. \end{cases}
$$

Как видно, система совместна и имеет единственное решение. Выполним параллельный перенос в точку $\left(-\frac{D_1}{A_1}; -\frac{E_1}{C_1}\right)$

$$A_1x^2 + C_1y^2 + F_1 = 0.$$

**Эллиптический тип.** Преобразуем уравнение кривой к виду $A_1x^2 + C_1y^2 = -F_1$ и если $A_1$ и $C_1$ меньше нуля, умножим обе части на $-1$. Тогда уравнение приводится к виду

$$|A_1|x^2 + |C_1|y^2 = (-\operatorname{sign} A)F_1.$$

Если $(-\operatorname{sign} A)F_1 > 0$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

и мы имеем дело с эллипсом.

Если $F_1 = 0$, то уравнение кривой второго порядка примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0.$$

Ясно, что ему удовлетворяет только одна точка $(0, 0)$.

Если $(-\operatorname{sign} A_1)F_1 < 0$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a, b > 0,$$

которому не удовлетворяют координаты ни одной из точек плоскости. В этом случае говорят, что мы получили мнимый эллипс.

**Гиперболический тип.** В случае, когда $F_1 \neq 0$, уравнение приводится к одному из двух видов:

$$\text{а)} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0;$$
$$\text{б)} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

В обоих случаях мы имеем дело с гиперболой (в случае (б) оси координат поменялись ролями).

Если $F_1 = 0$, то уравнение приводится к виду $m^2x^2 - n^2y^2 = 0$, $m, n > 0$, или $(mx - ny)(mx + ny) = 0$.

Ясно, что ему удовлетворяют точки, координаты которых обращают в ноль хотя бы одну из скобок. Каждая скобка задает прямую, проходящую через начало координат, т. е. в этом случае мы получили пару пересекающихся прямых.

**Параболический тип.** Рассмотрим два случая:

$$A_1x^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \qquad \text{или}$$
$$C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Второй случай получается из первого переменой «ролей» у $x$ и $y$, поэтому будем рассматривать только первый случай.

Составим систему уравнений (3.25) для нахождения центра:

$$\begin{cases} A_1x + D_1 = 0 \\ E_1 = 0. \end{cases}$$

Если $E_1 \neq 0$, то эта система не имеет решений, и если $E_1 = 0$, то прямая $x = -\frac{D_1}{A_1}$ является прямой центров. Рассмотрим эти случаи отдельно.

- $E_1 \neq 0$, тогда уравнение кривой второго порядка можно разрешить относительно $y$

$$y = ax^2 + bx + c,$$

т. е. мы имеем дело с параболой.

- $E_1 = 0$, тогда уравнение кривой второго порядка не содержит $y$

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Известно, что если $\mathcal{D} = b^2 - 4ac > 0$, то левая часть разлагается на множители

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Мы получили пару вертикальных прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

Если $\mathcal{D} = 0$, то

$$a(x - x_1)^2 = 0$$

— две совпавшие вертикальные прямые $x = x_1$.

Если $\mathcal{D} < 0$, то $ax^2 + bx + c$ не обращается в ноль и значит кривая второго порядка представляет собой пустое множество (как и в случае мнимого эллипса).

## Контрольные вопросы и задания

1. Отправляясь от определения эллипса (определение 3.1), мы получили его каноническое уравнение. Докажите самостоятельно, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3.25), то точка принадлежит эллипсу с фокусами $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.
2. Чем отличается определение касательной к кривой в данной точке от известного Вам из школьной геометрии определения касательной к окружности? Почему потребовался новый подход к понятию «касательная»?
3. Отправляясь от определения гиперболы (определение 3.2), мы получили ее каноническое уравнение. Докажите самостоятельно, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3.12), то точка принадлежит гиперболе с фокусами $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.
4. Найдите угол между асимптотами гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.
5. Может ли касательная к гиперболе быть параллельна ее асимптоте?
6. Докажите самостоятельно оптическое свойство эллипса: «Световые лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от эллипса проходят через другой фокус.» Какие практические применения этого свойства можно предложить (или известны Вам)?
7. Докажите, что парабола не имеет асимптот.

# IV

# АЛГЕБРА МАТРИЦ

## § 4.1. ПОНЯТИЕ О МАТРИЦЕ

Матрица — удобный способ организации данных во многих задачах.

*ПРИМЕР 4.1.* Дж. Чоу [94] приводит данные о средней продажной цене подержанных автомобилей в зависимости от срока предыдущей эксплуатации. Итоговые данные по годам сводятся в таблицу:

| Продолжительность эксплуатации (годы) | 1950 | 1951 | 1952 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1881 | 2120 | 2445 |
| 2 | 1521 | 1676 | 1825 |
| 3 | 1261 | 1397 | 1484 |
| 4 | 1054 | 1144 | 1218 |

Можно упростить запись этой таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1881 & 2120 & 2445 \\ 1512 & 1676 & 1825 \\ 1261 & 1397 & 1484 \\ 1054 & 1144 & 1218 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Содержательное значение любого числа в этой таблице (матрице) однозначно определяется его позицией, т. е. указанием номера строки и столбца, в котором это число находится. Так, например, число 1397, стоящее в 3-й строке 2-го столбца, — средняя цена (в долларах) подержанного автомобиля со сроком предыдущей эксплуатации 3 года в 1951 году.

**Определение 4.1.** *Матрицей размера* $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ *называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую* $n$ *строк и* $m$ *столбцов.*

Запись такой таблицы обычно заключают в круглые скобки (в примере 4.1 приведена матрица $4 \times 3$).

Для обозначения матриц используют обычно заглавные буквы латинского алфавита ($A$, $B$ и т. п.). Если нужно указать размеры матрицы, то пишут $A_{n\times m}$. Для обозначения позиций элементов, образующих матрицу, применяют двойную индексацию — $ij$, где $i$ — номер строки, $j$ — номер столбца. Элемент матрицы $A$, стоящий в позиции $ij$, обозначают $a_{ij}$, или $A_{ij}$, или $(A)_{ij}$, или $A(i, j)$.

$(a_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$ — возможное обозначение для матрицы размера $n \times m$ с элементами $a_{ij}$ ($(A_{ij})_{n\times m}$, $(a_{ij})_{n\times m}$, $(a_{ij})$ — другие возможные обозначения матрицы).

● *ПРИМЕР 4.2.* Если $A$ — матрица примера 4.1, то $a_{13} = 2445$, $a_{42} = 1144$, $a_{23} = 1825$.

Матрица размера $1 \times m$ называется матрицей-строкой длины $m$. Матрица размера $n \times 1$ называется матрицей-столбцом высоты $n$.

**Определение 4.2.** *Две матрицы одинаковых размеров называют равными и пишут $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Ясно, что

1) $A = A$;

2) $(A = B) \iff B = A$;

3) $(A = B)\&(B = C) \implies A = C$.

В случае, когда $n = m$, матрица называется квадратной порядка $n$, если $n \neq m$, матрица называется прямоугольной.

**Определение 4.3.** *Нуль-матрицей размера $n \times m$ называется матрица, обозначаемая $O_{n\times m}$ (или просто $O$), определенная следующим: $O_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 0$.*

**Определение 4.4.** *Противоположной к матрице $A$ называется матрица тех же размеров, обозначаемая $-A$, определенная следующим образом:*

$$(-A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -A_{ij}. \tag{4.2}$$

## § 4.2. СУММА МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО

**Определение 4.5.** *Суммой матриц $A$ и $B$* одинаковых размеров *(!) называется матрица, обозначаемая $A + B$, имеющая те же размеры, что и матрицы-слагаемые, и определяемая следующим образом:*

$$(A + B)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}, \tag{4.3}$$

*т. е. матрицы складываются поэлементно.*

● *ПРИМЕР 4.3.* Если

$$B = \begin{pmatrix} 562 & 407 & 251 \\ 320 & 252 & 189 \\ 215 & 160 & 145 \\ 162 & 130 & 105 \end{pmatrix}$$

— матрица средних цен на подержанные велосипеды в 1950–1953 гг. (в долларах), а $A$ — матрица средних цен на автомобили (пример 4.1), то

$$A + B = \begin{pmatrix} 2443 & 1527 & 2696 \\ 1832 & 1928 & 2014 \\ 1476 & 1557 & 1629 \\ 1216 & 1274 & 1323 \end{pmatrix}$$

— матрица средних цен комплекта «автомобиль-велосипед».

**ТЕОРЕМА 4.1**
Сложение матриц обладает следующими свойствами:
$1^{\circ}$ . $A+B=B+A$ — коммутативность;
$2^{\circ}$ . $(A+B)+C=A+(B+C)\stackrel{\text{def}}{=}A+B+C$ — ассоциативность;
$3^{\circ}$ . $A+0=0+A=A$;
$4^{\circ}$ . $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Множество с бинарной операцией, обладающее свойствами $1{-}4^{\circ}$, называется коммутативной (абелевой) группой.

Бинарной операцией, заданной на множестве $X$, называется отображение, действующее из множества упорядоченных пар элементов $X$ (оно обозначается $X\times X$) в $X$.

Примеры множеств с бинарной операцией:

1) $X=\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, бинарная операция — сложение;

2) $X=\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, бинарная операция — умножение.

Пример некоммутативной бинарной операции:

3) Пусть $X=\mathbb{N}$. Определим бинарную операцию $\uparrow$ следующим:

$$m\uparrow n\stackrel{\text{def}}{=}m^n.$$

Ясно, что $\uparrow$ — некоммутативная операция, так как $8=2\uparrow 3\neq 3\uparrow 2=9$.

Если операция $\odot$ некоммутативна, то в определении группы свойство $4^{\circ}$ заменяется на $4^{\circ\prime}$ $\forall x\in X$ $\exists(-x)_{\text{Л}}$ и $(-x)_{\text{П}}$, такие, что

$$x\odot(-x)_{\text{П}}=(-x)_{\text{Л}}\odot x=0.$$

Элемент, обозначаемый $0$, называют нейтральным, а элемент $(-x)$ противоположным или обратным, $(-x)_{\text{Л}}$ — левым обратным, $(-x)_{\text{П}}$ — правым обратным.

Здесь и далее знаки $\forall$ и $\exists$ можно считать стенографическими: $\forall$ — «для любого», $\exists$ — «существует».

**ТЕОРЕМА 4.2**
Если $G$ — группа относительно операции $\odot$, то уравнения $x\odot a=b$ и $a\odot x=b$ разрешимы при любых $a$ и $b\in G$ и их решения имеют вид: $x=b\odot(-a)_{\text{П}}$ и $x=(-a)_{\text{Л}}\odot b$ соответственно.

● Непосредственная подстановка доказывает теорему (используется ассоциативность групповой операции). ●

Обозначим через $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ множество матриц размера $n\times m$ с вещественными элементами, тогда Теорема 4.1 может быть сформулирована иначе:

**Теорема 4.1.′** *Множество $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ относительно операции $+$ образует коммутативную группу.*

**Знак суммы и правила «обращения» с ним.** Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ — конечная числовая последовательность, обозначим через

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\stackrel{\text{def}}{=}a_1+a_2+\cdots+a_n, \tag{4.4}$$

$i$ называют индексом суммирования, 1 и $n$ — нижним и верхним пределами суммирования.

Очевидно, имеют место свойства:

$1^{\circ}$. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$ — значение суммы не зависит от обозначения индекса суммирования.

$2^{\circ}$. Для любого целого $\alpha$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1-\alpha}^{n-\alpha} a_{i+\alpha}.$$

Пусть $(a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, обозначим через $\left\{s^j\right\}_{j=1}^{m}$ последовательность, определенную следующим:

$$s^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{m} s^j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

называется повторной суммой. Можно определить еще одну повторную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

При этом справедливо:

$3^{\circ}$. $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, так как и левое выражение и правое выражение — сумма всех элементов матрицы $(a_{ij})$. Это правило называют правилом изменения порядка суммирования по прямоугольнику, и оно позволяет определить так называемую двойную сумму:

$$\sum_{i=1\ j=1}^{n\ m} a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

*Замечание.* Если мы суммируем не по прямоугольнику, то изменение порядка суммирования не такое простое.

● *ПРИМЕР 4.4.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Мы хотим найти сумму элементов квадратной матрицы, попавших в верхний треугольник.

● Ясно, что

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}. \quad ●$$

Иногда индекс суммирования пробегает не все значения подряд, например

$$\sum_{i=1}^{2n} a_{2i} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n};$$

$$\sum_{i=0}^{2n-1} a_{2i+1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}.$$

$4^{\text{o}}$ . $\sum_{i=1}^{n} ba_i = b\sum_{i=1}^{n} a_i$ — правило вынесения постоянного множителя за знак суммы.

$5^{\text{o}}$ . $\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = (\sum_{i=1}^{n} a_i)\, b_j$ — множитель, имеющий индекс, отличный от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы.

**Определение 4.6.** *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. *Определим матрицу* $\alpha A$ $\big(\in M_{n\times m}(\mathbb{R})\big)$ *следующим образом:*

$$(\alpha A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot A_{ij}, \tag{4.5}$$

*т. е. матрица умножается на число поэлементно.*

*ПРИМЕР 4.5.* Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad -1A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что имеют место свойства:

$1^{\text{o}}$ . $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ — I дистрибутивный закон;

$2^{\text{o}}$ . $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ — II дистрибутивный закон;

$3^{\text{o}}$ . $-1 \cdot A = -A$;

$4^{\text{o}}$ . $1 \cdot A = A$;

$5^{\text{o}}$ . $0 \cdot A = O, \quad \forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$;

$6^{\text{o}}$ . $\alpha \cdot O = O, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

## § 4.3. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Прежде чем перейти к определению самой «экзотической» операции — умножения матриц, рассмотрим на примере ее простейший вариант — умножение матрицы-строки на матрицу-столбец.

Пусть некоторая фирма производит 5 видов товаров с ценами реализации (в условных единицах), представленными матрицей-строкой:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 7 & 60 & 25 \end{pmatrix},$$

объем реализации по видам продукции (в единицах продукции) за месяц представлен матрицей-столбцом

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 150 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix},$$

тогда объем реализации фирмы в денежном выражении за месяц равен

$$\begin{aligned} 12 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 7 \cdot 150 + 60 \cdot 6 + 25 \cdot 34 = \\ = 120 + 200 + 1050 + 360 + 850 = 2580 \end{aligned}$$

(вспомните знакомое со школы определение скалярного произведения).

Это выражение в алгебре матриц задает правило умножения матрицы-строки на матрицу-столбец, т. е.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 7 & 60 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 150 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} = \\ = 12 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 7 \cdot 150 + 60 \cdot 6 + 25 \cdot 34 = 2580.$$

Заметим, что длина матрицы-строки совпадает с высотой матрицы-столбца. Если же у нас есть матрица $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ и матрица $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, то любая строка матрицы $A$ имеет длину, равную высоте любого столбца матрицы $B$, и значит, мы можем перемножить по правилу умножения матрицы-строки на матрицу-столбец любую пару «строка матрицы $A$», «столбец матрицы $B$». В результате такого перемножения мы получим число, которое при заданных матрицах $A$ и $B$ определяется парой индексов $i, j$, где $i$ — номер строки матрицы $A$, $j$ — номер столбца матрицы $B$ $(1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant m)$. В результате мы получим таблицу чисел, индексированную двумя индексами, т. е. матрицу размера $n \times m$. Эта матрица и есть произведение матрицы $A$ на матрицу $B$. Дадим теперь четкое определение:

**Определение 4.7.** *Пусть $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, произведением матрицы $A$ на матрицу $B$ называется матрица, обозначаемая $AB$ $(A \cdot B,\ A \times B)$*[1] *$\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ и определяемая следующим:*

$$(AB)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}. \tag{4.6}$$

*Замечание.* Еще раз подчеркнем, что перемножать можно только матрицы, размеры которых согласованы, а именно: число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго сомножителя. В результате перемножения получается матрица с числом строк, равным числу строк первого сомножителя, и числом столбцов, равным числу столбцов второго сомножителя.

*ПРИМЕР 4.6.* Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

[1] В скобках мы приводим другие встречающиеся обозначения.

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$BA$ — не существует, так как пара матриц $B, A$ не согласована по умножению.

*Замечание.* При умножении матрицы-строки на матрицу получается матрица-строка, при умножении матрицы на матрицу-столбец получается матрица-столбец.

*Замечание.* Сложение матриц и умножение матриц определены так, что если числа отождествить с матрицами $1 \times 1$, то обычные операции сложения и умножения совпадут с соответствующими матричными операциями.

**ТЕОРЕМА 4.3**
Умножение матриц (в размерах, больших чем $1 \times 1$) некоммутативно.

● Для доказательства этой теоремы достаточно привести пару матриц $A$, $B$ такую, что

$$AB \neq BA. \tag{4.7}$$

Ясно, что пара $A, B$ может быть такой, что она согласована по умножению, а пара $B, A$ не согласована и (4.7) выполнено тривиально. Мы приведем пример таких матриц, что пары $A, B$ и $B, A$ согласованы по умножению и (4.7) выполнено.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$ ●

*Замечания:*

- Обращаем внимание на особенность доказательства теорем «отрицательного» свойства (см. пред. теорему).
- Умножение матриц не является «абсолютно» некоммутативным, так если $A = B$ — квадратная матрица, то $AB = BA$. Попробуйте привести нетривиальные примеры квадратных матриц $A$, $B$, для которых $AB = BA$.

**ТЕОРЕМА 4.4**
Умножение матриц ассоциативно, т. е. для любых матриц $A\,(\in M_{m\times p}(\mathbb{R}))$, $B\,(\in M_{p\times q}(\mathbb{R}))$, $C\,(\in M_{q\times n}(\mathbb{R}))$ имеет место равенство:

$$(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C) \overset{\text{def}}{=} A \cdot B \cdot C. \tag{4.8}$$

● Воспользуемся определением равенства матриц (Определение 4.2) и умножения матриц (Определение 4.7)

$$\big((AB) \cdot C\big)_{ij} = \sum_{s=1}^{p} (AB)_{is} C_{sj} =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} \left( \sum_{t=1}^{q} A_{it} B_{ts} \right) \cdot C_{sj} \overset{\text{св-во 5 знака } \Sigma}{=}$$
$$= \sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} A_{it} B_{ts} C_{sj} \overset{\text{св-во 3 } \Sigma}{=} \sum_{t=1}^{q} \sum_{s=1}^{p} A_{it} B_{ts} C_{sj} \overset{\text{св-во 5 } \Sigma}{=}$$

$$= \sum_{t=1}^{q} A_{it} \left( \sum_{s=1}^{p} B_{ts} C_{sj} \right) \overset{\text{Опред. 4.7}}{=}$$

$$= \sum_{t=1}^{q} A_{it} \, (BC)_{tj} \overset{\text{Опред. 4.7}}{=} (A \cdot (BC))_{ij} . \quad \bullet$$

Мы знаем, что произведение чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Для матриц (обобщающих понятие числа) это не так.

**ТЕОРЕМА 4.5**
Во множестве матриц (размеров, больших $1 \times 1$) существуют такие матрицы $A \neq 0$ и $B \neq 0$, что $AB = 0$.

● Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Матрицы, удовлетворяющие утверждению теоремы 4.5, называют делителями нуля. Выделим особые часто встречающиеся матрицы.

**Определение 4.8.** Квадратная *матрица* $E_n$ $(I_n,\ I,\ E) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *заданная равенством*

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \tag{4.9}$$

*называется единичной порядка* $n$, *т. е.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Очевидно, справедливо равенство

$$EA = AE = A, \tag{4.11}$$

где, если $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, в равенстве (4.11) слева стоит $E_m$, а справа,— $E_n$.

**Определение 4.9.** Квадратная *матрица* $A\,(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *называется диагональной, если*

$$(A)_{ij} = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \tag{4.12}$$

*т. е. диагональная матрица имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

**Определение 4.10.** *Квадратная матрица* $A\,(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *называется скалярной, если*

$$A = \alpha \cdot E, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

*т. е. скалярная матрица имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

*Замечание.* После того как определена скалярная матрица, умножение матриц на число логично заменить умножением на скалярную матрицу.

Определим во множестве матриц еще одну операцию — транспонирование, которая бывает очень удобной и позволяет снять некоторые сложности в алгебре матриц, связанные с ее некоммутативностью относительно умножения матриц.

**Определение 4.11.** *Пусть* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, *транспонированной матрицей называется матрица, обозначаемая* $A^t(A') \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *и определяемая следующим:*

$$\left(A^t\right)_{ij} = (A)_{ji}\,. \tag{4.14}$$

*ПРИМЕР 4.7.* Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{тогда} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

**ТЕОРЕМА 4.6**

Имеют место следующие свойства:

$1^{\text{o}}$ . $\left(A^t\right)^t = A$;

$2^{\text{o}}$ . $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;

$3^{\text{o}}$ . $(A+B)^t = A^t + B^t$;

$4^{\text{o}}$ . $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Свойства $1-3^{\text{o}}$ очевидны, докажем свойство $4^{\text{o}}$ .

$$\left((A\cdot B)^t\right)_{ij} \overset{(4.14)}{=} (AB)_{ji} \overset{(4.6)}{=} \sum_{k=1}^{p} A_{jk}B_{ki} \overset{(4.14)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (A^t)_{kj}\cdot(B^t)_{ik} = \sum_{k=1}^{p} (B^t)_{ik}\cdot(A^t)_{kj} \overset{(4.6)}{=} \left(B^t\cdot A^t\right)_{ij}. \qquad \bullet$$

*Замечание (о «пользе» транспонирования).* Из-за некоммутативности умножения матриц простейшие матричные уравнения бывают двух типов:

$$\text{а)} \quad A\cdot X = B \qquad \text{и} \qquad \text{б)} \quad X\cdot A = B,$$

однако транспонирование и его свойства позволяют свести уравнение типа б) к типу а).

$$X \cdot A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^t X^t = B^t.$$

Последнее уравнение относится к типу а).

## § 4.4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

С необходимостью решать матричные уравнения, в частности, связаны и следующие понятия.

**Определение 4.12.** *Матрица $A$ называется обратимой слева (справа), если существует матрица $A_{\text{Л}}^{-1}$ ($A_{\text{П}}^{-1}$), называемая левой (правой) обратной, такая, что*

$$A_{\text{Л}}^{-1} A = E, \tag{4.15}$$

$$(A A_{\text{П}}^{-1} = E). \tag{4.16}$$

**Определение 4.13.** Квадратная *матрица $A$ называется обратимой, если существует матрица $A^{-1}$, называемая обратной к $A$, такая, что*

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E. \tag{4.17}$$

*ПРИМЕР 4.8.* Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убедимся, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} A A^{-1} &= A^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 4.7**
Если квадратная матрица обратима слева и справа, то левая и правая обратные матрицы совпадают и она просто обратима.

$$\begin{aligned} A_{\text{Л}}^{-1} &= A_{\text{Л}}^{-1} E = A_{\text{Л}}^{-1} \left( A \cdot A_{\text{П}}^{-1} \right) \overset{\text{ассоц. произ.}}{=} \\ &= \left( A^{-1} A \right) A_{\text{П}}^{-1} = E A_{\text{П}}^{-1} = A_{\text{П}}^{-1}. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 4.8**
Если матрица обратима, то обратная к ней единственна.

Допустим противное, т. е. что существует такая обратимая матрица $A$, у которой по крайней мере две обратных матрицы $A_{N_1}^{-1}$ и $A_{N_2}^{-1}$ и

$$A_{N_1}^{-1} \neq A_{N_2}^{-1}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств, которая приводит к противоречию с (4.18):

$$\begin{aligned} A_{N_1}^{-1} &= A_{N_1}^{-1}E = A_{N_1}^{-1}\left(AA_{N_2}^{-1}\right) = \\ &= \left(A_{N_1}^{-1}A\right)A_{N_2}^{-1} = EA_{N_2}^{-1} = A_{N_2}^{-1} \end{aligned}$$ ●

**ТЕОРЕМА 4.9 (Свойства обратимых матриц)**
Имеют место свойства:
$1^{\circ}$ . Если матрица $A$ обратима, то $A^{-1}$ также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.
$2^{\circ}$ . Если $A, B$ $(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ обратимы, то $AB$ — обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
$3^{\circ}$ . $E$ — обратимая матрица и $E^{-1} = E$.
$4^{\circ}$ . Если матрица обратима, то она не является делителем нуля.
$5^{\circ}$ . 0-матрица не является обратимой матрицей и односторонне обратимой матрицей.

● Свойства $1^{\circ}$ , $3^{\circ}$ и $5^{\circ}$ очевидны, докажем $2^{\circ}$ и $4^{\circ}$ .

●$_2$ $$AB\cdot\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A\cdot E\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = E.$$
$$\begin{aligned} \left(B^{-1}A^{-1}\right)\cdot AB &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = \\ &= B^{-1}\cdot E\cdot B = B^{-1}\cdot B = E. \end{aligned}$$ ●$_2$

●$_4$ Допустим противное, т. е. что существует обратимая матрица $A$, которая является делителем нуля, т. е. для нее существует $B$ такая, что

$$\begin{cases} B \neq 0, \\ AB = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Рассмотрим теперь цепочку равенств, приводящую к противоречию с (4.19):

$$B = EB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}\cdot 0 = 0.$$ ●$_4$ ●

*Следствие 4.1 (из теоремы 4.9).* Существуют необратимые матрицы (и их перечень не ограничивается нуль-матрицей).

● Из $4^{\circ}$ следует, что делители нуля не являются обратимыми матрицами, а существование делителей нуля уже доказано (теорема 4.5). ●
Из теоремы 4.9 следует

**ТЕОРЕМА 4.10**
Множество обратимых матриц порядка $n$ относительно умножения образует некоммутативную группу.

**Степени матрицы.** Для квадратной матрицы $A$ можно определить ее неотрицательные степени, положив

$$\begin{aligned} A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E, \quad A^1 \stackrel{\text{def}}{=} A, \quad A^2 \stackrel{\text{def}}{=} A\cdot A, \quad \dots \\ \dots, \quad A^n \stackrel{\text{def}}{=} A^{n-1}\cdot A, \quad \dots, \end{aligned} \tag{4.20}$$

а если матрица $A$ обратима, то можно определить и ее целые отрицательные степени, положив

$$(A)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}; \quad A^{-2} \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} \cdot A^{-1}, \ldots, \\ A^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} A^{-(n-1)} \cdot A^{-1}, \quad \ldots. \tag{4.21}$$

При этом справедливо

$$A^n A^m = A^{n+m}. \tag{4.22}$$

Теперь можно говорить и о многочленах от матрицы. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^1 + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{4.23}$$

— многочлен с вещественными коэффициентами.

Многочленом от матрицы $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ (матричным многочленом) называется матрица $P(A)$, определенная следующим образом:

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E. \tag{4.24}$$

*ПРИМЕР 4.9.* Пусть

$$P(x) = x^2 - 5x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $A$ является матричным корнем многочлена.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$P(B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Когда обратима скалярная матрица и как выглядит обратная к ней?
2. Когда обратима диагональная матрица и как выглядит обратная к ней?
3. Постройте примеры матриц делителей нуля, отличных от приведенных в доказательстве теоремы 4.5.
4. Во множестве $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ приведите пример матриц $A$, $B$ ($\neq E$, $O$), для которых $AB = BA$.
5. Пусть $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. На какую матрицу и с какой стороны нужно умножить матрицу $A$, чтобы результат умножения был матрицей, полученной из матрицы $A$ перестановкой местами ее $s$-й и $r$-й строк (столбцов)?

# V

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

## § 5.1. СЛУ. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ

Рассмотрим систему из $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{5.1}$$

*Замечание.* Многие вынесли из школы серьезное заблуждение о том, что число уравнений в СЛУ должно быть равно числу неизвестных (т. е., что $m = n$). На самом деле в жизни возможны любые ситуации: $m < n$, $m = n$, $m > n$.

Образуем матрицу $A$ размера $m \times n$ по правилу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей системы (матрицей коэффициентов системы).

Обозначим через $x$ матрицу-столбец из неизвестных, т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а через $b$ матрицу-столбец свободных членов (правых частей СЛУ), т. е.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

тогда система линейных уравнений может быть записана в виде:

$$Ax = b, \tag{5.2}$$

который называется матричной записью системы линейных уравнений.

Если матрица $A$ квадратная, то и систему линейных уравнений называют квадратной; если $b = 0$, то СЛУ называют однородной системой линейных уравнений (ОСЛУ).

Формально всю информацию о СЛУ (кроме обозначений неизвестных) сохраняет матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая расширенной матрицей системы. В записи расширенной матрицы системы применяют разделитель — вертикальную черту, отделяющую столбец правых частей от матрицы коэффициентов.

*ПРИМЕР 5.1.* Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

Тогда матричная запись имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

**Определение 5.1.** *Упорядоченный набор из $n$ чисел называется решением системы линейных уравнений с $n$ неизвестными, если при подстановке его элементов вместо неизвестных во* все *уравнения системы получаются верные числовые равенства.*

Обозначим через $R\big((A \mid b)\big)$ множество решений СЛУ $Ax = b$.

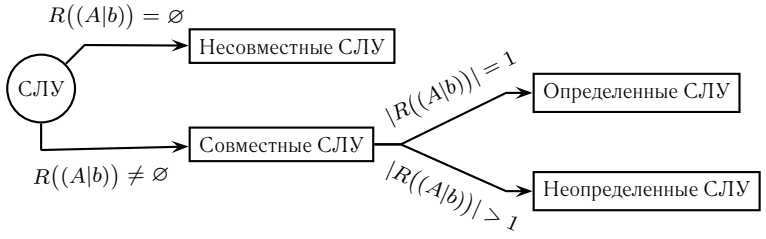



*Рис. 5.1.*

В зависимости от того, каково множество решений системы линейных уравнений, они делятся на совместные $\Leftrightarrow$ $R\big((A \mid b)\big) \neq \varnothing$ и несовместные $\Leftrightarrow$ $R((A \mid b)) = \varnothing$ (см. рис. 5.1).

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, т. е. если $|R((A \mid b))| = 1$, в противном случае она называется неопределенной[1].

**ТЕОРЕМА 5.1**
Однородная система всегда совместна.

● Очевидно, решением однородной системы линейных уравнений всегда является $(0, 0, 0, \ldots, 0)^t$ — нулевое решение, оно называется тривиальным. ●

**ТЕОРЕМА 5.2**
Если система линейных уравнений имеет более одного решения, то она имеет бесконечное множество решений.

● Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ и пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t \neq \neq \overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$ — два ее решения, т. е.

$$A\overline{\alpha} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = b \quad \text{и} \quad A\overline{\beta} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = b$$

— верные матричные равенства. Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Образуем вектор-столбец по правилу

$$\mu \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Покажем, что такой вектор-столбец при любом $\mu \in [0, 1]$ является решением системы линейных уравнений.

$$\begin{aligned} A\left(\mu \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + (1-\mu) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) &\overset{\text{дистр. зак.}}{=} \\ = A\left(\mu \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right) + A\left((1-\mu) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) &= \\ = \mu A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + (1-\mu) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} &= \left(\text{так как } A\overline{\alpha}=b, A\overline{\beta}=b\right) = \\ = \mu b + (1-\mu) b = (\mu + (1-\mu))\, b = 1 \cdot b &= b, \end{aligned}$$

но тогда мы показали, что множество $R\big((A \mid b)\big)$ содержит в себе бесконечное подмножество решений вида (5.3), а значит, является бесконечным множеством. ●

[1] Здесь и далее $|A|$ — число элементов во множестве $A$.

**Определение 5.2.** *Системы линейных уравнений* $A_1x = b_1$ *и* $A_2x = b_2$ *называют равносильными (и пишут* $A_1x = b_1 \simeq A_2x = b_2$ *или* $(A_1 \mid b_1) \simeq (A_2 \mid b_2)$*), если* $R\big((A_1 \mid b_1)\big) = R\big((A_2 \mid b_2)\big)$.

Процесс решения системы линейных уравнений — это цепочка переходов от исходной системы к равносильным такой, что для последней в цепочке системы линейных уравнений можно найти множество решений, но тогда, согласно определению 5.2, это будет и множеством решений исходной системы.

## § 5.2. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУ

Выделим три типа преобразований систем линейных уравнений:

1. Перемена местами $i$-го и $j$-го уравнений. (Условная запись этого преобразования $c_i := c_j,\ c_j := {c_i}^2$).
2. Умножение $i$-го уравнения системы на число, отличное от нуля и прибавление к нему $j$-го уравнения, умноженного на число ($c_i := \alpha c_i + \beta c_j,\ \alpha \neq 0,\ i \neq j$).

Преобразования типа 1–2 называют гауссовыми в честь К. Ф. Гаусса[3].

**ТЕОРЕМА 5.3**
Если система линейных уравнений $(A_1 \mid b_1)$ получена из системы линейных уравнений $(A \mid b)$ путем конечного числа последовательного применения гауссовых преобразований, то $(A \mid b) \simeq (A_1 \mid b_1)$.

● Для доказательства теоремы достаточно показать, что любое из преобразований 1–2 дает равносильную систему. Последнее очевидно ($\Leftrightarrow$ предоставляется читателю проделать самостоятельно (указание: легко показать, что $R\big((A_1 \mid b_1)\big) \subset R\big((A \mid b)\big)$, а затем воспользоваться обратимостью гауссовых преобразований)). ●

## § 5.3. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (МЕТОД ГАУССА)

Сейчас мы познакомимся с основным методом решения систем линейных уравнений, формализация которого принадлежит К. Гауссу, благодаря чему этот метод носит его имя. Как вы увидите в дальнейшем, на этом методе основаны почти все алгоритмы линейной алгебры.

Сам метод обладает двумя важнейшими чертами — он процедурен и рекурсивен.

Процедурность означает, что в методе выделена некоторая последовательность однотипных шагов (процедура исключения неизвестного), а рекурсивность означает, что процедура последовательно применяется к исходной системе, результату применения процедуры и т. д. Выход из этой цепочки происходит автоматически, когда применение процедуры становится невозможным.

---

[2] Так как в матричной записи естественнее говорить о строках матрицы, мы $i$-е уравнение системы обозначим $c_i$.

[3] К. Ф. Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, астроном, физик, геодезист. Работы Гаусса оказали существенное влияние на дальнейшее развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма. В алгебре Гауссу принадлежит основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена. Значителен вклад Гаусса в общую теорию рядов (гипергеометрические ряды). Гауссу принадлежит и замечательный результат в теории поверхностей о том, что гауссова кривизна поверхности не меняется при ее изгибании.

**Процедура исключения неизвестного.** В системе линейных уравнений определяется уравнение, в котором есть неизвестное с ненулевым коэффициентом, это уравнение объявляется ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению, — главным. Ведущее уравнение с помощью преобразования 1 ставится на первое место, а затем с помощью ведущего уравнения преобразованиями типа 2 главное неизвестное исключается из остальных уравнений.

*ПРИМЕР 5.2.* Применение процедуры исключения неизвестных продемонстрируем на следуюшей системе

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -6x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Выберем главным неизвестным $x_1$ и ведущим уравнением — 2-е и произведем следующие преобразования системы:

$$\begin{array}{lcl} c_1 := c_2 & & \\ c_2 := c_1 + (-2c_2) & & \\ c_3 := c_3 + 6c_2 & & \\ c_4 := c_4 + (-2c_2) & & \end{array}.$$

Тогда равносильная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 4 \\ 0x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

Затем

$$\text{СЛУ} := \text{СЛУ} \setminus \{\text{уравнение } 1\}. \tag{5.4}$$

Процесс применения процедуры исключения обрывается за конечное число шагов, так как число уравнений и неизвестных конечно, а ведущие уравнения и главные неизвестные предыдущих шагов выбывают из рассмотрения на каждом следующем шаге (см. соотношение (5.4)).

В процессе исключения неизвестных одновременно с исключением одного неизвестного из уравнения может исключиться сразу несколько неизвестных (как в уравнении 3 примера 5.2) или сразу все неизвестные. Если в уравнении исключились все неизвестные, то, возможно, оно имеет вид:

а) $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ или

б) $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b'_j, \quad b'_j \neq 0$.

В случае а) уравнение превратилось в тождество и его можно опустить в системе линейных уравнений, в случае б) уравнение превратилось в неверное числовое равенство, что означает несовместность системы.

Обозначим через $m_1$ число уравнений, оставшихся в системе линейных уравнений после прекращения работы процедуры исключения в случае совместной системы. Ясно, что $m_1 \leqslant n$ ($n$ — число неизвестных). В случае, когда $m_1 = n$, последнее уравнение

содержит одно неизвестное с ненулевым коэффициентом и с точностью до нумерации неизвестных система имеет вид:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots = b'_1 \\ 0\cdot x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots = b'_2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots = b'_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}, \tag{5.5}$$

где $a_{ii} \neq 0$.

Тогда

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}},$$

подставляя в предыдущее уравнение,

$$x_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - a'_{n-1\ n}x_n}{a'_{n-1\ n-1}}$$

и т. д., мы определим значение всех неизвестных. Итак, в случае $m_1 = n$ система линейных уравнений совместная и определенная.

В случае $m_1 < n$ мы можем из оставшихся уравнений выразить $m_1$ главных неизвестных через остальные $n - m_1$, которые могут принимать произвольные значения (такие неизвестные называют свободными). Формулы, выражающие главные неизвестные через свободные, называют общим решением системы. Таким образом, в этом случае система линейных уравнений совместная и неопределенная.

## § 5.4. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

В этом небольшом параграфе мы рассмотрим простейшие матричные уравнения:

$$A \cdot X = B, \tag{5.6а}$$
$$X \cdot A = B, \tag{5.6б}$$
$$A \cdot X \cdot B = C. \tag{5.6в}$$

Здесь $A$, $B$, $C$ — заданные матрицы, $X$ — неизвестная матрица.

Заметим, что уравнение (5.6б) сводится к виду (5.6б) с помощью транспонирования. Уравнение (5.6в) в случае, когда одна из матриц $A$, $B$ обратима, сводится к уравнению (5.6а) или (5.6б):

$$AX = XB^{-1} \quad \text{или} \quad XB = A^{-1}C.$$

В силу сказанного мы основное внимание уделим уравнениям вида (5.6а), тем более, что и задача нахождения обратной матрицы равносильна решению уравнения такого типа

$$A \cdot X = E. \tag{5.7}$$

Из правила умножения матриц получаем, что $j$-й столбец неизвестной матрицы $X$ в уравнении (5.6а) является решением СЛУ вида [4]

$$A\overline{x} = (B)_{\square j}, \tag{5.8}$$

[4] Здесь через $(B)_{\square j}$ обозначен $j$-столбец матрицы $B$.

т. е. для нахождения столбцов неизвестной матрицы $X$ мы получили набор СЛУ с одной и той же матрицей коэффициентов — матрицей $A$. Этот набор СЛУ (5.8) можно решать методом Гаусса одновременно. Компактно его записывают в виде:

$$(A \mid B). \tag{5.9}$$

Если с помощью гауссовых преобразований мы перейдем от системы (5.9) к равносильной системе вида

$$(E \mid B'), \tag{5.10}$$

то матрица $B'$ и будет единственным решением исходного матричного уравнения.

В общем случае матричные СЛУ вида (5.9), как и обычные СЛУ, могут быть несовместными, совместными определенными и неопределенными. Продемонстрируем это на примерах.

● *ПРИМЕР 5.3.* Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

● Составим матричную СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2{:=}c_2{+}(-2)c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1{:=}c_1{+}(-1)c_2 \\ \sim \\ c_2{:=}c_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1{:=}c_1 \\ \sim \\ c_2{:=}-1/3c_2 \end{array}.$$

**Ответ:** матричное уравнение имеет единственное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 5.4.* Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

● Применим к исходному уравнению операцию транспонирования:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к матричной СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2{:=}c_2{+}(-1)c_1 \\ \sim \\ c_3{:=}c_3{+}(-2)c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ c_2{:=}c_2 \\ \sim \\ c_3{:=}c_3{+}(-1)c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Анализ последней строки полученной матричной СЛУ показывает, что она несовместна.
**Ответ:** Матричное уравнение не имеет решений. ●

● *ПРИМЕР 5.5.* Решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

● Выпишем матричную СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1{:=}c_1 \\ c_2{:=}c_2{+}(-1)c_1 \\ \sim \\ c_3{:=}c_3{+}(-2)c_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1{:=}c_1{+}1/3c_2 \\ c_2{:=}1/3c_2 \\ \sim \\ c_3{:=}c_3{+}(-1)c_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

**Ответ:** Матричная СЛУ имеет бесконечное множество решений. Общее решение имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} (1-a) & (1-b) & (1-c) & -(1+d) \\ a & (1+b) & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$. ●

## Контрольные вопросы и задания

1. Решите самостоятельно уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. В этой главе изложен метод Гаусса, при котором неизвестные исключаются в нижестоящих уравнениях. Существует вариант метода (метод полного исключения), когда неизвестные исключаются из всех уравнений, кроме одного (см. пример 5.3).
3. Примените метод Гаусса в обоих его вариантах (см. вопрос 2) к примеру 5.2.
4. Возможно ли путем добавления уравнений в систему превратить:
   а) совместную систему в несовместную?
   б) несовместную систему в совместную?
   в) неопределенную систему в определенную?
   г) определенную систему в неопределенную?

# VI

# ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## § 6.1. ПЕРЕСТАНОВКИ И ПОДСТАНОВКИ

**Определение 6.1.** *Перестановкой длины $n$ называется матрица-строка длины $n$, элементами которой являются натуральные числа $1, 2, \ldots, n$, причем каждые из них встречаются в перестановке по одному разу.*

Для перестановки длины $n$ приняты обозначения $P = \big(P(1)\,P(2)\,\ldots\,P(n)\big)$, т. е. $P(i)$ — элемент, стоящий в перестановке на $i$-м месте. Множество перестановок длины $n$ будем обозначать $\mathcal{P}_n$.

● *ПРИМЕР 6.1.* $\mathcal{P}_3 = \{(123); (132); (213); (231); (312); (321)\}$.

**ТЕОРЕМА 6.1**

$$|\mathcal{P}_n| = n!, \tag{6.1}$$

где $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

● Доказательство проведем по индукции (параметр индукции $n$).

**Шаг 1.** $n = 1$. Ясно, что $\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$. $|\mathcal{P}_1| = 1 = 1!$.

**Индуктивный переход.** Пусть формула (6.1) верна для $n_0$, покажем, что она верна и для $n_0+1$. Множество всех перестановок длины $n_0+1$ разобъем на непересекающиеся подмножества $A_1$, $A_2$, …, $A_{n_0+1}$ по правилу $P \in A_i \iff P(i) = n_0 + 1$. Тогда

$$|\mathcal{P}_{n_0+1}| \;=\; \sum_{i=1}^{n_0+1} |A_i|. \tag{6.2}$$

Покажем, что

$$|A_i| \;=\; |\mathcal{P}_{n_0}|. \tag{6.3}$$

Действительно, если в любой перестановке $p \in A_i$ вычеркнуть элемент $P(i)$ $(n_0+1)$, мы получим перестановку $P'$ из множества $\mathcal{P}_{n_0}$, причем, если $p \neq q$ $(p, q \in A_i)$, то $p' \neq q'$. И если взять произвольную перестановку $p' \in P_{n_0}$, то, положив

$$P(j) = \begin{cases} P(j), & j < i, \\ n_0 + 1, & j = i, \\ P(j-1), & i < j \leqslant n_0 + 1, \end{cases} \tag{6.4}$$

мы получим $p \in A_i$. Тем самым мы показали, что между множествами $A_i$ и $\mathcal{P}_{n_0}$ существует взаимно-однозначное соответствие, тогда (6.3) доказано.

Подставляя (6.3) в (6.2) и пользуясь предположением индукции, получаем

$$|\mathcal{P}_{n_0+1}| = \sum_{i=1}^{n_0+1} |A_i| = \sum_{i=1}^{n_0+1} |\mathcal{P}_{n_0}| = \sum_{i=1}^{n_0+1} n_0! = n_0! \cdot (n_0+1) = (n_0+1)! \quad \bullet$$

**Определение 6.2.** *Говорят, что пара индексов $1 \leqslant i < j \leqslant n$ образует инверсную пару в перестановке $P$, если $P(i) > P(j)$. Обозначим через $\sigma(P)$ — число всех инверсных пар в перестановке $P$, а через $\varepsilon(P) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\sigma(P)}$. Характеристика $\varepsilon(P)$ называется сигнатурой (или знаком) перестановки.*

*ПРИМЕР 6.2.* $P = (2143)$; $\sigma(P) = 2$ (инверсные пары $(1,2)$ и $(3,4)$). $\varepsilon(P) = (-1)^2 = 1$.

**Определение 6.3.** *Перестановка $P$ называется четной, если $\varepsilon(P) = 1$, нечетной, если $\varepsilon(P) = -1$.*

**ТЕОРЕМА 6.2**
Во множестве $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 2)$ половину составляют четные перестановки, половину — нечетные.

Ясно, что

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \bigcup \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}} \tag{6.5}$$

и множества $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ и $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$ попарно не пересекаются. Рассмотрим отображение $f : \mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \to \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$ по правилу

$$\big(f(P)\big)(i) = \begin{cases} P(2), & \text{если } i = 1, \\ P(1), & \text{если } i = 2, \\ P(i), & \text{если } 2 < i \leqslant n. \end{cases}$$

Такое отображение действительно действует из $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ в $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$, так как оно либо рождает новую инверсную пару $(1,2)$, либо уничтожает инверсную пару $(1,2)$. Ясно, что отображение $f$ действует взаимно однозначно из $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ в $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$, тогда $|\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}| = |\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}|$ и, учитывая (6.5) и $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \cap \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}} = \varnothing$, получаем требуемое. $\bullet$

**ТЕОРЕМА 6.3**
Если в перестановке поменять местами любые два элемента, знак перестановки изменится на противоположный.

Если эти элементы — соседние $(i, i+1)$ и были инверсной парой $P(i) > P(i+1)$, то после перестановки $(i, i+1)$ не является инверсной парой $P'(i) = P(i+1) < P(i) = P'(i+1)$. Наоборот, если $(i, i+1)$ в перестановке $P$ не является инверсной парой, то $(i, i+1)$ в перестановке $P'$ — инверсная пара. Если меняются местами не соседние элементы, то это сводится к нечетному числу последовательных перестановок «соседей» (см. схему ниже).

$2k-1$ перестановок соседей

Каждая перестановка соседних элементов меняет знак перестановки, тогда нечетное число таких перестановок меняет знак исходной перестановки. ●

Выпишем матрицу $\Pi = \binom{p}{q} \in M_{2\times n}$, каждая строка которой $p, q$ — перестановка длины $n$. Если ее рассмотреть как табличное задание некоторой функции: верхняя строка — перечисление значений аргумента, нижняя строка — перечисление соответствующих значений функции, тогда такая матрица задает отображение отрезка натурального ряда $[1;n]_N$ в себя, причем это отображение взаимно-однозначное ($\Leftrightarrow$ биективное).

**Определение 6.4.** *Подстановками длины $n$ называют биективные отображения множества $[1;n]_N$ в себя.*

Таким образом, матрица $\Pi = \binom{p}{q}$ $p,\ q \in \mathcal{P}_n$ — способ задания подстановки. Если в матрице $\binom{p}{q}$ поменять местами столбцы, то подстановка как отображение не изменится. Переставляя столбцы в подстановке, мы от произвольного ее задания $\Pi = \binom{p}{q}$ можем перейти к стандартному $\Pi = \binom{e}{q'}$, где $e = (12\dots n)$ или $\Pi = \binom{p'}{e}$. Таким образом, каждая подстановка единственным образом представима в виде $\Pi = \binom{e}{q}$, где $q \in \mathcal{P}_n$. Мы фактически доказали теорему:

**ТЕОРЕМА 6.4**
$|\Pi_n| = n!$, где $\Pi_n$ — множество всех подстановок длины $n$.

● Стандартный вид подстановки $\Pi = \binom{e}{q}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством $\Pi_n$ и $\mathcal{P}_n$, тогда

$$|\Pi_n| = |\mathcal{P}_n| \overset{\text{теор. 6.4}}{=} n! \quad ●$$

**Определение 6.5.** *Пусть $\Pi \in \Pi_n$. Сигнатурой подстановки $\Pi$ называют характеристику*

$$\varepsilon(\Pi) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\sigma(p)+\sigma(q)} = (-1)^{\sigma(p)} \cdot (-1)^{\sigma(q)} = \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q),$$

*где $\Pi = \binom{p}{q}$.*

Мы должны доказать корректность этого определения, т. е. его независимость от конкретного представления подстановки парой перестановок.

● Действительно, переход от одного представления к другому — это последовательная перемена местами двоек столбцов, такая перемена одновременно меняет знаки сигнатур перестановок $p'$, $q'$, но не меняет значения произведения сигнатур. ●

**Определение 6.6.** *Пусть $\Pi_1, \Pi_2 \in \Pi_n$. Композицией подстановок $\Pi_1$, $\Pi_2$ называется подстановка, обозначаемая $\Pi_2 \circ \Pi_1$ и определяемая как композиция отображений (первым действует $\Pi_1$, вторым — $\Pi_2$).*

*Замечание.* Ясно, что композиция легко вычисляется, когда для подстановок $\Pi_1$ и $\Pi_2$ хорошо выбраны их представления, а именно, если $\Pi_1 = \binom{p}{e}$; $\Pi_2 = \binom{e}{q}$, то $\Pi_2 \circ \Pi_1 = \binom{p}{q}$.

● *ПРИМЕР 6.3.* Пусть
$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
тогда
$$\Pi_2 \circ \Pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_1 \circ \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Попутно мы доказали, что композиция подстановок (ясно, что при $n \geqslant 3$) не коммутативна.

**ТЕОРЕМА 6.5**
Если $\Pi_1,\ \Pi_2 \in \Pi_n$, то
$$\varepsilon(\Pi_2 \circ \Pi_1) = \varepsilon(\Pi_2) \circ \varepsilon(\Pi_1). \tag{6.6}$$

● Пусть $\Pi_1 = \binom{p}{e}$, $\Pi_2 = \binom{e}{q}$, тогда по замечанию $\Pi_2 \circ \Pi_1 = \binom{p}{q}$, и значит,
$$\begin{aligned} \varepsilon(\Pi_2 \circ \Pi_1) &\overset{\text{Опр. 6.5}}{=} \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q) = \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(e) \cdot \varepsilon(e) \cdot \varepsilon(q) = \\ &= (\varepsilon(p) \cdot \varepsilon(e))\,(\varepsilon(e) \cdot \varepsilon(q)) \overset{\text{Опр. 6.5}}{=} \varepsilon(\Pi_1) \cdot \varepsilon(\Pi_2) = \\ &= \varepsilon(\Pi_2) \cdot \varepsilon(\Pi_1). \end{aligned}$$ ●

## § 6.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

**Определение 6.7.** *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, определителем матрицы $A$ называется число, обозначаемое* $\det A$ *($\Delta A$, $dA$, $|A|$), определяемое следующим равенством:*
$$\det A = \sum_{\Pi = \binom{p_1}{p_2} \in \Pi_n} \varepsilon(\Pi)(A)_{P_1(1)P_2(1)}(A)_{P_1(2)P_2(2)} \dots (A)_{P_1(n)P_2(n)}. \tag{6.7}$$

*Замечания:*
- Дополнительно подчеркнем, что понятие «определитель» вводится только для квадратной матрицы.
- В правой части (6.7) — $n!$ слагаемых (см. теорему 6.4).

Дадим еще два эквивалентных определения определителя.

**Определение 6.8.** *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Определителем матрицы $A$ называется число, обозначаемое* $\det A$ *и определяемое следующим равенством:*
$$\det A = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(P)(A)_{1P(1)}(A)_{2P(2)} \dots (A)_{nP(n)}. \tag{6.8}$$

**Определение 6.9.** *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Определителем матрицы $A$ называется число, обозначаемое* $\det A$ *и определяемое следующим равенством:*
$$\det A = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(P)(A)_{P(1)1}(A)_{P(2)2} \dots (A)_{P(n)n}. \tag{6.9}$$

Докажем эквивалентность этих определений.

● В определении 6.7 для подстановок $\Pi$ будем использовать только стандартное представление $\Pi = \binom{e}{p}$, тогда

$$(\det A)_{6.7} = \sum_{\Pi=\binom{e}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(\Pi)(A)_{e(1)p(1)}(A)_{e(2)p(2)}\dots(A)_{e(n)p(n)} =$$
$$= \sum_{\Pi=\binom{e}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(e)\varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} = (\det A)_{6.8}\,.$$

Аналогично доказывается, что определение 6.7 эквивалентно определению 6.9. ●

● *ПРИМЕР 6.4.* Найдем общее правило вычисления определителей матриц размера $2\times 2$.

$$\mathcal{P}_2 = \{(12);\ (21)\};\quad \varepsilon\left((12)\right) = 1,\quad \varepsilon\left((21)\right) = -1,$$

тогда

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \overset{\text{Опр. 6.8}}{=} \varepsilon\left((12)\right)a_{11}a_{22} + \varepsilon\left((21)\right)a_{12}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Мнемонически это правило записывается так:

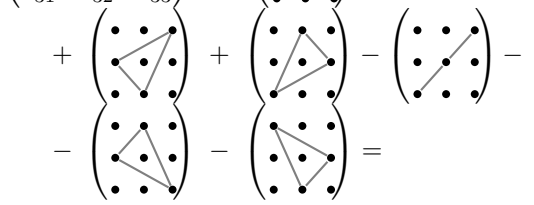
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = +\left(\ \right) - \left(\ \right).$$

Значит,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Докажите самостоятельно, что

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \left(\ \right) + \left(\ \right) + \left(\ \right) + \left(\ \right) - \left(\ \right) - \left(\ \right) - \left(\ \right) =$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Значит,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

## § 6.3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определители матриц имеют чрезвычайно интересные свойства. Прежде чем их сформулировать, введем обозначения:

$(A)_{i\square}$ — $i$-я строка матрицы $A$.

$(A)_{\square j}$ — $j$-й столбец матрицы $A$.

$A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{k\square}$ — матрица, полученная из матрицы $A$ заменой ее $i$-й строки на $k$-ю строку матрицы $B$.

$A \overset{\square j}{\leftarrow} (B)_{\square s}$ — матрица, полученная из матрицы $A$ заменой ее $j$-го столбца на $s$-й столбец матрицы $B$.

Перейдем теперь к свойствам определителей:

$0^{\text{o}}$. $\det A = \det A^t$.

● $$\det A \overset{\text{Опр. 6.8}}{=} \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A^t)_{1p(1)}(A^t)_{2p(2)}\dots(A^t)_{np(n)} \overset{\text{Опр. 6.9}}{=} \det(A^t). \quad ●$$

Поскольку при транспонировании матрицы строки и столбцы меняются «ролями», то свойство $0^{\text{o}}$ называют еще равноправием строк и столбцов матрицы в формировании свойств определителя. Поэтому, доказав какое-то свойство определителя относительно строк матрицы, мы автоматически доказываем аналогичное свойство относительно столбцов матрицы.

$1^{\text{o}}$. Если одна из строк (один из столбцов) матрицы — нулевая (нулевой), то определитель такой матрицы равен 0.

● Пусть $i$-я строка матрицы $A$ нулевая ($\Leftrightarrow A_{ij} = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n$), тогда

$$\det A = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)A_{1p(1)}\dots A_{i-1\,p(i-1)}A_{i\,p(i)}A_{i+1\,p(i+1)}\dots A_{np(n)} =$$
$$\overset{A_{i\,p(i)}=0}{=} \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)\cdot 0 = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} 0 = 0. \quad ●$$

$2^{\text{o}}$. Пусть матрица $B$ получена из матрицы $A$ умножением ее $i$-й строки (столбца) на число $\alpha$, т. е. $B = A \overset{i\square}{\leftarrow} \alpha(A)_{i\square}$, тогда

$$\det B = \alpha\ \det A. \tag{6.10}$$

● $$\det B = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)B_{1p(1)}\dots B_{i-1\,p(i-1)}B_{i\,p(i)}B_{i+1\,p(i+1)}\dots$$
$$\dots B_{np(n)} = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}\dots(A)_{i-1\,p(i-1)}\times$$
$$\times\,\alpha(A)_{i\,p(i)}(A)_{i+1\,p(i+1)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \alpha \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} = \alpha\det A. \quad ●$$

*Следствие.* Если $A \in M_{n\times n}$ и $B = \alpha A$, то

$$\det B = \alpha^n \det A. \tag{6.11}$$

● Нужно применить свойство $2^{\text{o}}$ последовательно по каждой из $n$ строк матрицы $A$. ●

$3^{\circ}$. Если матрица $B \in M_{n\times n}$ получена из матрицы $A$ с помощью перестановки $\omega$ ($\omega \in \mathcal{P}_n$) ее строк (столбцов), т. е. $B_{i\square} = (A)_{\omega(i)\square}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\det B = \varepsilon(\omega)\ \det A. \tag{6.12}$$

● $$\begin{aligned}\det B &= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(B)_{1p(1)}B_{2p(2)}\ldots B_{np(n)} = \\ &= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} = \\ &= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)\varepsilon^2(\omega)(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} = \\ &= \varepsilon(\omega)\sum_{\Pi=\binom{\omega}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(\Pi)\cdot(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} = \\ &= \varepsilon(\omega)\ \det A. \end{aligned}$$ ●

*Следствие.* Если в матрице поменять местами две строки (два столбца), то знак определителя изменится на противоположный.

● Этот факт следует из свойства $3^{\circ}$, так как сигнатура подстановки, меняющей местами две позиции, равна $-1$. ●

$4^{\circ}$. Если в матрице имеются две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то определитель такой матрицы равен нулю.

● Пусть $(A)_{i\square} = (A)_{j\square}$. Образуем матрицу $A'$ из матрицы $A$, поменяв местами $i$-ю и $j$-ю строки, т. е.

$$A' = A \begin{matrix} \overset{i\square}{\leftarrow} \\ \overset{j\square}{\leftarrow} \end{matrix} \begin{matrix} (A)_{j\square} \\ (A)_{i\square} \end{matrix}. \tag{6.13}$$

Ясно, что $A' = A$ и значит, $\det A' = \det A$. С другой стороны по доказанному выше следствию мы получаем, что

$$\det A' = -\det A. \tag{6.14}$$

Из (6.13) и (6.14) следует, что

$$\det A = -\det A \quad\Longrightarrow\quad 2\det A = 0 \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \det A\ =\ 0. \quad ●$$

$5^{\circ}$. Если в матрице есть пропорциональные строки (столбцы), то определитель такой матрицы равен нулю.

● Пусть $(A)_{j\square} = \alpha(A)_{i\square}$, тогда

$$\begin{aligned}\det A &\overset{\text{св-во 2}}{=} \alpha\ \det(A \overset{j\square}{\leftarrow} (A)_{i\square}) = \\ &= \alpha\ \det\begin{pmatrix}\text{матрицы, у которой } i\text{-я и} \\ j\text{-я строки совпадают}\end{pmatrix} \overset{\text{св-во 4}}{=} \alpha\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$ ●

$6^{\circ}$. Если строка (столбец) матрицы являются суммой двух матриц-строк (матриц-столбцов), то определитель такой матрицы равен сумме определителей двух матриц, первая из которых получена из исходной матрицы подстановкой вместо строки суммы первого слагаемого, а вторая — подстановкой вместо строки суммы второго слагаемого, т. е. если $(A)_{i\square} = (B)_{i\square} + (C)_{i\square}$, то

$$\det A = \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{i\square}\right)\ +\ \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (C)_{i\square}\right).$$

$$\det A = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)A_{1p(1)}\dots A_{i-1\,p(i-1)}\cdot$$
$$\cdot\left((B)_{ip(i)}+(C)_{ip(i)}\right)(A)_{i+1\,p(i+1)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)A_{1p(1)}\dots A_{i-1\,p(i-1)}(B)_{ip(i)}(A)_{i+1\,p(i+1)}\dots(A)_{np(n)} +$$
$$+ \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)A_{1p(1)}\dots A_{i-1\,p(i-1)}(C)_{ip(i)}(A)_{i+1\,p(i+1)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{i\square}\right) + \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (C)_{i\square}\right). \quad \bullet$$

Прервем изучение свойств определителя и рассмотрим важное понятие — линейная комбинация. Пусть $O$ — некоторое множество, называемое множеством объектов, $Ч$ — некоторое числовое множество (как правило, $Ч = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$) и пусть на $O$ определена бинарная операция сложения $\oplus$ с ее естественными свойствами и операция умножения объекта на число. Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_k \in Ч,\ O_1,\ O_2,\ \dots,\ O_k \in O$.

**Определение 6.10.** *Линейной комбинацией объектов $O_1, O_2, \dots, O_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называется объект, определяемый формулой*

$$\alpha_1 O_1 \oplus \alpha_2 O_2 \oplus \dots \oplus \alpha_k O_k = \oplus \sum_{i=1}^{k} \alpha_i O_i.$$

*ПРИМЕР 6.5.* $O = M_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $Ч = \mathbb{R}$, $O_1 = (1,-1,1)$, $O_2 = (1,1,0)$, $O_3 = (-2,0,1)$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = -1$; тогда $1\cdot(1,-1,1)+(-2)\cdot(1,1,0)+(-1)\cdot(-2,0,1) = (1,-3,0)$.

*Замечание.* Если объект является линейной комбинацией объектов $O_1, O_2, \dots, O_k$, то он является и линейной комбинацией любого множества объектов, содержащих объекты $O_1, O_2, \dots, O_k$. Действительно, в линейную комбинацию можно добавить новые объекты с нулевыми коэффициентами.

Теперь можно рассмотреть еще одно свойство определителей:

$7^{\circ}$. Если в матрице какая-либо строка (столбец) является линейной комбинацией матриц-строк (столбцов), то определитель такой матрицы равен линейной комбинации определителей матриц, полученных подстановкой вместо строки комбинации (столбца комбинации) комбинируемых строк (комбинируемых столбцов) с коэффициентами исходной линейной комбинации.

Линейная комбинация — это сложение и умножение на числа, соответствующие свойства уже доказаны. $\bullet$

## § 6.4. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

**Определение 6.11.** *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ и пусть $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Минором позиции $i,j$ матрицы $A$ называется определитель матрицы, полученной из $A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца. Он обозначается $M_{ij}(A)$.*

*Алгебраическим дополнением позиции $i,j$ матрицы $A$ называется число $A\mathcal{D}_{ij}(A)$, определенное равенством*

$$A\mathcal{D}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A). \tag{6.15}$$

● *ПРИМЕР 6.6.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$M_{21}(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = 18 - 24 = -6;$$
$$A\mathcal{D}_{21}(A) = (-1)^{2+1}(-6) = 6.$$

Приведем еще одно свойство определителей:

8°. Если в матрице существует строка (столбец), все элементы которой (которого) за исключением одного равны 0, то определитель такой матрицы равен произведению этого элемента на алгебраическое дополнение позиции этого элемента.

● Будем сначала считать, что эта строка — последняя и этот элемент — последний (позиция $nn$).

$$\det A = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)} \dots A_{np(n)}.$$

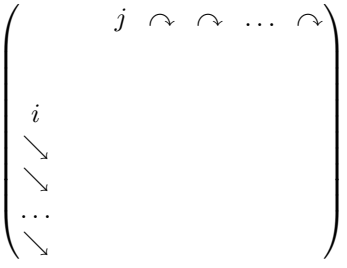
Так как $(A)_{np(n)} = 0$, если $p(n) \neq n$, то

$$\det A = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}_n \\ p(n)=n}} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)} \dots A_{np(n)}.$$

Каждой перестановке $p \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющей условию $p(n) = n$, поставим в соответствие перестановку $p' \in \mathcal{P}_{n-1}$ по правилу $p'(i) = p(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ясно, что $\varepsilon(p') = \varepsilon(p)$, тогда, продолжая выкладку, получим

$$\det A = A_{nn}\left( \sum_{p' \in \mathcal{P}_{n-1}} \varepsilon(p')(A)_{1p'(1)}(A)_{2p'(2)} \dots A_{n-1\,p'(n-1)} \right) =$$
$$= (A)_{nn} \cdot M_{nn}(A) = (A)_{nn}(-1)^{n+n} M_{nn}(A) = (A)_{nn} \cdot \mathcal{D}_{nn}(A).$$

Общий случай (позиции $ij$) сводится к этому последовательными перестановками $i$-строки с $i+1$-й, $i+1$-й с $i+2$-й и т. д. и $j$-го столбца с $j+1$-м, $j+1$-го с $j+2$-м и т. д.



тогда, чтобы перейти от позиции $i, j$ к позиции $n, n$, придется сделать $n-i+n-j$ перестановок. Полученную матрицу обозначим $A'$. Тогда

$$\det A = (-1)^{2n-(i+j)} \det A' = (-1)^{i+j}(A')_{nn} A\mathcal{D}_{nn}(A') =$$
$$= (A)_{ij} \cdot A\mathcal{D}_{ij}(A). \quad ●$$

Это свойство иногда называют малой теоремой Лапласа[1].

9°. *(Теорема Лапласа.)* Определитель матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на алгебраические дополнения их позиций, т. е.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} \cdot A\mathcal{D}_{ij}(A). \tag{6.16}$$

● Представим $i$-ю строку матрица $A$ в виде суммы строк

$$(A_{i1}A_{i2}\dots A_{in}) = (A_{i1}0\dots 0) + (0A_{i2}\dots 0) + \dots + (0\,0\dots A_{in}).$$

Применим теперь свойство о строке-сумме и предыдущее свойство. ●

10°. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы $A \in$ $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ на алгебраические дополнения позиций другой (другого) строки (столбца) равна нулю, т. е.

$$\sum_{\substack{k=1\\ i\neq j}}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A) = 0.$$

● Образуем матрицу $A' = A \overset{j\square}{\leftarrow} (A)_{i\square}$. У этой матрицы две одинаковые строки ($i$-я и $j$-я), тогда

$$\det A' = 0 \qquad \text{по свойству } 0^{\circ},$$

а по теореме Лапласа (применяемой к ее $j$-й строке) имеем

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A') = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A). \quad ●$$

11°. *(Критерий равенства нулю определителя.)* Для того чтобы определитель матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \leqslant 2$ был равен 0, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала строка (столбец) — линейная комбинация остальных.

● Достаточность этого условия доказывается легко. Пусть $(A)_{i\square} = \alpha_1(A)_{1\square} + \dots + \alpha_{i-1}(A)_{i-1\ \square} + \alpha_{i+1}(A)_{i+1\ \square} + \dots + \alpha_n(A)_{n\square}$. Образуем матрицу $A'$ по правилу

$$A' = A \overset{i\square}{\leftarrow} (A)_{i\square} + (-\alpha_1)(A)_{1\square} + (-\alpha_2)(A)_{2\square} + \dots + (-\alpha_{i-1})(A)_{i-1\ \square} + (-\alpha_{i+1})(A)_{i+1\ \square} + \dots + (-\alpha_n)(A)_{n\square}.$$

Ясно, что $i$-я строка матрицы $A'$ — нулевая, и $\det A = \det A' = 0$.

Необходимость этого условия можно доказать с помощью индукции по $n$. ●

12°. *(Теорема об определителе произведения квадратных матриц.)* Пусть $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \tag{6.17}$$

[1] Лаплас Пьер Симон (1749–1827) — французский математик, физик, астроном, член Парижской АН (1785). Ему принадлежат фундаментальные работы по теории уравнений в частных производных ($\Leftrightarrow$ уравнениям математической физики), в том числе по уравнению, получившему его имя. Уравнение и оператор Лапласа — основа теории потенциала, теплопроводности, электростатики и гидродинамики. Лаплас занимался задачами теории вероятностей (теоремы сложения и умножения, понятие производящей функции, математического ожидания), теплопроводности, теплового расширения, горения, электродинамики, классической механики.

● Обозначим $C = A \cdot B$. Ясно, что правило умножения матриц таково, что

$$(C)_{i\square} = A_{i1} \cdot (B)_{1\square} + A_{i2} \cdot (B)_{2\square} + \dots A_{in} \cdot (B)_{n\square} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B)_{k\square},$$

т. е. $i$-я строка произведения матриц $A \cdot B$ является линейной комбинацией строк матрицы $B$, а коэффициентами являются элементы $i$-й строки матрицы $A$. Применим к 1-й строке матрицы $C$ свойство $7^{\text{o}}$ определителя

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1=1}^{n} (A)_{1k_1} \det(C \overset{1\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\square}).$$

Применяя ко 2-й строке матрицы $(C \overset{j\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\square})$ то же свойство, получаем:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} (A)_{1k_1}(A)_{2k_2} \det \begin{pmatrix} \overset{1\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\square} \\ C \overset{2\square}{\leftarrow} (B)_{k_2\square} \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_n=1}^{n} \sum_{k_{n-1}=1}^{n} \cdot \dots \cdot \sum_{k_1=1}^{n} A_{1k_1} A_{2k_2} \dots A_{nk_n} \times \det \begin{pmatrix} (B)_{k_1\square} \\ (B)_{k_2\square} \\ \vdots \\ (B)_{k_n\square} \end{pmatrix}.$$

Под знаком суммы $n^n$ слагаемых, но «большинство» из них заведомо равны нулю, так как в случае, когда в наборе $(k_1 k_2 \dots k_n)$ есть пары одинаковых элементов, под знаком определителя стоит матрица с двумя одинаковыми строками, и определитель такой матрицы равен нулю. Опустим в сумме такие слагаемые. Наборы индексов $(k_1 k_2 \dots k_n)$, в которых элементы попарно различны, образуют перестановки. Значит,

$$\det(A \cdot B) = \sum_{w \in P_n} A_{1w(1)} A_{2w(2)} \dots A_{nw(n)} \times$$
$$\times \det \begin{pmatrix} (B)_{w(1)\square} \\ (B)_{w(2)\square} \\ \vdots \\ (B)_{w(n)\square} \end{pmatrix} = \sum_{w \in P_n} A_{1w(1)} A_{2w(2)} \dots A_{nw(n)} \varepsilon(w) \det B =$$
$$= \left( \sum_{w \in P_n} w(n) \cdot A_{1w(1)} \dots A_{nw(n)} \right) \det B = \det A \cdot \det B. \quad ●$$

## § 6.5. КРИТЕРИЙ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ

**ТЕОРЕМА 6.6**
Для того чтобы квадратная матрица была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

● **Необходимость.** Пусть матрица $A$ обратима, тогда $A \cdot A^{-1} = E$. Применим теорему об определителе произведения квадратных матриц:

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A \neq 0 \quad \text{и} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad ●$$

● **Достаточность.** Образуем матрицу

$$\frac{1}{\det A}\cdot A_{np},\quad \text{где } (A_{np})_{ij}=A\mathcal{D}_{ji}(A).$$

Покажем, что

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{np}. \tag{6.18}$$

Действительно,

$$A\cdot\frac{1}{\det A}\cdot A_{np}=\frac{1}{\det A}\cdot A\cdot A_{np}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=E;$$

$$\frac{1}{\det A}\cdot A_{np}\cdot A=\frac{1}{\det A}=\begin{pmatrix}\det A & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=E.\quad ●$$

*Замечание.* $(A\cdot A_{np})_{ii}=\det A$ по свойству $9^{\circ}$, а $(A\cdot A_{np})_{ij}=0$, если $i\neq j$, по свойству $10^{\circ}$.

Матрица $A_{np}$ называется присоединенной к матрице $A$.

**ТЕОРЕМА 6.7 (Правило Крамера)**
Для того чтобы квадратная система линейных уравнений $Ax=b$ была определенной (совместной, имеющей единственное решение), необходимо и достаточно, чтобы $\det A\neq 0$, при этом решение задается формулами Крамера[2]

$$x_i^0=\frac{\det\left(A\overset{\square i}{\leftarrow}(b)\right)}{\det A},\qquad i=1,2,\dots,n.$$

● **Необходимость.** Так как система определенная, то, применяя метод Гаусса к ней, мы получаем после исключения неизвестных систему $A'x=b'$, где матрица $A'$ с точностью до нумерации столбцов имеет вид

$$\begin{pmatrix}\square & & & & \\ 0 & \square & & & \\ 0 & 0 & \square & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \square\end{pmatrix},$$

$\square$ — обозначение ненулевых элементов. Ясно, что определитель такой матрицы равен произведению элементов, помеченных «$\square$», т. е. не равен нулю. Гауссовы преобразования таковы, что $\det A$ и $\det A'$ равны или не равны нулю одновременно. Значит, $\det A\neq 0$. ●

● **Достаточность.** Так как $\det A\neq 0$, то применение метода Гаусса приводит к матрице $A'$, описанной в «необходимости», а это и означает, что система совместна и имеет единственное решение $(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$.

[2] Крамер Габриель (1704–1752) — швейцарский математик, профессор математики и философии, ученик И. Бернулли (первого). Основные работы Г. Крамера относятся к высшей алгебре и аналитической геометрии, он заложил основы теории определителей, в том числе — приложение этой теории к решению квадратных систем линейных уравнений (правило Крамера), внес существенный вклад в изучение свойств алгебраических кривых.

Подставляя его в систему, мы получаем верное матричное равенство:

$$A \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Так как $\det A \neq 0$, то по критерию обратимости матриц матрица $A$ обратима и (см. (6.18))

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{np}.$$

Умножим обе части равенства (6.19) на матрицу $A^{-1}$ слева, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} A_{np} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Вспоминая правило умножения матриц, получаем

$$x_i^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (A_{np})_{ik} b_k.$$

Но матрица $A_{np}$ такова, что $(A_{np})_{ik} = A\mathcal{D}_{ki}(A)$, тогда

$$x_i^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} A\mathcal{D}_{ki} b_k. \tag{6.21}$$

Последняя сумма и представляет из себя разложение по $i$-му столбцу определителя матрицы $A\overset{\square i}{\leftarrow}(b)$ (свойство 9° (Теорема Лапласа)). ●

Следствием из этой теоремы является критерий наличия у квадратной однородной системы линейных уравнений ненулевых решений.

**ТЕОРЕМА 6.8**

Для того чтобы квадратная однородная система линейных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

*Замечания:*

- Вычисление определителя матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ по определению для больших $n$ практически невозможно, так как в формулах (6.7)–(6.9) $n!$ слагаемых. Свойства определителя позволяют упростить задачу.
- Применение формулы (6.18) для обращения матрицы при больших $n$ нецелесообразно (см. первое замечание), лучше отыскивать обратную матрицу, применяя метод Гаусса к матричному уравнению $AX = E$. Однако формула (6.18) полезна, так как она проясняет конструкцию матрицы $A^{-1}$.
- Правило Крамера применимо к системам линейных уравнений малых размеров $(n = 2, 3)$ (см. первое замечание), а для больших $n$ следует применять метод Гаусса.
- Критерий наличия ненулевого решения у квадратных однородных систем линейных уравнений очень полезен в приложениях, при исследовании поведения математической модели при различных значениях параметров.

## Контрольные вопросы и задания

1. Пусть $\alpha I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\det \alpha I = \alpha^n.$$

2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Докажите, что $\det A = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$.

3. Чему равен определитель матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Справедливо ли свойство:

$$\det(A + B) = \det A + \det B?$$

5. Докажите, что если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \det A \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь полученной формулой, выпишите $A^{-1}$ для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# VII

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## § 7.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА: АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Комплексные числа — естественное развитие наших представлений о числах. Мы здесь постараемся изложить чисто алгебраическую теорию комплексных чисел, но заметим, что естественная геометрическая интерпретация комплексных чисел точками координат плоскости — развитие идеи интерпретации вещественных чисел точками числовой оси.

**Определение 7.1.** *Комплексным числом $z$ будем называть запись вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$. Число $a$ называется вещественной частью $z$ и обозначается $\operatorname{Re} z$, $bi$ называется мнимой частью $z$ и обозначается $\operatorname{Im} z$, $b$ называют коэффициентом мнимой части. Символ $i$ называют мнимой единицей. Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$.*

**Определение 7.2.** *Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$.*

$$z_1 = z_2 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases} \tag{7.1}$$

Запись $z = a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа.

### 7.1.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Определим в $\mathbb{C}$ операцию сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ следующим:

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &\overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) &&+(b_1 + b_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &\overset{\text{def}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2) &&+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned} \tag{7.2}$$

*Замечание.* Умножение во множестве комплексных чисел, введенно так, что если положить $i^2 = -1$, то комплексные числа можно перемножать как многочлены.

**Определение 7.3.** *Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Комплексно сопряженным к $z$ (сопряженным) называют число $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} a - bi$.*

Ясно, что

$$\overline{\overline{z}} = z. \tag{7.3}$$

Противоположным к $z = a + bi$ называют $-z \overset{\text{def}}{=} (-a) + (-b)i$. Ясно, что $-z = -1 \cdot z$.

**ТЕОРЕМА 7.1**
Имеют место следующие свойства арифметических операций во множестве $\mathbb{C}$.
$1^{\circ}$. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
$2^{\circ}$. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + z_2 + z_2$;
$3^{\circ}$. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
$4^{\circ}$. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$;
$5^{\circ}$. $z + 0 = z$, где $0 \stackrel{\text{def}}{=} 0 + 0 \cdot i$;
$6^{\circ}$. $\forall z \quad z + (-z) = 0$;
$7^{\circ}$. $\forall z \quad z \cdot 1 = z$, где $1 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 0 \cdot i$;
$8^{\circ}$. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \exists z^{-1} \ \left(z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1\right)$;
$9^{\circ}$. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

● Свойства $1$–$7^{\circ}$ и $9^{\circ}$ очевидны, докажем свойство $8^{\circ}$. $z^{-1}$ должно являться решением уравнения

$$z \cdot (x + iy) = 1 + 0 \cdot i, \quad z = a + bi, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \iff$$
$$\iff \quad (a + bi)(x + iy) = 1 + 0 \cdot i. \iff \begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Найдем $\det \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2 \neq 0$, тогда по теореме Крамера (теорема 6.7) СЛУ (7.4) имеет единственное решение

$$x = \frac{\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)}{\det \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2};$$
$$y = \frac{\det \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Значит,

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \ (a + (-b)i). \quad ● \tag{7.5}$$

Фактически мы доказали теорему:

**ТЕОРЕМА 7.2**
Множество $\mathbb{C}$ относительно сложения образует коммутативную группу.

**ТЕОРЕМА 7.3**
Множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно умножения образует коммутативную группу.

### 7.1.2. ПОНЯТИЕ О ПОЛЕ

Множество $P$ с двумя операциями $+$ и $\cdot$ называется полем, если оно образует коммутативную группу относительно операции $+$ и $P \setminus \{0\}$ (где $0$ — нейтральный элемент по сложению) образует коммутативную группу по умножению, и в $P$ справедлив дистрибутивный закон $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

**ТЕОРЕМА 7.4**
Множество $\mathbb{C}$ является полем относительно операций «+» и «$\cdot$».

**Определение 7.4.** *Модулем* $z = a + bi$ $(\in \mathbb{C})$ *называют неотрицательное вещественное число, обозначаемое* $|z|$ *и определяемое равенством*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7.6}$$

Во введенных обозначениях формула (7.5) примет вид:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}.$$

## § 7.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим декартову плоскость $xOy$. Комплексное число $z = a + bi$ будем интерпретировать как точку плоскости $M_z$ с координатами $(a, b)$.

Рассмотрим вектор $\overline{OM_z}$. Ясно, что $|\overline{OM_z}| = |z|$.

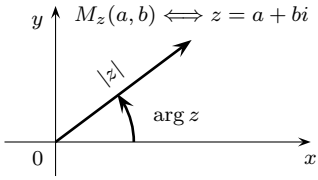


*Рис. 7.1.*

Ясно, что сложению комплексных чисел $z_1$, $z_2$ соответствует сложение векторов $\overline{OM_{z_1}}$ и $\overline{OM_{z_2}}$ (см. рис. 7.1). Из этого следует, что

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{7.7}$$

Если на этой же плоскости ввести полярные координаты, то $\rho_{M_z} = |z| \overset{\text{def}}{=} \rho_z$, а $\varphi_{M_z} \overset{\text{def}}{=} \varphi_z \overset{\text{def}}{=} \arg z$ называется аргументом комплексного числа $z$. Обычно считают, что $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Ясно, что $\arg 0$ неопределен, можно считать, что $\arg 0 = 0$.

Вспоминая связь между полярными и декартовыми координатами (см. гл. I, формулы (1.12)–(1.13)), получаем

$$z = a + bi = |z| \cos\varphi + |z| \sin\varphi \cdot i = |z| \left(\cos\varphi_z + i \sin\varphi_z\right) = \rho_z \left(\cos\varphi_z + i \sin\varphi_z\right). \tag{7.8}$$

Последнее называют тригонометрической формой комплексного числа. Формула (7.8) дает выражение комплексного числа через его модуль и аргумент. Выпишем теперь формулы для нахождения модуля и аргумента комплексного числа, заданного в алгебраической форме:

$$\begin{cases} \rho_z = |z| & = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi_z & = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi_z & = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leqslant \varphi_z < 2\pi. \end{cases} \tag{7.9}$$

Очевидно, что числа $z$ и $\overline{z}$ интерпретируются точками, расположенными симметрично относительно оси $Ox$.

*Замечание.* Операции в комплексных числах и сами комплексные числа введены так, что вещественные числа $a$ можно считать комплексными вида $a + 0 \cdot i$ и производить с ними операции как с комплексными числами. При этом вещественные числа интерпретируются точками на оси $Ox$, а числа вида $0+bi$ точками на оси $Oy$. Поэтому ось $Ox$ называют вещественной, а ось $Oy$ — мнимой.

## § 7.3. УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Пусть $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$. Найдем $z_1 \cdot z_2$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, \rho_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= \rho_1\rho_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \; + \\ &\quad + \; i\, (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)) = \\ &= \rho_1\rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Итак, мы доказали:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

т. е. что при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме модули перемножаются, а аргументы складываются.

Следствием (7.10) и (7.11) является формула Муавра[1]:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.12}$$

возведения комплексного числа в степень.

● *ЗАДАЧА 7.1.* Вывести формулу для выражения $\sin 3\alpha$ через тригонометрические функции основного аргумента.

● Воспользуемся формулой Муавра (7.12):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi. \tag{7.13}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \sin\varphi \cdot i - 3\cos\varphi \sin^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot i = \\ &= \left(\cos^2\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right) i. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Воспользуемся условием равенства комплексных чисел, из (7.13) и (7.14) получаем

$$\begin{aligned} \sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi, \\ \cos^2\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi. \end{aligned}$$ ●

[1] Муавр Абрахам (1667–1754) — английский математик, член Лондонского королевского общества. Известен работами по теории рядов, теории вероятностей, комплексных чисел (к. ч.), в том числе возведения к. ч. в степень и извлечения корня.

## § 7.4. ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \neq 0$. Комплексное число $z$ называется частным от деления $z_1$ на $z_2$, если $z_1 = z \cdot z_2$, частное обозначают $\frac{z_1}{z_2}$.

**ТЕОРЕМА 7.5**
В случае $z_2 \neq 0$ частное существует и

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot {z_2}^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \tag{7.15}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}, \quad \text{где } z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i.$$

В тригонометрической форме частное может быть записано в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big), \tag{7.16}$$

где $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

● Проверим равенство

$$z_2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = z_1;$$

$$z_2 \cdot \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \cdot \frac{|z_2|^2}{|z_2|^2} = z_1. \quad ●$$

## § 7.5. СВОЙСТВА МОДУЛЯ И КОМПЛЕКСНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

**ТЕОРЕМА 7.6 (Свойства модуля)**
Имеют место свойства:
$1^o$. $|z| \geqslant 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
$2^o$. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
$3^o$. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
$4^o$. $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

Эта теорема — сводка результатов, полученных ранее.

**ТЕОРЕМА 7.7 (Свойства комплексного сопряжения)**
Имеют место свойства:
$1^o$. $\overline{\overline{z}} = z$;
$2^o$. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
$3^o$. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
$4^o$. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;
$5^o$. $\overline{z^k} = \overline{z}^k$.

● Свойство $1^{\circ}$ — очевидно. Докажем свойство $3^{\circ}$. Воспользуемся тем, что если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\overline{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. По правилу умножения имеем

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$

тогда

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \rho_1\rho_2\big(\cos(-(\varphi_1+\varphi_2)) + i\sin(-(\varphi_1+\varphi_2))\big) = \\ &= \rho_1\rho_2\big(\cos((-\varphi_1)+(-\varphi_2)) + i\sin((-\varphi_1)+(-\varphi_2))\big) = \\ &= \rho_1\big(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\big)\cdot\rho_2\big(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big) = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается свойство $4^{\circ}$.

Докажем свойство $2^{\circ}$.

Рисунок 7.2 — геометрическое доказательство этого факта.

Проведем аналитическое доказательство свойства $2^{\circ}$.

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = \\ &= (a_1+a_2)+(-(b_1+b_2))i = (a_1+a_2)+((-b_1)+(-b_2))\,i = \\ &= (a_1+(-b_1)i) + (a_2+(-b_2)i) = \overline{z_1}+\overline{z_2}.\end{aligned}$$ ●

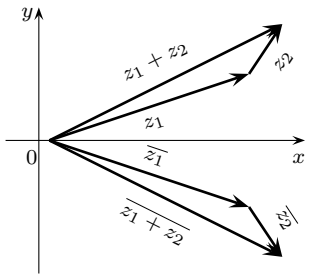



*Рис. 7.2.*

## § 7.6. КОРНИ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**Определение 7.5.** *Корнем $n$-й степени ($n \in \mathbb{N}$) из комплексного числа $z$ называют комплексное число $w$, удовлетворяющее соотношению:*

$$w^n = z. \tag{7.17}$$

**ТЕОРЕМА 7.8**

Корень $n$-й степени у комплексного числа $z$ существует, причем если $z = 0$, то существует единственный корень $w = 0$, если $z \neq 0$, то существует $n$ корней $w_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и они определяются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\Big(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\Big)\right), \tag{7.18}$$

где $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

● Доказательство этого факта следует из формулы Муавра (7.12). ●

Особую роль в извлечении корня из комплексного числа играют корни из 1, которые задаются формулой

$$e_k = \cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.19}$$

Ясно, что все $n$ корней $n$-й степени из $z \neq 0$ могут быть получены по формуле

$$w_k = w_j e_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.20}$$

где $w_j$ — какой-то из корней $n$-й степени из $z$, вычисленный с помощью формулы (7.18).

Имеет место

**ТЕОРЕМА 7.9**
Множество корней $n$-й степени из единицы образует по умножению конечную коммутативную группу с нейтральным элементом $e_0 = 1$.

● Докажите этот факт самостоятельно. ●

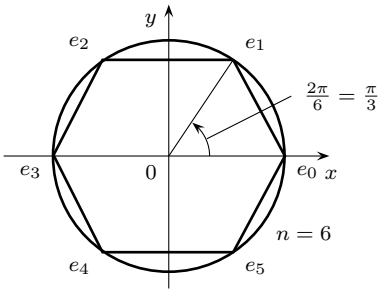



*Рис. 7.3.*

Заметим, что корни $n$-й степени из единицы располагаются на единичной окружности с центром в начале координат в вершинах правильного $n$-угольника (см. рис. 7.3).

На этом примере ($n = 6$) хорошо видно, что корни из единицы образуют группу, причем $e_0^{-1} = e_0$, $e_1^{-1} = e_5$, $e_2^{-1} = e_4$, $e_3^{-1} = e_3$, $e_4^{-1} = e_2$, $e_5^{-1} = e_1$, т. е. корни, соответствующие вершинам, симметричным относительно вещественной оси, образуют взаимно-обратные пары в группе корней $n$-й степени из единицы.

## Контрольные вопросы и задания

1. Докажите единственность нуля во множестве $\mathbb{C}$.
2. Поставим в соответствие комплексному числу $z = a + ib$ вектор $\vec{v}_z \in V_2$ с координатами $(a, b)$. Покажите, что $\vec{v}_{z_1+z_2} = \vec{v}_{z_1} + \vec{v}_{z_2}$.
3. Докажите, что для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\vec{v}_{\lambda z} = \lambda \vec{v}_z.$$

4. Получите с помощью формулы Муавра тригонометрические формулы, выражающие $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
5. Решите СЛУ

$$\begin{cases} iz_1 + iz_2 = 2 \\ z_1 - z_2 = -2i \end{cases}, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

двумя способами:
   а) применив метод Гаусса над $\mathbb{C}$;
   б) применив метод Гаусса к СЛУ над $\mathbb{R}$, представив $z_1$, $z_2$ в виде $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ соответственно $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$.

# VIII

# МНОГОЧЛЕНЫ (АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

## § 8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА. СТЕПЕНЬ МНОГОЧЛЕНА

**Определение 8.1.** *Многочленом $n$-й степени называется функция, заданная на $\mathbb{C}$ формулой*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{8.1}$$

*где коэффициенты $a_i$ принадлежат при этом:*
*а)* $a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n;$
*б)* $a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$
*В случае а) говорят, что $P(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами, а в случае б) — с комплексными.*

*$a_n$ называют старшим коэффициентом, $a_0$ — свободным членом.*

Таким образом, числа, отличные от нуля — многочлены нулевой степени. Число 0 называют 0-многочленом.

**ТЕОРЕМА 8.1**
Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ — многочлен $n$-й степени, и существуют $n+1$ различных точек комплексной плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, в которых многочлен обращается в ноль (т. е. $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \cdots = P(\alpha_{n+1}) = 0$). Тогда все коэффициенты многочлена $a_n, \ldots, a_0$ равны нулю.

● Равенства $P(\alpha_1) = 0,\ P(\alpha_2) = 0, \ldots,\ P(\alpha_{n+1}) = 0$ можно записать в виде

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\alpha_1^n a_n & + & \alpha_1^{n-1} a_{n-1} & + & \cdots & + & \alpha_1 a_1 & + & 1 \cdot a_0 = 0 \\
\alpha_2^n a_n & + & \alpha_2^{n-1} a_{n-1} & + & \cdots & + & \alpha_2 a_1 & + & 1 \cdot a_0 = 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots

Ее матричный вид $$\begin{pmatrix} \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^n & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Равенства (8.2) означают, что $(a_n, \dots, a_0)$ — решение однородной системы линейных уравнений (8.3). Для доказательства нашей теоремы достаточно доказать, что эта система имеет только нулевое решение. Вычислим определитель, называемый определителем Вандермонда:

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_3^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Вычтем из каждой последующей строки предыдущую, умноженную на $\alpha_1$, тогда

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (\alpha_2-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1) & \dots & (\alpha_{n+1}-\alpha_1) \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_2^{n-1}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3^{n-1}(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{разл. по 1-му столбцу}}{=} \det \begin{pmatrix} (\alpha_2-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1) & \dots & (\alpha_{n+1}-\alpha_1) \\ \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-1}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3^{n-1}(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили формулу

$$w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1) \cdot w(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}). \tag{8.4}$$

Применим ее к $w(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$, стоящему в правой части (8.4), тогда

$$w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1) \times \\ \times\ (\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_3-\alpha_2) \cdot w(\alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = \\ = \prod_{i=2}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_1) \cdot \prod_{i=3}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_2) \cdot \dots \cdot \prod_{i=n}^{n+1}(\alpha_i-\alpha_{n-1}) \cdot w(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = \\ = \left( \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\alpha_j-\alpha_i) \right) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\alpha_j-\alpha_i).$$

Из полученной формулы видно, что $w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \neq 0$ в случае, когда все $\alpha_i$ различны. Определитель однородной системы линейных уравнений (8.3) либо равен $w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$, либо отличается от $w(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ знаком, поэтому в условиях

нашей теоремы мы имеем дело с ОСЛУ, у которой определитель отличен от нуля. Тогда по следствию из теоремы Крамера (теорема 6.7) у однородной системы линейных уравнений (8.3) имеется только нулевое решение. ●

*Следствия из теоремы:*

*Следствие 1.* Коэффициенты многочлена $n$-й степени однозначно определяются заданием его значений в $n+1$ точке комплексной плоскости.

*Следствие 2.* Если $f$ и $g$ — два многочлена $n$-й степени в $n+1$ точке комплексной плоскости принимают равные значения, то они совпадают на всей комплексной плоскости, т. е. $f(x) = g(x)$.

Обозначим $\deg f$ — степень многочлена $f$. Имеет место

**ТЕОРЕМА 8.2 (Свойства степеней)**
Имеют место следующие свойства степени многочлена:
$1^{\circ}$. Если $f \neq 0$ и $g \neq 0$[1], то $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;
$2^{\circ}$. $\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$;
$2^{\circ}$ а. Если $\deg f \neq \deg g$, то $\deg(f+g) = \max(\deg f, \deg g)$.

## § 8.2. ДЕЛЕНИЕ ВО МНОЖЕСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Ясно, что деление на 0-многочлен лишено смысла (так же, как и деление на 0 в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

**Определение 8.2.** *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены и $g(x) \neq 0$. Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ ($\Leftrightarrow$ $g(x)$ является делителем $f(x)$), если существует многочлен $h(x)$ такой, что*

$$f(x) = h(x) \cdot g(x). \tag{8.5}$$

*Многочлен $h(x)$ называется частным от деления $f(x)$ на $g(x)$.*

Ясно, что соотношение (8.5) симметрично относительно $g(x)$ и $h(x)$. И значит, в этом случае $g(x)$ является частным от деления $f(x)$ на $h(x)$.

Из теоремы 8.2 о свойствах степени мы получаем, что если $f(x)$ делится на $g(x)$, то

$$\deg g(x) \leqslant \deg f(x). \tag{8.6}$$

**ТЕОРЕМА 8.3 (Свойства отношения «делимость»)**
Отношение делимости во множестве многочленов обладает следующими свойствами:
$1^{\circ}$. Если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $\alpha, \beta \neq 0$, то $\alpha f(x)$ делится на $\beta g(x)$.
$2^{\circ}$. Если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $g(x)$ делится на $s(x)$, то $f(x)$ делится на $s(x)$.
$3^{\circ}$. Если $f(x)$ делится на $s(x)$ и $g(x)$ делится на $s(x)$, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ делится на $s(x)$.

● Доказательство этой теоремы мы рекомендуем провести самостоятельно. ●

[1] Такая запись означает, что многочлены $f$ и $g$ не являются 0-многочленами.

### 8.2.1. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

**ТЕОРЕМА 8.4**
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены и $g(x) \neq 0$, тогда существуют такие многочлены $h(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x), \tag{8.7}$$

причем $\deg r(x) < \deg g(x)$ и представление (8.7) для пары $f(x)$, $g(x)$ единственно. $h(x)$ называют частным от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — остатком.

● Докажем существование представления (8.7). Сравним степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

а) $\deg f(x) < \deg g(x)$. Положим $h(x) = 0$, $r(x) = f(x)$, получаем $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$.

б) $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$. Запустим в работу алгоритм деления многочлена на многочлен «углом». Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Выполним один шаг алгоритма:

$$\begin{array}{l|l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 & b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \\ \hline a_n x^n + \frac{a_m b_{m-1}}{b_m} x^{n-1} + \cdots & \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \\ \hline \underbrace{0 \cdot x^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) x^{n-1} + \cdots}_{f_1(x)} & \end{array}.$$

Если $f_1(x)$ и $g(x)$ образуют пару, удовлетворяющую условию б), то выполняется еще один шаг деления «углом» и т. д. Поскольку на каждом шаге деления углом степень делимого уменьшается, то за конечное число шагов процесс деления оборвется. В момент остановки деления углом мы получим представление (8.7).

● *ПРИМЕР 8.1.*

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4;$$
$$g(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Выполнить деление $f(x)$ на $g(x)$.

● Применим алгоритм деления «углом»:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4 & x^3 - 3x + 1 \\ \hline x^5 - 3x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -3x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 9x + 4 & \\ -3x^4 + 9x^2 - 3x & \\ \hline 2x^3 + x^2 - 6x + 4 & \\ 2x^3 - 6x + 2 & \\ \hline x^2 + 2 & \end{array}$$

$$h(x) = x^2 - 3x + 2; \qquad r(x) = x^2 + 2;$$
$$x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4 =$$
$$= (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x + 1) + x^2 + 2. \quad ●$$

Докажем теперь единственность представления (8.7).

Предположим противное, т. е. что существуют такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, у которых представление (8.7) не единственно:

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x), \tag{8.8}$$
$$f(x) = h_1(x)g(x) + r_1(x), \tag{8.9}$$

вычитая из (8.8) (8.9), получим

$$0 = (h(x) - h_1(x))\, g(x) + (r(x) - r_1(x))\,.$$

По нашему предположению $r(x) - r_1(x) \neq 0$ и $h(x) - h_1(x) \neq 0$, тогда по теореме 8.2 о степенях получаем в правой части многочлен степени $\deg g(x) + \deg(h(x) - h_1(x)) > 0$, а слева 0-многочлен. Полученное противоречие и доказывает единственность представления (8.7). ●

## § 8.3. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЯМ

Напомним, что $x = a$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$, т. е. корни многочлена это решения уравнения $f(x) = 0$.

**ТЕОРЕМА 8.5 (Теорема Безу[2])**
Для того чтобы многочлен $f(x)$ делился на $x - a$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы $x = a$ было корнем многочлена $f(x)$.

●

*Необходимость.* $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка, т. е.

$$f(x) = h(x)(x - a). \tag{8.10}$$

Нужно показать, что $f(a) = 0$. Подставляя $x = a$ в (8.10), получаем

$$f(a) = h(a)(a - a) = h(a) \cdot 0 = 0.$$

*Достаточность.* Применим к паре $f(x)$ и $(x - a)$ теорему 8.4 о делении с остатком:

$$f(x) = h(x) \cdot (x - a) + r(x). \tag{8.11}$$

$\deg r(x) < \deg(x - a) = 1$. Значит, $r(x)$ — число (многочлен 0-ой степени или 0), т. е. $r(x) = r_a$, тогда (8.11) примет вид

$$f(x) = h(x)(x - a) + r_a. \tag{8.12}$$

Подставим в (8.12) $x = a$.

$$f(a) = h(a)(a - a) + r_a,$$
$$r_a = f(a). \tag{8.13}$$

[2] Безу Этьен (1730–1783) — французский математик, член Парижской академии наук, родом из Немура, преподавал математику в военных учебных заведениях Франции. Основные работы относятся к высшей алгебре, вместе с Г. Крамером развил приложение теории определителей к СЛУ. Ему принадлежит «Курс математики» (1764–1769, 6 т.), популярный во Франции и других странах вплоть до середины XIX века.

Учитывая, что $x = a$ — корень, получаем

$$r_a = f(a) = 0. \quad \bullet$$

*Следствие (из теоремы Безу).* Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен значению многочлена при $x = a$.

● См. соотношение (8.13). ●

Простая по своей формулировке и доказательству, теорема Безу породила стройную теорию корней многочлена, разложения рациональных функций на простые дроби, а затем стройную теорию распределения корней целых и мероморфных функций (см. [92, 89]).

Итак, если $a$ — корень многочлена $f(x)$, то $f(x) = (x - a) \cdot f_1(x)$, если при этом $a$ — корень многочлена $f_1(x)$, то $f(x) = (x - a)(x - a)f_2(x) = (x - a)^2 f_2(x)$. Это позволяет дать определение кратности корня.

**Определение 8.3.** *Говорят, что $x = a$ является корнем кратности $k_a$ $(\geqslant 1)$ многочлена $f(x)$, если*

$$f(x) = (x - a)^{k_a} f_{k_a}(x), \quad f_{k_a}(a) \neq 0. \tag{8.14}$$

*Если $k_a = 1$, то корень называют однократным или простым.*

Ясно, что $k_a \leqslant \deg f(x)$.

### 8.3.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ (ОТА)

**ТЕОРЕМА 8.6 (Основная теорема алгебры)**
Любой многочлен ненулевой степени имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

Доказательство этой теоремы использует средства теории функций комплексного переменного, и мы его не приводим.

**ТЕОРЕМА 8.7**
Многочлен $f(x)$, $\deg f = n \geqslant 1$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно $n$ корней, если каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

● У многочлена $f(x)$ имеется по ОТА хотя бы один корень — $x_1$. По теореме Безу $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$ и $\deg f_1(x) = n - 1$, если $n - 1 \geqslant 1$, то к $f_1(x)$ опять применим ОТА и т. д. Процесс выделения корней продолжается до исчерпания степени $f_r$, т. е.

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) f_r(x),$$
$$\deg f_r(x) = n - r = 0.$$

Значит, $r = n$, тогда

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где $a_n$ — старший коэффициент в разложении $f(x)$ по степеням $x$. Объединяя скобки, соответствующие кратным корням, получим

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_{x_1}}(x - x_2)^{k_{x_2}} \dots (x - x_l)^{k_{x_l}}. \tag{8.15}$$

Последнее соотношение называют полным разложением по корням. ●

## § 8.4. МНОГОЧЛЕНЫ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Займемся теперь многочленами с вещественными коэффициентами и их разложением на множители над $\mathbb{R}$. Уже пример многочлена $x^2+1$ показывает, что ожидать тех же результатов, что и в $\mathbb{C}$, не приходится.

**ТЕОРЕМА 8.8**
Если $x=\alpha$ — комплексный корень многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$.

● Мы имеем

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0. \tag{8.16}$$

Перейдем в (8.16) к комплексно-сопряженным числам

$$\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=\overline{0}=0. \tag{8.17}$$

Преобразуем левую часть, используя свойства комплексного сопряжения (теорема 7.7):

$$\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=\overline{a_n}\,(\overline{\alpha})^n+\overline{a_{n-1}}\,(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+$$
$$+\overline{a_1\alpha}+\overline{a_0}\underset{\overline{a_i}=a_i}{\overset{a_i\in\mathbb{R}}{=}}a_n\,(\overline{\alpha})^n+a_{n-1}\,(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0.$$

Тогда из (8.17) получаем $f\,(\overline{\alpha})=0$. ●

*Замечание.* Если $x=\alpha$ — комплексный корень кратности $k_\alpha$ многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$ с тем же показателем кратности, т. е.

$$k_\alpha=k_{\overline{\alpha}}.$$

● По теореме Безу имеем $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$. По доказанному в теореме имеем

$$0=f\,(\overline{\alpha})=\underset{\neq 0}{(\overline{\alpha}-\alpha)}f_1\,(\overline{\alpha}),$$

значит, $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f_1(x)$. К $f_1$ применим теорему Безу, тогда

$$f(x)=(x-\alpha)\,(x-\overline{\alpha})\,f_2(x)=\left(x^2+px+q\right)f_2(x). \tag{8.18}$$

Здесь $x^2+px+q$ — квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами с дискриминантом, меньшим нуля, имеющий $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ своими корнями. Но тогда $f_2(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Если $\alpha$ — кратный комплексный корень, то множитель $x^2+px+q$ выделяется столько раз, какова кратность корня $\alpha$ — $k_\alpha$ раз. Мы доказали, что $k_\alpha\leqslant k_{\overline{\alpha}}$, но так как $\alpha=\overline{(\overline{\alpha})}$, то $k_{\overline{\alpha}}\leqslant k_{\overline{\overline{\alpha}}}=k_\alpha$. ●

Тогда полное разложение многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами имеет вид:

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}\times$$
$$\times\,(x^2+p_1x+q_1)^{k_{r+1}}(x+p_2x+q_2)^{k_{r+2}}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{k_{r+s}}, \tag{8.19}$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ — вещественные корни многочлена $f(x)$, $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$ — их показатели кратности, $(x^2+p_ix+q_i)$ — квадратные трехчлены с дискриминантами,

меньшими нуля, имеющими пары комплексно-сопряженных корней, $k_i$ — их показатели кратности,

$$\deg f = k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2\,(k_{r+1} + \cdots + k_{r+s})\,.$$

*Замечание.* Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень (что является тривиальным следствием теоремы 8.8 и приведенного разложения по корням).

Сформулируем теперь и докажем теорему Виета[3], устанавливающую связь между коэффициентами многочлена и его корнями.

**ТЕОРЕМА 8.9 (Виета)**
Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ и $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — набор всех его корней (здесь кратные корни присутствуют столько раз, какова их кратность), тогда имеют место формулы Виета:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),\\ a_{n-2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,\\ a_{n-3} &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_0 &= (-1)^n x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned} \tag{8.20}$$

● Выпишем разложение многочлена $f(x)$ по корням (8.15), учитывая, что $a_n = 1$.

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \tag{8.21}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ (теорема единственности), получаем формулы Виета. ●

● *ЗАДАЧА 8.1.* Найти сумму всех корней $n$-й степени из единицы $(n \geqslant 2)$.
● Корни из единицы — это корни многочлена $x^n - 1$. По теореме Виета имеем

$$-(e_0 + e_1 + \cdots + e_{n-1}) = a_{n-1},$$

но в этом уравнении нет $x^{n-1}$, т. е. $a_{n-1} = 0$ и мы доказали, что в случае $n \geqslant 2$ сумма всех корней $n$-й степени из единицы равна нулю. ●

Приведем еще одну теорему, позволяющую «подбирать» целые корни многочлена с целыми коэффициентами.

**ТЕОРЕМА 8.10**
Если $a$ — целый корень многочлена с целыми коэффициентами, то $a$ является делителем свободного члена.

[3] Виет Франсуа (1540–1603) — французский математик, по образованию юрист, интересовался астрономией, по необходимости занялся тригонометрией и алгеброй. Виет впервые применил буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для коэффициентов алгебраических уравнений. Это позволило говорить о формулах для корней уравнений. Главным свои достижением Ф. Виет считал формулы, устанавливающие связь между корнями алгебраического уравнения и его коэффициентами (формулы Виета). Благодаря последним имя Виета вошло в историю математики и всего человечества, так как формулы Виета для квадратных уравнений входят в программу среднего образования во всем мире.

● По теореме Безу имеем

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-a)f_1(x).$$

Из алгоритма деления «углом» следует, что $f_1(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Используя следствие 2 из теоремы 8.1, получаем, что

$$a_0 = (-a) \cdot b_0, \tag{8.22}$$

здесь $b_0$ — свободный член многочлена $f_1(x)$. ●

● *ПРИМЕР 8.2.* Решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

● Так как мы имеем многочлен с целыми коэффициентами, то «претендентами на целые корни» являются делители 10: $\pm 1$; $\pm 2$; $\pm 5$; $\pm 10$. $f(1) = 1 - 6 + 13 - 10 \neq 0$; $f(-1) = -1 - 6 - 13 - 10 \neq 0$; $f(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$. Применим теорему Безу

$$\begin{array}{l|l}
x^3-6x^2+13x-10 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & \overline{x^2-4x+5} \\
-4x^2+13x & \\
\underline{-4x^2+\ 8x} & \\
5x-10 & \\
\underline{5x-10} & \\
0 &
\end{array}$$

Рассмотрим уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + i$, $x_3 = 2 - i$. ●

В заключение отметим, что формулы для решения квадратных уравнений были известны в глубокой древности, методы решения кубических уравнений (формулы Кардано) и 4-й степени (метод Ферари) получены в XVI веке. Три последующих столетия были посвящены безуспешным попыткам нахождения формул для алгебраических уравнений более высоких степеней. В 1824 г. Н. Абель доказал неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений степени $n \geqslant 5$.

## Контрольные вопросы и задания

1. Докажите самостоятельно, что многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ может быть единственным образом разложен по степеням $(x-a)$, где $a \in \mathbb{C}$, т. е.
$$P(x) = a'_n(x-a)^n + a'_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + a'_1(x-a) + a'_0.$$
2. Пусть $P(x)$ — многочлен. Как построить, не находя корни $P(x)$, многочлен $P_1(x)$, имеющий те же корни, что и $P(x)$, но кратности, равной 1?
3. По многочлену $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ постройте многочлен, все корни которого в два раза больше корней многочлена $P(x)$.
4. В чем состоит отличие понятия НОД двух натуральных чисел от понятия НОД двух многочленов.
5. Пусть $f$ и $g$ — ненулевые многочлены. $S_1(x)$ и $S_2(x)$ — их наибольшие общие делители. Чему равен НОД$(S_1, S_2)$?
6. Почему во множестве многочленов не вводится понятие наименьшего общего кратного двух многочленов?

# IX

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## § 9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Изучая векторы на плоскости и в пространстве, мы заметили, что относительно операций сложения и умножения на число они «ведут себя одинаково», совершенно однотипно вводятся и координаты векторов на плоскости, и в трехмерном пространстве. В этом разделе будет введено общее понятие линейного пространства, базиса линейного пространства, координат векторов и т. п.

**Определение 9.1.** *Пусть* $L(\neq \varnothing)$ *— множество, элементы которого будем называть векторами. Говорят, что* $L$ *образует линейное пространство над* $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$*, если для любых двух векторов* $a, b \in L$ *определен элемент* $a + b \in L$*, и для любого вектора* $a \in L$ *и числа* $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ *определен вектор* $\lambda a$ *и при этом выполнены следующие соотношения:*

*1)* $\forall a\, \forall b \in L \quad a + b = b + a$*;*
*2)* $\forall a\, \forall b\, \forall c \in L \quad (a + b) + c = a + (b + c) \stackrel{\text{def}}{=} a + b + c$*;*
*3)* $\exists \overline{0} \in L \quad | \quad a + \overline{0} = a$*;*
*4)* $\forall a \in L\, \exists (-a) \in L \quad | \quad a + (-a) = \overline{0}$*;*
*5)* $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}),\ \forall a\, \forall b (\in L) \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$*;*
*6)* $\forall \lambda,\ \forall \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}),\ \forall a \in L \quad (\lambda + \beta)a = \lambda a + \beta b$*;*
*7)* $\forall \lambda,\ \forall \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}),\ \forall a \in L \quad (\lambda\beta)a = \lambda(\beta a)$*;*
*8)* $\forall a \in L \quad 1 \cdot a = a$.

Примеры линейных пространств.

1. Пространство $V_2$ — геометрических векторов на плоскости.
2. Пространство $V_3$ — геометрических векторов в трехмерном пространстве.
3. Множество матриц $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.
   Линейное пространство матриц-столбцов — $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ $(M_{n\times 1}(\mathbb{C}))$ встречается и используется очень часто. Для него принято другое обозначение — $\mathbb{R}_n$ $(\mathbb{C}_n)$, а в целях экономии места его элементы обычно записывают не в виде матрицы-столбца, а в виде матрицы-строки, т. е. если $x \in \mathbb{R}_n$ $(\in \mathbb{C}_n)$, допустима запись $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, а не
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Конечно, правильнее было бы писать $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^t$.

4. $P_5(\mathbb{R})$ множество многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше 5-й образует линейное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число.

Из приведенных примеров видно, что элементы линейных пространств могут быть совершенно различной природы (векторы, матрицы, многочлены).

Отметим простейшие свойства линейных пространств, следующие из определения:

$1^{\circ}$. $\forall a \in L \quad 0 \cdot a = \overline{0}$;

$2^{\circ}$. $\forall a \in L \quad -1 \cdot a = -a$;

$3^{\circ}$. Для каждого $a \in L$ элемент $(-a)$ определен однозначно.

● ●$_1$
$$a \overset{8)\,\text{опр.}}{=} 1 \cdot a = (1+0) \cdot a \overset{7)\,\text{опр.}}{=} 1 \cdot a + 0 \cdot a = a + 0 \cdot a.$$

Мы получили, что
$$a = a + 0 \cdot a. \tag{9.1}$$

Прибавим к обеим частям (9.1) элемент $-a$.

$$\begin{aligned} a + (-a) &= a + 0 \cdot a + (-a), \qquad \text{тогда} \\ \overline{0} &= (a + (-a)) + 0 \cdot a = \overline{0} + 0 \cdot a = 0 \cdot a. \end{aligned}$$ ●$_1$

●$_2$
$$a + (-1 \cdot a) = 1 \cdot a + (-1 \cdot a) \overset{7)\,\text{опр.}}{=} \big(1 + (-1)\big)a = 0 \cdot a = \overline{0}.$$

Тогда мы имеем
$$\overline{0} = a + (-a) \qquad \text{и} \qquad a + (-1 \cdot a) = \overline{0},$$

значит,
$$a + (-a) = a + (-1) \cdot a. \tag{9.2}$$

Прибавим к обеим частям (9.2) элемент $-a$, тогда

$$\begin{aligned} a + (-a) + (-a) &= a + (-1 \cdot a) + (-a), \qquad \text{или} \\ \big(a + (-a)\big) + (-a) &= \big(a + (-a)\big) + (-1 \cdot a), \qquad \text{тогда} \\ \overline{0} + (-a) &= \overline{0} + (-1 \cdot a). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение 3) определения, получаем

$$-a = -1 \cdot a. \qquad ●_2$$

●$_3$ Допустим противное, т. е. что существует такой элемент $a \in L$, у которого два противоположных элемента $-a_{N_1}$ и $-a_{N_2}$, т. е.

$$\begin{aligned} -a_{N_1} &\neq -a_{N_2} \qquad \text{и} \\ a + (-a_{N_1}) = \overline{0}, &\quad a + (-a_{N_2}) = \overline{0}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

но тогда

$$\begin{aligned} -a_{N_1} = -a_{N_1} + \overline{0} = -a_{N_1} + \big(a + (-a_{N_2})\big) = \\ = (-a_{N_1} + a) + (-a_{N_2}) = \overline{0} + (-a_{N_2}) = -a_{N_2}. \end{aligned}$$

Мы получили, что $-a_{N_1} = -a_{N_2}$, что противоречит нашему допущению (9.3). ●$_3$ ●

*Замечание.* В определении линейного пространства поле вещественных чисел можно заменить на произвольное числовое поле $P$ (например, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел или $\mathbb{Z}$ — поле целых чисел). В этом случае говорят о линейном пространстве над полем $P$. Если поле $P = \mathbb{R}$, линейное пространство называют вещественным.

**Определение 9.2.** *Пусть $L$ — линейное пространство над $P$ и $M \subset L$ и $M$ обладает свойствами:*
*$1^o$ . $\forall a\, \forall b \in M \quad a + b \in M$;*
*$2^o$ . $\forall \lambda \in P\, \forall a \in M \quad \lambda a \in M$,*
*тогда $M$ само является линейным пространством над $P$, и оно называется линейным подпространством пространства $L$.*

*ПРИМЕРЫ:*

- $P_3(\mathbb{R})$ является линейным подпространством пространства $P_5(\mathbb{R})$.
- Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

является линейным подпространством пространства $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

Очевидно, ноль-пространство — $\{\overline{0}\}$ и $L$ всегда являются подпространствами $L$, они называются его несобственными подпространствами. Если у пространства есть и другие подпространства, то они называются собственными.

## § 9.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ

**Определение 9.3.** *Пусть $L$ — линейное пространство над $P$. $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$. Вектор*

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

*называется линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

**Определение 9.4.** *Обозначим через $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Множество $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называют линейной оболочкой векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

**ТЕОРЕМА 9.1**
Пусть $L$ — линейное пространство над $P$, $a_i \in L$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Линейная оболочка $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является линейным подпространством пространства $L$.

Пусть $a \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. Покажем, что $a + b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $\lambda a \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$.

Действительно,

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \quad b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i,$$

тогда

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta_i) a_i \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \quad \text{и}$$

$$\lambda a = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k}(\lambda\lambda_i)a_i \overset{\lambda\lambda_i=\mu_i}{=} \sum_{i=1}^{k}\mu_i a_i \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k). \quad \bullet$$

Очевидно, что

1) для любого набора индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant k$ $\mathcal{L}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$ является подпространством $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$;
2) для любой перестановки $p \in P_k$

$$\mathcal{L}\left(a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots, a_{p(k)}\right) = \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

**Определение 9.5.** *Система векторов $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ называется линейно-зависимой, если среди векторов системы существует вектор, являющийся линейной комбинацией остальных.*

Привести пример линейно-зависимой системы очень просто. Действительно, возьмем $a_1, a_2$ — произвольные векторы пространства $L$, положим $a_3 = 2a_1 + (-3)a_2$. Ясно, что $\{a_1, a_2, a_3\}$ — линейно-зависимая система.

Построение линейно-независимых систем и проверка на линейную независимость, как правило, более сложная задача.

Сейчас мы рассмотрим простой, но очень важный пример.

В пространстве $\mathbb{R}_4$ рассмотрим набор векторов $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$. Покажем, что $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ — линейно-независимая система. Предположим противное, т. е. что какой-то из векторов $e_j$ является линейной комбинацией остальных, но у $e_j$ $j$-я координата равна 1. Линейно комбинируя остальные векторы системы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, мы будем получать векторы, $j$-я координата которых равна 0, значит, скомбинировать из таких векторов $e_j$ невозможно. Это и доказывает линейную независимость системы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ в $\mathbb{R}_4$.

**ТЕОРЕМА 9.2**

Система векторов $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ линейно-независима тогда и только тогда, когда равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \overline{0} \tag{9.4}$$

выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

$\bullet$ Пусть $a_1$, ..., $a_k$ — линейно-независимая система векторов, а равенство (9.4) достигается на наборе $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_k$, в котором $\lambda_{i_0} \neq 0$, но тогда из (9.4) получаем

$$a_{i_0} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{i0}}\right)a_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_{i0}}\right)a_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{i_0-1}}{\lambda_{i0}}\right)a_{i_0-1} + \\ + \left(-\frac{\lambda_{i_0+1}}{\lambda_{i0}}\right)a_{i_0+1} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{i0}}\right)a_k,$$

что противоречит линейной независимости системы $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$.

Докажем теперь, что если система линейно зависима, то равенство (9.4) достигается не только на нулевом наборе $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_k$.

Действительно, если $a_{j_0}$ является линейной комбинацией остальных векторов, т. е.

$$a_{j_0} = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{j_0-1} a_{j_0-1} + \beta_{j_0+1} a_{j_0+1} + \cdots + \beta_k a_k, \quad \text{то}$$
$$\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{j_0-1} a_{j_0-1} + (-1) a_{j_0} + \beta_{j_0+1} a_{j_0+1} + \cdots + \beta_k a_k = \overline{0},$$

а набор $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{j_0-1}, -1, \beta_{j_0+1}, \ldots, \beta_k$ не нулевой. ●

## § 9.3. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

По своему строению линейные пространства можно разбить на два типа.

**Определение 9.6.**

1. *Линейное пространство $L$ называется бесконечномерным, если для любого натурального $m$ в $L$ существует хотя бы одна линейно-независимая система, состоящая из $m$ векторов.*
2. *Линейное пространство $L$ называется конечномерным, если существует такое натуральное $N_L$, что любая система векторов из $L$, содержащая $N_L + 1$ или более элементов, линейно зависима.*

**Определение 9.7.** *Размерностью конечномерного линейного пространства $L$ называют наименьшее натуральное $N_L$, удовлетворяющее п. 2 определения 9.6. Размерность $L$ обозначают* $\dim L$.

В случае, когда $L$ — бесконечномерное пространство, полагают $\dim L = \infty$, в случае, когда $L = \{0\}$, полагают $\dim\{0\} = 0$.

Что означает, что $\dim L = n$? Из определения 9.7 следует, что в $L$ существует хотя бы одна линейно-независимая система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а всякая система из векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$ линейно зависима.

**Определение 9.8.** *Пусть* $\dim L = n < \infty$. *Базисом $L$ называется линейно-независимая система $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ясно, что*

1) *если $0 < \dim L < \infty$, то в пространстве существует хотя бы один базис;*
2) *все базисы линейного пространства $L$ содержат одинаковое число элементов — $n = \dim L$.*

**ТЕОРЕМА 9.3 (О базисе линейного пространства)**
Пусть $L$ — линейное пространство и $0 < n = \dim L < \infty$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис $L$, тогда любой вектор $a$ линейного пространства $L$ может быть единственным образом разложен по базису, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n. \tag{9.5}$$

● Рассмотрим систему векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$. Из определения размерности и базиса следует, что эта система векторов линейно зависима. Покажем, что вектор $a$ является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Допустим, что это не так, но тогда среди векторов $a_i$ должен быть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Обозначим его $a_{i_0}$, тогда

$$a_{i_0} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{i_0-1} a_{i_0-1} + \beta_{i_0+1} a_{i_0+1} + \cdots + \beta_n a_n + \beta_{n+1} a. \tag{9.6}$$

В равенстве (9.6) $\beta_{n+1} \neq 0$, так как иначе мы имели бы, что вектор $a_{i_0}$ является в системе $\{a_i\}_{i=1}^n$ линейной комбинацией остальных, что противоречит ее линейной независимости.

Учитывая, что $\beta_{n+1} \neq 0$, из (9.6) мы можем получить, что

$$a = \left(-\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}}\right) a_1 + \left(-\frac{\beta_2}{\beta_{n+1}}\right) a_2 + \cdots + \left(-\frac{\beta_{i_0-1}}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0-1} + \\ + \left(\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0} + \left(-\frac{\beta_{i_0+1}}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0+1} + \cdots + \left(-\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right) a_n.$$

Последнее противоречит нашему допущению о том, что вектор $a$ не является линейной комбинацией базисных векторов.

Покажем теперь единственность представления (9.5). Допустим противное, т. е. что в $L$ существует такой вектор $a$, у которого по крайней мере два представления (9.5):

$$a = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \tag{9.6′}$$
$$a = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \tag{9.6″}$$
$$(\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots, \alpha_{n1}) \neq (\alpha_{12}, \alpha_{22} \ldots, \alpha_{n2}).$$

Из равенств (9.6′) и (9.6″) получаем

$$(\alpha_{11} - \alpha_{12})\, a_1 + (\alpha_{21} - \alpha_{22})\, a_2 + \cdots + (\alpha_{n1} - \alpha_{n2})\, a_n = \overline{0}. \tag{9.7}$$

Равенство (9.7) противоречит критерию линейной независимости системы векторов (Теорема 9.2). ●

Доказанная теорема позволяет дать следующее определение.

**Определение 9.9.** *Пусть $L$ — линейное пространство и $0 < n = \dim L < \infty$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в $L$. Координатами вектора $a$ в данном базисе называется упорядоченный набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такой, что*

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n.$$

Если $a$ — вектор, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис, то координаты вектора $a$ в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ будем записывать в виде вектора-столбца и обозначать $(a)_{\{e_i\}}$, т. е.

$$(a)_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

● *ЗАДАЧА 9.1.* Доказать, что векторы $\vec{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\vec{u}_2 = (1,0,1,1)^t$, $\vec{u}_3 = (1,1,0,1)^t$, $\vec{u}_4 = (1,1,1,0)^t$ образуют базис в $\mathbb{R}_4$, и найти координаты вектора $\vec{a} = (4,3,3,3)^t$ в этом базисе.

● Пусть $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — неизвестные координаты вектора $(\vec{a})_{\{u\}}$, тогда $x_1(1,1,1,1) + x_2(1,0,1,1) + x_3(1,1,0,1) + x_4(1,1,1,0) = (4,3,3,3)$. Приравнивая соответствующие координаты, получаем:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 4 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3 \end{cases}.$$

Переходя к матричной записи, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{c_2:=c_1-c_2\\ c_3:=c_1-c_3\\ c_4:=c_1-c_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{c_1:=c_1-c_2-c_3-c_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ясно, что матрица системы такова, что система совместна и определена при любой правой части, что и означает, что векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ образуют базис и

$$(\vec{a})_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Заметим, что если $L$ — $n$-мерное пространство над $\mathbb{R}$, то $(a)_{\{e_i\}_i} \in \mathbb{R}_n$; при этом имеет место:

1)
$$\forall a, b \in L \quad \left(a \overset{L}{+} b\right)_{\{e_i\}} = (a)_{\{e_i\}} \overset{\mathbb{R}_n}{+} (b)_{\{e_i\}};$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall a \in L \quad (\lambda a)_{\{e_i\}} = \lambda (a)_{\{e_i\}}$,

т. е. сложению векторов и умножению вектора на число соответствует сложение их координатных векторов и умножение на число координатного вектора в пространстве $\mathbb{R}_n$.

## § 9.4. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**Определение 9.10.** *Два линейных пространства $L_1$ и $L_2$ над одним числовым полем $P$ называются изоморфными (пишут $L_1 \simeq L_2$), если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение $\varphi : L_1 \to L_2$, такое, что*

*1)* $\forall a\, \forall b\ (\in L_1) \quad \varphi\left(a \overset{L_1}{+} b\right) = \varphi(a) \overset{L_2}{+} \varphi(b)$;
*2)* $\forall \lambda\ (\in P)\, \forall a\ (\in L_1) \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$.

Из замечания, приведенного выше, следует, что все $n$-мерные линейные пространства над $\mathbb{R}$ изоморфны $\mathbb{R}_n$ (и изоморфны между собой), более того, имеет место

**ТЕОРЕМА 9.4**
Для того чтобы два конечномерных пространства над $P$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали:

$$L_1(P) \simeq L_2(P) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim L_1 = \dim L_2.$$

● ●

## § 9.5. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА ОТ БАЗИСА К БАЗИСУ

Пусть $L$ — линейное пространство размерности $n$ и $\{e_i\}_{i=1}^n \overset{\text{def}}{=} \{e\}$ и $\{u_i\}_{i=1}^n \overset{\text{def}}{=} \{u\}$ — два базиса в $L$, тогда для любого вектора $a$ можно говорить о его координатах в базисах $\{e_i\}$ — $(a)_{\{e\}}$ и $\{u_i\}$ — $(a)_{\{u\}}$. Установим связь между координатами вектора $(a)_{\{e\}}$ и $(a)_{\{u\}}$.

Имеем

$$a = a_{1\{e\}}e_1 + a_{2\{e\}}e_2 + \cdots + a_{n\{e\}}e_n. \tag{9.8}$$

Разложим векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ по базису $\{u_i\}$.

$$\begin{array}{rcl} e_1 &=& e_{11}u_1 + e_{21}u_2 + \cdots + e_{n1}u_n \\ e_2 &=& e_{12}u_1 + e_{22}u_2 + \cdots + e_{n2}u_n \\ \cdots\cdots\cdots\

## Контрольные вопросы и задания

1. Образует ли множество вещественных чисел — $\mathbb{R}$ с операциями $+$ и $\cdot$ линейное пространство?
2. Образует ли множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операциями $+$, $\cdot$ линейное пространство?
3. Образует ли множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операциями $+$, $\cdot$ линейное пространство?
4. Образует ли множество векторов единичной длины подпространство в пространстве $V_3$?
5. Приведите примеры нетривиальных подпространств пространства $V_3$; $P_4(\mathbb{R})$; $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
6. Приведите примеры одномерных, двумерных, трехмерных подпространств пространства $\mathbb{R}_n$; $P_5(\mathbb{R})$; $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
7. Докажите, что в $\mathbb{R}_3$ существует бесконечное множество одномерных; двумерных подпространств.
8. Принадлежат ли векторы $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_k$ линейной оболочке $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$?

# X

# ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 10.1. СУММА ВЕКТОРОВ И УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

В главе 2 мы уже познакомились с понятием вектора — упорядоченной пары точек, способами задания вектора (координаты вектора), его характеристиками (длина, направление). Теперь на множестве векторов (плоскости, пространства) мы определим алгебраические операции.

### 10.1.1. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

**Определение 10.1.** *Пусть $\vec{a}$ — вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\lambda\vec{a}$ вектор, определенный следующим:*

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|\,,$$

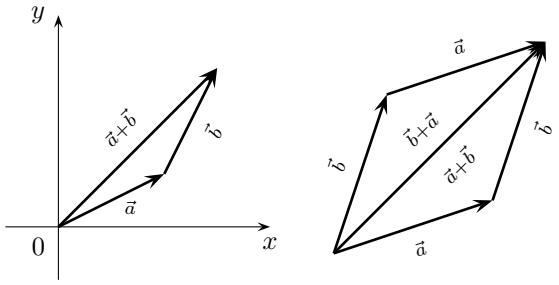
*направление $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. (При $\lambda = 0$ $\lambda\vec{a}$ — нуль-вектор, для которого о направлении говорить не приходится.)*
*О векторе $\lambda\vec{a}$ говорят, что он получен из вектора $\vec{a}$ умножением на $\lambda$.*

Очевидно, имеют место следующие свойства:
$1^{\circ}$ . $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \iff \lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.
$2^{\circ}$ . $(\mu\lambda)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda(\mu\vec{a})$.
$3^{\circ}$ . $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

### 10.1.2. СУММА ВЕКТОРОВ

**Определение 10.2.** *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$, который определяется следующим: если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, то $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, т. е. сложение векторов происходит по правилу треугольника (см. рис. 10.1, а).*

Ясно, что имеют место свойства:
$1^{\circ}$ . $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. (см. рис. 10.1, б);
$2^{\circ}$ . $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
$3^{\circ}$ . $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, где $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$;
$4^{\circ}$ . $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
т. е. векторы относительно сложения образуют коммутативную группу.




а) б)

*Рис. 10.1.*

Отметим еще одно свойство операции сложения:

$5^{\circ}$ . $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ — дистрибутивный закон.

Ясно, что если векторы заданы своими координатами, то умножению вектора на число соответствует умножение координат на это число, а сумме векторов — вектор, координаты которого — суммы соответствующих координат слагаемых.

Напомним, что произвольный вектор плоскости (пространства) может быть единственным образом разложен по двум неколлинеарным (трем некомпланарным) векторам, т. е.

$$\vec{d} = d_a \cdot \vec{a} + d_b \cdot \vec{b} + d_c \cdot \vec{c}. \tag{10.1}$$

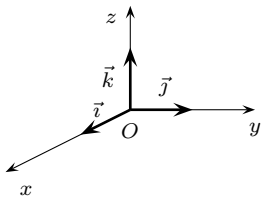



*Рис. 10.2.*

Коэффициенты $d_a$, $d_b$, $d_c$ называются координатами вектора $\vec{d}$ при его разложении по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Если рассматривается декартова система координат и на координатных осях введены единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно (см. рис. 10.2), то

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k}, \tag{10.2}$$

где $x_a$, $y_a$, $z_a$ — декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

## § 10.2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

**Определение 10.3.** *Проекцией вектора на ось называется величина направленного отрезка (проекция начала вектора; проекция конца вектора) (см. рис. 10.3). Проекция вектора $\vec{a}$ на ось $l$ обозначается $np_l\vec{a}$.*

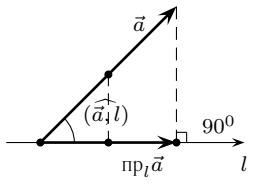



*Рис. 10.3.*

Очевидно, имеет место формула:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\widehat{(\vec{a},l)}, \tag{10.3}$$

где $(\vec{a},l)$ — угол между вектором и осью.

Имеют место следующие свойства проекции:

1) $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$ — аддитивность;
2) $\text{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{пр}_l\vec{a}$ — однородность;
3) $\text{пр}_l(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}) = \lambda\text{пр}_l\vec{a} + \mu\text{пр}_l\vec{b}$ — линейность.

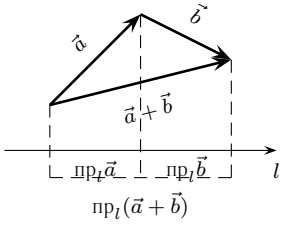



*Рис. 10.4.*

Зафиксируем в пространстве декартову систему координат и тройку единичных векторов $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ на координатных осях. Разложим вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ по векторам $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\vec{a} = \operatorname{пр}_{Ox}\vec{a}\cdot\vec{\imath} + \operatorname{пр}_{Oy}\vec{a}\cdot\vec{\jmath} + \operatorname{пр}_{Oz}\vec{a}\cdot\vec{k} = \\ = |\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{a},Ox)}\cdot\vec{\imath} + |\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{a},Oy)}\cdot\vec{\jmath} + |\vec{a}|\cos\widehat{(\vec{a},Oz)}\cdot\vec{k} = \\ = |\vec{a}|\left(\cos\widehat{(\vec{a},Ox)}\cdot\vec{\imath} + \cos\widehat{(\vec{a},Oy)}\cdot\vec{\jmath} + \cos\widehat{(\vec{a},Oz)}\cdot\vec{k}\right). \quad (10.4)\end{aligned}$$

Вектор $\vec{a_0} = \cos\widehat{(\vec{a},Ox)}\cdot\vec{\imath} + \cos\widehat{(\vec{a},Oy)}\cdot\vec{\jmath} + \cos\widehat{(\vec{a},Oz)}\cdot\vec{k}$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}$ (так как вектор $\vec{a}$ получается из него умножением на число $|\vec{a}| \geqslant 0$), и этот вектор имеет единичную длину, действительно

$$|\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}_0| \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}_0| = 1.$$

Вектор $\vec{a_0}$ имеет координаты $\left(\cos\widehat{(\vec{a},Ox)}, \cos\widehat{(\vec{a},Oy)}, \cos\widehat{(\vec{a},Oz)}\right)$. Они называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Учитывая все вышесказанное, имеем:

$$1 = |\vec{a}_0|^2 = \cos^2\widehat{(\vec{a},Ox)} + \cos^2\widehat{(\vec{a},Oy)} + \cos^2\widehat{(\vec{a},Oz)}. \quad (10.5)$$

Последнее является обобщением основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на случай трехмерного пространства.

## § 10.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

**Определение 10.4.** *Скалярным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b})$ $(\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\vec{b})$ и определяемое равенством*

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{(a,b)} = np_{\vec{b}}\vec{a}\cdot|\vec{b}| = np_{\vec{a}}\vec{b}\cdot|\vec{a}|. \quad (10.6)$$

Следствием определения скалярного произведения являются следующие утверждения:

1) Если $|\vec{a}| = 1$, то $(\vec{a},\vec{b}) = \operatorname{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.
2) Если $|\vec{b}| = 1$, то $(\vec{a},\vec{b}) = \operatorname{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.
3) Если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, то $(\vec{a},\vec{b}) = \cos\widehat{(a,b)}$.

### 10.3.1. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$1^\circ$. $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \iff \vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$ $(\vec{a}\perp\vec{b})$;
$2^\circ$. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ — симметричность;
$3^\circ$. $(\lambda\vec{a},\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a},\vec{b})$ — однородность по каждому из сомножителей;
$4^\circ$. $\left.\begin{array}{rcl}(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) &=& (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) &=& (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})\end{array}\right\}$ — дистрибутивность;
$5^\circ$. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$, причем $(\vec{a},\vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = 0$.

Свойства $1{-}5^\circ$ или очевидны, или легко доказываются, например

$\blacktriangleleft_4$
$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) \overset{(10.6)}{=} \operatorname{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot|\vec{c}| = \left(\operatorname{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \operatorname{пр}_{\vec{c}}\vec{b}\right)\cdot|\vec{c}| = \\ = \operatorname{пр}_{\vec{c}}\vec{a}\cdot|\vec{c}| + \operatorname{пр}_{\vec{c}}\vec{b}\cdot|\vec{c}| \overset{(10.6)}{=} \left(\vec{a},\vec{c}\right) + \left(\vec{b},\vec{c}\right).\end{aligned}$$
$\blacktriangleright_4$

### 10.3.2. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет в декартовой системе координаты $(x_a, y_a, z_a)$, тогда

$$\vec{a} = x_a\vec{\imath} + y_a\vec{\jmath} + z_a\vec{k}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на векторы $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ соответственно

$$\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{\imath}) &= x_a \underbrace{(\vec{\imath},\vec{\imath})}_{=|i|^2=1} + y_a\underbrace{(\vec{\jmath},\vec{\imath})}_{=0} + z_a\underbrace{(\vec{k},\vec{\imath})}_{=0} = x_a,\\
(\vec{a},\vec{\jmath}) &= x_a\underbrace{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}_{=0} + y_a \underbrace{(\vec{\jmath},\vec{\jmath})}_{=|j|^2=1} + z_a\underbrace{(\vec{k},\vec{\jmath})}_{=0} = y_a,\\
(\vec{a},\vec{k}) &= x_a\underbrace{(\vec{\imath},\vec{k})}_{=0} + y_a\underbrace{(\vec{\jmath},\vec{k})}_{=0} + z_a \underbrace{(\vec{k},\vec{k})}_{=|k|^2=1} = z_a,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\vec{a} = (\vec{a},\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{a},\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{a},\vec{k})\vec{k}. \tag{10.7}$$

Мы получили выражение декартовых координат вектора через скалярное произведение вектора на единичные орты:

$$\begin{cases} x_a = (\vec{a},\vec{\imath}),\\ y_a = (\vec{a},\vec{\jmath}),\\ z_a = (\vec{a},\vec{k}). \end{cases} \tag{10.8}$$

### 10.3.3. КООРДИНАТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ даны своими координатами в декартовой системе $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, тогда

$$\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{b}) &= (x_a\vec{\imath} + y_a\vec{\jmath} + z_a\vec{k}, x_b\vec{\imath} + y_b\vec{\jmath} + z_b\vec{k}) \overset{\text{дистр. и лин.}}{=}\\
&= x_a x_b\underbrace{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}_{=1} + x_a y_b\underbrace{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}_{=0} + x_a z_b\underbrace{(\vec{\imath},\vec{k})}_{=0} +\\
&+ y_a x_b\underbrace{(\vec{\jmath},\vec{\imath})}_{=0} + y_a y_b\underbrace{(\vec{\jmath},\vec{\jmath})}_{=1} + y_a z_b\underbrace{(\vec{\jmath},\vec{k})}_{=0} +\\
&+ z_a x_b\underbrace{(\vec{k},\vec{\imath})}_{=0} + z_a y_b\underbrace{(\vec{k},\vec{\jmath})}_{=0} + z_a z_b\underbrace{(\vec{k},\vec{k})}_{=1} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b,
\end{aligned}$$

т. е.

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \tag{10.9}$$

— координатная формула для скалярного произведения.

● *ЗАДАЧА 10.1.* Даны векторы $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

● Очевидно, из определения скалярного произведения и формулы (10.9) следует

$$\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\cdot\sqrt{(\vec{b},\vec{b})}} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{10.10}$$

●

## § 10.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим движение твердого тела около неподвижной точки $O$. Из механики известно, что оно сводится к так называемому мгновенному вращению, которое характеризуется вектором мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}(t)$, направленным вдоль мгновенной оси вращения так, что вращение, наблюдаемое из конца вектора $\vec{\omega}(t)$, происходит против часовой стрелки, а $|\vec{\omega}(t)| = \omega(t)$ — величина угловой скорости (см. рис. 10.5).

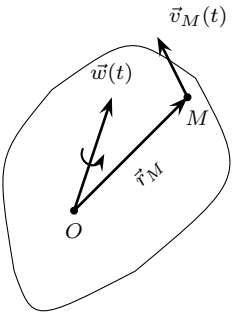



*Рис. 10.5.*

Пусть $\vec{r}_M$ — радиус-вектор точки $M$ тела, т. е. $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$, тогда вектор мгновенной линейной скорости точки $M$ — $\vec{v}_M(t)$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{r}_M$, образует с ними правую тройку, и его длина выражается формулой

$$|\vec{v}_M(t)| = |\vec{\omega}(t)| \cdot |\vec{r}_M(t)| \cdot \sin\big(\widehat{\vec{\omega}(t), \vec{r}_M}\big). \qquad (10.11)$$

Решение этой задачи обосновывает целесообразность введения операции векторного произведения векторов.

**Определение 10.5.** *Векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ ($\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a} \times \times \vec{b}]$), длина которого равна $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$, а направление таково, что он ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и образует с ними правую тройку векторов.*

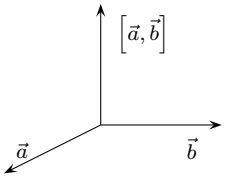



*Рис. 10.6.*

Ясно, что $\big|[\vec{a}, \vec{b}]\big|$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах.

### 10.4.1. СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

$1^{\circ}$. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
$2^{\circ}$. $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \iff$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ — коллинеарны;
$3^{\circ}$. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;
$3^{\circ}{}'$. $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
$4^{\circ}$. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$;
$4^{\circ}{}'$. $[\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$;
$5^{\circ}$. $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

Составим таблицу векторного умножения единичных ортов $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
[\vec{\imath}, \vec{\imath}] &=& \vec{0}, & [\vec{\imath}, \vec{\jmath}] &=& \vec{k}, & \big[\vec{\imath}, \vec{k}\big] &=& -\vec{\jmath}, \\
[\vec{\jmath}, \vec{\imath}] &=& -\vec{k}, & [\vec{\jmath}, \vec{\jmath}] &=& \vec{0}, & \big[\vec{\jmath}, \vec{k}\big] &=& \vec{\imath}, \\
\big[\vec{k}, \vec{\imath}\big] &=& \vec{\jmath}, & \big[\vec{k}, \vec{\jmath}\big] &=& -\vec{\imath}, & \big[\vec{k}, \vec{k}\big] &=& \vec{0}.
\end{array}$$

Условно это можно записать в таблицу:

| | $\vec{\imath}$ | $\vec{\jmath}$ | $\vec{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{\imath}$ | $\vec{0}$ | $\vec{k}$ | $-\vec{\jmath}$ |
| $\vec{\jmath}$ | $-\vec{k}$ | $\vec{0}$ | $\vec{\imath}$ |
| $\vec{k}$ | $\vec{\jmath}$ | $-\vec{\imath}$ | $\vec{0}$ |

Пользуясь этой таблицей и свойствами векторного произведения, найдем формулу для выражения векторного произведения через декартовы координаты вектора:

$$\begin{aligned}\left[\vec{a},\vec{b}\right] &= \left[x_a\vec{\imath}+y_a\vec{\jmath}+z_a\vec{k}, x_b\vec{\imath}+y_b\vec{\jmath}+z_b\vec{k}\right] = x_ax_b\underbrace{[\vec{\imath},\vec{\imath}]}_{=0}+x_ay_b\underbrace{[\vec{\imath},\vec{\jmath}]}_{=\vec{k}}+x_az_b\underbrace{\left[\vec{\imath},\vec{k}\right]}_{=-\vec{\jmath}}+\\ &+y_ax_b\underbrace{[\vec{\jmath},\vec{\imath}]}_{=-\vec{k}}+y_ay_b\underbrace{[\vec{\jmath},\vec{\jmath}]}_{=0}+y_az_b\underbrace{\left[\vec{\jmath},\vec{k}\right]}_{=\vec{\imath}}+z_ax_b\underbrace{\left[\vec{k},\vec{\imath}\right]}_{=\vec{\jmath}}+z_ay_b\underbrace{\left[\vec{k},\vec{\jmath}\right]}_{=-\vec{\imath}}+z_az_b\underbrace{\left[\vec{k},\vec{k}\right]}_{=0}=\\ &=(y_az_b-z_ay_b)\,\vec{\imath}+(x_bz_a-x_az_b)\,\vec{\jmath}+(x_ay_b-x_by_a)\,\vec{k}=\\ &\overset{\substack{\text{свойства}\\ \text{определителей}}}{=}\det\begin{pmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ x_a&y_a&z_a\\ x_b&y_b&z_b\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{10.12}$$

— запись векторного произведения в форме определителя 3-го порядка.

● *ПРИМЕР 10.1.* Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках: $A(2,3,1)$, $B(5,6,3)$, $C(7,1,10)$.

● Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}=(5-2,6-3,3-1)=(3,3,2)$ и $\overrightarrow{AC}=(7-2,1-3,10-1)=(5,-2,9)$. Так как длина вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то площадь треугольника равна половине длины $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ 3&3&2\\ 5&-2&9\end{vmatrix}=31\vec{\imath}-17\vec{\jmath}-21\vec{k}.\\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{31^2+17^2+21^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1691}\approx 20{,}6.\end{aligned}$$ ●

Попутно мы получили формулу

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\begin{smallmatrix}(y_B-y_A)&(z_B-z_A)\\ (y_C-y_A)&(z_C-z_A)\end{smallmatrix}\right|^2+\left|\begin{smallmatrix}(x_B-x_A)&(z_B-z_A)\\ (x_C-x_A)&(z_C-z_A)\end{smallmatrix}\right|^2+\left|\begin{smallmatrix}(x_B-x_A)&(y_B-y_A)\\ (x_C-x_A)&(y_C-y_A)\end{smallmatrix}\right|^2}.\tag{10.13}$$

В случае, когда треугольник $ABC$ лежит в плоскости $xOy$, формула (10.13) упрощается $(z_A=z_B=z_C=0)$.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}(x_B-x_A)&(y_B-y_A)\\ (x_C-x_A)&(y_C-y_A)\end{pmatrix}\right|.\tag{10.14}$$

## § 10.5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

**Определение 10.6.** *Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Смешанным произведением векторов называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ и определяемое формулой*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\overset{\text{def}}{=}(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}).\tag{10.15}$$

Очевидно, это число равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если они образуют правую тройку векторов, и со знаком «−», если они образуют левую тройку векторов.

Учитывая формулы для нахождения скалярного и векторного произведения, получаем

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det\begin{pmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{pmatrix} x_c - \det\begin{pmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{pmatrix} y_c + \\ + \det\begin{pmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{pmatrix} z_c \overset{\text{теорема}}{\underset{\text{Лапласа}}{=}} \det\begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

Ясно, что справедливы следующие свойства смешанного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — компланарные векторы;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$.

● *ПРИМЕР 10.2.* Найти объем пирамиды с вершинами $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$.

● Известно, что $V_{\text{пирамиды } OABC} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда } \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}}$. Значит,

$$V_{\text{пир. } OABC} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right| = 14 \quad \text{(куб. ед.)} \quad ●$$

Попутно мы получили формулу

$$V_{\text{пир. } SABC} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{pmatrix}\right|. \quad (10.17)$$

## § 10.6. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

### 10.6.1. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Положение плоскости $\Pi$ в пространстве можно задать, указав вектор $\vec{n} = (A,B,C)$ $(\neq \vec{0})$ — вектор нормали к ней и точку $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Pi$.

Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка, тогда

$$M \in \Pi \iff \overrightarrow{MM}_0 \perp \vec{n} \iff (\overrightarrow{MM}_0,\vec{n}) = 0.$$

Соотношение

$$(\overrightarrow{MM}_0,\vec{n}) = 0 \quad (10.18)$$

можно считать векторным уравнением плоскости $\Pi$. Переходя к координатам, получаем

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (10.19)$$

Это уравнение называется уравнением плоскости, проходящей через заданную точку и имеющей заданный вектор нормали.

Преобразуем уравнение (10.19):

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{=D} = 0 \iff \\ Ax + By + Cz + D = 0. \quad (10.20)$$

Уравнение (10.20) называется общим уравнением плоскости.

В случае, когда $D = 0$, плоскость проходит через начало координат, в противном случае — не проходит через начало координат.

Если в общем уравнении $A = 0$, то плоскость параллельна оси $Ox$, если $B = 0$ — оси $Oy$, $C = 0$ — оси $Oz$; если $A = 0$ и $B = 0$, плоскость параллельна плоскости $xOy$; $A = 0$ и $C = 0$ — плоскости $xOz$; $B = 0$ и $C = 0$ — плоскости $yOz$.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три различные точки в плоскости $\Pi$, не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, тогда $M(x, y, z) \in \Pi \iff$ векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1, M_3}$ компланарны $\iff$

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0. \tag{10.21}$$

Переходя к координатам, получаем

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{10.22}$$

Последнее уравнение называют уравнением плоскости, проходящей через три точки.

По аналогии с прямой на плоскости, уравнение плоскости, пересекающей координатные оси в точках $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$, имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{10.23}$$

и называется уравнением плоскости в отрезках на осях.

Если обозначить через $p$ расстояние от начала координат до плоскости, а через $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор нормали к плоскости $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + {} + \cos^2\gamma = 1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы между $\vec{n}_0$ и положительным направлением координатных осей $Ox$, $Oy$, $Oz)$, то точка $M_0(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma) \in \Pi$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на $\Pi$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}_0$ (уравнение (10.19))

$$\begin{gathered} \cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \cos\beta(y - p\cos\beta) + \cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0 \iff \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p\underbrace{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}_{=|n_0|^2=1} = 0 \iff \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \end{gathered} \tag{10.24}$$

Последнее и называют нормальным уравнением плоскости.

● *ЗАДАЧА 10.2.* Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости.

● Повторяя рассуждения, проведенные для прямой на плоскости, в этом случае получаем:

$$\rho(M_0, \Pi) = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{10.25}$$

где $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ — нормальное уравнение плоскости $\Pi$, а $Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости $\Pi$. ●

Имеет место и теорема о разделении пространства плоскостью $Ax+By+Cz+D = 0$ на два полупространства, в одном из которых $Ax + By + Cz + D$ больше нуля, а в другом $Ax + By + Cz + D$ меньше нуля.

### 10.6.2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Положение прямой $\mathcal{L}$ в пространстве можно задать, указав точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ и направляющий вектор $\vec{l} = (m, n, p)$, $\vec{l} \neq 0$ этой прямой.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, тогда $M(x, y, z) \in \mathcal{L} \iff$ векторы $\vec{l}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны $\iff$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad m^2 + n^2 + p^2 \neq 0. \tag{10.26}$$

Уравнения (10.26) называются каноническими уравнениями прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор. Обозначив значение отношения в (10.26) $t(\in \mathbb{R})$, получим $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$ или

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{10.27}$$

Уравнения (10.27) называют параметрическими уравнениями прямой. Как и для прямой на плоскости, в случае, когда $|\vec{l}| = 1$, параметр $t$ — внутренняя координата на прямой относительно начала в точке $M_0$.

Мы знаем из элементарной геометрии, что прямая может быть задана как пересечение плоскостей. Пусть $\Pi_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — плоскости. Условие их пересечения состоит в том, что $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — непараллельны, т. е. координаты векторов нормалей плоскости не должны быть пропорциональны, тогда система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{10.28}$$

и определяет прямую $\mathcal{L}$, по которой они пересекаются. Очевидно, что в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ этой прямой можно взять вектор, определенный следующим:

$$\vec{l} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2], \qquad \text{т. е.} \tag{10.29}$$

$$\vec{l} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{10.29'}$$

Точку, принадлежащую прямой $\mathcal{L}$, которая задана (10.28), можно найти как частное решение системы (10.28).

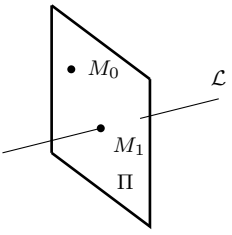


*Рис. 10.7.*

● *ПРИМЕР 10.3.* Найти расстояние от точки $M_0(1, 1, 1)$ до прямой $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\colon\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 2}{4}.$$

●

*Первое решение.* Составим уравнение плоскости $\Pi$, проходящей через точку $M_0 \perp \mathcal{L}$ (см. рис. 10.7). Ясно, что $\vec{n}_{\text{пл}} = \vec{l} = (2, 3, 4)$. Тогда $\Pi : 2(x-1)+2(y-1)+4(z-1) = 0$. Найдем точку $M_1$ пересечения прямой $\mathcal{L}$ и плоскости $\Pi$. Для этого перейдем к параметрическим уравнениям $\mathcal{L}$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

и подставим правые части параметрических уравнений в уравнение плоскости $\Pi$.

$$2(1+2t-1)+3(-2+3t-1)\ +4(2+4t-1)=0$$
$$4t-9+9t+4+16t=0 \quad\Longleftrightarrow\quad 29t=5; \quad t=\frac{5}{29};$$
$$M_1=\left(\frac{39}{29},-\frac{43}{29},\frac{78}{29}\right)$$
$$d(M_0,\mathcal{L})=\rho(M_0,M)=\sqrt{\left(1-\frac{39}{29}\right)^2+\left(1+\frac{43}{29}\right)^2+\left(1-\frac{78}{29}\right)^2}=$$
$$=\frac{\sqrt{100+72^2+48^2}}{29}=\frac{\sqrt{7588}}{29}\approx\frac{87{,}12}{29}\approx 3.$$

*Второе решение.* Найдем расстояние от точки $M_0$ до текущей точки $M(t)$ на $\mathcal{L}$.

$$\rho(M_0,M(t))=\sqrt{(1+2t-1)^2+(-2+3t-1)^2+(2+4t-1)^2}=$$
$$=\sqrt{4t^2+(3t-3)^2+(4t-1)^2}=\sqrt{29t^2-10t+10}.$$

Найдем значение $t$, при котором значение расстояния минимально:

$$f(t)=29t^2-10t+10;$$
$$f'(t)=2\cdot 29\cdot t-10=0; \qquad t_{\min}=\frac{5}{29};$$
$$d(M_0,\mathcal{L})=\sqrt{\frac{29\cdot 25}{(29)^2}-\frac{10\cdot 5}{29}+10}=\sqrt{\frac{25}{29}+10}\approx 3. \quad \bullet$$

## § 10.7. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 10.7.1. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЩЕМ УРАВНЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЕГО УПРОЩЕНИИ

**Определение 10.7.** *Поверхностью второго порядка называют множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида*

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+ \\ +2Gx+2Ly+2Mz+N=0, \quad (10.30)$$

*в котором* $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0$.

Уравнение (10.30) называют общим уравнением поверхности второго порядка. Заметим, что, как и в плоском случае (см. гл. II), может оказаться, что этому уравнению не будут удовлетворять координаты ни одной (или одной) точки пространства. Если совершить преобразование декартовых координат (параллельный перенос осей и поворот), то уравнение (10.30) изменит свой вид, оставаясь уравнением второго порядка, но будет задавать ту же поверхность, как геометрический объект. Как и для кривых 2-го порядка, можно показать, что для каждого уравнения вида (10.30) можно найти специальную систему декартовых координат, в которой оно примет наиболее простой вид, позволяющий исследовать форму этой поверхности. Такой вид уравнений поверхностей 2-го порядка принято называть каноническим.

После полного исследования всех возможных канонических уравнений, полученных после упрощения уравнения (10.30), можно убедиться, что существуют 17 типов поверхностей 2-го порядка, среди которых есть мнимые, а также распадающиеся на пару плоскостей. Мы ограничимся изучением вещественных нераспадающихся поверхностей второго порядка.

### 10.7.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

**Эллипсоид.**

**Определение 10.8.** *Эллипсоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{10.31}$$

*где $a$, $b$, $c$ — положительные числа, в некоторой декартовой системе координат.*

Исследуем форму эллипсоида.

1. Так как уравнение (10.31) содержит только четные степени $x$, $y$, $z$, то координатные плоскости служат плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат является его центром симметрии.
2. Из уравнения (10.31) следует, что $x^2/a^2 \leqslant 1$, $y^2/b^2 \leqslant 1$, $z^2/c^2 \leqslant 1$. Значит, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$. Это означает, что эллипсоид — ограниченная поверхность, расположенная внутри параллелепипеда: $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$. Точки пересечения эллипсоида с осями координат $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$, $B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, $C_1(0,0,-c)$, $C_2(0,0,c)$ называют вершинами эллипсоида.
3. Дальнейшее исследование формы эллипсоида проведем методом параллельных сечений, выясняя форму линий пересечения его с плоскостями, параллельными одной из координатных плоскостей.

Рассмотрим линии $L_h$ пересечения эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскости $xOy$, $z=h$, $|h|<c$.

$$L_h : \begin{cases} z=h, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases} \tag{10.32}$$

Из (10.32) следует, что в плоскости $z=h$ $L_h$ задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \tag{10.33}$$

В правой части уравнения (10.33) стоит положительное число. Разделив на него обе части уравнения (10.33) и обозначив

$$a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

запишем уравнение (10.33) в виде

$$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1,$$

а это уравнение эллипса, причем чем ближе $|h|$ к $c$, тем меньше размеры этого эллипса.

Аналогично, сечения эллипсоида плоскостями $y = h$ $(|h| < b)$ и $x = h$ $(|h| < a)$ также представляют собой эллипсы.

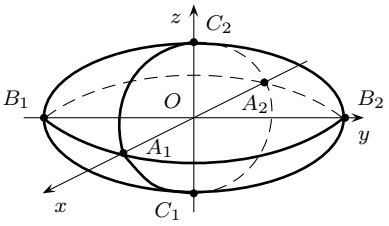



*Рис. 10.8.*

Используя все сказанное, можно представить себе пространственную форму эллипсоида (см. рис. 10.8).

Если $a$, $b$, $c$ — попарно не равны друг другу, то эллипсоид называют трехосным. Если, например, $a = b$, то эллипсоид можно получить, вращая эллипс с осями $|B_1B_2| = 2b$ и $|C_1C_2| = 2c$ вокруг оси $Oz$. Такой эллипсоид называют эллипсоидом вращения. Если $a = b = c$, эллипсоид превращается в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с центром в начале координат и радиусом $a$.

**Однополостный гиперболоид.**

**Определение 10.9.** *Однополостным гиперболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10.34}$$

*в некоторой декартовой системе координат.*

Исследуем форму однополостного гиперболоида.

1. Из уравнения (10.34) следует, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, а начало координат — центром его симметрии.
2. Найдем точки пересечения поверхности (10.34) с осями координат;

$$\text{с осью } Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 = a^2 \end{cases}, \quad \text{или } A_1(-a,0,0) \text{ и } A_2(a,0,0);$$

$$\text{с осью } Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 = b^2 \end{cases}, \quad \text{или } B_1(0,-b,0) \text{ и } B_2(0,b,0).$$

Из уравнения (10.34) видно, что точек пересечения с осью $Oz$ нет.

3. Далее используем метод параллельных сечений. Рассмотрим линии $L_h$ пересечения поверхности (10.34) с плоскостями $z = h$. В этой плоскости линия $L_h$ задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Обозначив

$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

запишем последнее уравнение в виде

$$L_h : \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1. \tag{10.35}$$

Уравнение (10.35) задает эллипс. При $h = 0$ полуоси этого эллипса $a_0^* = a$ и $b_0^* = b$ — самые маленькие. Этот эллипс называют горловым эллипсом однополостного гиперболоида.

Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $x = h$ или $y = h$ всегда представляют собой гиперболы, в частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ — это гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{10.36}$$

Таким образом, однополостный гиперболоид состоит из одной полости и имеет вид трубки, расширяющейся в положительном и в отрицательном направлении оси $Oz$ (см. рис. 10.9).

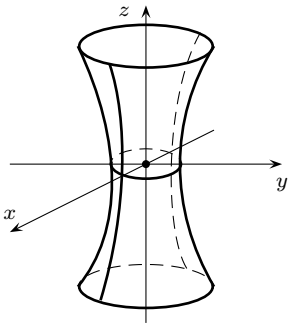


*Рис. 10.9.*

Как и в случае эллипсоида, когда $a = b$, уравнения (10.35) будут задавать окружности и однополостный гиперболоид можно получить вращением одной из гипербол (10.36) вокруг оси $Oz$. Такой гиперболоид называют однополостным гиперболоидом вращения.

Заметим еще один интересный факт. Однополостный гиперболоид покрыт двумя семействами прямых линий (прямолинейных образующих), целиком лежащих на нем. Действительно, рассмотрим два семейства прямых, заданных как линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

где $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Уравнение (10.34) есть следствие каждой из этих систем (результат перемножения уравнений систем) при любых $\lambda$, $\mu$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Это означает, что любая точка прямой из этих семейств лежит на однополостном гиперболоиде.

**Двуполостный гиперболоид.**

**Определение 10.10.** *Двуполостным гиперболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{10.37}$$

*в некоторой декартовой системе координат.*

Исследуем форму двуполостного гиперболоида.

1. Из уравнения (10.37) видно, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии поверхности, а начало координат — ее центром симметрии.
2. Найдем точки пересечения с осями координат. С осью $Oz$ двуполостный гиперболоид пересекается в точках $C_1(0, 0, -c)$ и $C_2(0, 0, c)$. Эти точки называют его вершинами. Очевидно, с осями $Ox$ и $Oy$ точек пересечения нет. Более того, из уравнения (10.37) следует $|z| \geqslant c$, т. е. между плоскостями $z = \pm c$ нет точек поверхности. Это говорит о том, что поверхность состоит из двух частей (полостей), отсюда происходит название поверхности.

3. Далее применяем метод параллельных сечений. Рассмотрим линии $L_h$ пересечения поверхности (10.37) с плоскостями $z = h$, $|h| > c$. В каждой такой плоскости $L_h$ задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1,$$

Обозначив

$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

запишем последнее уравнение в виде

$$L_h : \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1. \tag{10.38}$$

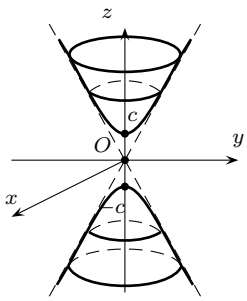



*Рис. 10.10.*

Уравнение (10.38) задает эллипс. Чем больше $|h|$, тем больше размеры этого эллипса.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $x = h$, $y = h$ всегда представляют собой гиперболы, в частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{10.39}$$

На основании сказанного можно составить представление о форме двуполостного гиперболоида (см. рис. 10.10).

Если в уравнении (10.37) $a = b$, то поверхность можно получить вращением одной из гипербол (10.39) вокруг оси $Oz$.

**Эллиптический параболоид.**

**Определение 10.11.** *Эллиптическим параболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad q, p > 0, \tag{10.40}$$

*в некоторой декартовой системе координат.*

Исследуем форму эллиптического параболоида.

1. Так как в уравнение (10.40) координаты $x$, $y$ входят в четных степенях, то поверхность имеет две плоскости симметрии: $xOz$ и $yOz$.
2. Из определения следует, что поверхность проходит через начало координат и целиком располагается выше плоскости $xOy$ (так как $z = x^2/(2p) + y^2/(2q) \geqslant 0$).
3. Сечения поверхности (10.40) плоскостями $z = h$, $h > 0$ — эллипсы

$$L_h : \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \end{cases}$$

где $a^* = \sqrt{2ph}$, $b^* = \sqrt{2qh}$. Размеры эллипсов $L_h$ увеличиваются при увеличении $h$.

Сечения поверхности (10.40) плоскостями $y = |h|$ и $x = |h|$ являются параболами. В частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ — это параболы

$$x^2 = 2pz \quad \text{и} \quad y^2 = 2qz.$$

Представление о форме эллиптического параболоида дает рисунок 10.11.

При $p = q$ получаем параболоид вращения.

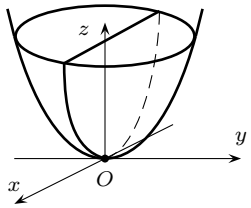



*Рис. 10.11.*

**Гиперболический параболоид.**

**Определение 10.12.** *Гиперболическим параболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad q, p > 0, \tag{10.41}$$

*в некоторой декартовой системе координат.*

Исследуем форму этой поверхности.

1. Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии: $xOz$ и $yOz$. Поверхность проходит через начало координат.
2. Сечения $L_h$ плоскостями, параллельными плоскости $xOz$.

$$L_h: \begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz + p\dfrac{h^2}{q}. \end{cases}$$

В плоскости $y = h$ $L_h$ является параболой. Заметим, что все эти параболы имеют одинаковый параметр $p$ и ветви их направлены вверх.

Сечения плоскостями, параллельными плоскости $yOz$.

$$M_h: \begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + q\dfrac{h^2}{p}. \end{cases}$$

В плоскости $x = h$ кривая $M_h$ является параболой. Все эти параболы имеют одинаковый параметр $q$, и ветви их направлены вниз.

Сечения плоскостями, параллельными плоскости $xOy$.

$$N_h: \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases}$$

При $h = 0$ это две пересекающиеся прямые $x = \pm\frac{p}{q}y$, при $h \neq 0$ кривые $N_h$ являются гиперболами.

Из всех названных поверхностей гиперболический параболоид имеет наиболее сложную форму, а именно, форму «седла» (рис. 10.12).

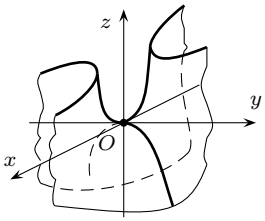



*Рис. 10.12.*

Поверхность (10.41) замечательна еще и тем, что на ней целиком лежат два семейства прямых линий, среди которых и названные ранее $x = \pm\frac{p}{q}y$. Такие прямые носят название прямолинейных образующих, а задать их можно как линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu, \end{cases} \tag{10.42}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 \neq 0.$$

Действительно, уравнение (10.41) есть следствие каждой из систем уравнений (10.42) (результат перемножения уравнений системы).

**Цилиндры второго порядка.**

**Определение 10.13.** *Поверхность называется цилиндрической, если через каждую ее точку проходит прямая линия (образующая), принадлежащая поверхности, параллельная заданной прямой и пересекающая заданную кривую (называемую направляющей цилиндрической поверхности).*

Следующая теорема позволяет по уравнению узнавать цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными одной из осей координат, и направляющей, лежащей в координатной плоскости, ортогональной этой оси.

**ТЕОРЕМА 10.1**
Уравнением $F(x,y)=0$ в пространстве задается цилиндрическая поверхность $S$ с образующими, параллельными оси $Oz$, и направляющей линией $\gamma$, заданной уравнением $F(x,y)=0$ в плоскости $xOy$.

● Действительно, если точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, то $F(x_0,y_0)=0$. Координаты любой точки прямой $M_0M_0'$, $M_0'=(x_0,y_0,0)$ также удовлетворяют уравнению поверхности $S$ (см. рис. 10.13), кривая

$$\gamma:\begin{cases}z=0\\F(x,y)=0\end{cases}$$

принадлежит $S$ и прямые вида $M_0M_0'$ проходят через $\gamma$. ●

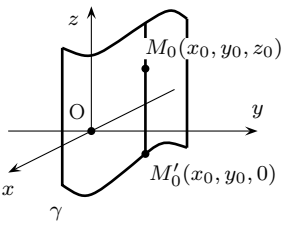


*Рис. 10.13.*

Выбирая теперь в качестве направляющих линий кривые второго порядка, можно получить уравнения цилиндров второго порядка:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (рис. 10.14, а) ниже);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр (рис. 10.14, б) ниже);

$y^2=2px$ — параболический цилиндр (рис. 10.14, в) ниже).

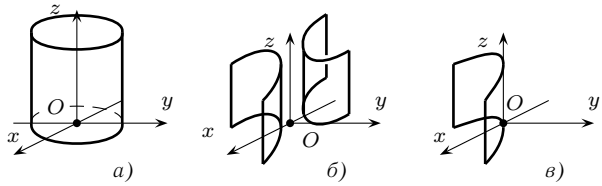


*Рис. 10.14.*

**Конусы второго порядка**

**Определение 10.14.** *Конической поверхностью называют поверхность, образованную прямыми линиями, проходящими через заданную точку пространства (вершину) и пересекающими заданную кривую (направляющую), не содержащую вершину.*

В отличие от цилиндров второго порядка, если в качестве направляющей конической поверхности выбирать любую кривую второго порядка, то при специальном выборе

системы координат уравнение такого конуса будет иметь один и тот же вид. Поэтому эллипс, гиперболу, параболу иногда называют коническими сечениями. Более точно этот факт сформулирован в следующей теореме:

**ТЕОРЕМА 10.2**
Уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{10.43}$$

задается коническая поверхность с вершиной в начале координат.

● Действительно, если в качестве направляющей в плоскости $z=h$ выбрать эллипс:

$$\gamma:\begin{cases} z=h,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}, \end{cases}$$

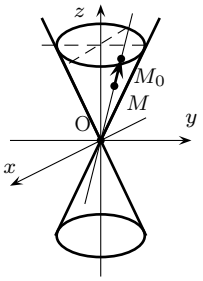


*Рис. 10.15.*

то легко проверить, что координаты $X$, $Y$, $Z$ любой точки $M$ прямой $OM_0$ (точка $M_0\in\gamma$) удовлетворяют уравнению (10.43) (см. рис. 10.15):

$$OM_0:\begin{cases} X=x_0t,\\ Y=y_0t,\\ Z=ht, \end{cases}$$

тогда

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{a^2}=t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}\right)=0.$$

Заметим, что в сечениях этой поверхности (10.43) плоскостями, параллельными $xOy$, лежат эллипсы. Если пересекать эту поверхность плоскостями, параллельными какой-нибудь образующей, то получим параболы. Если же секущая плоскость пересекает обе полости конуса (например, плоскость параллельна оси $Oz$), то в сечении будет получена гипербола. ●

## § 10.8. О ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ И ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ

Лежащий в основе аналитической геометрии метод координат на первый взгляд вводится весьма естественно. На самом деле даже введение координат на прямой требует своего обоснования: тот факт, что каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое вещественное число и что координаты всех точек исчерпывают все множество вещественных чисел, вовсе не очевиден.

Обоснование метода координат на прямой производится с помощью системы аксиом элементарной геометрии. Напомним, что система аксиом делится на пять групп.

*Группа I* содержит три (восемь) аксиом принадлежности планиметрии (стереометрии). Например, к группе I относится аксиома: каковы бы ни были две точки $A$ и $B$, существует прямая, которой принадлежат обе эти точки.

*Группа II* содержит три (четыре) аксиомы порядка планиметрии (стереометрии). Например, к этой группе относится аксиома: среди трех точек одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

*Группа III* содержит пять аксиом конгруэнтности, например: если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку $AB$, то они конгруэнтны между собой.

*Группа IV* содержит две аксиомы непрерывности (аксиома Архимеда и аксиома линейной полноты).

С помощью этих четырех групп аксиом можно обосновать координатный метод, используемый в аналитической геометрии.

Однако в системе аксиом есть еще одна, из группы V, которая играет фундаментальную роль в обосновании самой геометрии. Это аксиома параллельности: в плоскости, определяемой прямой $a$ и точкой $A$ вне прямой, существует не более одной прямой, проходящей через $A$ и не пересекающей $a$.

Много столетий (со времен Евклида) геометры разных стран пытались доказать, что аксиома параллельности есть следствие аксиом I–IV групп, посвящая этому всю свою жизнь. История знает, сколько человеческих трагедий было на этом пути. В 1826 г. русский геометр Н. И. Лобачевский сделал доклад о своем открытии, одном из самых революционных в науке. Результат Лобачевского: если к аксиомам I–IV присоединить утверждение, отрицающее аксиому Евклида, то геометрия, построенная на этой системе аксиом, будет логически непротиворечива. Эту геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», а впоследствии ее назвали неевклидовой геометрией Лобачевского.

Какая же геометрия имеет большее право на реальное отражение материального мира? Уже сам Лобачевский ставил вопрос об экспериментальной проверке своей геометрии. Дело в том, что на малых расстояниях заметить разницу в фактах евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского практически невозможно. Так, например, утверждением, эквивалентным аксиоме Лобачевского, является: сумма внутренних углов треугольника меньше $2\pi$. Так вот, если рассмотреть треугольник со сторонами, сравнимыми с расстоянием от Земли до Солнца, то сумма его внутренних углов будет меньше $2\pi$ всего лишь на $0'',0003$, т. е. на десятитысячные доли секунды.

## Контрольные вопросы и задания

1. Что такое направляющие косинусы вектора?
2. Запишите формулу для вычисления длины вектора в декартовых координатах.
3. Используя смешанное произведение векторов, запишите условие принадлежности четырех точек одной плоскости.
4. Каковы особенности расположения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, если:
   а) $D = 0$; б) $C = 0$; в) $B = 0$; г) $A = 0$;
   д) $C = 0$ и $B = 0$; е) $A = 0$ и $C = 0$; ж) $A = 0$ и $B = 0$?
5. Что можно сказать о расположении плоскости
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1?$$
6. Прямая задана параметрическими уравнениями, плоскость задана общим уравнением. Запишите:
   а) условие перпендикулярности прямой и плоскости;
   б) условие их параллельности;
   в) условия принадлежности прямой к плоскости.
7. Назовите поверхности второго порядка, которые
   а) имеют один центр симметрии;
   б) не имеют центра симметрии;
   в) имеют бесчисленное множество центров симметрии.

# XI

# РАНГ МАТРИЦЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 11.1. РАНГ МАТРИЦЫ И ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сейчас будет введена и изучена одна числовая характеристика матрицы — ранг матрицы. Эта характеристика позволит находить размерности и базисы линейных пространств и подпространств, заданных как линейные оболочки систем векторов.

**Определение 11.1.** *Пусть $A$ — матрица размера $n \times m$. Столбцовым рангом матрицы $A$ называется величина*

$$\operatorname{rank}_c A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}\left((A)_{\square 1}, (A)_{\square 2}, \ldots, (A)_{\square n}\right),$$

*т. е. столбцовый ранг — это максимальное число линейно независимых столбцов матрицы $A$.*

**Определение 11.2.** *Строчным рангом матрицы $A$ называется величина*

$$\operatorname{rank}_l A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}\left((A)_{1\square}, (A)_{2\square}, \ldots, (A)_{m\square}\right),$$

*т. е. строчный ранг — это максимальное число линейно независимых строк матрицы $A$.*

**Определение 11.3.** *Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant k \leqslant \min(m,n)$. Минором $k$-го порядка матрицы $A$ называется определитель подматрицы порядка $k$, полученной выбором элементов, стоящих на пересечении каких-либо $k$ строк и каких-либо $k$ столбцов.*

**Определение 11.4.** *Минорным рангом матрицы $A$ называется величина, обозначаемая $\operatorname{rank}_m A$, равная максимальному порядку минора матрицы $A$, отличного от нуля.*

Что означает, что $\operatorname{rank}_m A = 8$? Это означает, что среди миноров 8-го порядка матрицы $A$ есть минор, отличный от нуля, а все миноры более высоких порядков (если таковые имеются) равны нулю.

*Замечание 11.1.*

1. Если в матрице $A$ все миноры порядка $s$ равны нулю, то в матрице $A$ все миноры более высоких порядков ($s+1$, $s+2$, ...) также равны нулю. Это следует из теоремы Лапласа о вычислении определителя разложением по какой-либо строке или столбцу.
2. Если $\operatorname{rank}_m A = r$, то среди миноров, начиная с порядка 1 до порядка $r$ включительно, существует хотя бы по одному минору, отличному от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.

Из определений 11.1, 11.2, 11.4 следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}_c(A) &= \operatorname{rank}_l(A^t), & \operatorname{rank}_l(A) &= \operatorname{rank}_c(A^t), \\ \operatorname{rank}_m(A) &= \operatorname{rank}_m(A^t), & \operatorname{rank}_m(A) &\leqslant \min(m,n). \end{aligned} \tag{11.1}$$

● *ПРИМЕР 11.1.* Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти $\operatorname{rank}_l A$, $\operatorname{rank}_m A$, $\operatorname{rank}_c A$.

● Найдем минор 2-го порядка, полученный выбором 2-й и 3-й строки, 1-го и 3-го столбцов:

$$M_{2,3}^{1,3}(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = -12 + 6 = -6.$$

Найдем минор 3-го порядка, полученный выбором из матрицы $A$ 2-й, 3-й и 4-й строки и 1-го, 2-го и 3-го столбцов:

$$M_{2,3,4}^{1,2,3}(A) = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2:=c_2 \\ c_3:=c_3+c_1}}{\overset{c_1:=c_1}{=}} \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Простой анализ матрицы $A$ из примера 11.1 показывает, что $\operatorname{rank}_l A = 2$, $\operatorname{rank}_m A = 2$, $\operatorname{rank}_c A = 2$, так как

$$(A)_{\square 3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -1 \cdot (A)_{\square 1} + 2 \cdot (A)_{\square 2} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 11.1**
Пусть $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, тогда

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant \min(m, n), \tag{11.2}$$
$$\operatorname{rank}_l(A) \leqslant \min(m, n). \tag{11.3}$$

● Докажем (11.2). $\operatorname{rank}_c(A) = \dim \mathcal{L}((A)_{\square 1}, (A)_{\square 2}, \ldots, (A)_{\square n})$. Линейная оболочка в правой части построена на $n$ векторах, значит, ее размерность не превосходит $n$, т. е. мы получили, что

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant n. \tag{11.4}$$

Сами столбцы матрицы $A$ являются элементами пространства $\mathbb{R}_m$, но тогда их линейная оболочка является подпространством $\mathbb{R}_m$, и значит,

$$\operatorname{rank}_c(A) = \dim \mathcal{L}\left((A)_{\square 1}, (A)_{\square 2}, \ldots, (A)_{\square n}\right) \leqslant \dim \mathbb{R}_m = m,$$

т. е.

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant m. \tag{11.5}$$

Из (11.4) и (11.5) получаем

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant \min(m, n).$$

Докажем теперь оценку (11.3):

$$\operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_c(A^t) \overset{(11.2)}{\leqslant} \min(m,n) = \min(n,m). \quad \bullet$$

Заметим, что оценки (11.2) и (11.3) могут быть как точными, так и неточными. Действительно, если к матрице дописать нулевые строки и столбцы, то ее ранг не изменится, а размеры и $\min(m,n)$ увеличатся.

Сейчас мы докажем, что для любой матрицы $A$ имеет место равенство

$$\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_m(A) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}(A).$$

**ТЕОРЕМА 11.2**
Имеет место равенство

$$\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A)$$

$\bullet$ Пусть $\operatorname{rank}_c(A) = p$, $\operatorname{rank}_l(A) = q$. Нужно доказать, что $p = q$. Покажем, что варианты а) $p > q$ и б) $q > p$ приводят к противоречию. Рассмотрим вариант а). $\operatorname{rank}_c(A) = p$ означает, что в матрице $A$ существует $p$ линейно независимых столбцов и любые $p+1$ столбец линейно зависимы. Обозначим через $i_1$, $i_2$, …, $i_p$ номера линейно независимых столбцов $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n)$. $\operatorname{rank}_c(A^t) = q$ означает (см. (11.1)), что в матрице $A$ существует $q$ линейно независимых строк и любые $q+1$ строки линейно зависимы. Образуем матрицу $A'$, включив в нее из матрицы $A$ столбцы с номерами $i_1$, $i_2$, …, $i_p$

$$A' = \left((A)_{i_1\square}, (A)_{i_2\square}, \ldots, (A)_{i_p\square}\right).$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $A'x = 0$ с $p$ неизвестными и применим к ней метод Гаусса. Получим

$$A'_{\text{привед}}x = 0. \tag{11.6}$$

В матрице $A'_{\text{привед}}$ не более $q$ ненулевых строк, значит, в системе (11.6) не более $q$ главных неизвестных и значит, не менее чем $p-q$ свободных неизвестных, таким образом, однородная система линейных уравнений $A'x = 0$ имеет ненулевые решения.

Пусть $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_p = \alpha_p$ — какое-нибудь ненулевое решение этой системы уравнений, тогда мы имеем

$$A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

— верное равенство, или

$$\alpha_1(A)_{\square i_1} + \alpha_2(A)_{\square i_2} + \cdots + \alpha_p(A)_{\square i_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает линейную зависимость столбцов матрицы $A$ с номерами $i_1$, $i_2$, …, $i_p$, что противоречит их выбору. Итак, мы доказали, что вариант $\operatorname{rank}_c(A) > \operatorname{rank}_l(A)$ невозможен.

Перейдем к рассмотрению варианта б). Соотношения (11.1) показывают, что вариант б) для матрицы $A$ — это вариант а) для матрицы $B = A^t$, а невозможность такого варианта для любой матрицы мы уже доказали. ●

**ТЕОРЕМА 11.3**
Имеет место равенство

$$\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_m(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rank} A.$$

● Пусть $\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A) = p$. Покажем, что в матрице $A$ есть минор порядка $p$ отличный от нуля, а все миноры порядка $p+1$ (а значит, и более высоких порядков (см. замечание 11.1)) равны нулю.

Обозначим через $i_1$, $i_2$, ..., $i_p$ номера линейно независимых строк, $j_1$, $j_2$, ..., $j_p$ номера линейно независимых столбцов. Ясно, что

$$M^{j_1,j_2,\ldots,j_p}_{i_1,i_2,\ldots,i_p} \neq 0.$$

Любой минор порядка $p+1$ содержит элементы $(p+1)$-й строки матрицы $A$, а любые $p+1$ строки матрицы $A$ линейно зависимы, а в линейно зависимом наборе присутствует строка, являющаяся линейной комбинацией остальных строк, но тогда такой минор обращается в нуль по критерию равенства нулю определителя (см. гл. 6, § 6.4, свойство 11° ). ●

## § 11.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА

В главе 5 § 5.2 мы ввели гауссовы преобразования уравнений СЛУ. Преобразования такого же типа, выполняемые со строками или столбцами матрицы, будем называть гауссовыми преобразованиями матриц.

**ТЕОРЕМА 11.4**
Пусть матрица $A'$ получена из матрицы $A$ с помощью гауссовых преобразований, тогда

$$\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A).$$

● Нетрудно проверить, что если система векторов $\vec{a}'_1$, $\vec{a}'_2$, ..., $\vec{a}'_k$, получена из $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ гауссовыми преобразованиями, то $\dim \mathcal{L}(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \ldots, \vec{a}'_k) = \dim \mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$. Это и гарантирует сохранение ранга при гауссовых преобразованиях. ●

**ТЕОРЕМА 11.5**
Пусть $A_{\text{привед}}$ — приведенная матрица, полученная из матрицы $A$ гауссовыми преобразованиями, которые выполняются при решении системы линейных уравнений методом исключения неизвестных, тогда $\operatorname{rank} A$ равен числу ненулевых строк в приведенной матрице $A_{\text{привед}}$.

● Из теоремы 11.4 следует, что достаточно доказать, что $\operatorname{rank}(A_{\text{привед}})$ равен числу ее ненулевых строк.

Образуем матрицу из ненулевых строк $A_{\text{привед}}$ и столбцов, в которых проводилось исключение. С точностью до перемены местами столбцов эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \square_{11} & & & & \\ 0 & \square_{22} & & & \\ 0 & 0 & \square_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \square_{rr} \end{pmatrix},$$

где $\square_{ii}$ — ненулевые элементы. Ясно, что ее определитель отличен от нуля. Все миноры матрицы $A_{\text{привед}}$ более высокого порядка равны нулю, так как обязательно содержат нулевую строку. Значит,

$$\operatorname{rank} A \overset{\text{т. } 11.4}{=} \operatorname{rank} A_{\text{привед}} = \operatorname{rank}_m \left(A_{\text{привед}}\right) = \quad \text{«числу ее ненулевых строк».} \quad ●$$

● *ПРИМЕР 11.2.* Найти размерность $\mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ и его базис, если $\vec{a}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -1, 2)$.

● Образуем матрицу, по столбцам которой стоят векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, и методом Гаусса найдем ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\dim \mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = \operatorname{rank} A = 3$. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис. Из вида матрицы $A_{\text{привед}}$ следует, что и векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ образуют базис $\mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. ●

*Следствие (из теоремы 11.5).* Число ненулевых строк в матрице $A_{\text{привед}}$ не зависит от способа приведения матрицы $A$.

● Действительно, по теореме 11.5 число ненулевых строк в матрице $A_{\text{привед}}$ равно рангу матрицы $A$. ●

## § 11.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ «РАНГ МАТРИЦЫ»

Очень удобно применять введенное понятие для анализа систем линейных уравнений.

**ТЕОРЕМА 11.6 (Кронекера–Капелли)**
Для того чтобы система линейных уравнений $Ax = b$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b),$$

причем, если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid b) = n =$ «числу неизвестных», система имеет единственное решение, а если $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

● Следует из неизменности ранга при гауссовых преобразованиях матриц и метода исключения неизвестных. ●

В случае однородных систем линейных уравнений вопрос совместности не возникает, так как

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

и если $\operatorname{rank} A$ равен числу неизвестных, то система имеет только нулевое решение, а если $\operatorname{rank} A$ меньше числа неизвестных, то ОСЛУ имеет и ненулевые решения.

## § 11.4. ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ ОСЛУ

**ТЕОРЕМА 11.7**
Пусть $Ax = 0$ — однородная система линейных уравнений с $n$ неизвестными и $r = \operatorname{rank} A$. Множество решений ОСЛУ образует линейное пространство, являющееся подпространством $\mathbb{R}_n$, его размерность равна $n - r$.

● Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — решения однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$.

Покажем, что для любых вещественных $\alpha$, $\beta$ $\vec{r} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ также является решением ОСЛУ. Действительно,

$$A\vec{r} = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Этим самым доказано, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством. Для того чтобы вычислить его размерность, мы найдем его базис.

**Определение 11.5.** *Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Укажем процедуру, гарантирующую построение ФСР. Применим к ОСЛУ $Ax = 0$ метод исключения неизвестных. Возможны два варианта:

а) $\operatorname{rank} A = r = n$, где $n$ — число неизвестных. Тогда по доказанному пространство решений ОСЛУ тривиально $\{\vec{0}\}$, его размерность равна 0, ФСР — пуста;

б) $r < n$, тогда метод исключения определил $r$ главных неизвестных и $n - r$ свободных неизвестных. При необходимости изменим нумерацию неизвестных так, чтобы $x_1$, $x_2$, …, $x_r$ были главными, а $x_{r+1}$, …, $x_n$ — свободными. Построим $n - r$ частных решений, придавая свободным неизвестным следующие наборы значений: для первого частного решения $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = x_{r+3} = \cdots = x_n = 0$, для второго — $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = \cdots = x_n = 0$, …, для последнего ($n - r$-го) — $x_{r+1} = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. Ясно, что ранг матрицы, образованной из этих решений, равен $n - r$. Значит построенные частные решения ОСЛУ линейно независимы.

Обозначим полученный набор решений $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, …, $\vec{x}_{n-r}$. Для доказательства базисности этого набора нам осталось доказать, что любое решение $\vec{x}$ ОСЛУ $Ax = 0$ можно представить в виде линейной комбинации решений $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, …, $\vec{x}_{n-r}$.

Пусть

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

покажем, что

$$\vec{x} = \alpha_{r+1}\vec{x}_1 + \alpha_{r+2}\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_{n-r}. \tag{11.7}$$

Действительно, правая часть в (11.7) является решением однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ (как линейная комбинация решений), и свободные неизвестные в правой части (11.7) принимают значения $\alpha_{r+1}$, $\alpha_{r+2}$, …, $\alpha_n$ соответственно, т. е. те же, что и в решении $\vec{x}$. Но значения главных неизвестных в решении однозначно определяются значениями свободных неизвестных. Следовательно, в правой части (11.7) $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_r = \alpha_r$. Последнее и доказывает равенство (11.7). ●

● *ПРИМЕР 11.3.* Найти ФСР и общее решение системы $Ax = 0$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

● Применим метод исключения неизвестных

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 := c_1 + c_2 \\ \sim \\ c_2 := c_2 \\ c_3 := c_3 + c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} x_1, x_2 & \text{глав. неизв.} \\ x_3, x_4 & \text{своб. неизв.} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений:

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | $\boldsymbol{x_4}$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

$$x_{\text{общ}} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \quad ●$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Что можно сказать о матрице, если ее ранг равен нулю?
2. Изменится ли ранг матрицы при транспонировании? Почему?
3. Что можно сказать о СЛУ, если
   а) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b)$;
   б) $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A \mid b)$?
4. Почему $\operatorname{rank}(A)$ не может быть больше, чем $\operatorname{rank}(A \mid b)$?
5. Сколько ФСР имеет неопределенная ОСЛУ?

# XII

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ (ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА)

## § 12.1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В $\mathbb{R}_N$

Мы уже знакомы со скалярным произведением в геометрических пространствах векторов плоскости $(V_2)$ и трехмерного пространства $(V_3)$ и знаем, что

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{12.1}$$

Нами были получены формулы для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в базисе $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ на плоскости и $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ в пространстве, где $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ — попарно ортогональные векторы, эти формулы имеют вид:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b \tag{12.2}$$

в $V_2$ и

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \tag{12.3}$$

в $V_3$ соответственно.

По аналогии с формулами (12.2) и (12.3) введем в линейном пространстве $\mathbb{R}_n$ $n$-мерных векторов с базисом $\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0,\ldots,0,1)$ скалярное произведение формулой

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \tag{12.4}$$

где

$$\vec{a} = (a_1,\ldots,a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n,$$
$$\vec{b} = (b_1,\ldots,b_n) = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \cdots + b_n\vec{e}_n.$$

Пространство $\mathbb{R}_n$, с введенным в нем скалярным произведением, обозначим $V_n$.

Очевидно, введенное формулой (12.4) скалярное произведение, обладает свойствами:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$, $\quad\forall\vec{a},\ \forall\vec{b}\in V_n$;
2) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$;
3) $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$, $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\quad\forall\vec{a},\ \forall\vec{b}\in V_n$;
4) $(\vec{a},\vec{a}) \geqslant 0$, $\quad\forall\vec{a}\in V_n$;
5) $(\vec{a},\vec{a}) = 0$, $\quad\Longleftrightarrow\quad \vec{a} = 0$.

После такого введения скалярного произведения в $V_n$ возникает «элементарная» геометрия.

**Определение 12.1.** *Длиной вектора $\vec{a}\in V_n$ называется величина, обозначаемая $\|\vec{a}\|$ и определяемая равенством*

$$\|\vec{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}. \tag{12.5}$$

**Определение 12.2.** *Определим расстояние между точками $A$, $B$ в $V_n$ формулой*

$$\rho(A,B) \overset{\text{def}}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \overset{(12.5)}{=} \sqrt{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)} \overset{(12.4)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}, \tag{12.6}$$

*где $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$.*

**Определение 12.3.** *Косинус угла между векторами $\vec{a}=(a_1,\,a_2,\ldots,\,a_n)$, $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}=(b_1,\,b_2,\ldots,\,b_n)$, $\vec{b}\neq 0$ введем формулой*

$$\cos\varphi_{\vec{a}\,\vec{b}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}}. \tag{12.7}$$

Появление угла между векторами (формула (12.7)) порождает понятие «ортогональность векторов».

**Определение 12.4.** *Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ в пространстве $V_n$ называются ортогональными (обозначение $\vec{a}\perp\vec{b}$), если*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0.$$

*Замечание 12.1.* Ясно, что из свойств 1–5$^o$ скалярного произведения в $V_n$ следует, что нуль-вектор $(\vec{0})$ ортогонален любому вектору.

Действительно,

$$\left(\vec{a},\vec{0}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)\right) \overset{1^o}{=} \left(\vec{b}+\left(-\vec{b}\right),\vec{a}\right) \overset{2^o}{=} \left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(-\vec{b},\vec{a}\right) =$$
$$= \left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(-1\cdot\vec{b},\vec{a}\right) \overset{3^o}{=} \left(\vec{b},\vec{a}\right)+(-1)\cdot\left(\vec{b},\vec{a}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)-\left(\vec{b},\vec{a}\right)=0. \quad \bullet$$

## § 12.2. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. НЕРАВЕНСТВО КОШИ–БУНЯКОВСКОГО

### 12.2.1. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $L$ — линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

**Определение 12.5.** *Скалярным произведением называется отображение $f\colon L\times L\to\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:*

*1$^o$* $f(x,y)=f(y,x)$, $\forall x,\,y\in L$ *(симметричность);*

*2$^o$* $f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z)$, $\forall x,\ \forall y,\ \forall z\in L$ *(аддитивность по первой переменной);*

*3$^o$* $f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall x\in L$ *(однородность по первой переменной);*

*4$^o$* $f(x,x)\geqslant 0$ $\forall x\in L$;

*5$^o$* $f(x,x)=0 \iff x=0$.

**Определение 12.6.** *Евклидовым пространством $\mathcal{E}$ называется линейное пространство $L$ над полем вещественных чисел с введенным в нем скалярным произведением векторов $f(x,y)$.*

Как видно, мы в определении скалярного произведения аксиоматизировали свойства 1)–5) скалярного произведения в $V_n$ (см. формулу (12.4)).

Обычно, как и в случае $V_n\ (\mathbb{R}_n)$, вместо обозначения $f(x,y)$ для скалярного произведения применяют обозначение $(x,y)$.

*Замечание 12.2.* Если в пространстве $L$ над $\mathbb{R}$ удается ввести хотя бы одно скалярное произведение $(x,y)_{N_1}$, то на нем можно ввести сколь угодно много скалярных произведений. Действительно, например, $(x,y)_{N_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2(x,y)_{N_1}$ удовлетворяет условиям 1–5° определения 12.5 и значит, является скалярным произведением.

*Замечание 12.3.* Из симметричности скалярного произведения и его аддитивности и однородности по первой переменной следует его аддитивность и однородность по второй переменной. (Докажите это самостоятельно.)

Как задать в конечномерном пространстве $L_n$ над $\mathbb{R}$ скалярное произведение?

Зафиксируем в $L_n$, $n = \dim L$ какой-нибудь базис $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Обозначим через $(x,y)$ скалярное произведение в $L_n$, которое мы хотим определить.

Пусть

$$\begin{aligned}(x)_{\{u\}} &= (x_{1\{u\}}, x_{2\{u\}}, \ldots, x_{n\{u\}})^t,\\ (y)_{\{u\}} &= (y_{1\{u\}}, y_{2\{u\}}, \ldots, y_{n\{u\}})^t.\end{aligned}$$

— координаты векторов $x$ и $y$ в этом базисе, тогда

$$\begin{aligned}(x,y) &= \left(x_{1\{u\}}u_1 + x_{2\{u\}}u_2 + \cdots + x_{n\{u\}}u_n, y_{1\{u\}}u_1 + y_{2\{u\}}u_2 + \cdots + y_{n\{u\}}u_n\right) =\\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_{i\{u\}}u_i, \sum_{j=1}^n y_{j\{u\}}u_j\right) \stackrel{\substack{\text{св-ва } 2^\circ, 3^\circ \text{ скал. произ.}\\ \text{и замечание 12.3}}}{=}\\ &= \sum_{i,j=1}^n x_{i\{u\}}y_{j\{u\}}\,(u_i,u_j) = \sum_{i,j=1}^n x_{i\{u\}}y_{j\{u\}}(A)_{ij}, \quad (12.8)\end{aligned}$$

где $(A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (u_i,u_j)$.

Если мы потребуем, чтобы $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, то свойства 1–3° скалярного произведения, определенного произвольной симметричной $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ по формуле (12.8), будут выполнены (обеспечены).

Матрица $A$ должна дополнительно удовлетворять условиям

$$\sum_{i,j=1}^n x_{i\{u\}}x_{j\{u\}}(A)_{ij} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_n; \qquad (12.9)$$

$$\sum_{i,j=1}^n x_{i\{u\}}x_{j\{u\}}(A)_{ij} = 0 \iff x = 0, \qquad (12.10)$$

Это обеспечит выполнение свойств 4–5° для скалярного произведения.

*Замечание 12.4.* Скалярное произведение, введенное с помощью симметрической матрицы $A$, удовлетворяющей условиям (12.9), (12.10), компактно записывается в матричном виде:

$$(x,y) = (x)^t_{\{u\}}\, A\, (y)_{\{u\}}\,.$$

*Замечание 12.5.* Введение скалярного произведения с помощью симметрической матрицы, удовлетворяющей условиям (12.9), (12.10), это фактически задание скалярного произведения на всевозможных парах базисных векторов ($(A)_{ij} = (u_i,u_j)$).

Так как базисные векторы ненулевые, то необходимо, чтобы $(A)_{ii} = (u_i,u_i) > 0$ — диагональные элементы матрицы $A$ были больше нуля.

*Замечание 12.6.* Если для произвольного базиса в $L_n$ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ взять в качестве матрицы $A$ единичную матрицу, т. е. положить

$$(u_i,u_j) = \begin{cases}1, & \text{если } i = j,\\ 0, & \text{если } i \neq j,\end{cases}$$

то условия $1-5^{\circ}$ для скалярного произведения будут выполнены, и формула (12.8) примет вид

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_{i\{u\}} y_{i\{u\}}, \tag{12.11}$$

где

$$(x)_{\{u\}} = (x_{1\{u\}}, x_{2\{u\}}, \ldots, x_{n\{u\}})^t,$$
$$(y)_{\{u\}} = (y_{1\{u\}}, y_{2\{u\}}, \ldots, y_{n\{u\}})^t,$$

т. е. такой же, как для скалярного произведения в $V_n(\mathbb{R}_n)$ (см. формулу (12.4)).

### 12.2.2. НЕРАВЕНСТВО КОШИ–БУНЯКОВСКОГО

Сейчас будет доказано одно из самых фундаментальных неравенств в теории евклидовых пространств.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — два произвольных вектора евклидова пространства $\mathcal{E}$, $t$ — произвольное вещественное число. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$\big(\vec{a}+t\vec{b}, \vec{a}+t\vec{b}\big) \geqslant 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя линейность и аддитивность скалярного произведения:

$$\big(\vec{b},\vec{b}\big)t^2 + 2\big(\vec{a},\vec{b}\big)t + (\vec{a},\vec{a}) \geqslant 0.$$

Мы получили квадратный трехчлен по переменной $t$, который принимает неотрицательные значения при всех $t \in \mathbb{R}$, значит, его дискриминант меньше либо равен нулю:

$$\mathcal{D} = \big(\vec{a},\vec{b}\big)^2 - (\vec{a},\vec{a})\big(\vec{b},\vec{b}\big) \leqslant 0.$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$\big(\vec{a},\vec{b}\big)^2 \leqslant (\vec{a},\vec{a})\big(\vec{b},\vec{b}\big). \tag{12.12}$$

Вспоминая, что $(\vec{a},\vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$, $(\vec{b},\vec{b}) = \|\vec{b}\|^2$, имеем

$$\big(\vec{a},\vec{b}\big)^2 \leqslant \|\vec{a}\|^2 \cdot \big\|\vec{b}\big\|^2. \tag{12.12$'$}$$

Это неравенство и называют неравенством Коши–Буняковского[1]. Можно доказать, что равенство в нем достигается только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $(\vec{a} = \lambda\vec{b})$.

---

[1] Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик, член Парижской академии наук, окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог. Преподавал в Политехнической школе, Сорбонне и Коллеж де Франс. О. Коши был чрезвычайно многосторонним и плодотворным математиком (свыше 800 научных работ). Его «Курс анализа», «Лекции по приложениям анализа к геометрии» стали образцом изложения математического анализа. Коши в области теории функции комплексного переменного принадлежит развитие основ теории аналитических функций, начатое Л. Эйлером и Ж. Даламбером, ему принадлежит и знаменитое представление аналитической функции в точке в виде интеграла по кривой, содержащей эту точку (интеграл Коши), разработка теории вычетов и их приложений. Основополагающие результаты О. Коши в области дифференциальных уравнений общеизвестны: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных уравнений — задача Коши, основные теоремы существования решений и многое другое.

Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) — российский математик, член Петербургской АН (с 1830 г.) и ее вице-президент (1864–1889). В 1820–1825 гг. учился в Париже, где преподавали П. Лаплас, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, А. Лежандр и др. В Париже защитил докторскую диссертацию (1825 г.). Преподавал в Петербурге в I-м кадетском корпусе, морском корпусе, институте путей сообщения, университете. Известны труды по теории чисел, теории вероятностей и статистике. Интегральное неравенство $\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant \int_a^b (f(x)\cdot g(x))^2\,dx$ называют неравенством Шварца–Буняковского.

Следствием из неравенства Коши–Буняковского является неравенство треугольника в абстрактном евклидовом пространстве:

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \leqslant |\vec{a}| + \left\|\vec{b}\right\|. \tag{12.13}$$

● $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \left(\vec{b},\vec{b}\right) =$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| + \left\|\vec{b}\right\|^2 \leqslant |\vec{a}|^2 + 2\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}\cdot\sqrt{\left(\vec{b},\vec{b}\right)} + \left\|\vec{b}\right\|^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot\left\|\vec{b}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|^2 = \left(|\vec{a}| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2.$$

Здесь для оценки $|(\vec{a},\vec{b})|$ мы применили неравенство Коши–Буняковского. ●

Рассмотрим теперь, что будет, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны ($\Leftrightarrow (\vec{a}\vec{b}) = 0$).

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + 2\underbrace{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}_{=0} + \left(\vec{b},\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + \left(\vec{b},\vec{b}\right) = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2,$$

т. е. если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2. \tag{12.14}$$

Последнее — теорема Пифагора в абстрактном евклидовом пространстве.

## § 12.3. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ, РАССТОЯНИЕ ДО ПОДПРОСТРАНСТВА

Мы уже заметили, что если в конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ выбран базис $\{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ такой, что

$$(u_i,u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i\neq j, \end{cases} \tag{12.15}$$

то скалярное произведение векторов $x$, $y$ вычисляется через их координаты в этом базисе по очень простой формуле (12.11) — сумма произведений соответствующих координат.

Базис, удовлетворяющий условиям (12.15), называют ортонормированным (так как базисные векторы имеют единичную длину и попарно ортогональны).

**ТЕОРЕМА 12.1**
В любом конечномерном евклидовом пространстве существует хотя бы один ортонормированный базис.

● Возьмем в $\mathcal{E}_n$ произвольный базис векторов $\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n\}$ и применим к нему процесс ортогонализации Гильберта–Шмидта[2], т. е. процесс перестроения его в ортонормированный базис $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$.

[2]Гильберт Давид (1862–1943) — выдающийся немецкий математик. Окончил Кенигсбергский университет и два года работал в нем профессором, с 1895 г. по 1930 г. — профессор Геттингенского университета. Гильберта по праву считают одним из создателей современной математики, в том числе теории интегральных уравнений, спектральной теории линейных операторов, важнейшей части функционального анализа. Гильберту принадлежит идея логического обоснования математики, имеющая непреходящее значение и нетривиальное развитие.

Шмидт Эрхард (1876–1959) — немецкий математик, работал в Бременском университете. Основоположник (вместе с Д. Гильбертом) геометрии линейных пространств.

Положим

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|},$$

что обеспечит нормированность вектора $e_1$ ($\|f_1\| \neq 0$, так как $f_1 \neq 0$ как базисный вектор). Построим вектор $e_2'$ в виде $e_2' = f_2 + \alpha_{21} e_1$, где $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$) выберем из условия

$$(e_2', e_1) = 0. \tag{12.16}$$

Для $\alpha_{21}$ из (12.16) получаем

$$(f_2, e_1) + \alpha_{21} \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} = 0$$

или

$$\alpha_{21} = -(f_2, e_1).$$

Значит, вектор $e_2'$ определен условием (12.16). Положим

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|},$$

это обеспечит нормированность вектора $e_2$.

Вектор $e_3'$ будем искать в виде $e_3' = f_3 + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2$, где $\alpha_{31}$ и $\alpha_{32}$ выберем из условия

$$(e_3', e_1) = 0 \quad \text{и} \quad (e_3', e_2) = 0. \tag{12.17}$$

Из (12.17) с учетом ортогональности векторов $e_1$ и $e_2$ получаем

$$\begin{aligned} (e_3', e_1) &= (f_3, e_1) + \alpha_{31} \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} = 0, \\ (e_3', e_2) &= (f_3, e_2) + \alpha_{32} \underbrace{(e_2, e_2)}_{=1} = 0, \end{aligned}$$

тогда, если

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= -(f_3, e_1), \\ \alpha_{32} &= -(f_3, e_2), \end{aligned}$$

то вектор $e_3'$ ортогонален векторам $e_1$ и $e_2$. Положим

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|},$$

это обеспечит нормированность вектора $e_3$.

Если с помощью процесса ортогонализации векторы $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ уже построены, то

$$e_{k+1}' = f_{k+1} + \alpha_{k+1\ 1} e_1 + \cdots + \alpha_{k+1\ k} e_k$$

и числа $\alpha_{k+1\ 1}, \alpha_{k+1\ 2}, \ldots, \alpha_{k+1\ k}$ выбираются из условия

$$(e_{k+1}', e_1) = 0, \ (e_{k+1}', e_2) = 0, \ \ldots, \ (e_{k+1}', e_k) = 0.$$

Учитывая ортонормированность набора $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k\}$, получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1\ 1} &= -(f_{k+1}, e_1),\\ \alpha_{k+1\ 2} &= -(f_{k+1}, e_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{k+1\ k} &= -(f_{k+1}, e_k).\end{aligned}$$

Положим

$$e_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\left\|e'_{k+1}\right\|},$$

что обеспечит нормированность вектора $e_{k+1}$.

Покажем, что в результате процесса ортогонализации мы получим базис. Для этого нам достаточно доказать, что полученная система векторов $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$ линейно независима. Предположим противное, т. е. что существует ненулевой набор чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \neq 0$ такой, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0. \tag{12.18}$$

Умножая скалярно обе части равенства (12.18) на $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ соответственно, получаем

$$\begin{aligned}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_1) &= 0,\\ (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_2) &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_n) &= 0.\end{aligned} \tag{12.19}$$

Преобразуем $i$-е равенство из (12.19)

$$0 = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,(e_j, e_i) \overset{\text{условие ортонормированности}}{=} \lambda_i.$$

Итак, мы показали, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, а это противоречит нашему допущению $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \neq 0$. ●

● *ЗАДАЧА 12.1.* В конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ задано подпространство $\mathcal{E}'$ и вектор $a$ (см. рис. 12.1). Требуется найти проекцию вектора $a$ на подпространство $\mathcal{E}'$ и ортогональную составляющую вектора $a$ к подпространству $\mathcal{E}'$, т. е. представить вектор $a$ в виде

$$a = a_{\mathcal{E}'} + a^{\perp}_{\mathcal{E}'}, \tag{12.20}$$

где $a_{\mathcal{E}'} \in \mathcal{E}'$, а вектор $a^{\perp}_{\mathcal{E}'}$ ортогонален любому вектору из $\mathcal{E}'$.

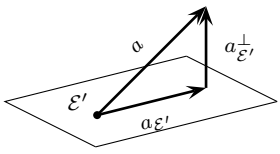



*Рис. 12.1.*

● Решение задачи получается из простых геометрических соображений и проводится в несколько шагов.

1. Выберем произвольный базис в $\mathcal{E}'$ — $\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m\}$, расширим его до базиса в $\mathcal{E}_n$ — $\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m,\ f_{m+1},\ \ldots,\ f_n\}$.
2. Подвергнем базис $\{f_1,\ \ldots,\ f_n\}$ процессу ортогонализации. В полученном ортонормированном базисе $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$ векторы $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_m\}$

образуют ортонормированный базис $\mathcal{E}'$, а векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$ ортогональны подпространству $\mathcal{E}'$.

3. Найдем координаты вектора $a$ в базисе $\{e_i\}$ — $(a)_{\{e_i\}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, т. е.

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n.$$

4. Очевидно, что

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{E}'} &= a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_me_m, \\ a_{\overline{\mathcal{E}'}}^{\perp} &= a_{m+1}e_{m+1} + a_{m+2}e_{m+2} + \cdots + a_ne_n. \end{aligned}$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Почему в пространстве $\mathbb{R}_2$ нельзя ввести скалярное произведение по формуле

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1b_1 - a_2b_2\,?$$

2. Докажите, что в неравенстве Коши–Буняковского равенство обеспечивается тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.
3. Какими особенностями обладает базис в $\mathcal{E}$, если скалярное произведение в координатной форме в нем вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \lambda_1a_1b_1 + \lambda_2a_2b_2 + \cdots + \lambda_na_nb_n,$$

где все $\lambda_i > 0$?

4. Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство? Как найти ортогональную составляющую вектора, если известна его проекция?
5. В чем смысл процесса ортогонализации?

# XIII

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

## § 13.1. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

Среди отображений, действующих из линейного пространства $L_1$ над $P$ в линейное пространство $L_2$ над $P$, важнейшую роль играют так называемые линейные отображения ($\Leftrightarrow$ линейные операторы).

В большинстве физических задач и задачах других естественных наук в нелинейных случаях стараются задачу линеаризовать ($\Leftrightarrow$ или заменить саму задачу более простой, но с линейным оператором, или приблизить (огрубить) нелинейный оператор линейным).

**Определение 13.1.** *Отображение $A\colon L_1 \to L_2$ ($L_1$, $L_2$ — линейные пространства над одним полем $P$) называется линейным оператором, если для него выполнено:*
*$1^o$ .* $A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in L_1$;
*$2^o$ .* $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall \lambda \in P,\ \forall x \in L_1$.

Ясно, что условия $1^o$ , $2^o$ в определении линейного оператора можно заменить на условие

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y), \quad \forall \lambda, \mu \in P,\ \forall x, y \in L_1.$$

● *ПРИМЕР 13.1.* Пусть $L_1 = L_2 = V_2$ $(\mathbb{R}_2)$ — пространство векторов плоскости (координатное пространство $\mathbb{R}_2$ ). Обозначим через $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ — оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки относительно начала координат. Ясно, что $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ — линейный оператор.

● *ПРИМЕР 13.2.* Пусть $L_1 = L_2 = L$ — произвольное линейное пространство. Обозначим через $E$ тождественный оператор в $L$, т. е.

$$E(x) \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \forall x \in L.$$

Ясно, что $E$ — линейный оператор.

● *ПРИМЕР 13.3.* Пусть $L_1 = L_2 = P_n(\mathbb{R})$ — линейное пространство многочленов степени, меньшей либо равной $n$, $n \geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим оператор $\mathcal{D}\colon P_n \to P_n$ по правилу $(\mathcal{D}f)(x) = f'(x)$, где через $f'(x)$ обозначена производная от многочлена $f(x)$. Из свойств производной, изученных в школе, следует линейность оператора $\mathcal{D}$.

Приведем пример действия оператора $\mathcal{D}$ на конкретный многочлен. Пусть

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3,$$

тогда

$$(\mathcal{D}f)(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 1.$$

● *ПРИМЕР 13.4.* Пусть $L_1 = L_2 = L$ — произвольное линейное пространство. Обозначим через $O$ нуль-оператор ($O\colon L_1 \to L_2$), действующий по правилу

$$O(x) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{0}, \quad \forall x \in L_1.$$

Ясно, что $O$ — линейный оператор.

● *ПРИМЕР 13.5.* Пусть $L_1 = L_2 = L$ — произвольное линейное пространство над $P$, $\alpha \in P$ — произвольное фиксированное число из $P$. Обозначим через $\alpha E$ оператор ($\alpha E\colon L_1 \to L_1$), действующий по правилу

$$\alpha E(x) = \alpha x.$$

Ясно, что оператор $\alpha E$ — оператор умножения на число $\alpha$ — является линейным оператором.

*Замечание 13.1.* Для линейных операторов вместо записи «$A(x)$» принята запись $Ax$.

## § 13.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ МАТРИЦЫ

Пусть $L_1$ и $L_2$ — конечномерные пространства над $\mathbb{R}$, $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$, $A\colon L_1 \to L_2$ — линейный оператор.

Зафиксируем в $L_1$ базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и в $L_2$ базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$. Тогда, если $x \in L_1$, то

$$\begin{aligned} (\vec{x})_{\{\vec{e}\}} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}_n, \\ \vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Если $y \in L_2$, то

$$\begin{aligned} (\vec{y})_{\{\vec{f}\}} &= (y_1, y_2, \ldots, y_m)^t \in \mathbb{R}_m, \\ \vec{y} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \cdots + y_m\vec{f}_m. \end{aligned}$$

Фиксация базисов $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e_n}\}$ и $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ устанавливает изоморфизм пространства $L_1$ пространству $\mathbb{R}_n$ и пространства $L_2$ пространству $\mathbb{R}_m$.

Рассмотрим действие оператора $A$ на вектор $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \stackrel{\text{линейность}}{=} x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \cdots + x_nA\vec{e}_n. \quad (13.1)$$

Формула (13.1) показывает, что действие линейного оператора на произвольный вектор пространства фактически определяется его действием на базисные векторы.

Продолжим рассуждения. Векторы $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2, \ldots, A\vec{e}_n$ являются векторами пространства $L_2$, и поскольку в $L_2$ зафиксирован базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$, их можно разложить по этому базису:

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= a_{11}\vec{f}_1 + a_{21}\vec{f}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{f}_m, \\ A\vec{e}_2 &= a_{12}\vec{f}_1 + a_{22}\vec{f}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{f}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\vec{e}_n &= a_{1n}\vec{f}_1 + a_{2n}\vec{f}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{f}_m. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Здесь через $a_{ij}$ обозначена $j$-я координата вектора $Ae_i$ в базисе $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \ldots,\ \vec{f}_m$.

Обозначим через ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$ матрицу размера $m\times n$ с элементами $a_{ij}$, определенными формулами (13.2). Эта матрица называется матрицей линейного оператора $A$ в паре базисов $\{\vec{e}\},\ \{\vec{f}\}$.

Подставим формулы (13.2) в (13.1)

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \cdots + x_nA\vec{e}_n = \\ &= x_1\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\vec{f}_i\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\vec{f}_i\right) + \cdots + x_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\vec{f}_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{f}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\vec{f}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\vec{f}_i. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Нами получено разложение вектора $A\vec{x}$ по базису $\{f\} = \{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2, \ldots,\ \vec{f}_m\}$. Значит, в последней сумме в скобках стоит $i$-я координата вектора $A\vec{x}$ в базисе $\{f\}$ и мы получили следующее:

1. Формулу (13.3), описывающую действие оператора на произвольный вектор $\vec{x}$, когда в $L_1$ и $L_2$ зафиксированы базисы.
2. Формула (13.3) может быть истолкована, используя правила умножения матриц, следующим образом:

$$(A\vec{x})_{\{f\}} = {}_{\{f\}}A_{\{e\}}\cdot(\vec{x})_{\{e\}}, \tag{13.4}$$

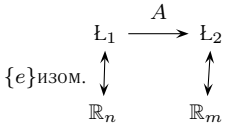


*Рис. 13.1.*

т. е. действие оператора $A$ на координаты вектора $\vec{x}$ свелось к умножению на матрицу ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$ в паре базисов $\{e\},\ \{f\}$.

Рассмотрим диаграмму на рис. 13.1. Фактически оператор умножения вектора столбца $(\vec{x})_{\{e\}}$ на матрицу ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$ (формула (13.4)) замыкает эту диаграмму в рис. 13.2.

Одновременно мы показали, что линейные операторы, действующие из $\mathbb{R}_n$ в $\mathbb{R}_m$, это операторы умножения на матрицу размером $m\times n$.

Что произойдет с матрицей линейного оператора, если изменить пару базисов $\{e\},\ \{f\}$ на пару $\{e'\},\ \{f'\}$?

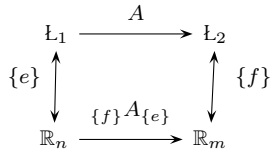


*Рис. 13.2.*

Мы знаем, что

$$\begin{aligned} (\vec{x})_{\{e\}} &= {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\,(\vec{x})_{\{e'\}}, \\ (\vec{y})_{\{f'\}} &= {}_{\{f\}}T_{\{f'\}}\,(\vec{y})_{\{f\}}. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Подставляя (13.5) в (13.4), получим

$$\begin{aligned} (A\vec{x})_{\{f'\}} = {}_{\{f'\}}T_{\{f\}}\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\cdot\left({}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\cdot(\vec{x})_{\{e'\}}\right)\right) = \\ = \left({}_{\{f\}}T_{\{f'\}}\cdot{}_{\{f\}}A_{\{e\}}\cdot{}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\right)\cdot(\vec{x})_{\{e'\}}. \end{aligned} \tag{13.6}$$

С другой стороны, по формуле (13.4) для пары базисов $\{e'\},\ \{f'\}$ имеем

$$(A\vec{x})_{\{f'\}} = {}_{\{f'\}}A_{\{e'\}}\,(\vec{x})_{\{e'\}}. \tag{13.7}$$

Из (13.6) и (13.7) получаем

$${}_{\{f'\}}A_{\{e'\}} = {}_{\{f'\}}T_{\{f\}}\cdot{}_{\{f\}}A_{\{e\}}\cdot{}_{\{e\}}T_{\{e'\}}. \tag{13.8}$$

Формула (13.8) называется формулой преобразования матрицы линейного оператора при замене базисов.

## § 13.3. КОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Определение 13.2.** *Пусть $A\colon L_1 \to L_2$ — линейный оператор, $B\colon L_2 \to L_3$ — линейный оператор. Композицией линейных операторов $A$, $B$ называется оператор, обозначаемый $BA$ и действующий из $L_1$ в $L_3$ по правилу*

$$BA\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} B\left(A\vec{x}\right).$$

Пусть $L_1$, $L_2$, $L_3$ — конечномерные пространства. Зафиксируем в $L_1$ базис $\{e\}$, в $L_2$ базис $\{f\}$, в $L_3$ базис $\{g\}$.

Ясно, что $BA$ — линейный оператор и

$$_{\{g\}}\left(BA\right)_{\{e\}} = {}_{\{g\}}B_{\{f\}} \cdot {}_{\{f\}}A_{\{e\}}. \tag{13.9}$$

Формула (13.9) служит еще одним подтверждением «разумности» определения операции умножения матриц.

*Замечание 13.2.* В литературе вместо обозначения $_{\{f\}}A_{\{e\}}$ для матрицы линейного оператора применяют обозначение $A_{\{e\}\to\{f\}}$. Нам кажется, что в приведенных обозначениях формулы (13.8) и (13.9) выглядят более естественно, кроме этого, студенты, слушавшие лекции по линейной алгебре у одного из авторов этой книги, придумали свое название для этих матриц и формул — «ушастые матрицы и правила обращения с ними».

## § 13.4. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

В этом параграфе мы будем рассматривать только линейные операторы в линейном пространстве $L$ (т. е. действующие из $L$ в $L$). Самыми «простыми» линейными операторами в $L$ являются операторы умножения на число $(\lambda E,\ \lambda \in P)$, для более сложных операторов иногда удается найти такие направления (подпространства в $L$), в которых действие оператора сводится к умножению на число. Это позволяет ясно представить себе действие линейного оператора в таких подпространствах.

**Определение 13.3.** *Собственным вектором линейного оператора $A$, действующего в линейном пространстве $L$ над $P$, отвечающим собственному значению ($\Leftrightarrow$ числу) $\lambda$ $(\in P)$, называется $\vec{x} \neq \underline{0}$ (подчеркнутое очень важно), для которого имеет место*

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}. \tag{13.10}$$

*ПРИМЕР 13.6 (тривиальный).* Пусть $L$ $(\neq \{\vec{0}\})$ — произвольное линейное пространство. $\lambda_0$ — фиксированное число из $P$. Ясно, что оператор $\lambda_0 E$ имеет единственное собственное значение $\lambda_0$ и любой ненулевой вектор $\vec{x}$ из $L$ является собственным вектором линейного оператора $\lambda_0 E$.

Следствием этого факта является следующее:

1. Тождественный оператор $E$ в любом пространстве $L$ $(\neq \{\vec{0}\})$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$, а все ненулевые векторы пространства — собственные векторы тождественного оператора.
2. Нуль-оператор $O$ $(O\vec{x} = \vec{0},\ \forall \vec{x} \in L)$ в любом линейном пространстве $L(\neq \{\vec{0}\})$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, и все ненулевые векторы пространства — собственные векторы нуль-оператора.

*ПРИМЕР 13.7.* Рассмотрим оператор $\mathcal{D}$ примера 13.3. Ясно, что единственным собственным значением оператора дифференцирования в пространстве многочленов над полем вещественных чисел является $\lambda = 0$, и собственными векторами являются многочлены нулевой степени, не равные 0-многочлену, — константы, отличные от нуля.

*Замечание 13.3.* В определении 13.3 собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda$, назван ненулевой вектор, удовлетворяющий соотношению (13.10), так как нуль-вектор $(\vec{0})$ удовлетворяет соотношению (13.10) при любом $\lambda$, т. е. для него собственное значение не определено.

Как находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора в конечномерном случае? Зафиксируем в пространстве $L$ базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, тогда соотношение (13.10) перейдет в

$$ {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot (\vec{x})_{\{e\}} = \lambda\,(\vec{x})_{\{e\}}, \tag{13.11} $$

перенося в левую часть, получим

$$ \left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda_{\{e\}}E_{\{e\}}\right)(\vec{x})_{\{e\}} = \left(\vec{0}\right)_{\{e\}}. \tag{13.12} $$

Учитывая, что ${}_{\{e\}}E_{\{e\}} = E$ в любом базисе ($E$ — единичная матрица), имеем однородную систему линейных уравнений

$$ \left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right)(\vec{x})_{\{e\}} = \vec{0}, \tag{13.12$'$} $$

содержащую параметр $\lambda$. Нас интересуют такие значения параметра $\lambda$, при которых ОСЛУ (13.12′) имеет ненулевые решения. В рассматриваемой ОСЛУ $n$ уравнений и $n$ неизвестных, значит, к ней применим критерий наличия ненулевых решений у квадратной однородной системы линейных уравнений (теорема 6.8). Получаем, что ОСЛУ (13.12′) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$ \det\left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right) = 0. \tag{13.13} $$

Значит, собственными значениями оператора $A$ являются те и только те $\lambda$, которые являются решениями уравнения (13.13) ($\lambda$ — обозначение неизвестного).

**Определение 13.4.** *Уравнение*

$$ \det\left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right) = 0 $$

*называется характеристическим уравнением оператора $A$.*

Докажите самостоятельно, что при замене базиса характеристическое уравнение не меняется.

*Замечание 13.4.* Можно показать, что когда $\dim L = n$, характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением $n$-й степени.

**Определение 13.5.** *Левая часть характеристического уравнения* (13.13) *называется характеристическим многочленом оператора $A$.*

Когда собственные значения оператора $A$ найдены, отвечающие им собственные векторы можно найти как решения однородной системы линейных уравнений (13.12′).

*Замечание 13.5.* Можно доказать, что если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — собственные векторы оператора $A$, отвечающие одному и тому же значению $\lambda$, то для любых $\alpha$ и $\beta$ вектор $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ также является собственным вектором, отвечающим тому же собственному значению $\lambda$ (если, конечно, $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \neq \vec{0}$).

Иными словами, множество всех собственных векторов оператора $A$, отвечающих одному и тому же собственному значению, пополненное нуль-вектором, образует линейное подпространство в $L$. Поэтому задача об отыскании собственных векторов, отвечающих данному $\lambda$, — это задача отыскания базиса этого линейного подпространства, и значит, нам достаточно для однородной системы линейных уравнений (13.12) найти фундаментальную систему решений.

● *ПРИМЕР 13.8.* Для линейного оператора $A$, действующего в $\mathbb{R}^3$ и заданного в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ матрицей

$$ {}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$

найти собственные значения и собственные векторы.

● Составим характеристическое уравнение:

$$ \det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & -2 & 0 \\ 1 & (4-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) \end{pmatrix} = 0. $$

Разлагая определитель по последней строке, получаем

$$ \begin{gathered} (3-\lambda)\det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ 1 & (4-\lambda) \end{pmatrix} = 0, \\ (3-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda)+2\right) = 0, \\ (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0, \\ \lambda_{1,2} = 3; \qquad \lambda_3 = 2. \end{gathered} $$

Найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda = 3$. Выпишем матрицу ОСЛУ ($\lambda = 3$)

$$ \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_1:=c_2 \\ c_2:=c_1+2c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2, x_3 \end{matrix} \begin{matrix} \text{гл. неизв.} \\ \text{св. неизв.} \end{matrix} $$

Найдем фундаментальную систему решений:

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $1$ |

Она состоит из двух векторов: $(-1,1,0)$ и $(0,0,1)$. Таким образом, в качестве базиса в подпространстве собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 3$, можно взять собственные векторы $(-1,1,0)$ и $(0,0,1)$. Проверим, что найденные векторы — собственные:

$$ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_1:=c_2 \\ c_3:=c_1+c_2 \\ c_2:=c_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$x_1$, $x_3$ — главные неизвестные, $x_2$ — свободное неизвестное. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора

| $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $1$ | $0$ |

Проверим, что вектор $(-2, 1, 0)$ — собственный.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Как будет выглядеть матрица линейного оператора $A$ в базисе $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, если $f_j$ — собственный вектор оператора $A$, отвечающий собственному значению $\lambda_j$? Мы знаем, что $\left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)_{\square j} = (Af_j)_{\{f\}}$, но тогда

$$\left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ \lambda_j, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

т. е. $j$-й столбец матрицы ${}_{\{f\}}A_{\{f\}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-е место.}$$

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Значит, мы доказали теорему

**ТЕОРЕМА 13.1**
Матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна тогда и только тогда, когда все базисные векторы являются собственными векторами линейного оператора, при этом диагональные элементы матрицы линейного оператора являются собственными значениями линейного оператора.

Как отыскивать линейно независимые собственные векторы, отвечающие одному собственному значению, мы уже знаем (см. пример 13.8), а как обеспечить линейную независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям? Оказывается, об этом не нужно заботиться, они всегда линейно независимы.

**ТЕОРЕМА 13.2**
Собственные векторы линейного оператора, отвечающие его различным собственным значениям, линейно независимы.

● Докажем это утверждение по индукции. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собственные значения оператора $A$ и $x_1$, $x_2$ — собственные векторы, им отвечающие. Предположим, что они линейно зависимы, тогда существует $\mu \neq 0$ такое, что

$$x_2 = \mu x_1. \tag{13.14}$$

Подействуем на обе части последнего равенства оператором $A$.

$$Ax_2 = A(\mu x_1).$$

Учитывая линейность $A$ и то, что $x_1$, $x_2$ — собственные векторы, получим

$$\lambda_2 x_2 = \mu \lambda_1 x_1. \tag{13.15}$$

Подставим в (13.15) выражение для $x_2$ из (13.14)

$$\lambda_2 \mu x_1 = \mu \lambda_1 x_1 \quad \text{или} \quad \mu(\lambda_2 - \lambda_1)x_1 = \vec{0}. \tag{13.16}$$

Учитывая, что $x_1 \neq 0$ ($x_1$ — собственный вектор) и $\mu \neq 0$, получаем

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda_1 = \lambda_2,$$

что противоречит тому, что $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — различные собственные значения.

Допустим, что любой набор собственных векторов $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$, отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_k$ оператора $A$, линейно независим. Докажем, что тогда и любой набор $k+1$ собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, линейно независим.

Предположим, что это неверно, т. е. существует ненулевой набор чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_{k+1}$ таких, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{13.17}$$

Ясно, что $\alpha_{k+1}$ должно быть не равно нулю, иначе (13.17) означало бы линейную зависимость $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$. Преобразуем (13.17):

$$x_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{k+1}} x_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} x_k = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k. \tag{13.18}$$

Ясно, что

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_k^2 \neq 0. \tag{13.19}$$

Подействуем на обе части (13.18) оператором $A$.

$$Ax_{k+1} = A(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k).$$

Учитывая линейность $A$ и то, что $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ — собственные векторы оператора $A$, получаем

$$\lambda_{k+1} x_{k+1} = \beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \beta_k \lambda_k x_k. \tag{13.20}$$

Подставим в левую часть (13.20) выражения для $x_{k+1}$ из (13.18)

$$\lambda_{k+1}(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k) = \beta_1 \lambda_1 x_1 + \beta_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \beta_k \lambda_k x_k$$

или

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})x_2 + \cdots + \beta_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k = \vec{0}. \tag{13.21}$$

Учитывая, что $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_{k+1} \neq 0$, ..., $\lambda_k - \lambda_{k+1} \neq 0$ и (13.19), получаем из (13.21), что векторы $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ линейно зависимы, а это противоречит индуктивному предположению. ●

Теперь, когда доказана такая «мощная» теорема, кажется, что для любого линейного оператора должен существовать базис, в котором матрица оператора диагональна, т. е. базис пространства, составленный из собственных векторов линейного оператора. Простой пример, приведенный ниже, разбивает наши иллюзии «в пух и прах».

● *ПРИМЕР 13.9.* Линейный оператор $A$ в $\mathbb{R}_2$ имеет в базисе $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ матрицу ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Доказать, что для оператора $A$ не существует базиса, в котором его матрица диагональна.

● Найдем собственные значения оператора $A$.

$$\det \begin{pmatrix} (4-\lambda) & 1 \\ -1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или } \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = 0, \quad (\lambda - 3)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 3,$$

т. е. оператор $A$ имеет только одно собственное значение $\lambda = 3$. Найдем собственные векторы, отвечающие этому собственному значению. Составим и решим соответствующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_2 := c_2 + c_1}{\overset{c_1 := c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 & \text{— свободное неизвестное} \\ x_1 & \text{— главное неизвестное} \end{matrix}$$

Фундаментальная система решений ОСЛУ состоит из одного вектора

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \\ \hline -1 & 1 \end{array}.$$

Значит имеется только один линейно-независимый собственный вектор $f_1 = (-1, 1)$, а из него не построить базис пространства $\mathbb{R}_2$ $(\dim \mathbb{R}_2 = 2)$. ●

*Следствие (из теоремы 13.2.).* Если линейный оператор $A$ в $n$-мерном вещественном пространстве имеет $n$ различных вещественных собственных значений, $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$, то каждому собственному значению соответствует только один линейно независимый собственный вектор и эти векторы образуют базис пространства и матрица оператора $A$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

## § 13.5. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

### 13.5.1. ЯДРО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

**Определение 13.6.** *Ядром оператора $A$ называется множество, обозначаемое* $\operatorname{Ker} A$ $(\subset L_1)$ *определяемое следующим соотношением:*

$$x \in \operatorname{Ker} A \iff Ax = \vec{0}. \tag{13.22}$$

Ясно, что $\operatorname{Ker} A \neq \varnothing$ для любого линейного оператора $A$, так как $\vec{0} \in \operatorname{Ker} A$. Действительно,

$$A\vec{0} = A(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot A\vec{x} = \vec{0}. \tag{13.23}$$

Здесь $\vec{x}$ — произвольный элемент пространства $L_1$. Второй переход в цепочке равенств (13.23) выполнен на основании п. 2 определения 13.1. В том случае, когда $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$, говорят, что оператор $A$ имеет тривиальное ядро, в противном случае говорят, что оператор $A$ имеет нетривиальное ядро.

● *ПРИМЕР 13.10.*

1. Рассмотрим оператор $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ из примера 13.1. Ясно, что его ядро тривиально, т. е. $\operatorname{Ker} \Pi_{\frac{\pi}{2}} = \{\vec{0}\}$.
2. Очевидно, что тождественный оператор — $I$ имеет тривиальное ядро, т. е. $\operatorname{Ker} I = \{\vec{0}\}$.
3. Для нуль-оператора $O : L_1 \to L_2$ (пример 13.4) справедливо $\operatorname{Ker} O = L_1$, т. е. в случае, когда $L_1 \neq \{\vec{0}\}$ ядро нуль-оператора нетривиально.
4. Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ (см. пример 13.3). Ясно, что ядро оператора $\mathcal{D}$ — это множество многочленов нулевой степени (т. е. множество постоянных многочленов).

Имеет место следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 13.3**
Ядро линейного оператора $A$: $L_1 \to L_2$ является линейным подпространством пространства $L_1$.

● Пусть $x_1$, $x_2 \in \operatorname{Ker} A$ и $\lambda$, $\mu$ — произвольные числа, покажем, что $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \in \operatorname{Ker} A$. Действительно,

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) \overset{A\text{ — лин. оператор}}{=} \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \quad ●$$

Как находить $\operatorname{Ker} A$, его размерность и базис ядра оператора?

Зафиксируем в $L_1$ и $L_2$ базисы $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ соответственно.

Условие $x \in \operatorname{Ker} A$ равносильно условию

$$ {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot (x)_{\{e\}} = \vec{0}. \tag{13.24}$$

Таким образом, ядро оператора $A$ — это пространство решений ОСЛУ (13.24), а базис ядра оператора $A$ — ФСР этой ОСЛУ. Из доказанного ранее (см. §11.3) мы получаем, что

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rang} {}_{\{f\}}A_{\{e\}} = \dim L_1 - \operatorname{rang} {}_{\{f\}}A_{\{e\}}. \tag{13.25}$$

В равенстве (13.25) левая часть не зависит от выбора базисов, значит, и правая часть не зависит от выбора базисов, тем самым мы доказали, что ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов, а определяется самим оператором $A$.

**Определение 13.7.** *Рангом линейного оператора $A$ называется величина* $\operatorname{rang} A$*, определяемая равенством*

$$\operatorname{rang} A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rang} {}_{\{f\}}A_{\{e\}}. \tag{13.26}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 13.4**
Справедлива формула

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim L_1 - \operatorname{rang} A. \tag{13.27}$$

### 13.5.2. ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

**Определение 13.8.** *Пусть $A$ — линейный оператор, действующий из $L_1$ в $L_2$. Образом оператора $A$ называется множество, обозначаемое $\operatorname{Im} A$ $(\subset L_2)$ и определяемое следующим:*

$$y \in \operatorname{Im} A \iff \text{существует } x(\in L_1) \text{ такой, что } y = Ax. \tag{13.28}$$

● *ПРИМЕР 13.11.*

1. Рассмотрим оператор $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ (см. пример 13.1). Ясно, что
$$\operatorname{Im} \Pi_{\frac{\pi}{2}} = V_2.$$
2. Очевидно, что $\operatorname{Im} I = L$. Здесь $I$ — тождественный оператор, действующий из $L$ в $L$.
3. Ясно, что для нуль-оператора $O\colon\ L_1 \to L_2$ (см. пример 13.4) имеет место равенство
$$\operatorname{Im} I = \{\vec{0}\}, \quad \vec{0} \in L_2.$$
4. Для оператора $\mathcal{D}\colon\ P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ (см. пример 13.3) имеет место равенство
$$\operatorname{Im} \mathcal{D} = P_2(\mathbb{R}).$$

Очевидно, имеет место следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 13.5**
Образ линейного оператора $A\colon\ L_1 \to L_2$ является линейным подпространством пространства $L_2$.

● Пусть $y_1$, $y_2 \in \operatorname{Im} A$, $\lambda$, $\mu$ — произвольные числа. Покажем, что $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} A$.

Действительно, $y_1 \in \operatorname{Im} A$ $(y_2 \in \operatorname{Im} A)$ означает, что существует $x_1 \in L_1$ $(x_2 \in L_1)$ такое, что $Ax_1 = y_1$ $(Ax_2 = y_2)$. Рассмотрим элемент $\lambda x_1 + \mu x_2$ пространства $L_1$. Имеем

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) \overset{A\text{ — лин. оператор}}{=} \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2.$$

Тем самым мы показали, что для элемента $\lambda y_1 + \mu y_2$ пространства $L_2$ нашелся элемент $\lambda x_1 + \mu x_2$ пространства $L_1$ такой, что

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2. \tag{13.29}$$

Равенство (13.29) и означает, что $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} A$. ●

Как находить $\operatorname{Im} A$, его размерность и базис образа оператора?

Зафиксируем в $L_1$ и $L_2$ базисы $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. $y \in \operatorname{Im} A$ означает, что существует $x \in L_1$ такой, что

$$ {}_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.30} $$

Пусть $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ — координаты вектора $x$ в базисе $\{e\}$, тогда равенство (13.30) равносильно следующему равенству:

$$ x_1 \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1} + x_2 \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2} + \cdots + x_n \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.31} $$

Равенство (13.31) означает, что $y \in L(({}_{\{f\}}A_{\{e\}})_{\square 1}, ({}_{\{f\}}A_{\{e\}})_{\square 2}, \ldots, ({}_{\{f\}}A_{\{e\}})_{\square n})$. Тем самым мы доказали, что

$$ \operatorname{Im} A = L\left(\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1}, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2}, \ldots, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n}\right). \tag{13.32} $$

Заметим, что левая часть в равенстве (13.32) не зависит от выбора базисов $\{e\}$, $\{f\}$, значит, и правая часть в (13.32) не зависит от выбора базисов $\{e\}$, $\{f\}$. Из (13.32) следует, что

$$ \dim \operatorname{Im} A = \dim L\left(\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1}, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2}, \ldots, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n}\right) = \operatorname{rang} {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \overset{(13.26)}{=} \operatorname{rang} A, \tag{13.33} $$

а базис $\operatorname{Im} A$ образуют базисные столбцы матрицы линейного оператора.

Из формул (13.27) и (13.33) следует равенство

$$ \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim L_1, \tag{13.34′} $$

которое устанавливает связь между $\dim \operatorname{Ker} A$, $\dim \operatorname{Im} A$ и $\dim L_1$ (размерностью пространства, из которого действует линейный оператор).

### 13.5.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $A$ — линейный оператор, действующий из $L_1$ в $L_2$. Рассмотрим однородное уравнение

$$ Ax = \vec{0} \tag{13.34} $$

и неоднородное уравнение

$$ Ax = y, \qquad y \neq \vec{0}, \tag{13.35} $$

порожденные оператором $A$. После фиксации базисов $\{e\}$ и $\{f\}$ в $L_1$ и $L_2$ соответственно, уравнение (13.34) превращается в ОСЛУ:

$$ {}_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = \vec{0}, \tag{13.36} $$

а неоднородное уравнение (13.35) в СЛУ:

$$ {}_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.37} $$

Вспоминая факты, известные для ОСЛУ и СЛУ, получаем следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 13.6**
Однородное уравнение (13.34) всегда имеет решения, при этом, если $\operatorname{rang} A = \dim L_1$, это уравнение имеет только нулевое решение, а если $\operatorname{rang} A < \dim L_1$, уравнение (13.34) имеет $k = \dim L_1 - \operatorname{rang} A$ линейно независимых решений $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые могут быть найдены как ФСР ОСЛУ (13.36). Общее решение уравнения (13.34) — $x_{\text{общ.одн.}}$ может быть записано в следующем виде:

$$x_{\text{общ.одн.}} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{P}. \tag{13.38}$$

**ТЕОРЕМА 13.7**
Неоднородное уравнение (13.35) имеет решения тогда и только тогда, когда $y \in \operatorname{Im} A$ и в этом случае общее решение этого уравнения — $x_{\text{общ.неод.}}$ может быть записано в виде:

$$x_{\text{общ.неод.}} = x_{\text{частн.неод.}} + x_{\text{общ.одн.}} \tag{13.39}$$

Заметим, что условие $y \in \operatorname{Im} A$ сводится к равенству рангов матрицы системы (13.37) и расширенной матрицы системы (13.37) (см. теорему 11.6 Кронекера–Капелли).

«Работа» сформулированных здесь теорем 13.6 и 13.7 будет продемонстрирована в разделе «Дифференциальные уравнения».

## Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры нелинейных операторов.
2. Как изменится матрица линейного оператора $A$ — ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$, если:
   а) в базисе $\{e\}$ поменять местами два вектора?
   б) в базисе $\{f\}$ поменять местами два вектора?
   в) в базисе $\{e\}$ $i$-й базисный вектор умножить на число $\alpha \neq 0$?
   г) в базисе $\{f\}$ $j$-й базисный вектор умножить на число $\beta \neq 0$?
3. Приведите примеры, доказывающие, что для собственного значения линейного оператора его кратность как корня характеристического уравнения и размерность подпространства собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, между собой не связаны.
4. Почему при доказательстве теоремы 13.2, делая допущение о линейной зависимости $x_1$, $x_2$, мы утверждаем, что в равенстве (13.14) $\mu \neq 0$?
5. Можно ли выделить случай, когда кратность собственных значений как корней характеристического уравнения однозначно определяет размерность подпространств собственных векторов?
   (Ответ сравните с ответом на вопрос 3.)
6. Докажите, что подпространство $\operatorname{Ker} A$ линейного оператора $A$, действующего из $L$ в $L$, совпадает с подпространством собственных векторов оператора $A$, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$.

# XIV

# КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Теория квадратичных форм, введение в которую мы сейчас изложим, возникла в первую очередь как аппарат, необходимый в аналитической геометрии при исследовании кривых и поверхностей второго порядка. В последующем она была применена в математическом анализе при решении задач на экстремум для функции многих переменных.

## § 14.1. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ МАТРИЦЫ

**Определение 14.1.** *Квадратичной формой от вещественных переменных* $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ *называют функцию* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *заданную равенством*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{14.1}$$

Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то дополнительно полагают, что

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{14.2}$$

Матрицу $A_F = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, образованную коэффициентами $a_{ij}$, называют матрицей квадратичной формы.

*ПРИМЕР 14.1.* Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_2x_4 + 2x_3x_4 - x_4^2;$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5/2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3/2 \\ -5/2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что из условия (14.2) следует, что матрица квадратичной формы симметрическая, т. е. $A_F = A_F^t$.

Ранг матрицы $A_F$ называют рангом квадратичной формы, т. е.

$$\operatorname{rang} F \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rang} A_F. \tag{14.3}$$

В случае, когда $\operatorname{rang} F$ равен числу переменных, форма называется невырожденной.

Если ввести в рассмотрение вектор-столбец $\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то, используя правила умножения матриц, получаем, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}^t \cdot A_F \cdot \vec{x}. \tag{14.4}$$

Последнее называют матричной записью квадратичной формы.

Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирован какой-то базис $\{e\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, тогда вектор $\vec{x}$ можно считать координатами точки в $\mathbb{R}^n$ в этом базисе и квадратичная форма $F$ задает формулой (14.4) отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$.

Введем более аккуратные обозначения. $(A_F)_{\{e\}}$ — матрица квадратичной формы в базисе $\{e\}$, $(\vec{x})_{\{e\}}$ — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{e\}$.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\vec{x})^t_{\{e\}} \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot (\vec{x})_{\{e\}}\,. \tag{14.4$'$}$$

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ другой базис — $\{f\} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$, тогда

$$(\vec{x})_{\{e\}} = {}_{\{e\}}T_{\{f\}}\,(\vec{x})_{\{f\}}\,.$$

Подставляя последнее соотношение в правую часть (14.4′), получаем

$$\begin{aligned}\left({}_{\{e\}}T_{\{f\}} \cdot (\vec{x})_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}\,(\vec{x})_{\{f\}} &= \\ = \left((\vec{x})^t_{\{f\}} \cdot \left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t\right)(A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}\,(\vec{x})_{\{f\}} &= \\ = (\vec{x})^t_{\{f\}} \cdot \left(\left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)(\vec{x})_{\{f\}}\,.&\end{aligned}$$

Мы получили, что

$$(A_F)_{\{f\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}. \tag{14.5}$$

Формула (14.5) называется формулой преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса.

## § 14.2. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

**Определение 14.2.** *Говорят, что квадратичная форма $F$ в базисе $\{f\}$ имеет канонический вид, если матрица квадратичной формы в этом базисе $(A_F)_{\{f\}}$ диагональна ($\Leftrightarrow$ в записи квадратичной формы отсутствуют произведения разных переменных).*

**ТЕОРЕМА 14.1**
Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.

● Метод, применяемый при доказательстве, называется методом выделения полных квадратов. Метод этот алгоритмичен, т. е. состоит из отдельных шагов, и шагов этих для достижения результата выполняется конечное число. Шаги метода двух типов:

а) «выделение полного квадрата», б) «создание квадрата переменной». Опишем каждый шаг отдельно:

**Шаг а)** применяется к квадратичной форме, если существует такая переменная $x_{i_0}$, для которой $a_{i_0 i_0} \neq 0$ и существует $a_{i_0 j} \neq 0$, $j \neq i_0$. Легко проверить, что выражение

$$a_{i_0 i_0}^{-1}\left(a_{i_0 i_0}x_{i_0} + a_{i_0 1}x_1 + a_{i_0 2}x_2 + \cdots + a_{i_0 i_0-1}x_{i_0-1} + \right.$$
$$\left. + a_{i_0 i_0+1}x_{i_0+1} + \cdots + a_{i_0 n}x_n\right)^2 = a_{i_0 i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}x_j\right)^2$$

является квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$, содержащей такие же члены с переменной $x_{i_0}$, как и исходная квадратичная форма $F(x_1, \ldots, x_n)$, поэтому разность

$$g(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) - a_{i_0 i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}x_j\right)^2$$

является квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n$. Тогда

$$F(x_1, \ldots, x_n) = a_{i_0 i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}x_j\right)^2 + g(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n).$$

Обозначим $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2, \ldots, x'_{i_0-1} = x_{i_0-1}$, $x'_{i_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}x_j\right)$, $x'_{i_0+1} = x_{i_0+1}$, $\ldots$, $x'_n = x_n$. Тогда в переменных $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ форма примет вид

$$a_{i_0 i_0}^{-1}\left(x'_{i_0}\right)^2 + g(x'_1, \ldots, x'_{i_0-1}, x'_{i_0+1}, \ldots, x'_n).$$

Переход к переменным $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ это замена базиса с матрицей перехода от старого базиса к новому, имеющей следующий вид:

$$\begin{array}{c} \\ i_0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & i_0 & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \ldots & a_{i_0 i_0-1} & a_{i_0 i_0} & a_{i_0 i_0+1} & \ldots & a_{i_0 n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В переменных $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ форма содержит квадрат переменной $x'_{i_0}$ и не содержит слагаемых вида $a_{i_0 j}x'_{i_0}x'_j$, $j \neq i_0$.

**Шаг б)** применяется к квадратичной форме, когда все $a_{ii} = 0$ и существует хотя бы один коэффициент $a_{i_0 j_0} \neq 0$, $i_0 \neq j_0$.

В этом случае осуществим переход к переменным $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ по формулам

$$\begin{aligned} x_k &= x'_k, && k \neq i_0, j_0 \\ x_{i_0} &= x'_{i_0} + x'_{j_0}, \\ x_{j_0} &= x'_{i_0} - x'_{j_0}. \end{aligned}$$

Матрица перехода от переменных $x'_1, \ldots, x'_n$ к переменным $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & i_0 & & & & j_0 & & \\
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\multicolumn{12}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\multicolumn{12}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\multicolumn{12}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

В результате такой замены возникают квадраты переменных $x'_{i_0}$ и $x'_{j_0}$, так как $(x'_{i_0} + x'_{j_0})(x'_{i_0} - x'_{j_0}) = (x'_{i_0})^2 - (x'_{j_0})^2$.

Опишем алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду, использующий шаги а) и б).

Предварительно, пока это возможно, применяются шаги типа а), если применение шага а) невозможно, то применяется один шаг типа б) и снова возвращаются к применению шагов типа а). Невозможность выполнения шагов типа а) и б) возникает в случае, когда форма приведена к каноническому виду. Процесс обязательно обрывается, так как после каждого шага типа а) число переменных, «находящихся в работе» (т. е. подлежащих преобразованию), уменьшается по крайней мере на единицу. ●

● *ПРИМЕР 14.2.* Привести форму $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ к каноническому виду. Найти матрицу перехода от исходного базиса к базису, в котором форма имеет канонический вид.

● Так как к форме $2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ шаг типа а) неприменим, то применим шаг типа б):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x'_1 + x'_2, \\
x_2 &= x'_1 - x'_2, \\
x_3 &= x'_3.
\end{aligned}
$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
F(x'_1, x'_2, x'_3) = 2(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) - 6(x'_1 - x'_2)x'_3 + \\
+ 2(x'_1 + x'_2)x'_3 = 2\left(x'_1\right)^2 - 2\left(x'_2\right)^2 - 4x'_1x'_3 + 8x'_2x'_3.
\end{aligned}
$$

Выполним то же самое в матричном виде

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad {}_{\{e\}}T_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
(A_F)_{\{e'\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}},
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим теперь шаг а) по переменной $x_1'$.

$$2(x_1' - x_3')^2 - 2(x_3')^2 - 2(x_2')^2 + 8x_2'x_3'.$$

Заменим переменные по формулам

$$\begin{array}{l} x_1'' = x_1' - x_3', \\ x_2'' = x_2', \\ x_3'' = x_3'. \end{array} \qquad \text{т. е.} \qquad {}_{\{e''\}}T_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F(x_1'', x_2''x_3'') = 2(x_1'')^2 - 2(x_2'')^2 - 2(x_3'')^2 + 8x_2''x_3''.$$

Найдем матрицу ${}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} = \left({}_{\{e''\}}T_{\{e'\}}\right)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_1 := c_1 + c_3 \\ \sim \\ c_2 := c_2 \\ c_3 := c_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$${}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним переход от переменных $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ к переменным $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выполним еще один шаг типа а) по переменной $x_2''$.

$$2(x_1'')^2 - 2(x_2'' - 2x_3'')^2 + 8(x_3'')^2 - 2(x_3'')^2 = 2(x_1'')^2 - 2(x_2'' - 2x_3'')^2 + 6(x_3'')^2.$$

Введем переменные

$$\begin{array}{l} x_1''' = x_1'', \\ x_2''' = x_2'' - 2x_3'', \\ x_3''' = x_3'', \end{array}$$

имеем

$$F(x_1''', x_2''', x_3''') = 2(x_1''')^2 - 2(x_2''')^2 + 6(x_3''')^2.$$

Это — форма канонического вида.

Вычислим ${}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}}$.

$$ {}_{\{e'''\}}T_{\{e''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

тогда

$$ {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e'''\}}T_{\{e''\}}\right)^{-1}; $$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_1 := c_1 \\ c_2 := c_2 + 2c_3 \\ c_3 := c_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), $$

$$ {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Выполним последний шаг в матричном виде:

$$ (A_F)_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e''\}} \cdot {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. $$

Найдем теперь ${}_{\{e\}}T_{\{e'''\}}$.

$$ {}_{\{e\}}T_{\{e'''\}} = {}_{\{e\}}T_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} \cdot {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. $$

Проверка

$$ (A_F)_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{e'''\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'''\}} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. $$ ●

В упрощении квадратичной формы от канонического вида можно пойти дальше — к нормальному виду, т. е. так изменить масштаб, чтобы в новом базисе коэффициенты при квадратах присутствующих переменных были равны $\pm 1$.

Очевидно, справедлива

**ТЕОРЕМА 14.2**
Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет нормальный вид.

● *ПРИМЕР 14.3.* Продолжим пример 14.1 и приведем форму к нормальному виду.

● Очевидно, достаточно перейти от базиса $\{e'''\}$ к базису $\{e''''\}$, положив

$$ {}_{\{e'\}}T_{\{e'''\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}; $$

$$ (A_F)_{\{e''''\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$ ●

## § 14.3. КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ. ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ ФОРМЫ

Ясно, что любая квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает свойством:

$$F(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

**Определение 14.3.** *Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если на любом ненулевом наборе значений переменных она принимает положительное (отрицательное) значение.*

Ясно, что для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее каноническом виде присутствовали квадраты всех ее переменных и все коэффициенты при квадратах переменных были положительны (отрицательны).

Мы видели (пример 14.2), что приведение формы к каноническому виду — дело трудоемкое, и, значит, сказанное выше малоэффективно.

Оказывается, можно провести анализ квадратичной формы на положительную (отрицательную) определенность, не приводя форму к каноническому виду.

Пусть

$$(A_F)_{\{e\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица квадратичной формы в некотором базисе.

Введем в рассмотрение следующий набор чисел

$$M_1(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}, \quad M_2(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_3(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad M_n(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det (A_F)_{\{e\}}.$$

Этот набор чисел $(M_1(A_F), M_2(A_F), \dots, M_n(A_F))$ называют набором главных миноров квадратичной формы $F$.

**ТЕОРЕМА 14.3 (Критерий Сильвестра[1])**
Для того чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее наборе главных миноров все числа были положительны (чтобы в ее наборе главных миноров происходило чередование знаков, начиная с минуса, т. е. $M_1(A_F) < 0$, $M_2(A_F) > 0$, $M_3(A_F) < 0$, $M_4(A_F) > 0$, ...).

● *ПРИМЕР 14.4.* Исследовать на знаковую определенность квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 + 6x_4^2.$$

● Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$(A_F)_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_1(A_F) = 2 > 0, \quad M_2(A_F) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0,$$

[1] Сильвестр Дж. (1814–1897) — английский математик, член Лондонского королевского общества, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, окончил Кембриджский университет, одно время был адвокатом, затем преподавал в английских университетах, работал в страховой компании математиком. С 1876 г. по 1881 г. — профессор в университете г. Балтимор (США), с 1884 года заведовал кафедрой в Оксфордском университете (Великобритания). Областями деятельности Сильвестра были алгебра, теория чисел, теория вероятностей, механика, математическая физика. Наиболее интересные результаты получены им в теории квадратичных форм, в том числе критерии знаковой определенности, носящие его имя.

$$M_3(A_F) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = 36 + 4 + 4 - 12 - 24 - 2 = 6 > 0$$

По критерию Сильвестра форма $F$ положительно определена.

Для проверки приведем форму к каноническому виду:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2 = \\ = 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2 = \\ = 2(x_1')^2 + (x_2')^2 + 2x_2'x_3' + 4(x_3')^2 = \\ = 2(x_1')^2 + (x_2' + x_3')^2 + 3(x_3')^2 = 2(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + 3(x_3'')^2. \end{aligned}$$

Ясно, что форма положительно определена, так как в ее каноническом виде все коэффициенты положительны. ●

Для квадратичных форм можно говорить не только о знаковой определенности, но и о полуопределенности.

**Определение 14.4.** *Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), если $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ ($F(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$) на любом наборе значений переменных.*

Критерий положительной (отрицательной) полуопределенности похож на критерий положительной (отрицательной) определенности.

**ТЕОРЕМА 14.4**

Для того чтобы квадратичная форма была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны.

**ТЕОРЕМА 14.5**

Для того чтобы квадратичная форма $F(x_1, \ldots, x_n)$ была отрицательно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы $M_1(A_F) \leqslant 0$, $M_2(A_F) \geqslant 0$, $M_3(A_F) \leqslant 0$, ....

Сведем результаты теорем 14.3, 14.4, 14.5 в таблицу, дающую классификацию квадратичных форм:

| Тип формы | Поведение главных миноров |
|---|---|
| Положительно определенная | Все главные миноры положительны |
| Положительно полуопределенная | Все главные миноры неотрицательны |
| Отрицательно определенная | $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \ldots,$ |
| Отрицательно полуопределенная | $M_1 \leqslant 0, M_2 \geqslant 0, M_3 \leqslant 0, \ldots,$ |
| Неопределенная | В случаях, отличных от вышеприведенных |

## Контрольные вопросы и задания

1. Проверьте справедливость матричной записи квадратичной формы:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x)_{\{e\}} \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot \vec{x},$$

где

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = (x)_{\{e\}}.$$

2. Проверьте, является квадратичная форма

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_3^2$$

вырожденной или невырожденной.

3. Единственным ли образом можно привести квадратичную форму к каноническому виду, используя метод выделения полных квадратов? Объясните.
4. Что можно сказать о знакоопределенности квадратичной формы

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x_n^2 \ ?$$

# II

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

# XV

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

В этой главе содержатся сведения и результаты из того раздела математики, который имеет теперь собственное название «Дискретная математика» и получил в настоящее время бурное развитие и широкие приложения.

Те сведения из дискретной математики, которые мы здесь приводим, будут необходимы нам в дальнейшем как вспомогательный аппарат, удобный язык и символика, без которых дальнейшее изложение последующих разделов нашего курса, особенно математического анализа, теории вероятностей, было бы затруднено.

## § 15.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Высказывание — основное математическое понятие и, значит, неопределяемое. Под высказыванием мы понимаем связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

*ПРИМЕР 15.1.*

1. «$2 \times 2 = 4$» — истинное высказывание.
2. «Российская федерация — государство, находящееся в Африке» — ложное высказывание.
3. «Да здравствуют студенты российских университетов!» — не высказывание, так как не является повествовательным предложением.
4. «$x < 2$, $x$ — вещественное число» — не является высказыванием, хотя является повествовательным предложением.
5. «Кино при иду» — не является высказыванием, так как несвязно, но повествовательно (в конце предложения стоит точка).

В данной главе мы будем заниматься алгеброй высказываний, а не их внутренним содержанием. Нас не будет интересовать, о чем идет речь в высказывании, а будет интересовать его значение истинности.

Введем следующие обозначения: если $a$ — высказывание, то $\hat{a}$ будем обозначать его значение истинности и будем писать

$$\hat{a} = \begin{cases} 1 \quad (\text{и}, t), & \text{если } a \text{ — истинное высказывание} \\ 0 \quad (\text{л}, f), & \text{если } a \text{ — ложное высказывание.} \end{cases}$$

Все истинные высказывания для нас будут фактически взаимно-заменяемыми, тоже самое можно сказать о ложных высказываниях.

**Определение 15.1.** *Два высказывания $a$ и $b$ называют равносильными и пишут $a \equiv b$, если $\hat{a} = \hat{b}$.*

*ПРИМЕР 15.2.* «$2 \times 2 = 4$» $\equiv$ «Франция — европейское государство».

В любом языке (русском, английском, французском и т. д.) существуют стандартные связки, которые позволяют из связных повествовательных предложений строить новые связные повествовательные предложения. В алгебре высказываний таким связкам соответствуют логические операции, к определению которых мы переходим.

**Отрицание** — логическая операция, соответствующая конструкции «Неверно, что . . . ».

**Определение 15.2.** *Отрицанием высказывания $a$ называется высказывание, обозначаемое $\bar{a}$ ($\neg a$), значение истинности которого противоположно значению истинности высказывания $a$. (См. табл. справа).*

| $\hat{a}$ | $\hat{\bar{a}}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Ясно, что справедлива равносильность

$$\bar{\bar{a}} \equiv a, \tag{15.1}$$

называемая законом двойного отрицания.

**Дизъюнкция** — логическая операция, соответствующая конструкции «. . . . . или _ _ _.».

**Определение 15.3.** *Дизъюнкцией высказываний $a$, $b$ называется высказывание, обозначаемое $a \vee b$, которое ложно только в одном случае — когда ложны оба высказывания, образующие дизъюнкцию. (См. табл. справа.)*

| $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\widehat{a \vee b}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Конъюнкция** — логическая операция, соответствующая конструкции «. . . . . и _ _ _.».

**Определение 15.4.** *Конъюнкцией высказываний $a$, $b$ называется высказывание, обозначаемое $a \cdot b$ ($ab$, $a \wedge b$, $a\&b$), которое истинно только в одном случае — когда истинны оба высказывания, образующие конъюнкцию. (См. табл. справа.)*

| $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\widehat{a \cdot b}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Эти три операции алгебры высказываний называются булевыми в честь английского математика Дж. Буля[1].

[1] Буль Джордж (1815–1864) — английский математик, основоположник математической логики. Работал учителем в школе, самостоятельно изучил математический анализ, за свои оригинальные работы в области анализа был избран профессором математики Куинс-Колледжа. Основная работа Дж. Буля — «Исследование законов мышления» (1854 г.), в ней он предпринял попытку построения формальной логики на основании некоторой алгебры высказываний. Логические идеи Дж. Буля в XX веке нашли широкое приложение к технике, в частности в теории релейно-контактных схем, они же получили и свое развитие в современной алгебре — булевы кольца, булевы алгебры и т. п. Одна из пяти дочерей Дж. Буля — Этель Лилиан (Войнич) — автор романа «Овод».

**ТЕОРЕМА 15.1**

Во множестве высказываний справедливы следующие 19 булевых равносильностей:

1) $\bar{\bar{a}} \equiv a$ — закон двойного отрицания
2) $a \vee b \equiv b \vee a$ } коммутативные законы
3) $a \cdot b \equiv b \cdot a$ }
4) $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c \stackrel{\text{def}}{=} a \vee b \vee c$ } ассоциативные законы
5) $a \cdot (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) \cdot c \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b \cdot c$ }
6) $a \cdot (b \vee c) \equiv a \cdot b \vee a \cdot c$ } дистрибутивные законы
7) $a \vee b \cdot c \equiv (a \vee b) \cdot (a \vee c)$ }

(Мы считаем, что конъюнкция «сильнее» дизъюнкции, т. е. $a \vee (b \cdot c) \stackrel{\text{def}}{=} a \vee b \cdot c$.)

8) $\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b}$ } законы де Моргана
9) $\overline{a \cdot b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$ }
10) $a \vee a \equiv a$ } законы идемпотентности
11) $a \cdot a \equiv a$ }
12) $a \vee 0 \equiv a$ }
13) $a \cdot 1 \equiv a$ } законы «0» и «1»
14) $a \vee 1 \equiv 1$ }
15) $a \cdot 0 \equiv 0$ }
16) $a \vee \bar{a} \equiv 1$ — закон исключенного третьего
17) $a \cdot \bar{a} \equiv 0$ — закон противоречия
18) $a \vee a \cdot b \equiv a$ } законы поглощения
19) $a \cdot (a \vee b) \equiv a$ }

● Любую из этих 19 равносильностей можно доказать, построив таблицу истинности. Построим, например, таблицу, доказывающую 2-й дистрибутивный закон:

| $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\hat{c}$ | $\widehat{bc}$ | $\widehat{a \vee bc}$ | $\widehat{a \vee b}$ | $\widehat{a \vee c}$ | $\widehat{(a \vee b)(a \vee c)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

●

**Импликация** — логическая операция, соответствующая конструкции «Если . . . . . , то _ _ _.».

**Определение 15.5.** *Импликацией высказывания $a$ (называемого посылкой) в высказывание $b$ (называемое заключением) называется высказывание, обозначаемое $a \to b$, которое ложно только в одном случае — когда посылка является истинным высказыванием, а заключение — ложным. (См. табл. справа)*

| $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\widehat{a \to b}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Ясно, что импликация — некоммутативная операция.

Определение импликации таково, что она ложна только в одном случае, когда посылка истинна, а заключение ложно. В разумности такого определения импликации нас убеждает следующий пример. Рассмотрим утверждение, в истинности которого мы

не сомневаемся: «Если натуральное число $n$ делится на 4, то оно (натуральное число $n$) делится на 2». Пусть $a(n) =$ «натуральное число $n$ делится на 4», $b(n) =$ $=$ «натуральное число $n$ делится на 2», тогда вся импликация $\mathcal{J}(n) \equiv a(n) \to$ $\to b(n)$ истинна при любом натуральном $n$. Фиксируя $n = 1$, мы реализуем верхнюю строчку таблицы импликации, при $n = 2$ реализуется вторая строка таблицы, при $n = 4$ — нижняя строка. Справедливость теоремы «Если натуральное число делится на 4, то оно делится на 2» и означает, что нельзя подобрать такое $n$, при котором реализуется третья строка в таблице импликации. На этом основан один из мощных методов доказательства теорем, имеющих конструкцию «Если $A$, то $B$», — метод доказательства от противного. Этот метод состоит в следующем: «Допустим, что теорема неверна, тогда должна быть реализуема ситуация

$$\begin{cases} \hat{A} = 1, \\ \hat{B} = 0. \end{cases}$$

Далее проводим анализ, и если он приводит к ситуации, при которой одно и то же высказывание оказывается истинным и ложным (а каждое высказывание — либо истина, либо ложь), то мы говорим, что получено противоречие в результате нашего допущения о том, что «теорема несправедлива», значит, она «справедлива».

В том случае, когда $A \to B \equiv 1$, говорят, что $B$ является логическим следствием посылки $A$ и пишут $A \Rightarrow B$, а сам знак $\Rightarrow$ называют логическим следованием. Если $A \Rightarrow B$, то $A$ называют достаточным условием для $B$ (так как $\hat{A} = 1$ означает, что и $\hat{B} = 1$, но если $A \Rightarrow B$ и $\hat{A} = 0$, никакого суждения о истинности или ложности $B$ сделать нельзя). Если $A \Rightarrow B$, то $B$ называют необходимым условием $A$ (так как $\hat{B} = 0$ означает, что и $\hat{A} = 0$, но если $\hat{B} = 1$ и $A \Rightarrow B$, никакого суждения о истинности или ложности $A$ сделать нельзя).

Очевидно, имеет место равносильность

$$a \to b \equiv \bar{a} \vee b. \tag{15.2}$$

(Проверьте ее самостоятельно, построив соответствующую таблицу истинности.)

**Эквиваленция** — логическая операция, соответствующая конструкции «..... тогда и только тогда, когда _ _ _.». («Для выполнения ..... необходимо и достаточно, чтобы было выполнено _ _ _.».)

**Определение 15.6.** *Эквиваленцией высказываний $a$, $b$ называется высказывание, обозначаемое $a \sim b$, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания, образующие эквиваленцию, имеют одинаковые значения истинности. (См. табл. справа.)*

| $\hat{a}$ | $\hat{b}$ | $\widehat{a \sim b}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Очевидно, имеет место равносильность

$$a \sim b \equiv (a \to b)(b \to a) \overset{(15.1)}{\equiv} (\bar{a} \vee b)(a \vee \bar{b}) \equiv a \cdot b \vee \bar{a} \cdot \bar{b}, \tag{15.3}$$

(проверьте ее самостоятельно, построив соответствующую таблицу истинности).

В том случае, когда $a \sim b \equiv 1$, пишут $a \Leftrightarrow b$, а сам знак $\Leftrightarrow$ называют знаком равносильности. В силу (15.1) имеем, что $a \Leftrightarrow b$ то же самое, что $(a \Rightarrow b)(b \Rightarrow a)$ и для доказательства теоремы $a \Leftrightarrow b$ можно доказать, что справедливы две теоремы: $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$. В конструкции $a \Leftrightarrow b$ $b$ называют необходимым и достаточным условием $a$, поэтому теорема $b \Rightarrow a$ называется «достаточность условия $b$ для $a$», $a \Rightarrow b$ называется «необходимость условия $b$ для $a$».

## § 15.2. ПОНЯТИЕ О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМАХ

Рассмотрим теорему $A \Rightarrow B$, образуем конструкцию $B \Rightarrow A$, она называется обратной теоремой к теореме $A \Rightarrow B$, а сама теорема $A \Rightarrow B$ — прямой.

*ПРИМЕР 15.3.* Рассмотрим теорему Пифагора: «Если треугольник прямоугольный, то квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Обратная теорема будет звучать так: «Если квадрат большей стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный». Ясно, что вместе с теоремой Пифагора справедлива и обратная к ней теорема.

Следующие примеры показывают, что такое бывает далеко не всегда.

Прямая теорема — «Если натуральное число делится на 4, то оно делится на 2». Ясно, что она справедлива. Обратная теорема — «Если натуральное число делится на 2, то оно делится на 4». Она, конечно, неверна.

Приведем еще пример, когда не верна прямая теорема, но верна обратная. Прямая теорема — «Если треугольники имеют одинаковые площади, то они равны». Обратная теорема — «Если треугольники равны, то они имеют одинаковые площади».

## § 15.3. ПРЕДИКАТЫ И КВАНТОРЫ

Вернемся к примеру 15.1 п. 4 $P(x) =$ «$x < 2$, $x$ — вещественное число». Ясно, что $P(x)$ — связное повествовательное предложение, содержащее переменную и обладающее свойством превращаться в высказывание (т. е. принимать значение истинности во множестве $\{0,1\}$) при подстановке вместо переменной любого конкретного значения. Действительно, $\hat{P}(-1) = 1$, $\hat{P}(0,001) = 1$, $\hat{P}(2) = 0$, $\hat{P}(10^6) = 0$.

**Определение 15.7.** *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные произвольной природы (числовые, нечисловые) и пусть наборы значений переменных выбираются (принадлежат) некоторому множеству $\Omega$. Говорят, что на множестве $\Omega$ задан $n$-местный предикат $P$, если задано отображение $P$ множества $\Omega$ во множество высказываний, иными словами $n$ — местный предикат переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенный на $\Omega$ — это связное повествовательное предложение, содержащее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обладающее свойством превращаться в высказывание, когда вместо переменных подставлены значения из набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Omega$.*

*ПРИМЕР 15.4.*

1. $Q(x,y) =$ «$x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$.» — двуместный предикат.
2. $R(x,y,z) =$ «$x^2 + y^2 = z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.» — трехместный предикат.
3. $Q(x) =$ «Человек $x$ родился в 1975 г.» — одноместный предикат, определенный на множестве людей.

С каждым предикатом $P$ связано два множества: $P^{-1}(\{1\})$ — множество всех тех наборов значений переменных, на которых предикат принимает значение истинности, равное 1, $P^{-1}(\{0\})$ — множество всех тех наборов значений переменных, на которых предикат принимает значение истинности, равное 0.

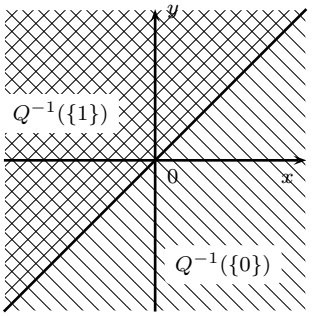



Рис. 15.1.

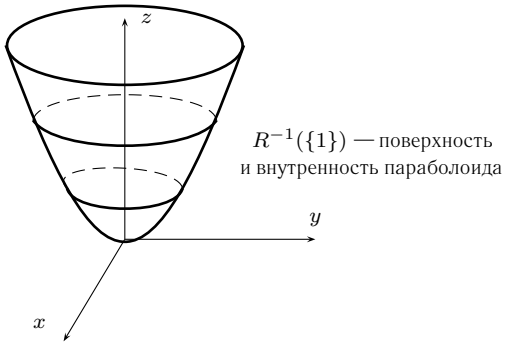



Рис. 15.2.

Изобразим эти множества для примеров 15.4 1, 15.4 2 (см. рис. 15.1, 15.2).

Пример 15.4.3 показывает, что далеко не все и не всегда можно нарисовать.

Поскольку предикаты принимают значения во множестве высказываний, то логические операции естественным образом переносятся на предикаты.

Кроме логических операций $\neg$, $\vee$, $\&$, $\to$, $\sim$ во множестве предикатов определены еще две операции — навешивание квантора всеобщности и навешивание квантора существования.

**Определение 15.8.** *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, определенный на $\Omega$. Обозначим через $\forall x\ P(x)$ (читается «для любого $x$ «пэ» от $x$») высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда предикат $P$ тождественно истинный (т. е. принимающий значение истинности, равное 1, в каждой точке области определения $\Omega$). (Знак $\forall$ — перевернутое A — первая буква слова All — все (англ.).)*

**Определение 15.9.** *Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, определенный на $\Omega$. Обозначим через $\exists x\ P(x)$ (читается «существует $x$ «пэ» от $x$») высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда предикат $P$ тождественно ложен на $\Omega$. (Знак $\exists$ — перевернутое E — первая буква слова Exist — существовать (англ.).)*

Таким образом, кванторы $\forall$ и $\exists$ являются отображениями множества одноместных предикатов во множество высказываний ($\Leftrightarrow$ 0-местных предикатов).

Что значит навесить квантор всеобщности по переменной $x_i$ на $P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$? Это означает, что нужно зафиксировать значения всех переменных, кроме $x_i$, и на полученный одноместный предикат переменной $x_i$ навесить квантор всеобщности, тогда квантор $\forall$, навешиваемый по переменной $x_i$, сопоставляет каждому набору переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ высказывание, т. е. $\forall x_i\ P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой предикат от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Аналогично навешивается квантор существования по $i$-й переменной в многоместном предикате.

*ПРИМЕР 15.5.* Пусть $R(x, y) = «x < y;\ x, y \in \mathbb{R}.»$. Тогда $\forall x\ \forall y\ R(x, y)$ — ложное высказывание, $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$ — истинное высказывание, $\exists y\ \forall x\ R(x, y)$ — ложное высказывание, $\exists x\ \forall y\ R(x, y)$ — ложное высказывание, $\forall y\ \exists x\ R(x, y)$ — истинное высказывание.

Попутно мы доказали, что *разноименные кванторы не коммутируют*.

**ТЕОРЕМА 15.2**

Имеют место следующие основные равносильности, содержащие кванторы:

1. $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y)$ } коммутация одноименных
2. $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y)$ } кванторов
3. $\overline{\forall x\ P(x)} \equiv \exists x\ \overline{P(x)}$ } законы де Моргана для кванторов
4. $\overline{\exists x\ P(x)} \equiv \forall x\ \overline{P(x)}$ } законы де Моргана для кванторов
5. $\forall x\ (P(x)\cdot Q(x)) \equiv \forall x\ P(x)\cdot \forall x\ Q(x)$ } дистрибутивные законы
6. $\exists x\ (P(x)\vee Q(x)) \equiv \exists x\ P(x)\vee \exists x\ Q(x)$ } дистрибутивные законы
7. $\forall x\ (P(x)\vee Q(y)) \equiv \forall x\ P(x)\vee Q(y)$ } законы ограничения действия квантора
8. $\exists x\ (P(x)\cdot Q(y)) \equiv \exists x\ P(x)\cdot Q(y)$ } законы ограничения действия квантора
9. $\exists y\ \forall x\ (P(x,y)) \ \to\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) \equiv 1$

●

●$_1$ Пусть левая часть в 1) — истина $\Leftrightarrow$ $\forall y\ P(x,y)$ тождественно истинный предикат переменной $x$ $\Leftrightarrow$ $\forall y\ P(x_0,y)$ — истинное высказывание, где $x_0$ — произвольно $\Leftrightarrow$ $P(x_0,y)$ — тождественно истинный предикат переменной $y$ $\Leftrightarrow$ $P(x_0,y_0)$ — истина, где $x_0$, $y_0$ — произвольная точка из $\Omega$, т. е. $P(x,y)$ — тождественно истинный предикат на $\Omega$. Ясно, что истинность правой части в 1 сводится к тому же самому.

●$_2$ доказывается аналогично предыдущему, только рассматривается случай, когда левая часть в 2 ложь и т. д.

●$_3$ Пусть левая часть в 3 — ложное высказывание $\Leftrightarrow$ $\forall x\ P(x)$ — истина $\overset{(15.8)}{\Leftrightarrow}$ $P(x)$ — тождественно истинный предикат $\Leftrightarrow$ $\overline{P(x)}$ — тождественно ложный предикат $\overset{(15.9)}{\Leftrightarrow}$ $\exists x\ \overline{P(x)}$ — ложное высказывание.

●$_4$ Равносильность 4 доказывается аналогично предыдущему.

●$_5$ Пусть левая часть в 5 — истинное высказывание $\overset{(15.9)}{\Leftrightarrow}$ $P(x)\cdot Q(x)$ — тождественно истинный предикат $\Leftrightarrow$ ($P(x)$ — тождественно истинный предикат) и ($Q(x)$ — тождественно истинный предикат) $\Leftrightarrow$ ($\forall x\ P(x)$ — истинное высказывание) и ($\forall x\ Q(x)$ — истинное высказывание) $\Leftrightarrow$ $\forall x\ P(x)\ \cdot\ \forall x\ Q(x)$ — истинное высказывание.

●$_6$
$$\exists x\ (P(x)\vee Q(x)) \equiv \overline{\overline{\exists x\ (P(x)\vee Q(x))}} \overset{2}{\equiv}$$
$$\equiv \overline{\forall x\ \overline{(P(x)\vee Q(x))}} \equiv \overline{\forall x\ \left(\overline{P(x)}\cdot\overline{Q(x)}\right)} \overset{5}{\equiv}$$
$$\equiv \exists x\ \overline{\left(\overline{P(x)}\cdot\overline{Q(x)}\right)} \equiv \exists x\ \left(\overline{\overline{P(x)}}\vee\overline{\overline{Q(x)}}\right) \equiv \exists x\ \big(P(x)\vee Q(x)\big).$$

●$_{7,8}$ Равносильности 7 и 8 докажите самостоятельно.

●$_9$ Докажем равносильность 9 от противного, тогда должен существовать такой предикат $P_0$, для которого

$$\exists y\ \forall x\ P_0(x,y) \ \longrightarrow\ \forall x\ \exists y\ P_0(x,y) \text{ — ложь} \quad \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \text{а)} & \exists y\ \forall x\ P_0(x,y) \quad \text{— истина} \\ \text{б)} & \forall x\ \exists y\ P_0(x,y) \quad \text{— ложь.} \end{cases}$$

Проанализируем отдельно а) и б).

а) $\exists y\ \forall x\ P_0(x,y)$ — истина $\Leftrightarrow$ $\forall x\ P_0(x,y)$ — не тождественно ложный предикат переменной $y$ $\Leftrightarrow$ есть хотя бы одно такое значение $y_0$, что $\forall x\ P(x,y_0)$ — истина $\Leftrightarrow$ $P(x,y_0)$ — тождественно истинный предикат переменной $x$.

б) $\forall x\ \exists y\ P_0(x,y)$ — ложь $\Leftrightarrow$ $\exists y\ P_0(x,y)$ — не тождественно истинный предикат переменной $x$ $\Leftrightarrow$ есть хотя бы одно такое значение $x_0$, что $\exists y\ P_0(x_0,y)$ — ложь $\Leftrightarrow$ $P_0(x_0,y)$ — тождественно ложный предикат переменной $y$.

Подставляя $y_0$, найденное в анализе а), в последнее утверждение из б), получаем

$$\widehat{P_0(x_0,y_0)} = 0. \tag{15.4}$$

Подставляя $x_0$, найденное в анализе б), в последнее утверждение в а), получаем

$$\widehat{P_0(x_0,y_0)} = 1. \tag{15.5}$$

(15.4) и (15.5) противоречат друг другу. ●

*Замечание 15.1.* Иногда знаки $\forall$ и $\exists$ будем использовать как стенографические.

## § 15.4. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Понятия множества и элемента множества будем считать первичными и не определяемыми (воспринимаемыми интуитивно).

● *ПРИМЕР 15.6.*

а) Пусть множество $[1;10]_N$ задается следующим предложением: «Множество натуральных чисел, не превосходящих 10». Его элементами являются 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и других элементов во множестве $[1;10]_N$ нет.

б) Пусть $B$ — множество вещественных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ясно, что элементами множества $B$ являются 1 и 2.

в) Пусть $C$ — множество вещественных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2 + 2x + 3 = 0$. Заметим, что множество $C$ не имеет элементов (так как $\mathcal{D} = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$), это так называемое пустое множество.

г) Пусть $\mathcal{E}$ — множество вещественных матриц размера $2 \times 2$ с определителем, равным 1 (так называемых унитарных матриц). Ясно, что $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ является элементом множества $\mathcal{E}$, $\left(\begin{smallmatrix}2&3\\0&1/2\end{smallmatrix}\right)$ является элементом множества $\mathcal{E}$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$ не является элементом множества $\mathcal{E}$. Очевидно, множество $\mathcal{E}$ — бесконечное множество. (Подумайте почему.)

Будем считать, что мы выбрали и зафиксировали достаточно широкое множество, за пределы которого не будем выходить, элементы всех множеств, которые мы будем рассматривать, одновременно являются элементами этого широкого фиксированного множества, называемого универсальным множеством. Для этого множества будем применять обозначение — $I$.

Пусть $A$ — некоторое множество. Говорят, что $A$ — задано, если относительно любого элемента $x \in I$ можно сказать, принадлежит или не принадлежит он множеству $A$.

Таким образом, с каждым множеством $A$ связан одноместный предикат $P_A(x)$, определенный на универсальном множестве:

$$P_A(x) \equiv \langle\langle\, x \in A \,\rangle\rangle \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ является элементом } A, \\ 0, & \text{если } x \text{ не является элементом } A. \end{cases}$$

**Определение 15.10.** *Два множества $A$ и $B$ называются равными (пишут $A = B$) тогда и только тогда, когда*

$$P_A(x) \equiv P_B(x).$$

Очевидно, что любой одноместный предикат $P(x)$, определенный на $I$, можно считать предикатом, порожденным множеством. Действительно, если положить $A_P =$ = «Множество всех элементов универсального множества, на которых предикат $P$ принимает значение истинного высказывания», т. е. $A_P = P^{-1}(\{1\})$, то $P_{A_P}(x) \equiv P(x)$. Последнее позволяет вводить операции над множествами, используя операции над предикатами.

**Определение 15.11.** *Дополнением ко множеству $A$ относительно универсального множества $I$ называется множество, обозначаемое $\bar{A}$, определяемое следующим:*

$$P_{\bar{A}}(x) \equiv \overline{P_A(x)}.$$

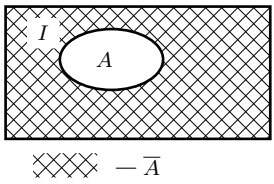



*Рис. 15.3.*

**Определение 15.12.** *Объединением множеств $A$ и $B$ называется множество, обозначаемое $A \cup B$, определяемое следующим:*

$$P_{A\cup B}(x) \;\equiv\; P_A(x) \vee P_B(x).$$

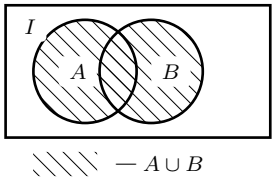



*Рис. 15.4.*

**Определение 15.13.** *Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество, обозначаемое $A \cap B$, определяемое следующим:*

$$P_{A\cap B}(x) \;\equiv\; P_A(x) \cdot P_B(x).$$

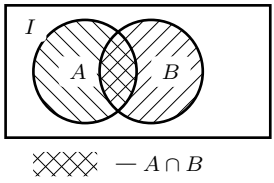



*Рис. 15.5.*

Наряду с универсальным множеством удобно иметь дело с его противоположностью — множеством, не содержащим элементов, — пустым множеством — $\varnothing$. Ясно, что

$P_I(x)$ — тождественно истинный предикат,
$P_\varnothing(x)$ — тождественно ложный предикат.

**ТЕОРЕМА 15.3**

Множества относительно операций дополнения, объединения, пересечения образуют булеву алгебру множеств, т. е. для них выполнены 19 основных равенств:

1. $\bar{\bar{A}} = A$ — закон двойного дополнения
2. $A \cup B = B \cup A$ } коммутативные законы
3. $A \cap B = B \cap A$ }
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \stackrel{\text{def}}{=} A \cup B \cup C$ } ассоциативные законы
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \cap C$ }
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } дистрибутивные законы
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ }
8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ } законы де Моргана
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ }
10. $A \cup A = A$ } законы идемпотентности
11. $A \cap A = A$ }
12. $A \cup I = I$ } законы $\varnothing$ и $I$
13. $A \cap \varnothing = \varnothing$ }
14. $A \cup \varnothing = A$ }
15. $A \cap I = A$ }
16. $A \cup (A \cap B) = A$ } законы поглощения
17. $A \cap (A \cup B) = A$ }
18. $A \cup \bar{A} = I$
19. $A \cap \bar{A} = \varnothing$

Доказательство следует из определения операций над множествами и того, что предикаты относительно $\neg$, $\vee$, $\wedge$ образуют булеву алгебру предикатов.

**Определение 15.14.** *Разностью множеств $A$ и $B$ называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ $(A - B)$, определяемое следующим:*

$$P_{A \setminus B}(x) \equiv P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)}.$$

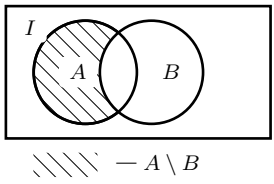



*Рис. 15.6.*

Очевидно, имеет место равенство

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

●

$$P_{A \setminus B}(x) \equiv P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)} \equiv P_A(x) \cdot P_{\bar{B}}(x) \equiv P_{A \cap \bar{B}}(x). \quad ●$$

Ясно, что разность множеств — некоммутативная операция. Действительно, пусть $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{1; 2; 5; 7\}$

$$A \setminus B = \{3\}; \qquad B \setminus A = \{5; 7\}.$$

Имеют место следующие равенства:

1) $A \setminus \varnothing = A$
2) $\varnothing \setminus A = \varnothing$
3) $A \setminus I = \varnothing$
4) $I \setminus A = \bar{A}$
5) $A \setminus A = \varnothing$.

Важным понятием является понятие подмножества. Понятие подмножества — понятие относительное, т. е. применяемое к паре множеств.

**Определение 15.15.** *Говорят, что множество $A$ является подмножеством $B$ (пишут $A \subset B$), тогда и только тогда, когда каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$ или*

$$A \subset B \iff P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1.$$

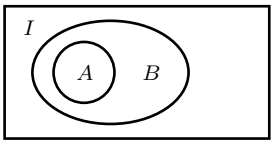



*Рис. 15.7.*

**ТЕОРЕМА 15.4**

Для того чтобы множество $A$ являлось подмножеством множества $B$ необходимо и достаточно, чтобы $A \setminus B = \varnothing$.

$$A \subset B \Leftrightarrow P_A(x) \to P_B(x) \Leftrightarrow \overline{P_A(x) \to P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{\overline{P_A(x)} \cdot \overline{P_B(x)}} \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P_A(x) \cdot \overline{P_B(x)} \equiv 0 \Leftrightarrow P_{A \setminus B}(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing.$$

**ТЕОРЕМА 15.5**

Имеют место соотношения:

1. $A \subset A$ — рефлексивность
2. $(A \subset B)\&(B \subset C) \implies A \subset C$ — транзитивность
3. $(A \subset B)\&(B \subset A) \implies A = B$ — антисимметричность

$_1$ Составим разность $A \setminus A = \varnothing \Leftrightarrow A \subset A$.

$_2$
$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \iff P_A(x) \to P_B(x) \equiv 1 \\ B \subset C \iff P_B(x) \to P_C(x) \equiv 1 \end{array}\right\} \implies$$
$$\implies \big(P_A(x) \to P_B(x)\big) \cdot \big(P_B(x) \to P_C(x)\big) \equiv 1 \iff$$
$$\iff \big(\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)\big) \cdot \big(\overline{P_B(x)} \vee P_C(x)\big) \iff$$
$$\overline{P_A(x)} \cdot \overline{P_B(x)} \vee \underbrace{P_B(x) \cdot \overline{P_B(x)}}_{\equiv 0} \vee \overline{P_A(x)} \cdot P_C(x) \vee P_B(x) \cdot P_C(x) \equiv 1$$
$$\overline{P_A(x)} \cdot \overline{P_B(x)} \vee \overline{P_A(x)} \cdot P_C(x) \vee \overline{P_A(x)} \cdot P_C(x) \vee P_B(x) \cdot P_C(x) \equiv 1$$
$$\iff \overline{P_A(x)} \underbrace{\big(\overline{P_B(x)} \vee P_C(x)\big)}_{\equiv 1 \text{ по усл.}} \vee \underbrace{\big(\overline{P_A(x)} \vee P_B(x)\big)}_{\equiv 1 \text{по усл.}} \cdot P_C(x) \equiv 1 \iff$$

$$\Leftrightarrow\ \overline{P_A(x)} \vee P_C(x) \equiv 1\ \Leftrightarrow\ P_A(x) \to P_C(x) \equiv 1\ \Leftrightarrow\ A \subset B$$

●[3] $\left.\begin{array}{lll} A \subset B & \Leftrightarrow & A \setminus B = \varnothing \\ B \subset A & \Leftrightarrow & B \setminus A = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing\ \Leftrightarrow\ A \triangle B = \varnothing\ \Leftrightarrow\ A = B. \quad ●$$

Докажите самостоятельно, что $A = B\ \Leftrightarrow\ A \triangle B = \varnothing$.

## § 15.5. ОТОБРАЖЕНИЯ ($\Leftrightarrow$ ФУНКЦИИ)

Понятие отображения ($\Leftrightarrow$ функции) мы будем считать первичным (хотя это и не совсем так).

**Определение 15.16.** *Под отображением понимают тройку $X, Y, f$ (пишут $f : X \to Y$), где $X$ и $Y$ — непустые множества, $f$ — правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ вполне определенный этим правилом элемент, обозначаемый $f(x)$, из $Y$.*

● *ПРИМЕР 15.7.*

а) $X = Y = \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x$ (в записи определения 15.16 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

б) $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$

в) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

г) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$

**Определение 15.17.** *Два отображения $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ называют равными (и пишут $f_1 = f_2$)[2], если $(X_1 = X_2)$ & $(Y_1 = Y_2)$ & $(\forall x\ (f_1(x) = f_2(x)))$ $\equiv$ 1[3].*

● *ПРИМЕР 15.8.*

а) $X_1 = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R}_+ = [0; \infty)$, $f_1(x) = |x|$;
$X_2 = \mathbb{R}$, $Y_2 = \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = \sqrt{x^2}$. Ясно, что $f_1 = f_2$.

б) $f_1$ — отображение из а) примера 15.7, $f_2$ — отображение из б) примера 15.7. $f_1 \neq f_2$ (хотя правило — $\sin$ — одно и то же).

**Определение 15.18.** *Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар вида $(x, f(x))$, $x \in X$.*

Примеры графиков функций мы не будем приводить, считая, что они читателю хорошо известны из курса математики средней школы.

В том случае, когда отображение (функция) $f : X \to Y$ такова, что $X, Y \subset \mathbb{R}$ (так называемые числовые множества), функция называется числовой. В математическом анализе изучаются числовые функции и их свойства, поэтому в дальнейшем мы прилагательное «числовая» перед словом функция будем опускать.

Одним из основных способов задания числовых функций является задание с помощью формулы ($\Leftrightarrow$ аналитическое), при этом используется конечный набор арифметических операций, знаков элементарных функций ($\sin$, $\cos$, $\mathrm{tg}$, $\mathrm{ctg}$, $\log_a$, $\exp$, $\sqrt{\ }$ и т. д.) и скобок, определяющих порядок действий. При этом множества $X$ и $Y$ могут быть и не заданы. В этом случае под множеством $X$ понимают так называемую естественную

[2] Правильнее было бы писать «$(f_1 : X_1 \to Y_1) = (f_2 : X_2 \to Y_2)$».

[3] Определения, содержащие утверждения об истинности некоторого высказывания, имеют «стандартное» окончание — $\equiv 1$, которое мы будем в дальнейшем опускать.

область определения функции, т. е. множество всех тех значений $x$, при которых формула имеет смысл, а под $Y$ понимают либо все те значения, которые могут получаться под действием формулы на $x$ из $X$, либо любое более широкое множество, в том числе и все $\mathbb{R}$. В случае такого задания функции пишут обычно не $f : X \to Y$, а $y = f(x)$.

Аргументом функции или независимой переменной называют $x$, а $y = f(x)$ называют значением функции, соответствующим элементу $x \in X$. В записи $y = f(x)$ $y$ называют зависимой переменной [4].

● *ПРИМЕР 15.9.* Пусть
$$f(x) = \frac{\log_2(x+10)}{x^2-4}.$$

Ясно, что область определения этой функции $X$ находится как решение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x+10>0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-10 \\ x\neq 2;\ x\neq -2 \end{cases}$$
$$X = (-10,-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty).$$

### 15.5.1. КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ (⇔ СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ)[5]. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

**Определение 15.19.** *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Композицией функций $f$, $g$ называется функция, обозначаемая $g\circ f : X \to Z$ и определяемая следующим:*

$$(g\circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g\big(f(x)\big). \tag{15.6}$$

Правая часть в (15.6) показывает, что значение композиции в точке $x$ вычисляется в результате последовательного действия сначала $f$, а затем (на полученный результат) функции $g$.

● *ПРИМЕР 15.10.* Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = \sin x$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g(x) = x^2$, тогда $(g\circ f)(x) = \sin^2 x$, $(f\circ g)(x) = \sin x^2$.

Попутно мы доказали, что во множестве функций, на которых определены и $f\circ g$ и $g\circ f$, композиция не является коммутативной операцией.

**Типы отображений.** Во множестве отображений выделяют три типа отображений.

**Определение 15.20.** *Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1\ \forall x_2\ \big((x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$, т. е. если оно любым различным значениям аргумента ставит в соответствие различные значения из $Y$.*

**Определение 15.21.** *Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если $\forall y\ (y \in Y)\ \exists x\ x \in X\ \big(y = f(x)\big) \equiv 1$ (иными словами, для каждого элемента $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что элемент $y$ получается из элемента $x$ (⇔ является образом элемента $x$).*

[4] Термины «зависимая» и «независимая» переменная сейчас считаются архаичными и выходят из употребления.

[5] Термин «сложная функция», представимая в виде композиции «простых», кажется нам неудачным и архаичным.

**Определение 15.22.** *Отображение $f : X \to Y$ называется биективным, если оно одновременно и инъективно и сюръективно.*

● *ПРИМЕР 15.11.* Рассмотрим еще раз отображения из примера 15.7. Ясно, что
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не является инъективным, сюръективным, биективным.
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ инъективен, но не сюръективен и не биективен.
$\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ сюръективен, не инъективен и не биективен.
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ — инъективен, сюръективен и биективен.

**Обратимость отображений.** Пусть $f : X \to Y$. Рассмотрим уравнение, порожденное отображением $f$:

$$f(z) = y, \tag{15.7}$$

где $z$ — неизвестное $(\in X)$, $y\,(\in Y)$ — параметр.

Ясно, что если $f$ инъективно, но не сюръективно, то существуют такие значения параметра, при которых уравнение (15.7) не имеет решений, а для тех значений параметра, при которых у уравнения есть решения, это решение для каждого значения параметра единственно.

Если $f$ сюръективное отображение, но не инъективное, то уравнение (15.7) имеет решения при любом значении параметра и существует хотя бы одно такое значение параметра $y$, при котором уравнение (15.7) имеет более одного решения.

В случае, когда $f$ — биективное отображение, уравнение (15.7) имеет при каждом значении параметра единственное решение.

Таким образом, уравнение (15.7), а фактически само отображение $f : X \to Y$, в этом случае задает отображение $f^{-1} : Y \to X$, которое каждому элементу $y \in Y$ ставит в соответствие решение уравнения (15.7). Это решение в терминах отображения $f^{-1} : Y \to X$ обозначается $f^{-1}(y)$. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется обратным для отображения $f$.

Пусть $f : X \to Y$ биективно, найдем $f^{-1} \circ f : X \to X$:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) \overset{(15.6)}{=} f^{-1}\big(f(x)\big),$$

а чтобы найти $f^{-1}(f(x))$, нужно рассмотреть уравнение (15.7). В этом случае оно имеет вид

$$f(z) = f(x). \tag{15.8}$$

Ясно, что $x$ является решением этого уравнения (при подстановке вместо неизвестного $x$ получается верное равенство $f(x) = f(x)$), а так как $f$ биективно, то уравнение (15.9) имеет единственное решение. Следовательно $f^{-1}\big(f(x)\big) =$ (решению уравнения $f(z) = f(x)$) $= x$. Таким образом, мы показали, что

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \qquad \forall x \in X. \tag{15.9}$$

Найдем теперь $f \circ f^{-1} : Y \to Y$:

$$\left(f \circ f^{-1}\right) \overset{(15.6)}{=} f\left(f^{-1}(y)\right) = f\,(\text{«решение уравнения } f(z) = y\text{»}) = y,$$

так как решение уравнения (15.7) подставляется в его левую часть, но в этом случае левая часть равна правой. Таким образом, мы показали, что

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y, \qquad \forall y \in Y. \tag{15.10}$$

Равенства (15.9) и (15.10) можно принять за определения обратимого отображения и обратного отображения, тогда мы получаем

**Определение 15.23.** *Отображение $f\colon X \to Y$ называется обратимым, если существует отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ такое, что*

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ f\right)(x) &= x, \qquad \forall x \in X, \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) &= y, \qquad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

*При этом отображение $f^{-1}$ называется обратным к $f$.*

*Замечание 15.2.* Определение 15.23 симметрично по $f$ и $f^{-1}$, и значит, $f^{-1}$ тоже обратимо и $(f^{-1})^{-1} = f$.

Справедливо следующее утверждение:

**ТЕОРЕМА 15.6 (Критерий обратимости)**
Для того чтобы отображение $f : X \to Y$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было биективным.

*Следствие из теоремы 15.6 и замечания 15.2.* Обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ также биективно.

*Замечание 15.3.* Если $f$ обратимо, то графики $f$ и $f^{-1}$ совпадают.

Как мы уже говорили, для числовых функций принято обозначение $y = f(x)$ и, в случае обратимости $f$, имеем $x = f^{-1}(y)$, если для обратного отображения перейти к привычным обозначениям для аргумента $(x)$ и значений отображения $(y)$, то следует переименовать $x$ и $y$, тогда получаем $y = f^{-1}(x)$. Такое переименование соответствует преобразованию симметрии относительно биссектрисы I и III квадрантов декартовой системы координат, и значит, в случае $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ графики взаимно обратных функций расположены симметрично относительно биссектрисы I и III координатных углов ($\Leftrightarrow$ прямой $y = x$).

Вернемся к примеру 15.4.

а) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не является обратимым;

б) $\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$ не является обратимым;

в) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ не является обратимым;

г) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$ обратим, $\sin^{-1} \overset{\text{def}}{=} \arcsin$.

● *ПРИМЕР 15.12.* Докажем, что функция $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$ обратима.

● Ясно, что область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, множество значений — $(-\infty;0) \cup (0,+\infty)$.

Рассмотрим уравнение (15.7), оно имеет вид

$$\frac{k}{z} = y \quad \Longleftrightarrow \quad zy = k \quad \overset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad z = \frac{k}{y}.$$

Мы получили, что при всех значениях параметра $y$ уравнение разрешимо и имеет единственное (при каждом значении параметра) решение, т. е. функция $y = \frac{k}{x}$ обратима и обратная к ней задается формулой $y = \frac{k}{x}$, т. е. она сама себе обратна. ●

## § 15.6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика — наука о конечных множествах и отображениях конечных множеств. Разнообразие окружающей жизни, многовариантность выбора, необходимость учесть **все** возможные исходы и последствия требует от нас умения делать количественные и качественные оценки. А как можно оценить или вычислить вероятность какого-то события, не зная общего числа возможных исходов и числа благоприятных для наступления события исходов?

Основным вопросом комбинаторики является вопрос «Сколько?», поставленный в различных вариантах. (Сколько существует способов расставить 12 различных книг на полке, вмещающей 12 книг? Сколько существует различных 4-разрядных чисел, полученных перестановками цифр числа 1234 и чему равна их сумма? и т. п.). Основным способом ответа на этот вопрос является установление взаимно однозначного соответствия (осуществляемого биективным отображением) между множеством, в котором нам необходимо подсчитать число элементов, и множеством, в котором число элементов известно или легко вычисляется. Этот принцип подсчета — основной принцип комбинаторики — прекрасно звучит в переводе С. Я. Маршака из английской детской поэзии:

*Спросил меня голос*
*В пустыне дикой:*
*— Много ли в море*
*Растет земляники?*
*— Столько же, сколько*
*Селедок соленых*
*Растет на березах*
*И елках зеленых.*

Комбинаторика имеет широкий круг приложений: теория вероятностей, теория информации, теория надежности, алгебраическая топология и алгебра и, наконец, математический анализ. Особенно полезными являются сами комбинаторные рассуждения. Они позволяют обойтись без излишнего формализма, и там, где эти принципы срабатывают, получаются красивые и понятные результаты. Ярким примером эффективности комбинаторного подхода является теория бинома Ньютона. Все красивые результаты — различные соотношения между биномиальными коэффициентами — имеют простое комбинаторное истолкование. Некоторые из этих соотношений будут приведены в нашем курсе.

### 15.6.1. ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП КОМБИНАТОРИКИ

В качестве утверждений, принимаемых без доказательства, возьмем следующее:

1. Отрезок натурального ряда $[1;n]_N = \{1;2;3;\ldots;n\}$ содержит $n$ элементов.
2. Если $A$ и $B$ — конечные множества и существует биективное отображение $\varphi : A \to B$, то $|A| = |B|$, где $|A|$ — обозначение числа элементов во множестве $A$.
3. $|\varnothing| = 0$.

Вторая аксиома носит название «Основной принцип комбинаторики» и является главным рабочим инструментом комбинаторики (соответственно искусство решения комбинаторных задач и состоит в определении множеств $A$ и $B$ и построении биективного отображения $\varphi$, реализующего основной принцип комбинаторики).

**Определение 15.24.** *Говорят, что отрезок натурального ряда $[1;n]_N$ нумерует множество $A$, если существует биективное отображение $\varphi : [1;n]_N \to A$.*

Если задана нумерация $\varphi$ множества $A$, то применяются следующие обозначения:

$$\varphi(1) \stackrel{\text{def}}{=} a_1; \quad \varphi(2) \stackrel{\text{def}}{=} a_2; \quad \ldots; \quad \varphi(n) \stackrel{\text{def}}{=} a_n.$$
$$A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}.$$

**ТЕОРЕМА 15.7**
Если отрезок $[1; n]_N$ нумерует множество $A$, то $|A| = n$.

● Эта теорема является прямым следствием определения нумерации и основного принципа комбинаторики. ●

**Определение 15.25.** *Говорят, что множество $A$ конечно, если существует такое натуральное число $n_A$, что отрезок $[1; n_A]_N$ нумерует $A$, при этом* $|A| \stackrel{\text{def}}{=} n_A$.

### 15.6.2. ПРАВИЛО СУММЫ

**ТЕОРЕМА 15.8**
Пусть $A$ и $B$ — конечные непересекающиеся множества $(A \cap B = \varnothing)$, тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{15.11}$$

● Зафиксируем

$$\varphi_A : [1; |A|]_N \to A,$$
$$\varphi_B : [1; |B|]_N \to B$$

нумерации $A$ и $B$ соответственно и рассмотрим отображение

$$\varphi_{A \cup B} : [1; |A| + |B|]_N \to A \cup B,$$

заданное правилом:

$$\varphi_{A \cup B}(i) = \begin{cases} \varphi_A(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant |A| \\ \varphi_B(i - |A|), & \text{если } |A| < i \leqslant |A| + |B| \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_{A \cup B}$ — биективное отображение, тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 15.9 (Следствие предыдущей)**
Пусть $A$, $B$ — конечные множества, тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{15.12}$$

● Очевидно, $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ и множества $A$ и $(B \setminus A)$ не пересекаются, тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|. \tag{15.13}$$

Очевидно, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ и множества $A \cap B$ и $B \setminus A$ не пересекаются, тогда

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{15.14}$$

Подставляя из (15.14) в (15.13) выражение для $|B \setminus A|$, получаем

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad \bullet$$

**ТЕОРЕМА 15.10 (Правило включения–исключения)**
Пусть $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ — конечные множества, тогда

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) - \\ &- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \\ &+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \\ &- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

В правой части формулы, называемой формулой включения–исключения, стоят с чередующимися знаками суммы, содержащие всевозможные попарные пересечения множеств $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, пересечения троек множеств и т. д.

● Докажем формулу включения–исключения по индукции.

Справедливость формулы для случая $n = 2$ доказана в предыдущей теореме. Предположим, что формула верна для любых $(n-1)$ множеств, и покажем, что она верна и для $n$ множеств.

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \big|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big| = \\ &\overset{\text{т. } 15.9}{=} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n| - \big|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n\big| \overset{\text{инд. предп.}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| + \\ &\quad + |A_n| - \underbrace{|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \cap A_n)|}_{\text{здесь } (n-1) \text{ скобка}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| - \\ &\quad - \Bigg( \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \big|(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)\big| + \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} \big|(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)\big| - \cdots + \\ &\quad + (-1)^{n-2} \big|(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)\big| \Bigg) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались равенствами

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) &= A_1 \cap A_2 \cap A_n,\\ (A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n) \cap (A_3 \cap A_n) &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_n,\\ \ldots\ldots\ldots\

Ясно, что $f_i$ — биективное отображение, тогда по основному принципу комбинаторики получаем

$$\big|\{x_i\} \times Y\big| = |Y|. \tag{15.17}$$

Подставляем (15.17) в правую часть (15.16):

$$|X \times Y| = \sum_{i=1}^{|X|} |Y| = |X| \cdot |Y|. \quad \bullet$$

**Определение 15.27.** *Пусть $X$ — множество и $n \in \mathbb{N}$, определим декартовы степени множества $X$ следующим:*

$$\begin{aligned} X^1 &= X, \\ X^2 &= X \times X, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ X^n &= X^{n-1} \times X. \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 15.13**
Если $X$ — конечное множество, то $|X^n| = |X|^n$.

● Ясно, что эта теорема — следствие теоремы 15.12. ●

● *ЗАДАЧА 15.1.* Из города $A$ в город $B$ ведут три дороги, а из города $B$ в город $C$ — 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из $A$ в $C$ через $B$.

● Задача достаточно проста. Однако она демонстрирует особенности задач по комбинаторике, которые создают затруднения для их решения. Укажем на главную из этих особенностей.

Задача первоначально формулируется не как математическая, а как задача реальной жизни, и поэтому требуется ее переработка в математическую задачу. При этом нужно отделить существенные факторы от несущественных. (Как правило, нужно для себя четко уяснить, что понимается под способом.) Действительно, если при подсчете способов мы будем учитывать время суток, скорость и способ перемещения (пешком, на автомобиле, велосипеде и т. п.), то задача становится чрезвычайно простой, а ответ ее вряд ли устроит составителя задачи. Ясно, что при учете указанных факторов ответ задачи «Имеется бесконечное множество способов». Если же отвлечься от всех указанных факторов и под способом попасть из $A$ в $C$ через $B$ понимать упорядоченную пару (дорога, по которой перемещаемся из $A$ в $B$; дорога, по которой перемещаемся из $B$ в $C$), то решение задачи можно получить, используя понятие декартова произведения. Обозначим:

$AB$ — множество дорог, ведущих из $A$ в $B$,
$BC$ — множество дорог, ведущих из $B$ в $C$.

Тогда математическая задача, к которой свелась исходная задача, выглядит так: «Найти число элементов в декартовом произведении $AB \times BC$».

Ясно, что

$$|AB \times BC| = |AB| \cdot |BC| = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12 способов. ●

● *ЗАДАЧА 15.2.* Из города $A$ в город $B$ ведут три дороги, из города $B$ в город $C$ — 4, имеется также 5 дорог из $A$ в $C$, не проходящих через $B$. Сколькими способами можно попасть из $A$ в $C$, используя указанные дороги?

● Множество всех способов добраться из $A$ в $C$ разобьем на непересекающиеся подмножества I и II, отнеся к первому — способы добраться из $A$ в $C$ через $B$, а ко второму — способы добраться из $A$ в $C$, минуя $B$. Тогда по правилу суммы «число способов попасть из $A$ в $C$» $=$ $|\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| = |AB \times BC| + |\mathrm{II}| = 3 \cdot 4 + 5 = 17$.

Ответ: 17 способов. ●

**Определение 15.28.** *Пусть $X$ и $Y$ — непустые множества. Обозначим через $Y^X$ множество отображений, действующих из $X$ в $Y$, т. е.*

$$f \in Y^X \quad \Longleftrightarrow \quad f : X \to Y.$$

*Множество $Y^X$ называют множеством степень.*

Мы хотим доказать теорему о числе элементов во множестве степень, когда $X$ и $Y$ — конечные множества. Для этого докажем две леммы.

**Лемма 15.1.** *Пусть $X$ и $Y$ — конечные непустые множества и $|X| = 1$, тогда*

$$\left|Y^X\right| = |Y|. \tag{15.18}$$

● Зафиксируем в $X$ и $Y$ нумерации —

$$X = \{x_1\}, \quad Y = \left\{y_1, y_2, \ldots, y_{|Y|}\right\}.$$

Занумеруем элементы множества $Y^X$ условием:

$$f_1(x_1) = y_1,\ f_2(x_1) = y_2,\ \ldots,\ f_{|Y|}(x_1) = y_{|Y|}.$$

Ясно, что нумерующий отрезок — $[1; |Y|]_N$. ●

**Лемма 15.2.** *Пусть $X$ и $Y$ — конечные непустые множества и $|X| \geqslant 2$; $x \in X$, тогда*

$$\left|Y^X\right| = |Y| \cdot \left|Y^{X \setminus \{x\}}\right|. \tag{15.19}$$

● Зафиксируем в $X$ и $Y$ нумерации, причем в $X$ такую, что элемент $x$, о котором идет речь в условии леммы, имеет последний номер, т. е. $x = x_{|X|}$.

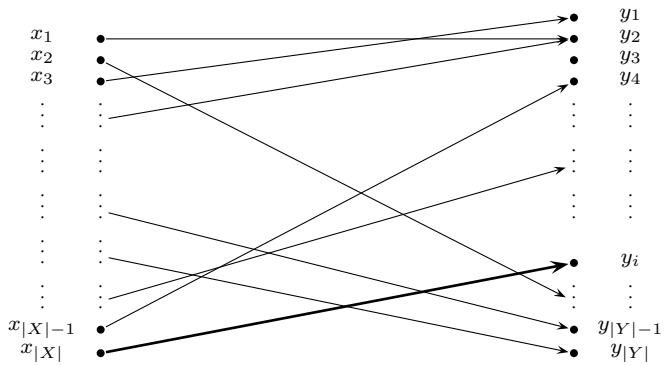
Множество $Y^X$ представим в виде объединения попарно непересекающихся множеств $A_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ |Y|$, отнеся $f \in Y^X$ ко множеству $A_i$, если

$$f\left(x_{|X|}\right) = y_i.$$

Тогда по правилу суммы

$$\left|Y^X\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{|Y|} A_i\right| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i|. \tag{15.20}$$

Займемся одним из множеств $A_i$. Каждое отображение $f \in A_i$ однозначно определяется своим ограничением (сужением) на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$. (Стрелочная диаграмма любого отображения $f \in A_i$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в $y_i$.)




Стрелки, указанные более тонкими линиями, — ограничение $f$ на $X \setminus \{x_{|X|}\}$. Тогда

$$|A_i| = \left|Y^{X\setminus\{x_{|X|}\}}\right| = \left|Y^{X\setminus\{x\}}\right|. \tag{15.21}$$

Подставляя (15.21) в (15.20), получаем

$$\left|Y^X\right| = \sum_{i=1}^{|Y|} |A_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} \left|Y^{X\setminus\{x\}}\right| = |Y| \cdot \left|Y^{X\setminus\{x\}}\right|. \quad \bullet$$

**ТЕОРЕМА 15.14**
Пусть $X$ и $Y$ — конечные непустые множества, тогда $Y^X$ — конечное множество и

$$\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}. \tag{15.22}$$

● Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве $X$.

Когда $|X| = 1$, по лемме 15.1 имеем

$$\left|Y^X\right| = |Y| = |Y|^1 = |Y|^{|X|}.$$

Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого $n$-элементного множества. Докажем, что в этом случае оно справедливо и для множества $X$ такого, что $|X| = n+1$. Зафиксируем в $X$ произвольный элемент $x$ и применим лемму 15.2

$$\left|Y^X\right| = |Y| \cdot \left|Y^{X\setminus\{x\}}\right|.$$

Множество $X \setminus \{x\}$ содержит $n$ элементов, и к $Y^{X\setminus\{x\}}$ применимо предположение индукции, тогда

$$\left|Y^X\right| = |Y| \cdot \left|Y^{X\setminus\{x\}}\right| = |Y| \cdot |Y|^{|X\setminus\{x\}|} = (\text{т. к. } |X - \{x\}| = |X| - 1) =$$
$$= |Y| \cdot |Y|^{|X|-1} = |Y|^{|X|}.$$

Индуктивный переход, а значит, и вся теорема, доказаны. ●

● *ЗАДАЧА 15.3.* В НИИ работает 4 курьера — $A$, $B$, $C$, $D$. Сколько способов рассылки 7 писем, адресованных в 7 различных организаций, если доставка осуществляется только курьерами, работающими в НИИ?

● Естественно, что мы не учитываем время суток, погодные условия, скорость доставки и т. п. Каждый способ доставки однозначно определяется указанием, какой из курьеров доставляет первое письмо, какой — второе, ..., какой — седьмое. Т. е. способ доставки — отображение из множества писем — $\Pi$ во множество курьеров $K$. Тогда «число способов доставки писем» $= |K^{\Pi}| = |K|^{|\Pi|} = 4^7$. ●

● *ЗАДАЧА 15.4.* В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира: $A$, $B$, $C$, каждый из которых может выйти на любом из 8 этажей. Сколькими способами может осуществиться разгрузка лифта?

● Способ разгрузки — это указание, на каком этаже выходит пассажир $A$, на каком — $B$, на каком — $C$, т. е. сопоставление пассажиру этажа, на котором он выходит.

Обозначим через $\Pi$ — множество пассажиров, $\Э$ — множество этажей выхода. Значит, «число способов осуществления разгрузки лифта» $= |\Э^{\Pi}| = |\Э|^{|\Pi|} = 8^3 = 512$. ●

### 15.6.4. МНОЖЕСТВА $In\,Y^X$, $Bi\,Y^X$. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ

**Определение 15.29.** *Пусть $X$, $Y$ — непустые множества. Обозначим через $In\,Y^X$ множество инъективных отображений из $X$ в $Y$, т. е. $f \in In\,Y^X \iff f : X \to Y$ — инъективное отображение.*

Справедлив следующий критерий непустоты $In\,Y^X$ в случае конечных множеств:

**ТЕОРЕМА 15.15**
Пусть $X$, $Y$ — конечные непустые множества. Для того чтобы $In\,Y^X$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы $|Y| \geqslant |X|$.

● **Необходимость.** Так как $In\,Y^X$ непусто, то существует $f : X \to Y$ — инъективное отображение. Представим $Y$ в виде

$$Y = f(X) \cup \big(Y \setminus f(X)\big), \quad \big(f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f(x) \mid |x \in X \,\}\big).$$

Очевидно,

$$|f(X)| = |X|.$$

Действительно, если рассмотреть отображение $f'(x) : X \to f(X)$, заданное правилом $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, то $f'$ — биективно, тогда на основании основного принципа комбинаторики получаем, что $|X| = |f'(X)| = |f(X)|$. Множества $f(X)$ и $Y \setminus f(X)$ не пересекаются, поэтому (теорема 15.8)

$$|Y| = |f(X)| + |Y \setminus f(X)| = |X| + |Y \setminus f(X)| \geqslant |X|.$$

**Достаточность.** По условию теоремы $1 \leqslant |X| \leqslant |Y| < \infty$. Зафиксируем нумерации множеств $X$ и $Y$, т. е.

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_{|X|}\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{|Y|}\}.$$

Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, порожденное этими нумерациями, $\varphi(x_i) = y_i$.

Ясно, что это отображение инъективно, и значит, множество $In\, Y^X$ непусто. ●

**Лемма 15.3.** *Пусть $X$, $Y$ — непустые конечные множества и $1 = |X| \leqslant |Y| < \infty$, тогда*

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y|. \tag{15.23}$$

● Очевидно, в случае $|X| = 1$ любое отображение $f : X \to Y$ инъективно, т. е. $In\, Y^X = Y^X$, тогда, используя лемму 15.1, получаем

$$\left|In\, Y^X\right| = \left|Y^X\right| = |Y|. \quad ●$$

**Лемма 15.4.** *Пусть $X$, $Y$ — непустые конечные множества, $1 < |X| \leqslant |Y| < \infty$ и $x \in X$, тогда*

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y| \cdot \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right|, \tag{15.24}$$

*где $y \in Y$.*

● Как и при доказательстве леммы 15.2, зафиксируем в $X$ такую нумерацию, что $x = x_{|X|}$. Представим $In\, Y^X$ в виде объединения попарно непересекающихся множеств $B_i$, $i = 1, 2, \ldots, |Y|$, отнеся $f$ $(\in In\, Y^X)$ ко множеству $B_i$, если

$$f\left(x_{|X|}\right) = y_i.$$

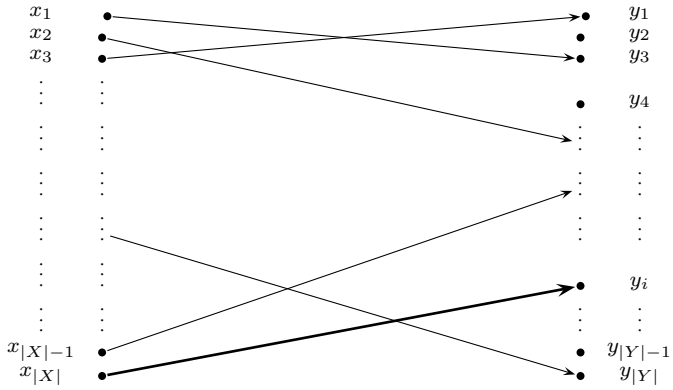
Используя правило суммы, получаем

$$\left|In\, Y^X\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{|Y|} B_i\right| = \sum_{i=1}^{|Y|} |B_i|. \tag{15.25}$$

Займемся одним из множеств разбиения. Каждое отображение $f \in B_i$ однозначно определяется своим ограничением на множество $X \setminus \{x_{|X|}\}$, $y_i \notin f\big(X \setminus \{x_{|X|}\}\big)$ из-за инъективности $f : X \to Y$. При этом

$$f|_{X\setminus\{x\}} : X \setminus \left\{x_{|X|}\right\} \to Y \setminus \{y_i\} \quad \text{— инъективно.}$$

(Стрелочная диаграмма любого отображения $f \in B_i$ содержит стрелку, ведущую из $x_{|X|}$ в $y_i$, а стрелки, исходящие из $X \setminus \{x\}$, ведут в $Y \setminus \{y_i\}$ «инъективно».)




Стрелки, указанные более тонкими линиями, — ограничение $f$ на $X \setminus \{x_{|X|}\}$. Тогда

$$|B_i| = \left|In\ (Y \setminus \{y_i\})^{X\setminus\{x_{|X|}\}}\right|.$$

Поскольку нумерация $Y$ зафиксирована произвольная, а эти рассуждения можно повторить для любой нумерации, можно записать

$$|B_i| = \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right|, \tag{15.26}$$

где $x \in X,\ y \in Y$. Подставляя (15.26) в (15.25), получаем

$$\left|In\, Y^X\right| = \sum_{i=1}^{|Y|} |B_i| = \sum_{i=1}^{|Y|} \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right| =$$
$$= |Y| \cdot \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right|, \quad x \in X,\ y \in Y. \quad \bullet$$

**ТЕОРЕМА 15.16**
Пусть $X,\ Y$ — конечные непустые множества, $1 \leqslant |X| \leqslant |Y| < \infty$, тогда

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - |X| + 1)\,. \tag{15.27}$$

(В правой части формулы (15.27) содержится $|X|$ сомножителей, первый из которых — наибольший, а каждый следующий меньше предыдущего на 1.)

● Проведем доказательство методом математической индукции, взяв в качестве параметра индукции число элементов во множестве $X$.

Рассмотрим случай $|X| = 1$. По лемме 15.3 имеем

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y|.$$

В правой части этого равенства, как и требует в этом случае формула (15.27), содержится один сомножитель — $|Y|$.

Допустим, что утверждение теоремы справедливо для любого $n$-элементного множества. Докажем, что тогда оно справедливо и для множества $X$ такого, что $|X| = n + 1$.

Зафиксируем в $X$ произвольный элемент $x$ и применим лемму 15.4

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y| \cdot \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right|, \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Множество $X \setminus \{x\}$ содержит $n$ элементов, и к $In\,(Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}$ применимо предположение индукции, тогда

$$\left|In\, Y^X\right| = |Y| \cdot \left|In\ (Y \setminus \{y\})^{X\setminus\{x\}}\right| =$$
$$= |Y| \cdot \big(|Y \setminus \{y\}| \cdot (|Y \setminus \{y\}| - 1) \ldots ( \underbrace{|Y \setminus \{y\}|}_{|Y\setminus\{y\}|=|Y|-1} - \underbrace{|X \setminus \{x\}|}_{|X\setminus\{x\}|=|X|-1} + 1)\big) =$$
$$= |Y| \cdot \big((|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - 1 - |X| + 1 + 1)\big) =$$
$$= |Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot (|Y| - 2) \ldots (|Y| - |X| + 1)\,.$$

Индуктивный переход, а значит, и вся теорема, доказаны. ●

● *ЗАДАЧА 15.5.* Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 6 книг. Сколько существует способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?

● Как и в предыдущих примерах, мы не учитываем несущественные факторы (время суток, толщину книг и т. п.), однако можно считать, что на полке имеются места (отсеки) для книг — 1-е место, 2-е место, ..., 6-е место. Заполнить полку — это значит сопоставить месту на полке книгу, занимающую это место, другими словами, заполнить полку — это значит задать отображение из множества мест во множество книг, при этом поскольку любая книга не может занять более одного места, то отображения инъективны. Значит, «число способов заполнения книжной полки» $= |In\, K^M| = |K| \cdot (|K|-1)\ldots(|K|-|M|+1) = 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10$. Здесь $K$ — множество книг, $M$ — множество мест на книжной полке. ●

● *ЗАДАЧА 15.6.* В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из них может выйти на одном из 8 этажей. Сколько способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?

● Ясно, что «число способов разгрузки» $= |In\, \Э^{\Pi}| = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$. (Обозначения такие же, как и в задаче 15.4.) ●

**Определение 15.30.** *Пусть $X$ и $Y$ — множества, обозначим через $Bi\, Y^X$ множество биективных отображений множества $X$ во множество $Y$, т. е.*

$$f \in Bi\, Y^x \quad \Longleftrightarrow \quad f : X \to Y \quad \text{— биективное отображение.}$$

**ТЕОРЕМА 15.17 (Критерий непустоты $Bi\, Y^X$)**
Пусть $X$, $Y$ — непустые конечные множества, для того чтобы $Bi\, Y^X \neq \varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы $|X| = |Y|$.

● ●

**ТЕОРЕМА 15.18**
Пусть $X$, $Y$ — конечные непустые множества и $|X| = |Y|$. Имеет место формула

$$\left|Bi\, Y^X\right| = |X|! = |Y|!,$$

где $|X|! \overset{\text{def}}{=} |X|\cdot(|X|-1)\cdot(|X|-2)\ldots 2\cdot 1$.

● Очевидно, в случае, когда $|X| = |Y|$, имеет место $Bi\, Y^X = In\, Y^X$, значит, по теореме 15.16 имеем

$$\left|Bi\, Y^X\right| = \left|In\, Y^X\right| = |Y|\cdot(|Y|-1)\ldots 1 = |Y|! = |X|! \quad ●$$

### 15.6.5. ОСНОВНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПОНЯТИЯ

**Определение 15.31.** *Пусть $X$ — непустое множество, $|X| = n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Размещениями длины $m$ элементов множества $X$ называют инъективные отображения множества $[1;m]_N$ в $X$. Обозначим через $\mathbb{A}_X^m$ множество размещений длины $m$ элементов множества $X$, т. е.*

$$\mathbb{A}_X^m = In\, X^{[1;m]_N},$$

*а через $A_{|X|}^m$ — число размещений длины $m$ элементов множества $X$, т. е.*

$$A_{|X|}^m = |\mathbb{A}_X^m|.$$

**ТЕОРЕМА 15.19**
Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$, тогда

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{15.28}$$

Теорема 15.19 — это переформулировка теоремы 15.18.

*Замечание 15.4.* Принято считать, что

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

**Определение 15.32.** *Пусть $X$ — конечное непустое множество, $n = |X|$. Перестановкой элементов множества $X$ называют биективные отображения множества $[1;n]_N$ в $X$. Множество перестановок элементов $X$ обозначают $\mathbb{P}_X$, а число перестановок элементов $X$ через $P_{|X|}$, т. е.*

$$P_{|X|} = |\mathbb{P}_X|.$$

**ТЕОРЕМА 15.20**
Пусть $1 \leqslant n < \infty$, тогда

$$P_n = n! \tag{15.29}$$

Теорема 15.20 — это переформулировка теоремы 6.1.

**Сочетания. Бином Ньютона**[6].

**Определение 15.33.** *Пусть $X$ — конечное множество, $0 \leqslant m \leqslant n = |X|$. Сочетаниями длины $m$ из элементов множества $X$ называют $m$-элементные подмножества $X$. Множество сочетаний длины $m$ из элементов множества $X$ обозначают $\mathbb{C}_X^m$, а их число — $\mathbb{C}_n^m\left(\binom{n}{m}\right)$, т. е.*

$$|\mathbb{C}_X^m| = C_n^m \quad \textit{или} \quad |\mathbb{C}_X^m| = \binom{m}{n}.$$

**ТЕОРЕМА 15.21**
Пусть $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant m \leqslant n$, тогда

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}, \quad m \neq 0. \tag{15.30}$$

[6] Ньютон Исаак (1643–1727) — великий английский физик, механик, астроном, математик, член Лондонского королевского общества (1672) и его президент (1703). Окончил Кембриджский университет (1665). С 1669 по 1701 работал в нем. С 1699 г. — главный директор Монетного двора в Лондоне. Сделанное Ньютоном в физике, механике, астрономии трудно даже перечислить (законы Ньютона в механике, законы интерференции света, закон всемирного тяготения). Результаты, полученные Ньютоном, открыли целые направления в науке. Имя Ньютона всегда будет стоять в ряду величайших ученых–мыслителей, подобно Архимеду, Евклиду, Г. Галилею, Р. Декарту, Л. Эйлеру, А. Эйнштейну. В математике И. Ньютону одновременно с Г. Лейбницем удалось создать стройную теорию дифференциального и интегрального исчисления — основу всего математического анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, вариационного исчисления и др. Вклад Ньютона в математику этим не ограничивается, ему принадлежит приближенный метод решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), классификация кривых третьего порядка, теоремы о симметрических функциях от корней алгебраических уравнений и многое другое.

● Пусть $X$ — какое-нибудь $n$-элементное множество, рассмотрим множество

$$In\, X^{[1;m]_N}.$$

Разобъем его на непересекающиеся подмножества по следующему правилу: два инъективных отображения $f$, $g\colon [1,m]_N \to X$ относятся к одному и тому же подмножеству разбиения тогда и только тогда, когда

$$f([1;m]_N) = g([1;m]_N),$$

(т. е. образы области определения совпадают).

Образ области определения — отрезка натурального ряда $[1;m]_N$ при инъективном отображении является $m$-элементным подмножеством $X$.

Ясно, что любое $m$-элементное подмножество $X$ является образом хотя бы для одного инъективного отображения отрезка натурального ряда $[1;m]_N$ в $X$, т. е. множеств разбиения множества $In\, X^{[1;m]_N}$ мы получим, сколько существует $m$-элементных подмножеств $X$, т. е. $C_n^m$.

Займемся одним из множеств разбиения. В нем находятся все инъективные отображения отрезка $[1;m]_N$ в $X$, дающие один и тот же образ области определения. Ясно, что их столько, сколько биективных отображений из $[1;m]_N$ в этот образ, т. е. $P_m$. Тогда, применяя правило суммы, получим

$$A_n^m = |\mathbb{A}_X^m| = \left|\sum_{i=1}^{C_n^m} B_i\right| = C_n^m \cdot P_m \quad \text{или} \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad ●$$

Ясно, что $C_n^0 = |\{\varnothing\}| = 1$, и если положить $A_n^0 = 1$, $P_0 = 1$, то формула (15.30) будет справедлива и для случая $m = 0$.

Рассмотрим выражение $(a+b)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, называемое биномом Ньютона. Выпишем его разложение по убывающим степеням $a$:

$$(a+b)^n = a^n + \alpha_1 a^{n-1}b + \alpha_2 a^{n-1}b^2 + \cdots + \alpha_{n-1}ab^{n-1} + b^n. \tag{15.31}$$

Какой комбинаторный смысл имеют коэффициенты бинома? Какими свойствами они обладают?

Ясно, например, что в силу симметрии бинома по $a$, $b$ коэффициенты разложения, равноудаленные от концов (т. е. при $a^{n-i}b^i$ и $a^ib^{n-1}$), должны совпадать.

Займемся выяснением комбинаторного смысла коэффициентов бинома

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{\text{Здесь } n \text{ скобок}}. \tag{15.32}$$

Если в правой части (15.32) раскрыть скобки и привести подобные, то получится правая часть (15.31). Значит, коэффициент при $a^{n-i}b^i$ — количество слагаемых такого вида, получающихся при раскрытии скобок в (15.32). Слагаемое $a^{n-i}b^i$ получается, если из $n$ имеющихся скобок $(a+b)$ мы выберем $n-i$ скобок, чтобы в них взять для умножения $a$, а из остальных $i$ скобок — $b$. Выбранные $n-i$ скобок $(a+b)$ из имеющихся $n$ образуют $n-i$-элементное подмножество во множестве из $n$ элементов (скобок $(a+b)$). Значит, коэффициент при $a^{n-i}b^i$ в разложении бинома $(a+b)^n$ равен $C_n^{n-i}$. Мы получаем формулу

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} a^{n-i}b^i. \tag{15.33}$$

Последняя формула называется формулой бинома Ньютона, а коэффициенты $C_n^m$ называют биномиальными коэффициентами.

Если рассуждения о комбинаторном смысле коэффициентов бинома провести, отправляясь не от «$a$», а от «$b$», то получаем, что коэффициент при $a^{n-i}b^i$ равен $C_n^i$, и мы доказали, что

$$C_n^i = C_n^{n-i} \tag{15.34}$$

и

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i \tag{15.35}$$

— вторая формула для бинома Ньютона.

Если положить $a = 1,\ b = x$, то

$$f_n(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{15.36}$$

Функция $f_n(x)$ называется производящей функцией для биномиальных коэффициентов.

**Свойства сочетаний. Треугольник Паскаля**

**ТЕОРЕМА 15.22**

Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$, тогда

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$
2. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$
3. $C_n^0 = C_n^n = 1$
4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$
5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

● ●$_1$ Это свойство мы уже, фактически, доказали (формула (15.34)). Приведем еще одно доказательство.

$$C_n^{n-m} \overset{(15.30)}{=} \frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \overset{(15.30)}{=} C_n^{n-m}.$$

●$_2$ Возьмем произвольное множество $X$, содержащее $n+1$ элемент, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Множество всех $(m+1)$-элементных подмножеств $X$ $\left(\Leftrightarrow \mathbb{C}_X^{m+1}\right)$ разобьем на два непересекающихся подмножества I и II, отнеся к I такие $m+1$ элементов подмножества $X$, которые содержат $x_{n+1}$, а к II — которые не содержат $x_{n+1}$. Тогда

$$C_{n+1}^{m+1} = \left|\mathbb{C}_X^{m+1}\right| = |\mathrm{I} + \mathrm{II}| \overset{\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=\varnothing}{=} |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}|. \tag{15.37}$$

Ясно, что

$$|\mathrm{II}| = \left|\mathbb{C}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}^{m+1}\right| = C_n^{m+1}. \tag{15.38}$$

Любое $(m+1)$-элементное подмножество $X$, содержащее элемент $x_{n+1}$, можно образовать так: взять $m$-элементное подмножество множества $X \setminus \{x_{n+1}\}$ и добавить к нему элемент $x_{n+1}$, тогда

$$|\mathrm{I}| = \left|\mathbb{C}_{X\setminus\{x_{n+1}\}}^{m}\right| = C_n^m. \tag{15.39}$$

Подставим (15.38) и (15.39) в (15.37):

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$

●$_3$ Его справедливость следует из смысла $C_n^0$ (количество пустых подмножеств в данном множестве) и $C_n^n$ (количество $n$-элементных подмножеств во множестве из $n$ элементов).

●$_4$ Возьмем формулу бинома (15.35) и подставим в нее $a = b = 1$, получим

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

●$_5$ Положим в (15.36) $x = -1$. ●

Биномиальные коэффициенты обладают еще рядом замечательных свойств, которые будут изучены позже.

Свойства 2 и 3 лежат в основе конструкции треугольника Паскаля[7], слои которого — наборы биномиальных коэффициентов соответствующих степеней бинома. Каждый следующий слой треугольника Паскаля вычисляется с помощью свойств 2 и 3 из предыдущего слоя.

| Бином | Треугольник Паскаля |
|---|---|
| $(a+b)^0=1$ | 1 |
| $(a+b)^1=a+b$ | 1 1 |
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ | 1 2 1 |
| $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | 1 3 3 1 |
| $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| ..... | ... ... ... ... ... ... ... |

**Определение 15.34.** *Пусть $X$ — множество. Обозначим через $2^X$ множество всех его подмножеств.*

● *ПРИМЕР 15.13.* Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, тогда

$$2^X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

**ТЕОРЕМА 15.23**

Если $X$ — конечное множество, то

$$\left|2^X\right| = 2^{|X|}. \tag{15.40}$$

● Очевидно, если $X = \varnothing$, теорема верна. Пусть $X \neq \varnothing$, тогда

$$2^X = \bigcup_{k=0}^{|X|} \mathbb{C}_X^k$$

[7] Паскаль Блез (1623–1662) — французский математик, физик (закон Паскаля), философ. Один из основателей Парижской академии наук. Паскалю принадлежит ряд теорем проективной геометрии о конических сечениях, работы по теории арифметических рядов и биномиальных коэффициентов. Паскаль и Ферма первыми подошли к классическому понятию вероятности события и по праву считаются основоположниками теории вероятностей. Б. Паскаль внес существенный вклад в разработку основных идей математического анализа — анализ бесконечно малых, а также доказал теоремы о замене переменных и интегрировании по частям.

и множества $\mathbb{C}_X^k$ попарно не пересекаются. По правилу суммы

$$|2^X| = \left|\bigcup_{k=0}^{|X|} \mathbb{C}_X^k\right| = \sum_{k=0}^{|X|} |\mathbb{C}_X^k| = \sum_{k=0}^{|X|} C_{|X|}^k \overset{\text{п.4 теор. 15.22}}{=} 2^{|X|}. \quad \bullet$$

● *ЗАДАЧА 15.7.* В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать из них 3 делегатов на профсоюзную конференцию?

● Ясно, что представители, выбранные на конференцию, — 3-элементное подмножество множества студентов группы, тогда

$$\text{«число способов выбора»} = \left|\mathbb{C}^3_{\text{студентов группы}}\right| = C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300. \quad \bullet$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение бесконечного множества (т. е. не являющегося конечным).
2. Справедливо ли следующее утверждение: «Отображение $|\ \ |$, действующее из множества конечных множеств во множество $\mathbb{Z}_+$ — неотрицательных целых чисел, сюръективно»?
3. В студенческой группе 25 человек, 13 из них знают английский язык, 12 — немецкий, 13 — французский, 4 человека знают английский и французский, 6 — английский, немецкий и французский. Сколько студентов знают все три языка?
4. Попробуйте самостоятельно составить комбинаторные задачи, сводящиеся к нахождению числа элементов в декартовом произведении множеств и во множестве степень.
5. Справедливы ли теоремы, обратные к теоремам 15.12, 15.13, 15.14, и как они формулируются?
6. Попробуйте доказать коммутативность сложения и умножения натуральных чисел, используя комбинаторный подход.
7. Приведите комбинаторное доказательство того факта, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении бинома $(a + b)^n$ по степеням $a$, $b$, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах (свойство 5 размещений).
8. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «арбуз»?
9. То же самое для слова «математика».
10. Сравнивая задачи 3 и 4, попробуйте ввести понятие «перестановка с повторениями» и получить формулу для числа перестановок с повторениями.

# XVI

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## § 16.1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВА НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Мы будем считать, что нам известно из школы понятие рационального и иррационального числа, числовой оси (см. § 1.1 гл. 1).

Напомним стандартные обозначения некоторых множеств на числовой оси.

Пусть $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, тогда

$$
\begin{aligned}
[a;b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}^{1} \text{ — сегмент} \\
(a;b) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\} \text{ — интервал} \\
\left.\begin{aligned} [a;b) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \,\} \\ (a;b] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \,\} \end{aligned}\right\} &\text{ — полуинтервал} \\
(-\infty;a] &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a \,\} \\
(-\infty;a) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < a \,\} \\
(a;\infty) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a \,\} \\
[a;\infty) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a \,\}.
\end{aligned}
$$

В этих обозначениях $\mathbb{R} = (-\infty;\infty)$.

**Определение 16.1.** *Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\delta(\in \mathbb{R}) > 0$, $\delta$-окрестностью точки $a$ будем называть интервал $s(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$.*

Заметим, что $x \in s(a,\delta) \iff |x-a| < \delta$.

Отметим известное нам из школы свойство множества рациональных чисел $(Q)$:

В $\delta$-окрестности любой точки $a \in \mathbb{R}$ существует хотя бы одна рациональная точка.

Замечательным следствием этого является утверждение

**ТЕОРЕМА 16.1**

В $\delta$-окрестности любой точки $a \in \mathbb{R}$ существует бесконечно много рациональных точек.

● Зафиксируем $\delta > 0$. Рассмотрим два случая: 1) $a$ — рациональное число; 2) $a$ — иррациональное число.

[1] Справа за чертой пишется условие, по которому выделяются элементы определяемого множества.

●$_1$ Рассмотрим неравенство

$$a - \delta < a - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16.1}$$

Оно равносильно неравенству $\frac{1}{n} < \delta$ или $n > \frac{1}{\delta}$. Ясно, что $n_1 = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$ является решением неравенства (16.1),[2] и все $n > N_1$ также являются решениями неравенства (16.1), тогда

$$\begin{aligned}
x_1 &= a - \frac{1}{n_1} &&\in s(a,\delta),\\
x_2 &= a - \frac{1}{n_1+1} &&\in s(a,\delta),\\
x_3 &= a - \frac{1}{n_1+2} &&\in s(a,\delta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_k &= a - \frac{1}{n_1+(k-1)} &&\in s(a,\delta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Мы построили бесконечный набор рациональных чисел, находящихся в $s(a,\delta)$. ●$_1$

●$_2$ Рассмотрим $s(a,\delta)$. Из сказанного выше следует, что в ней есть хотя бы одна рациональная точка $x_1$, при этом $x_1 \neq a$ ($a$ — иррационально). Пусть $\delta_1 = |a - x_1|$. Рассмотрим $s\left(a, \frac{\delta_1}{2}\right)$. В ней есть рациональная точка $x_2$ $(\neq a)$. Заметим, что $s\left(a, \frac{\delta_1}{2}\right) \subset s(a,\delta)$, значит, $x_2 \in s(a,\delta)$. Обозначим $\delta_2 = |x_2 - a|$. Обозначим через $x_3$ рациональную точку, принадлежащую $s\left(a, \frac{\delta_2}{2}\right)$. Ясно, что $s\left(a, \frac{\delta_2}{2}\right) \subset s\left(a, \frac{\delta_1}{2}\right) \subset s(a,\delta)$ $\Longrightarrow$ $x_3 \in s(a,\delta)$ и т. д. ●$_2$ ●

Свойство, доказанное в теореме 16.1, называют свойством плотности множества $Q$ во множестве $\mathbb{R}$.

*Замечание 16.1.* Можно рассматривать так называемую левую (правую) полуокрестность точки $a$ — $s_-(a,\delta) = (a-\delta, a]$ $\left(s_+(a,\delta) = [a, a+\delta)\right)$ и говорить о левой (правой) плотности $Q$ в $\mathbb{R}$.

Важным, принимаемым нами без доказательства, свойством множества $Q$ в $\mathbb{R}$ является следующее:

**ТЕОРЕМА 16.2**
Для любых $a < b$ $(\in \mathbb{R})$ существует $r \in Q$ такое, что

$$a < r < b. \tag{16.2}$$

Заметим, что с помощью предикатов и кванторов это утверждение записывается так:

$$\forall a\,(\in \mathbb{R})\ \forall b\,(\in \mathbb{R})\ \exists r\,(\in Q)\big((a<b) \to (a<r<b)\big) \text{ — истина}$$
$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a\,(\in \mathbb{R})\ \forall b\,(\in \mathbb{R})\ \exists r\,(\in Q)\big((a<b) \Longrightarrow a<r<b\big).$$

[2] $[x]$ — целая часть $x$ — наибольшее целое, не превосходящее $x$.

## § 16.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 16.2.** *Числовой последовательностью* ($\Leftrightarrow$ *последовательностью*) *называют отображение, действующее из* $\mathbb{N}$ *в* $\mathbb{R}$.

Для последовательности вместо $f(n)$ пишут $a_n$, а вместо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — $\{a_n\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

*ПРИМЕР 16.1.*

а) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ \ldots,\ a_n = n,\ \ldots$

б) $b_1 = -1,\ b_2 = 1,\ b_3 = -1,\ \ldots,\ b_n = (-1)^n,\ \ldots$

в) $c_1 = 2,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2,\ \ldots,\ c_n = 2,\ \ldots$

г) $d_1 = 1,\ d_2 = \frac{1}{2},\ d_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ d_n = \frac{1}{n},\ \ldots$

д) $f_1 = -1,\ f_2 = \frac{1}{2},\ f_3 = -\frac{1}{3},\ \ldots,\ f_n = (-1)^n \frac{1}{n},\ \ldots$

Для последовательности $\{a_n\}$ вместо графика на декартовой плоскости применяют другую геометрическую интерпретацию — изображают на числовой оси помеченные точки $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

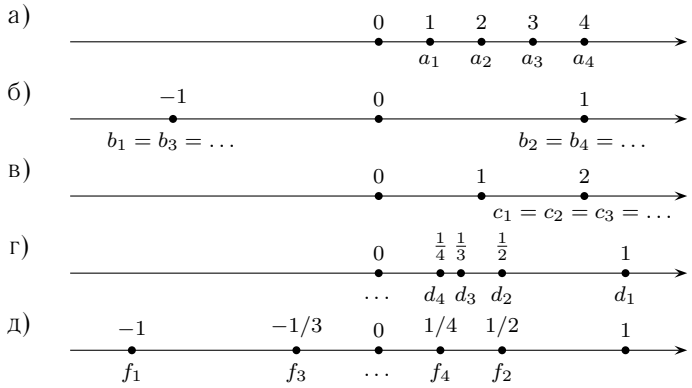



*Рис. 16.1.*

*ПРИМЕР 16.2.* На рисунке, приведенном выше (рис. 16.1), дана геометрическая интерпретация последовательностей примера 16.1 а), б), в), г), д) соответственно.

Приведенные примеры показывают, что среди последовательностей существуют такие, элементы которых «скапливаются» около некоторой точки числовой оси (16.1 в) — около точки 2, 16.1 г) — около точки 0, 16.1 д) — около точки 0), которую в этом случае называют пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n$, стремящемся к бесконечности. Дадим теперь четкое определение этого пока интуитивного понятия.

**Определение 16.3.** *Число* $a$ *называется пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$ *при* $n$*, стремящемся к бесконечности, что обозначают*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad (a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a)$$

*если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N$*, что для всех номеров* $n$*, больших* $N$*, выполняется неравенство*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Заметим, что определение предела числовой последовательности требует выполнения неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ для элементов последовательности с номерами $n$, удовлетворяющими неравенству $n > N$, и ничего не требует от элементов последовательности с меньшими номерами.

Это позволяет записать определение предела числовой последовательности на языке предикатов и кванторов следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\, \forall n \left((n > N) \to |a_n - a| < \varepsilon\right) \text{ — истина } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\, \forall n \left((n > N) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right). \quad (16.3)$$

Теперь легко понять, что означает то, что число $a$ не является пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n$, стремящемся к бесконечности. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\, \forall n \left((n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)\right) \text{ — ложь } \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\ \overline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N\, \forall n \left((n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)\right)} \text{ — истина } \Longleftrightarrow$$
$$\overset{\text{т. 15.2, пп. 3, 4}}{\Longleftrightarrow}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\, \exists n\, \overline{\left((n > N) \to (|a_n - a| < \varepsilon)\right)} \text{ — истина}$$
$$\overset{\text{т. 15.1}}{\Longleftrightarrow}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\, \exists n\, \overline{\left(\overline{(n > N)} \vee (|a_n - a| < \varepsilon)\right)} \text{ — истина } \Longleftrightarrow$$
$$\overset{\text{т. 15.1, п. 7}}{\Longleftrightarrow}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\, \exists n \left(\overline{\overline{(n > N)}} \cdot \overline{(|a_n - a| < \varepsilon)}\right) \text{ — истина } \Longleftrightarrow$$
$$\overset{\text{т. 15.1, п. 0}}{\Longleftrightarrow}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\, \exists n \left((n > N) \cdot \overline{(|a_n - a| < \varepsilon)}\right) \text{ — истина } \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\, \exists n \left((n > N) \cdot (|a_n - a| \geqslant \varepsilon)\right) \text{ — истина.}$$

Геометрическая интерпретация того, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ состоит в следующем: «Каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, все элементы последовательности, начиная с некоторого номера, находятся внутри $\varepsilon$-окрестности точки $a$ — $s(a, \varepsilon)$».

● *ПРИМЕР 16.3.* Покажем с помощью определения 16.3, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

● Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \ \Longleftrightarrow \quad (16.4)$$
$$\Longleftrightarrow \left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon \ \Longleftrightarrow\ \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \ \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Longleftrightarrow\ n > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (16.5)$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Ясно, что все $n > N$ являются решениями неравенства (16.5), а значит, и исходного неравенства (16.4). ●

Вычисление предела с помощью определения довольно «хлопотное» дело. Сейчас мы изучим некоторые свойства пределов числовых последовательностей, что существенно облегчит эту задачу.

**ТЕОРЕМА 16.3 (Теорема о единственности предела)**
Если последовательность имеет предел, то он единственен.

● Предположим противное, т. е. что существует такая последовательность $\{a_n,\}$, которая имеет более одного предела, т. е. по крайней мере два числа $a$ и $b$, $a \neq b$ удовлетворяют определению 16.3 для последовательности $\{a_n\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon$ такое, что $0 < \varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$. Тогда

1. $s(a,\varepsilon) \cap s(b,\varepsilon) = \varnothing$.
2. Так как $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, то существует $N_1$, такое, что элементы последовательности $\{a_n\}$ с номерами, большими чем $N_1$, находятся внутри $s(a,\varepsilon)$. Аналогично, так как $b = \lim_{n\to\infty} a_n$, то существует $N_2$ такое, что элементы последовательности $\{a_n\}$ с номерами, большими чем $N_2$, находятся внутри $s(b,\varepsilon)$.

Пусть $N_3 = \max\{N_1, N_2,\}$, тогда элементы последовательности $\{a_n\}$ с номерами, большими $N_3$, должны одновременно находиться в $s(a,\varepsilon)$ и $s(b,\varepsilon)$, т. е. являться элементами $s(a,\varepsilon) \cap s(b,\varepsilon)$, что противоречит 1). ●

**ТЕОРЕМА 16.4**
Предел постоянной последовательности ($a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$) равен этой постоянной.

● $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ для любого положительного $\varepsilon$, и это верно при всех $n$, начиная с $n = 1$. ●

**ТЕОРЕМА 16.5 (Принцип двух милиционеров)**
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ и последовательность $\{b_n\}$ такова, что $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \ \ \forall n$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

● Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $N_1$ таково, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n < N_1$. $N_2$ таково, что $|c_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_2$. Пусть $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$.

Пусть $n > N_3$, тогда точки $a_n$ и $c_n$ находятся внутри $s(a,\varepsilon)$, их возможные расположения представлены на рис. 16.2:

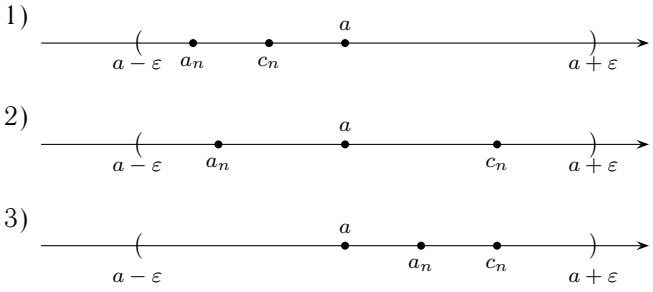



*Рис. 16.2.*

Точки $b_n \in [a_n, c_n]$, но в любом из трех случаев $[a_n, c_n] \subset s(a,\varepsilon)$, значит, и $b_n \in s(a,\varepsilon)$. Последнее означает, что $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ●

Покажем, как «работает» эта теорема. Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\qquad \lim_{n\to\infty}0=0;$$
$$0\leqslant\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\frac{1}{n}\text{ при }\alpha\geqslant 1\overset{\text{т. 16.5}}{\Longrightarrow}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$$

Приведем несколько определений, касающихся поведения последовательностей.

**Определение 16.4.** *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число $M$, что для любого $n$ выполнено неравенство*

$$a_n\leqslant M, \tag{16.6}$$
$$(M\leqslant a_n)\,. \tag{16.6′}$$

**Определение 16.5.** *Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число $M$, что для любого $n$ выполнено неравенство*

$$|a_n|\leqslant M. \tag{16.7}$$

Ясно, что последовательность примера 16.1 а) ограничена снизу, но не ограничена сверху, и, следовательно, не ограничена.

Последовательность примера 16.1 б) ограничена сверху и снизу и, следовательно, ограничена.

Последовательность $\{(-1)^n n\}$ не является ограниченной сверху и снизу и, следовательно, она неограничена.

*Замечание 16.2.* Ясно, что если последовательность ограничена, то она ограничена и сверху и снизу (сверху числом $M$, снизу числом $-M$).

Монотонные последовательности бывают 4 типов. Тип монотонности в зависимости от поведения последовательности опишем таблицей.

| **Тип монотонности** | **Поведение** |
|---|---|
| Монотонно возрастающая | $a_1<a_2<a_3<\cdots$ |
| Монотонно неубывающая | $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots$ |
| Монотонно убывающая | $a_1>a_2>a_3>\cdots$ |
| Монотонно невозрастающая | $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$ |

Последовательность примера 16.1 а) — монотонно возрастающая, последовательность $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$ — монотонно убывающая, последовательность примера 16.1, б) не является монотонной.

**ТЕОРЕМА 16.6 (Необходимое условие существования предела)**
Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

● Пусть $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Возьмем $\varepsilon=1$ и найдем $N_1$ такое, что

$$|a_n-a|<1 \tag{16.8}$$

при любом $n$, большем $N_1$. Неравенство (16.8) равносильно следующему неравенству:

$$a-1<a_n<a+1, \tag{16.9}$$

справедливому, когда $n>N_1$.

Рассмотрим конечное множество чисел

$$A = \{|a-1|, |a+1|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|\}$$

(среди них могут быть и одинаковые).

Пусть $M = \max\{|a-1|, |a+1|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|\}$. Ясно, что из (16.9) и выбора множества $A$ и числа $M$ следует, что при всех $n$ выполнено

$$|a_n| \leqslant M. \quad \bullet$$

*Замечание 16.3.* Условие ограниченности последовательности не является достаточным для существования предела, так как последовательность $\{(-1)^n\}$ является ограниченной, но предела не имеет.

Оказывается, что монотонность и ограниченность достаточны для существования предела последовательности.

**ТЕОРЕМА 16.7**
Монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел.

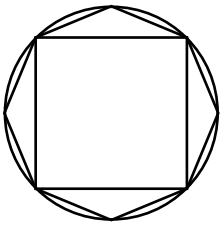


*Рис. 16.3.*

Применение этой теоремы достаточно широко. Проиллюстрируем ее.

Рассмотрим окружность и впишем в нее квадрат с периметром $P_1$. Впишем в эту окружность правильный восьмиугольник с периметром $P_2$, затем правильный 16-угольник с периметром $P_3$, и т. д. (см. рис. 16.3).

У нас возникла возрастающая последовательность $\{P_n\}$. Эта последовательность ограничена сверху, например, периметром квадрата, описанного около этой окружности. Значит, $\lim_{n\to\infty} P_n$ существует. Длиной окружности — $C$ и называют предел этой последовательности, т. е.

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} P_n.$$

В заключение параграфа приведем без доказательства критерий существования предела у числовой последовательности (критерий Коши).

**ТЕОРЕМА 16.8 (Критерий Коши)**
Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N$, чтобы для всех $n, m > N$ выполнялось неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Этот критерий, конечно, не дает способа нахождения предела в случае его существования.

## § 16.3. ТЕОРЕМЫ ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРЕДЕЛ

**ТЕОРЕМА 16.9**
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, тогда последовательность-сумма $\{a_n + b_n\}$ также имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b. \tag{16.10}$$

● Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $a_n$ имеет предел, то для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует номер $N_1$ такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.11}$$

Аналогично существует $N_2$ такое, что для всех $n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.12}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N$ выполняются и (16.11) и (16.12). Оценим

$$\big|a_n + b_n - (a + b)\big| = \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $a + b$ является пределом последовательности $\{a_n + b_n\}$. ●

**ТЕОРЕМА 16.10**
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, тогда последовательность-произведение $\{a_n b_n\}$ имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{16.13}$$

*Следствие.* Если $a \in \mathbb{R}$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то

$$\lim_{n\to\infty} ab_n = a \lim_{n\to\infty} b_n.$$

● ●

**ТЕОРЕМА 16.11**
Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, все элементы последовательности $b_n$ отличны от нуля и $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, тогда последовательность-частное $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}. \tag{16.14}$$

● ●

## § 16.4. ЧИСЛО $e$

Рассмотрим последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Докажем, что она имеет предел. Оказывается, что эта последовательность монотонно возрастающая и ограниченная сверху. Воспользуемся формулой бинома Ньютона (15.35)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + C_n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (16.15)$$

При переходе в формуле (16.15) от $n$ к $n+1$ в ней увеличится на единицу число слагаемых и каждое из первых $n+1$ слагаемых увеличится, так как

$$\left(1-\frac{s}{n}\right) < 1 - \frac{s}{n+1} \qquad \text{при } s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Но тогда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, что означает монотонное возрастание этой последовательности. Докажем теперь, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Воспользуемся формулой (16.15):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \overset{\left(1-\frac{s}{n}\right)<1}{<}$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \alpha.$$

Заметим, что

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots k \overset{k\geqslant 2}{\geqslant} 2^{k-1},$$

тогда

$$\alpha \leqslant 2 + \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} = \beta.$$

Применим к подчеркнутой части формулу суммы первых $n-1$ членов геометрической прогрессии, тогда

$$\beta = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2 + \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant 3.$$

Итак, мы доказали, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3.$$

Тогда по теореме 16.7 эта последовательность имеет предел. Этот предел обозначают $e$, т. е.

$$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Заметим, что мы уже, фактически, доказали, что

$$2 < e < 3.$$

Известно, что $e$ — иррациональное трансцендентное число и

$$e \approx 2{,}718281828459\ldots$$

## § 16.5. ДОПОЛНЕНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ

Нам уже ясно, что далеко не всякая последовательность имеет предел, и причины его отсутствия могут быть разными.

Выделим особо те случаи отсутствия предела у числовой последовательности $\{a_n\}$, когда это связано с неограниченным ростом $|a_n|$, $a_n$ или неограниченным убыванием $a_n$.

**Определение 16.6.** *Говорят, что последовательность* $\{a_n\}$ *имеет предел, равный* $\infty$ $(+\infty,\ -\infty)$, *если для любого* $M > 0$ *существует такой номер* $N$, *что для всех* $n > N$ *выполнено* $|a_n| > M$ $(a_n > M,\ a_n < -M)$ *и пишут* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$.

Понятно, что такие последовательности предела не имеют и символы $\infty$, $+\infty$, $-\infty$ не являются числами.

Ясно, что $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Рассмотрим еще один пример достаточно общего характера.

Пусть

$$c_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}, \quad k, l \geqslant 1,$$

т. е. $n$-й член последовательности — это отношение значений двух многочленов от $n$, числитель имеет степень, равную $k$, знаменатель — $l$.

Ясно, что предел этой последовательности не может быть вычислен с помощью теоремы 16.11, так как предел числителя и знаменателя не существует. Мы находимся в ситуации, когда числитель и знаменатель удовлетворяют определению 16.6.

В этом случае говорят о неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

Возможны три случая а) $k = l$, б) $k < l$, в) $k > l$. Рассмотрим их отдельно.

а)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + a_{k-2}\frac{1}{n^2} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k}\right)}{n^k\left(b_k + b_{k-1}\frac{1}{n} + b_{k-2}\frac{1}{n^2} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{k-1}} + b_0\frac{1}{n^k}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + a_{k-2}\frac{1}{n^2} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_k + b_{k-1}\frac{1}{n} + a_{k-2}\frac{1}{n^2} + \cdots + b_1\frac{1}{n^{k-1}} + b_0\frac{1}{n^k}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_k + a_{k-1}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}}{\lim\limits_{n\to\infty} b_k + b_{k-1}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \cdots + b_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-1}} + b_0\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}} =$$

$$= \frac{a_k + 0 + \cdots + 0}{b_k + 0 + \cdots + 0} = \frac{a_k}{b_k}.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_1n+b_0}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^l\left(a_k\frac{1}{n^{l-k}}+a_{k-1}\frac{1}{n^{l-k+1}}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{l-1}}+a_0\frac{1}{n^l}\right)}{n^l\left(b_l+b_{l-1}\frac{1}{n}+b_{l-2}\frac{1}{n^2}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{l-1}}+b_0\frac{1}{n^l}\right)}=$$

$$=\frac{a_k\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{l-k}}+\cdots+a_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{l-1}}+a_0\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^l}}{\lim\limits_{n\to\infty}b_l+b_{l-1}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{l-1}}+b_0\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^l}}=$$

$$=\frac{0+0+\cdots+0}{b_l+0+\cdots+0}=\frac{0}{b_l}=0.$$

в)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_1n+b_0}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^{k-l}+a_{k-1}n^{k-l-1}+\cdots+a_l+a_{l-1}\frac{1}{n}+\cdots+a_1\frac{1}{n^{l-1}}+a_0\frac{1}{n^l}}{b_l+b_{l-1}\frac{1}{n}+\cdots+b_1\frac{1}{n^{l-1}}+b_0\frac{1}{n^l}}.$$

Ясно, что знаменатель имеет предел, равный $b_l\ (\neq 0)$, а числитель предела не имеет и удовлетворяет определению 16.6. В целом вся дробь удовлетворяет определению 16.6, и мы имеем в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\begin{cases}+\infty, & \text{если } \frac{a_k}{b_l}>0,\\ -\infty, & \text{если } \frac{a_k}{b_l}<0.\end{cases}$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Почему для числовой последовательности применяют в качестве геометрической интерпретации не график на плоскости, а помеченные точки на числовой оси?
2. Приведите пример последовательности, имеющей предел, равный:
   а) 2; б) $-3$; в) $\sqrt{2}$; г) $a\ (\in\mathbb{R})$.
3. Каково необходимое условие существования предела последовательности?
4. Справедливы ли теоремы, обратные к теоремам об арифметических операциях над последовательностями, имеющими предел?
5. Определите площадь боковой поверхности прямого кругового конуса с помощью понятия «предел последовательности».

# XVII

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

В этой главе мы перенесем понятие предела числовой последовательности на числовые функции. При этом различия будут в исходных определениях, однако почти все доказанное для числовых последовательностей переносится и на числовые функции.

## § 17.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

**Определение 17.1.** *Пусть $a \in \mathbb{R}$. Выколотой $\delta$-окрестностью точки $a$ называют множество, обозначаемое $s'(a,\delta)$ и определяемое следующим:*

$$x \in s'(a,\delta) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x-a| < \delta. \tag{17.1}$$

**Определение 17.2.** *Пусть $f : X \to Y$ — числовая функция и пусть $x_0$ $(\in \mathbb{R})$ — такая точка, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s'(x_0,\delta_0) \subset X$. Число $b$ называется пределом функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $x_0$, и в этом случае пишут $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta$, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta \leqslant \delta_0$ такое, что для всех $x \in s'(x_0,\delta)$ выполнено неравенство*

$$|f(x)-b| < \varepsilon \qquad \big(\Longleftrightarrow \quad f(x) \in s(b,\varepsilon)\big). \tag{17.2}$$

Так как в определении 17.2 ничего не говорится о поведении функции $f(x)$ при $x \notin s'(x_0,\delta)$, то на языке предикатов и кванторов определение предела функции выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\,(0 < \delta \leqslant \delta_0)\ \forall x\,(\in X)\ \Big(x \in s'(x_0,\delta) \Longrightarrow \big(f(x) \in s(b,\varepsilon)\big)\Big). \tag{17.3}$$

Разберемся, что это означает геометрически. Для этого рассмотрим в декартовой системе координат график функции $y = f(x)$ и горизонтальную прямую $y = b$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и изобразим горизонтальную открытую полосу, центрально-симметричную относительно прямой $y = b$, ограниченную прямыми $y = b-\varepsilon$, $y = b+\varepsilon$. Через точку $(x_0, 0)$ проведем вертикальную прямую $x = x_0$. Число $b$ является пределом

$f(x)$ при $x \to x_0$, если независимо от ширины горизонтальной полосы всегда можно указать такое $\delta$, что

1) функция $f(x)$ определена на $s'(x_0, \delta)$;
2) часть графика функции $f(x)$, попавшая в объединение вертикальных полос $(x_0 - \delta < x < x_0) \cup (x_0 < x < x_0 + \delta)$, находится и внутри горизонтальной полосы, т. е. находится во множестве

$$(b - \varepsilon < y < b + \varepsilon) \cap \big((x_0 - \delta < x < x_0) \cup (x_0 < x < x_0 + \delta)\big).$$

*Замечание 17.1.* В определении 17.2 ничего не говорится о том, определена или не определена функция $f$ в точке $x_0$, и если определена, то значение функции $f(x_0)$ в определении 17.2 не фигурирует.

Если функция $f : X \to Y$ такова, что существует $a \in X$ такое, что $(a, \infty) \subset X$ $\big((-\infty; a) \subset X\big)$, то можно дать определение предела функции $f$ при $x$, стремящемся к $+\infty$ $(-\infty)$.

**Определение 17.3.** *Пусть $f : X \to Y$ и существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $(a, +\infty) \subset X$ $\big((-\infty, a) \subset X\big)$. Число $b$ называется пределом функции $f$ при $x$, стремящемся к $+\infty$ $(-\infty)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $M \geqslant a$ $(M \leqslant a)$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $x > M$ $(x < M)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ $\big(\Leftrightarrow f(x) \in s(b, \varepsilon)\big)$.*

**Определение 17.4.** *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Левой (правой) $\delta$-полуокрестностью точки $x_0$ будем называть множество $(x_0 - \delta, x_0]$ $([x_0, x_0 + \delta))$, обозначаемое $s_-(x_0, \delta)$ $(s_+(x_0, \delta))$, т. е.*

$$\begin{gathered} x \in s_-(x_0, \delta) \iff x_0 - \delta < x \leqslant x_0 \\ \big(x \in s_+(x_0, \delta) \iff x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\big). \end{gathered}$$

**Определение 17.5.** *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Выколотой левой (правой) $\delta$-окрестностью точки $x_0$ называется множество, обозначаемое $s'_-(x_0, \delta)$ $\big(s'_+(x_0, \delta)\big)$ и определяемое следующим:*

$$\begin{aligned} s'_-(x_0, \delta) &= (x_0 - \delta, x_0) \\ \big(s'_+(x_0, \delta) &= (x_0, x_0 + \delta)\big). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} s(x_0, \delta) &= s_+(x_0, \delta) \cup s_-(x_0, \delta) \\ s_+(x_0, \delta) \cap s_-(x_0, \delta) &= \{x_0\} \\ s'(x_0, \delta) &= s'_+(x_0, \delta) \cup s'_-(x_0, \delta) \\ s'_+(x_0, \delta) \cap s'_-(x_0, \delta) &= \varnothing. \end{aligned} \tag{17.4}$$

**Определение 17.6.** *Пусть $f : X \to Y$ — числовая функция $(\Leftrightarrow X, Y \subset \mathbb{R})$, $x_0 (\in \mathbb{R})$ — такая точка, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s'_-(x_0, \delta_0) \subset X$ $(s'_+(x_0, \delta_0) \subset X)$. Число $b$ называется левым (правым) односторонним пределом функции $f$ при $x$, стремящемся к $x_0$ слева (справа), и в этом случае пишут $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ $(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta$, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta \leqslant \delta_0$, такое, что для всех $x \in s'_-(x_0, \delta)$ $\big(x \in s'_+(x_0, \delta)\big)$ выполнено неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{17.5}$$

На языке предикатов и кванторов это определение выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\,(0 < \delta \leqslant \delta_0)\ \forall x$$
$$\Big(\big(x \in s'_-(x_0, \delta)\big) \implies \big(f(x) \in s(b, \varepsilon)\big)\Big) \tag{17.6}$$

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\,(0 < \delta \leqslant \delta_0)\ \forall x$$
$$\big(\big(x \in s'_+(x_0, \delta)\big) \implies \big(f(x) \in s(b, \varepsilon)\big)\big)\Big). \tag{17.7}$$

Отсюда следует, что справедлива

**ТЕОРЕМА 17.1**
Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел при $x$, стремящемся к $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы она имела левый и правый односторонние пределы при $x$, стремящемся к $x_0$ слева и справа соответственно, и чтобы эти односторонние пределы были равны между собой.

*ПРИМЕР 17.1.* Рассмотрим функцию $\operatorname{sign} x$, заданную правилом:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

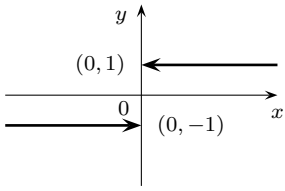



*Рис. 17.1.*

Ее график приведен на рис. 17.1.
Ясно, что:

1) если $x_0 < 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to x_0 - 0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to x_0 + 0} \operatorname{sign} x = -1;$$

2) если $x_0 > 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to x_0 - 0} \operatorname{sign} x = \lim_{x \to x_0 + 0} \operatorname{sign} x = 1;$$

3) $\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, и значит, по теореме 17.1 $\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$ не существует.

**ТЕОРЕМА 17.2 (Связь между пределом функции и пределом последовательности)**
Для того чтобы *функция $f(x)$ имела предел при $x$, стремящемся к $x_0$, равный* $b$[1], необходимо и достаточно, чтобы для любой числовой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ имела предел при $n$, стремящемся к бесконечности, и $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

[1] В дальнейшем запись в тексте $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ будет заменять набранное курсивом.

**ТЕОРЕМА 17.3 (Необходимое условие существования предела)**
Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел при $x \to x_0$, необходимо, чтобы существовало $\delta > 0$ такое, что на множестве $s'(x_0, \delta)$ функция $f(x)$ была ограниченной.

*Замечание 17.2.* Пример 17.1 показывает, что ограниченности функции на некоторой выколотой $\delta$-окрестности $s'(x_0, \delta)$ не достаточно для существования предела при $x$, *стремящемся к* $x_0$[2].

**ТЕОРЕМА 17.4**
Пусть $f_1 : X_1 \to Y_1$; $f_2 : X_2 \to Y_2$; $f_3 : X_3 \to Y_3$ — числовые функции, $x_0 \in \mathbb{R}$ и существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s'(x_0, \delta) \subset X_1$, $s'(x_0, \delta) \subset X_2$, $s'(x_0, \delta) \subset X_3$ и
1) для любого $x \in s'(x_0, \delta)$ выполнено неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$;
2) $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_3(x)$,
тогда $\lim_{x \to x_0} f_2(x)$ существует и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_3(x).$$

## § 17.2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ПРЕДЕЛ

В этом очень коротком параграфе будут сформулированы теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел в точке (обычный или односторонний). Эти теоремы аналогичны теоремам для последовательностей гл. 16 § 16.3, однако они требуют большей строгости в формулировках.

Напомним, что мы понимаем под арифметическими операциями над числовыми функциями.

**Определение 17.7.** *Пусть* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ — *числовые функции и* $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. *Суммой (произведением) числовых функций* $f_1$ *и* $f_2$ *называется числовая функция* $f_1 + f_2$ $(f_1 \cdot f_2)$, *определенная на* $X_1 \cap X_2$ *следующим равенством:*

$$(f_1 + f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x) \tag{17.8}$$
$$\big((f_1 \cdot f_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) \cdot f_2(x)\big). \tag{17.9}$$

**Определение 17.8.** *Пусть* $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ — *числовые функции и* $(X_1 \cap X_2) \setminus f_2^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$ *(где* $x \in f_2^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$*). Частным функций* $f_1$, $f_2$ *называется функция* $f_1/f_2$, *определенная на* $(X_1 \cap X_2) \setminus f_2^{-1}(\{0\})$ *равенством*

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \tag{17.10}$$

[2] В дальнейшем запись в тексте $x \to x_0$ будет заменять выделенное курсивом.

**ТЕОРЕМА 17.5**
Пусть $f_1 + f_2$ $(f_1 \cdot f_2) : X \to Y$ — числовая функция и точка $x_0$ такова, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0, \delta) \subset X$ и функции $f_1$ и $f_2$ имеют предел при $x \to x_0$, тогда $f_1 + f_2$ $(f_1 \cdot f_2)$ также имеет предел при $x \to x_0$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) \tag{17.11}$$

$$\Big(\lim_{x \to x_0} \big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x)\Big) \tag{17.12}$$

**ТЕОРЕМА 17.6**
Пусть $f_1/f_2 : X \to Y$ — числовая функция и точка $x_0$ такова, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0, \delta) \subset X$ и функции $f_1$ и $f_2$ имеют предел при $x \to x_0$ и $\lim_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0$, тогда $f_1/f_2$ также имеет предел при $x \to x_0$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)}. \tag{17.13}$$

Аналогичные теоремы справедливы и для односторонних пределов.

## § 17.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Такое яркое название этого параграфа не случайно. В нем рассмотрено несколько пределов, которые носят такое название, так как они широко используются при решении как теоретических, так и практических задач.

### 17.3.1. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{17.14}$$

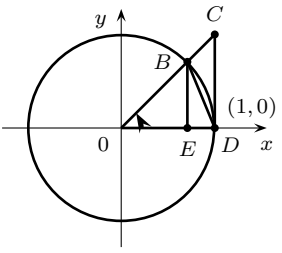


*Рис. 17.2.*

Пусть $x$ — значение аргумента (в радианах), удовлетворяющее неравенству $-\pi < x < \pi$. Из определения синуса, тангенса и простых геометрических соображений (см. рис. 17.2) имеем

$$S_{\triangle OBD} < S_{\text{сектора } OBD} < S_{\triangle OCD}$$

$$S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2}\sin x; \quad S_{\text{сектора } OBD} = \frac{1}{2}x;$$

$$S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x;$$

тогда

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \qquad \text{или}$$
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{17.15}$$

а) Если $x > 0$, то, разделив (17.15) на $\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Учитывая, что $\lim_{x\to 0} 1 = 1$; $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 (\neq 0)$ и применяя теорему 17.6, по которой $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, по теореме 17.4 получаем

$$1 = \lim_{x\to 0+0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\cos x}.$$

б) Если $x < 0$, то, разделив (17.15) на $\sin x$, получаем

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{x}{\sin x} < 1.$$

Далее, рассуждая аналогично а), получаем

$$1 = \lim_{x\to 0-0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{\cos x}.$$

Применяя теперь теорему 17.1, получаем, что $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sin x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \bullet$$

### 17.3.2. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

а) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \tag{17.16}$$

б) $$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{17.17}$$

● ● Заметим, что частный случай (17.17) уже рассмотрен в гл. 16, § 16.4.

### 17.3.3. ТРЕТИЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{17.18}$$

● ● Отметим, что формально третий замечательный предел является логарифмом от второго замечательного предела.

### 17.3.4. ЧЕТВЕРТЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{17.19}$$

Отметим, что четвертый замечательный предел получается из второго, если в (17.19) заменить $e$ на $(1+x)^{1/x}$ при $x$, близких к нулю.

### 17.3.5. ПЯТЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a. \tag{17.20}$$

*ПРИМЕР 17.2.* Вычислить пределы

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};\qquad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{3x};\qquad \text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}};$$

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x\cdot x}=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{y\to 0\\(y=\frac{x}{2})}}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{\substack{y\to 0\\(y=\frac{x}{2})}}\frac{\sin y}{y}\overset{(17.14)}{=}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\overset{(17.14)}{=}\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{3}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\ln(1+x^3)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3}{x^3\cdot\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}\cdot 8=$$
$$=8\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}}=8\cdot 1\cdot 1=8.$$

## § 17.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ

Важнейшим понятием современной математики является понятие непрерывности функции. Иногда говорят, что функция непрерывна, если ее график можно изобразить не отрывая пишущего инструмента от бумаги, но ясно, что это нельзя принять за определение, однако лишать понятие напрерывности наглядности и простоты мы не будем.

**Определение 17.9.** *Пусть $f: X\to Y$ — числовая функция и существует $\delta_0>0$ такое, что $s(x_0,\delta_0)\subset X$. Говорят, что функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, если существует $\lim_{x\to x_0}f(x)$ и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{17.21}$$

На языке «$\varepsilon$ — $\delta$» это определение выглядит так:

**Определение 17.10.** *Пусть $f : X \to Y$ — числовая функция и существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0, \delta_0) \subset X$. Говорят, что функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $0 < \delta < \delta_0$ и для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{17.22}$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta (0 < \delta < \delta_0) \forall x \big((|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\big)\big).$$

**Определение 17.11.** *Пусть $f : X \to Y$ $(X, Y \subset \mathbb{R})$ и $X_1 \subset X$, говорят, что функция $f$ непрерывна на множестве $X_1$, если она непрерывна во всех точках множества $X_1$.*

● *ПРИМЕР 17.3.* Ясно, что постоянная функция $y = a$ непрерывна во всех точках числовой оси и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$.

● *ПРИМЕР 17.4.* Ясно, что тождественная функция $y = x$ непрерывна во всех точках числовой оси, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$.

● *ПРИМЕР 17.5.* Функция $\operatorname{sign} x$, определенная в § 17.1, не является непрерывной в точке $x = 0$, так как $\lim_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$, а $\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$.

*Замечание 17.3.* По аналогии с односторонними пределами можно ввести понятие непрерывности в точке слева (справа).

Из теорем об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (т. 17.5, 17.6), следуют теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

**ТЕОРЕМА 17.7**

Если $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ $(X_1, X_2 \subset \mathbb{R})$, $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, $x_0 \in X_1 \cap X_2$ и существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0, \delta_0) \subset X_1 \cap X_2$. Если функции $f_1$ и $f_2$ непрерывны в точке $x_0$ (и $f_2(x_0) \neq 0$), то функции $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2 (f_1 / f_2)$ также непрерывны в точке $x_0$.

**ТЕОРЕМА 17.8 (Непрерывность композиции (сложной функции))**

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ $(X, Y, Z \subset \mathbb{R})$, точка $x_0$ такова, что $s(x_0, \delta_0) \subset$ $\subset X$, и существует $\delta_1 > 0$ такое, что $s\big(f(x_0), \delta_1\big) \subset Y$, и функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, $g$ — непрерывна в точке $f(x_0)$, тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке $x_0$.

● Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, так как функция $g$ непрерывна в точке $f(x_0)$, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что $\delta_2 < \delta_1$, что для любого $y \subset s\big(f(x_0), \delta_2\big)$

$$\big|g(y) - g\big(f(x_0)\big)\big| < \varepsilon. \tag{17.23}$$

Так как функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, то по $\delta_2 > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $x \in s(x_0, \delta)$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_2. \tag{17.24}$$

Пусть $y = f(x)$, тогда (17.24) означает, что для любого $x \in s(x_0, \delta)$ $f(x) \in \in s\big(f(x_0), \delta_2\big)$, и значит, для таких $x$ выполнено и (17.23), т. е. если $x \in s(x_0, \delta)$, то

$$\big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)\big| < \varepsilon.$$

Последнее и означает непрерывность композиции $g \circ f$ в точке $x_0$. ●

## § 17.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

### 17.5.1. МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Так как функция $y = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то по теореме 17.7 непрерывны и $y = x^2$ (так как $x^2 = x \cdot x$), $y = x^3$ (так как $x^3 = x^2 \cdot x$) и т. д., т. е. непрерывной на $\mathbb{R}$ является функция $y = x^n$ для любого натурального $n$.

**ТЕОРЕМА 17.9**
Многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

● Многочлен — конечная сумма одночленов $a_i x^i$, которые непрерывны как произведение непрерывных функций ($a_i$ — постоянная функция, $x^i$ — непрерывна (см. текст выше)), и значит, сам является непрерывной функцией как сумма непрерывных функций. ●

Из теоремы 17.7 (о непрерывности частного) следует

**ТЕОРЕМА 17.10**
Рациональная функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна во всех точках своей области определения (т. е. таких, где $Q(x) \neq 0$).

### 17.5.2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотрим функцию $y = a^x$, где $a > 0$. В школьном курсе математики она определена только для рациональных $x$. Если $x_0$ иррациональная точка, то можно построить монотонно возрастающую последовательность рациональных чисел $\{\bar{x}_n\}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_0$, и монотонно убывающую последовательность рациональных чисел $\{\underline{x}_n\}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = x_0$ (см. гл. 16, § 16.1). При этом, если $a = 1$, $a^{\underline{x}_n} = 1$; $a^{\bar{x}_n} = 1$ и мы имеем две постоянные последовательности $\{1^{\underline{x}_n}\} = \{1\}$, $\{1^{\bar{x}_n}\} = \{1\}$, имеющие общий предел, равный 1. Поэтому можно положить $a^{x_0} = 1$ и полученное значение $a^{x_0}$ таково, что функция $1^x$ определена в точке $x_0$ так, что она в этой точке непрерывна. Если $a > 1$, то последовательность $\{a^{\bar{x}_n}\}$ монотонно возрастающая, ограниченная сверху (например, числом $a^{\underline{x}_1}$), последовательность $\{a^{\underline{x}_n}\}$ — монотонно убывающая, ограниченная снизу ($a^{\underline{x}_n} \geqslant a^{\bar{x}_1}$). По теореме 16.5 эти последовательности имеют предел. Более того, имеет предел и последовательность $\left\{\frac{a^{\underline{x}_n}}{a^{\bar{x}_n}}\right\} = \{a^{\underline{x}_n - \bar{x}_n}\}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\underline{x}_n}}{a^{\bar{x}_n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\underline{x}_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\bar{x}_n}} = 1.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} a^{\underline{x}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\bar{x}_n}.$$

Возьмем в качестве $a^{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} a^{\underline{x}_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\bar{x}_n}$. Последним равенством мы, фактически, определили $a^{x_0}$ так, что функция $a^x$ непрерывна в точке $x_0$.

Если $0 < a < 1$, то можно применить тот же подход для определения $a^{x_0}$, только последовательность $\{a^{\underline{x}_n}\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная сверху, а $\{a^{\bar{x}_n}\}$ — монотонно убывающая и ограниченная снизу.

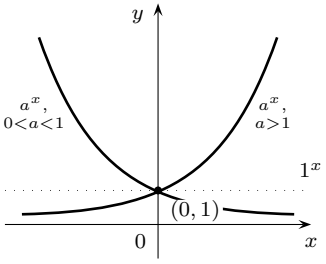



*Рис. 17.3.*

**ТЕОРЕМА 17.11**
Показательная функция $a^x$, $a > 0$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

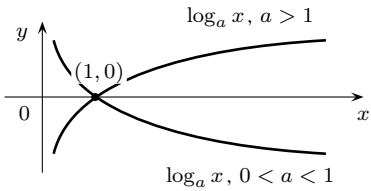



*Рис. 17.4.*

● Мы ее определили так, что она автоматически оказалась непрерывной. ●

Возможные расположения графиков показательной функции $a^x$ для различных $a$ приведены на рис. 17.3.

Ясно, что при $a > 0$, $a \neq 1$ показательная функция имеет обратную, она называется логарифмической — $\log_a x$, графики логарифмической функции при различных $a$ приведены на рис. 17.4.

**ТЕОРЕМА 17.12**
Пусть $f$ — непрерывная, обратимая функция, тогда $f^{-1}$ также непрерывна.

● ●

**ТЕОРЕМА 17.13**
Логарифмическая функция $\log_a x$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

● ●

Из простых геометрических соображений ясно, что имеет место

**ТЕОРЕМА 17.14**
Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$ $(\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1])$ являются непрерывными на $\mathbb{R}$.

Из теоремы 17.7 о непрерывности $\frac{f_1}{f_2}$ следует

**ТЕОРЕМА 17.15**
Тригонометрические функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на всей своей области определения.

Из теоремы 17.12 и теорем 17.14 и 17.15 следует

**ТЕОРЕМА 17.16**
Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны.

Ясно, что по той же причине (как обратные функции) являются непрерывными $\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, $\sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\ldots$, $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$, если $n = 2k$; $x \in \mathbb{R}$, если $n = 2k+1$.

Функции, которые перечислены в теоремах 17.9–17.15, называют основными элементарными функциями.

**Определение 17.12.** *Элементарными называют основные элементарные функции и функции, полученные из них конечным числом арифметических операций и композиций.*

*ПРИМЕР 17.6.* Функция $y = \sin^2 x + \cos 2x - 2x$ элементарна, так как это сумма трех функций $\sin^2 x$, $\cos 2x$ и $-2x$, каждая из которых элементарна в силу следующего:
1. $\sin^2 x$ — это композиция $f \circ g$, где $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^2$.
2. $\cos 2x$ — это композиция $f \circ g$, где $g(x) = 2x$, $f(x) = \cos x$.
3. $-2x$ — многочлен, т. е. элементарная функция.

Из теоремы о непрерывности композиции (т. 17.8) и теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (т. 17.7) следует

**ТЕОРЕМА 17.17**
Элементарная функция непрерывна во всех точках, в которых определена.

## § 17.6. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Непрерывные функции обладают рядом важных свойств, большинство из которых будет приведено нами без доказательства. Основное внимание мы уделим ситуациям, которые могут быть, когда нарушаются условия приведенных теорем.

**ТЕОРЕМА 17.18**
Если $f$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что

$$|f(x)| < M, \qquad \forall x \in [a, b].$$

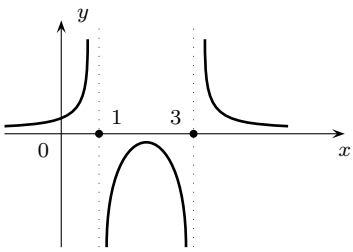



*Рис. 17.5.*

Ясно, что обратное утверждение не имеет места, так как функция $\operatorname{sign} x$ ограничена на $[-1,2]$ ($|\operatorname{sign} x| \leqslant 1$, $\forall x \in [-1,2]$), однако не является непрерывной на этом отрезке, так как внутри отрезка есть точка $x=0$, в которой $\operatorname{sign} x$ не является непрерывной функцией (см. пример 17.5).

В том случае, когда $f$ непрерывна на $(a,b)$, она может быть и неограниченной. Действительно, $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$ определена для всех $x \in (-\infty,+1) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$, но на множестве $(1,3)$ не является ограниченной (см. график на рис. 17.5).

**ТЕОРЕМА 17.19**
Если $f$ непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на $[a,b]$ своего наибольшего и наименьшего значения, т. е. существуют такие точки $x_m$, $x_M \in [a,b]$, что

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Рассмотренное выше (между теоремами 17.18 и 17.19) убеждает нас в том, что
1. Теорема, обратная к теореме 17.19, несправедлива.
2. Замена $[a,b]$ на $(a,b)$ в теореме 17.19 невозможна. Примером является множество $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ и функция $\operatorname{tg} x$.

**ТЕОРЕМА 17.20**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков ($\Leftrightarrow f(a)\cdot f(b)<0$), то существует точка $x_0 \in (a,b)$, в которой $f(x_0)=0$.

На этой теореме основан часто применяемый приближенный метод решения уравнения

$$f(x)=0, \tag{17.25}$$

называемый методом половинного деления.

Допустим, что $f$ непрерывна и монотонна и нам удалось подобрать отрезок $[a,b]$, для которого $f(a)\cdot f(b)<0$, значит, внутри сегмента $[a,b]$ уравнение (17.25) имеет одно решение. Рассмотрим середину интервала $x=\frac{a+b}{2}$ и найдем $f(\frac{a+b}{2})$, тогда, если $f(\frac{a+b}{2})=0$, мы нашли решение уравнения (17.25), если $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$, то один из интервалов $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2},b]$ удовлетворяет условию теоремы 17.20 и к нему можно опять применить половинное деление. Если нас интересует решение уравнения (17.25) с заданной точностью $\varepsilon$, то когда длина интервала $[a_i,b_i]$ станет меньше $\varepsilon$, в качестве приближенного значения для корня уравнения (17.25) можно взять $x=a_i$ ($x=b_i$, $x=\frac{a_i+b_i}{2}$).

**ТЕОРЕМА 17.21 (Теорема о промежуточном значении. Теорема Больцано[3]–Коши)**
Пусть $f$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, $m = \min\{f(a), f(b)\}$; $M = \max\{f(a), f(b)\}$, тогда для любого $C$ такого, что $m < C < M$, существует $x_C \in (a,b)$ такое, что $f(x_C) = C$.

● Рассмотрим функцию

$$\varphi_C(x) = f(x) - C. \tag{17.26}$$

Ясно, что она непрерывна на $[a,b]$ и $\varphi_C(a)\cdot\varphi_C(b) < 0$. Т. е. функция $\varphi_C$ удовлетворяет условиям теоремы 17.20, значит, существует точка $x_C \in (a,b)$, в которой $\varphi_C(x) = 0$, но тогда из равенства (17.26) следует

$$f(x_C) - C = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_C) = C. \qquad ●$$

### 17.6.1. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Сейчас мы введем определения и рассмотрим примеры функций, для которых происходят «нарушения непрерывности».

**Определение 17.13.** *Пусть $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, $x_0$ — такая точка из $\mathbb{R}$ (она может как принадлежать $X$, так и не принадлежать $X$), что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s'(x_0, \delta_0) \subset X$. Такую точку будем в дальнейшем называть точкой прикосновения для множества $X$.*

**Определение 17.14.** *Точка прикосновения называется точкой разрыва функции $f$, если функция не является в этой точке непрерывной и существует $\delta_0$ такое, что на $s'(x_0, \delta_0)$ $f$ непрерывна.*

**Определение 17.15.** *Точка $x_0$ разрыва функции $f$ называется точкой разрыва I рода, если существуют $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$. При этом возможны следующие случаи:*

1) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$ *и* $x_0 \notin X$, *такой разрыв первого рода называется устранимым;*
2) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $x_0 \in X$ *и* $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$.

*В случаях 2 и 3 говорят о неустранимом разрыве I рода.*

**Определение 17.16.** *Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I рода, называется точкой разрыва II рода.*

*Замечание.* Если мы имеем дело с устранимыми разрывами I рода, то можно определить функцию $f_1 : X \cup \{x_0\} \to Y$ следующим правилом:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

[3] Больцано Бернард (1781–1848) — чешский математик, философ, логик. Окончил философский и теологический факультеты Пражского университета. С 1805 по 1820 гг. заведовал кафедрой истории религии Пражского университета. За выступления против австрийского правительства отстранен от должности и лишен права публичных выступлений. При жизни Больцано опубликовал 5 математических работ, оставив большинство своих математических результатов в рукописях. Основной математический труд «Учение о функциях» (1830 г.) опубликован спустя 100 лет. В этой работе установлено понятие сходимости ряда, критерий сходимости последовательности и ряда (именуемый обычно критерием Коши). Построил пример непрерывной функции, не являющейся дифференцируемой ни в одной точке (за 30 лет до Вейерштрасса). Больцано впервые строго доказал теорему о промежуточных значениях для непрерывной функции. В «Парадоксах бесконечности» (1851 год) содержится пример бесконечного множества, равномощного своей правильной части. Этой работой Больцано предвосхитил современную теорию множеств, созданную Г. Кантором.

Ясно, что функция $f_1(x)$ является непрерывной в точке $x_0$. Такое определение $f_1$ называется доопределением функции $f$ по непрерывности.

Фактически, так мы и поступили с определением показательной функции $a^x$ на $\mathbb{R}$, первоначально определенной на $Q$.

● *ПРИМЕР 17.7.*

а) Рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{x}$, ясно, что она определена и непрерывна на множестве $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, в точке $x = 0$ функция не определена, значит, она не является непрерывной в этой точке. Поскольку $\lim_{x \to x-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to x+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (см. первый замечательный предел (17.14)), то в точке $x = 0$ у функции $\frac{\sin x}{x}$ — устранимый разрыв I рода.

б) Ясно, что у функции $\operatorname{sign} x$ (см. пример 17.1) в точке $x = 0$ неустранимый разрыв I рода.

в) Ясно, что у функции $\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ в точках $x = 1$ и $x = 3$ разрывы II рода.

## § 17.7. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Термины, встречающиеся в названии этого параграфа, несколько архаичны и возвращают нас ко временам И. Ньютона и Г. Лейбница. Понятия, связанные с этими терминами, позволяют воспринимать многое интуитивно, но обращение с ними требует предельной осторожности. Как правило, они позволяют «прикинуть», что может получиться, а что не может. Однако искать черную кошку в черной комнате хоть и трудно, но имеет смысл, а искать черную кошку в черной комнате, зная, что ее там нет, бесполезно.

**Определение 17.17.** *Функция $f$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \pm\infty$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

Ясно, что $\sin x$ является бесконечно малой при $x \to 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ..., но не является бесконечно малой при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Функция $y = x$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и не является бесконечно малой ни в какой другой точке.

Очевидно, имеет место

**ТЕОРЕМА 17.22**

Функция $f(x)$ имеет предел в точке $x_0$, равный $b$, тогда и только тогда, когда функция $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - b$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

● ●

● *ПРИМЕР 17.8.* Рассмотрим $y = x^2$. Ясно, что $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Покажем, что $x^2 - 4$ — бесконечно малая при $x \to 2$.

● Действительно,

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = \lim_{x \to 2} (x - 2)(x + 2) = \lim_{x \to 2} (x - 2) \cdot \lim_{x \to 2} (x + 2) = 0 \cdot 4 = 0. \quad ●$$

Из теоремы 17.5 об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, следует:

1) Сумма бесконечно малых функций при $x \to x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.
2) Произведение бесконечно малых функций при $x \to x_0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

**ТЕОРЕМА 17.23**
Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, а для функции $g$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что в $s'(x_0, \delta_0)$ $g(x)$ ограничена, то $f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

● Обозначим через $M$, $M > 0$ ту константу, которой ограничена функция $g$ в $s'(x_0, \delta_0)$, т. е. то $M$, для которого выполнено

$$|g(x)| \leqslant M, \tag{17.27}$$

при любом $x \in s'(x_0, \delta_0)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, так как функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, то существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x \in s'(x_0, \delta_1)$ выполнено неравенство

$$|f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{17.28}$$

Пусть $\delta_3 = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, тогда для всех $x \in s'(x_0, \delta_3)$ выполняются и неравенства (17.27) и (17.28). Тогда для всех $x \in s'(x_0, \delta_3)$ справедливо

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant M \cdot |f(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Последнее означает, что $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$, т. е. $f(x) \cdot g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. ●

Ясно, что справедлива

**ТЕОРЕМА 17.24**
Пусть $f_1$ и $f_3$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $x \in s'(x_0, \delta_0)$ выполнено

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x),$$

тогда функция $f_2$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

● ●

**ТЕОРЕМА 17.25**
Если $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а функция $g$ такова, что существуют $\delta_0 > 0$, $m > 0$ такие, что для всех $x \in s'(x_0, \delta_0)$ выполнено

$$|g(x)| \geqslant m,$$

тогда $\frac{f(x)}{g(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

● ●

**Определение 17.18.** *Функция $f$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \pm\infty$, если* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

*ПРИМЕР 17.9.* Функция $\frac{1}{\sin x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$, функция $x^2$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, функция $3^x$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$ и не является бесконечно большой при $x \to -\infty$ ($\lim_{x\to-\infty} 3^x = 0$, т. е. $3^x$ — бесконечно малая при $x \to -\infty$), функция $\frac{1}{x^2-4x+3}$ является бесконечно большой при $x \to 1$ и при $x \to 3$.

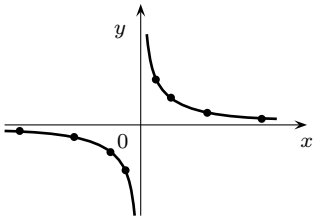



*Рис. 17.6.*

*Замечание.* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ — это условная запись того, что $|f(x)|$ неограниченно растет, когда $x$ «приближается» к точке $x_0$. Например, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ (см. рис. 17.6).

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

В силу этого замечания, арифметика бесконечно больших не так «хороша», как арифметика бесконечно малых. Действительно, функции $f_1(x) = \frac{1}{x}$ и $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ являются бесконечно большими при $x \to 0$, а функция $f_1(x) + f_2(x)$, определенная на множестве $(-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$ и равная нулю на этом множестве, является бесконечно малой при $x \to 0$.

**ТЕОРЕМА 17.26**
Пусть $f_1(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, а функция $f_2(x)$ такова, что существуют $\delta_0 > 0$ и $M \geqslant 0$ такие, что для любого $x \in s'(x_0, \delta_0)$ выполнено

$$|f_2(x)| \leqslant M,$$

тогда $f_1(x) + f_2(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$.

**ТЕОРЕМА 17.27**
Пусть $f_1(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, а функция $f_2(x)$ такова, что существуют $\delta_0 > 0$ и $m > 0$ такие, что для любого $x \in s'(x_0, \delta_0)$ выполнено

$$|f_2(x)| \geqslant m, \tag{17.29}$$

тогда $f_1(x) \cdot f_2(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$.

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

*Замечание.* Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то она удовлетворяет условию (17.29), значит, из теоремы 17.27 следует

**ТЕОРЕМА 17.28**
Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно большие функции при $x \to x_0$, то $f_1(x) \cdot f_2(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$.

*Замечание.* Если о функциях известно больше, чем то, что они являются бесконечно большими при $x \to x_0$, а известно, что они для некоторого $\delta_0 > 0$ в $s'(x_0, \delta_0)$ положительны, то $f_1(x) + f_2(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$, а $f_1(x) - f_2(x)$ может оказываться как бесконечно большой, так и бесконечно малой. В этом случае говорят о неопределенности типа $\infty - \infty$.

**ТЕОРЕМА 17.29 (Связь между бесконечно большой и бесконечно малой)** Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

**Основные типы неопределенности.** Сейчас мы сведем в таблицу основные типы неопределенности, т. е. такие ситуации, когда не работают основные теоремы об арифметических операциях над пределами или непрерывными функциями. Ясно, что в каждой строке таблицы идет речь о ситуации при $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \pm\infty$.

| № | Тип | Его содержательный смысл |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{0}{0}$ | Требуется вычислить $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. |
| 2 | $\frac{\infty}{\infty}$ | Требуется вычислить $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, при этом $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. |
| 3 | $0 \cdot \infty$ | Требуется вычислить $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$, при этом $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. |
| 4 | $\infty - \infty$ | Требуется вычислить $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$, при этом $f$ и $g$ положительны в $s'(x_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ и $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. |
| 5 | $1^\infty$ | Требуется вычислить $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, при этом $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. |

Заметим, что представление $f(x) \cdot g(x)$ в виде $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ сводит третий тип неопределенности ко второму.

Представление $f(x)^{g(x)}$ в виде $e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$ в той окрестности точки $x_0$, в которой $f(x)$ положительна, сводит 5-й тип неопределенности к третьему, так как в этом случае

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)\cdot \ln f(x))}.$$

Вычисление пределов в ситуациях, описанных в таблице, называют раскрытием неопределенности. При нахождении $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (§ 16.4, § 17.3) мы имели дело с неопределенностями типа $\frac{0}{0}$ и $1^\infty$ соответственно.

## § 17.8. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

В этом параграфе мы будем заниматься только бесконечно малыми функциями. Имея в виду связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями (теорема 17.29), этим можно ограничиться.

**Определение 17.19.** *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и существует такое $\delta_0 > 0$, что в $s'(x_0, \delta_0)$ $g(x) \neq 0$, тогда*

1) *если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$, и в этом случае пишут $f(x) \overset{x\to x_0}{=} o(g(x))$ (когда ясно, о каком $x_0$ идет речь, пишут $g(x) = o(f(x))$;*
2) *если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то $f(x)$ называют бесконечно малой одного порядка с $g(x)$;*
3) *если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то $f(x)$ называют бесконечно малой более низкого порядка чем $g(x)$.*

*Замечание.* Ясно, что утверждения этой теоремы 1) и 3) дополнительны друг к другу, т. е. если $f(x)$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $g(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x)$ — бесконечно малая более низкого порядка, чем $f(x)$ при $x \to x_0$, и наоборот.

Утверждение 2) на самом деле симметрично по $f$, $g$, т. е. если $f(x)$ бесконечно малая одного порядка с $g(x)$ при $x \to x_0$, то и $g(x)$ бесконечно малая одного порядка с $f(x)$ при $x \to x_0$. При этом мы, конечно, имеем в виду, что $f$ удовлетворяет условию необращения в ноль, фигурирующему в определении 17.19.

● *ПРИМЕР 17.10.* Ясно, что

1) $x^2$ — бесконечно малая более высокого порядка при $x \to 0$, чем $x$, т. е. $x^2 = o(x)$;
2) $\sin x$ и $x$ бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$;
3) $x$ является бесконечно малой более низкого порядка, чем $x^2$ при $x \to 0$.

**Определение 17.20.** *Две бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to x_0$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называют эквивалентными и пишут $f_1(x) \overset{x_0}{\sim} f_2(x)$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1. \tag{17.30}$$

При вычислении предела при $x \to x_0$ под знаком предела функцию можно заменить на эквивалентную.

● *ПРИМЕР 17.11.* Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}.$$

● Вспоминая замечательный предел $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, имеем $\sin x \sim x$ $(\Leftrightarrow \sin 2x \sim 2x)$, тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} 4 = 4. \quad ●$$

Приведем перечень наиболее употребительных эквивалентностей (см. §17.3. Замечательные пределы):

$$\sin x \overset{0}{\sim} x; \qquad \ln(1+x) \overset{0}{\sim} x;$$
$$e^x - 1 \overset{0}{\sim} x; \qquad (1+x)^a - 1 \overset{0}{\sim} ax;$$
$$\operatorname{tg} x \overset{0}{\sim} x;$$
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \ \overset{x \to \infty}{\sim} \ a_n x^n.$$

**Определение 17.21.** *Бесконечно малая при $x \to x_0$ функция $f_1(x)$ называется ограниченной по отношению к бесконечно малой при $x \to x_0$ функции $f_2(x)$, при этом пишут $f_1(x) \overset{x_0}{=} O(f_2(x))$ (если ясно, о каком $x_0$ идет речь, то пишут $f_1(x) = O(f_2(x))$), если существуют $\delta_0 > 0$ и $M$ такие, что для всех $x \in s'(x_0, \delta_0)$ выполнено*

$$\left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right| < M.$$

*Замечание.* Понятие $O(\quad)$ более «слабое», чем $o(\quad)$. Действительно, если $f_1(x) = o(f_2(x))$, то $f_1(x) = O(f_2(x))$.

**ТЕОРЕМА 17.30**
Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две эквивалентные бесконечно малые при $x \to x_0$ функции, тогда их разность $f_1(x) - f_2(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка при $x \to x_0$, т. е.

$$f_1(x) - f_2(x) = o(f_1(x)) \iff f_1(x) - f_2(x) = o(f_2(x)).$$

●

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \overset{f_1\sim f_2}{=} 1 - 1 = 0.$$

Второе соотношение доказывается аналогично. ●

**Определение 17.22.** *Представление бесконечно малой функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ *в виде:*

$$f(x) \overset{x_0}{=} A \cdot (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^k\right) \tag{17.31}$$

*называется выделением главной части, а выражение* $A(x - x_0)^k$ *в правой части* (17.31) *называют главной частью функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$.

Из теоремы 17.30 и замечательных пределов (или основных эквивалентностей) следует, что при $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\sin x &\overset{0}{=} x + o(x); & e^x - 1 &\overset{0}{=} x + o(x);\\
\cos x - 1 &\overset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2); & (1+x)^a - 1 &\overset{0}{=} ax + o(x);\\
\ln(1+x) &\overset{0}{=} x + o(x); & \sqrt[k]{1+x} - 1 &\overset{0}{=} \frac{x}{k} + o(x);\\
\operatorname{tg} x &\overset{0}{=} x + o(x).
\end{aligned}$$

Выделение главной части (когда оно возможно) позволяет упростить вычисление пределов.

● *ПРИМЕР 17.12.* Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2 - 2x) + \sin(x + x^2)}{\sin 5x + \operatorname{tg}^5 x - (e^x - 1)^2}.$$

● Ясно, что при $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\ln(1 + x^2 - 2x) &\overset{0}{=} x^2 - 2x + o(x) \overset{0}{=} -2x + o(x);\\
\sin(x + x^2) &\overset{0}{=} x^2 + x + o(x^2 + x) \overset{0}{=} x + o(x);\\
\sin 5x &\overset{0}{=} 5x + o(5x) \overset{0}{=} 5x + o(x);\\
\operatorname{tg}^5 x &\overset{0}{=} x^5 + o(x^5);\\
(e^x - 1)^2 &\overset{0}{=} (x + o(x))^2 \overset{0}{=} x^2 + 2x \cdot o(x) + o^2(x) \overset{0}{=}\\
&\overset{0}{=} x^2 + o\left(x^2\right) + o^2(x) \overset{0}{=} x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2-2x)+\sin(x+x^2)}{\sin 5x+\operatorname{tg}^5 x-(e^x-1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+o(x)+x+o(x)}{5x+o(x)+x^5+o(x^5)-x^2+o(x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x+o(x)}{5x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-1+\frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(5+\frac{o(x)}{x}\right)}=-\frac{1}{5}.$$

Заметим, что мы пользовались очевидными соотношениями:

$$o(5x)\overset{0}{=}o(x),\qquad o^2(x)\overset{0}{=}o(x^2),$$
$$o(x^2)+o(x^2)\overset{0}{=}o(x^2),$$
$$o(x^2+x)\overset{0}{=}o(x),$$
$$o(x)+x^5+o(x^5)-x^2+o(x^2)\overset{0}{=}o(x).$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Что означает, что $b\neq\lim_{x\to x_0}f(x)$?
2. Пусть $f: X\to Y$ — числовая функция и существует $\delta_0>0$ такое, что $s'(x_0,\delta_0)\subset X$. Что означает, что функция $f(x)$ не имеет предела при $x\to x_0$? Как это проявляется на графике функции?
3. Справедливы ли теоремы, обратные к теоремам 17.5, 17.6?
4. Что означает, что функция не является непрерывной в точке $x_0$; на множестве $X_1$?
5. Докажите самостоятельно теоремы 17.8; 17.19; 17.20.
6. Почему

$$o\left(5x\right)\overset{0}{=}o(x);$$
$$o(x)+o\left(x^2\right)+o\left(x^{1000}\right)\overset{0}{=}o(x);$$
$$o\left(\sin x\right)\overset{0}{=}o(x)\ ?$$

# XVIII

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

## § 18.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

В этой главе мы возвращаемся к знакомому из школьной математики понятию производной функции, ее геометрическому и механическому смыслу, простейшим правилам нахождения производной.

**Определение 18.1.** *Пусть* $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ *и существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что* $s(x_0, \delta_0) \subset X$. *Производной функции* $f$ *в точке* $x_0$ *называется*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0), \tag{18.1}$$

*если этот предел существует, и в этом случае говорят, что функция* $f$ *дифференцируема в точке* $x_0$; *если же предел в* (18.1) *не существует, то говорят, что функция* $f(x)$ *не дифференцируема в точке* $x_0$.

*Замечание.* Если обозначить $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$, $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0)$, то (18.1) в этих обозначениях примет вид

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{18.2}$$

**ТЕОРЕМА 18.1**
Если функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$, то она в этой точке непрерывна.

- Равенство $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$ означает:
  а) если $f'(x_0) \neq 0$, то $\Delta f$ является бесконечно малой, того же порядка, что и $\Delta x$;
  б) если $f'(x_0) = 0$, то $\Delta f$ является бесконечно малой, более высокого порядка, чем $\Delta x$.

Но так или иначе, $\Delta f$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$. Это означает (по определению бесконечно малой), что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Последнее равносильно тому, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. ●

*Замечание.* Равенство $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ означает, что $\varphi(\Delta x, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) - (f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\Delta f = f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) - \varphi(\Delta x, x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Последний переход сделан с учетом того, что $\lim_{x\to x_0}\varphi(\Delta x, x_0) = 0$.

Мы получили формулу:

$$\Delta f \;=\; f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \tag{18.3}$$

или

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x). \tag{18.4}$$

### 18.1.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

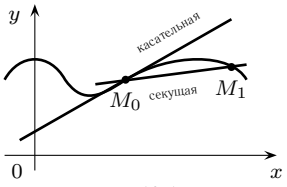



*Рис. 18.1.*

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, $X, Y \subset \mathbb{R}$. Вспомним определение касательной к кривой, данное в разделе «Алгебра и геометрия» (см. §3.1). Зафиксируем на графике функции две точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ и найдем угловой коэффициент секущей, проходящей через эти точки. Ясно, что он вычисляется по формуле (см. рис. 18.1)

$$k_{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Если существует предельное положение секущей, когда $\Delta x \to 0$, то полученная прямая называется касательной к графику $y = f(x)$ в точке $x_0$. Понятно, что условием существования предельного положения секущей является существование следующего предела:

$$k_{\text{касат}} = \lim_{\Delta x\to 0} k_{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Мы уже доказали, что график функции $y = f(x)$ имеет касательную в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда функция дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной.

Составим теперь уравнение касательной в точке $x_0$, как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ и имеющей угловой коэффициент, равный $f'(x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0). \tag{18.5}$$

### 18.1.2. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим движение материальной точки. Допустим, известен закон $s(t)$ изменения расстояния от движущейся точки до некоторой фиксированной точки в зависимости от времени $t$, $t \in T$. Средняя скорость точки на временном отрезке $[t_0, t_0+\Delta t]$ выражается формулой

$$v_{\text{средн}}(t_0, \Delta t) = \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Мгновенной скоростью точки в момент времени $t_0$ называют величину $v(t_0)$, определенную равенством

$$\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{средн}}(t_0, \Delta t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Вспоминая определение производной, получаем, что

$$v(t_0) = s'(t_0),$$

т. е. мгновенная скорость движущейся точки $v(t_0)$ — это производная по времени закона движения.

## § 18.2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

**ТЕОРЕМА 18.2**
Производная постоянной равна 0, т. е. $(C)' = 0$.

● Очевидно, это верно, так как $\Delta C \equiv 0$. ●

**ТЕОРЕМА 18.3**
Пусть $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$, тогда $f + g$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \tag{18.6}$$

● Найдем $\Delta(f+g)$:

$$\begin{aligned}\Delta(f+g) &= (f+g)(x_0+\Delta x) - (f+g)(x_0) = \\ &= f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - (f(x_0)+g(x_0)) = \\ &= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) + g(x_0+\Delta x) - g(x_0) = \Delta f + \Delta g.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right) \overset{\text{теор. 17.5}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$ ●

**ТЕОРЕМА 18.4**
Пусть $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$, тогда $f \cdot g$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{18.7}$$

● Найдем $\Delta(f\cdot g)$:

$$\begin{aligned}\Delta(f\cdot g) &= (f\cdot g)(x_0+\Delta x) - (f\cdot g)(x_0) = \\ &= f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - \\ &\quad - f(x_0)g(x_0+\Delta x) = (f(x_0+\Delta x) - f(x_0))\,g(x_0+\Delta x) + \\ &\quad + f(x_0)\,(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)) = \Delta f\cdot g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\cdot\Delta g.\end{aligned}$$

Тогда

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\Delta g}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)\overset{\text{теор. 17.5}}{=}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=$$
$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$ ●

*Замечание.* $\lim_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)=g(x_0)$, так как по условию теоремы функция $g$ дифференцируема в точке $x_0$, и значит, (теорема 18.1) непрерывна.

*Следствие из теоремы 18.4.* Для любого $a\in\mathbb{R}$ имеет место формула

$$\big(a\cdot f(x)\big)'=a\cdot f'(x). \tag{18.8}$$

● Докажите следствие самостоятельно. ●

**ТЕОРЕМА 18.5**

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x_0$ и $g(x_0)\neq 0$, тогда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{18.9}$$

● Найдем $\Delta\left(\frac{f}{g}\right)$:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+\Delta x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=$$
$$=\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=$$
$$=\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=$$
$$=\frac{\Delta f g(x_0)-f(x_0)\cdot\Delta g}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}.$$

Тогда

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g(x_0)-f(x_0)\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=$$
$$\overset{\text{т. 17.5, 17.6}}{=}\frac{g(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}-f(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ ●

### 18.2.1. ПРОИЗВОДНАЯ КАК ФУНКЦИЯ

Пусть функция $f$ определена и дифференцируема в каждой точке множества $X$ $(\subset\mathbb{R})$, тогда в каждой точке множества $X$ можно говорить о значении производной функции $f$ и тем самым на множестве $X$ определена функция $f'(x)$.

## § 18.3. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА 18.6**
Пусть функция $f : X \to Y$ имеет обратную функцию $f^{-1} : Y \to X$, $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и имеет место формула

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad x_0 = f^{-1}(y_0) \tag{18.10}$$

или

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{18.11}$$

● Во введении в математический анализ мы уже говорили, что график обратной функции получается из графика $y = f(x)$ преобразованием симметрии относительно прямой $y = x$. Вспоминая геометрический смысл производной, получаем (см. рис. 18.2):

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0), \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \left(f^{-1}\right)'(y_0).$$

Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad ●$$

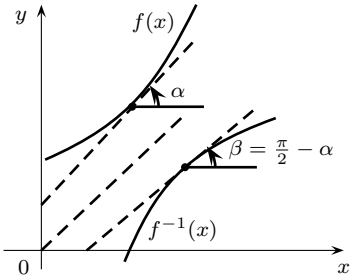



*Рис. 18.2.*

## § 18.4. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ (ТАБЛИЧНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ)

В этом параграфе мы с помощью определения производной, замечательных пределов и теоремы о производной обратной функции выведем формулы для производных элементарных функций.

**ТЕОРЕМА 18.7**
Имеют место формулы:

| № | $f(x)$ | $f'(x)$ | № | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | 8 | $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 2 | $e^x$ | $e^x$ | 9 | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 3 | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | 10 | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4 | $\log_a x$ | $\frac{1}{x}\log_a e$ | 11 | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| 5 | $\sin x$ | $\cos x$ | 12 | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| 6 | $\cos x$ | $-\sin x$ | 13 | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| 7 | $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | | | |

● ●1
$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1\right)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \frac{\Delta x}{x}=\Delta y}}\frac{(1+\Delta y)^\alpha - 1}{\Delta y} \overset{(17.20)}{=} x^{\alpha-1}\cdot\alpha = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

●2
$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right) =$$
$$= e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \overset{(17.19)}{=} e^x\cdot 1 = e^x.$$

●3 Для вычисления производной функции $\ln x$ воспользуемся тем, что она обратна к функции $e^x$, которая дифференцируема (см. ●2) и ее производная не равна нулю:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x, & f^{-1}(x) = \ln x;\\ f'(x) = e^x. & \end{array}$$

По формуле (18.11) получаем
$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

●4
$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

●5
$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \overset{(17.14)}{=} \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

●6 Аналогично ●5.

●7
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{\text{п. 18.5}}{=} \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

●8 аналогично ●7.

●9 Для нахождения производной функции $\arcsin x$ воспользуемся тем, что $\arcsin x$ — обратная функция к $\sin x$ на участке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (формула (18.7)):

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f^{-1}(x) = \arcsin x;\end{array}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

●10 аналогично ●9.

●11 $\operatorname{arctg} x$ — функция, обратная к тангенсу на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тогда по теореме о производной обратной функции имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)} = \\ = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

●12 аналогично ●11.

●13 По теореме о производной обратной функции

$$(a^x)' \overset{\text{т. 18.6}}{=} \frac{1}{\log_a'(a^x)} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \ln a. \quad ●$$

## § 18.5. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ (КОМПОЗИЦИИ)

Ясно, что для вычисления производных от элементарных функций (определение 17.10) недостаточно теорем о производной суммы, произведения, частного и табличных производных, так как при образовании функций из основных элементарных используются не только арифметические операции, но и композиция. Сейчас мы докажем теорему о производной сложной функции (композиции).

**ТЕОРЕМА 18.8**

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ и функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$, а функция $g$ дифференцируема в точке $f(x_0)$, тогда композиция (сложная функция) $g \circ f : X \to Z$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$(g \circ f)' = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0). \tag{18.12}$$

● Мы ограничимся рассмотрением только случая, когда $g(x)$ монотонна в некоторой окрестности точки $f(x_0)$. Это означает, что приращение функции $g$ в окрестности точки $f_0$ отлично от нуля, когда аргументу придано ненулевое приращение.

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(g \circ f)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(f(x_0 + \Delta x) - g(f(x_0)))(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ u = f(x)}} \frac{\Delta g}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad ●$$

*Замечание.* Сложная функция может быть образована композицией более чем двух функций: $F = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$, в этом случае нужно представить $F$ в виде $F = f_n \circ (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)$, тогда

$$F'(x) = f_n'\big((f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)(x)\big) \cdot (f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_1)'(x),$$

затем по второму сомножителю применить тот же прием и т. д.

● *ПРИМЕР 18.1.* Найти производную функции

$$f(x) = \sin^2\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \ln\left(2+\cos(2x-1)\right).$$

● Пусть $u(x) = \sin^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)$; $v(x) = \ln\left(2+\cos(2x-1)\right)$. Тогда

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{18.13}$$

Найдем $u'(x)$ и $v'(x)$ с помощью теоремы о производной сложной функции.

$$u(x) = (g \circ f)(x), \quad \text{где } g(x) = x^2, \ \ f(x) = \sin\left(\sqrt{1+x^2}\right),$$

тогда

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x;\\
u'(x) &= 2\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left(\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)' =\\
&= 2\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1+x^2}\right)' =\\
&= 2\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \left((1+x^2)^{1/2}\right)' =\\
&= \sin\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1+x^2\right)^{-1/2} \cdot \left(1+x^2\right)' =\\
&= \frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left((1)' + (x^2)'\right) =\\
&= \frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \sin\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\\
v'(x) &= \left(\ln\left(2+\cos(2x-1)\right)\right)' =\\
&= \frac{1}{2+\cos(2x-1)} \cdot \left(2+\cos(2x-1)\right)' =\\
&= \frac{1}{2+\cos(2x-1)} \cdot \left((2)' + \left(\cos(2x-1)\right)'\right) =\\
&= \frac{1}{2+\cos(2x+1)} \left(0 - \sin(2x-1) \cdot (2x-1)'\right) =\\
&= \frac{-\sin(2x-1)\left((2x)' - (1)'\right)}{2+\cos(2x-1)} = \frac{-\sin(2x-1)\cdot 2}{2+\cos(2x-1)} =\\
&= \frac{-2\sin(2x-1)}{2+\cos(2x-1)}.
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для $u'(x)$ и $v'(x)$ в (18.13), получаем:

$$f'(x) = \sin\left(2\sqrt{1+x^2}\right) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(2+\cos(2x-1)\right) - \\ - \sin^2\left(\sqrt{1+x^2}\right) \frac{2\sin(2x-1)}{2+\cos(2x-1)}. \quad ●$$

## § 18.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

В этом параграфе мы займемся изучением поведения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ в окрестности точки $x$. Главная идея этого исследования — выделение в $\Delta f$ главной части (простой по конструкции) и малого (по сравнению с главной частью) слагаемого.

Если приращение функции удается представить в виде

$$\Delta f = A_x \cdot \Delta x + o(\Delta x), \tag{18.14}$$

где $A_x$ — постоянная (определенная функцией $f$ и точкой $x$), то получается, что в окрестности точки $x$ поведение приращения довольно простое — это почти прямая пропорциональная ($\Leftrightarrow$ линейная) зависимость от приращения аргумента, а $A_x$ — коэффициент пропорциональности.

**Определение 18.2.** *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0$, если приращение функции $\Delta f$ в некоторой окрестности точки $x_0$ — $s(x_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ можно представить в виде* (18.14).

*При этом главную (линейную) часть приращения называют дифференциалом функции $f$ и обозначают $df$, т. е.*

$$df = A_x \cdot \Delta x. \tag{18.15}$$

Заметим, что до этого дифференцируемой в точке $x_0$ мы называли функцию, имеющую производную в точке $x_0$. Это не случайно. Оказывается (и в этом смысл следующей теоремы), что представление приращения функции в виде (18.14) возможно тогда и только тогда, когда функция имеет производную в точке $x_0$, более того, $A_{x_0} = f'(x_0)$.

**ТЕОРЕМА 18.9**

Функция $f$ дифференцируема в смысле определения 18.2 тогда и только тогда, когда функция $f$ имеет производную в точке $x_0$, при этом

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x, \tag{18.16}$$

т. е. для $A_{x_0}$ в (18.14) имеет место равенство

$$A_{x_0} = f'(x_0).$$

(при этом (18.14) имеет вид $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$).

После того как мы дали определение производной (Определение 18.1), было показано, что если функция имеет производную, то в некоторой $\delta_0$-окрестности $\delta_0 > 0$ точки $x_0$ имеет место равенство (18.1)

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

а это и означает, что имеет место дифференцируемость в смысле определения 18.2 и

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Покажем теперь, что если функция $f$ дифференцируема в смысле определения 18.2, то она имеет производную в точке $x_0$ и $f'(x_0) = A_{x_0}$.

Пусть $\Delta f = A_{x_0}\Delta x + o(\Delta x)$, тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A_{x_0} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}. \tag{18.17}$$

Из равенства (18.17) следует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( A_{x_0} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A_{x_0} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A_{x_0} + 0 = A_{x_0}. \quad \bullet$$

Значение введенного понятия и установление его связи с производной трудно переоценить.

Рассмотрим сейчас, не обосновывая строго, применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Итак, $\Delta f \approx df = f'(x_0)\Delta x$. Значит $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

● *ПРИМЕР 18.2.* Вычислить приближенно $\sqrt{24{,}89}$.

● Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. В качестве $x_0$ возьмем 25, тогда $\Delta x = -0{,}11$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f(x_0) = \sqrt{25} = 5; \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0{,}1$$
$$f(24{,}89) = \sqrt{24{,}89} \approx 5 - 0{,}1 \cdot 0{,}11 = 5 - 0{,}011 = 4{,}989$$

(заметим, что приближенное значение с точностью до 9-го знака после запятой таково: 4,988987873). ●

### 18.6.1. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Заметим, что для функции $f(x) = x$, $df = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, поэтому в правой части формулы для дифференциала вместо $\Delta x$ пишут $dx$.

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ и $f$ дифференцируема в точке $x_0 \in X$, $g$ дифференцируема в точке $f(x_0)$, тогда по теореме о производной сложной функции (теорема 18.8) функция $g \circ f$ дифференцируема в точке $x_0$. Имеем

$$d(g \circ f) \overset{18.9}{=} (g \circ f)'(x_0)\,dx \overset{\text{т. } 18.8}{=} g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)\,dx = g'\big(f(x_0)\big) \cdot df. \qquad (18.18)$$

Сравним полученную формулу для дифференциала сложной функции $g \circ f$ с формулой для дифференциала функции $g$:

$$dg = g'_y(y_0)\,dy. \qquad (18.19)$$

Внешне формулы (18.18) и (18.19) практически не отличаются. Это свойство называют инвариантностью формы дифференциала.

### 18.6.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть она дифференцируема в точке $x_0$. Как мы уже знаем (§ 18.1), в этом случае можно говорить о касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ и уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

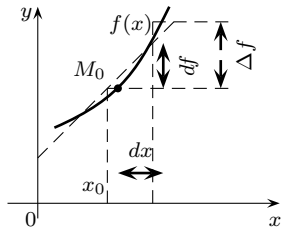


*Рис. 18.3.*

Из рисунка 18.3 видно, что $df$ — это приращение ординаты точки на касательной, когда аргумент получил приращение $\Delta x$.

Замена функции в окрестности точки $x_0$ на касательную к ней называется линеаризацией.

Ясно, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,dx + o(dx), \qquad (18.20)$$
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,dx. \qquad (18.21)$$

Более точные методы приближения функции будут рассмотрены, когда мы будем изучать формулу Тейлора.

### 18.6.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО

Из формулы, устанавливающей связь между дифференциалом и производной

$$df = f'(x_0)\,dx \tag{18.22}$$

и теорем о производной суммы, произведения и частного следует

**ТЕОРЕМА 18.10**
Если $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$, то $f+g$ и $g\cdot f$ дифференцируемы в точке $x_0$ и имеют место формулы

$$d(f+g) = df + dg, \tag{18.23}$$
$$d(f\cdot g) = df\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot dg. \tag{18.24}$$

**ТЕОРЕМА 18.11**
Если $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x_0$ и $g(x_0)\neq 0$, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot dg}{g^2(x_0)}. \tag{18.25}$$

*Следствие из теоремы 18.10.* Если $C$ — постоянная и $f$ — функция, дифференцируемая в точке $x_0$, то функция $Cf$ дифференцируема в точке $x_0$ и имеет место формула

$$d(Cf) = C\,df. \tag{18.26}$$

● Ясно, что $dC = 0$ в любой точке, тогда из формулы (18.24) следует

$$d(C\cdot f) = dC\cdot f(x_0) + C\cdot df = C\,df. \quad ●$$

*Замечание.* Введя обозначения для дифференциала и имея формулу (18.22), мы получим выражение производной через дифференциалы

$$f'(x) = \frac{df}{dx}. \tag{18.27}$$

## § 18.7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В конце §18.2 мы говорили о производной как о функции. То же самое можно сказать и о дифференциале. Можно говорить и о производной производной, т. е. $(f'(x))'$ и т. д. Производная производной функции $f$ называется производной 2-го порядка и обозначается $f''(x)$, производная от второй производной функции $f$ называется производной 3-го порядка функции $f$ и обозначается $f'''(x)$. Если у функции определены производные до $k-1$ порядка включительно, то можно ставить

задачу отыскания производной порядка $k$ как производной от производной порядка $k-1$, т. е.

$$f^{(k)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(k-1)}(x)\right)'. \tag{18.28}$$

*Замечание.* Производную функции $f$ — $f'(x)$ называют иногда производной первого порядка, а саму функцию — производной 0-го порядка.

Выпишем теперь определение дифференциалов 2-го, 3-го и т. д. порядков:

$$d^2 f \stackrel{\text{def}}{=} d\,(df), \quad d^3 f \stackrel{\text{def}}{=} d\left(d^2 f\right), \quad \ldots, \quad d^k f \stackrel{\text{def}}{=} d\left(d^{k-1} f\right). \tag{18.29}$$

● *ПРИМЕР 18.3.*

1) Найти $\sin^{(5)} x$.

● $$\sin' x = \cos x; \quad \sin'' x = (\cos x)' = -\sin x;$$
$$\sin^{(3)} = (-\sin x)' = -\cos x; \quad \sin^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x;$$
$$\sin^{(5)} x = \cos x. \quad ●$$

2) Найти $\left(x^4\right)^{(7)}$.

● $$\left(x^4\right)' = 4x^3; \quad \left(x^4\right)'' = \left(4x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2;$$
$$\left(x^4\right)^{(3)} = 12\left(x^2\right)' = 24x; \quad \left(x^4\right)^{(4)} = 24(x)' = 24;$$
$$\left(x^4\right)^{(5)} = (24)' = 0; \quad \left(x^4\right)^{(6)} = 0; \quad \left(x^4\right)^{(7)} = 0; \quad ●$$

3) Найти $\left(e^x\right)^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

● Ясно, что $\left(e^x\right)' = \left(e^x\right)'' = \left(e^x\right)^{(3)} = \cdots = e^x$. ●

**ТЕОРЕМА 18.12**

Если функции $f$ и $g$ имеют производные до порядка $n$ включительно, то функция $f+g$ имеет производные до порядка $n$ включительно и имеет место формула

$$(f+g)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{18.30}$$

● Ясно, что формула (18.30) — следствие формулы (18.23) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ и определения производной $k$-го порядка. ●

**ТЕОРЕМА 18.13**

Если $f$ и $g$ имеют производные до порядка $m$ включительно, то $f \cdot g$ имеет производные до порядка $m$ включительно и имеет место формула

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)}(x) \cdot g^{(i)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, m, \tag{18.31}$$

где $f^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$, $g^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} g(x)$.

● Для $n = 1$ формула (18.31) превращается в формулу (18.24) для производной произведения, и значит, справедлива.

Рассмотрим случай $n = 2$.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)^{(2)}(x) &= \big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)' = \\ &= f^{(2)}(x)g(x)+f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)+f(x)g^{(2)}(x) = \\ &= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)+2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(2)}(x).\end{aligned}$$

Предположим, что формула (18.31) верна для $n_0$, докажем, что тогда она верна и для $n_0+1$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)^{(n_0+1)}(x) &= \big((f\cdot g)^{(n_0)}(x)\big)' = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i f^{(n_0-i)}(x)g^{(i)}(x)\right)' = \sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i \left(f^{(n_0-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)\right)' = \\ &= \sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i \left(f^{(n_0-i+1)}(x)g^{(i)}(x)+f^{(n_0-i)}(x)g^{(i+1)}(x)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+\sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i f^{(n_0-i)}(x)g^{(i+1)}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{n_0} C_{n_0}^i f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+\sum_{i=1}^{n_0+1} C_{n_0}^{i-1} f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x) = \\ &= f^{(n_0+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{i=1}^{n_0} C_{n_0}^i f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+ \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n_0} C_{n_0}^{i-1} f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(n_0+1)}(x) = \\ &= f^{(n_0+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{i=1}^{n_0}\left(C_{n_0}^{i-1}+C_{n_0}^i\right) f^{(n_0+1-i)}(x)g^{(i)}(x)+ \\ &\quad +f^{(0)}(x)g^{(n_0+1)}(x) \overset{\substack{C_{n_0}^{i-1}+C_{n_0}^i=C_{n_0+1}^i \\ \text{см. т. 15.22}}}{=} \sum_{i=0}^{n_0+1} C_{n_0+1}^i f^{(n_0+1-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x).\end{aligned}$$

Индуктивный переход доказан. ●

Отметим полную аналогию формулы (18.31), которую называют формулой Лейбница, с формулой разложения бинома Ньютона (15.33).

● *ПРИМЕР 18.4.* Найти $(\sin x\cos x)^{(4)}$.

● $\sin^{(1)}x=\cos x;\quad \sin^{(2)}x=-\sin x;\quad \sin^{(3)}x=-\cos x;\quad \sin^{(4)}x=\sin x;$
$\cos^{(1)}x=-\sin x;\quad \cos^{(2)}x=-\cos x;\quad \cos^{(3)}x=\sin x;\quad \cos^{(4)}x=\cos x;$

Тогда по формуле (18.31) для $n=4$ имеем

$$\begin{aligned}(\sin x\cos x)^{(4)} &= \sin x\cos x+4(-\cos x)(-\sin x)+6(-\sin x)(-\cos x)+ \\ &\quad +4(\cos x)(\sin x)+\sin x\cos x = 16\sin x\cos x = 8\sin 2x.\end{aligned}$$ ●

*Замечание.* При решении примера можно было обойтись без формулы (18.31). Действительно,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\qquad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned}(\sin x\cos x)^{(1)} &= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x = \cos 2x \\ (\sin x\cos x)^{(2)} &= (\cos 2x)' = -2\sin 2x \\ (\sin x\cos x)^{(3)} &= -2\,(\sin 2x)' = -4\cos 2x \\ (\sin x\cos x)^{(4)} &= -4\,(\cos 2x)' = 8\sin 2x.\end{aligned}$$

### 18.7.1. НЕИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Заметим, что свойство инвариантности формы дифференциала 1-го порядка для дифференциалов более высокого порядка не наблюдается. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Рассмотрим два случая:

а) $f(x)$, $x$ — независимая переменная;

б) $f(x)$, $x = \varphi(t)$, $t$ — независимая переменная.

Ясно, что в случае а) мы имеем

$$(df)(x) = f'(x)\,dx,$$
$$\left(d^2 f\right)(x) = f''(x)\,(dx)^2.$$

В случае б)

$$(df)(t) = f'\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$
$$\left(d^2 f\right)(t) = f''\left(\varphi(t)\right) \cdot \left(\varphi'(t)\right)^2 (dt)^2 + f'\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi''(t)(dt)^2.$$

Если в последнем выражении вернуться к тому, что $x = \varphi(t)$, то первое слагаемое может быть записано в виде $f'' \cdot (dx)^2$, а наличие слагаемого $f'(\varphi(t))\varphi''(t)(dt)^2$ и означает потерю инвариантности формы 2-го дифференциала.

## § 18.8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЯХ

Сейчас будут доказаны три основные теоремы о дифференцируемых на отрезке функциях, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Затем, применяя эти теоремы, мы получим новые мощные способы вычисления пределов в ситуациях, когда мы имеем дело с основными неопределенностями вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

**ТЕОРЕМА 18.14 (Теорема Ролля[1])**
Пусть функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a < b$, дифференцируема на $(a, b)$ и $f(a) = f(b)$, тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$.

● Мы уже знаем (теорема 17.19), что функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения, т. е. существуют $x_m$, $x_M \in [a, b]$ такие, что

[1] Ролль Мишель (1652–1719) — французский математик, член Парижской АН (с 1685 г.), разработал метод отделения вещественных корней алгебраического уравнения, правило нахождения верхней границы вещественных корней алгебраического уравнения. Долгое время критиковал исчисление бесконечно малых Г. Лейбница, что заставило последнего внимательнее относиться к обоснованию основ математического анализа.

$$f(x_m) \leqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b], \tag{18.32}$$
$$f(x_M) \geqslant f(x) \quad \forall x \in [a,b]. \tag{18.33}$$

Возможны два случая:

а) $f_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} f(x_m) = f_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} f(x_M)$;

б) $f_{\min} < f_{\max}$.

● а) Из неравенств (18.32) и (18.33) следует, что $f(x)$ — постоянная на отрезке $[a,b]$ функция, тогда $f'(x) = 0$ во всех точках интервала $(a,b)$ и утверждение теоремы выполнено.

● б) В этом случае: 1) функция $f$ не постоянная; 2) по крайней мере одна из точек $x_m$, $x_M$ принадлежит интервалу $(a,b)$.

Рассмотрим случай, когда $x_M \in (a,b)$ и покажем, что $f'(x_M) = 0$.

Действительно, так как $x_M$ — точка максимума, то, если $\Delta x > 0$, то

$$\Delta f = f(x_M + \Delta x) - f(x_M) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0,$$

тогда

$$f'(x_M) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0, \tag{18.34}$$

а если $\Delta x < 0$, то

$$\Delta f = f(x_M + \Delta x) - f(x_M) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0,$$

но тогда

$$f'(x_M) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0. \tag{18.35}$$

Из (18.34) и (18.35) следует, что $f'(x_M) = 0$. ●

**Определение 18.3.** *Пусть $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, точка $x_0 \in X$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0, \delta_0) \subset X$ и для всех точек $x$ из $s(x_0, \delta_0)$ выполнено неравенство*

$$f(x_0) \geqslant f(x) \tag{18.36}$$
$$\big(f(x_0) \leqslant f(x)\big). \tag{18.37}$$

*Точки локального максимума или минимума называют точками локального экстремума.*

Справедлива следующая теорема о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой функции:

**ТЕОРЕМА 18.15 (Теорема Ферма)**
Если функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$ и точка $x_0$ является точкой локального экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

● Доказательство теоремы аналогично доказательству того, что $f'(x_M) = 0$ в случае б) теоремы 28. ●

*Замечание.* Из теоремы Ферма следует, что точками, «подозрительными» на экстремум, являются точки обращения в ноль производной и точки, в которых производная не существует.

**ТЕОРЕМА 18.16 (Теорема Лагранжа[2])**
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$, тогда существует точка $x_1 \in (a,b)$ такая, что

$$f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{18.38}$$

$$\big(f(b)-f(a) = f'(x_1)\cdot(b-a)\big). \tag{18.38'}$$

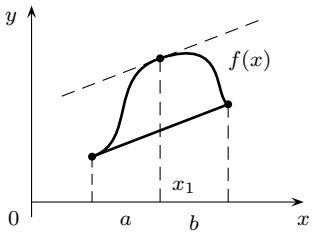


*Рис. 18.4.*

Прежде чем доказывать теорему Лагранжа, остановимся на ее геометрическом смысле. Выражение, стоящее в правой части равенства (18.38), — угловой коэффициент хорды, проведенной через точки графика функции $f$ с абсциссами $a$ и $b$ (хорда, стягивающая график на участке $[a,b]$, см. рис. 18.4).

Значит, в теореме Лагранжа утверждается, что существует такая точка $\big(x_1, f(x_1)\big)$, что касательная к графику функции в этой точке параллельна стягивающей хорде.

● Построим по функции $f$ вспомогательную функцию $f_1$ так, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы Ролля. Положим

$$f_1(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{18.39}$$

Ясно, что

1) $f_1(a) = f_1(b) = f(a)$;

2) $f_1$ непрерывна на $[a,b]$ и $f_1$ дифференцируема на $(a;b)$.

Тогда, по теореме Ролля, существует точка $x_1 \in (a,b)$, в которой

$$f_1'(x_1) = 0. \tag{18.40}$$

Вычислим $f_1'(x)$:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)' = \\ &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned} \tag{18.41}$$

Из (18.40) и (18.41) получаем, что

$$f'(x_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad ●$$

*Замечание.* Из рис. 18.4 видно, что точка, удовлетворяющая теореме Лагранжа, может быть не одна.

[2] Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик и механик, член Берлинской академии наук (1759), Парижской академии наук (1772), почетный член Петербургской академии наук (1776), родился и получил высшее образование в Турине (Италия), организовал в Турине научное общество, ставшее затем Туринской АН. Разработал методы нахождения так называемых условных интегралов, зависящих от параметра. Вместе с Л. Эйлером Ж. Л. Лагранж является основоположником вариационного исчисления. В 1766–1787 гг. Лагранж был президентом Берлинской АН. В 1787 г. Лагранж переезжает в Париж и публикует свою знаменитую книгу «Аналитическая механика», в которой он подошел к задачам механики как к задачам о дифференциальных уравнениях законов движения. Вместе с Г. Монжем, П. Лапласом и др. Лагранж является инициатором и разработчиком метрической системы мер. Лагранж читал курсы математического анализа в Нормальной и Политехнической школах. Его курс математического анализа издан в двух частях: «Теория аналитических функций» (1797 г.), «Лекции по исчислению функций» (1806 г.).

**ТЕОРЕМА 18.17 (Теорема Коши)**
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на $(a,b)$ и $g'(x)$ не обращается в ноль ни в одной точке интервала $(a,b)$, тогда существует точка $x_2 \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}.$$

● Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a)). \tag{18.42}$$

Ясно, что функция $f_2(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля ($f_2(a) = f_2(b) = 0$), тогда существует точка $x_2 \in (a,b)$ такая, что

$$f_2'(x_2) = 0. \tag{18.43}$$

Вычислим $f_2'(x)$:

$$f_2'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x). \tag{18.44}$$

Из (18.43) и (18.44) следует, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 18.18 (Правило Лопиталя[3])**
Пусть
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$ и $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x_0$ и $g'(x_0) \neq 0$.
Тогда существует $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{18.45}$$

●

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} \overset{\text{усл. 1}}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)} \overset{(18.3)}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}{g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\left(f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x\left(g'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} f'(x_0) + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g'(x_0) + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{f'(x_0)+0}{g'(x_0)+0} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad ●$$

[3] Лопиталь де Гийом Франсуа (1661–1704) — французский математик, член Парижской академии наук, ученик И. Бернулли. Автор первого учебника по дифференциальному исчислению «Анализ бесконечно малых» (1696 г.), в этом учебнике и было сформулировано правило, называемое теперь правилом Лопиталя.

Условия теоремы 30 могут быть несколько ослаблены.

**Теорема 18.18′** *Пусть*

*1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой выколотой $\delta_0$-окрестности, $\delta_0 > 0$ точки $x_0$ $s'(x_0, \delta_0)$ и $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$;*

*2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в выколотой окрестности точки $x_0$ — $s'(x_0, \delta_0)$ и $g'(x)$ не обращается в ноль ни в одной точке $s'(x_0, \delta_0)$;*

*3) существует (конечный или бесконечный) $\lim_{x\to x_0}(f'(x)/g'(x))$.*

*Тогда существует $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))$ и имеет место равенство:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{18.46}$$

*Замечание.* Обратите внимание на отличие равенства (18.46) от (18.45).

Равенство (18.46) оставляет большую свободу действий, а именно, если $f'$ и $g'$ таковы, что они сами удовлетворяют условиям теоремы 18.18′, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Таким образом, при решении примеров иногда приходится применять правило Лопиталя (теорему 18.18′) несколько раз (до тех пор, пока не произойдет раскрытие неопределенности).

**ТЕОРЕМА 18.19 (Второе правило Лопиталя)**

Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой выколотой $\delta_0$-окрестности, $\delta_0 > 0$ точки $x_0$ $s'(x_0, \delta_0)$ и $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в $s'(x_0, \delta_0)$ и $g'(x)$ не обращается в ноль ни в одной точке $s'(x_0, \delta_0)$;

3) существует (конечный или бесконечный) $\lim_{x\to x_0}(f'(x)/g'(x))$.

Тогда существует $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))$ и имеет место равенство (18.46), т. е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Замечание.* Ко второму правилу Лопиталя можно сделать такое же замечание, как и к теореме 18.18′.

*ПРИМЕР 18.5.* Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^2}.$$

Ясно, что мы находимся в условиях теоремы 18.18′. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} \underset{\text{Лопиталя}}{\overset{\text{правило}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2} \underset{\text{Лопиталя}}{\overset{\text{правило}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} =$$

$$= \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} \underset{\text{замеч. предел}}{\overset{\text{первый}}{=}} \frac{9}{2}\cdot 1 = \frac{9}{2}. \quad \bullet$$

## § 18.9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА[4] И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В этом параграфе мы продолжим изучение поведения функции в окрестности точки в предположении, что в ней функция имеет производные до порядка $k$ $(>1)$ включительно. Случай $k=1$ уже рассмотрен в параграфе § 18.1, где было показано, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то существует окрестность точки $x_0$, в которой выполнено равенство (18.1)

$$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

которое может быть записано в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o((x-x_0)). \tag{18.47}$$

Заметим, что в правой части формулы (18.47) выражение $f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ представляет собой многочлен первой степени переменной $x$, т. е. выражение $f(x_0)+$ $+f'(x_0)(x-x_0)$ — многочлен первой степени, аппроксимирующий функцию $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ с точностью до слагаемого, имеющего порядок малости $o((x-x_0))$.

В случае, когда функция имеет производные в точке $x_0$ более высокого порядка, ее можно аппроксимировать с более высокой точностью многочленом более высокой степени. Сказанное и представляет собой содержание следующей теоремы — теоремы о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано[5].

**ТЕОРЕМА 18.20**

Пусть $f: X\to Y$, $X, Y\subset\mathbb{R}$, $x_0\in X$ и существует $\delta_0>0$ такое, что

1) $s(x_0,\delta_0)\subset X$;
2) в окрестности $s(x_0,\delta_0)$ функция $f$ дифференцируема до порядка $n$, $n\geqslant 1$ включительно.

Тогда справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + o\big((\Delta x)^n\big), \tag{18.48}$$

где $\Delta x = x - x_0$.

[4] Тейлор Брук (1685–1731) — английский математик и философ, член Лондонского королевского общества (1712). Окончил университет в Кембридже. Получил формулу разложения функции в степенной ряд. Положил начало изучению задачи о колебаниях струны.

[5] Пеано Джузеппе (1858–1932) — итальянский математик, член Туринской АН. Исследовал основные вопросы математического анализа в наиболее общей постановке. В 1891 г. создал систему аксиом натурального ряда чисел (аксиомы Пеано). Построил пример непрерывной кривой, полностью заполняющей квадрат (кривая Пеано).

Последнее слагаемое в правой части (18.48) называется остаточным членом формулы Тейлора, а остальные слагаемые образуют многочлен Тейлора порядка $n$.

● Пусть

$$P_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(\Delta x)^i.$$

Ясно, что имеют место равенства

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & \big(P_n(f)\big)(x_0) \\ f'(x_0) & = & \big(P_n'(f)\big)(x_0) \\ f''(x_0) & = & \big(P_n''(f)\big)(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ f^{(n)}(x_0) & = & \big(P_n^{(n)}(f)\big)(x_0). \end{array} \tag{18.49}$$

Вычислим предел следующего выражения:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x) - \big(P_n(f)\big)(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Числитель и знаменатель последнего выражения удовлетворяют условиям теоремы 18.18′ (Правило Лопиталя), тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x) - \big(P_n(f)\big)(x)}{(\Delta x)^n} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\big(f(x) - (P_n(f))(x)\big)'}{\big((\Delta x)^n\big)'} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x) - \big(P_n'(f)\big)(x)}{n(\Delta x)^{(n-1)}}.$$

Из равенств (18.49) следует, что полученное под знаком предела отношение опять удовлетворяет условиям теоремы 18.18′, и значит

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x) - (P_n(f))(x)}{(\Delta x)^n} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f''(x) - \big(P_n''(f)\big)(x)}{n(n-1)(\Delta x)^{(n-2)}}.$$

Из (18.49) следует, что полученное под знаком предела отношение опять удовлетворяет условиям теоремы 18.18′. Ясно, что из соотношений (18.49) следует возможность последовательно $n$ раз применить правило Лопиталя (теорема 18.18′). Проделав это, мы получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x) - (P_n(f))(x)}{(\Delta x)^n} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(f)(x)}{n!} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0) - \Big(P_n^{(n)}(f)\Big)(x_0)}{n!} \overset{(18.49)}{=} \frac{0}{n!} = 0. \quad ●$$

В случае, когда функция $f$ имеет в некоторой $\delta_0$-окрестности, $\delta_0 > 0$ точки $x_0$ производные до порядка $n+1$ включительно, мы можем получить в формуле Тейлора другую форму остаточного члена. Ниже приведена теорема, дающая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

**ТЕОРЕМА 18.21**

Пусть $f : X \to Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, и существует $\delta_0 > 0$ такое, что

1) $s(x_0, \delta_0) \subset X$;
2) в окрестности $s(x_0, \delta_0)$ функция $f$ имеет производные до порядка $n+1$ включительно.

Тогда справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\Delta x)^{(n+1)} = \big(P_n(f)\big)(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\Delta x)^{(n+1)}, \quad (18.50)$$

где $c \in s'(x_0, \Delta x)$.

● Пусть $R_n(x) = f(x) - (P_n(f))(x)$.

Умножим и разделим $R_n(x)$ на выражение $\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$, тогда

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{R_n(x) \cdot (n+1)!}{(x-x_0)^{(n+1)}} = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot Q(x). \quad (18.51)$$

Образуем теперь функцию переменной $t$ по следующему правилу:

$$F(t) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot Q(x). \quad (18.52)$$

Ясно, что

1) функция $F(t)$ дифференцируема по $t$ на $[x_0; x]$;
2) $F(x_0) = F(x) = 0$.

Тогда она удовлетворяет условиям теоремы Ролля (теорема 28), и значит, существует такая точка $c \in (x_0; x)$, в которой

$$F'(c) = 0. \quad (18.53)$$

Найдем из (18.52) выражение для $F'(t)$:

$$F'(t) = -\sum_{i=0}^{n} f^{(i+1)}(t)\frac{(x-t)^i}{i!} + \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t) \cdot \frac{i \cdot (x-t)^{(i-1)}}{i!} + \frac{(n+1)}{(n+1)!}(x-t)^n Q(x) = \\ = \left(-f'(t) - f''(t)\frac{(x-t)}{1!} - f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \cdots f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right) + \\ + \left(f'(t) + f''(t)\frac{(x-t)}{1!} + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\right) + \\ + \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot Q(x) = -f^{(n+1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} + \frac{(x-t)^n}{n!}Q(x).$$

Подставляя полученное выражение для $F'$ в (18.53), получаем

$$\begin{aligned} -f^{(n+1)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} + \frac{(x-c)^n}{n!}Q(x) &= 0 \iff \\ \iff \frac{(x-c)^n}{n!}\Big(Q(x) - f^{(n+1)}(c)\Big) &= 0 \implies \\ \implies Q(x) - f^{(n+1)}(c) &= 0. \end{aligned} \quad (18.54)$$

Из (18.51) мы имеем

$$Q(x) = \frac{R_n(x)(n+1)!}{(x-x_0)^{(n+1)}}.$$

Тогда равенство (18.54) позволяет получить, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}, \tag{18.55}$$

где $c \in s'(x_0, \delta_0)$. ●

Полученная формула для остаточного члена позволяет в некоторых случаях сделать оценку аппроксимации функции $f$ многочленом Тейлора не только локально в точке $x_0$, но и на промежутке.

Допустим, что функция $f$ имеет в $s(x_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ производные до порядка $n+1$ включительно и $|f^{(n+1)}(x)| < M$ для любого $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$, тогда имеет место оценка

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\delta_0^{(n+1)} \tag{18.56}$$

или, что то же самое

$$\left| f_n(x) - \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^i}{i!} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\delta_0^{(n+1)} \tag{18.57}$$

для любого $x \in s(x_0, \delta_0)$.

● *ПРИМЕР 18.6.* Представить функцию $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 1$ в виде (18.48) и (18.50) при $n = 2,\ 3$.

● Найдем $f'(x),\ f''(x),\ \ldots$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6,$$
$$f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = 0.$$

При $n = 2$ имеем

$$x^3 = (1)^3 + \frac{3}{1}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) =$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

или

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 =$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

Здесь учтено, что $f^{(3)}(c) = 6$ для любого $c$.

Заметим, что вторая формула уже при $n = 2$ превратилась в тождество.

При $n = 3$ имеем

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right) =$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right),$$

а используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + \frac{o((x-1)^4)}{4!} =$$
$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

Ясно, что для любого $n \geqslant 3$ мы будем иметь

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 + o\left((x-1)^4\right),$$

если применять формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, и

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3,$$

если применять формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. ●

**Вывод:** Если $f(x)$ — многочлен $n$-й степени, то для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$f(x) = \big(P_k(f)\big)(x), \qquad k \geqslant n \tag{18.58}$$

$$f(x) = \big(P_n(f)\big)(x) = \big(P_{n+1}(f)\big)(x) = \big(P_{n+2}(f)\big)(x) = \dots \tag{18.59}$$

### 18.9.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

Мы применим формулу Тейлора к функциям $e^x$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$. Все они бесконечно дифференцируемы в окрестности точки $x_0 = 0$, и значит, к ним применима формула Тейлора при любом $n$. (Формула Тейлора, выписанная в точке $x_0 = 0$, называется формулой Маклорена.)

**Функция $e^x$.**

$$e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots$$
$$1 = e^0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots$$

Тогда имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{18.60}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{18.61}$$

**Функция $\cos x$.**

$$\begin{array}{cccc} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, & f''(x) = -\cos x, & f'''(x) = \sin x, \\ f^{(4)}(x) = \cos x, & f^{(5)}(x) = -\sin x, & f^{(6)}(x) = -\cos x, & f^{(7)}(x) = \sin x \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ f^{(4k)}(x) = \cos x, & f^{(4k+1)}(x) = -\sin x, & f^{(4k+2)}(x) = -\cos x, & f^{(4k+3)}(x) = \sin x. \end{array}$$

Тогда

$$\begin{array}{cccc} f(0) = 1, & f'(0) = 0, & f''(0) = -1, & f'''(0) = 0, \\ f^{(4)}(0) = 1, & f^{(5)}(0) = 0, & f^{(6)}(0) = -1, & f^{(7)}(0) = 0, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ f^{(4k)}(0) = 1, & f^{(4k+1)}(0) = 0, & f^{(4k+2)}(0) = -1, & f^{(4k+3)}(0) = 0. \end{array}$$

Значит,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k+1}\right), \tag{18.62}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1}\frac{\sin c}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \tag{18.63}$$

**Функция** $\sin x$**.** Совершенно аналогично п. 18.9.1 получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2k+2}\right), \tag{18.64}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1} \frac{\cos c}{(2k+2)!} x^{2k+2}. \tag{18.65}$$

**Функция** $\ln(1+x)$**.** Найдем $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, ...

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), & f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2}, & f^{(3)}(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \\ f^{(4)}(x) &= (-1)^3 \cdot 3!\,(x+1)^{-4}; & &\cdots \\ & & f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}, \\ & & f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{gathered} f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = (-1)^2 2!, \\ f^{(4)}(0) = (-1)^3 \cdot 3!, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \ldots \end{gathered}$$

Применяя формулу Тейлора (18.48) и (18.50), получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{18.66}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n (1+c)^{-(n+1)} \cdot x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned} \tag{18.67}$$

**Функция** $(1+x)^a$**,** $a \in \mathbb{R}$**.**

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^a, \quad f'(x) = a(1+x)^{a-1}, \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2}, \\ f^{(3)}(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}, \ldots, \\ f^{(n)}(x) &= a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, \\ f^{(n+1)}(x) &= a(a-1)(a-2)\ldots(a-n)(1+x)^{a-n+1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(0) = a(a-1), \\ f^{(3)}(0) = a(a-1)(a-2), \ldots, \\ f^{(n)}(0) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2)\ldots(a-n+1). \end{aligned}$$

Тогда по формулам (18.48) и (18.50) получаем

$$\begin{aligned} (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \end{aligned} \tag{18.68}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \frac{a(a-1)\ldots(a-n)}{(n+1)!}(1+c)^{a-n-1}x^{n+1}. \end{aligned} \tag{18.69}$$

**Применение формулы Тейлора для вычисления пределов.**

**Определение 18.4.** *Главной частью функции $f$ при $x \to x_0$ называется первое ненулевое слагаемое в ее многочлене Тейлора, построенном в точке $x_0$.*

*Замечание.* В отношении функции $f$ мы, конечно, полагаем, что для нее справедлива формула Тейлора в некоторой окрестности точки $x_0$.

Пусть главный член функции $f$ имеет вид $a(x-x_0)^k$, тогда

$$f(x) = a(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right), \tag{18.70}$$

т. е. мы выписали формулу Тейлора порядка $k$ для функции $f$.

Допустим, нам необходимо вычислить

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{и} \quad f(x_0) = g(x_0) = 0,$$

т. е. мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Выпишем формулу Тейлора для $f(x)$ и $g(x)$, ограничившись главными членами разложения:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right), & a \neq 0,\\ g(x) &= b(x-x_0)^l + o\left((x-x_0)^l\right), & b \neq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что имеет место соотношение

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^k}{b(x-x_0)^l}. \tag{18.71}$$

● *ПРИМЕР 18.7.* Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}$.

● Разложим функции $x-\sin x$, $e^{2x}-1-2x-2x^2$ по формуле Тейлора в окрестности точки $0$, взяв $n=3$:

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2 = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) - 1 - 2x - 2x^2 = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^{2x}-1-2x-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot 3}{6\cdot 4x^3} = \frac{1}{8}. \quad ●$$

**Применение формулы Тейлора в приближенных вычислениях.** Формулу Тейлора, как и формулу (18.14) линеаризации функции, применяют в приближенных вычислениях. Если мы можем выписать для функции $f$ в окрестности точки $x_0$ формулу Тейлора порядка $n$, то полагают

$$f(x) \approx (P_n f)(x), \tag{18.72}$$

при этом $f(x) - (P_n(f))(x) = o((x-x_0)^n)$, а если мы находимся в условиях, когда можно выписать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, то имеет место оценка погрешности

$$|f(x) - (P_n(f))(x)| \leqslant \frac{\max\limits_{c\in s'(x_0,x)} f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{18.73}$$

● *ПРИМЕР 18.8.* Вычислить приближенно значение $\ln(1,2)$, применив формулу Тейлора 3-го порядка.

● По формуле (18.67) имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + (-1)^3\frac{(1+c)^{-4}}{4!}x^4.$$

В нашем случае $x = 0{,}2$. Тогда

$$\ln(1,2) = \ln(1+0{,}2) \approx 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} =$$
$$= 0{,}2 - 0{,}002 + \frac{0{,}008}{3} = 0{,}18 + \frac{0{,}008}{3} \approx 0{,}18 + 0{,}0023 = 0{,}1823.$$

Оценим погрешность с помощью формулы (18.73)

$$|\ln 1{,}2 - 0{,}1823| \leqslant \frac{1}{24}\max_{c\in[1;1,2]}(1+c)^{-4}\cdot(0{,}2)^4 \leqslant \frac{1}{24}(0{,}2)^4 = \frac{0{,}0016}{24} \approx 0{,}00006667. \quad ●$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Является ли функция $y = |x|$ дифференцируемой в точке:
   а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -2$?
2. Сформулируйте простейшие правила дифференцирования:

$$(f+g)'(x) =$$
$$(f\cdot g)'(x) =$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

3. Справедлива ли теорема, обратная к теореме 18.1? (Обратите внимание на вопрос 1, п. а).)
4. Приведите самостоятельно негеометрическое доказательство теоремы 18.6.
5. Вычислите приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{25{,}2}$.
6. Можно ли указать такую сложную функцию и точку ее области определения, в которой имеет место инвариантность второго дифференциала?

# XIX

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

Изучение характера поведения функции и построение ее графика — одна из важнейших задач математического анализа. В этой главе мы будем предполагать, что функции определены на интервале $(a,b)$ (или объединении конечного числа интервалов), непрерывны на интервале или имеют на нем конечное число точек разрыва, дифференцируемы на $(a,b)$ или на $(a,b)$ имеется лишь конечное число точек, в которых функция не является дифференцируемой.

## § 19.1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

### 19.1.1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

**Определение 19.1.** *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,b)$. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке $x_0 \in (a,b)$, если существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0,\delta_0) \subset (a,b)$, и для любого $h$, удовлетворяющего неравенству $0 < h \leqslant \delta_0$, выполняется неравенство*

$$f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h). \tag{19.1}$$
$$\big(f(x_0-h) > f(x_0) > f(x_0+h)\big). \tag{19.2}$$

**Определение 19.2.** *Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a,b)$, называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a,b)$, если для любых $x_1$, $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство*

$$f(x_1) \;<\; f(x_2) \tag{19.3}$$
$$\big(f(x_1) \;>\; f(x_2)\big) \tag{19.4}$$

Запишем определение возрастания функции на интервале $(a,b)$ на языке предикатов и кванторов:

$$\forall x_1 \big(\in (a,b)\big)\, \forall x_2 \big(\in (a,b)\big)\, \Big((x_1 < x_2) \implies \big(f(x_1) < f(x_2)\big)\Big).$$

**ТЕОРЕМА 19.1**
Для того чтобы функция $f(x)$, определенная на интервале $(a,b)$, являлась возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы она являлась возрастающей (убывающей) в каждой точке интервала.

*Замечание.* Несмотря на кажущуюся очевидность и простоту, доказательство достаточности чрезвычайно трудоемко и требует тщательности и аккуратности в рассуждениях.

**ТЕОРЕМА 19.2 (Достаточные условия возрастания функции в точке и на интервале)**
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$ и $f'(x_0) > 0$ $\big(f'(x_0) < 0\big)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке $x_0$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a,b)$ и в каждой точке $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$ $\big(f'(x) < 0\big)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a,b)$.

Ясно, что вторая часть теоремы — следствие первой части и теоремы 19.1. Докажем первую часть теоремы для случая $f'(x_0) > 0$.

Мы знаем, что из определения производной функции в точке следует, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s(x_0,\delta_0) \subset (a,b)$, и в $s(x_0,\delta_0)$ выполняется формула (18.3):

$$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Выберем $0 < \delta_1 \leqslant \delta_0$ такое, что

$$|o(\Delta x)| < \frac{f'(x_0)}{2}.$$

Тогда для всех $x \in s(x_0,\delta_1)$ $\Delta f > 0$ для $\Delta x > 0$ и $\Delta f < 0$ для $\Delta x < 0$, а из этого следует, что если $h$ таково, что $0 < h \leqslant \delta_1$, то

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h),$$

т. е. возрастание функции $f(x)$ в точке $x_0$, когда $f'(x_0) > 0$, доказано. Убывание функции $f(x)$ в точке $x_0$, когда $f'(x_0) < 0$, доказывается аналогично.

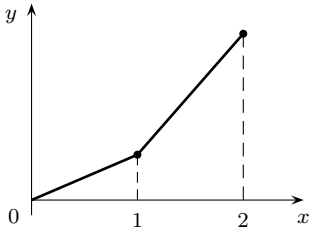


*Рис. 19.1.*

*Замечание.* Условия теоремы 19.2 являются лишь достаточными. Действительно, функция $f(x) = x^3$ в точке $x = 0$ возрастает, а $f'(0) = 0$.

Точками возрастания непрерывной функции на $(a,b)$ могут быть также точки, в которых производная не существует; действительно, рассмотрим функцию, определенную на $(0,2)$ правилом

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{если } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 19.1.

Ясно, что она непрерывна на $(0,2)$, возрастает на $(0,2)$, значит (теорема 19.1), возрастает в каждой точке интервала $(0,2)$, однако в точке $x = 1$ она не является дифференцируемой (подумайте почему?).

### 19.1.2. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

В §18.8 мы уже дали определение точек локального максимума и минимума, назвав их точками локального экстремума (см. определение 18.3), и доказали теорему, дающую необходимое условие того, что точка является точкой локального экстремума дифференцируемой функции (теорема 18.15), которое состояло в обращении в ноль производной.

Эта теорема дала ключ к нахождению множества точек, «подозрительных» на экстремум (эти точки еще называют критическими точками для функции $f$). Мы поняли, что критическими точками для функции, непрерывной на $(a,b)$, являются точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Ясно, что критическая точка является точкой локального максимума, если при переходе аргумента через нее происходит смена характера монотонности с возрастания на убывание, и точкой локального минимума, если при переходе через нее происходит смена монотонности с убывания на возрастание.

Ясно, что если функция $f(x)$ такова, что точка $x_0$ — критическая для $f(x)$ и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $x \in s'_-(x_0, \delta_0)$ $f'(x) > 0$ и для любого $x \in s'_+(x_0, \delta_0)$ $f'(x) < 0$, точка $x_0$ является точкой локального максимума; а если для любого $x \in s'_-(x_0, \delta_0)$ $f'(x) < 0$ и для любого $x \in s'_+(x_0, \delta_0)$ $f'(x) < 0$, то точка $x_0$ является точкой локального минимума.

Если же при переходе через критическую точку не происходит изменения характера монотонности, то точка $x_0$ не является точкой локального экстремума.

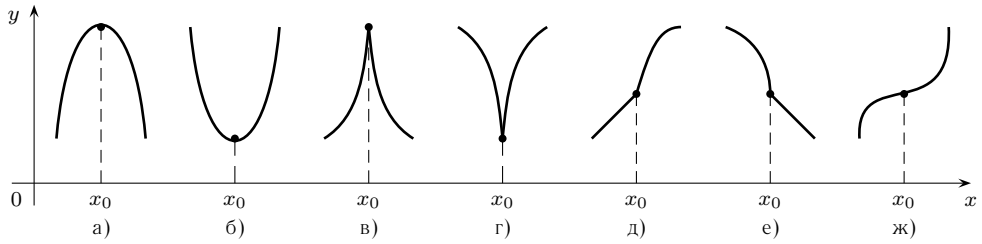



*Рис. 19.2.*

На рис. 19.2, а)–ж) приведены возможные ситуации, которые могут быть в критических точках.

Случаи:

а) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ — точка максимума;

б) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ — точка минимума;

в) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ — точка максимума;

г) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ — точка минимума;

д) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ не является точкой экстремума;

е) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \delta) < 0$, $f'(x_0 + \delta) < 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ не является точкой экстремума;

ж) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \delta) > 0$, $f'(x_0 + \delta) > 0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0 - x_0$ не является точкой экстремума.

### 19.1.3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИИ

Эта задача имеет очень простое и очевидное решение.

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то необходимо

1. Найти множество $K_f$ — критических точек функции $f$ на $(a,b)$ $K_f=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\},\ a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$.
2. Вычислить значение функции $f$ в точках $a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ b$.

Тогда наибольшее значение функции $f$ на $[a,b]$ — $M_f$ и наименьшее значение $f$ на $[a,b]$ — $m_f$ равны соответственно

$$M_f = \max\{f(a),f(x_1),\ldots,f(x_n),f(b)\},$$
$$m_f = \min\{f(a),f(x_1),\ldots,f(x_n),f(b)\}.$$

*Замечание 19.1.* Это правило, конечно, распространяется только на такие функции, у которых множество $K_f$ конечно, однако на практике мы обычно имеем дело с такими функциями.

*Замечание 19.2.* Если перед решением задачи на наибольшее и наименьшее значение было проведено исследование на локальные минимумы и максимумы, то чтобы найти наименьшее значение функции на $[a,b]$ достаточно вычислить значения функции на концах отрезка и в точках локальных минимумов и выбрать наименьшее из этих значений, аналогично для нахождения наибольшего значения функции нужно вычислить значения функции на концах отрезка и в точках локальных максимумов и выбрать наибольшее значение.

## § 19.2. ВЫПУКЛОСТЬ ВВЕРХ И ВНИЗ, ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

**Определение 19.3.** *Говорят, что функция $f: X\to Y$ выпукла вверх (вниз) в точке $x_0\in X$, если существует такая окрестность $x(x_0,\delta_0)$, $\delta_0>0$, в которой график функции $f$ находится ниже (выше) касательной к графику функции $f$ в точке $x_0$.*

*ПРИМЕР 19.1.* Видно (см. рис. 19.3), что функция $y=\sin x$ выпукла вверх в точке $\frac{3\pi}{4}$ и выпукла вниз в точке $\frac{7\pi}{4}$.

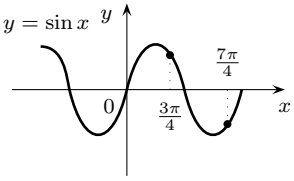



*Рис. 19.3.*

**Определение 19.4.** *Говорят, что функция выпукла вверх (вниз) на $(a,b)$, если она выпукла вверх (вниз) в каждой точке $(a,b)$.*

**Определение 19.5.** *Пусть $f: X\to Y$, $x_0\in X$ и $f$ непрерывна в точке $x_0$. Говорят, что точка $x_0$ является точкой перегиба функции $f$, если существует $\delta_0>0$ такое, что на $s'_-(x_0,\delta_0)$ функция выпукла вверх (вниз), а на $s'_+(x_0,\delta_0)$ функция выпукла вниз (вверх).*

*ПРИМЕР 19.2.* Из определения следует, что на интервале $(0,\pi)$ $\sin x$ — выпуклая вверх функция, а на интервале $(\pi,2\pi)$ — выпуклая вниз функция. Точка $\pi$ является для $\sin x$ точкой перегиба.

**ТЕОРЕМА 19.3 (Достаточное условие выпуклости вверх (вниз))**
Пусть функция $f$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности $s(x_0,\delta_0)$ $(\delta>0)$ точки $x_0$ и $f''(x_0)<0$ $\big(f''(x_0)>0\big)$, тогда функция $f$ выпукла вверх (вниз) в точке $x_0$.

● Выпишем формулу Тейлора порядка 2 с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big)$$

и будем считать, что $\delta_0$ выбрано так, что

$$\frac{|f''(x_0)|}{2} > \left|o\left((x - x_0)^2\right)\right|.$$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Уравнение касательной к графику функции в точке $x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

(см. (18.5)).

Тогда группа слагаемых

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

является «уклонением» графика $y = f(x)$ от касательной, а выбор $\delta_0$ нами сделан так, что знак «уклонения» совпадает со знаком $f''(x_0)$, т. е. если $f''(x_0) > 0$, то график функции находится выше касательной (выпуклость вниз), а если $f''(x_0) < 0$, то график находится ниже касательной (выпуклость вверх). ●

Из доказанной теоремы следует правило отыскания точек перегиба:

*Пусть функция $f$ определена и непрерывна на $(a, b)$ и дважды дифференцируема на $(a, b)$ за исключением, быть может, конечного числа точек. Точками, «подозрительными» на перегиб, являются точки обращения в ноль второй производной функции и точки, в которых вторая производная функции не существует. Если при переходе аргумента функции через такую точку вторая производная меняет знак, то точка является точкой перегиба.*

● *ПРИМЕР 19.3.* Найти точки перегиба функции $y = \sin x$ на $(0, 2\pi)$.

● Ясно, что функция $\sin x$ удовлетворяет условиям сформулированного правила. Найдем $f''(x)$:

$$\sin'' x = -\sin x.$$

Решим уравнение $-\sin x = 0$ на $(0, 2\pi)$. На этом множестве это уравнение имеет единственное решение $x_0 = \pi$. При переходе через точку $\pi$ $f''(x) = -\sin x$ меняет знак с минуса на плюс, значит, в точке $\pi$ функция $\sin x$ имеет перегиб (происходит смена выпуклости вверх на выпуклость вниз). ●

● *ПРИМЕР 19.4.* Найти точки перегиба функции $y = x^4$.

● $y'' = 12x^2$. Уравнение $12x^2 = 0$ имеет единственное решение $x_0 = 0$. При переходе через точку $x_0 = 0$ $y''$ не меняет знака, значит, точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба (более того, эта точка является точкой выпуклости вниз). ●

## § 19.3. АСИМПТОТЫ КРИВЫХ

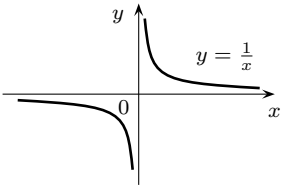



*Рис. 19.4.*

Иногда о поведении графика функции на отдельных участках удается судить, построив прямые, называемые асимптотами (т. е. притягивающими к себе график функции). Допустим, что $x_0 \in \mathbb{R}$ — точка разрыва второго рода функции $f(x)$ и при стремлении $x$ к $x_0$ слева (справа) функция монотонно растет (убывает), т. е. монотонно стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, тогда соответствующая ветвь графика «прижимается» к вертикальной прямой $x = x_0$, уходя вверх или вниз. В этом случае говорят, что прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика.

● *ПРИМЕР 19.5.* Ясно, что $x = 0$ является асимптотой графика функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 19.4).

**Определение 19.6.** *Прямая* $l : y = ax + b$ *называется асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ $(-\infty)$, *если*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \delta\big(M(x, f(x)), l\big) = 0, \qquad (19.5)$$

*где* $\delta(M(x, f(x)), l)$ *— вертикальное уклонение точки* $M(x, f(x))$, *принадлежащей графику функции* $y = f(x)$, *от прямой* $l$. *(См. рис. 19.5)*

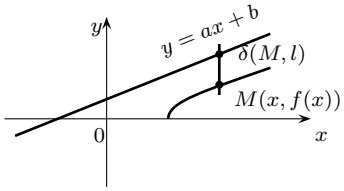



*Рис. 19.5.*

**ТЕОРЕМА 19.4**

Для того чтобы прямая $y = ax + b$ являлась асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие пределы:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a; \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} (f(x) - ax) = b, \qquad (19.6)$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

● ● *ПРИМЕР 19.6.* Найти асимптоты графика функции

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}, & \text{если } x \geqslant 0,\ x \neq 2, \\ \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x - 2}, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

(если они существуют).

● 1. Ясно, что $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{(x-2)x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = 1,$$

т. е. $a = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+4}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+4-x^2-2x}{x-2}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+4}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{-5-0}{1-0}=-5,$$

$b = -5$, т. е. при $x \to +\infty$ прямая $y = x - 5$ является асимптотой.

3. Найдем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+4}{(x-2)x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+4-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{x-2}=5,$$

т. е. при $x \to -\infty$ прямая $y = x + 5$ является асимптотой. ●

*Замечание.* Существуют функции, графики которых не имеют асимптот, например функция $y = x^2$.

## § 19.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Приведем схему исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции;
2. Найти точки разрыва функции и исследовать их характер;
3. Найти асимптоты (если они есть);
4. Исследовать функцию на четность, нечетность;
5. Исследовать функцию на периодичность;
6. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями;
7. Найти производную функции и с ее помощью определить участки возрастания, убывания функции;
8. Найти точки экстремума, определить их характер ($\min$, $\max$), найти максимальное и минимальное значения функции;
9. Исследовать функцию на выпуклость вверх, вниз; найти точки перегиба.

● *ПРИМЕР 19.7.* Исследовать функцию $f(x) = 2x - \sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

● 1. Область определения функции — $(-\infty, +\infty)$;

2. Функция непрерывна на всей области определения, точек разрыва не имеет;
3. Так как функция не имеет точек разрыва, то ее график не имеет вертикальных асимптот. Найдем асимптоты при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=2.$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt[3]{x^2}\right)=-\infty \quad \text{(не существует)},$$

значит, при $x \to +\infty$ график функции не имеет асимптоты. Аналогично показывается, что при $x \to -\infty$ асимптоты нет;

4. Ясно, что функция не является ни четной, ни нечетной;
5. Ясно, что функция не является периодической;
6. Найдем ординату $y_0$ точки пересечения графика с осью ординат. Ясно, что $y_0 = f(0) = 0$, т. е. график проходит через начало координат.
   Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $f(x) = 0$:

$$2x - \sqrt[3]{x^2} = 0 \iff 2x = \sqrt[3]{x^2} \iff 8x^3 = x^2 \iff$$
$$\iff x^2(8x-1) = 0 \implies x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{8}.$$

   Имеем две точки пересечения графика с осью абсцисс: $(0,0)$; $\left(\frac{1}{8},0\right)$;

7, 8. Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}.$$

Ясно, что при $x = 0$ производная не существует. Найдем значения аргумента, при которых производная обращается в ноль.

$$2 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0 \iff 3\sqrt[3]{x} = 1 \implies x = \frac{1}{27}.$$

Определим знаки производной на интервалах $(-\infty,0)$; $\left(0,\frac{1}{27}\right)$; $\left(\frac{1}{27},+\infty\right)$. Ясно, что

$$\text{на} \quad (-\infty,0) \qquad f'(x) > 0,$$
$$\text{на} \quad \left(0,\frac{1}{27}\right) \qquad f'(x) < 0,$$
$$\text{на} \quad \left(\frac{1}{27},+\infty\right) \qquad f'(x) > 0.$$

Составим таблицу

| $x$ | $-\infty<x<0$ | 0 | $0<x<\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{27}<x<+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | не сущест. | − | 0 | + |
| $f(x)$ | возрастает | максимум $y_{\max}=0$ | убывает | минимум $y_{\min}=-\frac{1}{27}$ | возрастает |

9. Определим участки выпуклости вверх, вниз и точки перегиба.

$$f''(x) = \left(2 - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)' = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}.$$

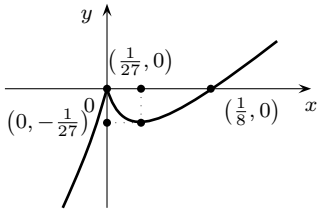


*Рис. 19.6.*

$f''$ не существует в точке $x = 0$, а при всех $x \in (-\infty,0)$ $f''(x) > 0$ — выпуклость вниз, при $x \in (0,+\infty)$ $f''(x) > 0$ — выпуклость вниз.

При построении графика функции следует иметь в виду, что

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty,$$

т. е. график имеет в точке $x = 0$ вертикальную касательную. График (его эскиз) приведен на рис. 19.6. ●

## § 19.5. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Во многих практических вопросах, когда мы ставим задачу экономного расходования ресурсов, затрат и т. п., возникают задачи на экстремум. В этом параграфе мы рассмотрим одну задачу такого типа.

Из квадратного листа жести $a \times a$, вырезая по углам квадратики металла, требуется изготовить заготовку коробки (без верхней крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший возможный объем (см. рис. 19.7)?

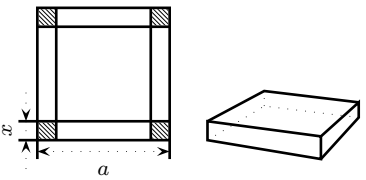


*Рис. 19.7.*

● В обозначениях, приведенных на рис. 19.7, имеем

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x \qquad x \in \left[0, \frac{a}{2}\right].$$

Найдем $V'(x)$

$$V'(x) = 2(a - 2x)(-2) \cdot x + (a - 2x)^2 = (a - 2x)(-4x + a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Найдем критические точки:

$$V'(x) = 0 \iff (a - 2x)(a - 6x) = 0$$
$$x_1 = \frac{a}{2}; \qquad x_2 = \frac{a}{6}.$$

Найдем наибольшее значение функции на $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Для этого вычислим $V(0)$, $V\left(\frac{a}{6}\right)$, $V\left(\frac{a}{2}\right)$ и найдем наибольшее из полученных чисел

$$V(0) = 0; \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3; \quad V\left(\frac{a}{2}\right) = 0.$$

Значит,

$$V_{\text{наиб}} = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3$$

и сторона вырезаемых квадратов равна $\frac{a}{6}$. ●

### Контрольные вопросы и задания

1. Что означает возрастание функции в точке; на промежутке?
2. Запишите определение возрастания (убывания) функции на интервале с помощью языка предикатов и кванторов.
3. Пусть $f : \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i) \to \mathbb{R}$ — числовая функция, причем $f$ — возрастающая функция на каждом $(a_i, b_i)$. Можно ли утверждать, что она возрастает на $\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i)$?
4. Может ли функция иметь экстремум в точке перегиба?
5. В чем принципиальное отличие вертикальных асимптот от остальных?
6. Жестяная консервная банка объема $V$ имеет форму кругового цилиндра. Определите диаметр основания и высоту банки, при которых она имеет наименьшую поверхность.

# XX

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В предыдущих главах мы дали определение производной и дифференциала функции и научились решать задачу отыскания производной и дифференциала.

Сейчас мы поставим обратную задачу. Для заданной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, для которой выполнено соотношение

$$F'(x) = f(x) \tag{20.1}$$

или в форме дифференциалов функций:

$$dF = f(x) \cdot dx. \tag{20.1'}$$

На соотношения (20.1) и (20.1′) можно смотреть как на уравнения, содержащие неизвестную функцию $F$, которая содержится в уравнении (20.1) ((20.1′)) под знаком производной (дифференциала). Уравнения такого типа называются дифференциальными и будут изучаться (не в частном случае, а в общей постановке) в разделе «Дифференциальные уравнения».

## § 20.1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Во введении к этой главе мы подошли к следующему определению.

**Определение 20.1.** *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на $[a, b]$. Функция $F(x)$, определенная на $[a, b]$, называется первообразной функции $f$ на $[a, b]$, если для всех точек $x \in [a, b]$ выполнено* (20.1) ($\Longleftrightarrow$ (20.1′)).

*Замечание 20.1.* Иногда говорят о первообразной функции $f$ в точке $x$, понимая следующее: существует $\delta_0 > 0$ такое, что $f$ определена на $s(x, \delta_0)$ и функция $F$ — первообразная для $f$ в точке $x$, если она является первообразной для $f$ на $s(x, \delta_0)$.

*Замечание 20.2.* В точках $a$, $b$ при определении производной используют понятие одностороннего предела.

*ПРИМЕР 20.1.* Пусть $f(x) = x^4$, тогда $F(x) = \frac{x^5}{5}$ является первообразной для $f$ на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

*Замечание.* Ясно, что функции

$$F_1(x) = \frac{x^5}{5} + 10^6, \quad F_2 = \frac{x^5}{5} + (-10^{-3})$$

также являются первообразными для $x^4$ на $\mathbb{R}$.

Когда задача отыскания первообразной разрешима? Приведем пока без доказательства достаточные условия существования первообразной.

**ТЕОРЕМА 20.1**
Непрерывная на $[a,b]$ функция имеет первообразную.

Из сделанных замечаний следует, что задача отыскания первообразной (в случае разрешимости) имеет «много» решений.

**ТЕОРЕМА 20.2 (Об общем виде первообразной)**
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$, функция $F_1(x)$ является первообразной $f$ на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует такая константа $C$, что для любого $x \in [a,b]$ выполнено

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{20.2}$$

(Правая часть формулы (20.2) называется общим видом первообразной.)

То, что $F_1(x) = F(x) + C$ является первообразной для $f(x)$, если $F(x)$ — первообразная, очевидно. Докажем, что если $F_1(x)$ — первообразная, то выполняется (20.2).

Рассмотрим $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и найдем ее производную.

$$G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in [a,b].$$

Ясно, что и $G''(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$.

Применим к функции $G(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (теорема 18.21):

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G'(x_0)\Delta x}{1!} + \frac{G''(c)}{2!}(\Delta x)^2,$$
$$x \in (a,b), \qquad c \in s'(x_0, \Delta x),$$

учитывая, что $G'(x) = 0$ и $G''(x) = 0$ на $[a,b]$, получаем, что

$$G(x) = G(x_0),$$

т. е. функция $G(x)$ постоянная на $[a,b]$.

**Определение 20.2.** *Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, $C$ — произвольная постоянная. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначают $\int f(x)\,dx$, т. е.*

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + C, \tag{20.3}$$

*где $C$ — произвольная постоянная, а $F'(x) = f(x)$.*

Здесь «$\int$» называется знаком неопределенного интеграла, «$f(x)$» — подынтегральной функцией, «$f(x)\,dx$» — подынтегральным выражением, «$x$» — переменной интегрирования.

● *ПРИМЕР 20.2.* Ясно, что $$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

Из определения 20.2 следует, что если интеграл существует, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{20.4}$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{20.5}$$

Заметим, что если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{20.6}$$

то, дифференцируя, получаем

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = dF, \tag{20.7}$$

тогда из (20.5) и (20.7) имеем, что $f(x)\,dx = dF$, подставляя в (20.6), получаем

$$\int dF = F(x) + C. \tag{20.8}$$

Мы показали, что имеет место

**ТЕОРЕМА 20.3**
Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.

● ●

● *ПРИМЕР 20.3.* $$\int dx = x + C; \qquad \int d\cos x = \cos x + C.$$

Вспомним, что $d\cos x = -\sin x\,dx$, получаем

$$\int (-\sin x)\,dx = \cos x + C.$$

*Замечание.* Соотношения (20.5) и (20.8) показывают, что операции неопределенного интегрирования и нахождения дифференциала функции являются почти взаимно обратными действиями. (Подумайте почему применено слово «почти».)

## § 20.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Геометрически задача нахождения первообразной (а значит, и неопределенного интеграла) функции $f(x)$ — это задача восстановления кривой, если известен закон изменения углового коэффициента касательной к графику функции, когда точка с абсциссой $x$ движется по графику функции. Ясно, что если нам удалось восстановить форму кривой, т. е. найти функцию $F(x)$, удовлетворяющую соотношению (20.1), то график функции $F(x) + C$, где $C$ — постоянная, получается из графика функции $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси $Oy$ и имеет такой же закон изменения углового коэффициента

касательной к графику $F(x)$. Т. е. мы имеем целое семейство кривых, каждая из которых удовлетворяет соотношению (20.1).

Подведем итог сказанному:

1. Первообразная функции $f(x)$ — одна из кривых, удовлетворяющих соотношению (20.1).
2. Неопределенный интеграл — семейство всех кривых, удовлетворяющих соотношению (20.1) .

**Определение 20.3.** *График функции $F(x)$ — первообразной функции $f(x)$ — называют интегральной кривой функции $f(x)$, а неопределенный интеграл функции $f(x)$ — семейством интегральных кривых функции $f(x)$.*

Ясно, что для выделения из семейства интегральных кривых одной конкретной интегральной кривой достаточно задать координаты одной точки, принадлежащей этой кривой (так называемые начальные условия). На рис. 20.1 схематически изображено семейство интегральных кривых функции $y = 3x^2$ (оно задается формулой $y = x^3 + C$).

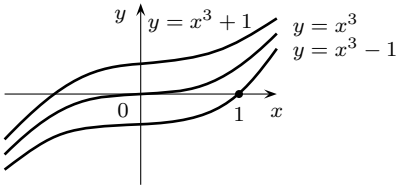



*Рис. 20.1.*

## § 20.3. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ И ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задача отыскания неопределенного интеграла от заданной функции значительно более трудная, чем задача отыскания производной от заданной функции. Это станет ясно из изложенного в следующих параграфах, где мы опишем некоторые приемы интегрирования. Здесь же мы воспользуемся тем, что интегрирование и дифференцирование — взаимно обратные операции (соотношения (20.5) и (20.8)), и таблицами производных элементарных функций (§ 18.4). Перейдем к так называемым табличным интегралам:

*Таблица 20.1.*

| № | Неопределенный интеграл | Формула для семейства интегральный кривых |
|---|---|---|
| 1 | $\int x^n\,dx,\ n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 2 | $\int dx$ | $x + C$ |
| 3 | $\int \frac{dx}{x},\ x \neq 0$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| 4 | $\int \sin x\,dx$ | $-\cos x + C$ |
| 5 | $\int \cos x\,dx$ | $\sin x + C$ |
| 6 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + C$ |
| 7 | $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} + C$ |
| 8 | $\int \frac{dx}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + C$ |
| 9 | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1$ | $\arcsin x + C$ |
| 10 | $\int e^x\,dx$ | $e^x + C$ |
| 11 | $\int a^x\,dx$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |

Приведем теперь простейшие свойства неопределенного интеграла, которые позволяют применять выписанную таблицу:

1. $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

2. $$\int K\,f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx, \qquad K\in\mathbb{R}.$$

● Непосредственным дифференцированием этих соотношений можно убедиться в их справедливости. ●

● *ПРИМЕР 20.4.* Найти $$\int \frac{x^5-3x^2+1}{x}\,dx, \qquad x>0.$$

● $$\int \frac{x^5-3x^2+1}{x}\,dx = \int\left(x^4-3x+\frac{1}{x}\right)dx = \int x^4\,dx + \int(-3)x\,dx + \int\frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^5}{5} - 3\int x\,dx + \ln x = \frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C. \quad ●$$

*Замечание.* Произвольную постоянную $C$ можно не писать до тех пор, пока остаются непроинтегрированные слагаемые (см. пример 20.4).

### 20.3.1. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ПОД ЗНАКОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Рассмотрим $\int f(x)\,dx$. Введем вместо $x$ новую переменную, т. е. будем считать, что $x$ является функцией от $t$, т. е. $x=x(t)$, где $x(t)$ — монотонная непрерывная дифференцируемая функция. $x'(t)$ также непрерывна. Покажем, что в этом случае имеет место равенство

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(x(t)\big)\cdot x'(t)\,dt, \tag{20.9}$$

которое называют формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

● Для доказательства формулы (20.9) найдем дифференциалы от левой и правой частей этой формулы и покажем, что они совпадают.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) \overset{(20.5)}{=} f(x)\,dx. \tag{20.10}$$
$$d\left(\int f\left(x(t)\right)\cdot x'(t)\,dt\right) \overset{(20.5)}{=} f\big(x(t)\big)\cdot x'(t)\,dt \overset{x'(t)\,dt=dx}{=} f(x)\,dx. \quad ●$$

Приведем пример, иллюстрирующий «работу» формулы (20.9) при решении примеров. Ее применение называется методом замены переменной.

● *ПРИМЕР 20.5.* Вычислить $$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \qquad a>0.$$

● Положим $x=at$, тогда $dx=a\,dt$.

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \quad ●$$

### 20.3.2. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Вспомним формулу для дифференциала произведения функций (18.24):

$$d\,uv = u \cdot dv + v \cdot du,$$

тогда

$$\int d(u \cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Учитывая, что

$$\int d(uv) = u \cdot v + C,$$

получаем

$$uv + C = \int u\,dv + \int v\,du \qquad \text{или}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

Поскольку справа присутствует непроинтегрированное слагаемое, то произвольную постоянную можно опустить. Окончательно имеем:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{20.11}$$

Последняя формула называется формулой интегрирования по частям. Проиллюстрируем на примере «работу» этой формулы.

● *ПРИМЕР 20.6.* Вычислить

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

● Пусть $u = x^2$; $dv = e^x\,dx$. Для нахождения $v$ проинтегрируем последнее равенство

$$v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x + C.$$

(Дальше аддитивную постоянную можно опустить.) Найдем $du$:

$$du = 2x\,dx.$$

По формуле (20.11) получаем:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\,e^x\,dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части еще раз применим формулу интегрирования по частям, положив $u = x$; $dv = e^x dx$. Тогда

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) =$$
$$= x^2 e^x - 2x\,e^x + 2e^x + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C. \quad ●$$

*Замечание.* Формально, должна была получиться константа $2C$, где $C$ — произвольное вещественное число, но тогда и $2C$ — произвольное вещественное число и мы его опять «спрятали» за обозначением «$C$».

### 20.3.3. ПРИМЕРЫ И РЕЦЕПТЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. **Интегрирование выражений $\sin mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$, $\cos mx \cos nx$.** Для интегрирования таких выражений применяют формулы преобразования произведений в суммы:

$$\begin{aligned}\sin mx \cos nx &= \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2},\\ \sin mx \sin nx &= \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2},\\ \cos mx \cos nx &= \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}.\end{aligned}$$

● *ПРИМЕР 20.7.* Вычислить

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x\, dx.$$

●

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C. \quad ●$$

2. **Интегрирование выражений $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin mx$, $P(x)\cos mx$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)\arccos x$, $P(x)\operatorname{arctg} x$, $P(x)\operatorname{arcctg} x$, где $P(x)$ — многочлен.** Для нахождения интегралов от таких выражений применяют интегрирование по частям, полагая $u(x) = P(x)$.

● *ПРИМЕР 20.8.* Вычислить

$$\int \left(x^2 - 3x + 2\right)\sin 3x\, dx.$$

●

$$\int \left(x^2 - 3x + 2\right)\sin 3x\, dx \overset{\substack{u=x^2-3x+2\\ dv=\sin 3x\,dx}}{=}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 2\right)\cos 3x + \frac{1}{3}\int (2x-3)\cos 3x\, dx =$$
$$\overset{\substack{u=2x-3\\ dv=\cos 3x\,dx}}{=} -\frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 2\right)\cos 3x + \frac{1}{9}(2x-3)\sin 3x -$$
$$- \frac{1}{9}\int 2\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 2\right)\cos 3x +$$
$$+ \frac{1}{9}(2x-3)\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C. \quad ●$$

3. **Интегрирование выражений $e^{ax}\sin mx$, $e^{ax}\cos mx$.** Двукратное интегрирование этих выражений по частям позволяет получать уравнение для нахождения исходного интеграла.

● *ПРИМЕР 20.9.* Вычислить

$$\int e^{3x}\sin 2x\, dx.$$

● $$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx \overset{\substack{\sin 2x=u\\ e^{3x}\,dx=dv}}{=} \frac{1}{3}\sin 2x\,e^{3x}- \\ -\frac{2}{3}\int \cos 2x\,e^{3x}\,dx \overset{\substack{\cos 2x=u\\ e^{3x}\,dx=dv}}{=} \frac{1}{3}\sin 2x\,e^{3x}- \\ -\frac{2}{9}\left(\cos 2x\,e^{3x}+2\int \sin 2x\,e^{3x}\,dx\right)=\left(\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{2}{9}\cos 2x\right)e^{3x}-\frac{4}{9}I+C.$$

Значит,

$$I+\frac{4}{9}I=\frac{13}{9}I=\left(\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{2}{9}\cos 2x\right)e^{3x}+C.$$

Тогда

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx=\frac{1}{13}\left(3\sin 2x-2\cos 2x\right)e^{3x}+C_1. \quad ●$$

**4. Интегрирование рациональных функций.** Напомним, что рациональной функцией называется функция, задаваемая формулой:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. В том случае, когда $\deg P(x)\geqslant \deg Q(x)$, можно с помощью деления $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком представить $R(x)$ в виде:

$$R(x)=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}, \tag{20.12}$$

где $\deg P_2(x)<\deg Q(x)$. Поскольку интегрирование многочлена $(P_1(x))$ не представляет труда, то задача интегрирования рациональных функций свелась к задаче интегрирования так называемых правильных дробей, т. е. таких рациональных функций $\frac{P(x)}{Q(x)}$, у которых $\deg P(x)<\deg Q(x)$. Вспомним разложение многочлена с вещественными коэффициентами по корням (8.19).

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0= \\ =a_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{k_{r+1}}\times \\ \times(x^2+p_2x+q_2)^{k_{r+2}}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{k_{r+s}},$$

где $a_i$ — вещественные корни многочлена, $(x^2+p_ix+q_i)$ — квадратные трехчлены с дискриминантами, меньшими нуля, соответствующие парам комплексно-сопряженных корней многочлена $Q(x)$, $k_i$ — показатели кратности корней.

$$k_1+k_2+\dots+k_r+2(k_{r+1}+k_{r+2}+\dots+k_{r+s})=n.$$

### 20.3.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Выделим четыре типа простейших рациональных дробей:

1. $\dfrac{A}{(x-a)}$;
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,3,\dots$;
3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $p^2-4q<0$;

4. $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad k=2,3,\ldots;\ p^2-4q<0.$$

Решим задачу об интегрировании простейших рациональных дробей.

1. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k+1}}+C.$$

3. Выделим в знаменателе простейшей дроби полный квадрат:

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

Так как $4q-p^2>0$, то обозначим $\frac{4q-p^2}{4} \overset{\text{def}}{=} a^2$, $a>0$, тогда имеем

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $x+\frac{p}{2}=t$, тогда

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt = M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной $t^2+a^2=u$, $u>0$, тогда

$$M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{M}{2}\ln u+C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+C.$$
$$\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C_1 =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{4\left(x+\frac{p}{2}\right)}{4q-p^2}+C_1 = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_1.$$

Окончательно имеем:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$
$$+\ \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4. $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx \overset{\text{см. п.3}}{=} M\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$
$$= \frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k+1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Пусть

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2-t^2\right)\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \\ = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt\right).$$

Мы получили, что

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

Интеграл, стоящий в скобках, проинтегрируем по частям, положив

$$u = t; \qquad dv = \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k},$$

тогда

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right) = \\ = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}\right) = \\ = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right). \quad (20.13)$$

Последовательно применяя формулу (20.13), мы сведем задачу вычисления $I$ к задаче вычисления

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

● *ПРИМЕР 20.10.* Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+6\right)^3}$.

● $$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+6\right)^3} = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+5\right)^3} \overset{x+1=t}{=} \int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^3} = \frac{1}{5}\int \frac{t^2+5-t^2}{\left(t^2+5\right)^3}\,dt = \\ = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{(t^2+5)^2} - \frac{1}{5}\int \frac{t\cdot t\,dt}{\left(t^2+5\right)^3} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^2} - \frac{1}{10}\int \frac{t\cdot 2t\,dt}{\left(t^2+5\right)^3} = \\ = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^2} - \frac{1}{10}\left(-\frac{t}{2\left(t^2+5\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^2}\right) = \\ = \frac{3}{20}\int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^2} + \frac{1}{20}\frac{t}{\left(t^2+5\right)^2} = \frac{1}{20}\frac{t}{\left(t^2+5\right)^2} + \frac{3}{20}\left(\frac{1}{5}\int \frac{t^2+5-t^2}{\left(t^2+5\right)^2}\,dt\right) = \\ = \frac{t}{20\left(t^2+5\right)^2} + \frac{3}{100}\left(\int \frac{dt}{t^2+5} - \frac{1}{2}\int \frac{t\cdot 2t\,dt}{\left(t^2+5\right)^2}\right) = \\ = \frac{t}{20\left(t^2+5\right)^2} + \frac{3\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{3}{100}\left(\int \frac{t\,2t}{\left(t^2+5\right)^2}\,dt\right) = \\ \overset{\substack{u=t \\ dv=\frac{2t\,dt}{(t^2+5)^2}}}{=} \frac{t}{20\left(t^2+5\right)^2} + \frac{3\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} - \\ - \frac{3}{200}\left(-\frac{t}{t^2+5} + \int \frac{dt}{t^2+5}\right) = \frac{t}{20\left(t^2+5\right)^2} + \frac{3\sqrt{5}}{100}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} -$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{3t}{200(t^2+5)} - \frac{3\sqrt{5}}{200}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \\
&= \frac{t}{20\,(t^2+5)^2} + \frac{3\sqrt{5}}{200}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{3t}{200\,(t^2+5)} + C = \\
&= \frac{x+1}{20(x^2+2x+6)} + \frac{3\sqrt{5}}{200}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + \frac{3(x+1)}{200(x^2+2x+6)} + C. \quad \bullet
\end{aligned}
$$

Приведем теперь без доказательства теорему о разложении правильной рациональной дроби на простейшие, которая и позволяет интегрировать рациональные функции.

**ТЕОРЕМА 20.4**
Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь и пусть

$$
\begin{aligned}
Q(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_r)^{k_r}\times \\
\times (x^2+p_1x+q_1)^{k_r+1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{k_r+s}
\end{aligned}
$$

(справа выписано разложение $Q(x)$ по его корням), тогда $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-a_1)^{k_2}} + \dots + \\
& + \frac{A_{r1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \\
& + \frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \\
& + \frac{M_{1k_{r+1}}x+N_{1k_{r+1}}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_{r+1}}} + \frac{M_{21}x+N_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)} + \frac{M_{22}x+N_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \\
& + \dots + \frac{M_{2k_{r+2}}x+N_{2k_{r+2}}}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_{r+2}}} + \dots + \frac{M_{s1}x+N_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)} + \\
& + \frac{M_{s2}x+N_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \dots + \frac{M_{sk_{r+s}}x+N_{sk_{r+s}}}{(x^2+p_sx+q_s)^{k_{r+s}}}.
\end{aligned}
$$

*Замечание.* Выражение в правой части разложения на простейшие дроби выглядит так громоздко только из-за того, что оно выписано в максимальной общности. При решении конкретных примеров все обстоит значительно проще.

*ПРИМЕР 20.11.* Вычислить $\displaystyle\int \frac{(x^2-5x+9)\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

Разложим дробь на простейшие:

$$
\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_{11}}{(x-1)} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+2x+2}. \tag{20.14}
$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A_{11}(x-1)(x^2+2x+2)+A_{12}(x^2+2x+2)+(M_{11}x+N_{11})(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях числителей в (20.14), получаем

$$\begin{cases} A_{11} & & & + & M_{11} & & & = & 0 \\ A_{11} & + & A_{12} & - & 2M_{11} & + & N_{11} & = & 1 \\ & + & 2A_{12} & + & M_{11} & - & 2N_{11} & = & -5 \\ 2A_{11} & + & 2A_{12} & & & + & N_{11} & = & 9 \end{cases}. \tag{20.15}$$

Решим систему (20.15) методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2+(-1)c_1 \\ c_3:=c_3 \\ c_4:=c_4 \quad +2c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2 \\ c_3:=c_3+(-2)c_2 \\ c_4:=c_4+(-2)c_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2 \\ c_3:=c_4 \\ c_4:=c_4+(-4)c_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & -35 \end{array}\right)$$

$$M_{11}=\frac{7}{5}, \quad N_{11}=\frac{21}{5}, \quad A_{12}=1; \quad A_{11}=-\frac{7}{5}.$$

Вернемся к вычислению интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+1)}\,dx &= -\frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x-1)}+ \\ &+\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{7}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+1}+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}= \\ &= -\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+\frac{7}{10}\int \frac{2x\,dx}{(x+1)^2+1}+ \\ &+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+ \\ &+\frac{7}{10}\int \frac{2(x+1-1)\,dx}{(x+1)^2+1}+\frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}=-\frac{7}{5}\ln|x-1|- \\ &-\frac{1}{(x-1)}+\frac{7}{10}\int \frac{2(x+1)\,dx}{(x+1)^2+1}+\frac{14}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}= \\ &= -\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+\frac{7}{10}\ln(x^2+2x+2)+\frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C. \end{aligned}$$

## § 20.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $$\int \sin^m x\,\cos^n x\,dx, \qquad n,m\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел $m$, $n$ не делится на 2. Например, $n=2k+1$, тогда

$$\int \sin^m x\,\cos^{2k+1} x\,dx=\int \sin^m x\,\cos^{2k} x\,\cos x\,dx \overset{\sin x=t}{=} \int t^m(1-t^2)^k\,dt.$$

Мы получили интеграл от рациональной функции.
Аналогично, если $m = 2l + 1$, то, полагая $\cos x = t$, получим

$$\int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x \, dx = -\int (1 - t^2)^k t^n \, dt.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $m = 2l$, $n = 2k$. Применив формулы

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

мы получим интегралы от функций вида $\sin^{n_1} 2x \cos^{m_1} 2x$, в которых $n_1 < n$, $m_1 < m$.

● *ПРИМЕР 20.12.* Вычислить

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

●

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx =$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \frac{1}{8} \left( \int \sin^2 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \right) =$$
$$= \frac{1}{8} \left( \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \, d \sin 2x \right) =$$
$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, dx - \frac{1}{6} \sin^3 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + C. \quad ●$$

2.

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных $u$, $v$.
При интегрировании выражений такого вида можно применить универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Эта подстановка сводит задачу к интегрированию рациональной функции. Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \tag{20.16}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \tag{20.17}$$

Так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, то $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$ или $x = 2 \operatorname{arctg} t$. Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$dx = 2 \frac{1}{1 + t^2} \, dt. \tag{20.18}$$

Подставляем (20.16), (20.17), (20.18) в исходный интеграл:

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = 2 \int R \left( \frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Мы получили под знаком интеграла рациональную функцию переменной $t$.

● *ПРИМЕР 20.13.* Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

● Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 2\int \frac{(1+t^2)\,dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 20.14.* Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

●

*1-й способ.* Применим универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2\int \frac{(1+t^2)\,dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{(1-t^2)} = \frac{2}{2}\int\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right)dt =$$
$$= \int \frac{1}{1+t}\,dt + \int \frac{dt}{1-t} = \ln|1+t| - \ln|1-t| + C = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$
$$= \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C.$$

*2-й способ.*

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \overset{\frac{\pi}{2}-x=y}{=} -\int \frac{dy}{\sin y} \overset{\text{пример } 20.13}{=} -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C =$$
$$= \ln\frac{1}{\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right|} + C = \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C. \quad ●$$

3. $$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx.$$

Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$, тогда $x = \operatorname{arctg} z$. Дифференцируя, получаем

$$dx = \frac{1}{1+z^2}\,dz.$$

Значит, вычисление исходного интеграла свелось к вычислению интеграла от рациональной функции переменной $z$.

$$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx = \int R(x)\frac{dz}{1+z^2}.$$

*Замечание.* В п. 1 к интегралам вида $\displaystyle\int \sin^{2k} x\,\cos^{2l} x\,dx, \qquad k, l \in \mathbb{Z}$

применим метод, рассмотренный в этом пункте. Действительно,

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \tag{20.19}$$
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}. \tag{20.20}$$

Подставляя в исходный интеграл, получаем

$$\int \sin^{2k} x\,\cos^{2l} x\,dx = \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^l dx.$$

Мы получили интеграл типа $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

## § 20.5. ИНТЕГРАЛЫ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

### 20.5.1. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, $n\in\mathbb{N}$.

Интегрирование таких выражений производится с помощью подстановки $z=\sqrt[n]{ax+b}$, тогда $ax+b=z^n$, $ax=z^n-b$, $dx=\frac{n}{a}z^{n-1}\,dz$. Выполнив подстановку, получим

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx=\frac{n}{a}\int R\left(\frac{z^n-b}{a},z\right)z^{n-1}\,dz=\frac{n}{a}\int R_1(z)\,dz.$$

● *ПРИМЕР 20.15.* Вычислить

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{2x+1}\,dx.$$

●

$$\sqrt[3]{2x+1}=z;\quad 2x+1=z^3;\quad x=\frac{z^3-1}{2};$$
$$dx=\frac{3}{2}z^2\,dz.$$

Тогда

$$\int x^2\sqrt[3]{2x+1}\,dx=\int\left(\frac{z^3-1}{2}\right)^2 z\cdot\frac{3}{2}z^2\,dz=\frac{3}{8}\int\left(z^3-1\right)^2z^3dz=$$
$$=\frac{3}{8}\int\left(z^6-2z^3+1\right)z^3\,dz=\frac{3}{8}\int\left(z^9-2z^6+z^3\right)\,dz=\frac{3}{8}\left(\frac{z^{10}}{10}-\frac{2}{7}z^7+\frac{z^4}{4}\right)+C=$$
$$=\frac{3}{80}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^{10}-\frac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^7+\frac{3}{32}\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^4+C=$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{10}(2x+1)^3-\frac{1}{7}(2x+1)^2+\frac{1}{8}(2x+1)\right)\sqrt[3]{2x+1}+C.\quad ●$$

### 20.5.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$.

Частные случаи интегралов этого типа

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ (a>0)\quad\text{и}\quad\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$$

легко вычисляются. Первый сводится к табличному:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену $\sqrt{x^2+b}+x=t$, или $\sqrt{x^2+b}=t-x$. Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$x^2+b=t^2-2tx+x^2;\qquad x=\frac{t^2-b}{2t};$$
$$dx=\frac{4t^2-2(t^2-b)}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+b}{2t^2}\,dt.$$

Найдем выражение для $\sqrt{x^2+b}$ через $t$:

$$\sqrt{x^2+b}=t-x=t-\frac{t^2-b}{2t}=\frac{t^2+b}{2t}.$$

Подставим полученные выражения для $dx$ и $\sqrt{x^2+b}$ в исходный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \int \frac{(t^2+b)\cdot 2t}{2t^2(t^2+b)}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\sqrt{x^2+b}+x\right| + C. \quad (20.21)$$

Рассмотрим теперь общий случай, т. е. вычисление интеграла вида

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx.$$

Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$Ax^2+Bx+C = A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right) = A\left(x^2+2\frac{B}{2A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}\right) =$$
$$= A\left(\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right) = A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A} =$$
$$= A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{-\mathcal{D}}{4A}.$$

Здесь $\mathcal{D} = B^2-4AC$, тогда

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx = \int \frac{Mx+N}{\sqrt{A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{-\mathcal{D}}{4A}}}\,dx.$$

Сделаем замену переменной $t = x+\frac{B}{2A}$:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx = \int \frac{\left(M\left(t-\frac{B}{2A}\right)+N\right)\,dt}{\sqrt{At^2+\frac{-\mathcal{D}}{4A}}} = \int \frac{Dt+E}{\sqrt{at^2+b}}\,dt =$$
$$= D\int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+b}} + E\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} = \frac{D}{2a}\int \frac{2at\,dt}{\sqrt{at^2+b}} + E\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} =$$
$$= \frac{D}{2a}\int \frac{d(at^2+b)}{\sqrt{at^2+b}} + E\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} = \frac{D}{a}\sqrt{at^2+b} + E\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}}.$$

В случае, когда $a>0$, последний интеграл сводится к рассмотренному выше:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{b}{a}}} \overset{(20.21)}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\sqrt{t^2+\frac{b}{a}}+x\right| + C.$$

Если же $a<0$, то $$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)-t^2}}.$$

*Замечание.* Мы рассматриваем случай, когда интеграл имеет смысл (хотя бы при некоторых значениях $t$), значит $\left(-\frac{b}{a}\right) \overset{\text{def}}{=} a_1 > 0$.

Продолжим, используя обозначения из замечания:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+b}} \overset{a\le 0}{=} \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{a_1^2-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t}{a_1} + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t\cdot(-a)}{b} + C.$$

*Замечание.* При вычислении последних интегралов мы не вернулись к исходным переменным. Следует помнить, что при решении конкретных примеров это делать необходимо.

*Замечание.* В этом и предыдущем параграфах мы вычислили несколько часто встречающихся интегралов, которые полезно запомнить:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left|\sqrt{x^2+b}+x\right| + C.$

### 20.5.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$ И $\int \sqrt{x^2+b}\,dx$

Вычислим первый из них:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$
$$= a^2 \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим интегрирование по частям, положив

$$u = x; \qquad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Вернемся к исходному интегралу:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + C. \tag{20.22}$$

Из (20.22) получаем

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Разделив обе части на два, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C. \tag{20.23}$$

Поступая аналогично для

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx,$$

получим

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+b} + b\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|\right) + C. \tag{20.24}$$

## § 20.6. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И СОВЕТЫ

В последних параграфах мы рассмотрели методы, применяемые для интегрирования некоторых классов функций. Эти методы для каждого класса свои, и этих примеров достаточно для того, чтобы понять, что не существует общего универсального метода интегрирования, поэтому этот раздел математики мало алгоритмичен и во многом сродни исполнительскому искусству музыканта, где успех во многом зависит от таланта и количества гамм и других упражнений, через которые пришлось пройти.

В практической деятельности для вычисления интегралов мы рекомендуем научиться пользоваться справочной литературой ([91, 90, 93]).

Следует иметь в виду, что существуют интегралы, которые не выражаются через элементарные функции, к таковым в частности относятся

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

# XXI

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе мы возвращаемся к истокам математического анализа, к задачам отыскания площадей фигур, объемов и площадей поверхностей вращения, т. е. к задачам, которыми занимались П. Ферма, И. Ньютон. Фактически, подход, предложенный ими, позволил создать современную абстрактную теорию меры и интеграла.

Примеры решения практических задач, рассмотренные в этом разделе, указывают на широкую применимость определенного интеграла к задачам естественных (да и гуманитарных) наук.

## § 21.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим задачу о вычислении площади $S$ фигуры $F$, ограниченной непрерывной замкнутой кривой $K$ (см. рис. 21.1).

Площадь $S$ равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных осью абсцисс, вертикальными касательными к $F$ и кривыми $f_1$ и $f_2$ соответственно.

Поэтому рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции $T$, ограниченной осью абсцисс, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, $a < b$ и графиком функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная и положительная на $[a, b]$ функция (см. рис. 21.2).

Разобъем $[a, b]$ на $n$ частей точками деления $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$; точки деления разбили $[a, b]$ на $n$ сегментов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$ ($x_0 \stackrel{\text{def}}{=} a$, $x_n \stackrel{\text{def}}{=} b$). Вертикальные прямые, проведенные через точки $x_i$, разбивают криволинейную трапецию $T$ на $n$ криволинейных трапеций $T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (см. рис. 21.3).

Ясно, что площадь $S_T$ криволинейной трапеции $T$ равна сумме площадей $S_{T_i}$ криволинейных трапеций $T_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е.

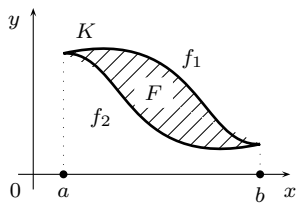


*Рис. 21.1.*

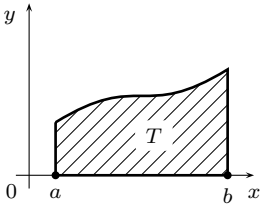


*Рис. 21.2.*

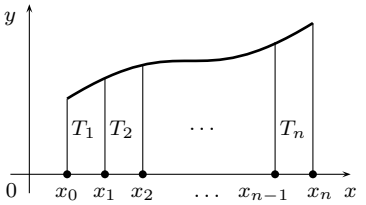


*Рис. 21.3.*

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} S_{T_i}. \tag{21.1}$$

В качестве приближенного значения площади криволинейной трапеции $T_i$ возьмем площадь прямоугольника $\Pi_{\xi_i}$, получающегося следующим образом: выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и в качестве высоты прямоугольника $\Pi_{\xi_i}$ возьмем $f(\xi_i)$, а основанием $\Pi_{\xi_i}$ возьмем $[x_{i-1}, x_i]$ (см. рис. 21.4), т. е.

$$S_{T_i} \approx S_{\Pi_{\xi_i}} = f(\xi_i)\Delta x_i,$$
$$\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}),$$

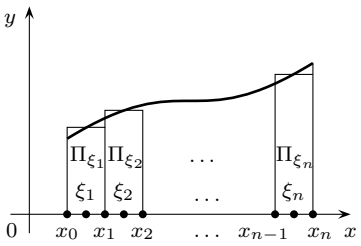



*Рис. 21.4.*

тогда

$$S_T \approx \sum_{i=1}^{n} S_{\Pi_{\xi_i}} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}). \tag{21.2}$$

Ясно, что $S_{\Pi_{\xi_i}}$ удовлетворяет неравенству

$$m_i\,(x_i - x_{i-1}) \leqslant S_{\Pi_{\xi_i}} \leqslant M_i \cdot (x_i - x_{i-1}), \tag{21.3}$$

где

$$m_i = \min_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i), \quad M_i = \max_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i).$$

Пусть $d = \max\big((x_2 - x_1),\ (x_3 - x_2), \ldots,\ (x_n - x_{n-1})\big)$. Понятно, что чем меньше $d$, тем выше точность формулы (21.2), поэтому естественно за точное значение площади криволинейной трапеции принять предел площадей ступенчатых фигур при $n \to \infty$, $d \to 0$, т. е.

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{21.4}$$

### 21.1.1. ЗАДАЧА О ПУТИ, ПРОДЕЛАННОМ ТОЧКОЙ

Пусть на временном отрезке $[a, b]$ известен закон $v(t)$ изменения скорости движения точки, движущейся прямолинейно. Как найти путь, пройденный точкой за временной промежуток $[a, b]$ — $S_{[a,b]}$? Закон $v(t)$ предполагается непрерывной функцией времени.

Разобьем временной участок точками деления $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ и будем приближенно считать, что на временном интервале $[t_{i-1}, t_i]$ движение было равномерным со скоростью $v(\xi_i)$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тогда

$$S_{[a,b]} \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = (t_i - t_{i-1}).$$

Ясно, что чем меньше длина временного отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, тем меньше $v(\xi_i) \cdot \Delta t_i$ отличается от $S_{[t_{i-1},t_i]}$. Обозначим $d = \max\{(t_1 - t_0),\ (t_2 - t_1),\ \ldots,\ (t_n - t_{n-1})\}$.

Естественно полагать, что

$$S_{[a,b]} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i. \tag{21.5}$$

### 21.1.2. ЗАДАЧА О РАБОТЕ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕЙ МАТЕРИАЛЬНУЮ ТОЧКУ ПО ПРЯМОЙ, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СИЛЫ $f(x)$ НА ВРЕМЕННОМ ОТРЕЗКЕ $[a, b]$

Рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получаем, что

$$A_{[a,b]} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{21.6}$$

Несмотря на различную постановку исходных задач, видно ((21.4), (21.5), (21.6)), что все они свелись к одной математической задаче, которая называется задачей отыскания определенного интеграла на сегменте.

## § 21.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СУММЫ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Пусть на сегменте $[a, b]$ $(a < b)$ задана функция $f(x)$. С помощью точек деления $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$ разобьем сегмент $[a, b]$ на $n$ сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, на каждом из сегментов возьмем произвольную точку $\xi_i$ $(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$, умножим $f(\xi_i)$ на длину $i$-го сегмента — $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$. Составим сумму

$$\sigma_n(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{21.7}$$

**Определение 21.1.** *Сумму $\sigma_n$, определенную равенством* (21.7)*, называют $n$-й интегральной суммой функции $f$ на $[a, b]$.*
*Замечание.* Сумма $\sigma_n$ зависит от выбора точек $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и точек $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим $\lambda_n = \max(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$ и назовем $\lambda_n$ шагом разбиения.

**Определение 21.2.** *Определенным интегралом от функции $f$ на сегменте $[a, b]$ называют*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n\to 0)}} \sigma_n(f),$$

*если он существует.*

(Запись $\lambda_n \to 0$ означает, что рассматриваются только такие разбиения, для которых $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.) Определенный интеграл обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n\to 0)}} \sigma_n(f). \tag{21.8}$$

Числа $a$, $b$ называют нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением.

*Замечание.* Правая часть в (21.8) не зависит от обозначения переменной и определяется только функцией $f$ и пределами интегрирования, поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(\quad)\,d(\quad). \tag{21.9}$$

Последняя запись обозначает, что внутри скобок может быть написан символ любой переменной.

### 21.2.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Ясно, что в том случае, когда $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$.

● *ПРИМЕР 21.1.* Вычислить $\displaystyle\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx.$

● Вычислим

$$\sigma_n(f) = 1\cdot(x_1 - x_0) + 1\cdot(x_2 - x_1) + \cdots + 1\cdot(x_n - x_{n-1}) = 1\cdot(b-a) = b - a,$$

тогда

$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} (b-a) = b - a. \quad ●$$

В определении 21.2 определенного интеграла мы считали, что $a < b$, распространим определение 21.2 на случаи $a = b$ и $a > b$, положив

$$\int_a^a f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} 0, \tag{21.10}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int_b^a f(x)\,dx, \quad (\text{если } a > b). \tag{21.11}$$

**Определение 21.3.** *Функция $f$ называется интегрируемой на $[a,b]$, если для нее существует $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы она была интегрируемой на $[a,b]$? Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции на $[a,b]$, эффективно проверяемые, сформулировать пока не удалось. Что касается достаточных условий интегрируемости, то существуют легко проверяемые ($\Leftrightarrow$ эффективно проверяемые) условия на функцию $f$, гарантирующие ее интегрируемость.

Приведем без доказательства наиболее употребимое достаточное условие интегрируемости:

**ТЕОРЕМА 21.1**
Непрерывная на $[a,b]$ функция интегрируема на $[a,b]$.

Из дальнейшего станет ясно, что если функция непрерывна на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрывы I рода, то она интегрируема на $[a,b]$.

### 21.2.2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$0^{\circ}$.
$$\int\limits_a^b dx = (b-a).$$

● См. пример 21.1. ●

$1^{\circ}$. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т. е.

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{21.12}$$

● $$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \left(\alpha \sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right) =$$
$$= \alpha \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad ●$$

$2^{\circ}$. Определенный интеграл от суммы интегрируемых функций равен сумме определенных интегралов слагаемых функций, т. е.

$$\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{21.13}$$

● $$\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\Delta x_i =$$
$$= \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\right) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i +$$
$$+ \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =; \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx. \quad ●$$

$3^{\circ}$. Для любого $c$ имеет место

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \tag{21.14}$$

если все интегралы в (21.14) существуют.

● Рассмотрим случай, когда $c$ является внутренней точкой $[a,b]$, т. е. $a<c<b$. Так как

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda_n\to 0)}}\sigma_n(f)$$

и не зависит от выбора разбивающих точек $x_i$ и точек $\xi_i$, будем рассматривать только такие разбиения, в которых одна из точек разбиения совпадает с точкой $c$. Например, $x_{i_0}=c$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda_n\to 0)}}\sum_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda_n\to 0)}}\left(\sum_{i=1}^{i_0}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right)=$$

$$=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda_n\to 0)}}\sum_{i=1}^{i_0}f(\xi_i)\Delta x_i+\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda_n\to 0)}}\sum_{i=i_0+1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $c=a$ (аналогично рассматривается случай, когда $c=b$)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=0+\int\limits_a^b f(x)\,dx\overset{(21.10)}{=}$$

$$=\int\limits_a^a f(x)\,dx+\int\limits_a^b f(x)\,dx\overset{a=c}{=}\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $c<a$. Примем за основной промежуток интегрирования $[c,b]$, а точку $a$ за делящую точку. По рассмотренному выше имеем

$$\int\limits_c^b f(x)\,dx=\int\limits_c^a f(x)\,dx+\int\limits_a^b f(x)\,dx,\quad\text{или}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_c^b f(x)\,dx-\int\limits_c^a f(x)\,dx\overset{(21.11)}{=}\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $c>b$. ●

(Подумайте о геометрическом смысле последнего свойства.)

Первые два свойства называются свойствами линейности определенного интеграла, так как могут быть сведены к одному свойству:

$\forall\alpha\,\forall\beta\,(\in\mathbb{R})$ имеет место:

$$\int\limits_a^b\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx;$$

третье свойство называется аддитивным свойством определенного интеграла.

$4^{\circ}$. Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

● Очевидно, что в этом случае $\sigma_n(f) \geqslant 0$, но тогда по свойству предела

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n \to 0)}} \sigma_n(f) \geqslant 0. \quad ●$$

$5^{\circ}$. Если для любого $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

● $f(x) - g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, тогда по свойству $4^{\circ}$ имеем

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \geqslant 0. \tag{21.15}$$

Преобразуем левую часть:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_a^b \big(f(x) + (-1)\cdot g(x)\big)\,dx \overset{\text{св-во } 2}{=}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (-1)\cdot g(x)\,dx \overset{\text{св-во } 1}{=}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + (-1)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx. \tag{21.16}$$

Из (21.15) и (21.16) получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \quad ●$$

(Подумайте о геометрическом истолковании последнего свойства.)

$6^{\circ}$. Для любой интегрируемой на $[a,b]$ функции имеет место:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{21.17}$$

● Это свойство является следствием неравенства

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

и предыдущего свойства. ●

$7^{\circ}$ . Для любой интегрируемой на $[a,b]$ функции

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{21.18}$$

● Вспомним, что неравенство $|x| \leqslant c$, $c \geqslant 0$ равносильно неравенству $-c \leqslant x \leqslant c$, тогда неравенство (21.17) равносильно неравенству (21.18). ●

## § 21.3. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

**ТЕОРЕМА 21.2**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{21.19}$$

● Пусть

$$m_f = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M_f = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

тогда

$$m_f(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M_f(b-a). \tag{21.20}$$

Разделив обе части неравенства на $(b-a)$ $(>0)$, получаем

$$m_f \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leqslant M_f.$$

То есть

$$\mu_f = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \in [m_f, M_f]\,. \tag{21.21}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции (теорема 17.21) получаем, что существует $\xi \in [a,b]$ такое, что

$$\mu_f = f(\xi). \tag{21.22}$$

Из (21.22) и (21.21) получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu_f(b-a) = f(\xi)(b-a). \quad ●$$

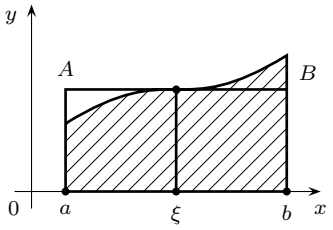



*Рис. 21.5.*

На рис. 21.5 изображена геометрическая интерпретация теоремы 21.2 на случай, когда $f(x) > 0$ на $[a, b]$.

Точка $\xi$ выбирается так, чтобы площадь прямоугольника $aABb$ была равна площади криволинейной трапеции (заштрихована).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $x \in [a, b]$, рассмотрим

$$I(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]. \tag{21.23}$$

Выражение (21.23) называют интегралом с переменным верхним пределом. Ясно, что $I(a) = 0;\ I(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

**ТЕОРЕМА 21.3**

Интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции — дифференцируемая функция и

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x). \tag{21.24}$$

● Найдем

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \stackrel{\text{теор. } 21.2}{=} f(\xi)\Delta x, \quad \xi \in [x, x + \Delta x].$$

Тогда

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = f(\xi), \quad \text{где } \xi \in [x, x + \Delta x]. \tag{21.25}$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, то

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x). \quad ●$$

Таким образом, мы показали, что $I(x)$ является первообразной для функции $f$. $\int_a^x f(t)\,dt$ существует для любой точки $x \in [a, b]$, если $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, значит, мы доказали, что если $f$ непрерывна на $[a, b]$, то она имеет на $[a, b]$ первообразную (теорема 20.1).

Главным приложением полученного результата является знаменитая формула Ньютона–Лейбница, к доказательству которой мы приступаем.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = I(b) = I(b) - 0 = I(b) - I(a). \tag{21.26}$$

Выше было доказано, что $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, тогда $I(x)+C$, где $C$ — произвольная постоянная, — общий вид первообразной $F(x)$ для функции $f$. Значит,

$$F(b)-F(a)=(I(b)+C)-(I(a)+C)=I(b)-I(a)\overset{(21.26)}{=}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, показано, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \tag{21.27}$$

где $F$ — любая из первообразных функции $f$.

Формула (21.27) называется формулой Ньютона–Лейбница. Она сводит задачу вычисления определенного интеграла к задаче нахождения первообразной.

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Обозначим $f\big|_a^b$ число, определенное следующим:

$$f\Big|_a^b\overset{\text{def}}{=}f(b)-f(a). \tag{21.28}$$

С учетом этого обозначения формула Ньютона–Лейбница примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F\Big|_a^b, \tag{21.29}$$

а если вспомнить, что неопределенный интеграл — это семейство всех первообразных функций, то получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int f(x)\,dx\Big|_a^b. \tag{21.30}$$

Из этой формулы «автоматически» получается:

### 21.3.1. ПРАВИЛО ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ И МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Пусть $\varphi(x)$ — монотонная дифференцируемая функция, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$, и $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt. \tag{21.31}$$

Эта формула называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на $[a,b]$ функции, тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \tag{21.32}$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

● *ПРИМЕР 21.2.* Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} x\,\sin x\,dx$.

● $$\int\limits_0^{\pi/2} x\,\sin x\,dx \overset{\substack{u(x)=x\\ v'(x)=\sin x}}{=} -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}(-\cos x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 0 + 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$ ●

## § 21.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### 21.4.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

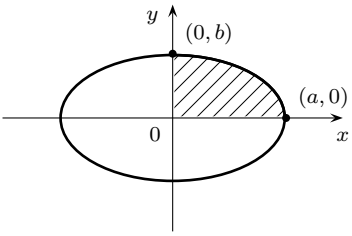



*Рис. 21.6.*

В начале этой главы (§ 21.1) мы установили, что в случае, когда $f(x) > 0$ на $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ — это площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = f(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$. Этот простой факт позволяет решать задачи о нахождении площадей плоских фигур.

● *ПРИМЕР 21.3.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

● Из симметрии эллипса (гл. 3, § 3.1) следует, что его площадь равна четырем площадям криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 21.6.

$$S = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \overset{\text{§ 20.5.3}}{=} 4\frac{b}{2a}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Big|_0^a = 2ab\arcsin 1 = \pi ab.$$

Заметим, что если $a = b = R$, то мы имеем дело с окружностью и вычислили площадь круга. $S_{\text{круга}} = \pi R^2$. ●

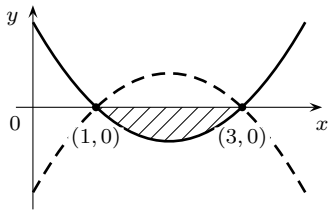



*Рис. 21.7.*

● *ПРИМЕР 21.4.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y = x^2 - 4x + 3$.

● Нарисуем указанную фигуру (рис. 21.7).

Так как на $[1, 3]$ $x^2 - 4x + 3 < 0$, то заменим вычисление площади заштрихованной фигуры вычислением площади фигуры, полученной зеркальной симметрией относительно оси $OX$.

$$S = \int\limits_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\,dx = -\int\limits_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Big|_1^3 = \left(-9 + \frac{1}{3} + 18 - 2 - 9 + 3\right) = 3\frac{1}{3}. \quad \bullet$$

В случае, когда криволинейная трапеция ограничена сверху графиком $y = f_1(x)$, снизу $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (см. рис. 21.8), площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S_{\text{фиг}} = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\, dx. \qquad (21.33)$$

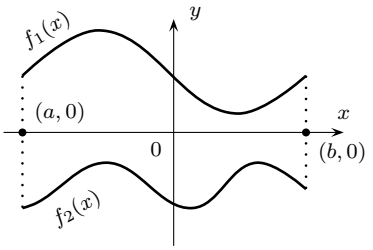



*Рис. 21.8.*

## 21.4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть фигура ограничена лучами $OA$, $OB$ и кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, заданной в полярных координатах. Разобьем интервал изменения $\varphi$ точками деления $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ и рассмотрим криволинейные секторы $s_i$, ограниченные лучами, выходящими из начала координат под углами $\varphi_{i-1}$ и $\varphi_i$ и графиком $r = r(\varphi)$ (см. рис. 21.9). Возьмем на дуге $r(\varphi)$, $\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i$ точку $r(\varphi_i^0)$ и в качестве приближенного значения площади криволинейного сектора площадь кругового сектора радиуса $r(\varphi_i^0)$ с углом $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

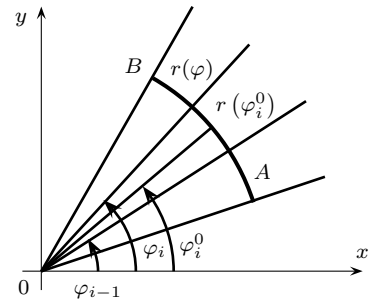



*Рис. 21.9.*

$$S_{i\ \text{кр. сектора}} \approx S_{i\ \text{круг. сектора}} = \frac{1}{2} r^2\left(\varphi_i^0\right)\Delta\varphi_i,$$

тогда

$$S_{\text{фиг}} = \sum_{i=1}^{n} S_{i\ \text{крив. сект.}} \approx \sum_{i=1}^{n} S_{i\ \text{круг. сект.}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\varphi_i^0)\Delta\varphi_i.$$

Мы получили интегральную сумму. Ясно, что площадь фигуры — это

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_i \to 0}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2\left(\varphi_i^0\right)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (21.34)$$

● *ПРИМЕР 21.5.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

(см. рис. 21.10).

● Из соображений симметрии следует, что

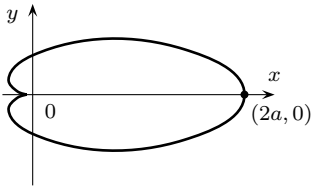



*Рис. 21.10.*

$$S_{\text{кард}} = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi\right) = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(2\cos\varphi + 1 + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= a^2 \left(2\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = a^2 \frac{3}{2}\pi = \frac{3\pi a^2}{2}. \quad \bullet$$

### 21.4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА С ИЗВЕСТНЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Допустим, нам необходимо вычислить объем тела, для которого известны площади его сечений плоскостями, перпендикулярными оси $OX$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ точками деления $x_i$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ и через точки деления $x_1, \ldots, x_{n-1}$ проведем плоскости, перпендикулярные оси $OX$. Эти плоскости рассекают тело на слои объема $\Delta V_i$, тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i.$$

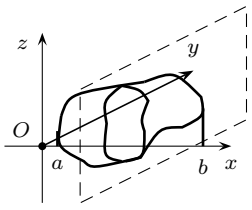



*Рис. 21.11.*

Объем слоя $\Delta V_i \approx V_{i\ \text{цилиндра}}$,

$$V_{i\ \text{цилиндра}} = S(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Тогда

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа выписана интегральная сумма. Ясно, что объем тела вычисляется по формуле

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{21.35}$$

● *ПРИМЕР 21.6.* Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом (рис. 21.12):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

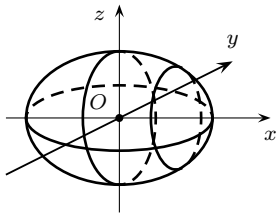



*Рис. 21.12.*

● Сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси $OX$, — эллипс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Его площадь (см. пример 21.3)

$$S(x) = \pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

тогда

$$V = \int\limits_{-a}^{a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc. \quad \bullet$$

Частным случаем рассмотренной задачи является:

### 21.4.4. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ ОБЪЕМА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$, графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$; $f(x) \geqslant 0$.

Вычислим объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси $OX$. Ясно, что сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку $(x, 0)$ $x \in [a, b]$ — круг радиуса $f^2(x)$, тогда, по рассмотренному в предыдущем пункте, получим

$$V_{\text{тела вращ.}} = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)\, dx. \tag{21.36}$$

*ПРИМЕР 21.7.* Вычислить объем тела вращения, полученного вращением синусоиды $y = \sin x$ на интервале $[0, \pi]$.

$$V = \pi \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \quad \bullet$$

### 21.4.5. ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть кривая $L$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная вместе со своей производной на $[a, b]$ функция. Требуется найти длину отрезка кривой $L : y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Разобьем интервал $[a, b]$ точками деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

За приближенное значение длины дуги $\Delta L_i$ на участке $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ примем длину хорды, соединяющей концы дуги $\Delta L_i$. По формуле расстояния между точками имеем

$$\Delta L_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{21.37}$$

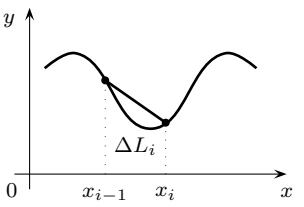



*Рис. 21.13.*

Но по формуле конечных приращений (18.38′) имеем

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

тогда

$$\Delta L_i \approx \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i. \tag{21.38}$$

Из (21.38) получаем, что

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i. \tag{21.39}$$

Справа записана интегральная сумма, тогда

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx. \tag{21.40}$$

Мы получили формулу для вычисления длины дуги кривой.

● *ПРИМЕР 21.8.* Найти длину дуги кривой $y = x^{3/2}$ на интервале $\left[0, \frac{12}{9}\right]$.

● $$L = \int_0^{12/9} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_0^3 \sqrt{1+t}\, dt =$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left((1+t)\sqrt{1+t}\right)\Big|_0^3 = \frac{8}{27}\cdot 7 = \frac{56}{27} = 2\frac{2}{27}.$$ ●

Если кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta], \tag{21.41}$$

$x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными и $x'(t) > 0$ на $[\alpha, \beta]$, то

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \qquad dx = x'(t)\, dt;$$
$$L = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} x'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt. \tag{21.42}$$

Мы получили формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически.

Применим теперь полученную формулу для нахождения длины дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Перейдем к параметрическому заданию кривой:

$$\begin{cases} x(t) = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y(t) = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y'(\varphi) &= r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi, \\ \sqrt{\big(x'(\varphi)\big)^2 + \big(y'(\varphi)\big)^2} &= \sqrt{\big(r'(\varphi)\big)^2 + r^2(\varphi)}, \end{aligned}$$

тогда

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi. \tag{21.43}$$

Мы получили формулу для вычисления длины дуги в полярных координатах.

● *ПРИМЕР 21.9.* Вычислить длину кардиоиды

$$r = a(1 + \cos\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

● $$L = a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\,\frac{d\varphi}{2} = 4a\int\limits_0^{\pi}|\cos t|\,dt = 8a\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt = 8a\cdot\sin t\Big|_0^{\pi/2} = 8a.$$ ●

### 21.4.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДУГИ

Пусть $x \in [a,b]$, тогда из формулы (21.40) получаем, что длина дуги кривой как функция от $x$ вычисляется по формуле

$$L(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (21.44)$$

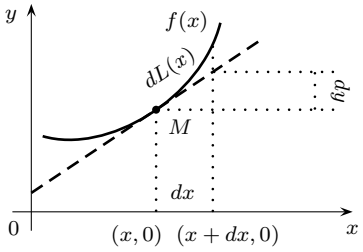



*Рис. 21.14.*

По теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом (теорема 21.3) эта функция дифференцируема и

$$L'(x) = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}.$$

Но тогда дифференциал дуги кривой $dL(x)$ выражается формулой:

$$dL(x) = L'(x)\,dx = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (21.45)$$

Вспоминая, что $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, получаем

$$dL(x) = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Вспоминая геометрический смысл дифференциала $dy$, получаем по теореме Пифагора, что $dL(x)$ — длина отрезка касательной от точки касания $M(x, f(x))$ до точки на касательной с абсциссой $x+dx$ (см. рис. 21.14).

**ТЕОРЕМА 21.4**
Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ и ее производная непрерывные на $[a,b]$ функции, тогда предел отношения длины дуги на этой кривой к длине стягивающей ее хорды равен единице.

● Длина дуги кривой на участке $[x_0, x_0+\Delta x]$ вычисляется по формуле

$$l\left([x_0, x_0+\Delta x]\right) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt,$$

по теореме о среднем (теорема 21.2) получаем, что

$$l\left([x_0, x_0+\Delta x]\right) = \sqrt{1+\left(f'(\xi_1)\right)^2}\,\Delta x, \qquad \xi_1 \in [x_0, x_0+\Delta x]. \tag{21.46}$$

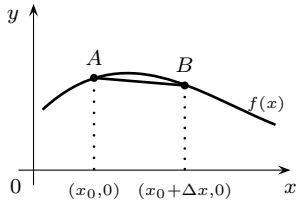



*Рис. 21.15.*

Длина стягивающей хорды $AB$ (см. рис. 21.15) вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right)^2}.$$

Применяя теорему Лагранжа (формула (18.38′)), получаем, что длина хорды выражается формулой

$$|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(f'(\xi_2)\Delta x\right)^2} = \sqrt{1+\left(f'(\xi_2)\right)^2}\cdot\Delta x, \qquad \xi_2 \in [x_0, x_0+\Delta x]\,. \tag{21.47}$$

Заметим, что $\lim_{\Delta x\to 0}\xi_1 = \lim_{\Delta x\to 0}\xi_2 = x_0$, тогда из (21.46) и (21.47) получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{l\left([x_0, x_0+\Delta x]\right)}{|AB|} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\left(f'(\xi_1)\right)^2}\Delta x}{\sqrt{1+\left(f'(\xi_2)\right)^2}\Delta x} = \frac{\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}}{\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}} = 1. \quad \bullet$$

### 21.4.7. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть поверхность образована вращением вокруг оси $OX$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$. Причем $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

Разобьем сегмент точками деления $x_i$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ и проведем через точки $x_1, \ldots, x_{n-1}$ плоскости, перпендикулярные оси $OX$. При этом поверхность рассечется на слои, имеющие площадь $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ соответственно. Очевидно,

$$S = \sum_{i=1}^{n}\Delta s_i. \tag{21.48}$$

В качестве приближенного значения поверхности $\Delta s_i$ возьмем поверхность усеченного конуса, образованного вращением стягивающей хорды дуги $l([x_{i-1}, x_i])$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению длины окружности срединного сечения $2\pi f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)$ на длину образующей (т. е. хорды), тогда, учитывая формулу (21.46), получаем

$$\Delta s_i \approx 2\pi f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i. \tag{21.49}$$

Из (21.48) и (21.49) получаем, что

$$S \approx 2\pi\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i. \tag{21.50}$$

Учитывая непрерывность функции $f$, имеем

$$f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \approx f(\xi_i),$$

тогда

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + \big(f'(\xi_i)\big)^2}\,\Delta x_i. \tag{21.51}$$

Справа в формуле (21.51) выписана интегральная сумма, тогда

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx. \tag{21.52}$$

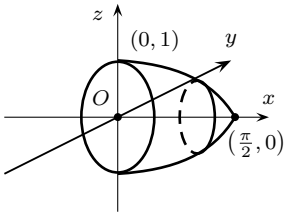



*Рис. 21.16.*

Мы получили формулу для площади поверхности вращения.

● *ПРИМЕР 21.10.* Вычислить площадь поверхности вращения дуги косинусоиды $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (рис. 21.16).

● $$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}\,dx \overset{\sin x = t}{=} 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt \overset{(20.24)}{=}$$
$$= 2\pi \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right)\Big|_0^1 =; 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right). \quad ●$$

## § 21.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этом параграфе мы приведем два приближенных метода вычисления определенных интегралов: метод трапеций и метод Симпсона.

Следует заметить, что замена интеграла на интегральную сумму — уже «хороший» приближенный метод вычисления определенного интеграла.

### 21.5.1. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

Пусть требуется вычислить приближенное значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Разобьем сегмент интегрирования $[a, b]$ точками деления на $n$ сегментов, положив $a = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $\ldots$, $x_n = x_{n-1} + h = b$; $h = \frac{b-a}{n}$.

Проведем через точки деления $x_0$, $x_1$, $\ldots$, $x_{n-1}$, $x_n$ вертикальные прямые. Точки пересечения прямых с графиком $y = f(x)$ обозначим $A_0$, $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$. Кривую

$y = f(x)$ заменим ломаной $A_0A_1A_2 \dots A_n$ и задачу интегрирования исходной функции заменим задачей интегрирования ломаной.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b (A_0A_1A_2 \dots A_n)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (A_{i-1}A_i)\,dx = \left(\begin{array}{c}\text{здесь мы применяем}\\ \text{формулу площади трапеции}\end{array}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h = \frac{h}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\right) =$$

$$= \frac{h}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_0) + f(x_n)\right) = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Мы получили формулу

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \qquad (21.53)$$

$$x_i = a + i \cdot h,$$

которую называют формулой трапеции.

При вычислении по формуле трапеций для контроля за точностью применяют обычно следующий прием.

Вычисляют приближенное значение интеграла с числом точек деления $n$ и с удвоенным числом точек деления $2n$ и верными считают совпадающие знаки.

● *ПРИМЕР 21.11.* Вычислить

$$\int_0^1 \cos x^2\,dx$$

по формуле трапеций, полагая $n = 8$.

● Составим таблицу значений подынтегральной функции для $n = 8$:

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ | $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0,625 | 0,390625 | 0,924671 |
| 1 | 0,125 | 0,015625 | 0,99987 | 6 | 0,75 | 0,5625 | 0,845924 |
| 2 | 0,25 | 0,0625 | 0,998047 | 7 | 0,875 | 0,765625 | 0,720949 |
| 3 | 0,375 | 0,140625 | 0,990128 | 8 | 1 | 1 | 0,540323 |
| 4 | 0,5 | 0,25 | 0,968912 | | | | |

По формуле (21.53) получаем

$$\int_0^1 \cos x^2\,dx \approx 0{,}125\left(\frac{1 + 0{,}5403223}{2} + 0{,}99987 + 0{,}99804 + 0{,}990128 + \right.$$

$$\left. + 0{,}968912 + 0{,}924671 + 0{,}845924 + 0{,}720949\right) = 0{,}902332813.$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции при $n = 16$:

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ | $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 0,5625 | 0,31640625 | 0,95035976 |
| 1 | 0,0625 | 0,0039 | 0,99999 | 10 | 0,625 | 0,390625 | 0,92467126 |
| 2 | 0,125 | 0,015625 | 0,9998779 | 11 | 0,6875 | 0,472656 | 0,89036216 |
| 3 | 0,1875 | 0,035156 | 0,99938208 | 12 | 0,75 | 0,5625 | 0,84592450 |
| 4 | 0,25 | 0,0625 | 0,9980475 | 13 | 0,8125 | 0,660156 | 0,78989642 |
| 5 | 0,3125 | 0,097656 | 0,9952354 | 14 | 0,875 | 0,765625 | 0,72094938 |
| 6 | 0,375 | 0,140625 | 0,99012858 | 15 | 0,9375 | 0,878906 | 0,63799376 |
| 7 | 0,4375 | 0,1940625 | 0,98173768 | 16 | 1 | 1 | 0,54030231 |
| 8 | 0,5 | 0,25 | 0,96891242 | | | | |

По формуле (21.53) получаем

$$\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx \approx 0{,}0652 \times 14{,}46361995 = 0{,}903976244.$$

Сравнивая полученное при $n = 8$ и $n = 16$, имеем

$$\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx \approx 0{,}90. \quad \bullet$$

### 21.5.2. МЕТОД СИМПСОНА[1]

Этот метод основан на замене графика функции на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ не хордой, а куском параболы $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$, проходящей через три точки: $x_{i-1}$, $x_i$ и $\frac{x_i - x_{i-1}}{2}$, т. е.

$$Ax_{i-1}^2 + Bx_{i-1} + C = f(x_{i-1}), \quad Ax_i^2 + Bx_i + C = f(x_i),$$
$$A\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + C = f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right).$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \frac{Ax^3}{3}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{Bx^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + Cx\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} =$$
$$= \frac{A\left(x_i^3 - x_{i-1}^3\right)}{3} + \frac{B\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)}{2} + C(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \frac{(x_i - x_{i-1})}{6}\left(2A\left(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3B(x_i + x_{i-1}) + 6C\right).$$

Найдем

$$A\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + C =$$
$$= A\frac{x_i^2}{4} + A\frac{x_i x_{i-1}}{2} + A\frac{x_{i-1}^2}{4} + B\frac{x_i}{2} + B\frac{x_{i-1}}{2} + C. \quad (21.54)$$

[1] Симпсон Томас (1710–1761) — английский математик. Сначала был ткачом, потом школьным учителем в Дерби, затем профессором математики в военной академии. В 1743 году предложил формулу приближенного вычисления определенных интегралов. Другие его работы посвящены элементарной геометрии, тригонометрии, анализу и теории вероятностей.

Продолжим вычисление интеграла:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx=\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\Bigg(Ax_i^2+Bx_i+C+Ax_{i-1}^2+$$
$$+Bx_{i-1}+C+4\Bigg(A\frac{(x_i)^2}{4}+\frac{Ax_ix_{i-1}}{2}+A\frac{(x_{i-1})^2}{4}+B\frac{x_i}{2}+$$
$$+B\frac{x_{i-1}}{2}+C\Bigg)\Bigg)=\text{(учитывая (21.54) и выбор параболы)}=$$
$$=\frac{x_i-x_{i-1}}{6}\left(f(x_i)+f(x_{i-1})+4f\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\right).\quad(21.55)$$

Эту формулу назовем малой формулой Симпсона.

Разобьем промежуток интегрирования на $2n$ равных частей. Положим $h=\frac{b-a}{2n}$; $a=x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_1+h,\ \ldots,\ x_{2n}=x_{2n-1}+h=b$.

Рассмотрим сегменты длины $2h$: $[x_0,x_2];\ [x_2,x_4];\ \ldots;\ [x_{2n-2},x_{2n}]$. Точки $x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_{2n-1}$ являются серединами этих сегментов. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x_2}f(x)\,dx+\int\limits_{x_2}^{x_4}f(x)\,dx+\cdots+\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}f(x)\,dx.\qquad(21.56)$$

К каждому слагаемому в (21.56) применим малую формулу Симпсона, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}\big(\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big)+$$
$$+\big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\big)+\cdots+\big(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\big)\big)=$$
$$=\frac{b-a}{6n}\big(\big(f(x_0)+f(x_{2n})\big)+2\big(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})\big)+$$
$$+4\big(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})\big)\big).\quad(21.57)$$

Последняя формула носит название формулы Симпсона или формулы параболических трапеций.

● *ПРИМЕР 21.12.* Вычислить по формуле Симпсона

$$\int\limits_0^1\cos x^2\,dx,$$

положив $2n=4$.

● Составим таблицу значений подынтегральной функции

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ | $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0,75 | 0,5625 | 0,8459245 |
| 1 | 0,25 | 0,0625 | 0,9980475 | 4 | 1 | 1 | 0,5403231 |
| 2 | 0,5 | 0,25 | 0,96891242 | | | | |

По формуле (21.57) получаем:

$$\int\limits_0^1\cos x^2\,dx\approx\frac{1}{12}\big((1+0,5403231)+2\cdot0,96891242+$$
$$+4(0,9980475+0,8459245)\big)\approx0,904503.$$

Возьмем теперь $2n = 8$. Составим таблицу значений подынтегральной функции:

| $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ | $i$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $\cos(x_i^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0,625 | 0,390625 | 0,92467126 |
| 1 | 0,125 | 0,015625 | 0,9998779 | 6 | 0,75 | 0,5625 | 0,8459245 |
| 2 | 0,25 | 0,0625 | 0,9980475 | 7 | 0,875 | 0,765625 | 0,72094938 |
| 3 | 0,375 | 0,140625 | 0,99012858 | 8 | 1 | 1 | 0,5403231 |
| 4 | 0,5 | 0,25 | 0,96891242 | | | | |

По формуле (21.57) получаем:

$$\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx \approx \frac{1}{24}\big((1+0{,}5403231)+2(0{,}9980475+0{,}96891242+0{,}8459245)+$$
$$+4(0{,}9998779+0{,}99012858+0{,}92467126+0{,}72094938)\big)\approx 0{,}904524.$$

Сравнивая полученное при $2n = 4$ и $2n = 8$, имеем

$$\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx \approx 0{,}9045. \quad \bullet$$

*Замечание.* Как правило, при одном и том же числе точек деления формула Симпсона дает более точный результат, чем формула трапеций. Но можно привести и контрпример.

Рассмотрим случай, когда $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ — ломаная и точки деления совпали с ее узлами. В этом случае формула трапеций дает точный результат, а формула Симпсона лишь приближенный.

## § 21.6. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 21.6.1. ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

Определение $\int_a^b f(x)\,dx$ как предела интегральных сумм возможно только тогда, когда $a$ и $b$ — конечные числа, в случае, когда $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, +\infty)$, при любом разбиении луча $[a, +\infty)$ конечным набором точек деления у нас останется луч $[x_n, +\infty)$, для которого нельзя выписать слагаемое вида $f(\xi_i)\Delta x_i$.

Как понимать, что такое $\int_a^\infty f(x)\,dx$?

**Определение 21.4.** *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, \infty)$ и пусть $b > a$. Рассмотрим*

$$I(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

*Несобственным интегралом $\int_a^\infty f(x)\,dx$ называется $\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, если этот предел существует.*

*ПРИМЕР 21.13.* Вычислить

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3}.$$

Вычислим

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^3} = -\left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^b = -\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}.$$

Найдем

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Значит, несобственный интеграл существует и

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{a} f(x)\,dx. \tag{21.58}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{c} f(x)\,dx+\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{c}^{a} f(x)\,dx,$$

то есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx,\quad c\in\mathbb{R}. \tag{21.59}$$

### 21.6.2. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

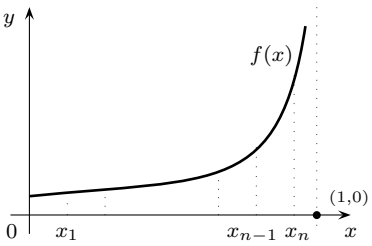



*Рис. 21.17.*

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна во всех точках сегмента $[a,b]$, за исключением точки $b$, в которой она имеет разрыв второго рода. Как понимать в этом случае, что такое $\int_a^b f(x)\,dx$? Неприемлемость подхода к определению интеграла как предела последовательности интегральных сумм в этом случае становится ясной из следующего примера.

Рассмотрим сегмент $[0,1]$ и функцию $y=\frac{1}{1-x}$, в точке $x_0=1$ она имеет разрыв второго рода, ее график на сегменте $[0,1)$ изображен на рис. 21.17.

Разобьем сегмент точками деления $0=x_0<x_1<$ $<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

преобразуем ее, выделив последнее слагаемое

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Ясно, что чем ближе $\xi_n$ к точке $x_n = 1$, тем последнее слагаемое больше, т. е. даже при фиксированном разбиении, за счет изменения положения одной точки $\xi_n$ интегральную сумму можно сделать как угодно большой, и значит,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{не существует.}$$

**Определение 21.5.** *Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ и в точке $b$ имеет разрыв второго рода. Пусть $a < c < b$. Рассмотрим*

$$I(c) = \int_a^c f(x)\,dx.$$

*Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ называется*

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c\to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \tag{21.60}$$

*если этот предел существует.*

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда функция определена и непрерывна на $(a,b]$ и имеет разрыв второго рода в точке $a$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0} \int_c^b f(x)\,dx. \tag{21.61}$$

Если же функция определена и непрерывна на $[a,c)\cup(c,b]$ и в точке $c$ имеет разрыв второго рода, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{21.62}$$

Интегралы в правой части (21.62) понимаются как несобственные.

● *ПРИМЕР 21.14.* Вычислить

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

● Пусть $c \in [0,1)$, вычислим

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\,2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = -2\sqrt{1-c} + 2.$$

Найдем

$$\lim_{c\to 1-0} \left(-2\sqrt{1-c} + 2\right) = 2.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad \text{существует и} \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2. \quad \bullet$$

● *ПРИМЕР 21.15.* Вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1+\beta}}, \qquad \text{где} \quad \beta > 0.$$

● Пусть $c \in [0,1)$, вычислим

$$\int\limits_0^c \frac{dx}{(1-x)^{1+\beta}} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{(1-x)^{\beta}}\Big|_0^c = \left(\frac{1}{\beta}\frac{1}{(1-c)^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\right).$$

Ясно, что

$$\lim_{c\to 1-0} \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(1-c)^{\beta}} - 1\right) = +\infty,$$

т. е. не существует, значит несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1+\beta}} \quad (\beta > 0) \qquad \text{не существует.} \quad \bullet$$

**Определение 21.6.** *В случае, когда несобственный интеграл существует, принято говорить, что интеграл сходится, а если несобственный интеграл не существует, то говорят, что он расходится.*

Можно показать, что все свойства определенного интеграла справедливы и для сходящихся несобственных интегралов (в том числе формула замены переменной).

### 21.6.3. ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ–РАСХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Приведем без доказательства один достаточно очевидный признак сходимости–расходимости несобственных интегралов, который называют признаком сравнения.

**ТЕОРЕМА 21.5**

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a,\infty)$ и для любого $x \in [a,\infty)$ имеет место

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

тогда если $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int_a^\infty f(x)\,dx$, а если $\int_a^\infty f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

● *ПРИМЕР 21.16.* Исследовать на сходимость

$$\int\limits_1^\infty \frac{3+\sin\sqrt{x}}{x}\,dx.$$

● Ясно, что для любого $x \in [1,\infty)$

$$0 \leqslant \frac{2}{x} \leqslant \frac{3+\sin\sqrt{x}}{x}.$$

Исследуем на сходимость $\int_0^\infty \frac{2}{x}\,dx$.

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{2}{x}\,dx = 2\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = 2\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = 2\lim_{b\to+\infty}(\ln b) = +\infty.$$

Значит $\int_1^\infty \frac{2}{x}\,dx$ расходится, тогда по признаку сравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{3+\sin\sqrt{x}}{x}\,dx \qquad \text{расходится.} \quad ●$$

## § 21.7. ЗАМЕЧАНИЯ В КОНЦЕ ГЛАВЫ

Считаем необходимым сделать два замечания.

*Замечание 21.1.* Формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \int f(x)\,dx\Big|_a^b$$

очень «коварна», так как в ее правой части фигурируют только значения первообразной $F$ в точках $a$ и $b$, но ее можно применять только в том случае, когда $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ существует на всем промежутке интегрирования, т. е. для всех значений $x \in [a,b]$.

Ее запись в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b$$

кажется нам более безопасной, так как в ней более явно присутствует неопределенный интеграл функции $f(x)$ на $[a,b]$.

*Замечание 21.2.* В предыдущем параграфе при рассмотрении прикладных задач о площади, объеме, длине дуги мы строили интегральные суммы, а далее полагали, что площадь, объем, длина дуги выражаются соответствующим определенным интегралом. Фактически мы неявно так их и определяли.

Например, под объемом тела, образованного вращением криволинейной трапеции: $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a,b]$; $x = a$; $x = b$ вокруг оси $OX$, понимают

$$\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

## Вопросы для самопроверки

1. Приведите «свои» примеры задач, приводящих к понятию определенного интеграла.
2. Покажите, что в определении

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_n\to 0)}} \sigma_n(f)$$

условие $\lambda_n \to 0$ в правой части существенно.

3. Найдите ошибку в следующей цепочке «равенств»:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x\,dx}{\sin x} =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\,\sin x}{\sin x} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

4. Существует ли как несобственный следующий интеграл:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$ ;

б) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{ctg} x\,dx$ ;

в) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$ ?

# XXII

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 22.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Все, рассмотреное в этом разделе, касалось функций одной переменной. Теперь речь пойдет о функциях нескольких переменных, причем каждая переменная принимает значения на множестве вещественных чисел, а сама функция принимает действительные значения.

● *ПРИМЕР 22.1.* Известно, что объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h, \tag{22.1}$$

где $S$ — площадь основания, $h$ — длина высоты. Тогда формула (22.1) определяет объем $V$ как функцию двух переменных — $S$ и $h$, т. е.

$$V = V(S, h) = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

$S \in [0; \infty)$, $h \in [0, \infty)$ и функция $V$ принимает неотрицательные значения.

● *ПРИМЕР 22.2.* В развитие примера 22.1 будем рассматривать объем треугольной пирамиды как функцию трех переменных:

$$V\,(a, h_a, h) = \frac{1}{6} a \cdot h_a \cdot h, \tag{22.2}$$

где $a$ — длина стороны треугольника, лежащего в основании пирамиды, $h_a$ — длина высоты этого треугольника, проведенной к стороне $a$, $h$ — высота пирамиды. Ясно, что $a$, $h_a$, $h \in [0; \infty)$, $V \in [0; \infty)$.

Таким образом, формула (22.2) определяет объем треугольной пирамиды как функцию 3 переменных: $a$, $h_a$, $h$.

Перейдем теперь к общему определению функции $n$ переменных.

Напомним, что через $\mathbb{R}_n$ мы обозначали множество, элементами которого являются упорядоченные наборы из $n$ вещественных чисел, т. е.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Равенство элементов $\mathbb{R}_n$ определяется следующим правилом:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n).$$

Элементы $\mathbb{R}_n$ называют точками. (Действительно, элементы $\mathbb{R}_1$ можно интерпретировать как точки на числовой оси, элементы $\mathbb{R}_2$ как точки на декартовой плоскости, элементы $\mathbb{R}_3$ — как точки в трехмерном пространстве, в котором введена декартова система координат.)

Пусть $A = (x_{1A}, x_{2A}, \ldots, x_{nA})$ и $B = (x_{1B}, x_{2B}, \ldots, x_{nB})$ — две точки в $\mathbb{R}_n$. Определим расстояние $\rho(A, B)$ между точками $A$ и $B$ формулой

$$\rho(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_{1A}-x_{1B})^2 + (x_{2A}-x_{2B})^2 + \cdots + (x_{nA}-x_{nB})^2}. \tag{22.3}$$

Для $\rho(A, B)$ имеют место свойства:

$1^{\text{o}}$ . $\rho(A,B) \geqslant 0$, причем $\rho(A,B) = 0 \iff A = B$.

$2^{\text{o}}$ . $\rho(A,B) = \rho(B,A)$, $\forall A,\ \forall B \in \mathbb{R}_n$.

$3^{\text{o}}$ . $\rho(A,B) \leqslant \rho(A,C) + \rho(C,B)$, $\forall A, \forall B, \forall C \in \mathbb{R}_n$.

Последнее свойство называется неравенством треугольника. (Оно уже рассматривалось нами в разделе «Алгебра».)

**Определение 22.1.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}(= \mathbb{R}_1)$, говорят, что задана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, действующая из множества $X$ во множество $Y$ (пишут $f : X \to Y$), если задано правило, которое каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ ставит в соответствие однозначно определенное этой точкой и этим правилом число, обозначаемое $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $Y$.*

**Определение 22.2.** *Графиком функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется множество точек в $\mathbb{R}_{n+1}$ с координатами $\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$.*

● *ПРИМЕР 22.3.* Построить график функции

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2.$$

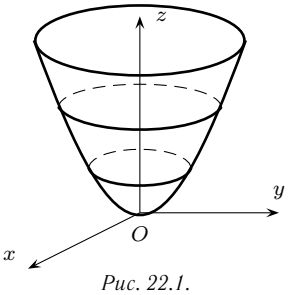


*Рис. 22.1.*

● Ясно, что график этой функции — параболоид вращения (см. рис. 22.1) в $\mathbb{R}_3$. ●

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана формулой, то под областью определения $X$ понимают множество всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых имеет смысл формула.

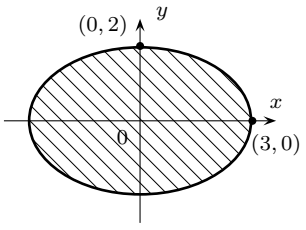


*Рис. 22.2.*

● *ПРИМЕР 22.4.* Найти область определения функции

$$z = \ln\left(36 - 4x^2 - 9y^2\right).$$

● Область определения функции — множество решений неравенства

$$36 - 4x^2 - 9y^2 > 0 \iff$$
$$4x^2 + 9y^2 < 36 \iff$$
$$\iff \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1.$$

Ясно, что множество точек, удовлетворяющих последнему неравенству, — часть плоскости, ограниченная эллипсом (см. рис. 22.2). ●

# § 22.2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 22.2.1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Вспомним, как определялось понятие предела функции в точке $x_0$ в случае функции одной переменной (гл. 17, § 17.1). Там мы вводим понятие $\delta$-окрестности точки $x_0$ — $s(x_0, \delta) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta \}$. Заметим, что в случае $\mathbb{R}_1$, если $A = (x_A)$, $B = (x_B)$, то формула (22.3), задающая расстояние между точками, превращается в формулу

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|. \tag{22.4}$$

**Определение 22.3.** *Пусть $\delta > 0$, $\delta$-окрестностью точки $M_0 = (x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}) \in \mathbb{R}_n$ называют открытый шар с центром в точке $M_0$ и радиусом $\delta$, т. е. множество точек $M = (x_{1M}, \ldots, x_{nM}) \in \mathbb{R}_n$, для которых*

$$\rho(M, M_0) < \delta.$$

*$\delta$-окрестность точки $M_0$ будем обозначать $s(M_0, \delta)$.*

**Определение 22.4.** *Выколотой $\delta$-окрестностью точки $M_0$ называют множество точек $M$, для которых*

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta.$$

*Выколотую $\delta$-окрестность точки $M_0$ будем обозначать $s'(M_0, \delta)$.*

**Определение 22.5.** *Пусть $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}$, точка $M_0$ такова, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что*

$$s'(M_0, \delta_0) \subset X.$$

*Число $a$ называют пределом функции $f$ при $M$, стремящемся к $M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta$, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta \leqslant \delta_0$, такое, что для любой точки $M = (x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}) \in s'(M_0, \delta)$ выполнено неравенство*

$$|f(x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}) - a| < \varepsilon. \tag{22.5}$$

На языке предикатов и кванторов это определение можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \, (0 < \delta \leqslant \delta_0) \; \forall M \, (\in \mathbb{R}_n) \\ (M \in s'(M_0, \delta) \implies |f(x_{1M}, \ldots, x_{nM}) - a| < \varepsilon). \end{gathered} \tag{22.6}$$

Предел функции $f$ при $M$, стремящемся к $M_0$ (если он существует), обозначают так:

$$\lim_{M \to M_0} f\big(x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}\big) = a.$$

Заметим, что теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, справедливы и в случае функций многих переменных.

### 22.2.2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И ОБЛАСТИ

Из рассмотренного в п. 1 видно, что между понятиями предела функции одной переменной и многих переменных существует полная аналогия. Так же обстоит дело и с понятием непрерывности функции.

**Определение 22.6.** *Пусть* $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}$, *точка* $M_0 = (x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0})$ *такова, что существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что* $s(M_0, \delta_0) \subset X$. *Функция* $f$ *называется непрерывной в точке* $M_0$, *если существует предел функции* $f$ *при* $M \to M_0$ *и*

$$\lim_{M \to M_0} f(x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}) = f(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}). \qquad (22.7)$$

Ясно, что для непрерывных в точке $M_0$ функций справедлива теорема об арифметических операциях, аналогичная теореме для непрерывных функций одной переменной (теорема 17.7).

Если мы хотим ввести понятие непрерывной функции на множестве, как функции, непрерывной в каждой точке множества, то само определение 22.6 требует, чтобы каждая точка множества принадлежала ему с некоторой своей $\delta$-окрестностью.

**Определение 22.7.** *Множество* $X \subset \mathbb{R}_n$ *называется областью, если оно*

1) *является открытым множеством, т. е. содержит каждую свою точку вместе с некоторой своей* $\delta$*-окрестностью:*

$$\big(\forall M_0 \in X\ \exists \delta > 0\ \forall M\ \big(M \in s(M_0, \delta) \implies (M \in X)\big)\big); \qquad (22.8)$$

2) *является связным множеством, т. е. для любых двух различных точек* $M_1$, $M_2 \in X$ *существует ломаная, соединяющая* $M_1$ *с* $M_2$, *целиком лежащая в* $X$.

*ПРИМЕР 22.5.* Ясно, что открытый шар радиуса $R$ $(> 0)$ с центром в точке $M_0$

$$S(M_0, R) = \{\, M \in \mathbb{R}_n \mid \rho(M_0, M) < R \,\}$$

является областью, а $S(M_1, R_1) \cup S(M_2, R_2)$, где $M_1 \neq M_2$ и $R_1 + R_2 < \rho(M_1, M_2)$, не является областью, так как не является связным множеством.

**Определение 22.8.** *Множество* $X \subset \mathbb{R}_n$ *называется ограниченным, если существует* $M$ $(\in \mathbb{R})$ *такое, что*

$$X \subset S(O, M).$$

**Определение 22.9.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}_n$, *границей* $X$ *называется множество, обозначаемое* $\partial X$ *и определяемое следующим образом:*

$$M \in \partial X \iff \forall \delta > 0\ \big(S(M, \delta) \cap X \neq \varnothing \wedge S(M, \delta) \cap \bar{X} \neq \varnothing\big),$$

*где* $\bar{X} = \mathbb{R}_n \setminus X$, *т. е. в качестве универсального множества рассматривается* $\mathbb{R}_n$.

*ПРИМЕР 22.6.* Ясно, что границей шара $S(M_0, R)$ является сфера радиуса $R$ с центром в точке $M_0$, т. е.

$$M \in \partial S(M_0, R) \iff \rho(M_0, M) = R.$$

**Определение 22.10.** *Пусть $S$ — область в $\mathbb{R}_n$. Замкнутой областью называется множество $\widetilde{S}$, определяемое следующим:*

$$\widetilde{S} = S \cup \partial S. \tag{22.9}$$

Таким образом, замкнутый шар радиуса $R$ $(> 0)$ с центром в точке $M_0$ $(\in \mathbb{R}_n)$ это множество $\widetilde{S}(M_0, R)$, определяемое следующим

$$M \in \widetilde{S}(M_0, R) \iff \rho(M_0, M) \leqslant R. \tag{22.9′}$$

Ясно, что $\mathbb{R}_n$ является областью, $\partial\mathbb{R}_n = \varnothing$, значит, $\tilde{\mathbb{R}}_n = \mathbb{R}_n$.

**Определение 22.11.** *Пусть $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}$, $S \subset X$ и $S$ — область. Говорят, что $f$ непрерывна на $S$, если $f$ непрерывна в каждой точке $M \in S$.*

**Определение 22.11′.** *Пусть $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}$, $S$ — область в $\mathbb{R}_n$, такая, что существует область $S_1$, удовлетворяющая соотношениям*

$$\widetilde{S} \subset S_1 \subset X.$$

*Говорят, что функция $f$ непрерывна в замкнутой области $\widetilde{S}$, если она непрерывна в каждой точке $M \in \widetilde{S}$.*

Для непрерывных функций многих переменных справедливы теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями, а также

**ТЕОРЕМА 22.1**

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $S$, то она в этой области:

1. ограничена, т. е. существует $A$ $(\in \mathbb{R})$, что

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant A, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in S;$$

2. принимает на $S$ свое наименьшее и наибольшее значение, т. е. если

$$m = \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{и}$$
$$M = \max_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n),$$

то существуют $(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) \in S$ и $(x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}) \in S$ такие, что

$$f(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}) = m,$$
$$f(x_{1M}, x_{2M}, \ldots, x_{nM}) = M;$$

3. принимает на $S$ любое промежуточное значение между $m$ и $M$, т. е. если $a \in [m, M]$, то существует хотя бы одна точка $(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}) \in S$ такая, что $f(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{na}) = a$.

● *ПРИМЕР 22.7.* Рассмотрим функцию $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, определенную на множестве $X = S(0, 2)$, а в качестве множества $\widetilde{S}$, к которому применим теорему 22.1, рассмотрим замкнутый единичный шар радиуса 1 с центром в начале координат, т. е. $\widetilde{S} = \widetilde{S}(0, 1)$ (см. рис. 22.3).

На рис. 22.3 — график функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Наибольшее значение этой функции на $\widetilde{S}(0, 1)$ достигается в единственной точке $(0, 0)$ и равно $2$, наименьшее значение достигается в любой точке границы $\partial\widetilde{S}(0, 1)$ — единичной окружности с центром в начале координат и равно $\sqrt{3}$.

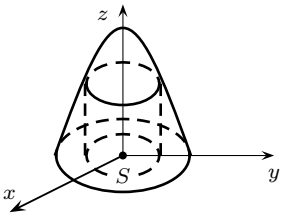



*Рис. 22.3.*

## § 22.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Дифференциальное исчисление функций многих переменных несколько сложнее, чем в случае одной переменной, однако в идейном плане оно — прямой наследник изученного нами в главах, посвященных дифференцированию функций одной переменной.

**Определение 22.12.** *Пусть* $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$, $Y \subset \mathbb{R}$. *Точка* $M_0 = (x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0})$ *— внутренняя точка* $X$, *т. е. принадлежит множеству* $X$ *вместе с некоторой* $\delta_0$*-окрестностью* ($\delta_0 > 0$, $S(M_0, \delta_0) \subset X$).

*Функция* $(i_f)(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_{1M_0}, \ldots, x_{i-1\,M_0}, x_i, x_{i+1\,M_0}, \ldots, x_{nM_0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *является функцией одной переменной —* $x_i$ *(вместо остальных переменных в функцию* $f$ *мы подставили их фиксированные значения* $x_{1M_0}$, $x_{2M_0}$, $\ldots$, $x_{i-1\,M_0}$, $x_{i+1\,M_0}, \ldots, x_{nM_0}$).

*Говорят, что функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет частную производную по переменной* $x_i$ *в точке* $M_0$ ($\Leftrightarrow$ *дифференцируема по* $i$*-й переменной в точке* $M_0$), *если функция* $(i_f)(x_i)$ *дифференцируема в точке* $x_{i\,M_0}$.

Частную производную функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M_0$ по переменной $x_i$ обозначают

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}), \qquad \text{т. е.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}) \stackrel{\text{def}}{=} (i_f)'(x_{i\,M_0}). \tag{22.10}$$

Частную производную по переменной $x_i$ называют иногда производной по $i$-й переменной, а вместо обозначения $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1M_0}, \ldots, x_{nM_0})$ применяют еще такие:

$$f'_{x_i}(x_{1M_0}, \ldots, x_{nM_0}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{M_0}.$$

Таким образом, если мы имеем дело с функцией двух переменных $z = f(x, y)$, определенной на $X$, то можно говорить о ее частной производной по $x$ и о ее частной производной по $y$, т. е. фиксированной внутренней точке $M_0 \in X$ ($\Leftrightarrow$ принадлежащей $X$ вместе со своей некоторой $\delta$-окрестностью) мы поставили в соответствие два числа $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$.

Допустим, что в каждой точке $M_0 \in \operatorname{Int} X$ ($\operatorname{Int} X$ — множество внутренних точек множества $X$) существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, тогда они сами являются функциями точки, определенными на $\operatorname{Int} X$, или функциями двух переменных.

Если все множество определения функции $f$ является областью, то $\operatorname{Int} X = X$ и можно говорить о $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ как о функциях двух переменных $x$ и $y$, определенных на $X$.

### 22.3.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Будем рассматривать этот вопрос в случае функции двух переменных, для функций большего числа переменных все аналогично, только менее наглядно.

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на $X$ и $M_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{Int} X$ и функция $f$ дифференцируема по $x$ в точке $M_0$.

Рассмотрим график функции $f$ в окрестности $M_0$ (см. рис. 22.4).

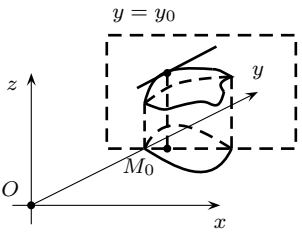



*Рис. 22.4.*

Рассмотрим плоскость $y = y_0$ и ее пересечение с графиком функции $z = f(x, y)$. Пересечение этой плоскости с графиком $z = f(x, y)$ — кривая, лежащая в плоскости $y = y_0$, является графиком функции $(i_f)(x) = f(x, y_0)$. Вспоминая геометрический смысл производной, мы получаем, что:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (i_f)'(x_0)$$

— тангенс угла наклона касательной, проведенной к кривой в точке $x_0$, к положительному направлению оси, проведенной через эту точку, параллельной оси $OX$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ имеет аналогичный геометрический смысл.

### 22.3.2. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Определение 22.12 частной производной функции многих переменных — это определение производной функции одной переменной — $x_i$, когда все остальные переменные «заморожены», т. е. их значения зафиксированы. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования для функций одной переменной переносятся на частные производные, нужно только при дифференцировании по $i$-й переменной остальные считать постоянными.

● *ПРИМЕР 22.8.* Найти частные производные функции

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 + e^{x+z^2} \cdot \sin(yz).$$

●
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + e^{x+z^2} \cdot \sin(yz),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y + e^{x+z^2} \cdot (\cos(yz)) \cdot z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{x+z^2} \cdot 2z \cdot \sin(yz) + e^{x+z^2} (\cos(yz)) \cdot y = e^{x+z^2} (2z \cdot \sin(yz) + y \cos(yz)).$$ ●

### 22.3.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Так как частные производные функции $n$ переменных сами можно рассматривать как функции $n$ переменных, то можно говорить и о их частных производных. Для исходной функции они называются производными второго порядка. Аналогично вводятся частные производные третьего порядка как частные производные от частных производных второго порядка и т. д.

Приведем обозначения, которые применяются для частных производных старших порядков (второго, третьего, ...) на примере функции двух переменных — $f(x,y)$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} f''_{xx}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f''_{x^2}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} f''_{xy}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} f''_{yx}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} f''_{yy}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f''_{y^2}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)}{\partial x}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{xxx}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{x^3}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)}{\partial y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{yxx}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{yx^2}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)}{\partial x}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{xyx}(x,y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)}{\partial y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{yyx}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f'''_{y^2x}(x,y)$$

и т. д.

Таким образом, для функции 2 переменных $f(x,y)$ можно говорить о 2 частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

4 частных производных 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),$$

8 частных производных 3-го порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}(x,y), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)$$

и т. д.

● *ПРИМЕР 22.9.* Вычислить $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ для функции $f = x^2 + 2xy - y^2 + e^{x+z^2}\sin yz$ примера 22.8.

●

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\Big(2x - 2y + e^{x+z^2}\cdot\cos(yz)\cdot z\Big)}{\partial x} = 2 + e^{x+z^2}\cdot\cos(yz)\cdot z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\Big(2x + 2y + e^{x+z^2} \cdot \sin(yz)\Big)}{\partial y} = 2 + e^{x+z^2} \cdot \cos(yz) \cdot z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial\Big(e^{x+z^2}\big(2z \cdot \sin(yz) + y\cos(yz)\big)\Big)}{\partial z} = e^{x+z^2} \cdot 2z\big(2z \cdot \sin(yz) + \\ + y\cos(yz)\big) + e^{x+z^2}\big(2\sin(yz) + 2z \cdot \cos(yz) \cdot y - y^2 \sin(yz)\big) = \\ = e^{x+z^2}\big(4z^2 \sin(yz) + 4yz\cos(yz) + 2\sin(yz) - y^2 \sin(yz)\big).$$

Отметим, что в решенном примере оказалось, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}.$$

Для смешанных производных порядка, большего единицы, имеет место

**ТЕОРЕМА 22.2**
Две смешанные частные производные одного порядка одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, в случае когда они являются непрерывными функциями, равны между собой.

## § 22.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 22.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Как и в случае функции одной переменной, мы изучим поведение приращения функции и назовем дифференциалом функции главную часть приращения.

Пусть $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}_n$, $Y \subset \mathbb{R}$, $M_0 = (x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0})$ — внутренняя точка $X$. Рассмотрим точку

$$M' = (x_{1M_0} + \Delta x_1, x_{2M_0} + \Delta x_2, \ldots, x_{nM_0} + \Delta x_n),$$

где $\Delta x_i$ таковы, что $M' \in X$. Найдем приращение функции $f$:

$$\Delta f = f(M') - f(M) = f(x_{1M_0} + \Delta x_1, \ldots, x_{nM_0} + \Delta x_n) - f(x_{1M_0}, \ldots, x_{nM_0}).$$

**Определение 22.13.** *Говорят, что функция $f$ дифференцируема в точке $M_0$, если*

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + o\left(\sqrt{\Delta^2 x_1 + \cdots + \Delta^2 x_n}\right), \qquad (22.11)$$

*а выражение $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n$ называют полным дифференциалом (дифференциалом) функции $f$ в точке $M_0$ и обозначают $df$.*

То есть дифференциалом мы назвали главную часть приращения и определили, что дифференциал — линейная функция от приращений аргументов.

*ПРИМЕР 22.10.* Найти дифференциал функции $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + 2x_1^2 x_2$ в точке $M_0 = (1, -1)$.

● Найдем $\Delta f$:

$$\begin{aligned}\Delta f = f(1+\Delta x_1, -1+\Delta x_2) - f(1,-1) = (1+\Delta x_1)(-1+\Delta x_2)^2 + \\ + 2(1+\Delta x_1)^2(-1+\Delta x_2) - \left(1\cdot(-1)^2 + 2(1)^2\cdot(-1)\right) = \\ = (1+\Delta x_1)\left(1-2\Delta x_2+(\Delta x_2)^2\right) + 2\left(1+2\Delta x_1+(\Delta x_1)^2\right)(-1+\Delta x_2) - 1 + 2 = \\ = 1+\Delta x_1 - 2\Delta x_2 - 2\Delta x_1\Delta x_2 + (\Delta x_2)^2 + \Delta x_1\cdot(\Delta x_2)^2 - 2 - \\ - 4\Delta x_1 - 2(\Delta x_1)^2 + 2\Delta x_2 + 4\Delta x_1\Delta x_2 + 2(\Delta x_1)^2\Delta x_2 - 1 + 2 = \\ = -3\Delta x_1 + 0\cdot\Delta x_2 + o\left(\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2}\right), \\ df(M_0) = -3\Delta x_1 + 0\cdot\Delta x_2 = -3\,dx_1 + 0\cdot dx_2.\end{aligned}$$

(Последнее записано в силу того, что $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$.) ●

Вспомним определение дифференциала функции одной переменной и его вид (гл. 18 § 18.6):

$$\Delta f = df + o(\Delta x), \quad df = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,dx.$$

Вероятно, в случае многих переменных должно быть выполнено

$$\begin{aligned}\Delta f = df + o\left(\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 + \cdots + \Delta^2 x_n}\right), \\ df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\cdot dx_n.\end{aligned}$$

Вернемся к нашему последнему примеру:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_2^2 + 4x_1x_2; \quad & \frac{\partial f}{\partial x_1}(-1,1) &= 1-4 = -3; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2x_1x_2 + 2x_1; \quad & \frac{\partial f}{\partial x_2}(-1,1) &= -2+2 = 0.\end{aligned}$$

То есть наше предположение о виде полного дифференциала в примере 22.10 выполнено.

Имеет место

**ТЕОРЕМА 22.3**

Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x_{1M_0},\ x_{2M_0},\ \ldots,\ x_{nM_0})$ (т. е. имеет полный дифференциал), то она имеет в точке $M_0$ частные производные по всем переменным и

$$\begin{aligned}df\,(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_{1M_0},\ldots,x_{nM_0})\,dx_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(x_{1M_0},\ldots,x_{nM_0})\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x_{1M_0},\ldots,x_{nM_0})\,dx_n. \quad (22.12)\end{aligned}$$

● Так как функция $f$ имеет в точке $M_0$ дифференциал, то в окрестности точки $M_0$ выполнено равенство (22.11). Оно справедливо для всевозможных наборов $(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$, таких что

$$\begin{gathered}(x_{1M_0}+\Delta x_1, x_{2M_0}+\Delta x_2, \ldots, x_{nM_0}+\Delta x_n) \in S(M_0,\delta_0), \\ \delta_0 > 0,\ S(M_0,\delta_0) \subset X.\end{gathered}$$

Возьмем

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{i-1} = 0,\ \Delta x_{i+1} = \Delta x_{i+2} = \cdots = \Delta x_n = 0,$$

тогда из (22.11) получаем

$$(\Delta f)(M_0) = f(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{i-1\,M_0}, x_{i\,M_0} + \Delta x_i, x_{i-1\,M_0}, \ldots, x_{nM_0}) - f(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{i-1\,M_0}, x_{i\,M_0}, x_{i+1\,M_0}, \ldots, x_{nM_0}) + o(\Delta x_i) = A_i \Delta x_i + o(\Delta x_i). \quad (22.13)$$

Равенство (22.13) в обозначениях §22.3 имеет вид

$$\Delta i_f(x_{iM_0}) = A_i \Delta x_i + o(\Delta x_i). \quad (22.14)$$

последнее означает дифференцируемость функции $i_f$ в точке $x_{iM_0}$ и $(i_f)'(x_{iM_0}) = A_i$ (теорема 18.1), а производная функции $i_f$ в точке $x_{iM_0}$ — это частная производная функции $f$ в точке $M_0$ по переменной $x_i$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $M_0$ существует и выполнено равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{1M_0}, x_{2M_0}, \ldots, x_{nM_0}) = A_i. \quad \bullet$$

Таким образом, мы доказали, что если функция дифференцируема в точке $M_0$, то ее приращение относительно точки $M_0$ может быть записано в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n + o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\right). \quad (22.15)$$

Обратная теорема к доказанной, вообще говоря, не справедлива, однако, если в точке $M_0$ функция имеет частные производные по всем переменным и они являются в этой точке непрерывными функциями, то в этом случае функция дифференцируема в точке $M_0$, т. е. имеет полный дифференциал в этой точке и в некоторой $\delta_0$-окрестности $\delta_0 > 0$ точки $M_0$ выполнено равенство

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n + o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\right),$$

т. е.

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n.$$

### 22.4.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Сказанное о приложении дифференциала функции одной переменной к приближенным вычислениям (§18.6) справедливо и для полного дифференциала функции многих переменных, т. е. $\Delta f \approx df$, и значит,

$$f(x_{1M_0} + \Delta x_1, x_{2M_0} + \Delta x_2, \ldots, x_{nM_0} + \Delta x_n) \approx f(x_{1M_0}, \ldots, x_{nM_0}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n. \quad (22.16)$$

● *ПРИМЕР 22.11.* Найти приближенное значение функции $f(x, y) = \sin(2x + y)$ при $x = 0{,}03$, $y = 0{,}05$.

● Возьмем $M_0 = (0,0)$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = 0{,}05$. Вычислим $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(2x+y)\cdot 2; & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 1\cdot 2 = 2;\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(2x+y); & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

По формуле (22.16) получаем

$$\sin(2\cdot 0{,}03 + 0{,}05) = \sin(0{,}11) \approx \sin(0) + 2\cdot 0{,}03 + 1\cdot 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}11.$$

Заметим, что с точностью до 6-го знака после запятой $\sin(0{,}11) = 0{,}109778$. ●

Следует отметить, что приближенное значение $\sin(0{,}11)$ можно было бы найти и используя методы функций одной переменной, действительно

$$\sin(0{,}11) \approx \sin 0 + \cos 0\cdot 0{,}11 = 0 + 1\cdot 0{,}11 = 0{,}11.$$

Значение рассмотренного примера скорее в том, что $\sin(2x+y) \approx \sin 0 + 2x + y = 2x + y$ при малых $x$ и $y$.

## § 22.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ (СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ) И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

### 22.5.1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, рассмотрим две функции переменной $t$ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, определенные на множестве $T$, причем при каждом $t \in T$ точка с координатами $(x(t), y(t))$ принадлежит области определения функции $f(x,y)$, тогда определена композиция функций $f$ и $x(t)$, $y(t)$ ($\Leftrightarrow$ сложная функция)

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(x(t), y(t)\big).$$

● *ПРИМЕР 22.12.* Пусть $f(x,y) = \sin(2x+y)$, $x(t) = t^2 + 1$; $y(t) = t - 2$, тогда композиция $F(t) = \sin(2(t^2+1) + t - 2) = \sin(2t^2 + t)$.

Как найти производную композиции, не вычисляя ее саму?

Будем предполагать, что $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$, и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$.

Придадим переменной $t$ в точке $t_0$ приращение $\Delta t$, тогда можно говорить о приращении композиции $F(t)$ и функций $x(t)$ и $y(t)$ : $\Delta F$, $\Delta x$, $\Delta y$ соответственно. Так как функция $f(x,y)$ дифференцируема, то ее приращение в точке $M_0$ выражается через приращения $\Delta x$, $\Delta y$ по формуле (22.15):

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \tag{22.17}$$

Так как $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$, то

$$\begin{aligned} \Delta x &= x'(t_0)\Delta t + o_1(\Delta t),\\ \Delta y &= y'(t_0)\Delta t + o_2(\Delta t). \end{aligned} \tag{22.18}$$

Подставляя (22.18) в (22.17), получаем

$$\Delta F = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,(x'(t_0)\cdot\Delta t + o_1(\Delta t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,(y'(t_0)\cdot\Delta t + o_2(\Delta t)) + \\ + o\left(\sqrt{(x'(t_0)\Delta t + o(\Delta t))^2 + (y'(t_0)\Delta t + o(\Delta t))^2}\right) = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)y'(t_0)\right)\Delta t + o_3(\Delta t).$$

Последнее означает дифференцируемость композиции $F(t)$ в точке $t_0$ и

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)y'(t_0). \tag{22.19}$$

Итак, мы доказали

$$\frac{d\,(f(x(t),y(t)))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{22.20}$$

Запись $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))$ понимается так: найти $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и подставить вместо $x$ функцию $x(t)$, вместо $y$ функцию $y(t)$.

Последняя формула называется правилом дифференцирования композиции.

● *ПРИМЕР 22.13.* Пользуясь доказанной формулой (22.20), найти производную композиции примера 22.12.

● Вычислим $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))$:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(2x+y)\cdot 2, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) = 2\cdot\cos(2t^2+t), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(2x+y), & \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(2t^2+t), \\ \dfrac{dx}{dt} = 2t; & \dfrac{dy}{dt} = 1. \end{array}$$

Подставляя в формулу (22.20), получаем

$$\frac{d\,(f(x(t),y(t)))}{dt} = 2\cos(2t^2+t)\cdot 2t + \cos(2t^2+t) = \cos(2t^2+t)\cdot(4t+1).$$

Проверим полученное с помощью непосредственного дифференцирования по $t$ композиции

$$\frac{d\big(f\big(x(t),y(t)\big)\big)}{dt} = \sin'(2t^2+t) = \cos(2t^2+t)\cdot(4t+1). \quad ●$$

В случае $n$ переменных имеем:

$$\frac{d\,(f(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\,\frac{dx_1}{dt} + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\,\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\,\frac{dx_n}{dt}. \tag{22.20′}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x$ и $y$ сами являются функциями двух (а может быть, и большего числа) переменных, т. е. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Тогда композиция

сама является функцией двух переменных $\Phi(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$. Как найти ее частные производные по $u$, $v$, не находя самой композиции? Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно показать, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial \left(f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\right)}{\partial u} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \\
\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial \left(f\left(x(u,v), y(u,v)\right)\right)}{\partial v} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(u,v), y(u,v)\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{22.21}$$

Как и в случае одной переменной, для функции многих переменных имеет место инвариантность формы первого дифференциала, т. е. если $f(x_1, \ldots, x_n)$ функция многих переменных, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n \tag{22.22}$$

в случае, когда $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные или сами являются функциями других переменных.

● Рассмотрим случай двух переменных: $x_1 = x_1(u,v)$, $x_2 = x_2(u,v)$. В этом случае $f$ является на самом деле функцией от переменных $u$, $v$, т. е.

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv, \tag{22.23}$$

по формуле (22.21) мы имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u}; \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ в (22.23), получаем

$$\begin{aligned}
df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right) dv = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial x_1}{\partial v}\, dv\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\, du + \frac{\partial x_2}{\partial v}\, dv\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2.
\end{aligned}$$

Последнее записано в силу того, что

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\, du + \frac{\partial x_1}{\partial v}\, dv, \qquad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u}\, du + \frac{\partial x_2}{\partial v}\, dv. \quad ●$$

### 22.5.2. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть $F(x,y)$ — функция двух переменных. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y) = 0 \tag{22.24}$$

и пусть при каждом допустимом значении $x_0$ уравнение (22.24) имеет единственное решение $y_0$. Тогда говорят, что (22.24) задает неявную функцию $y = f(x)$, и, значит, для этой функции уравнение (22.24) превращается в тождество:

$$F\big(x, f(x)\big) \equiv 0. \tag{22.25}$$

*ПРИМЕР 22.14.* Рассмотрим уравнение

$$e^y - x^2 - 2 = 0.$$

Ясно, что при каждом $x$ это уравнение имеет по $y$ единственное решение $\big(y = \ln(x^2+2)\big)$, и значит, уравнение задает неявную функцию.

Заметим, что если нам удалось записать формулу для решения уравнения (22.24), то эта формула представляет собой явное задание функции $y = f(x)$.

Переход от неявного задания к явному возможен далеко не всегда. Например, уравнение

$$e^y + y - x^2 - 2 = 0$$

задает $y$ как неявную функцию переменной $x$, но мы не можем перейти к ее заданию с помощью формулы.

Не всякое уравнение задает неявную функцию, например, уравнение $x^2+y^2+2=0$ не задает неявную функцию, а уравнение

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad (22.25')$$

задает, фактически, две непрерывные неявные функции, явные задания которых

$$y = \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{и} \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

При каких условиях функциональное уравнение $F(x,y)$ задает неявную функцию $y = f(x)$? Имеет место следующая теорема существования неявной функции.

**ТЕОРЕМА 22.4**

Если функции $F(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0)$ и $F(x_0,y_0)=0$, а $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, то уравнение (22.24) определяет в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0)$ неявную функцию $y = f(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $x_0$, причем $f(x_0) = y_0$.

Как найти производную неявной функции (особенно в том случае, когда невозможен переход к явному заданию)?

Рассмотрим тождество

$$F\big(x, f(x)\big) = 0,$$

но тогда

$$dF = 0. \qquad (22.26)$$

Выпишем выражение для $dF$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx}\right)\Delta x.$$

Подставляя в (22.26), получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx}\right)\Delta x = 0. \qquad (22.27)$$

Равенство (22.27) выполняется при всех значениях приращения $\Delta x$, значит,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx} = 0. \qquad (22.28)$$

Из (22.28), учитывая, что мы находимся в условиях теоремы 22.4, получаем

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{22.29}$$

● *ПРИМЕР 22.15.* Вернемся к примеру 22.14 и для функции $y = f(x)$, заданной уравнением

$$e^y - x^2 - 2 = 0,$$

найдем ее производную с помощью формулы (22.21) и с помощью дифференцирования ее явного задания $y = \ln(x^2 + 2)$.

● Пусть $F(x, y) = e^y - x^2 - 2$, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y.$$

По формуле (22.29) получаем

$$f'(x) = -\frac{-2x}{e^y},$$

учитывая уравнение $e^y - x^2 - 2 = 0$, получаем, что $e^y = x^2 + 2$. Значит,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}.$$

Найдем теперь производную, воспользовавшись явным заданием

$$f(x) = \ln(x^2 + 2), \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot (x^2 + 2)' = \frac{2x}{x^2 + 2}. \quad ●$$

## § 22.6. ГРАДИЕНТ, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ПОВЕРХНОСТИ. НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ

### 22.6.1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ И ГРАДИЕНТ

Сейчас мы придадим некоторым понятиям для функций многих переменных геометрический смысл.

**Определение 22.14.** *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}_3$ (или все $\mathbb{R}_3$). Говорят, что на $X$ задано скалярное поле $f$, если каждой точке $M \in X$ соответствует (ставится в соответствие) вполне определенное число, т. е. скалярное поле — это пара $(X, f)$, где $X \subset \mathbb{R}_3$, $f : X \to \mathbb{R}_1$.*

Так как $f$ числовая функция трех переменных, ее график — поверхность в $\mathbb{R}_4$, и мы фактически лишены возможности наглядно представить себе график этой функции.

В случае скалярного поля вместо графика в $\mathbb{R}_4$ изображают в $\mathbb{R}_3$ поверхности уровня.

**Определение 22.15.** *Поверхностями уровня (эквипотенциальными поверхностями) скалярного поля $(X, f)$ $(X \subset \mathbb{R}_3)$ называются множества точек, принадлежащих $X$, удовлетворяющих условию*

$$f(x, y, z) = C \qquad (C \in \mathbb{R}_1). \tag{22.30}$$

Придавая $C$ всевозможные значения, мы получаем семейство поверхностей уровня скалярного поля.

*ПРИМЕР 22.16.* Пусть $X = \mathbb{R}_3$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Семейство поверхностей уровня — сферы $x^2 + y^2 + z^2 = C$ $(C \geqslant 0)$ с центром в начале координат.

Наряду со скалярными полями в пространстве можно рассматривать плоские скалярные поля (в $\mathbb{R}_2$). Плоские скалярные поля $(X, f)$ изображают с помощью линий уровня:

$$f(x,y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}_1. \tag{22.31}$$

*ПРИМЕР 22.17.* Пусть $X = \mathbb{R}_2$, $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$. Семейство линий уровня — канонические эллипсы

$$\frac{x^2}{C/2} + \frac{y^2}{C/3} = 1, \quad (C > 0)$$

и начало координат $(C = 0)$ (см. рис. 22.5).

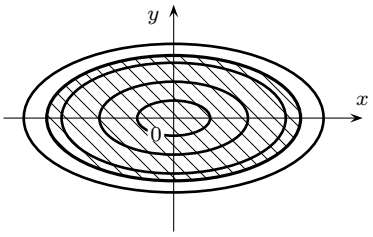


*Рис. 22.5.*

Вместе со скалярным полем $(X, f)$ в случае, когда $f$ дифференцируемая функция, рассматривают векторное поле $(X, \operatorname{grad} f)$.

**Определение 22.16.** *Градиентом скалярной дифференцируемой функции $f$, определенной на $X$, называют вектор-функцию, обозначаемую* $\operatorname{grad} f$, *определенную на $X$ следующим:*

$$(\operatorname{grad} f)(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}, \tag{22.32}$$

*где $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ — единичные попарно ортогональные векторы, образующие правую тройку, т. е. градиент — это вектор, координаты которого в точке $M(x,y,z)$ задаются равенством*

$$\operatorname{grad} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right). \tag{22.33}$$

### 22.6.2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть $(X, f)$ — дифференцируемое скалярное поле (т. е. $f$ дифференцируема на $X$). Рассмотрим произвольную точку $M = (x,y,z) \in X$ и единичный вектор

$$\vec{e} = \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{e}$.

Пусть $M' = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ лежит на луче, выходящем из точки $M$ в направлении вектора $\vec{e}$, тогда

$$\frac{\Delta x}{\cos\alpha} = \frac{\Delta y}{\cos\beta} = \frac{\Delta z}{\cos\gamma}. \tag{22.34}$$

Обозначим через $\Delta\vec{e} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

**Определение 22.17.** *Производной функции $f(x,y,z)$ по направлению $\vec{e}$ называют*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \lim_{\Delta\vec{e}\to 0} \frac{\Delta_e f}{\Delta x}, \tag{22.35}$$

*где $\Delta_e f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, а $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ удовлетворяют соотношению* (22.34).

Ясно, что $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) > 0 \ (< 0)$, если функция в направлении $\vec{e}$ возрастает (убывает).

Как вычислить значение производной функции по направлению?

Ясно, что $\Delta x = \Delta\vec{e}\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta\vec{e}\cos\beta$, $\Delta z = \Delta\vec{e}\cos\gamma$.

Так как функция $f$ дифференцируема, то

$$\Delta f = f'_x(x,y,z)\Delta x + f'_y(x,y,z)\Delta y + \\ + f'_z(x,y,z)\Delta z + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right),$$

тогда

$$\Delta_{\vec{e}} f = f'_x(x,y,z)\Delta\vec{e}\cos\alpha + f'_y(x,y,z)\Delta\vec{e}\cos\beta + f'_z(x,y,z)\Delta\vec{e}\cos\gamma + o(\Delta\vec{e}).$$

Значит,

$$\frac{\Delta_{\vec{e}} f}{\Delta\vec{e}} = f'_x(x,y,z)\cos\alpha + f'_y(x,y,z)\cos\beta + f'_z(x,y,z)\cos\gamma + \frac{o(\Delta\vec{e})}{\Delta\vec{e}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta\vec{e} \to 0$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\cos\alpha + f'_y(x,y,z)\cos\beta + f'_z(x,y,z)\cos\gamma, \tag{22.36}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \big((\operatorname{grad} f)(x,y,z), \vec{e}\big). \tag{22.37}$$

В случае плоского скалярного поля формула (22.36) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha, \tag{22.36$'$}$$

где $\alpha$ — угол, образованный единичным вектором $\vec{e}$, задающим направление, и положительным направлением оси $OX$.

Из свойств скалярного произведения векторов (см. § 12.1) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = \operatorname{пр}_{\vec{e}}(\operatorname{grad} f)(x,y,z). \tag{22.38}$$

Обозначим через $\varphi$ угол между векторами $\vec{e}$ и $(\operatorname{grad} f)(x,y,z)$, тогда из (22.38) и определения скалярного произведения следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(x,y,z) = |(\operatorname{grad} f)(x,y,z)|\cos\varphi. \tag{22.39}$$

Ясно, что наибольшее значение производная по направлению принимает тогда, когда направление, по которому она вычисляется, совпадает с направлением вектора $(\operatorname{grad} f)(x,y,z)$. Таким образом, градиент функции $f$ в точке $(x,y,z)$ — это вектор, имеющий направление наибольшего возрастания функции в данной точке, а его длина — скорость возрастания функции в этом направлении.

Выясним теперь взаимное расположение вектора $(\operatorname{grad} f)(x_0,y_0,z_0)$ и поверхности уровня, проходящей через точку $(x_0,y_0,z_0)$.

Рассмотрим кривую $L$, лежащую на поверхности уровня $f(x,y,z) = C_0$, где $C_0 = f(x_0,y_0,z_0)$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in T;$$

и $t_0 \in T$ таково, что $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Так как кривая $L$ лежит на поверхности уровня, то

$$f\big(x(t), y(t), z(t)\big) - f\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big) = 0 \tag{22.40}$$

— тождество на множестве $T$.

Продифференцируем тождество (22.40):

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z'(t) = 0.$$

При $t = t_0$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0. \tag{22.41}$$

Введем в рассмотрение вектор

$$r'_L(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} x'(t_0)\vec{\imath} + y'(t_0)\vec{\jmath} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Ясно, что этот вектор направлен по касательной к кривой $L$.

Равенство (22.41) можно записать в виде

$$\big((\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0), r'_L(t_0)\big) = 0. \tag{22.42}$$

Соотношение (22.42) означает, что эти два вектора перпендикулярны. Соотношение ортогональности (22.42) справедливо для любой дифференцируемой кривой, лежащей на поверхности уровня и проходящей через точку $(x_0, y_0, z_0)$. Из сказанного следует, что $(\operatorname{grad} f)(x_0,\ y_0, z_0)$ перпендикулярен касательной к любой дифференцируемой кривой, проходящей через точку $(x_0, y_0, z_0)$ и лежащей на поверхности уровня, эти касательные образуют касательную плоскость к поверхности уровня, и значит, в качестве вектора нормали к касательной плоскости к поверхности уровня в точке $(x_0, y_0, z_0)$ можно взять вектор $(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0)$ (если он не нулевой), тогда уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{22.43}$$

**Определение 22.18.** *Нормалью к поверхности уровня в точке $(x_0, y_0, z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости к поверхности (в этой точке).*

Ясно, что если $(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \tag{22.44}$$

● *ПРИМЕР 22.18.* Найти уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

в точке $M\big(1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{26}}{6}\big)$.

●

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)=\frac{x}{2}\Big|_{\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)}=\frac{1}{2},$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)=\frac{2y}{9}\Big|_{\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)}=-\frac{1}{9},$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)=2z\Big|_{\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{26}}{6}\right)}=\frac{\sqrt{26}}{3}.$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{9}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{26}}{3}\left(z-\frac{\sqrt{26}}{6}\right)=0$$

или

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{9}y+\frac{\sqrt{26}}{3}z-2=0. \quad \bullet$$

Как составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке с координатами $(x_0,y_0)$, если функция $f$ в этой точке дифференцируема?

Рассмотрим функцию

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z.$$

Ясно, что касательная плоскость к исходной поверхности — это касательная плоскость к поверхности уровня $F(x,y,z)=0$, проходящей через точку $\big(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0)\big)$.

Из формулы (22.43), учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= -1,\end{aligned}$$

получаем, что уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-1\big(z-f(x_0,y_0)\big)=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (22.45)$$

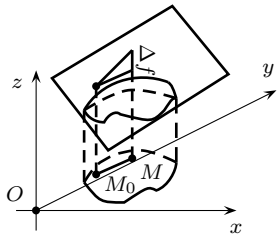



*Рис. 22.6.*

В полученном уравнении касательной плоскости правая часть — выражение для дифференциала функции $f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0)$. Левая часть формулы (22.45) — разность аппликат точки $M(x,y,z)$, принадлежащей касательной плоскости, и точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, в которой происходит касание.

Это позволяет прояснить геометрический смысл дифференциала функции двух переменных: дифференциал функции двух переменных — это приращение аппликаты точки касательной плоскости (см. рис. 22.6).

Фактически в этом параграфе нами доказана

**ТЕОРЕМА 22.5**
Если функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $x_0$, $y_0$, $z_0$ и $(\operatorname{grad} f)(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, то поверхность уровня, проходящая через точку $(x_0,y_0,z_0)$, имеет в этой точке касательную плоскость и ее уравнение имеет вид (22.43).

## § 22.7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Определение 22.19.** *Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — функция многих переменных, определенная на $X$-области в $\mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$, точка $M_0(x_{01}, x_{02},\ldots,x_{0n}) \in X$ называется точкой максимума (минимума), если существует такая $\delta_0$-окрестность $s(M_0,\delta_0) \subset X$, что для всех точек $M \in s'(M_0,\delta_0)$ выполнено неравенство*

$$f(M_0) \geqslant f(M) \tag{22.46}$$
$$\big(f(M_0) \leqslant f(M)\big). \tag{22.47}$$

*Точки максимума и минимума называются точками экстремума.*

По аналогии с функциями одной переменной имеет место теорема

**ТЕОРЕМА 22.6 (Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции)**
Если точка $M_0$ — точка экстремума функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и эта функция дифференцируема в точке $M_0 = (x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n})$, то

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) &= 0.
\end{aligned}$$

● Пусть $M_0$ — точка локального максимума. Это означает, что, придавая переменным $x_1$, …, $x_n$ произвольные значения, $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, …, $\Delta x_n$ такие, что $0 < \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2} \leqslant \delta_0$, получаем, что

$$\Delta f = f(x_{01}+\Delta x_1, x_{02}+\Delta x_2,\ldots,x_{0n}+\Delta x_n) - f(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}) \leqslant 0.$$

Рассмотрим $0 < |x_1| \leqslant \delta_0$, $\Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n = 0$, тогда $\Delta f$ может рассматриваться как функция одной переменной $\Delta x_1$, имеющая в точке $\Delta x_1 = 0$ максимум. Тогда (по необходимому условию экстремума функции одной переменной)

$$(\Delta f)'(\Delta x_1)\big|_{\Delta x_1 = 0} = 0. \tag{22.48}$$

Но

$$(\Delta f)'(\Delta x_1)\big|_{\Delta x_1=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, \dots x_{0n}). \tag{22.49}$$

Из (22.48) и (22.49) получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}, \dots x_{0n}) = 0.$$

Аналогично показывается, что в этом случае и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) &= 0. \end{aligned}$$

Случай точки минимума рассматривается аналогично. ●

Из доказанной теоремы следует вывод о том, что точками, подозрительными на экстремум (критическими точками), являются точки, в которых:

1) функция дифференцируема и все ее частные производные обращаются в ноль;
2) точки, в которых функция определена, но не дифференцируема.

### 22.7.1. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Пусть в точке $M_0$ функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема и в этой точке выполнено необходимое условие экстремума, тогда дифференциал функции в этой точке

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n$$

тождественно равен нулю. Необходимо выяснить, как ведет себя $\Delta f$ в окрестности точки $M_0$. Если $\Delta f > 0$, то мы имеем дело с точкой максимума, а если $\Delta f < 0$, то с точкой минимума.

Если мы положим, что $\Delta f \approx df(M_0)$, то в силу того, что $df(M_0) = 0$, нельзя сделать никакого содержательного суждения о поведении $\Delta f$ в окрестности точки $M_0$. В случае одной переменной мы изучали характер поведения $f'$ при переходе через критическую точку или знак второй производной в критической точке ($\Leftrightarrow \Delta f \approx d^2 f$). Для функций многих переменных первое невозможно, так как нужно было бы анализировать поведение $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ по всем направлениям, остается одна возможность — исследование поведения $\Delta f \approx d^2 f(M_0)$ (так как $df(M_0) = 0$).

$(d^2 f)(M_0)$ имеет вид

$$d^2 f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)(\Delta x_1)^2 + \dots$$

$$\cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(M_0)(\Delta x_n)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(M_0)\Delta x_1 \Delta x_2 + +2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(M_0)\Delta x_1 \Delta x_3 + \cdots$$
$$\cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n}(M_0)\Delta x_{n-1}\Delta x_n = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(M_0)\Delta x_i \Delta x_j,$$

т. е. $d^2 f(M_0)$ может рассматриваться как квадратичная форма переменных $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ..., $\Delta x_n$ с матрицей:

$$\left(\mathcal{D}^2 f\right)(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M_0) & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(M_0) \\ \ldots\ldots\ldots\

Более подробно о точках экстремума, наибольшем и наименьшем значении функции многих переменных и задачах на экстремум будет сказано в разделе «Оптимизация».

## Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример функции, у которой $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ существует, а $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ не существует.
2. Для функций многих переменных можно говорить не только о точках разрыва, но и о кривых, поверхностях разрыва, и классифицировать типы разрывов уже затруднительно. Проанализируйте характер разрывов функции $f(x,y) = \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} y$.
3. Укажите точки непрерывности функции $f(x,y) = \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} y$.
4. Составьте уравнение касательной плоскости к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точке $M_0(-1/2; 1/2; \sqrt{2}/2)$.
5. Покажите, что радиус, проведенный в точку касания сферы касательной плоскостью, перпендикулярен этой плоскости.

# XXIII

# КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 23.1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

### 23.1.1. ЗАДАЧА 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Пусть $\sigma$ — ограниченная область в плоскости $XOY$, функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на $\sigma$ и $f(x,y) > 0$ во всех точках $\sigma$. Рассмотрим задачу вычисления объема тела, ограниченного $\sigma$, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, проходящей через границу $\sigma$ — $\partial\sigma$, с образующими, параллельными оси $OZ$ (см. рис. 23.1).

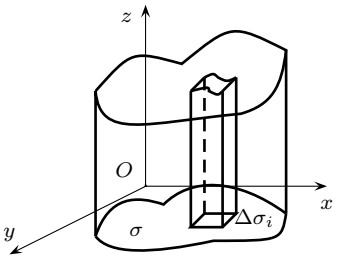


*Рис. 23.1.*

Разобьем область $\sigma$ на $n$ малых площадок $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ так, что

$$\sum_{i=1}^{n} S(\Delta\sigma_i) = S(\sigma). \qquad (23.1)$$

Здесь $S(A)$ — обозначение площади области $A$.

На каждой площадке $\Delta\sigma_i$ построим цилиндрическое тело, ограниченное ею, куском поверхности $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, проходящей через $\partial\sigma_i$ с образующими, параллельными оси $OZ$. (Разбиение на площадки часто производят прямыми, параллельными координатным осям.)

Исходное тело разобьется на цилиндрические тела $V_i$, имеющие основаниями $\Delta\sigma_i$, при этом

$$V_{\text{тела}} = \sum_{i=1}^{n} V_i, \qquad (23.2)$$

где $V_i$ — объем цилиндрического тела, имеющего в основании $\sigma_i$.

*Замечание.* При разбиении области $\sigma$ на $\Delta\sigma_i$ прямыми, параллельными координатным осям (см. рис. 23.2), у нас будут возникать как площадки-прямоугольники, лежащие внутри области, так и отличные от прямоугольников площадки (примыкающие к $\partial\sigma$).

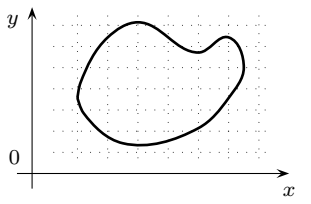


*Рис. 23.2.*

Если рассматривать только площадки-прямоугольники, лежащие внутри области, и цилиндрические тела, ими порожденные, то равенства (23.1) и (23.2) превращаются в приближенные:

$$S(\sigma) \approx \sum_{i=1}^{n} S(\Delta\sigma_i), \qquad (23.3)$$

$$V_{\text{тела}} \approx \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (23.4)$$

Здесь $n$ — количество таких площадок.

При этом ясно, что, если густота сетки разбиения растет, точность соотношений (23.3) и (23.4) также растет.

Уточним, что такое густота сетки. Пусть $d_i$ — диаметр наименьшего круга, содержащего площадку $\Delta\sigma_i$. Густотой разбиения области $\sigma$ на площадки $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ называют величину

$$d_n = \max_n d_i.$$

Фактически, определение площади области может быть таким:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(\Delta\sigma_i), \tag{23.5}$$

где суммирование ведется по всем прямоугольникам разбиения, находящимся внутри области, и, соответственно, определение объема цилиндрического тела имеет вид

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} V_i. \tag{23.6}$$

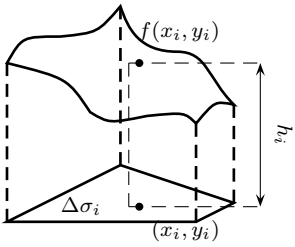



*Рис. 23.3.*

Рассмотрим задачу нахождения объема тела $V_i$. На площадке $\Delta\sigma_i$ выберем точку. Обозначим ее координаты $(x_i, y_i)$ и в качестве приближенного значения объема $V_i$ примем объем цилиндрического тела с основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой $h_i = f(x_i, y_i)$ (см. рис. 23.3).

$$V_i \approx h_i S\left(\Delta\sigma_i\right) = f(x_i, y_i) S\left(\Delta\sigma_i\right). \tag{23.7}$$

Из (23.4) и (23.7) получаем

$$V_{\text{тела}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(\Delta\sigma_i). \tag{23.8}$$

Под объемом тела $V$ понимают

$$V_{\text{тела}} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(\Delta\sigma_i). \tag{23.9}$$

### 23.1.2. ЗАДАЧА 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ПЛАСТИНЫ

Пусть нам дана плоская материальная пластина $S$ и известен закон распределения плотности вещества $p(x, y)$ на пластине.

Разобьем пластину на площадки $\Delta s_i$, в каждой из которых выберем по точке $(x_i, y_i)$. Масса пластины $M$ и массы площадок связаны соотношением

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

В качестве приближенного значения $m_i$ возьмем

$$m_i \approx p(x_i, y_i) S(\Delta s_i). \tag{23.10}$$

Ясно, что

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_i) S(\Delta s_i). \tag{23.11}$$

Таким образом, две разные задачи, геометрическая и физическая, привели нас к необходимости вычисления некоторого предела (выражения (23.9) и (23.11)).

### 23.1.3. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть $\sigma$ — ограниченная область плоскости $XOY$, имеющая площадь $S(\sigma)$, граница которой $\partial\sigma$, $f(x, y)$ — непрерывная в области $\sigma$ функция. Разобьем область $\sigma$ на прямоугольные площадки $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ прямыми, параллельными координатным осям (будем рассматривать только площадки, находящиеся целиком в $\sigma$), на каждой прямоугольной площадке $\sigma_i$ зафиксируем по точке $(x_i, y_i)$ и рассмотрим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(\Delta\sigma_i). \tag{23.12}$$

**Определение 23.1.** *Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области $\sigma$ называют величину $\iint_\sigma f(x, y) d\sigma$, определенную следующим:*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(\Delta\sigma_i), \tag{23.13}$$

*$f$ называют подынтегральной функцией, $f(x, y)\, d\sigma$ — подынтегральным выражением, $d\sigma$ — элементом площади.*

*Если $\iint_\sigma f(x, y)\, d\sigma$ существует, то $f$ называется интегрируемой на $\sigma$ функцией.*

Ясно, что для задачи 1 мы имеем

$$V_{\text{тела}} = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma, \tag{23.14}$$

а для задачи 2 —

$$M = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma. \tag{23.15}$$

Ясно, что

$$\iint\limits_{\sigma} 1\, d\sigma = S(\sigma). \tag{23.16}$$

Соотношения (23.14) и (23.15) дают нам геометрический и механический смысл двойного интеграла.

Сформулируем теперь без доказательства теорему, дающую достаточные условия существования двойного интеграла.

**ТЕОРЕМА 23.1**
Для всякой функции $f$, определенной и непрерывной на $\sigma \cup \partial\sigma$, где $\sigma$ — ограниченная область в $\mathbb{R}_2$, имеющая площадь, существует двойной интеграл, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(\Delta\sigma_i) = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma.$$

Как вычислять двойной интеграл?

Разобьем область интегрирования прямыми, параллельными координатным осям, на прямоугольники $\Delta\sigma_i$ со сторонами $\Delta x_i$, $\Delta y_i$ соответственно, в каждом прямоугольнике зафиксируем точку $(x_i, y_i)$, тогда

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \cdot \Delta y_i. \tag{23.17}$$

Из этой записи следует и второе естественное обозначение двойного интеграла

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{23.18}$$

Выражение $dx\, dy$, фигурирующее в правой части (23.18), называют элементом площади в декартовых координатах, оно равно площади прямоугольника со сторонами $dx$ и $dy$, параллельными координатным осям.

### 23.1.4. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Заметим, что определение двойного интеграла фактически идентично определению определенного интеграла для функции одной переменной. Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. Мы приводим их без доказательства:

1° . Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т. е.

$$\iint\limits_{\sigma} k \cdot f(x, y)\, d\sigma = k \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma.$$

2° . Если $f$ и $g$ интегрируемые на $\sigma$ функции, то $f + g$ интегрируема на $\sigma$ и

$$\iint\limits_{\sigma} \big(f(x, y) + g(x, y)\big)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma} g(x, y)\, d\sigma.$$

3° . Если $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ и $S(\sigma) = S(\sigma_1) + S(\sigma_2)$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

Это свойство называется свойством аддитивности двойного интеграла.

4° . Если $f(x, y)$ непрерывна на $\sigma \cup \partial\sigma$, $\sigma$ — ограниченная область в $\mathbb{R}_2$, имеющая площадь $S(\sigma)$, то существует точка $(x_0, y_0) \in \sigma$ такая, что

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = f(x_0, y_0) \cdot S(\sigma).$$

Свойство 4° называется теоремой о среднем значении.

*Следствие из свойства 4°.*

$$\iint\limits_{\sigma} 1 \cdot d\sigma = S(\sigma).$$

5°. Если $f$ и $g$ интегрируемые на $\sigma$ функции и для любой точки $(x, y) \in \sigma$ выполнено неравенство $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то $\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \int\limits_{\sigma} g(x, y)\, d\sigma$.

### 23.1.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ СВЕДЕНИЕМ К ПОВТОРНОМУ

Пусть область $\sigma$ ограничена вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ и непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ при любом $x \in [a, b]$ (см. рис. 23.4).

Ограничимся рассмотрением случая, когда $f(x, y) \geqslant 0$ на $\sigma$. Мы знаем, что в этом случае $\iint f(x, y) d\sigma$ равен объему цилиндрического тела (см. задачу 1). Рассмотрим $x \in (a, b)$ и вертикальную прямую, проходящую через точку $(x, 0)$. Обозначим через $C_1$, $C_2$ точки пересечения этой прямой с кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ соответственно.

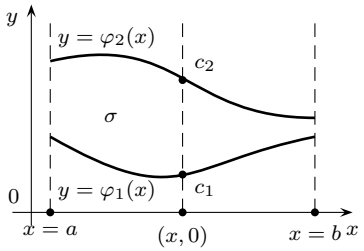



*Рис. 23.4.*

Точка $C_1$ называется точкой входа, точка $C_2$ — точкой выхода. Ясно, что $C_1 = \big(x, \varphi_1(x)\big)$, $C_2 = \big(x, \varphi_2(x)\big)$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}_3$ плоскость, проходящую через точки $C_1$, $C_2$, параллельную плоскости $YOZ$ (см. рис. 23.5), эта плоскость в пересечении с рассматриваемым телом дает некоторое сечение. Обозначим его площадь $S(x)$. Объем тела с известной площадью сечения $S(x)$ можно вычислить с помощью определенного интеграла (см. § 21.4, формула (21.35)):

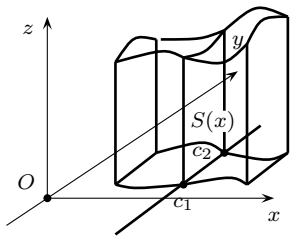



*Рис. 23.5.*

$$V = \int\limits_{\sigma} f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_{a}^{b} S(x)\, dx. \qquad (23.19)$$

Сечение цилиндрического тела плоскостью — криволинейная трапеция, поэтому

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (23.20)$$

Подставляя (23.20) в (23.19), получаем

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx. \qquad (23.21)$$

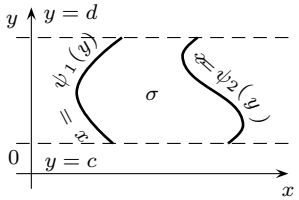



Рис. 23.6.

В случае, когда $\sigma$ — криволинейная трапеция, имеющая вид, изображенный на рис. 23.6 (здесь $\psi_1$ и $\psi_2$ непрерывные на $(c,d)$ функции), вычисление двойного интеграла можно провести по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy. \qquad (23.22)$$

Формулы (23.21) и (23.22) называются формулами сведения двойного интеграла к повторному. Эти формулы справедливы в случае, когда $f(x,y)$ — произвольная непрерывная на $\sigma \cup \partial\sigma$ функция.

*Замечание.* Часто для записи правых частей в (23.21) и (23.22) применяют другие обозначения:

$$\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy;$$

$$\int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

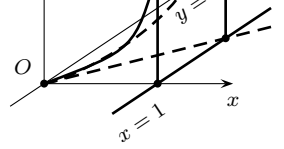



Рис. 23.7.

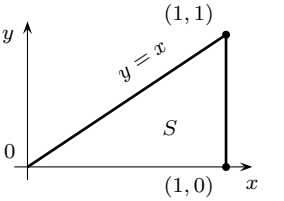



Рис. 23.8.

● *ПРИМЕР 23.1.* Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $y = x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

● Тело, объем которого нужно вычислить, изображено на рис. 23.7. Изобразим область $S$ (рис. 23.8).

Воспользуемся формулой (23.21):

$$V = \iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{x}(x^2+y^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^x\right)dx = \int\limits_{0}^{1}\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1}x^3\,dx = \frac{1}{3}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad ●$$

### 23.1.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Предположим, что нам необходимо вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma,$$

при этом сама область $\sigma$ и функция $f$ «хорошо приспособлены» к полярным координатам (см., например, рис. 23.9).

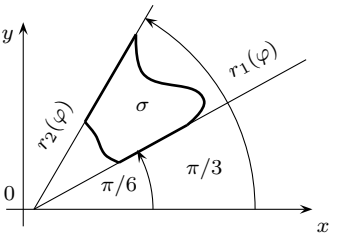



Рис. 23.9.

Мы знаем, что

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)S(\sigma_i),$$

причем предел в правой части не зависит от способа разбиения на площадки $\Delta\sigma_i$. В случае полярных координат разбиение будем проводить с помощью лучей, выходящих из полюса $(\varphi = \text{const})$, и окружностей с центром в полюсе $(r = \text{const})$.

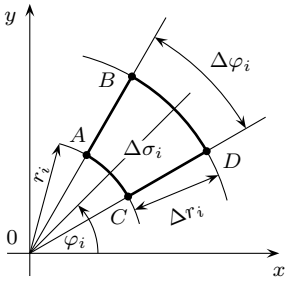



*Рис. 23.10.*

В этом случае элементарная площадка $\Delta\sigma_i$ имеет вид (рис. 23.10)

$$S(\Delta\sigma_i) = S_{\text{круг. сектора DOC}} - S_{\text{круг. сектора AOB}} =$$
$$= \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i =$$
$$= r_i \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_i + \frac{1}{2}(\Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i = \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2}\right) \Delta r_i \Delta\varphi_i.$$

Обозначим

$$r_i' = \frac{r_i + (r_i + \Delta r_i)}{2}$$

— средний радиус, тогда

$$S(\Delta\sigma_i) = r_i' \Delta r_i \Delta\varphi_i.$$

Вернемся к вычислению двойного интеграла. На каждой площадке разбиения $\Delta\sigma_i$ возьмем точку $P_i$, лежащую на окружности радиуса $r_i'$. Обозначим через $\varphi_i$ полярный угол точки $P_i$. Тогда

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i =$$
$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(r_i' \cos\varphi_i, r_i' \sin\varphi_i\right) r_i' \Delta r_i \Delta\varphi_i.$$

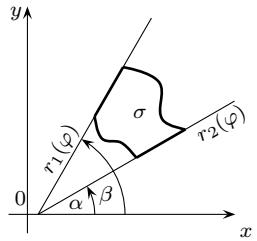



*Рис. 23.11.*

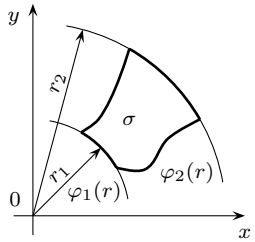



*Рис. 23.12.*

В правой части стоит интегральная сумма для функции $f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r$ по переменным $r$, $\varphi$, т. е. мы показали, что

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_\sigma f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi. \quad (23.23)$$

Выражение $r\,dr\,d\varphi$ называется элементом площади в полярных координатах.

Сведение двойного интеграла к повторному в полярных координатах аналогично сведению в декартовых координатах (см. рис. 23.11 и 23.12).

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_\sigma f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta \left( \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr \right) d\varphi. \quad (23.24)$$

$$\iint\limits_\sigma f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_\sigma f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} \left( \int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)\,d\varphi \right) r\,dr. \quad (23.25)$$

Заметим, что формулы (23.24) и (23.25) меньше похожи одна на другую, чем формулы (23.21) и (23.22). Это объясняется тем, что в декартовых координатах, фактически, $x$ и $y$ — равноправные переменные, а в полярных координатах $r$ и $\varphi$ имеют разную природу — $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, +\infty)$.

● *ПРИМЕР 23.2.* Вычислить с помощью двойного интеграла объем шара радиуса $R$.

● Рассмотрим шар радиуса $R$ с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

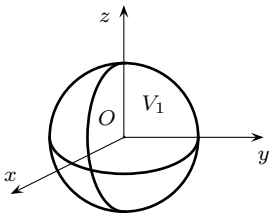



*Рис. 23.13.*

Ясно, что $V = 8V_1$, где $V_1$ — «долька» шара, находящаяся в первом октанте.

$$V_1 = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma,$$

$\sigma$ — четверть окружности радиуса $R$ с центром в начале координат (см. рис. 23.13).

Перейдем к полярным координатам:

$$V_1 = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^R \left( \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - r^2}\, d\varphi \right) r\, dr =$$

$$= \int\limits_0^R \left( \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \varphi \Big|_0^{\pi/2} \right) r\, dr = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr =$$

$$\begin{matrix} R^2 - r^2 = u \\ -2r\, dr = du \end{matrix} \quad -\frac{\pi}{4} \int\limits_{R^2}^0 \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^{R^2} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\, \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R^2} = \frac{\pi}{6} R^3;$$

$$V = 8V_1 = 8 \cdot \frac{\pi}{6} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad ●$$

### 23.1.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА. ЗАДАЧА О ЦЕНТРЕ МАССЫ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Статическими моментами относительно осей $OX$ и $OY$ материальной точки $P(x, y)$ массы $m_p$ называются величины $M_x(P)$ и $M_y(P)$ соответственно, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} M_x(P) &= m_p y, \\ M_y(P) &= m_p x. \end{aligned} \tag{23.26}$$

Статическим моментом системы точек называется сумма статических моментов точек, ее образующих.

Центром массы системы называется точка, имеющая массу, равную сумме масс точек системы, статические моменты которой относительно оси $OX$ и $OY$ такие же, как и у системы материальных точек. Задачу о центре масс системы материальных точек мы уже решали в разделе «Аналитическая геометрия» (§ 1.3). Там были получены формулы для координат центра масс системы $n$ точек $(x, y)$:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \tag{23.27}$$

Пусть мы имеем дело с плоской пластиной $\sigma$ и известен закон распределения плотности $p(x,y)$, $((x,y)\in\sigma)$ и $p(x,y)$ — непрерывная в замыкании $\sigma$ функция. Разбивая пластину $\sigma$ на малые площадки $\Delta\sigma_i$ и заменяя каждую площадку материальной точкой с координатами $(x_i,y_i)\in\sigma_i$ и массой $p(x_i,y_i)\cdot S(\Delta\sigma_i)$, мы получаем систему $n$ материальных точек, для центра масс которой имеем

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_i)\cdot x_i\cdot S(\Delta\sigma_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_i)\cdot S(\Delta\sigma_i)};\\ y_n &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_i)\cdot y_i\cdot S(\Delta\sigma_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_i)\cdot S(\Delta\sigma_i)}. \end{aligned} \tag{23.28}$$

Формулы (23.28) можно рассматривать как интегральные суммы, тогда для центра масс пластины $(x_M,y_M)$ имеем

$$x_M=\frac{\iint\limits_{\sigma} p(x,y)\,x\,d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} p(x,y)\,d\sigma};\quad y_M=\frac{\iint\limits_{\sigma} p(x,y)\,y\,d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} p(x,y)\,d\sigma}. \tag{23.29}$$

Если же пластина однородная ($\Leftrightarrow\ p(x,y)=\mathrm{const}$), то из формул (23.29) получаем

$$x=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma}{S(\sigma)};\qquad y=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma}{S(\sigma)}. \tag{23.30}$$

### 23.1.8. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть $\sigma$ — ограниченная область в $\mathbb{R}_2$ $f(x,y)\geqslant 0$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая в замыкании $\sigma$ функция. Требуется найти площадь поверхности $\sigma_f: z=f(x,y)$, $(x,y)\in\sigma$.

Разобьем область $\sigma$ на площадки $\Delta\sigma_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и рассмотрим цилиндры с образующими, параллельными оси $OZ$, порожденные этими площадками. Они разбивают поверхность $\sigma_f$ на площадки $\Delta\sigma_{if}$ (см. рис. 23.14).

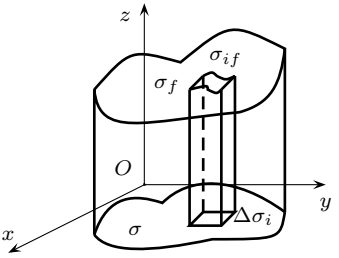



*Рис. 23.14.*

Ясно, что

$$S(\sigma_f)=\sum_{i=1}^{n} S\left(\Delta\sigma_{if}\right). \tag{23.31}$$

Займемся приближенным вычислением площади одной площадки $\Delta\sigma_{if}$. Зафиксируем на площадке точку $P_i(x_i,y_i)$ и рассмотрим касательную плоскость к поверхности $\sigma_f$ в точке $P_i$. Цилиндр площадки $\Delta\sigma_i$ вырезает на касательной плоскости площадку $\Delta\sigma_{if_к}$ (см. рис. 23.15).

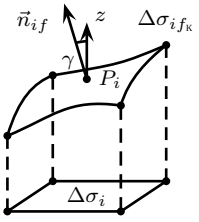



*Рис. 23.15.*

Возьмем в качестве приближенного значения площади $\Delta\sigma_{if}$ площадь $\Delta\sigma_{if_к}$, т. е.

$$S\left(\Delta\sigma_{if}\right)\approx S\left(\Delta\sigma_{if\,к}\right). \tag{23.32}$$

Для нахождения площади $\Delta\sigma_{if_к}$ воспользуемся теоремой о площади проекции плоской фигуры:

$$S\left(F_{\text{проекц}}\right) = S(F)\cdot\cos\gamma, \tag{23.33}$$

где $\gamma$ — угол между плоскостями, в которых лежит фигура $F$ и ее проекция $F_{\text{пр}}$.

В нашем случае проекцией $\Delta\sigma_{if_к}$ на плоскость $XOY$ является $\Delta\sigma_i$, а угол $\gamma_i$ совпадает с углом между положительным направлением оси $OZ$ и вектором нормали $\vec{n}_{if}$ к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $P_i$.

В §22.6 мы получили, что

$$\vec{n}_{if} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i), \frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i),\ 1\right),$$

тогда

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}}. \tag{23.34}$$

Из (23.31), (23.32), (23.33), (23.34) получаем

$$S\left(\sigma_f\right) \approx \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}\,S(\Delta\sigma_i). \tag{23.35}$$

Формула (23.35) — интегральная сумма для двойного интеграла от функции

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2},$$

значит,

$$S(\sigma_f) = \iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i,y_i)\right)^2}\,d\sigma. \tag{23.36}$$

Нами получена формула для нахождения площади поверхности.

● *ПРИМЕР 23.3.* Вычислить с помощью двойного интеграла площадь поверхности шара.

● Рассмотрим шар радиуса $R$ с центром в начале координат: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Как и в примере 23.2, будем рассматривать часть шара, находящуюся в первом октанте. По формуле (23.36) имеем ($\sigma$ см. пример 23.2):

$$\begin{aligned}
S_{\text{шара}} &= 8\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+\frac{x^2}{(R^2-x^2-y^2)}+\frac{y^2}{(R^2-x^2-y^2)}}\,d\sigma = \\
&= 8R\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 4R\iint\limits_{\sigma}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} = \\
&= 8R\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\right)\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = \frac{8\pi R}{2}\int\limits_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = \\
&\overset{R^2-r^2=u}{=} -\frac{4\pi}{2}\int\limits_{R^2}^{0}\frac{du}{\sqrt{u}} = 4\pi R^2. \quad ●
\end{aligned}$$

# § 23.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

## 23.2.1. ЗАДАЧА 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССЫ ТЕЛА

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}_3$ некоторое материальное тело $V$, для которого известен закон распределения плотности $P(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V$. Будем считать, что функция $P(x, y, z)$ непрерывна в замыкании $V$.

Разобьем тело $V$ на малые тела $\Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тогда

$$m(V) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\Delta V_i\right), \tag{23.37}$$

где $m(A)$ — масса тела $A$.

В каждом $\Delta V_i$ зафиксируем по точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$ и будем считать, что

$$m\left(\Delta V_i\right) \approx P(x_i, y_i, z_i) \cdot v\left(\Delta V_i\right), \tag{23.38}$$

где $v(\Delta V_i)$ — объем тела $\Delta V_i$.

Из (23.37) и (23.38) получаем

$$m(V) \approx \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i) \cdot v(\Delta V_i).$$

За точное значение массы тела $V$ принимают предел суммы, стоящей в правой части, при $n \to \infty$, $d_n \to 0$. Здесь $d_n$ — густота разбиения тела $V$ на $\Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $d_i$ — минимальный радиус шара, содержащего $\Delta V_i$:

$$d_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i.$$

## 23.2.2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим общую задачу типа задачи 1.

В пространстве $\mathbb{R}_3$ задано тело $V$, объема $v(V)$. $f(x, y, z)$ — функция, определенная на $V$. Разобьем тело $V$ на тела $\Delta V_i$, в каждом из которых зафиксируем по точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Составим сумму вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot v(\Delta V_i). \tag{23.39}$$

**Определение 23.2.** *Сумму вида* (23.39) *называют интегральной суммой тройного интеграла, а тройным интегралом называют предел интегральной суммы при* $n \to \infty$, $d_n \to 0$, *т. е.*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n \to \infty \\ d_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) v(\Delta V_i). \tag{23.40}$$

*Функцию* $f(x, y, z)$ *называют подынтегральной функцией,* $f(x, y, z)\, dV$ *— подынтегральным выражением,* $dV$ *— элементом объема. Если* $\iiint_V f(x, y, z)\, dV$ *существует, то* $f$ *называется интегрируемой на* $V$ *функцией.*

Таким образом, масса тела (задача 1) — тройной интеграл от плотности, т. е.

$$m(V) = \iiint\limits_V P(x, y, z)\, dV.$$

Ясно, что тройной интеграл — обобщение на случай трех измерений того, что было сделано в случае двух измерений для двойного интеграла. Для него имеет место аналогичная теореме 23.1 теорема существования и справедливы свойства тройного интеграла и правила сведения к повторным интегралам. Мы приводим их без доказательства.

**ТЕОРЕМА 23.2**
Для всякой функции $f(x,y,z)$, определенной и непрерывной в $V \cup \partial V$, где $V$ — ограниченное тело объема $v(V)$ в $\mathbb{R}_3$, существует тройной интеграл, т. е.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)v(\Delta V_i) \;\equiv\; \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$$

### 23.2.3. СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1°. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла, т. е.

$$\iiint\limits_V k\cdot f(x,y,z)\,dV = k\cdot \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$$

2°. Если $f$ и $g$ — интегрируемые на $V$ функции, то $f+g$ интегрируема на $V$ и

$$\iiint\limits_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV + \iiint\limits_V g(x,y,z)dV.$$

3°. Если $V = V_1 \cup V_2$ и $v(V) = v(V_1) + v(V_2)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV.$$

Это свойство называют свойством аддитивности тройного интеграла.

4°. Если $f(x,y,z)$ — непрерывная на $V\cup\partial V$ функция и $V$ — ограниченное тело в $\mathbb{R}_3$, имеющее объем $v(V)$, то существует точка $(x_0,y_0,z_0)\in V$ такая, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)\cdot v(V).$$

Свойство 4° называют теоремой о среднем значении.

*Следствие из свойства 4°:*

$$\iiint\limits_V 1\cdot dV = v(V).$$

5°. Если $f$ и $g$ — интегрируемые на $V$ функции и для любой точки $(x,y,z)\in V$ выполнено неравенство $f(x,y,z)\leqslant g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \leqslant \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dV.$$

### 23.2.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА СВЕДЕНИЕМ К ПОВТОРНЫМ В СЛУЧАЕ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

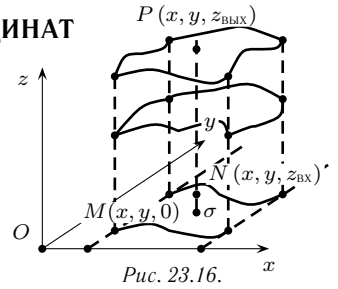


*Рис. 23.16.*

Предположим, что $V$ — тело, ограниченное снизу поверхностью $z = f_1(x, y)$, сверху — $z = f_2(x, y)$, а его проекция на плоскость $XOY$ — область $\sigma$, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$ (см. рис. 23.16).

Возьмем на $\sigma$ точку $M$, обозначим ее координаты $(x, y, 0)$, проведем через нее вертикальную прямую $l$. Точку пересечения $l$ с $f_1(x, y)$ обозначим $N$ и назовем точкой входа, координаты $N$ — $(x, y, z_{\text{вх}})$. Точку пересечения $l$ с $f_2(x, y)$ обозначим $P$ и назовем точкой выхода, координаты $P$ — $(x, y, z_{\text{вых}})$, тогда

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iint\limits_\sigma \left( \int\limits_{z_{\text{вх}}=f_1(x,y)}^{z_{\text{вых}}=f_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx. \quad (23.41)$$

Формулу (23.41) называют формулой сведения тройного интеграла к повторному в декартовых координатах с порядком интегрирования: «$z-y-x$».

При другом расположении тела $V$ можно выписать аналогичные формулы для других порядков интегрирования: «$z-x-y$», «$y-z-x$», «$y-x-z$», «$x-y-z$», «$x-z-y$».

В случае декартовых координат применяют для тройного интеграла обозначения, аналогичные двойному интегралу, а именно:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV \stackrel{\text{def}}{=} \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

т. е. элемент объема обозначают $dx\,dy\,dz$, что соответствует тому, что обычно $\Delta V_i$ строят с помощью рассечения тела плоскостями, параллельными координатным осям.

*Замечание.* В случаях, когда форма тела $V$ не такая, как описана в схеме сведения тройного интеграла к повторным, область интегрирования разбивают на конечное число областей $V_1$, $V_2$, …, $V_r$ так, чтобы

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV \equiv \sum_{i=1}^{r} \iiint\limits_{V_i} f(x, y, z)\,dV$$

и на каждой из областей можно было бы применить схему сведения к повторным интегралам.

### 23.2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

**Цилиндрические координаты.** В этом случае разбиение на $\Delta V_i$ проводят поверхностями $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, $r = \text{const}$. Тогда элемент объема $dV$ имеет вид, изображенный на рис. 23.17. Значит,

$$dV = V_{\text{цил. сект. } OO_1D_1C_1CD} - V_{\text{цил. сект. } OO_1B_1A_1AB} = \frac{1}{2}(r + dr)^2 d\varphi\,dz -$$

$$- \frac{1}{2} r^2 d\varphi\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz + \frac{1}{2} dr^2 d\varphi\,dz = \left( r + \frac{dr}{2} \right) dr\,d\varphi\,dz \approx r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

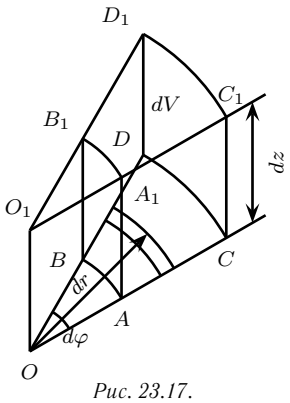



*Рис. 23.17.*

тогда можно показать, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\right)\,r\,dr\,d\varphi\,dz. \quad (23.42)$$

Правая часть формулы (23.42) называется формулой перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам.

**Сферические координаты.** Аналогично рассуждая, можно получить для сферических координат формулу

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \equiv$$

$$\equiv \iiint\limits_V f\left(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta\right)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \quad (23.43)$$

Правая часть формулы (23.43) называется формулой перехода в тройном интеграле к сферическим координатам.

Схема сведения тройного интеграла к повторным в цилиндрических и сферических координатах аналогична схеме сведения тройного интеграла к повторным в декартовых координатах.

### 23.2.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Ясно, что координаты $x_m$, $y_m$, $z_m$ центра массы материального тела $V$ с известным законом распределения плотности $p(x,y,z)$ находятся по формулам:

$$x_m = \frac{\iiint\limits_V p(x,y,z)\,x\,dV}{M};\ y_m = \frac{\iiint\limits_V p(x,y,z)\,y\,dV}{M};\ z_m = \frac{\iiint\limits_V p(x,y,z)\,z\,dV}{M}, \quad (23.44)$$

$$\text{где } M = \iiint\limits_V p(x,y,z)\,dV.$$

В случае однородного тела в формулах (23.44) следует положить $p(x,y,z) = 1$.

## § 23.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 23.3.1. ЗАДАЧА 1. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

Известно, что если материальная точка под действием силы $\vec{F}$ совершила прямолинейное перемещение на вектор $\vec{e}$, то совершенная работа равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$, $\vec{e}$, т. е.

$$A = \vec{F}\cdot\vec{e}. \quad (23.45)$$

В общем случае будем рассматривать перемещение точки по некоторой кривой $L$ под действием переменной силы $\vec{F}$. Разобьем кривую $L$ в направлении от начального положения точки — $A$ к конечной точке $B$ на дуге $\breve{\Delta L_i}$ точками деления $A_i$: $A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n = B$.

Обозначим $(x_i, y_i, z_i)$ — координаты точки $A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. В кривую $L$ впишем ломаную, соединив прямолинейными отрезками соседние точки деления, на каждой дуге

$\breve{\Delta L}_i$ зафиксируем по точке $C_i\ (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Заменим дугу $\breve{\Delta L}_i$ прямоугольным отрезком $A_{i-1}A_i$ и будем считать, что это прямолинейное перемещение точки произошло под действием постоянной силы $F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, тогда работа по перемещению точки по дуге $\breve{\Delta L}_i$ выражается приближенной формулой

$$A\big(\breve{\Delta L}_i\big) \approx \vec{F}\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i}. \tag{23.46}$$

Пусть

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i \vec{\imath} + \Delta y_i \vec{\jmath} + \Delta z_i \vec{k},$$
$$\vec{F}\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \;=\; P\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\vec{\imath} + Q\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\vec{\jmath} + R\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\vec{k},$$

тогда в координатной форме (23.46) примет вид

$$A\big(\breve{\Delta L}_i\big) \approx P\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i + Q\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_i + R\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_i. \tag{23.47}$$

Тогда

$$A(L) = \sum_{i=1}^{n} A\big(\breve{\Delta L}_i\big) \approx$$
$$\approx \sum_{i=1}^{n} \left(P\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i + Q\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_i + R\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_i\right). \tag{23.48}$$

За точное значение работы силы вдоль кривой $L$ принимают предел суммы, стоящей в правой части (23.48) при $n \to \infty$, $d_n \to 0$, $d_n = \max\{|\overline{A_0A_1}|,\ |\overline{A_1A_2}|,\ \ldots,\ |\overline{A_{n-1}A_n}|\}$. Таким образом, задача 1 свелась к вычислению предела при $n \to \infty$ суммы вида (23.48).

### 23.3.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Отвлечемся от механического смысла задачи 1. Пусть в некоторой области $E$ пространства $\mathbb{R}_3$ задана дуга $\breve{AB}$ непрерывной кривой $L$ и вектор-функция

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — числовые функции, определенные на дуге $\breve{AB}$ кривой $L$.

Поступая так же, как в задаче 1, рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(P\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i + Q\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta y_i + R\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta z_i\right). \tag{23.49}$$

Эту сумму называют интегральной суммой для вектор-функции $\vec{F}(x, y, z)$ на дуге $\breve{AB}$ кривой $L$.

**Определение 23.3.** *Криволинейным интегралом от вектор-функции* $\vec{F} = P(z, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$ *по дуге* $\breve{AB}$ *кривой* $L$ *(криволинейным интегралом II рода) называют предел* $S_n$ *при* $n \to \infty$, $d_n \to 0$ *и обозначают*

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Подынтегральное выражение $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ можно истолковать как скалярное произведение векторов $\vec{F}(x,y,z)$ и $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, (здесь $d\vec{r}$ — дифференциал радиуса-вектора $\vec{r}$ точки на кривой $L$), тогда в векторной форме криволинейный интеграл записывается в виде

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Приведем без доказательства достаточные условия существования криволинейного интеграла.

**ТЕОРЕМА 23.3**
Пусть дуга $\breve{AB}_L$ кривой $L$ задана параметрически уравнениями

$$\breve{AB}_L \;:\; \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{23.50}$$

и функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют на $[a,b]$ непрерывные производные. Тогда для любой вектор-функции $\vec{\Phi}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, определенной и непрерывной на дуге $\breve{AB}_L$ (т. е. $f_1(t) = P(x(t),y(t),z(t))$, $f_2(t) = Q(x(t),y(t),z(t))$, $f_3(t) = R(x(t),y(t),z(t))$ непрерывны на $[a,b]$), существует криволинейный интеграл.

### 23.3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Будем считать, что дуга $\breve{AB}_L$ и функция $\vec{\Phi}$ на $\breve{AB}_L$ удовлетворяют условиям теоремы 23.3 и параметризация дуги $\breve{AB}_L$ в (23.50) такова, что

$$A = (x(a), y(a), z(a)), \qquad B = (x(b), y(b), z(b)).$$

Рассмотрим одно слагаемое в криволинейном интеграле:

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y,z)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i. \tag{23.51}$$

Предел в правой части (23.51) не зависит от выбора точек разбиения $\{A_i\}_{i=0}^n$ и точек $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ на дугах $\Delta\breve{L}_i$.

Разобьем сегмент $[a,b]$ точками деления $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ на $n$ частей и рассмотрим в качестве точек деления дуги $\breve{AB}_L$ точки

$$\begin{aligned} A = A_0 &= (x(a), y(a), z(a)) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)), \\ A_1 &= (x(t_1), y(t_1), z(t_1)), \ \ldots, \\ A_n &= (x(t_n), y(t_n), z(t_n)) = (x(b), y(b), z(b)) = B. \end{aligned}$$

Приращение абсциссы $\Delta x_i$ при переходе от точки $A_{i-1}$ к точке $A_i$ можно выразить по формуле Лагранжа конечных приращений

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$.

Подставляя полученное в правую часть (23.51) и полагая $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$, $\zeta_i = z(\tau_i)$, получаем

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y,z)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P\left(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\right)\cdot x'(\tau_i)\Delta t_i. \tag{23.52}$$

Правая часть в (23.52) — интегральная сумма для следующего определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt.$$

Значит,

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} Q(x,y,z)\,dy = \int\limits_a^b Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} R(x,y,z)\,dz = \int\limits_a^b R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t)\,dt.$$

Мы получили формулу для вычисления криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)\,dt. \tag{23.53}$$

В случае плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ и ее естественной параметризации:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \qquad x \in [a,b]$$

формула (23.53) имеет вид

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(P\left(x, f(x)\right) + Q\left(x, f(x)\right) f'(x)\right)\,dx. \tag{23.54}$$

В частности,

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P\left(x, f(x)\right)\,dx. \tag{23.55}$$

### 23.3.4. СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Для криволинейного интеграла справедливы следующие свойства:

$$1^{\circ}. \quad \int\limits_{\breve{AB}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int\limits_{\breve{BA}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

$$2^{\circ}. \quad \int\limits_{\breve{AB}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\breve{AC}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{\breve{CB}_L} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad C \in \breve{AB}_L.$$

● *ПРИМЕР 23.4.* Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz,$$

где $\breve{AB}_L$ — дуга винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 4t$ от точки $A = (1, 0, 0)$ до точки $B = (1, 0, 2\pi)$.

● Ясно, что параметр $t$ на дуге $\breve{AB}_L$ меняется от $0$ до $\pi/2$, тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} xy\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\sin^2 t\cos t + \sin^2 t\cos t + 64t^2\right)\,dt = \frac{64}{3}\,t^3\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}\,\pi^3. \quad ●$$

## § 23.4. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

### 23.4.1. ПОНЯТИЕ О ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ

В §22.6 мы рассмотрели скалярные поля на плоскости и в пространстве, теперь мы рассмотрим векторные поля, имеющие широкие приложения в физике, механике, гидрометеорологии и др. областях.

**Определение 23.4.** *Пусть $X$ — область в $\mathbb{R}_3$ (быть может, $X = \mathbb{R}_3$). Говорят, что на $X$ задано векторное поле $\vec{F}$, если каждой точке $M \in X$ ставится в соответствие вполне определенный вектор $\vec{F}(M) = P(M)\vec{\imath} + Q(M)\vec{\jmath} + R(M)\vec{k}$, где $P$, $Q$, $R$ — скалярные (числовые) функции, определенные на $X$, т. е. векторное поле — это пара $(X, \vec{F})$, где $\vec{F}$ — вектор-функция, определенная на $X$ или четверка $(X, P, Q, R)$, где $P$, $Q$, $R$ — числовые функции, определенные на $X$.*

● *ПРИМЕР 23.5.* Пусть $X = \mathbb{R}_3$, каждой точке $M \in \mathbb{R}_3$ поставим в соответствие вектор $\vec{r}(M) = \overrightarrow{OM}$. У нас возникло векторное поле радиус-векторов точек $\mathbb{R}_3$ — $(\mathbb{R}_3, \vec{r})$.

● *ПРИМЕР 23.6.* Пусть $(X, f)$ — скалярное поле и $f$ дифференцируема на $X$, тогда $(X, \operatorname{grad} f)$ — векторное поле.

В случае, когда мы имеем дело не с $\mathbb{R}_3$, а с $\mathbb{R}_2$, говорят о плоском векторном поле.

**Определение 23.5.** *Пусть $(X, \vec{F})$ — векторное поле и пусть $L$ — замкнутый непрерывный контур в $X$, т. е. $L \subset X$. Циркуляцией векторного поля по замкнутому контуру $L$ называется криволинейный интеграл по контуру $L$ от вектор-функции поля, т. е.*

$$\oint\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

### 23.4.2. ФОРМУЛА ГРИНА–ОСТРОГРАДСКОГО

Далее в этом параграфе будем рассматривать только плоские векторные поля. Оказывается, существует связь между циркуляцией векторного поля и двойным интегралом по области, ограниченной контуром, для которого вычисляется циркуляция.

**ТЕОРЕМА 23.4**

Пусть $(X, \vec{F})$ — плоское поле. $X$ принадлежит плоскости $XOY$, $L$ — замкнутый контур непрерывной кривой $L$, $L \subset X$, причем любая прямая, параллельная координатным осям, пересекает $L$ не более чем в двух точках (см. рис. 23.18), $\sigma$ — область, ограниченная $L$, тогда справедлива формула Грина[1]–Остроградского[2]:

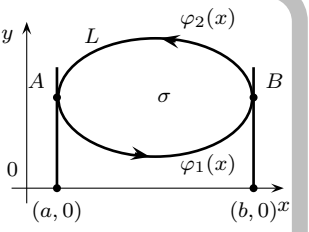



*Рис. 23.18.*

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma. \qquad (23.56)$$

При этом контур $L$ обходится в положительном направлении ($\Leftrightarrow$ так, чтобы при обходе $L$ область $\sigma$ оставалась по левую сторону, т. е. положительный обход — это обход контура против часовой стрелки).

---

[1] Грин Джордж (1793–1841). Математику изучал самостоятельно. В 1828 году опубликовал сочинение «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма». В этом труде он развил теорию потенциала и подошел на этой основе к изучению электрического и магнитного полей. Им были получены формулы, связывающие интеграл по объему и по поверхности, по площади и контуру (формулы Гаусса–Грина–Остроградского). В этой же работе приведен частный случай функции, дающей аналитическое представление решения краевой задачи математической физики (функция Грина краевой задачи для дифференциального оператора в частных производных). В 1837 году Дж. Грин окончил Кембриджский университет. В 1839 году вывел основное уравнение теории упругости, исходя из закона сохранения энергии. В этом же году Дж. Грин начал преподавать в Кембриджском университете. Ставшие классическими результаты Дж. Грина по математической физике были изданы в 1871 г., через 30 лет после его смерти.

[2] Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) — выдающийся русский математик и механик, один из основателей Санкт-Петербургской математической школы, член Петербургской академии наук (1830 г.), Нью-Йоркской АН (1834 г.), Туринской АН (1841 г.), Национальной Римской академии де Линген (1853 г.), чл.-корр. Парижской АН (1856), учился в Харьковском университете, но из-за антирелигиозных взглядов диплома университета не получил, математическое образование продолжил (с 1822 г.) в Париже, где имел возможность учиться у П. Лапласа, Ж. Фурье, О. Коши и др. В 1828 году, вернувшись в Россию, преподавал в морском кадетском корпусе, институте инженеров путей сообщения, главном инженерном училище, главном артиллерийском училище. Исследования М. В. Остроградского касаются различных областей математики и механики: математического анализа, высшей алгебры, геометрии, теории вероятностей, теории чисел, аналитической механики, математической физики, баллистики. В 1828 году в работе по теории теплоты М. В. Остроградский получил формулы, известные теперь как формулы Остроградского–Гаусса и Грина–Остроградского. К сожалению, многие научные результаты Остроградского не стали своевременно достоянием мировой научной общественности и «переоткрывались» позже другими авторами.

● Рассмотрим

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = \text{см. обозначения на рис. 23.18} =$$

$$= \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right) = \begin{array}{l}(P(x,y) \text{ является первообразной для } \partial(P(x,y))/\partial y,\\ x \text{ — фиксировано, следовательно, для вычисления}\\ \text{внутреннего интеграла можно применить формулу}\\ \text{Ньютона–Лейбница)}\end{array} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(P\left(x, \varphi_2(x)\right) - P\left(x, \varphi_1(x)\right)\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b P\left(x, \varphi_2(x)\right)\, dx - \int\limits_a^b P\left(x, \varphi_1(x)\right)\, dx =$$

$$\overset{(23.55)}{=} \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_{\varphi_2}} P(x,y)\, dx + \int\limits_{\overset{\smile}{BA}_{\varphi_1}} P(x,y)\, dx = -\oint\limits_L P(x,y)\, dx. \quad (23.57)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}\, d\sigma = \oint\limits_L Q(x,y)\, dy. \quad (23.58)$$

Вычитая из равенства (23.58) равенство (23.57) и пользуясь аддитивностью двойного и криволинейного интегралов, получаем

$$\oint\limits_L P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\sigma. \quad ●$$

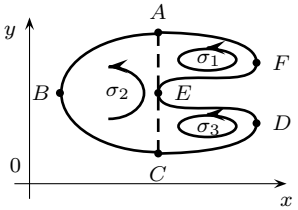



*Рис. 23.19.*

Покажем теперь, что формула Грина–Остроградского справедлива и для областей, не удовлетворяющих условиям теоремы 23.4.

● Рассмотрим область $\sigma$, изображенную на рис. 23.19. Разобьем область на три области: $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ (см. обозначения на рис. 23.19), тогда

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, d\sigma =$$

$$= \begin{array}{l}(\text{к каждой из областей } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ применим}\\ \text{формулу Грина–Остроградского)}\end{array} =$$

$$= \int\limits_{\overset{\smile}{EFA}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy + \int\limits_{\overset{\smile}{AE}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\smile}{ABC}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy + \int\limits_{\overset{\smile}{CE}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy +$$

$$+\int\limits_{\breve{EA}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\breve{EC}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+$$
$$+\int\limits_{C\breve{D}E} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\oint\limits_{ABCDEF} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+$$
$$+\left(\int\limits_{\breve{AE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\breve{EA}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right)+$$
$$+\left(\int\limits_{\breve{CE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+\int\limits_{\breve{EC}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right)=$$
$$=\oint\limits_{ABCDEF} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy+\left(\int\limits_{\breve{AE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\breve{AE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right)+\left(\int\limits_{\breve{CE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\breve{CE}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\right)=\oint\limits_{ABCDEF} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy. \quad \bullet$$

● *ПРИМЕР 23.7.* Вычислить площадь области $\sigma_{\mathcal{E}}$, ограниченной эллипсом

$$\mathcal{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

● Мы знаем, что

$$S(\sigma_{\mathcal{E}})=\iint\limits_{\sigma_{\mathcal{E}}} d\sigma.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства, «подгоняя» ее под формулу Грина–Остроградского:

$$\iint\limits_{\sigma_{\mathcal{E}}} d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{\mathcal{E}}} 1\cdot d\sigma=\iint\limits_{\sigma_{\mathcal{E}}}(1-0)d\sigma=\begin{array}{l}\text{(положим } Q(x,y)=x,\ P(x,y)=0 \text{ и}\\ \text{применим формулу Грина–Остроградского)}\end{array}=$$
$$=\oint\limits_{\mathcal{E}} 0\cdot dx+x\cdot dy=\oint\limits_{\mathcal{E}} x\,dy.$$

Для вычисления последнего интеграла перейдем к параметрическим уравнениям эллипса:

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

По формуле (23.52) получаем

$$S(\sigma_{\mathcal{E}})=\oint\limits_{\mathcal{E}} x\,dy=ab\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=ab\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi ab. \quad \bullet$$

*Замечание.* Решая пример 23.7, мы вывели формулу, позволяющую вычислять площадь фигуры $\sigma$, ограниченной кривой $L$ с помощью интеграла по контуру:

$$S(\sigma) = \oint\limits_L x\,dy. \tag{23.59}$$

Если применить формулу Грина–Остроградского, положив $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, то

$$S(\sigma) = -\oint\limits_L y\,dx. \tag{23.60}$$

### 23.4.3. ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Из физики известно, что работа по перемещению материальной точки в поле тяготения из одной точки поля в другую не зависит от пути, по которому происходило перемещение, также обстоит дело с работой по перемещению заряда в электрическом поле. Каким условиям должно удовлетворять векторное поле $(X, \vec{F})$ для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} \vec{F}\,d\vec{r}$$

не зависел от кривой, соединяющей точки $A$, $B$ ($\Leftrightarrow$ пути интегрирования), т. е. когда

$$\int\limits_{\breve{AB}_{L_1}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{\breve{AB}_{L_2}} \vec{F}\,d\vec{r} \tag{23.61}$$

для любых точек $A$, $B \in X$ и любых кривых $L_1$, $L_2$ $(\subset X)$, их соединяющих? Или равенство (23.61) справедливо для любого поля? Ответ на этот вопрос дает следующий

● *ПРИМЕР 23.8.* Вычислить криволинейные интегралы

$$\int\limits_{\breve{AB}_{L_1}} (x+y)\,dx + xy\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{\breve{AB}_{L_2}} (x+y)\,dx + xy\,dy,$$

если $A = (0,0)$, $B = (2,4)$, $L_1 : y = 2x$, $L_2 : y = x^2$.

● Для вычисления криволинейных интегралов воспользуемся формулой (23.54):

$$J_1 = \int\limits_{\breve{AB}_{L_1}} (x+y)\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^2 \left(3x + 4x^2\right)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3\Big|_0^2 = 6 + 10\,\frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}.$$

$$J_2 = \int\limits_{\breve{AB}_{L_1}} (x+y)\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^2 \left(x + x^2 + 2x\cdot x^2\right)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\Big|_0^2 = 10 + 2\,\frac{2}{3} = 12\,\frac{2}{3}.$$

Мы показали, что $J_1 \neq J_2$. ●

Сформулируем и докажем очевидную теорему.

**ТЕОРЕМА 23.5**
Для того чтобы в векторном поле $(X, \vec{F})$ криволинейный интеграл $\int_{\breve{AB}_L} \vec{F}\,d\vec{r}$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция векторного поля по любому контуру в $X$ была равна нулю, т. е.

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0, \qquad \forall L \subset X.$$

● Зафиксируем на контуре $L$ две точки $A$, $B$. Они разбивают контур на две дуги $\breve{AB}_{L_1}$ и $\breve{AB}_{L_2}$. Тогда

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \iff \int_{\breve{AB}_{L_1}} \vec{F}\,d\vec{r} + \int_{\breve{BA}_{L_2}} \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \iff$$
$$\int_{\breve{AB}_{L_1}} \vec{F}\,d\vec{r} - \int_{\breve{AB}_{L_2}} \vec{F}\,d\vec{r} = 0 \iff \int_{\breve{AB}_{L_1}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\breve{AB}_{L_2}} \vec{F}\,d\vec{r}. \quad ●$$

Доказанная теорема обладает одним серьезным недостатком — условие

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0, \qquad \forall L \subset X$$

непроверяемо. Однако с помощью этой теоремы и формулы Грина–Остроградского можно получить эффективно проверяемые условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

**ТЕОРЕМА 23.6**
Пусть $(X, \vec{F})$ — плоское векторное поле,

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{\imath} + Q(x, y)\,\vec{\jmath},$$

$X$ — односвязная ограниченная область в плоскости $XOY$, $\vec{F}$ — непрерывно дифференцируемая на $X$ вектор-функция. Для того чтобы криволинейный интеграл от функции поля $\int_{\breve{AB}_L} \vec{F}\,d\vec{r}$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $(x, y) \in X$ было выполнено условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \tag{23.62}$$

● **Достаточность.** Покажем, что если выполнено условие (23.62), то $\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = 0$, $\forall L \subset X$, что по теореме 23.5 и означает независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования:

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{r} = \oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \text{(применяя формулу Грина–Остроградского)} =$$
$$= \iint_{\sigma_L} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d\sigma \overset{(23.62)}{=} \iint_{\sigma_L} 0 \cdot d\sigma = 0.$$

**Необходимость.** Предположим противное, т. е. что криволинейный интеграл от функции поля не зависит от пути интегрирования и существует точка $M_0(x_0, y_0) \in X$ такая, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{23.63}$$

Соотношение (23.63) равносильно тому, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{23.64}$$

Рассмотрим один из возможных вариантов реализации (23.64), а именно

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) > 0. \tag{23.65}$$

Так как $\partial(Q(x,y))/\partial x - \partial(P(x,y))/\partial y$ непрерывная на $X$ функция, то существует $\delta_0$-окрестность точки $M_0$, $\delta_0 > 0$, $s(M_0, \delta_0) \subset X$ такая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in S(M_0, \delta_0). \tag{23.66}$$

В качестве контура $L$ рассмотрим окружность радиуса $\frac{\delta_0}{2}$ с центром в точке $M_0$, тогда на ней выполнено неравенство (23.66), и воспользуемся формулой Грина–Остроградского:

$$\oint\limits_L \vec{F}\, d\vec{r} = \iint\limits_{S\left(x_0, \frac{\delta_0}{2}\right)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d\sigma \overset{(23.66)}{>} 0.$$

Последнее в силу теоремы 23.5 противоречит предположению о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. ●

● *ПРИМЕР 23.9.* Доказать, что в поле тяготения тела массы $M$ работа по перемещению материальной точки не зависит от пути, по которому происходит перемещение, если речь идет об односвязной области, не содержащей $M$.

● Будем считать, что тело массы $M$ находится в начале координат. Сила тяготения подчиняется закону Ньютона и направлена к телу $M$ (см. рис. 23.20).

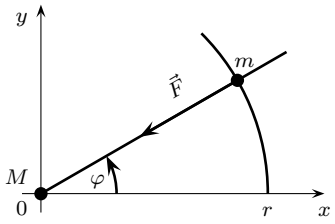



*Рис. 23.20.*

Векторное поле тяготения $\vec{F}$ определено на $\mathbb{R}_2 \setminus \{(0,0)\}$ следующим соотношением:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{M\, m}{r^2},$$

где $m$ — масса материальной точки, $r$, $\varphi$ — полярные координаты материальной точки $m$.

$$\vec{F} = -\left|\vec{F}\right| \cos\varphi\, \vec{\imath} - \left|\vec{F}\right| \sin\varphi\, \vec{\jmath}.$$

Тогда

$$P(x, y) = -\frac{M\, m \cdot x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}};$$
$$Q(x, y) = -\frac{M\, m \cdot y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Найдем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3 \cdot \frac{M\,m\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2}};$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3 \cdot \frac{M\,m\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ясно, что условие (23.62) независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования выполнено. ●

*Замечание.* При решении задачи $M$ $(m)$ обозначало и массу тела, и точку, в которой находится материальное тело.

## § 23.5. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА (КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КРИВОЙ ОТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ) И ИНТЕГРАЛ ПО ПОВЕРХНОСТИ

### 23.5.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА. ЗАДАЧА О МАССЕ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВДОЛЬ КРИВОЙ

Пусть в плоскости $XOY$ задана дуга кривой $L$ — $\overset{\smile}{AB}_L$ и закон распределения плотности массы вдоль кривой — $p(x,y)$, $(x,y) \in \overset{\smile}{AB}_L$. Требуется определить массу $\overset{\smile}{AB}_L$ — $m(\overset{\smile}{AB}_L)$.

● Разобьем $\overset{\smile}{AB}_L$ точками деления $A = A_0$, $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_{n-1}$, $A_n = B$ на дуги $\Delta L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, их длины обозначим $l(\Delta L_i)$, на каждой малой дуге $\Delta L_i$ выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i)$ $(\in \Delta L_i)$ и положим

$$m\left(\Delta L_i\right) \approx p(x_i, y_i) \cdot l\left(\Delta L_i\right). \tag{23.67}$$

Из (23.67) получаем

$$m\big(\overset{\smile}{AB}_L\big) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\Delta L_i\right) \approx \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_i) l\left(\Delta L_i\right). \tag{23.68}$$

Полученную сумму (23.68) называют интегральной суммой для криволинейного интеграла по длине дуги (криволинейным интегралом I рода).

**Определение 23.6.** *Криволинейным интегралом от скалярной функции $f(x,y)$ по длине дуги $\overset{\smile}{AB}_L$ называют величину, обозначаемую $\int_{\overset{\smile}{AB}_L} f(x,y)\,dl$ и определяемую равенством*

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(x,y)\,dl = \lim_{\substack{n\to\infty \\ l_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, l\left(\Delta L_i\right). \tag{23.69}$$

*Здесь* $l_n = \max\limits_n l(\Delta L_i)$. ●

Таким образом, решение задачи о массе дуги выглядит так:

$$m\big(\overset{\smile}{AB}_L\big) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} p(x,y)\,dl.$$

Можно показать, что справедлива следующая теорема существования криволинейного интеграла по длине дуги.

**ТЕОРЕМА 23.7**
Если $\overset{\smile}{AB}_L$ — дуга непрерывной кривой и $f(x,y)$ непрерывна вдоль кривой, то $\int_{\overset{\smile}{AB}_L} f(x,y)\,dl$ существует.

Можно показать, что если $\overset{\smile}{AB}_L$ задана уравнением $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\cdot\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}\,dx. \tag{23.70}$$

Понятие о криволинейном интеграле по дуге кривой $\overset{\smile}{AB}_L$ можно вводить и в $\mathbb{R}_3$, и, если

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t), \end{cases} \qquad t\in[a,b]$$

— параметрические уравнения дифференцируемой кривой, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt. \tag{23.71}$$

Формулы (23.70) и (23.71) называют формулами сведения криволинейного интеграла по длине дуги к определенному интегралу.

*ПРИМЕР 23.10.* Найти массу куска параболы $y=x^2$, $x\in[1,2]$, если $p(x,y)=\frac{y}{x}$.

$$M=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L}\frac{y}{x}\,dl\overset{(23.71)}{=}\int\limits_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx\overset{1+4x^2=u}{=}$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_5^{17}\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3\cdot 8}u\sqrt{u}\Big|_5^{17}=\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right).$$

### 23.5.2. ИНТЕГРАЛ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_3$ задана поверхность $S$, ограниченная кривой $L$, и на поверхности задан закон распределения плотности вещества $p(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$. Требуется вычислить массу вещества на поверхности $S$ ($\Leftrightarrow$ массу поверхности $S$).

Разобьем поверхность на $n$ элементарных площадок $\Delta S_i$, на каждой из площадок зафиксируем по произвольной точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$, $(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S_i$, тогда

$$m(S)=\sum_{i=1}^n m\left(\Delta S_i\right)\approx\sum_{i=1}^n p(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta S_i, \tag{23.72}$$

здесь $\Delta S_i$ — обозначение как площадки, так и ее площади.

**Определение 23.7.** *Интегралом по поверхности $S$ от скалярной функции $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$ называют величину, обозначаемую*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$$

*и определяемую равенством*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds=\lim_{\substack{n\to\infty\\ d_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x,y,z)\Delta S_i, \tag{23.73}$$

$(x_i,y_i,z_i)\in\Delta S_i$, $d_n$ — *«густота» разбиения.*

Справедлива следующая теорема существования интеграла по поверхности.

**ТЕОРЕМА 23.8**
Если $S$ гладкая поверхность ($\Leftrightarrow$ заданная неявным уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ — непрерывная функция), имеющая площадь, то для всякой функции $f(x,y,z)$, непрерывной на поверхности $S$, интеграл по поверхности $S$ существует.

Ясно, что интеграл по поверхности аддитивен и, если $f(x,y,z)>0$ на $S$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds>0.$$

### 23.5.3. ПРАВИЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть $S$ — поверхность, имеющая площадь, заданная уравнением $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\sigma$, $\sigma$ — ограниченная область на плоскости $XOY$, имеющая площадь $S(\sigma)$, и функция $\varphi(x,y)$ непрерывно дифференцируема на $\sigma$, $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности $S$ ($\Leftrightarrow$ $f(x,y,\varphi(x,y))$ непрерывна на $\sigma$).

Применим для нахождения $\Delta S_i$ формулу для нахождения площади поверхности с помощью двойного интеграла и теорему о среднем значении для двойного интеграла (свойство $4^{\text{o}}$ двойного интеграла, см. §23.1, п. 4 «Свойства двойного интеграла»):

$$\Delta S_i=\iint\limits_{\Delta\sigma_i}\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x,y)\right)^2+\left(\varphi'_y(x,y)\right)^2}\,d\sigma=$$
$$=\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x_i,y_i)\right)^2+\left(\varphi'_y(x_i,y_i)\right)^2}\,S(\Delta\sigma_i). \tag{23.74}$$

Здесь $\Delta\sigma_i$ — проекция площадки $\Delta S_i$ на плоскость $XOY$.

Теперь в интегральной сумме (23.73) в качестве зафиксированных точек на площадках $\Delta S_i$ возьмем точки с координатами $(x_i,\ y_i,\ \varphi(x_i,y_i))$, тогда сумма (23.73) с учетом (23.74) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,\varphi\left(x_i,y_i\right)\right)\sqrt{1+\left(\varphi'_x(x_i,y_i)\right)^2+\left(\varphi'_y(x_i,y_i)\right)^2}\,S(\Delta\sigma_i). \tag{23.75}$$

Последняя сумма — интегральная сумма для двойного интеграла по области $\sigma$ — проекции поверхности $S$ на плоскость $XOY$ от функции

$$f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+\big(\varphi'_x(x,y)\big)^2+\big(\varphi'_y(x,y)\big)^2}.$$

Тем самым мы доказали, что в рассматриваемом случае имеет место формула

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds=\iint\limits_\sigma f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\big(\varphi'_x(x,y)\big)^2+\big(\varphi'_y(x,y)\big)^2}\,d\sigma. \qquad (23.76)$$

## § 23.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ

### 23.6.1. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим задачу о потоке жидкости в пространстве $\mathbb{R}_3$ или в некоторой односвязной области $X$ в $\mathbb{R}_3$. Пусть скорость движения жидкости в каждой точке пространства или рассматриваемой области зависит только от координаты точки и не зависит от времени (таковыми можно считать потоки океанических течений, рассматриваемые на небольших временных промежутках). Течение жидкости в таком случае называют установившимся или стационарным. В этом случае векторное поле скоростей не зависит от времени:

$$\vec v(x,y,z)=v_x(x,y,z)\,\vec\imath+v_y(x,y,z)\,\vec\jmath+v_z(x,y,z)\,\vec k. \qquad (23.77)$$

Здесь $(x,y,z)$ — координаты рассматриваемой точки.

Рассмотрим некоторую ограниченную поверхность $S$, имеющую площадь, $S\subset X$, и найдем поток жидкости через поверхность $S$, т. е. количество жидкости, протекающей через $S$ за единицу времени (будем считать, что жидкость имеет плотность, равную 1, т. е. мы имеем дело с однородной несжимаемой жидкостью плотности 1).

Рассмотрим сначала случай, когда поле скоростей постоянно во всем $\mathbb{R}_3$, а поверхность $S$ — плоская площадка, имеющая площадь $S(\sigma)$.

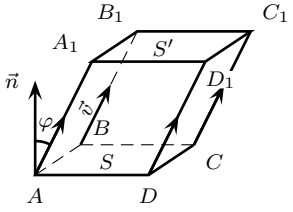



*Рис. 23.21.*

Из рис. 23.21 ясно, что частицы жидкости, находившиеся в момент времени $t_0$ на $S$, окажутся в момент времени $t_0+1$ на $S'$, а жидкость, протекшая через $S$ за единицу времени, образует параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда $\Pi_S$ — масса жидкости, протекшей через площадку $S$ за единицу времени, равна объему параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Мы получаем формулу

$$\Pi_S=S_{ABCD}\cdot h=S_{ABCD}\,|\vec v|\cdot\cos\varphi=S_{ABCD}\cdot(\vec v\cdot\vec n_0)\,, \qquad (23.78)$$

где $\vec n_0$ — единичный вектор нормали к плоскости $S$.

Ясно, что эта формула справедлива не только когда основание — прямоугольник, но и тогда, когда $S$ — плоская площадка, имеющая площадь $S(\sigma)$, т. е.

$$\Pi_\sigma=S(\sigma)\cdot(\vec v\cdot\vec n_0)\,. \qquad (23.79)$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда $S$ — произвольная поверхность, имеющая площадь. Разобьем поверхность на малые площадки $\Delta S_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, в каждой

из них зафиксируем по точке $(x_i, y_i, z_i)$, приближенно будем считать малую площадку плоской, а поток через нее постоянным со скоростью $\vec{v}(x_i, y_i, z_i)$, тогда

$$\Pi_S = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{\Delta S_i} \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_0(x_i, y_i, z_i)\right) S(\Delta S_i). \tag{23.80}$$

Правая часть в (23.80) — интегральная сумма для интеграла по поверхности $S$ от функции $\vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}_0(x, y, z)$.

За точное значение потока примем интеграл по поверхности $S$ от этой функции, т. е.

$$\Pi_S = \iint\limits_S \left(\vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}_0(x, y, z)\right) ds, \tag{23.81}$$

где $\vec{n}_0(x, y, z)$ — единичный вектор нормали к поверхности $S$ в точке с координатами $(x, y, z)$.

**Определение 23.8.** *Если $(\vec{f}, X)$ — произвольное векторное поле, $X = \mathbb{R}_3$ или $X$ — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}_3$ и $S$ — поверхность в $X$, имеющая площадь, то потоком векторного поля через поверхность $S$ называют величину $\Pi_S \vec{f}$, определенную следующим равенством:*

$$\Pi_S \vec{f} \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_S \left(\vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{n}_0(x, y, z)\right) ds. \tag{23.82}$$

Для вычисления потока векторного поля в конкретных задачах можно использовать формулу (23.76) сведения интеграла по поверхности к двойному интегралу.

### 23.6.2. ФОРМУЛА ГАУССА–ОСТРОГРАДСКОГО

Рассмотрим задачу о потоке векторного поля через замкнутую поверхность $S$, имеющую площадь (примеры таких поверхностей — сфера в $\mathbb{R}_3$, эллипсоид в $\mathbb{R}_3$ и т. п.). Сейчас будет доказана теорема о том, что эта задача сводится к задаче вычисления некоторого тройного интеграла по области $V$, ограниченной поверхностью $S$.

**ТЕОРЕМА 23.9 (Гаусса–Остроградского)**
Если вектор-функция

$$\vec{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{\imath} + Q(x, y, z)\,\vec{\jmath} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

определена в области $V$, имеющей объем, ограниченный поверхностью $\partial V$, имеющей площадь, и функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют в $V$ непрерывные частные производные первого порядка, то

$$\iint\limits_{\partial V} \left(\vec{f} \cdot \vec{n}_0\right) ds = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\right) dV, \tag{23.83}$$

где $\vec{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности, направленный вне области $V$.

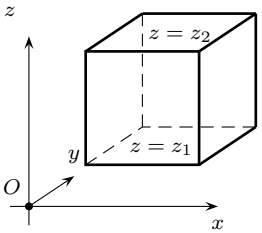



*Рис. 23.22.*

Формула (23.83) называется формулой Гаусса–Остроградского (Гаусса–Грина–Остроградского).

● Докажем сначала теорему для случая, когда $V$ — параллелепипед со сторонами, параллельными координатным осям (см. рис. 23.22). Разложим вектор-функцию поля $\vec{f}(x,y,z)$ в сумму трех вектор-функций:

$$\begin{aligned} &\vec{f}(x,y,z) = \vec{f}_1(x,y,z) + \vec{f}_2(x,y,z) + \vec{f}_3(x,y,z), \\ &\text{где} \quad \vec{f}_1(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + 0\cdot\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k}, \\ &\qquad\quad \vec{f}_2(x,y,z) = 0\cdot\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k}, \\ &\qquad\quad \vec{f}_3(x,y,z) = 0\cdot\vec{\imath} + 0\cdot\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{23.84}$$

Вычислим $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dV$. Применим формулу (23.41) сведения тройного интеграла к двойному

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{\sigma_{XOY}} \left( \int\limits_{z=z_1}^{z=z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz \right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{XOY}} \big(R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)\big)\,d\sigma.$$

Из определения $\vec{f}_3$ следует, что

$$\begin{aligned} \big(\vec{f}_3(x,y,z_2)\cdot\vec{k}\big) &= R(x,y,z_2), \\ \big(\vec{f}_3(x,y,z_1)\cdot\vec{k}\big) &= R(x,y,z_1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{\sigma_{XOY}} \big(\vec{f}_3(x,y,z_2)\cdot\vec{k}\big)\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_{XOY}} \Big(\vec{f}_3(x,y,z_1)\cdot\big(-\vec{k}\big)\Big)\,d\sigma.$$

Первое слагаемое — поток $\vec{f}_3$ через верхнюю крышку параллелепипеда $V$, второе — через нижнюю. Потоки $\vec{f}_3$ через боковые стенки равны нулю, так как вектор-функция $\vec{f}_3$ перпендикулярна векторам нормалей боковых стенок. Значит, правая часть последнего соотношения равна потоку вектор-функции $\vec{f}_3$ через всю поверхность параллелепипеда, т. е.

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{\partial V} \big(\vec{f}_3\cdot\vec{n}\big)\,ds.$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)(x,y,z)\,dV &= \iint\limits_{\partial V} \big(\vec{f}_2\cdot\vec{n}\big)\,ds \quad \text{и} \\ \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y,z)\,dV &= \iint\limits_{\partial V} \big(\vec{f}_1\cdot\vec{n}\big)\,ds. \end{aligned}$$

Складывая последние три равенства, получаем

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dV = \\ &= \iint\limits_{\partial V} \Big(\big(\vec{f}_1\cdot\vec{n}\big) + \big(\vec{f}_2\cdot\vec{n}\big) + \big(\vec{f}_3\cdot\vec{n}\big)\Big)\,ds = \iint\limits_{\partial V} \Big(\big(\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3\big)\cdot\vec{n}\Big)\,ds \overset{(23.84)}{=} \iint\limits_{\partial V} \big(\vec{f}\cdot\vec{n}\big)\,ds. \end{aligned}$$

Таким образом, для рассматриваемого случая теорема доказана.

Что будет в том случае, когда область $V$ в $\mathbb{R}_3$ — два таких параллелепипеда, имеющих «стык» по части грани (см. рис. 23.23).

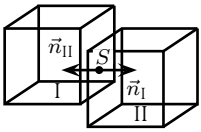



*Рис. 23.23.*

Единичные векторы нормали на общей части стенки $\vec{n}_I$ и $\vec{n}_{II}$ противоположно направлены, и потоки поля через общую часть стенки $S$, подсчитанные из параллелепипедов $I$ и $II$, при суммировании взаимно уничтожаются, тогда

$$\iiint\limits_{I\cup II}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right)dV=$$

$$=\iiint\limits_{I}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right)dV+$$

$$+\iiint\limits_{II}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right)dV=$$

$$=\iint\limits_{\partial I}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)ds+\iint\limits_{\partial II}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)ds=\iint\limits_{\partial(I\cup II)}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)ds.$$

Из только что доказанного следует, что теорема верна для любого тела, представимого в виде объединения конечного числа прямоугольных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, имеющими попарно общие «стыки», быть может, только по части грани («склеенные параллелепипеды»). В случае тела произвольной формы, имеющего объем, доказательство проводится с помощью последовательности тел, представляющих собой склеенные параллелепипеды, для которых теорема справедлива. ●

### 23.6.3. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Теорема Гаусса–Остроградского позволяет выяснить смысл выражения $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

Пусть $(x,y,z)$ — произвольная точка векторного поля $(X,\vec{f})$; $\vec{f}=P(x,y,z)\vec{i}+$ $+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ и функции $P$, $Q$, $R$ удовлетворяют условиям теоремы Гаусса–Остроградского.

Пусть $S((x,y,z),\delta)$, $\delta>0$ — окрестность точки $(x,y,z)$, целиком лежащая в $X$. По этой теореме имеем

$$\iint\limits_{\partial S((x,y,z),\delta)}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)ds=\iiint\limits_{S((x,y,z),\delta)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right)dV. \quad (23.85)$$

По теореме о среднем значении существует точка $\left(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta\right)\in S((x,y,z),\delta)$ такая, что

$$\iiint\limits_{S((x,y,z),\delta)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right)dV=$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial R}{\partial z}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)\right)\cdot\underbrace{V\left(S((x,y,z),\delta)\right.}_{=\frac{4}{3}\pi\delta^3}. \quad (23.86)$$

Из (23.85) и (23.86) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial R}{\partial z}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)=\frac{\iint\limits_{\partial S((x,y,z),\delta)}\bigl(\vec f\cdot\vec n\bigr)\,ds}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}. \tag{23.87}$$

Перейдем в равенстве (23.87) к пределу при $\delta\to 0$. Так как $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ непрерывны в точке $(x,y,z)$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial Q}{\partial y}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)+\frac{\partial R}{\partial z}(\xi_\delta,\eta_\delta,\zeta_\delta)\right)=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z).$$

Учитывая последнее, мы заключаем, что существует предел правой части (23.87) при $\delta\to 0$ и справедливо

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\iint\limits_{\partial S((x,y,z),\delta)}\bigl(\vec f\cdot\vec n\bigr)\,ds}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}. \tag{23.88}$$

**Определение 23.9.** *Дивергенцией векторного поля* $(X,\vec f)$, $\vec f(x,y,z)=P(x,y,z)\vec\imath+Q(x,y,z)\vec\jmath+R(x,y,z)\vec k$ *называют скалярную функцию* $\operatorname{div}\vec f$, *определенную следующим равенством:*

$$\bigl(\operatorname{div}\vec f\bigr)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z).$$

Формула (23.87) показывает, что в точках поля, в которых $\operatorname{div}\vec f$ непрерывна, она равна пределу отношения потока поля через поверхность шара с центром в этой точке к объему шара, когда радиус шара стремится к нулю.

Рассмотрим задачу о потоке жидкости, когда задано поле скоростей $(X,\vec v)$.

Пусть $(x_0,y_0,z_0)$ такая точка поля, в которой $\operatorname{div}\vec v$ непрерывна и положительна, тогда существует такая окрестность $\delta_0$, $\delta_0>0$, в которой $\operatorname{div}\vec v$ положительна, но тогда

$$\iint\limits_{\partial S((x_0,y_0,z_0),\delta)}\vec v\cdot\vec n\,ds=\iiint\limits_{S((x_0,y_0,z_0),\delta_0)}\operatorname{div}\vec v\,dV>0.$$

Это означает, что количество жидкости, вытекающей из шара $S((x_0,y_0,z_0),\delta_0)$ через поверхность шара, больше количества жидкости, втекающей в шар $S\bigl((x_0,y_0,z_0),\delta_0\bigr)$ через его поверхность. В этом случае точка $(x_0,y_0,z_0)$ называется источником.

Аналогично, если $(\operatorname{div}\vec v)(x_0,y_0,z_0)<0$, точка $(x_0,y_0,z_0)$ называется стоком.

Если же в каждой точке некоторого тела $\operatorname{div}\vec v=0$, то количество жидкости, втекающей в это тело через его поверхность, равно количеству вытекающей через его поверхность жидкости.

*ПРИМЕР 23.11.* Рассмотрим поток жидкости, поле скоростей которого $\vec v(x,y,z)=\vec a$, где $\vec a$ — некоторый фиксированный вектор, тогда $(\operatorname{div}\vec v)(x,y,z)\equiv 0$, и значит, в этом поле нет источников и нет стоков. Следовательно, поток поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, т. е. для любой замкнутой поверхности количество втекающей жидкости равно количеству вытекающей через эту поверхность жидкости.

### 23.6.4. «ГЕОМЕТРИЯ» ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ И ВЕКТОРНЫЕ ТРУБКИ

Пусть $(X, \vec{f})$ — векторное поле. Линия $L \subset X$ называется векторной линией поля, если в каждой ее точке касательный вектор к ней имеет то же направление, что и вектор поля в этой точке.

Ясно, что когда мы имеем дело с полем скоростей движущейся жидкости, то векторные линии поля — это траектории движения частиц движущейся жидкости.

Пусть в векторном поле $(X, \vec{f})$ задана некоторая замкнутая кривая $l$ без точек самопересечения, через каждую точку которой проходит векторная линия. Поверхность, образованная множеством векторных линий, проходящих через $l$, называют векторной трубкой, порожденной $l$.

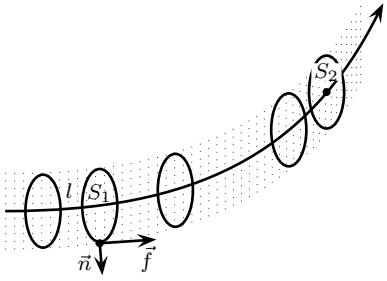



*Рис. 23.24.*

Рассмотрим векторную трубку, порожденную некоторой кривой $l$, и тело, ограниченное векторной трубкой и двумя ее сечениями $S_1$ и $S_2$ (см. рис. 23.24).

Боковую поверхность рассматриваемой части векторной трубки обозначим через $S$. И пусть $\operatorname{div} \vec{f} \equiv 0$ в $V \cup \partial V$, $\partial V = S_1 \cup S \cup S_2$.

По формуле Гаусса–Остроградского получаем

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds + \iint\limits_{S} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds + \iint\limits_{S_2} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{f}\, dV = 0.$$

Учитывая, что $\vec{f} \cdot \vec{n} \equiv 0$ на поверхности векторной трубки, получаем $\iint_S (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds = 0$, тогда

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds + \iint\limits_{S_2} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds = 0 \quad \text{или}$$

$$\iint\limits_{S_2} (\vec{f} \cdot \vec{n})\, ds = \iint\limits_{S_1} (\vec{f} \cdot \vec{n}_1)\, ds, \tag{23.89}$$

где $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ для сечения $S_1$.

Если же $\operatorname{div} \vec{f} \equiv 0$ на всем $X$, то (23.89) будет справедливо для любых сечений любой векторной трубки поля.

**Определение 23.10.** *Векторное поле $(X, \vec{f})$, для которого $\operatorname{div} \vec{f} \equiv 0$ на всем $X$, называют соленоидальным (трубчатым).*

Таким образом, в соленоидальном поле количество жидкости, протекающей через любое сечение векторной трубки, постоянно (для этой трубки).

**Определение 23.11.** *Ротором векторного поля $(X, \vec{f})$, где*

$$\vec{f} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k},$$

*называют векторную функцию, обозначаемую $\operatorname{rot} \vec{f}$ и определенную следующим равенством:*

$$\left(\operatorname{rot} \vec{f}\right)(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)\right)\vec{k}.$$

Если вспомнить формальное правило вычисления определителя третьего порядка, то

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема, носящая имя английского математика Д. Стокса (1819–1903), устанавливает связь между поверхностным и контурным интегралами.

**ТЕОРЕМА 23.10 (Теорема Стокса)**
Если координатные функции $P$, $Q$, $R$ векторного поля $(X, \vec{f})$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности $S$ $(\subset X)$, ограниченной замкнутым контуром $L$, то

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{n}\,ds, \tag{23.90}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности $S$, а направление обхода $L$ выбрано так, что для наблюдателя, находящегося в точке, соответствующей концу вектора $\vec{n}$, движение по контуру происходит против часовой стрелки (см. рис. 23.25).

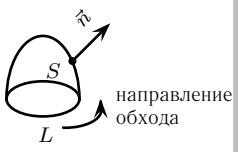


*Рис. 23.25.*

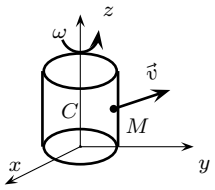


*Рис. 23.26.*

*ПРИМЕР 23.12.* Рассмотрим векторное поле скоростей абсолютно твердого кругового цилиндра $C$, равномерно вращающегося с угловой скоростью $\omega$ вокруг своей оси (см. рис. 23.26).

Пусть $M(x,y,z) \in C$. Ясно, что

$$\vec{v}(x,y,z) = -\omega y\,\vec{\imath} + \omega x\,\vec{\jmath} + 0\cdot\vec{k},$$

тогда

$$(\operatorname{rot}\vec{v})\,(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{pmatrix} = \omega\det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \omega\left(\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\vec{k}\right) = 2\omega\vec{k}.$$

$$|\operatorname{rot}\vec{v}| = 2\omega.$$

Мы показали, что длина вектора $\operatorname{rot}\vec{v}$ в этом случае равна удвоенной угловой скорости, с которой вращается цилиндр. Отсюда и происходит название «ротор» (rotation (англ.) — вращение).

Вернемся еще раз к формуле Стокса (23.90), в ее левой части стоит циркуляция поля по замкнутому контуру $L$, тогда формула (23.90) может быть записана в виде

$$\oint\limits_{L=\partial S} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_{S} \left(\operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{n}\right)\, ds. \tag{23.91}$$

Теорема Стокса означает, что циркуляция векторного поля по замкнутому контуру $L$ равна потоку ротора поля через поверхность $S$ $(\subset X)$, ограниченную контуром $L$.

В плоском случае формула Грина–Остроградского дала необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. В пространственном случае ключом к ответу на этот же вопрос служит теорема Стокса (теорема 23.10).

Имеют место следующие теоремы:

**ТЕОРЕМА 23.11**
Для того чтобы криволинейные интегралы

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

в некоторой области $X$ $(\in \mathbb{R}_3)$ не зависели от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в $X$, был равен нулю.

**ТЕОРЕМА 23.12**
Для того чтобы криволинейные интегралы

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

от вектор-функции $\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ векторного поля $(X,\vec{f})$, где $X$ — односвязная область в $\mathbb{R}_3$, не зависели от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{f} = 0$ на $X$.

Доказательство проводится с помощью теоремы Стокса, при этом имеет место полная аналогия с теоремой 23.6.

**Определение 23.12.** *Векторное поле* $(X,\vec{f})$ *называется безвихревым, если* $\operatorname{rot}\vec{f} \equiv 0$ *на* $X$.

Ясно, что если $(X,\vec{f})$ безвихревое поле, заданное на односвязной области $X$, то мы находимся в условиях теоремы Стокса.

По аналогии с криволинейным интегралом от скалярной функции вводится и поверхностный интеграл от скалярной функции (поверхностный интеграл первого рода).

Рассмотрим поверхность $S$ и функцию $f$, заданную на ней. Разобьем поверхность $S$ на куски $S_i$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим $\Delta S_i$ площадь куска $S_i$. $\xi_i$ — произвольная

внутренняя точка на $S_i$. Поверхностным интегралом от функции $f$ называют величину, обозначаемую $\iint_S f(x,y,z)\,ds$, и определяемую равенством

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \lim_{n\to\infty, d_n\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta S_i,$$

где $d_n$ — максимальный из диаметров кусков $S_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

## Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры задач, приводящих к понятиям: двойной, тройной интеграл.
2. Выпишите формулы для элементов площади $ds$ и объема $dV$ в различных системах координат.
3. Приведите примеры задач, приводящих к понятию «криволинейный интеграл».
4. Что такое скалярное поле и его градиент?
5. Что такое векторное поле и его циркуляция по замкнутому контуру?
6. При каких условиях на векторное поле криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования?
7. Какие задачи приводят к понятию «интеграл по поверхности»?
8. Что такое поток векторного поля через поверхность $S$?
9. Что такое дивергенция и ротор векторного поля и каков их физический смысл?

# XXIV
# РЯДЫ

В этой главе мы возвращаемся к числовым и функциональным последовательностям, но объектом нашего изучения будет не поведение общего члена последовательности (характер монотонности, наличие или отсутствие предела $\lim_{n\to\infty} a_n$). Рассматриваться будут фактически только последовательности, у которых $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и изучаться будет характер поведения последовательности частичных сумм

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

при $n \to \infty$.

## § 24.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

### 24.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

**Определение 24.1.** *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, числовым рядом называют выражение*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{24.1}$$

*5 при этом $a_1$, $a_2$, ... называют членами ряда, $a_1$ — первым, $a_2$ — вторым, ..., $a_n$ — $n$-ным (или общим) членом ряда.*

**Определение 24.2.** *Пусть нам задан ряд* (24.1)*, построим по нему последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, положив*

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots$$

*Эта последовательность называется последовательностью частичных сумм ряда* (24.1).

*ПРИМЕР 24.1.*

а) Рассмотрим ряд:

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

ясно, что его последовательность частичных сумм имеет вид

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 2, \quad \ldots, \quad S_n = n.$$

б) Рассмотрим ряд

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Ясно, что
$$S_1 = 1; \quad S_2 = 3; \quad S_3 = 6; \quad \ldots; \quad S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

в) Рассмотрим ряд
$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Его последовательность частичных сумм имеет вид: $S_1 = 1$; $S_2 = 0$; $S_3 = 1$; $S_4 = 0$; ..., т. е.
$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

г) Рассмотрим ряд
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Для него
$$S_1 = 1; \quad S_2 = 1\frac{1}{2}; \quad S_3 = 1\frac{3}{4}; \quad \ldots;$$
$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

д) Рассмотрим ряд
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для нахождения последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ заметим, что
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \tag{24.2}$$

Используя (24.2), получаем
$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$
$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3};$$
$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

В примерах 24.1, а, 24.1, б последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно растут и $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

В примере 24.1, в последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует.

В примере 24.1, г
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2.$$

В примере 24.1, д
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

**Определение 24.3.** *Числовой ряд называется сходящимся, если существует* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$ *(т. е. существует конечный предел последовательности* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *при* $n \to \infty$*), при этом* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ *называется суммой ряда и в этом случае пишут*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \tag{24.3}$$

*Ряды, не являющиеся сходящимися, называют расходящимися.*

Из рассмотренных примеров следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{n-1}$ является сходящимся и $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^{n-1} = 2$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\big(1/(n(n+1))\big)$ сходится (т. е. является сходящимся) и $\sum_{n=1}^{\infty}\big(1/(n(n+1))\big) = 1$.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ — расходящиеся.

### 24.1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — геометрическая прогрессия, т. е. заданы два числа $a_1$ и $q$ и

$$a_2 = a_1 \cdot q,\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,\ \ldots,\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ \ldots$$

Из курса школьной математики нам известно, что в этом случае

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}, & \text{если } q \neq 1, \\ a_1 \cdot n, & \text{если } q = 1. \end{cases} \tag{24.4}$$

Из формулы (24.4) следует, что

1) если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},$$

т. е. геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, образует сходящийся числовой ряд, сумма которого равна $\frac{a_1}{1-q}$;

2) если $|q| > 1$ и $a_1 \neq 0$, то геометрическая прогрессия образует расходящийся числовой ряд;

3) если $q = \pm 1$, $a_1 \neq 0$, геометрическая прогрессия образует расходящийся числовой ряд;

4) если $a_1 = 0$, то геометрическая прогрессия при любом $q$ образует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, который сходится, и $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

### 24.1.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

**ТЕОРЕМА 24.1**
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна $S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, где $\alpha$ — произвольное число, также сходится и его сумма равна $\alpha S$.

● Обозначим через $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а через $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$.

Ясно, что

$$\begin{aligned}
S'_1 &= \alpha a_1 &&= \alpha S_1;\\
S'_2 &= \alpha a_1 + \alpha a_2 = \alpha(a_1 + a_2) &&= \alpha S_2;\\
S'_3 &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 = \alpha(a_1 + a_2 + a_3) &&= \alpha S_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S'_n &= &&= \alpha S_n,
\end{aligned}$$

тогда из выписанных соотношений и условия теоремы получаем

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \alpha S_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S. \quad \bullet$$

*Следствие из теоремы 24.1.* Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, где $\alpha \neq 0$, сходятся или расходятся одновременно.

● Докажите самостоятельно. ●

**ТЕОРЕМА 24.2**

Пусть числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны соответственно $S$ и $S'$, тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится и его сумма равна $S + S'$.

● Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (a_1 + b_1) = a_1 + b_1 &&= S_1 + S'_1;\\
\sigma_2 &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) &&= S_2 + S'_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =\\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n + S'_n.
\end{aligned}$$

Из выписанных соотношений и условия теоремы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n + S'_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S'_n = S + S'. \quad \bullet$$

*Следствие из теорем 24.1 и 24.2.* Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют суммы $S$ и $S'$ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ сходится и его сумма равна $S - S'$.

● Это утверждение является тривиальным следствием теорем 24.1 и 24.2, так как $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$. ●

**Определение 24.4.** *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \tag{24.5}$$

*— числовой ряд. Говорят, что числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots \tag{24.6}$$

*получен из числового ряда* (24.5) *отбрасыванием первых* $k$, $k \in \mathbb{N}$ *членов, если* $b_1 = a_{k+1}$, $b_2 = a_{k+2}$, …, $b_n = a_{k+n}$, …, *т. е.*

$$b_1 + b_2 + \cdots = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots.$$

*(О ряде* (24.5) *говорят, что он получен дописыванием к ряду* (24.6) *первых* $k$ *членов.)*

**ТЕОРЕМА 24.3**
Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получен из числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отбрасыванием первых $k$ членов, тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости их суммы $S'$ и $S$ связаны соотношением

$$S' = S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k), \tag{24.7}$$

где $S$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S'$ — ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

● Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ясно, что

$$\begin{aligned}
S'_1 &= b_1 = a_{k+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) - \\
&\qquad -(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = S_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k); \\
S'_2 &= b_1 + b_2 = a_{k+1} + a_{k+2} = S_{k+2} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k); \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S'_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n = S_{n+k} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k).
\end{aligned} \tag{24.8}$$

Последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{S_{n+k}\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся или расходятся при $n \to \infty$ одновременно (и в случае сходимости $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+k}$). Последовательность $\{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\}_{n=1}^{\infty}$ не зависит от $n$ ($k$ фиксировано) и, значит, имеет предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Из сказанного и соотношения (24.8) следует справедливость утверждения теоремы. ●

*Замечание.* Теорему 24.3 иногда «грубо» формулируют следующим образом: «Отбрасывание или дописывание конечного числа первых членов числового ряда не влияет на его сходимость».

Следующая теорема и следствие из нее, несмотря на свою простоту и очевидность, чрезвычайно важны и полезны при исследовании числовых рядов на сходимость.

**ТЕОРЕМА 24.4 (Необходимое условие сходимости числового ряда)**
Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

● Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тогда

$$\begin{aligned}
a_1 &= S_1; \\
a_2 &= (a_2 + a_1) - a_1 = S_2 - S_1; \\
a_3 &= (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n &= (a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.
\end{aligned} \tag{24.9}$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (24.9) и учтем, что $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad ●$$

*Следствие (Достаточный признак расходимости ряда).* Если $a_n$ — общий член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся.

● *ПРИМЕР 24.2.* Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots.$$

Ясно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ является расходящимся.

Следующий пример показывает, что условие $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ является лишь необходимым, но не достаточным условием для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

● *ПРИМЕР 24.3.* Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

Ясно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Однако этот ряд не является сходящимся. Действительно,

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ слагаемых}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty,\quad\text{значит,}\quad\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty,$$

т. е. последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет конечного предела при $n\to\infty$.

## § 24.2. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ РЯДЫ

В этом параграфе мы будем изучать только ряды, у которых либо все члены положительны (знакоположительные ряды), либо все члены отрицательны (знакоотрицательные ряды). Знакоположительные ряды и знакоотрицательные ряды называют знакоопределенными. Основное внимание мы уделим изучению знакоположительных рядов, так как если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ знакоотрицательный, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)b_n$ — знакоположительный, а эти ряды сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости их суммы $S$ и $S'$ связаны соотношением $S=(-1)\cdot S'$. Это следует из теоремы 24.1 и следствия из нее.

Исследование знакоположительного ряда на сходимость–расходимость упрощается тем, что последовательность частичных сумм знакоположительного ряда является монотонно возрастающей последовательностью, действительно,

$$\begin{aligned}
S_2 &= a_1+a_2=S_1+a_2>S_1\ (\text{так как } a_2>0);\\
S_3 &= a_1+a_2+a_3=S_2+a_3>S_2\ (\text{так как } a_3>0);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_{n+1} &= a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=\\
&= S_n+a_{n+1}>S_n\ (\text{так как } a_{n+1}>0).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

В случае монотонно возрастающей последовательности возможны два случая:

а) она монотонно возрастает и не является ограниченной, тогда $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$, т. е. в этом случае знакоположительный числовой ряд является расходящимся;

б) последовательность $S_n$ ограничена и тогда по критерию Коши (см. гл. 16, т. 16.8) имеет предел и, значит, в этом случае знакоположительный ряд сходится.

Приведенные ниже достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов и выделяют ситуацию б) для последовательности частичных сумм ряда, т. е. гарантируют ее ограниченность.

**ТЕОРЕМА 24.5 (Признак сравнения)**
Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) — знакоположительны и существует такое $n_0 \geqslant 1$, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$a_n \leqslant b_n. \tag{24.10}$$

Тогда если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1), если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2) и в случае сходимости $S \leqslant S'$, где $S$ — сумма ряда (1), $S'$ — сумма ряда (2).

● Рассмотрим случай, когда $n_0 = 1$, т. е. когда неравенство (24.10) выполняется для всех $n$, начиная с единицы, т. е.

$$a_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant b_2,\ \ldots,\ a_n \leqslant b_n,\ \ldots \tag{24.11}$$

Пусть $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (1), $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (2).

Допустим, что ряд (2) сходится, тогда $\lim_{n\to\infty} S'_n = S'$ и последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастающая и

$$S'_n \leqslant S', \tag{24.12}$$

но тогда

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \overset{(24.11)}{\leqslant} b_1 + b_2 + \cdots + b_n = S'_n \tag{24.13}$$

также ограничена сверху. Действительно, из (24.12) и (24.13) следует

$$S_n \leqslant S'.$$

Ограниченность последовательности частичных сумм знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ доказана, и значит, доказана его сходимость. Переход к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве дает оценка $S \leqslant S'$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Тогда из (24.13) следует, что $\lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty$, а это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ в этом случае расходится.

Сведение случая $n_0 > 1$ к рассмотренному можно осуществить, применив к рядам $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ теорему 24.3 при $k = n_0 - 1$. ●

● *ПРИМЕР 24.4.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + |\sin n|}{2^{n+1}}.$$

● Ясно, что мы имеем дело со знакоположительным рядом. Оценим сверху общий член ряда:

$$\frac{1 + |\sin n|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Мы знаем, что геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$ (в нашем случае $q = \frac{1}{2}$), образует сходящийся ряд.

По признаку сравнения мы получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + |\sin n|}{2^{n+1}} \qquad \text{сходится.}$$ ●

*Замечание.* Для того чтобы эффективно применять признак сравнения, необходимо выработать навыки построения оценок

$$0 \leqslant a_n \leqslant \text{«общий член сходящегося ряда»}$$

или

$$0 \leqslant \text{«общий член расходящегося ряда»} \leqslant a_n$$

и иметь «достаточный» набор знакоположительных рядов, сходимость–расходимость которых известна.

Приводимые в этой книге примеры позволяют читателю обеспечить себе «минимально» необходимый набор таких рядов.

**ТЕОРЕМА 24.6 (Признак Коши)**
Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — знакоположительный ряд и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, тогда, если $r < 1$, ряд сходится, а если $r > 1$, ряд расходится. (В случае, когда $r = 1$, о сходимости–расходимости ряда никаких суждений сделать нельзя.)

● Рассмотрим случай $r < 1$. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1-r}{2}$. Тогда, по определению предела последовательности, существует $n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant r + \varepsilon. \tag{24.14}$$

Из (24.14) следует, что для $n \geqslant n_0 + 1$ выполнено

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant r + \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} q < 1. \tag{24.15}$$

Возводя (24.15) в степень $n$, получим, что для всех $n \geqslant n_0+1$ выполняется неравенство

$$a_n \leqslant q^n. \tag{24.16}$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $q$ таким, что $0 < q < 1$ образует сходящийся ряд. Значит, ряд $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ сходится. Из (24.16) по признаку сравнения (теорема 24.5) получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Рассмотрим теперь случай, когда $r > 1$. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{r-1}{2}$, по определению предела последовательности существует $n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполнено неравенство (24.14), из которого следует, что для всех $n \geqslant n_0 + 1$ справедливо

$$q_1 = r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{a_n} \tag{24.17}$$

и $q_1 > 1$. Возводя (24.17) в степень, получаем

$$q_1^n \leqslant a_n. \tag{24.18}$$

Последнее неравенство справедливо для всех $n \geqslant n_0 + 1$.

Геометрическая прогрессия со знаменателем $q_1 > 1$ образует расходящийся ряд. Значит ряд $1 + q_1 + q_1^2 + q_1^3 + \cdots$ расходится, тогда из неравенства (24.18) по признаку сравнения получаем, что исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ●

● *ПРИМЕР 24.5.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sin n}.$$

● Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + \sin n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + \frac{\sin n}{2^n}}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит, ряд сходится. ●

Докажите самостоятельно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{\sin n}{2^n}}}=1$.

**ТЕОРЕМА 24.7 (Признак Даламбера[1])**
Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ знакоположительный ряд и существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d,$$

тогда, если $d<1$, ряд сходится, а если $d>1$, ряд расходится. (В случае, когда $d=1$, никаких суждений о сходимости–расходимости ряда сделать нельзя.)

● Рассмотрим случай, когда $d<1$.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon$, удовлетворяющее неравенству

$$0<\varepsilon<\frac{1-d}{2}. \tag{24.19}$$

Из определения предела последовательности следует, что существует такое $n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$, что для всех номеров $n\geqslant n_0+1$ выполнено неравенство

$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-d<\varepsilon. \tag{24.20}$$

Из (24.20) получаем, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<d+\varepsilon=q<1 \tag{24.21}$$

для всех $n\geqslant n_0+1$. Тогда

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}<q;\quad \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}<q;\quad \frac{a_{n_0+4}}{a_{n_0+3}}<q;\quad \dots \tag{24.22}$$

Из неравенств (24.22) получаем

$$a_{n_0+2}\leqslant a_{n_0+1}\cdot q;\ a_{n_0+3}\leqslant a_{n_0+2}\cdot q;\ a_{n_0+4}\leqslant a_{n_0+3}\cdot q;\ \dots \tag{24.23}$$

Из транзитивного свойства неравенств получаем

$$a_{n_0+3}\leqslant qa_{n_0+2}\leqslant q^2a_{n_0+1};\ a_{n_0+4}\leqslant qa_{n_0+3}\leqslant q^2a_{n_0+2}\leqslant q^3a_{n_0+1};\ \dots \tag{24.24}$$

Рассмотрим два ряда:

$$a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+a_{n_0+3}+a_{n_0+4}+\cdots; \tag{24.25}$$
$$a_{n_0+1}+qa_{n_0+1}+q^2a_{n_0+1}+q^3a_{n_0+1}+\cdots \tag{24.26}$$

Геометрическая прогрессия со знаменателем $0\leqslant q<1$ образует сходящийся ряд, и значит, ряд (24.26) сходится, тогда по признаку сравнения ряд (24.25) сходится.

Ряд (24.25) получен из исходного ряда отбрасыванием первых $n_0$ членов и тоже сходится.

[1] Даламбер Жан Лерон (1717–1783) — французский математик, механик, философ, член Парижской АН (1741), Петербургской АН (1764) и др. академий. В 1739–1740 гг. подал в Парижскую АН два трактата о движении твердых тел в жидкостях и интегральном исчислении. В трактате о динамике (1743) Даламбер сформулировал один из основных принципов механики — принцип Даламбера. Работы Даламбера, Л. Эйлера и Д. Бернулли заложили основы математической физики.

Доказательство расходимости ряда в случае $d > 1$ аналогично доказательству расходимости ряда в теореме 24.6 при $r > 1$, при этом признак сравнения применяется к паре рядов

$$a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + a_{n_0+4} + \cdots; \tag{24.27}$$

$$a_{n_0+1} + q_1 a_{n_0+1} + q_1^2 a_{n_0+1} + q_1^3 a_{n_0+1} + \cdots, \tag{24.28}$$

где $q_1 = d + \varepsilon > 1$. ●

● *ПРИМЕР 24.6.* Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

● Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!\, 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится. ●

Сейчас мы приведем очень красивый достаточный признак сходимости знакоположительных рядов, использующий связь между частичными суммами ряда и несобственным интегралом от монотонно убывающей функции.

**ТЕОРЕМА 24.8 (Интегральный признак Коши)**
Если члены знакоположительного ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ являются значениями положительной монотонно убывающей непрерывной на $[1, +\infty)$ функции $f$, т. е.

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \ldots,$$

то в случае, когда $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится, а в случае, когда $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ также расходится.

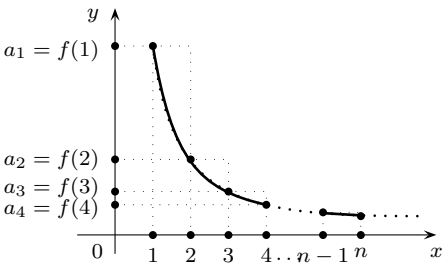



*Рис. 24.1.*

● Представим себе график функции $f(x)$ (см. рис. 24.1).

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком $y = f(x)$ и прямыми $y = 0;\ x = 1;\ x = n$.

Образуем с ее помощью две ступенчатые фигуры, составленные из прямоугольников. Первая состоит из прямоугольников, имеющих основаниями сегменты $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $\ldots$, $[n-1,n]$, а высотами — $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(n-1)$ соответственно; вторая имеет основаниями прямоугольников сегменты $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $\ldots$, $[n-1,n]$, а высотами — $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $\ldots$, $f(n)$ соответственно. Первая ступенчатая фигура для криволинейной трапеции является описанной, а вторая — вписанной. Значит,

$$S_{\text{впис. ступ. фиг.}} < S_{\text{кр. трап.}} < S_{\text{опис. ступ. фиг.}}. \tag{24.29}$$

Ясно, что $S_{\text{кр. трап.}} = \int_1^n f(x)\,dx$. Вычислим площади ступенчатых фигур:

$$S_{\text{впис. ступ. фиг.}} = f(2)\cdot(2-1) + f(3)\cdot(3-2) + \cdots + \\ + f(n)\cdot(n-(n-1)) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = \\ = a_2 + a_3 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - a_1 = S_n - a_1. \quad (24.30)$$

Здесь $S_n$ — $n$-я частичная сумма ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

$$S_{\text{опис. ступ. фиг.}} = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(n-1)\cdot 1 = \\ = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1} = S_n - a_n. \quad (24.31)$$

Из (24.29), (24.30), (24.31) получаем

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - a_n. \quad (24.32)$$

Из (24.32) получаем

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)\,dx, \quad (24.33)$$

$$S_n > a_n + \int_1^n f(x)\,dx > \int_1^n f(x)\,dx. \quad (24.34)$$

Рассмотрим случай, когда $\int_1^\infty f(x)\,dx$ сходится. Это означает, что существует $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = I,\ I\in\mathbb{R}$.

Так как функция $f(x) > 0$, то $I(n) = \int_1^n f(x)\,dx$ образуют монотонно возрастающую последовательность. Значит,

$$I(n) \leqslant I. \quad (24.35)$$

Из (24.33) и (24.35) получаем, что

$$S_n < a_1 + I. \quad (24.36)$$

Таким образом, доказана ограниченность последовательности частичных сумм ряда, а нам известно (см. начало §24.2), что для знакоположительных рядов этого достаточно для сходимости.

Если $\int_1^\infty f(x)\,dx$ расходится, то в нашем случае ($f(x)$ — монотонно убывающая непрерывная положительная функция) это возможно только, когда $I(n) = \int_1^n f(x)\,dx$ — неограниченно возрастающая последовательность.

Из неравенства (24.34) следует, что тогда и последовательность $S_n$ не является ограниченной, а в случае знакоположительного ряда из этого следует его расходимость. ●

В качестве приложения доказанного признака исследуем на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Ясно, что при $\alpha \leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю и для ряда не выполнено необходимое условие сходимости (теорема 24.4), и значит, в этом случае обобщенный гармонический ряд расходится.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < \alpha < 1$. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Рассмотрим

$$I(n) = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Из этого следует, что $\lim_{n\to\infty} I(n) = +\infty$, значит, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится. Тогда по интегральному признаку Коши получаем, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ расходится.

При $\alpha = 1$ мы имеем дело с рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

называемым гармоническим. Применим к нему интегральный признак Коши:

$$I(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n, \qquad \lim_{n\to\infty} I(n) = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty.$$

Значит, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ расходится, а это означает расходимость гармонического ряда.

В случае, когда $\alpha > 1$, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и это по интегральному признаку означает сходимость при $\alpha > 1$ обобщенного гармонического ряда.

## § 24.3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В этом параграфе мы перейдем от изучения знакопостоянных рядов к рядам знакопеременным. Простейшими из них являются знакочередующиеся ряды, т. е. такие ряды, у которых любые два соседних члена имеют противоположные знаки.

Ясно, что ряд

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

является знакочередующимся.

Пусть $\sum_{n=1}^\infty a_n$ — знакочередующийся ряд и $a_1 > 0$, тогда его можно записать в виде $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}|a_n|$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ — знакоположителен.

Если ряд $\sum_{n=1}^\infty b_n$ знакоположителен, то ряд $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} b_n$ — знакочередующийся.

Поэтому запись $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} b_n$, где $\sum_{n=1}^\infty b_n$ — знакоположительный, называют общим видом знакочередующегося ряда.

*Замечание.* Фактически, общий вид знакочередующегося ряда охватывает только знакочередующиеся ряды, начинающиеся с положительного члена, но этого достаточно для изучения их сходимости–расходимости в общем случае, так как знакочередующиеся ряды с первым отрицательным членом получаются из знакочередующихся рядов с первым положительным членом умножением на $-1$.

Наиболее распространенным и широко применяемым достаточным признаком сходимости знакочередующегося ряда является признак Лейбница.

**ТЕОРЕМА 24.9 (Признак Лейбница)**
Если в знакочередующемся ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n > 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{24.37}$$

последовательность абсолютных величин его членов убывает, т. е.

$$b_1 > b_2 > b_3 \ \ldots \tag{24.38}$$

и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд (24.37) сходится, причем его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.

● Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда с четными номерами:

$$S_{2k} = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k} = \\ = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2k-1} - b_{2k}).$$

В силу условия (24.38) все «скобки» в последнем равенстве положительны, и значит, последовательность $S_{2k}$ положительна и монотонно возрастает по $k$.

С другой стороны,

$$S_{2k} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k} = \\ = b_1 - [(b_2 - b_3) + (b_4 - b_5) + \cdots + (b_{2k-2} - b_{2k-1}) + b_{2k}]. \quad (24.39)$$

В силу положительности «круглых скобок» и того, что $b_{2k} > 0$, получаем, что сумма, стоящая в квадратных скобках, положительна. Тогда, отбрасывая «квадратную скобку», получаем

$$S_{2k} < b_1. \quad (24.40)$$

Последнее означает ограниченность сверху последовательности $S_{2k}$, ранее мы доказали, что $S_{2k}$ монотонно возрастает, и значит, по теореме Больцано–Вейерштрасса имеет предел.

Пусть $S = \lim_{k\to\infty} S_{2k}$. Из (24.40) следует, что

$$S \leqslant b_1. \quad (24.41)$$

Рассмотрим теперь последовательность частичных сумм исходного ряда с нечетными номерами:

$$S_{2k+1} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k} + b_{2k+1} = \\ = (b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k}) + b_{2k+1} = S_{2k} + b_{2k+1}. \quad (24.42)$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (24.42), учитывая при этом, что по условию теоремы $\lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} + b_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = S + 0 = S.$$

Из доказанного следует, что существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, а оценка (24.41) показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant b_1. \quad ●$$

Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичный признак для знакочередующихся рядов с отрицательным первым членом.

● *ПРИМЕР 24.7.* В качестве примера на применение признака Лейбница рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Ясно, что это — знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, поэтому этот ряд является сходящимся (в отличие от гармонического ряда).

Следующий признак показывает, что для сходимости знакопеременного ряда достаточно сходимости ряда из абсолютных величин его членов.

**ТЕОРЕМА 24.10**
Если знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходятся знакочередующиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$.

● Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} b_n + b_n}{2}. \tag{24.43}$$

Ясно, что

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ b_n, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

но тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n. \tag{24.44}$$

Ясно, что признак сравнения, сформулированный для знакоположительных рядов, справедлив и для рядов, для которых выполнено неравенство (24.44), тогда из сходимости ряда $\sum b_n$ следует сходимость ряда (24.43).

Умножая все члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ на $1/2$, получим сходящийся ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}. \tag{24.45}$$

Рассмотрим ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (24.43) и (24.45):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n b_n + b_n}{2} - \frac{b_n}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{2}. \tag{24.46}$$

Ряд, стоящий в правой части (24.46), является сходящимся, как разность сходящихся рядов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ получается из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} b_n}{2}$ умножением на 2 и, значит, тоже сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ получается из ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ умножением на $-1$ и, значит, тоже сходится. ●

*Замечание.* То, что последний признак является лишь достаточным (из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ не следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$), следует из примера 24.7 и того факта, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Приведенное замечание наводит на мысль о том, что существует два типа сходимости знакопеременных рядов.

**Определение 24.5.** *Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Из теоремы 24.10 следует, что если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он является сходящимся рядом.

**Определение 24.6.** *Знакопеременный сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.*

Ясно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ является абсолютно сходящимся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ является условно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды отличаются от условно сходящихся поведением суммы ряда, а именно, имеет место теорема:

**ТЕОРЕМА 24.11**
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из него перестановкой его членов, сходится абсолютно и суммы этих рядов совпадают.

Для условно сходящихся рядов это свойство не имеет места. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{24.47}$$

Переставим его члены так, чтобы порядок расположения положительных членов друг относительно друга не менялся, но после каждого положительного члена следовали бы подряд два отрицательных. В результате получим ряд:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\cdots \tag{24.48}$$

Обозначим частичные суммы ряда (24.47) $S_n$, а ряда (24.48) — $S'_n$. Найдем значения $S_2,\ S_4,\ S_6,\ \ldots$ и $S'_3,\ S'_9,\ \ldots$:

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\\
S'_3 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\frac{S_2}{2};\\
S_4 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12};\\
S'_6 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{24}=\frac{S_4}{2};\\
S_6 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60};\\
S'_9 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{37}{120}=\frac{S_6}{2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Можно показать, что

$$S'_{3k}=\frac{1}{2}S_{2k}. \tag{24.49}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в равенстве (24.49), получаем

$$\lim_{k\to\infty}S'_{3k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\frac{1}{2}S, \tag{24.50}$$

где $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Далее,

$$\lim_{k\to\infty} S'_{3k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(S'_{3k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \\ = \lim_{k\to\infty} S'_{3k} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}S + 0 = \frac{1}{2}S;$$

$$\lim_{k\to\infty} S'_{3k+2} = \lim_{k\to\infty}\left(S'_{3k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) = \\ = \lim_{k\to\infty} S'_{3k+1} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4k+2} = \frac{1}{2}S - 0 = \frac{1}{2}S.$$

Из доказанного следует, что $\lim_{n\to\infty} S'_n$ существует и $\lim_{n\to\infty} S'_n = \frac{1}{2}S$.

Мы показали, что ряд, полученный из исходного в результате указанной перестановки, является сходящимся, но его сумма равна половине суммы исходного ряда.

## § 24.4. ОСТАТОК РЯДА И ЕГО ОЦЕНКА

Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это означает (определение 24.3), что последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел $S$, называемый суммой ряда. Для больших $n$ $S_n \approx S$.

**Определение 24.7.** *$n$-ным остатком сходящегося ряда называется разность между суммой ряда и его $n$-й частичной суммой. $n$-й остаток обозначают $r_n$, т. е.*

$$r_n \stackrel{\text{def}}{=} S - S_n. \tag{24.51}$$

*Ясно, что $r_n$ представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из исходного ряда отбрасыванием его первых $n$ членов, т. е.*

$$r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

Из определения суммы сходящегося ряда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Из равенства $|S_n - S| = |r_n|$ следует, что $|r_n|$ — это абсолютная погрешность при замене $S$ на $S_n$.

Поэтому, если мы хотим найти значение суммы ряда с точностью до $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, заменяя сумму $S$ на $S_n$, необходимо и достаточно найти такой номер $n_0$, для которого

$$|r_{n_0}| < \varepsilon.$$

**ТЕОРЕМА 24.12 (Оценка остатка ряда с неотрицательными членами)**
Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящиеся ряды и для любого натурального $n$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

тогда

$$r_n \leqslant r'_n, \tag{24.52}$$

где $r_n$ — $n$-й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $r'_n$ — $n$-й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

● $r_n$ и $r'_n$ это суммы сходящихся рядов $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i$, удовлетворяющих условию признака сравнения (теорема 24.5), из утверждения этой теоремы следует, что

$$r_n \leqslant r'_n. \quad \bullet$$

Приведем пример эффективного применения этой теоремы.

● *ПРИМЕР 24.8.* Оценить сверху $n$-й остаток ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

● Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Ясно, что $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ при всех натуральных $n$, тогда по теореме 24.12 получаем

$$r_n \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \bullet$$

**ТЕОРЕМА 24.13**
Если знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то

$$|r_n| \leqslant r'_n, \tag{24.53}$$

где $r'_n$ — $n$-й остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

● ●

● *ПРИМЕР 24.9.* Оценить $n$-й остаток ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}.$$

● Ясно, что ряд сходится абсолютно, так как

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos n}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится. Оценим

$$|r_n| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|\frac{\cos i}{3^i}\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\cos i|}{3^i} \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3^{n+1}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}. \quad \bullet$$

**ТЕОРЕМА 24.14**
Если знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (теорема 24.9), то

$$|r_n| \leqslant |a_{n+1}|. \tag{24.54}$$

● $n$-й остаток такого ряда сам является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям теоремы Лейбница. В этой теореме было показано, что если ряд начинается с положительного члена, то $S \leqslant a_1$. Если снять условие положительности первого члена, то

$$|S| \leqslant |a_1|.$$

Применяя это утверждение к остатку ряда, получаем

$$|r_n| \leqslant |a_{n+1}|. \qquad \bullet$$

● *ПРИМЕР 24.10.* Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

● Этот ряд сходится по признаку Лейбница, тогда

$$|r_n| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

тогда $n$ является наименьшим натуральным решением неравенства

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{100} \quad \Longrightarrow \quad n_0 = 99.$$

Как видно, рассматриваемый ряд сходится «медленно». ●

## § 24.5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

В этом параграфе мы рассмотрим ряды, членами которых являются не числа, а числовые функции.

**Определение 24.8.** *Пусть* $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность функций* $a_n(x)$, *определенных на множестве* $X$ $(\subset \mathbb{R})$. *Функциональным рядом, заданным на* $X$, *называют выражение*

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x). \tag{24.55}$$

**Определение 24.9.** *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ — *функциональный ряд, заданный на* $X$, *говорят, что функциональный ряд сходится (расходится) в точке* $x_0 \in X$, *если сходится (расходится) числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0).$$

*Множество всех точек множества* $X$, *в которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

Частичные суммы функционального ряда являются функциями, определенными на его области сходимости. Для них применяют обычно следующее обозначение:

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x).$$

В каждой точке $x_0$ из области сходимости функционального ряда существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} S(x_0). \tag{24.56}$$

$S(x_0)$ называется суммой функционального ряда в точке $x_0$. Таким образом, равенство (24.56) определяет $S(x)$ — сумму функционального ряда как функцию, определенную на области сходимости функционального ряда. $n$-й остаток функционального ряда — $r_n(x)$, определенный следующим образом:

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x), \tag{24.57}$$

также является функцией, определенной на области сходимости, и представляет собой сумму ряда, полученного из исходного отбрасыванием первых $n$ членов.

● *ПРИМЕР 24.11.* Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

● Этот ряд образован геометрической прогрессией с $q(x) = x$. Значит, если $|q(x)| < 1$, ряд сходится, а при $|q(x)| \geqslant 1$ ряд расходится. Таким образом, область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ — это интервал $(-1, 1)$. ●

Существует довольно тонкое понятие равномерной сходимости функционального ряда на множестве $X'$ $(\subset X)$. Мы ограничимся более простым понятием правильной сходимости функционального ряда на $[a, b]$, являющимся частным случаем понятия равномерной сходимости.

**Определение 24.10.** *Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, определенный на $X$, называется правильно сходящимся на $[a, b]$ $(\subset X)$, если существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что для любого натурального числа $n$ и $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|a_n(x)| \leqslant b_n. \tag{24.58}$$

Этот числовой ряд называется мажорирующим. Ясно, что из признака сравнения для знакоположительных числовых рядов (теорема 24.5) следует

**ТЕОРЕМА 24.15**
Если функциональный ряд правильно сходится на $[a, b]$, то он абсолютно сходится в каждой точке из $[a, b]$.

Приведем без доказательства несколько теорем, которые показывают, что правильно сходящиеся функциональные ряды являются аналогом суммы конечного числа функций.

**ТЕОРЕМА 24.16**
Если члены правильно сходящегося на $[a,b]$ функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ являются непрерывными на $[a,b]$ функциями, то сумма ряда $S(x)$ является непрерывной на $[a,b]$ функцией.

**ТЕОРЕМА 24.17**
Если члены правильно сходящегося на $[a,b]$ функционального ряда являются интегрируемыми на $[a,b]$ функциями, то ряд можно почленно интегрировать, т. е. для любого $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ имеет место равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1} a_n(x)\,dx. \tag{24.59}$$

**ТЕОРЕМА 24.18**
Пусть функциональный ряд сходится на $[a,b]$, имеет сумму $S(x)$ и его члены имеют непрерывные на $[a,b]$ производные — $a'(x)$. Тогда если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ правильно сходится на $[a,b]$, то $S(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и имеет место равенство

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x). \tag{24.60}$$

**ТЕОРЕМА 24.19**
Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ правильно сходится на $[a,b]$ и функция $\beta(x)$ ограничена на $[a,b]$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\beta(x)a_n(x)$ правильно сходится на $[a,b]$ и для суммы $S(x)$ функционального ряда имеет место равенство

$$\beta(x)\cdot S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta(x)a_n(x).$$

● Пусть

$$M=\max_{x\in[a,b]}|\beta(x)|$$

и сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является мажорирующим для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, тогда сходящийся знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M\,b_n$ является мажорирующим для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\beta a_n(x)$. ●

Применением результатов теорем 24.17– 24.19 мы займемся в следующем параграфе.

## § 24.6. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды — наиболее простые и часто применяемые из функциональных рядов. Они обобщают понятие «многочлен одной переменной», наследуют многие свойства многочленов, но и во многом отличаются от них.

### 24.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА. РАДИУС СХОДИМОСТИ

**Определение 24.11.** *Степенным рядом по степеням* $(x-a)$ *называют функциональный ряд следующего вида:*

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \qquad (24.61)$$

При $a=0$ мы получаем степенной ряд по степеням $x$:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \qquad (24.62)$$

Ясно, что замена переменной $x-a=t$ превращает степенной ряд по степеням $x-a$ в степенной ряд по степеням $t$. Поэтому мы подробно изучим только степенные ряды по степеням переменной (24.62).

Основным вопросом при изучении степенных рядов является вопрос о множестве сходимости ряда и о его свойствах на множестве сходимости.

При $x=0$ мы из ряда (24.62) получаем сходящийся числовой ряд:

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 + \cdots = a_0.$$

Из этого простого факта следует, что множество сходимости любого степенного ряда непусто.

Ответ на вопрос о том, что из себя представляет множество сходимости степенного ряда, дает теорема Абеля[2]:

**ТЕОРЕМА 24.20**
Если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке $x$, такой, что $|x| < |x_1|$, если степенной ряд расходится в точке $x_2$, то он расходится в любой точке $x$, такой, что $|x| > |x_2|$.

● Пусть числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_1^n$ сходится, тогда по необходимому признаку сходимости числового ряда (теорема 24.4) $\lim_{n\to\infty} a_nx_1^n = 0$, но тогда по свойству числовой

[2] Абель Нильс Хенрик (1802–1829) — норвежский математик, обучался в университете Христиании (Осло). В 1824 г. опубликовал доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени. С 1825 по 1827 гг. жил в Берлине и Париже. Труды Абеля, опубликованные в 1826 г., не принесли ему известности и материальных благ. Абель жил в нужде и существовал, давая частные уроки. В 1830 г. Парижская АН посмертно присудила Абелю премию за развитие теории эллиптических функций. Абель — один из основателей теории алгебраических функций.

последовательности, имеющей предел, последовательность $\{a_n x_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена (теорема 16.6), т. е. существует $M$ такое, что $|a_n x_1^n| \leqslant M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Но тогда если $|x| < |x_1|$, то

$$|a_n x^n| = \left| a_n \left( \frac{x}{x_1} x_1 \right)^n \right| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leqslant M q^n,$$
$$\text{где } q = \frac{|x|}{|x_1|} < 1.$$

Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится (геометрическая прогрессия со знаменателем $q$, $|q| < 1$). По признаку сравнения ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n|$ сходится, а это и означает абсолютную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Докажем теперь, что если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ расходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не может сходиться ни для одного $x$ такого, что $|x| > |x_2|$.

Действительно, предположим противное, т. е. что существует хотя бы одно такое значение $x_3$, что $|x_3| > |x_2|$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ сходится. По доказанному в первой части теоремы из сходимости числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в каждой точке $x$ такой, что $|x| < |x_3|$, и значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ должен абсолютно сходиться, а из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Последнее утверждение (о сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$) противоречит условию теоремы (расходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$). ●

Доказанная теорема позволяет сделать вывод о том, что множество сходимости ряда (24.62) может:

а) состоять из одной точки 0;

б) содержать интервал $(-R, R)$ такой, что для любого $x$, удовлетворяющего неравенству $|x| > R$ (т. е. $x \notin [-R, R]$), ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится;

в) совпадать со всей числовой осью — $(-\infty; \infty)$.

В первом случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен 0, во втором случае $R$ называют радиусом сходимости, в третьем случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен $\infty$. Во всех этих случаях радиус сходимости ряда обозначают $R$, а множество $(-R, R)$ называют интервалом сходимости.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин членов степенного ряда (24.62):

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + |a_3| \cdot |x|^3 + \cdots + |a_n| \, |x|^n + \cdots \tag{24.63}$$

Попробуем применить к ряду (24.63) признак Коши (теорема 24.6):

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{24.64}$$

Предположим, что существует

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q, \qquad 0 < Q < \infty. \tag{24.65}$$

Тогда по признаку Коши, если $|x| \cdot Q < 1$, ряд (24.63) сходится, а если $|x| \cdot Q > 1$, ряд (24.63) расходится и его общий член не стремится к нулю.

Случаи $|x| \cdot Q = 1$ (т. е. $x = \pm \frac{1}{Q}$) нуждаются в отдельном рассмотрении.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 24.21**
Если коэффициенты степенного ряда (24.62) ((24.61)) таковы, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q,$$

и $0 < Q < \infty$, то радиус сходимости $R$ степенного ряда (24.62) ((24.61)) вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{Q}.$$

См. выше.

Попробуем к ряду (24.63) применить признак Даламбера (теорема 34), тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Предположим, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \mathcal{D} \qquad \text{и} \qquad 0 < \mathcal{D} < \infty, \tag{24.66}$$

тогда, если $|x| \cdot \mathcal{D} < 1$, ряд (24.63) сходится (а вместе с ним и ряд (24.62)), а если $|x| \cdot \mathcal{D} > 1$, ряд (24.63) расходится и его общий член не стремится к нулю при $n$, стремящемся к бесконечности.

Таким образом, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 24.22**
Если коэффициенты степенного ряда (24.62) ((24.61)) таковы, что существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \mathcal{D} \quad \text{и} \quad 0 < \mathcal{D} < \infty,$$

то радиус сходимости степенного ряда (24.62) ((24.61)) вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{\mathcal{D}}.$$

См. выше.

*Замечание.* Ясно, что если к степенному ряду применимы и теорема 24.21 и теорема 24.22, то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Еще раз напомним, что означает, что радиус сходимости степенного ряда равен $R$:

1. Если $R = 0$, то множество сходимости степенного ряда (24.62) состоит из одной точки $x = 0$.
2. Если $R = \infty$, то степенной ряд сходится во всех точках числовой оси.

3. Если $0 < R < \infty$, то поведение ряда (24.62) по характеру сходимости иллюстрирует рис. 24.2.

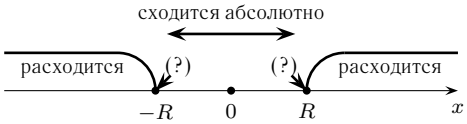



*Рис. 24.2.*

Для вычисления радиуса сходимости $R$ степенного ряда (24.62) ((24.61)) мы получили формулы Коши и Даламбера (соответственно):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}; \tag{24.67}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{24.68}$$

● *ПРИМЕР 24.12.* Найти радиус и множество сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

● Найдем радиус сходимости ряда.

●$_1$ Применим формулу Коши (24.67):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

●$_2$ Применим формулу Даламбера (24.68):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Нам осталось изучить поведение ряда при $x = -2$ и $x = 2$.

При $x = -2$ мы получаем расходящийся ряд

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n + \cdots,$$

так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$.

При $x = 2$ мы получаем расходящийся ряд

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \quad ●$$

● *ПРИМЕР 24.13.* Найти радиус и множество сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

● Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+2)} = 0 < 1$$

при любом значении $x$, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ сходится на всей числовой оси, тогда исходный ряд сходится абсолютно в любой точке числовой оси и $R = \infty$. ●

### 24.6.2. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим степенной ряд (24.62) и степенные ряды, полученные из него почленным дифференцированием и интегрированием:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \tag{24.69}$$

$$a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)}x^{n+1} + \cdots \tag{24.70}$$

Допустим, что для ряда (24.62) существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

По теореме 24.22 это означает, что его радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Применим формулу Даламбера для нахождения $R_{\text{диф.}}$ — радиуса сходимости ряда (24.69):

$$R_{\text{диф.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|a_{n+1}|}{(n+2)\,|a_{n+2}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_{n+2}|} = 1 \cdot R = R.$$

Применим теперь формулу Даламбера для нахождения $R_{\text{инт.}}$ — радиуса сходимости ряда (24.70):

$$R_{\text{инт.}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\,|a_{n-1}|}{n \cdot |a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = 1 \cdot R = R.$$

Мы показали, что при условиях, когда для нахождения радиуса сходимости применима формула Даламбера, имеет место равенство

$$R = R_{\text{диф.}} = R_{\text{инт.}}. \tag{24.71}$$

Оказывается (мы примем это без доказательства), имеет место следующая

**ТЕОРЕМА 24.23**
Степенной ряд (24.62) и степенные ряды, полученные из него почленным дифференцированием (24.69) и почленным интегрированием (24.70), имеют одинаковые радиусы сходимости.

*Замечание.* Заметим, что действие этой теоремы можно «расширить», продифференцировав почленно ряд (24.69) и проинтегрировав почленно ряд (24.70) и т. д.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о поведении степенного ряда внутри интервала сходимости.

**ТЕОРЕМА 24.24**
Пусть $R\ (>0)$ — радиус сходимости степенного ряда (24.62) и $r$ удовлетворяет неравенству

$$0 < r < R,$$

тогда на множестве $[-r, r]$ степенной ряд (24.62) правильно сходится.

● Как известно (теорема 24.20), степенной ряд сходится абсолютно в любой точке интервала сходимости, поэтому в точке $x = r$ знакоположительный ряд

$$|a_0| + |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n + \cdots$$

сходится.

Если $x \in [-r, r]$, то $|x| \leqslant r$, поэтому для членов ряда

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |x|^n + \cdots$$

справедлива оценка

$$|a_n| \cdot |x|^n \leqslant |a_n| \cdot r^n,$$

а это и означает правильную сходимость ряда (24.62) на множестве $[-r, r]$. ●

Из доказанной теоремы, теоремы 24.16 и того, что $x^n$ — непрерывная на $(-\infty, \infty)$ функция при любом $n \in \mathbb{N}$, получаем, что справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 24.25**
Сумма степенного ряда (24.62) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости $(-R, R)$.

● Действительно, для любой точки $x \in (-R, R)$ существует $r$ такое, что $0 < r < R$ и $x \in [-r, r]$, но тогда по теореме 24.24 степенной ряд правильно сходится на $[-r, r]$ и по теореме 24.16 его сумма непрерывна на $[-r, r]$, в том числе и в точке $x$. ●

**ТЕОРЕМА 24.26**
$S(x)$ — сумма степенного ряда (24.62) — является дифференцируемой функцией на интервале сходимости степенного ряда, и для любой точки $x \in (-R, R)$ справедлива формула

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}. \tag{24.72}$$

● Какова бы ни была точка $x \in (-R, R)$, существует $r$ такое, что $0 < r < R$ и $x \in [-r, r]$. По теореме 24.24 степенной ряд правильно сходится на $[-r, r]$, но тогда по теореме 24.17 его можно почленно дифференцировать в каждой точке $x \in [-r, r]$ и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 24.27**
$S(x)$ — сумма степенного ряда (24.62) — является интегрируемой функцией на любом сегменте $[x_1, x_2]$, лежащем внутри его интервала сходимости, и для любых $x_1$, $x_2$ таких, что $-R < x_1 \leqslant x_2 < R$, справедливо равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n\,dx. \tag{24.73}$$

● Выберем $r$ такое, что $0 < r < R$ и

$$[x_1, x_2] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$

По теореме 24.24 степенной ряд правильно сходится на $[-r, r]$, тогда по теореме 24.18 его можно почленно интегрировать по любому интервалу $[x_1, x_2] \subset [-r, r]$ и имеет место равенство (24.73). ●

**ТЕОРЕМА 24.28**
$S(x)$ — сумма степенного ряда (24.62) — является бесконечно дифференцируемой функцией в каждой точке его интервала сходимости $(-R, R)$.

● Эта теорема является следствием теорем 24.23, 24.26 и замечания, следующего за теоремой 24.23. ●

Прежде чем мы перейдем к применению полученных результатов, еще раз напомним, что они применимы и к рядам по степеням $(x - a)$.

## § 24.7. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Пусть $f(x)$ — сумма степенного ряда, т. е.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots \tag{24.74}$$

Равенство (24.74) справедливо на $(a - R, a + R)$ — интервале сходимости ряда.

Какова связь между функцией $f(x)$ и коэффициентами степенного ряда?

Полагая в равенстве (24.74) $x = a$, получаем

$$f(a) = a_0. \tag{24.75}$$

Дифференцируя последовательно равенство (24.74) на множестве $(a - R, a + R)$ и учитывая теоремы 24.23 и 24.26, справедливые на $(a - R, a + R)$, получаем

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \cdots + na_n(x - a)^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot a_4(x - a)^2 + \cdots \\
&\qquad \cdots + (n - 1) \cdot n \cdot a_n(x - a)^{n-2} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x) &= n!\,a_n + 2 \cdot 3 \ldots (n + 1)a_{n+1}(x - a) + \cdots
\end{aligned} \tag{24.76}$$

Полагая в (24.76) $x = a$ и учитывая (24.75), получаем

$$a_0 = f(a); \quad a_1 = f'(a); \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!};$$
$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}; \quad \dots \tag{24.77}$$

Подставляя выражение для $a_0$, $a_1$, ... из (24.77) в (24.74), получаем, что на $(a - R, a + R)$ справедливо равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \tag{24.78}$$

Таким образом, мы показали, что если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $(x - a)$, имеющий радиус сходимости $R$, то на интервале сходимости $(a - R, a + R)$ этот ряд имеет вид (24.78). Полученный ряд называют рядом Тейлора для функции $f(x)$. При $a = 0$ этот ряд имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \tag{24.79}$$

который называют рядом Маклорена[3] для функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь один пример, который покажет, что не все обстоит просто в вопросе о разложении функции в степенной ряд.

● *ПРИМЕР 24.14.* Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что эта функция в точке $x = 0$ бесконечно дифференцируема, причем

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots$$

Выпишем степенной ряд, имеющий вид ряда Маклорена

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \\ = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots \equiv 0.$$

Мы получили степенной ряд, радиус сходимости которого $R = \infty$, а сумма $S(x) \equiv 0$ на $(-\infty, +\infty)$. «Взаимоотношения» суммы ряда $S(x)$ и функции $f(x)$ изображены на рис. 24.3.

[3] Маклорен Колин (1698–1746) — шотландский математик, член Лондонского королевского общества (1719 г.), ученик И. Ньютона, в двенадцатилетнем возрасте поступил в университет г. Глазго. В 20 лет получил кафедру математики в Абердине (Шотландия). С 1722 г. по 1726 г. работал во Франции. В 1724 г. получил премию Парижской АН по физике. В 1726 г. получил кафедру в Эдинбургском университете. В 1740 г. Парижская АН присудила премию за работы о приливах и отливах трем ученым: Д. Бернулли, Л. Эйлеру и К. Маклорену. В области анализа главным достижением К. Маклорена является постановка и решение задачи о разложении функции в степенной ряд.

Из рис. 24.3 видно, что $S(x)$ совпадает с $f(x)$ *только* при $x=0$.

При каких же условиях «формальный ряд Тейлора», построенный по бесконечно дифференцируемой в точке $x=a$ функции $f(x)$, совпадает с ней на своем интервале сходимости?

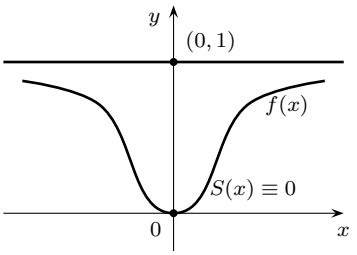



*Рис. 24.3.*

Выпишем $n$-ю частичную сумму ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Эта функция является многочленом степени $n$ и называется многочленом Тейлора степени $n$ функции $f$ (см. также § 19.4).

Образуем функции $R_n(x)$, положив

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x). \tag{24.80}$$

Функция $R_n(x)$ называется $n$-м остатком Тейлора функции $f(x)$.

Имеет место следующая

**ТЕОРЕМА 24.29**

Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке $a$ функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее формального ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x$ его интервала сходимости $(a-R, a+R)$ выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0. \tag{24.81}$$

● **Необходимость.** Пусть $f(x)$ — сумма ряда Тейлора, т. е.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$. Из определения $R_n(x)$ и полученного равенства имеем

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)-f(x)=0.$$

**Достаточность.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Из определения $R_n(x)$ получаем

$$0=\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-S(x))=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Последнее равенство означает, что существует $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ и он равен $f(x)$, а это и означает, что $f(x)$ является суммой ряда. ●

Доказанная теорема показывает, что вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора сводится к исследованию поведения остатков Тейлора функции $f(x)$ при $n\to\infty$, а именно если $\lim_{n\to\infty} R_n(x_0)=0$, то ряд Тейлора в точке $x_0$ сходится и $f(x_0)$ является суммой ряда при $x=x_0$. Если же $\lim_{n\to\infty} R_n(x_0)\neq 0$ или не существует, то в точке $x_0$ ряд Тейлора или не сходится, или его сумма не совпадает с $f(x_0)$.

Найдем форму $n$-го остатка Тейлора функции $f(x)$. Итак, мы имеем

$$f(x) \;=\; S_n(x)+R_n(x) \tag{24.82}$$

или

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (24.83)$$

Будем искать $R_n(x)$ в виде

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot Q(x). \quad (24.84)$$

Подставим (24.84) в (24.83):

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+ \\ +\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (24.85)$$

Зафиксируем в (24.85) $x$, образуем функцию переменной $t$ — $F(t)$:

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2- \\ -\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \quad (24.86)$$

При $x=t$ получаем, что $F(x)=0$. При $t=a$, учитывая (24.85), получаем, что $F(a)=0$.

Найдем производную функции $F(t)$ ($x$ — фиксировано):

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{2f''(t)}{2!}(x-t)- \\ -\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\frac{3f'''(t)}{3!}(x-t)^2-\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3+\cdots+ \\ +\frac{n\,f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{Q(x)(n+1)}{(n+1)!}(x-t)^n. \quad (24.87)$$

Уничтожая противоположные слагаемые, получим

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n. \quad (24.88)$$

Мы показали, что функция $F(t)$ дифференцируема на $[a,x]$ и на концах сегмента обращается в ноль, значит, она удовлетворяет условиям теоремы Ролля (теорема 18.14). Поэтому существует такое значение $t=C\in(a,x)$, что $F'(C)=0$. Подставляя найденное значение $t=C$ в выражение (24.88), получаем

$$-\frac{f^{(n+1)}(C)}{n!}(x-C)^n+\frac{Q(x)}{n!}(x-C)^n=0. \quad (24.89)$$

Из (24.89) получаем, что $Q(x)=f^{(n+1)}(C)$, или

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad \text{где } C\in(0,x). \quad (24.90)$$

С учетом полученного в (24.90) формула (24.85) примет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (24.91)$$

где $C \in (0, x)$.

Формула (24.91) называется формулой Тейлора, а ее частный случай при $a = 0$, приведенный ниже (формула (24.92)), называется формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (24.92)$$

### 24.7.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

**Функция $e^x$.** Найдем производные функции $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = e^x; \quad f''(x) = e^x; \quad \ldots; \quad f^{(n)}(x) = e^x; \quad \ldots$$

При $x = 0$ получаем

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 1.$$

Выпишем ряд Маклорена для $e^x$:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (24.93)$$

Ясно, что его радиус сходимости $R = \infty$. Покажем, что ряд (24.93) является разложением функции $e^x$. Для этого выпишем остаток Тейлора $R_n(x)$ и покажем, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого фиксированного значения $x$. Из (24.90) для функции $e^x$ получаем

$$R_n(x) = \frac{e^C}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{где } C \in (0, |x|).$$

Оценим модуль $R_n(x)$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\left|e^C\right| \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (24.94)$$

Из формулы (24.94) видно, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \text{ — фиксировано.}$$

Итак, мы доказали, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (24.95)$$

и равенство (24.95) справедливо во всех точках числовой оси.

**Функция $\sin x$.** Найдем производные функции $f(x) = \sin x$:

$$f'(x) = \cos x;\ f''(x) = -\sin x;\ f'''(x) = -\cos x;\ f^{(4)}(x) = \sin x,$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x;\ f^{(6)}(x) = -\sin x;\ f^{(7)}(x) = -\cos x;$$
$$f^{(8)}(x) = \sin x, \ \ldots$$

При $x = 0$ получаем

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -1; \quad f^{(4)}(0) = 0; \ \ldots$$

Выпишем ряд Маклорена для $\sin x$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \tag{24.96}$$

Ясно, что радиус сходимости $R = \infty$. Покажем, что ряд (24.96) является разложением функции $\sin x$. Выпишем остаток Тейлора $R_n(x)$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при любом фиксированном значении $x$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\sin\left(C + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Оценим $|R_n(x)|$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\left|\sin\left(C + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{24.97}$$

Из неравенства (24.97) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при любом фиксированном значении $x$.

Мы доказали, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \tag{24.98}$$

и равенство (24.98) справедливо во всех точках числовой оси.

**Функция $\cos x$.** Совершенно аналогично разложению $\sin x$ по степеням $x$ можно получить, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \tag{24.99}$$

и равенство (24.99) справедливо во всех точках числовой оси.

**Функция $(1+x)^\alpha$, $(\alpha \neq 0)$.** Найдем производные функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в предположении, что $\alpha$ не является натуральным числом:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1};\\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};\\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.
\end{aligned}$$

При $x = 0$ имеем:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = \alpha; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$
$$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2); \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1); \ \ldots$$

Выпишем ряд Маклорена для $(1+x)^\alpha$:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Найдем его радиус сходимости по формуле Даламбера (24.68):

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|1+\frac{1}{n}\right|}{\left|1-\frac{\alpha}{n}\right|} = 1.$$

При $|x| < 1$ этот ряд сходится. Доказательство того, что $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для случая $|x| < 1$ довольно сложное, и мы не будем его приводить. При $|x| > 1$ этот

ряд расходится. При $x = \pm 1$ нужно проводить отдельное исследование для различных значений $\alpha$.

Мы получили, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots, \quad \text{при } |x| < 1. \tag{24.100}$$

Если $\alpha$ — натуральное число, то, начиная с $n = \alpha$, все производные функции $(1+x)^\alpha$ тождественно равны нулю и вместо ряда мы получаем многочлен, представляющий собой разложение бинома Ньютона $(1+x)^\alpha$ по степеням $x$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha.$$

**Функция $\ln(1+x)$.** Найдем производные функции $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};\\
f'''(x) &= \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^3};\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} = \frac{-3!}{(1+x)^4};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \ldots
\end{aligned}$$

При $x = 0$ имеем:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1;$$
$$f'''(0) = 2!; \quad \ldots; \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!; \ \ldots$$

Составим ряд Маклорена для $\ln(1+x)$:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

Найдем его радиус сходимости по формуле Даламбера (24.68):

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Исследовать этот ряд на сходимость при $x = -1$ не имеет смысла, так как функция $\ln(1+x)$ определена только для $x > -1$.

При $x = 1$ ряд Маклорена сходится условно по признаку Лейбница.

Выпишем $n$-й остаток Тейлора $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!\,\ln(1+C)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Оценим $|R_n(x)|$ при $|x| < 1$ и $C$, заключенном между 0 и $x$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{n!\,|\ln(1+C)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|\ln(1+C)|}{n+1}.$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+C)|}{n+1} = 0.$$

Значит,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots \tag{24.101}$$

при $-1 < x \leqslant 1$.

Разложение в степенные ряды с использованием ряда Тейлора или Маклорена часто связано с большими трудностями — вычислением производных и оценкой остатка. Приведенные ниже приемы позволяют «обойти» эти трудности.

### 24.7.2. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ.

Рассмотрим задачу о разложении в степенной ряд функции $e^{-x^2}$.

Положим $-x^2 = t$, тогда

$$e^t \overset{(24.95)}{=} 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots,$$

причем это разложение справедливо при всех значениях $t$, в том числе при $t = -x^2$, получаем:

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots = \\ = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

и это разложение справедливо для всех значений $x$.

Приведем еще один пример на использование метода подстановки. Разложить по степеням $x$ функцию $\frac{1}{1-x^3}$. Сделаем замену $x^3 = t$, тогда к функции $\frac{1}{1-t}$ применим формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(a_0 = 1;\ q = t)$:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots$$

и это равенство справедливо при $|t| < 1$. Тогда

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n} + \cdots$$

и это равенство справедливо при $|x| < 1$.

### 24.7.3. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННОЙ РЯД ПОЧЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

Работу метода продемонстрируем на примере разложения функции $\ln(1+x)$ в ряд по степеням $x$ (это мы уже проделывали, см. формулу (24.101)).

Выпишем равенство:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, тогда

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots + (-1)^n t^n \cdots\right) dt.$$

Мы знаем, что степенной ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится при $|t| < 1$, тогда, если $|t| < 1$, мы имеем право произвести почленное интегрирование (см. теорему 24.26). Значит, при $|x| < 1$ справедливо:

$$\ln(1+x) = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \\ + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \cdots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

## Вопросы для самопроверки

1. Какова связь между понятиями «числовой ряд» и «числовая последовательность»?
2. Докажите следствие из теоремы 24.1.
3. Приведите пример, доказывающий, что теорема, обратная к теореме 24.1, неверна.
4. Почему нет признака сравнения для произвольных числовых рядов?
5. Сформулируйте, как можно применять признаки Коши и Даламбера при исследовании произвольных числовых рядов на абсолютную сходимость.
6. Приведите примеры условно сходящихся рядов.
7. Что такое множество сходимости функционального ряда?
8. Определите понятия:
   «множество абсолютной сходимости функционального ряда»;
   «множество условной сходимости функционального ряда».
9. Что можно сказать о множестве сходимости (абсолютной сходимости, условной сходимости) степенного ряда. Приведите примеры, иллюстрирующие Ваш ответ.

# XXV

# РЯДЫ ФУРЬЕ

Аппарат рядов Фурье широко используется в различных областях математики (см., например, раздел «Уравнения математической физики») и в приложениях к физике, нейрофизиологии, сейсмологии, медицине и др. Снимая кардиограмму, энцефалограмму, проходя обследование на аппарате УЗИ, мы пользуемся, порой не замечая этого, тем математическим аппаратом, основу которого составляет гармонический анализ — теория рядов Фурье.

## § 25.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Мы знаем достаточно много примеров природных процессов — физических, химических, биологических, обладающих свойством периодичности (повторяемости) во времени или пространстве. Техника и производство умножили количество примеров периодических процессов — колебания маятника, переменный ток, биоритмы, «пульсирующие» в коре головного мозга, и т. д. Периодические процессы в математике моделируются периодическими функциями.

Простейшими примерами периодических функций являются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Ясно, что периодическими являются и функции $\sin kx$, $\cos kx$, $\operatorname{tg} kx$, $\operatorname{ctg} kx$, $k > 0$. Период функции $\sin kx$ $(\cos kx)$ равен $\frac{2\pi}{k}$, период функции $\operatorname{tg} kx$ $(\operatorname{ctg} kx)$ равен $\frac{\pi}{k}$.

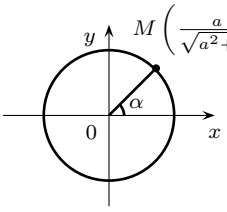


*Рис. 25.1.*

Интересным и важным примером периодической функции является функция $y = a\sin x + b\cos x$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Ясно, что ее период равен $2\pi$, но как выглядит ее график? Преобразуем формулу, задающую функцию:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ таковы, что сумма их квадратов равна 1. Значит, точка $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат (см. рис. 25.1).

Обозначим через $\alpha$ радианную меру угла, образованного положительным направлением оси $OX$ и лучом $OM$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha. \tag{25.1}$$

Пользуясь (25.1), получаем

$$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha).$$

Последнее означает, что график функции $y = a\sin x + b\cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ растяжением (сжатием) по оси $OY$ с коэффициентом $\sqrt{a^2+b^2}$ и сдвигом вдоль оси $OX$ начала в точку $(-\alpha, 0)$.

Ясно, что сумма периодических функций с одинаковыми или соизмеримыми (т. е. $\frac{T_1}{T_2}$ — рациональное число) периодами является периодической функцией.

В противном случае это, вообще говоря, неверно. Действительно, функция $y = \sin x + \cos\sqrt{2}x$ не является периодической.

Дальнейшим предметом нашего изучения станут конечные или бесконечные суммы (т. е. ряды) простейших периодических функций вида $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим простейшие интегралы от тригонометрических функций. Имеют место формулы:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \pi, & \text{если } n = m; \end{cases} \tag{25.2}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\sin mx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \pi, & \text{если } n = m; \end{cases} \tag{25.3}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\cos mx\,dx = 0 \tag{25.4}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx = 0 \tag{25.5}$$

$$n,\ m \in \mathbb{N}.$$

● Для вычисления интеграла от функции $\cos nx \cdot \cos mx$ воспользуемся формулой

$$\cos nx \cdot \sin mx = \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} = \frac{\cos(m+n)x}{2} + \frac{\cos(m-n)x}{2}.$$

Тогда при $n \neq m$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

При $n = m \neq 0$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Аналогично доказываются и остальные формулы. ●

## § 25.2. РЯДЫ ФУРЬЕ

Будем рассматривать тригонометрические ряды, т. е. ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots \quad (25.6)$$

С помощью знака суммы (25.6) записывается в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,. \quad (25.6')$$

Слагаемые с индексом «1» имеют период $2\pi$, слагаемые с индексом «2» — $\frac{2\pi}{2} = \pi$, слагаемые с индексом «3» — $\frac{2\pi}{3}$, слагаемые с индексом, ..., «$n$» — $\frac{2\pi}{n}$.

Ясно, что если ряд (25.6) сходится, то его сумма будет $2\pi$-периодической функцией.

Пусть ряд (25.6′) правильно сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ и $f(x)$ — его сумма, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,. \quad (25.7)$$

Тогда можно найти коэффициенты ряда, используя теорему о почленном интегрировании правильно сходящихся рядов (т. 24.17).

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + a_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx + b_1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx + \cdots +$$

$$+ a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = (25.5) =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = a_0\cdot\pi \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \quad (25.8)$$

Для нахождения коэффициентов $a_m$ умножим обе части равенства на $\cos mx$:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx)\,.$$

Так как $|\cos mx| \leqslant 1$, то ряд, стоящий справа, правильно сходится на $[-\pi, \pi]$ (т. 24.19). Тогда этот ряд можно интегрировать почленно:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos mx\,dx+b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos mx\,dx\right).$$

Учитывая формулы (25.2), (25.4) и (25.5), получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos mx\,dx=a_m\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx=\pi a_m.$$

Значит,

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\cos mx\,dx,\quad m=1,2,\ldots \tag{25.9}$$

(Заметим, что если $m=0$, то (25.9) превращается в (25.8).)

Аналогично, умножая обе части равенства (25.7) на $\sin mx$ и интегрируя, получаем:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\sin mx\,dx,\quad m=1,2,\ldots \tag{25.10}$$

Таким образом, мы доказали, что если $f(x)$ является суммой правильно сходящегося на $[-\pi,\pi]$ тригонометрического ряда вида (25.6), то его коэффициенты вычисляются по формулам (25.8), (25.9) и (25.10). В этом случае ряд называется рядом Фурье-функции $f(x)$, а его коэффициенты называют коэффициентами Фурье-функции.

Поставим теперь вопрос следующим образом. Пусть на отрезке $[-\pi,\pi]$ задана интегрируемая функция $f(x)$. Найдем по формулам (25.8), (25.9) и (25.10) коэффициенты Фурье и составим ряд (25.6). Каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы

а) ряд (25.6) сходился на $[-\pi,\pi]$;

б) сумма ряда (25.6) на $[-\pi,\pi]$ совпадала с $f(x)$?

Приведем без доказательства теорему, гарантирующую положительный ответ на поставленные вопросы, но для ее формулировки нам потребуется определение.

**Определение 25.1.** *Функция $f$ называется кусочно-монотонной на сегменте $[a,b]$, если $[a,b]$ можно разбить на конечное число сегментов, внутри каждого из которых функция монотонна.*

**ТЕОРЕМА 25.1 (Теорема Дирихле)**
Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на $[-\pi,\pi]$ и непрерывна на $[-\pi,\pi]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы только I рода, то ряд Фурье, построенный по функции $f(x)$, сходится на $[-\pi,\pi]$ и в точках непрерывности функции $f(x)$ значения функции и суммы $S(x)$ ряда Фурье совпадают, а в точках разрыва $x_i$ имеет место равенство

$$S(x_i)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_i-0}f(x)+\lim_{x\to x_i+0}f(x)\right). \tag{25.11}$$

*Замечание.* Так как в (25.6) все слагаемые имеют период $2\pi$, то из сходимости ряда (25.6) на $[-\pi,\pi]$ следует его сходимость на всей оси, а из правильной сходимости ряда (25.6) на $[-\pi,\pi]$ следует его правильная сходимость на всей оси.

Теперь можно сформулировать еще одну теорему Дирихле:

**ТЕОРЕМА 25.2**
Пусть $f(x)$ — $2\pi$-периодическая функция и на сегменте длины $2\pi$ является кусочно-монотонной, непрерывной, за исключением конечного числа точек на этом сегменте, в которых она имеет только разрывы I рода, тогда ряд Фурье, построенный по функции $f$, сходится на всей оси и во всех точках непрерывности функции $f$ значения функции и суммы $S(x)$ ряды Фурье совпадают, а в точках разрыва $x_i$ имеет место равенство

$$S(x_i) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_i-0} f(x) + \lim_{x\to x_i+0} f(x)\right). \qquad (25.11')$$

● *ПРИМЕР 25.1.* Разложить в ряд Фурье $2\pi$-периодическую функцию, заданную на $[-\pi,\pi]$ формулой $y = x$.

● Ясно, что функция удовлетворяет условиям теоремы 25.2 и может быть разложена в ряд Фурье. Найдем с помощью формул Фурье (25.9), (25.10) коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi^2-\pi^2) = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\pi\cos n\pi - \pi\cos n\pi + \left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos\pi n = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}.$$

Значит,

$$b_1 = 2; \quad b_2 = -\frac{2}{2}; \quad b_3 = \frac{2}{3}; \quad b_4 = -\frac{2}{4}; \quad \ldots$$

Ряд Фурье рассматриваемой функции имеет вид

$$2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \cdots\right]. \qquad (25.12)$$

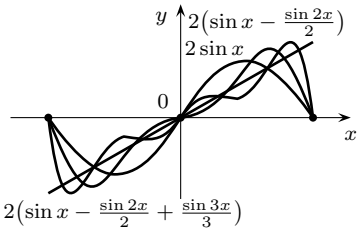


*Рис. 25.2.*

Заметим, что в точках $\pi+2\pi k$ — точках разрыва функции

$$\lim_{x\to\pi+2\pi k-0} f(x) = -\pi; \qquad \lim_{x\to\pi+2\pi k+0} f(x) = \pi.$$

Имеет место

$$\left(\lim_{x\to\pi+2\pi k-0} f(x) + \lim_{x\to\pi+2\pi k+0} f(x)\right) = -\pi+\pi = 0$$

и значение суммы ряда Фурье (25.12) в точках $x = \pi+2\pi k$ равно нулю.

На рис. 25.2 изображен график функции $f(x)$ на участке $[-\pi,\pi]$ и графики частичных сумм ряда Фурье (25.12) при $n = 1, 2, 3$. ●

Полученное нами разложение для функции $f(x)$ позволяет получить следующее соотношение:

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right),$$

или

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

## § 25.3. РЯДЫ ФУРЬЕ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО «НЕСТАНДАРТНОМУ ОТРЕЗКУ». РЯД ФУРЬЕ КАК СПОСОБ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

### 25.3.1. РЯДЫ ФУРЬЕ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

В рассмотренном примере 25.1 все коэффициенты Фурье $a_n$ оказались равными нулю и функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье, содержащий только синусы. Этот результат не случаен, простые соображения показывают, что если $f(x)$ — нечетная на $[-\pi, \pi]$ функция, то ее коэффициенты $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам, а если $f(x)$ — четная функция, то ее коэффициенты Фурье $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. она разлагается в ряд Фурье по косинусам. Какие же это соображения? Сформулируем их в виде двух лемм.

**Лемма 25.1.** *Если $f(x)$ интегрируема на $[-a, a]$ $(a > 0)$ и нечетна на $[-a, a]$, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

● $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной $x = -t$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0. \quad ●$$

**Лемма 25.2.** *Если $f(x)$ интегрируема на $[-a, a]$ $(a > 0)$ и четна на $[-a, a]$, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

● Как и при доказательстве леммы 1, разобьем промежуток интегрирования на два промежутка $[-a, 0]$ и $[0, a]$ и на первом из них сделаем замену переменной $x = -t$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 25.3**
Если $f(x)$ — нечетная на $[-\pi, \pi]$ функция, то ее коэффициенты Фурье $a_n = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. она разлагается в ряд Фурье по синусам, а если $f(x)$ — четная на $[-\pi, \pi]$ функция, то ее коэффициенты Фурье $b_n = 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. она разлагается в ряд Фурье по косинусам.

● Следует из того, что если $f(x)$ нечетна, то $f(x)\cos nx$ — нечетная на $[-\pi, \pi]$ функция, а $f(x)\sin nx$ — четная на $[-\pi, \pi]$ функция. В случае, когда $f(x)$ — четная на $[-\pi, \pi]$ функция, функции $f(x)\sin nx$ нечетны на $[-\pi, \pi]$, а функции $f(x)\cos nx$ четны на $[-\pi, \pi]$. ●

### 25.3.2. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО «НЕСТАНДАРТНОМУ ОТРЕЗКУ»

Рассмотрим случай, когда мы имеем дело с $2l$-периодической функцией, т. е. когда для $l > 0$ имеет место равенство $f(x \pm 2l) = f(x)$.

Это случай сводится к рассмотренному заменой переменной

$$x = lt/\pi.$$

Функция $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ имеет период $2\pi$, действительно,

$$\varphi(t \pm 2\pi) = f\left(\frac{l(t \pm 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} \pm 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t).$$

Ясно, что если $f$ кусочно-монотонна на промежутке длины $2l$ и непрерывна на этом промежутке, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода, то функция $\varphi(t)$ удовлетворяет тем же условиям на отрезке длины $2\pi$ и по теореме 25.2 разлагается в ряд Фурье, т. е.

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right), \tag{25.13}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\cos nt\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\sin nt\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{25.15}$$

Сделаем в формулах (25.13), (25.14) и (25.15) замену $t = \frac{\pi x}{l}$, тогда

$$\varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{25.16}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt \overset{t=\frac{\pi x}{l}}{=} \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, \tag{25.17}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt \overset{t=\frac{\pi x}{l}}{=} \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \tag{25.18}$$

### 25.3.3. РЯД ФУРЬЕ КАК СПОСОБ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пусть на отрезке $[-\pi,\pi]$ задана функция $f(x)$, удовлетворяющая на этом отрезке условиям теоремы 25.1. Тогда на этом отрезке ее можно разложить в ряд Фурье. Обозначим через $\varphi(x)$ его сумму, тогда во всех точках непрерывности функции на отрезке $[-\pi,\pi]$ выполнено равенство $f(x)=\varphi(x)$, а в точках $x_i$ — разрывов первого рода функции $f$ выполнено равенство

$$\varphi(x_i)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_i-0} f(x)+\lim_{x\to x_i+0} f(x)\right).$$

Ряд Фурье сходится на всей оси, и его сумма — непрерывная $2\pi$-периодическая функция, называемая $2\pi$-периодическим продолжением функции $f(x)$ с сегмента $[-\pi,\pi]$ на всю числовую прямую.

Часто в задачах бывает так, что функция $f(x)$ определена исходно только на $[0,\pi]$, тогда поступают одним из трех способов:

а) строят функцию $f_{\text{чет.}}$, определенную на $[-\pi,\pi]$ следующим равенством:

$$f_{\text{чет.}}=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in[0,\pi];\\ f(-x), & \text{если } x\in[-\pi,0). \end{cases} \tag{25.19}$$

Функция $f_{\text{чет.}}$ называется четным продолжением функции $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$;

б) строят функцию $f_{\text{нечет.}}$, определенную на $[-\pi,\pi]$ следующим равенством:

$$f_{\text{нечет.}}=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in[0,\pi];\\ -f(-x), & \text{если } x\in[-\pi,0). \end{cases} \tag{25.20}$$

Функция $f_{\text{нечет.}}$ называется нечетным продолжением функции $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$;

в) строят произвольную функцию $f_{\text{произв.}}$ так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

1) $f_{\text{произв.}}(x)=f(x)$ при $x\in[0,\pi]$
2) $f_{\text{произв.}}(x)$ кусочно-монотонна и непрерывна на $[-\pi,0)$
3) $\lim_{x\to 0-0} f_{\text{произв.}}(x)=\lim_{x\to 0+0} f(x)$.

Ситуации, описанные в а), б), в), иллюстрирует рис. 25.3.

Если функция $f(x)$ на $[0,\pi]$ кусочно-монотонна и непрерывна во всех точках $[0,\pi]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет только разрывы первого рода, то функции $f_{\text{чет.}}(x)$, $f_{\text{нечет.}}(x)$, $f_{\text{произв.}}(x)$ удовлетворяют на $[-\pi,\pi]$ тем же условиям, и значит, разлагаются в ряд Фурье: функция $f_{\text{чет.}}$ — по косинусам, функция $f_{\text{нечет.}}$ — по синусам.

Суммы их рядов Фурье дают $2\pi$-периодическое продолжение исходной функции $f(x)$ с $[0,\pi]$ на всю числовую прямую.

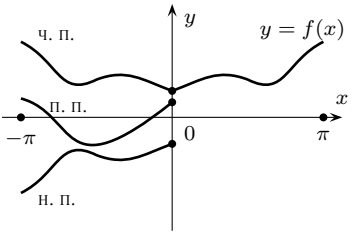



*Рис. 25.3.*

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу о построении ряда Фурье для произвольной непериодической функции, определенной на всей числовой прямой, удовлетворяющей условиям теоремы 25.2 на любом сегменте вида $[-l, l]$.

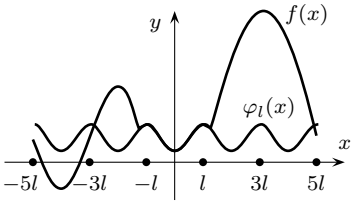



*Рис. 25.4.*

Допустим, что мы хотим, чтобы сумма построенного ряда Фурье «хорошо» приближала функцию $f(x)$ на множестве $[-l, l]$.

Возьмем в качестве базового отрезка для построения ряда Фурье отрезок $[-l, l]$. Найдем коэффициенты Фурье-функции $f$ по формулам (25.17), (25.18). Обозначим через $\varphi_l(x)$ сумму ряда Фурье, т. е.

$$\varphi_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right).$$

Ясно, что $\varphi_l(x)$ является $2l$-периодической функцией, определенной на всей оси, и во всех точках непрерывности функции $f$ на сегменте $[-l, l]$ имеет место равенство

$$f(x) = \varphi_l(x). \tag{25.21}$$

«Взаимоотношения» функций $f(x)$ и $\varphi_l(x)$ на всей оси иллюстрирует рис. 25.4.

● *ПРИМЕР 25.2.* Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x)$, заданную на $[0, \pi]$ равенством $f(x) = x$.

● Продолжим ее четным образом на $[-\pi, \pi]$. Ясно, что коэффициенты Фурье-функции $f_{\text{чет.}}(x)$ таковы, что

$$b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[ x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx \right] = \frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 2x\, dx = \frac{2}{2\pi} \left[ x \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin 2x\, dx \right] = \frac{2}{4\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos 3x\, dx = \frac{2}{3\pi} \left[ x \sin 3x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin 3x\, dx \right] = \frac{2}{9\pi} \cos 3x \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{9\pi}$$

и т. д.

Мы получили следующий ряд:

$$\pi - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \frac{4}{25\pi} \cos 5x - \frac{4}{49\pi} \cos 7x - \cdots \qquad ●$$

# III

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

•

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

•

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

# XXVI

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## § 26.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 26.1.** *Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$. $\rho$-окрестностью точки $z_0$ называют множество, обозначаемое $S(z_0, \rho)$ $(\subset \mathbb{C})$ и определяемое равенством*

$$z \in S(z_0, \rho) \quad \Longleftrightarrow \quad |z - z_0| < \rho.$$

Геометрически $\rho$-окрестность точки $z_0$ — ограниченная область, лежащая внутри окружности радиуса $\rho$ с центром в точке $z_0$ (см. рис. 26.1).

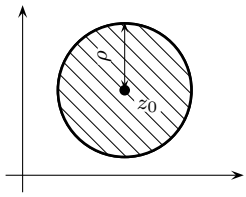


*Рис. 26.1.*

**Определение 26.2.** *Число $c$ называется пределом последовательности комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ при $n \to \infty$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такой номер $N$, что для всех номеров $n$, больших $N$, выполняется неравенство*

$$|z_n - c| < \varepsilon$$

*и в этом случае пишут*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

Заметим, что это определение ничем не отличается от определения предела числовой последовательности в вещественном случае (см. определение 16.3).

На языке предикатов и кванторов это определение записывается следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \; ((n > N) \implies (|z_n - c| < \varepsilon))$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \; ((n > N) \implies (z_n \in S(c, \varepsilon))).$$

Пусть

$$z_n = x_n + i \cdot y_n, \quad x_n, y_n \in \mathbb{R}, \tag{26.1}$$

$$c = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{26.2}$$

В этих обозначениях последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ это то же самое, что пара последовательностей вещественных чисел $(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty})$.

Учитывая равенства (26.1), (26.2) и определение модуля комплексного числа, получаем

$$|z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}. \tag{26.3}$$

Из (26.3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = c = a + bi \iff$$
$$\iff \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \tag{26.4}$$

Равенство (26.4) означает, что теория пределов последовательности комплексных чисел сводится к теории пределов последовательностей вещественных чисел.

### 26.1.1. БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ

**Определение 26.3.** *Будем говорить, что последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет бесконечный предел, и писать* $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, *если для любого положительного числа* $M$ *существует такой номер* $N$, *что для всех номеров* $n > N$ *выполняется*

$$|z_n| > M.$$

Фактически, определение 26.3 означает, что мы множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ пополнили еще одной точкой, называемой бесконечно удаленной точкой и обозначаемой «$\infty$». При этом во множестве $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ под окрестностью бесконечно удаленной точки понимают внешность круга с центром в начале координат, т. е. $S(\infty, R)$ определяется соотношением

$$z \in S(\infty, R) \overset{\text{def}}{\iff} |z| > R. \tag{26.5}$$

В силу этого замечания определение «$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$» становится равноправным с определением «$\lim_{n\to\infty} z_n = c,\ c \in \mathbb{C}$».

В случае, когда $\lim_{n\to\infty} z_n$ существует и не равен $\infty$, последовательность называется сходящейся. Множество $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ называют расширенной комплексной плоскостью.

### 26.1.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**Определение 26.4.** *Пусть* $Z \subset \mathbb{C}$, *говорят, что на множестве* $Z$ *задана функция комплексного переменного* $z$, *если каждому* $z \in Z$ *поставлено в соответствие вполне определенное комплексное число* $w$ *(в случае однозначной функции) или вполне определенное подмножество комплексных чисел* $W$ *(в случае многозначной функции), в случае однозначной функции пишут*

$$w = f(z). \tag{26.6}$$

*ПРИМЕР 26.1.*

а) Формула $w = \frac{1}{z}$ задает на множестве $E = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ однозначную функцию, в частности

$$f(1+i) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

б) Формула $w = z - \sqrt{z+1}$ определяет на $E = \mathbb{C}$ двузначную функцию (в точках $z \neq -1$). Если $z = 0$, то $w_1 = 1,\ w_2 = -1$; если $z = -1 + 2i$

$$w = -1 + 2i - \sqrt{(1+i)^2};$$
$$w_1 = -1 + 2i - 1 - i = -2 + i;$$
$$w_2 = -1 + 2i + 1 + i = 3i.$$

в) Многочлен $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ является однозначной функцией на $\mathbb{C}$.

г) Дробно-рациональная функция, заданная формулой

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0},$$

является однозначно определенной функцией на комплексной плоскости, за исключением точек, являющихся корнями знаменателя.

Вместе с записью (26.6) употребляется для записи функции комплексного переменного и другая запись. Обозначим $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(z) = f(x+iy) = W(x,y) = \\ = \operatorname{Re}(W(x,y)) + i \operatorname{Im}(W(x,y)) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y) + i\, v(x,y). \quad (26.7)$$

В последней части равенства (26.7) — $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — вещественные функции двух вещественных переменных. Первая называется вещественной частью функции комплексного переменного, $i\, v(x,y)$ — мнимой частью. Таким образом, комплекснозначная функция комплексного переменного $z = x+iy$ это то же самое, что пара вещественных функций вещественных переменных $x$ и $y$.

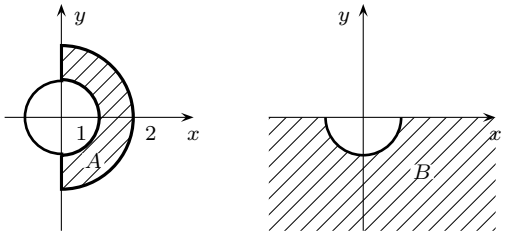
● *ПРИМЕР 26.2.* Отделить вещественную и мнимую часть функции $f(z) = z^2 - 1$.

●
$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 - 1 = x^2 - y^2 + 2ixy - 1 = (x^2 - y^2 - 1) + i(2xy).$$

Значит, $u(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, $v(x,y) = 2xy$. ●

## § 26.2. КРИВЫЕ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ФУНКЦИИ

В дальнейшем нам придется рассматривать различные множества на комплексной плоскости. Они, как правило, задаются либо геометрически, либо аналитически. Аналитические условия имеют вид равенств или неравенств. Так, множество $A$, заданное условиями: $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ изображено на рис. 26.2, а).




а) б)

*Рис. 26.2.*

На рис. 26.2, б) изображено множество $B$: $|z| \geqslant 1$, $\operatorname{Im} z < 0$.

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — две вещественные функции, определенные на множестве $T = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, $t_0$, $t_1 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на комплексной плоскости функцию $z(t)$ вещественной переменной $t$, заданную на $T$ равенством

$$z(t) = x(t) + i\, y(t). \quad (26.8)$$

Ясно, что (26.8) равносильно паре равенств

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{26.9}$$

Равенства (26.9) мы называли параметрическими уравнениями кривой на плоскости, поэтому равенство (26.8) называют параметрическим уравнением кривой на комплексной плоскости.

**Определение 26.5.** *Кривая $L$, заданная параметрически: $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, называется непрерывной, если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные функции на $[t_0, t_1]$.*

*ПРИМЕР 26.3.*

$$z(t) = a\cos t + i\,b\sin t; \quad t \in [0, 2\pi], \quad 0 < b < a \tag{26.10}$$

— параметрическое уравнение эллипса с полуосями $a$ и $b$ и фокусами в точках $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Из уравнения (26.10) следует, что эллипс — непрерывная кривая на $\mathbb{C}$.

Уточним понятие области, введенное нами в разделе «Математический анализ».

**Определение 26.6.** *Множество $\mathcal{D}$ точек комплексной плоскости (т. е. $\mathcal{D} \in \mathbb{C}$) называется областью, если оно обладает следующими свойствами:*

*$1^o$ . Для каждой точки $z \in \mathcal{D}$ существует такое $r_z > 0$, что $S(z, r_z) \subset \mathcal{D}$.*

*$2^o$ . Любые две точки $z_1$, $z_2 \in \mathcal{D}$ можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат $\mathcal{D}$ ($\Leftrightarrow$ кривой, лежащей в $\mathcal{D}$).*

Точки множества, удовлетворяющие свойству $1^o$, называют внутренними точками множества.

Точка $z$ называется граничной точкой множества $A$, если существует такое $r_0 > 0$, что для любого $r$ такого, что $0 < r \leqslant r_0$ выполнено

$$S(z, r) \cap A \neq \varnothing \;\&\; S(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \varnothing. \tag{26.11}$$

Совокупность граничных точек множества $A$ называется его границей и обозначается $\partial A$. Множество внутренних точек множества $A$ называется его внутренностью и обозначается $\operatorname{int} A$.

Множество $\mathbb{C} \setminus (A \cup \partial A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{aut} A$ называется внешностью множества $A$.

Множество, удовлетворяющее свойству $2^o$ определения 26.6, называется связным. Таким образом, область — это связное множество, все точки которого — внутренние.

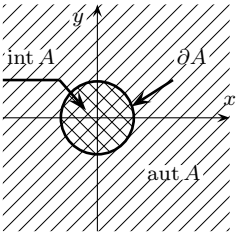



*Рис. 26.3.*

*ПРИМЕР 26.4.*

а) Пусть

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \partial A &= \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}, \\ \operatorname{int} A &= \{\, z \in C \mid |z| < 1 \,\}, \\ \operatorname{aut} A &= \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \,\} \end{aligned}$$

(см. рис. 26.3).

Ясно, что $A$, $\operatorname{int} A$, $\partial A$, $\operatorname{aut} A$ — связные множества. $A$ не является областью, $\operatorname{int} A$ — область, $\partial A$ не является областью, $\operatorname{aut} A$ — область.

б) Пусть $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| < 1 \vee |z+2| < 1\}$. Ясно, что все точки множества $B$ — внутренние. $B$ не является связным множеством и значит $B$ не является областью (см. рис. 26.4, множество $B$ заштриховано).

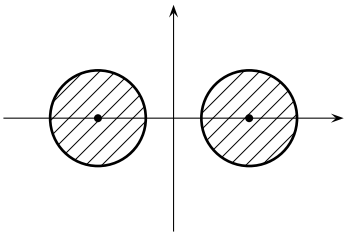


*Рис. 26.4.*

**Определение 26.7.** *Область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую внутри нее, можно непрерывно стянуть в точку, принадлежащую области, оставаясь в этой области.*

**Определение 26.8.** *Многосвязная область называется $n$-связной, $n \geqslant 2$, если ее граница состоит из $n$ замкнутых непрерывных кривых или точек.*

Ясно, что множество $|z| < 1$ — односвязная область, а круговое кольцо $1 < |z| < 2$ — двусвязная область.

Непрерывная замкнутая кривая $L$ без точек самопересечения — кривая Жордана (см. рис. 26.5) — разбивает плоскость на две односвязные области: ограниченную — внутренность кривой и неограниченную — внешность кривой.

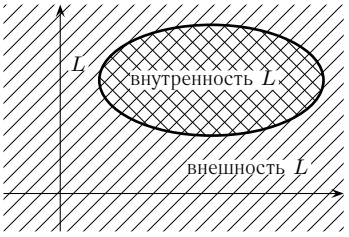



*Рис. 26.5.*

Пусть на множестве $E$ $(\subset \mathbb{C})$ задана однозначная функция $w = f(z)$. В вещественном анализе мы говорили о графике функции $y = f(x)$ как о множестве точек плоскости с координатами $\big(x, f(x)\big)$. В случае комплекснозначной функции комплексного переменного график функции — множество точек в четырехмерном пространстве — теряет свое главное достоинство — наглядность, поэтому в ТФКП применяют другое геометрическое истолкование функции.

Возьмем две комплексные плоскости: для переменной $z$ и переменной $w$. Задание функции $w = f(z)$, определенной на $E$, это сопоставление каждой точке множества $E$ на плоскости $z$ вполне определенной точки $w = f(z)$ в плоскости $w$. Если в плоскости $z$ взять $A \subset E$, то на плоскости $w$ можно изобразить множество $f(A)$ — образ множества $A$. (Напомним, что $w \in f(A) \Leftrightarrow \exists z \, \big((z \in A)(w = f(z))\big)$.)

Как правило, для «хороших» функций (например, аналитических, которые мы рассмотрим позже) образ кривой — кривая, образ области — область, но это не всегда так.

*ПРИМЕР 26.5.* Рассмотрим функцию $w = z^2$, определенную на всем $\mathbb{C}$. Образом луча, выходящего из начала координат и наклоненного под углом $\frac{\pi}{6}$ к положительному направлению действительной оси $(\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{6})$, является луч $\arg w = \frac{\pi}{3}$. Образом первого квадранта $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ является верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w \geqslant 0$. Образом области $|z| < 2$ является область $|w| < 4$.

*ПРИМЕР 26.6.* Рассмотрим функцию $w = \operatorname{Re} z$. Ясно, что $\operatorname{Re}(\mathbb{C}) = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w = 0\}$, т. е. образом всей комплексной плоскости переменной $z$ является вещественная ось на плоскости $w$.

## Контрольные вопросы и задания

1. Определите семейства линий в $z$-плоскости, заданных уравнениями:
   а) $\operatorname{Re} 1/z = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   б) $\operatorname{Im} 1/z = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   в) $\operatorname{Re} z^2 = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   г) $\operatorname{Im} z^2 = a,\ a \in \mathbb{R}$.
2. Изобразите линии, заданные уравнениями:
   а) $z = 1 + it,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$;
   б) $z = t + it^2,\ t \in \mathbb{R}$;
   в) $z = t^2 + it^4,\ t \in \mathbb{R}$;
   г) $z = a(\cos t + i \sin t),\ \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2},\ a > 0$;
   д) $z = t + \frac{i}{t},\ -\infty < t < 0$.
3. Для отображения $\omega = z^2,\ z = x + iy$ найдите образы линий:
   а) $x = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   б) $y = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   в) $x = y$;
   г) $|z| = R,\ 0 \leqslant R < \infty$;
   д) $\arg z = \alpha,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.
4. Приведите пример множества на комплексной плоскости, являющегося
   а) областью;
   б) несвязным множеством;
   в) трехсвязной областью.
5. Приведите пример множества, не являющегося областью на комплексной плоскости.
6. Функции $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$; $\frac{z}{|z|}$; $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$; $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ определены при $z \neq 0$. Какие из них имеют предел при $z \to 0$ и чему он равен?

# XXVII

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## § 27.1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ

Так же, как в математическом анализе, через $s'(c,\delta)$ будем обозначать выколотую $\delta$-окрестность точки $c$, т. е. множество комплексных чисел $z$, удовлетворяющих соотношению

$$0 < |z-a| < \delta.$$

**Определение 27.1.** *Пусть $f\colon E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ такая, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что $s'(z_0,\delta_0) \subset E$. Число $c$ называется пределом функции $f(z)$ при $z$, стремящемся к $z_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta$ такое, что $0 < \delta \leqslant \delta_0$ и для всех $z \in s'(z_0,\delta)$ выполнено неравенство*

$$|f(z)-c| < \varepsilon$$

*и в этом случае пишут*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c.$$

Неравенство $|f(z)-c| < \varepsilon$ означает, что $f(z) \in s(c,\varepsilon)$.

Иногда говорят о пределе функции $f(z)$ при $z \to z_0$ по заданной кривой.

*ПРИМЕР 27.1.* Ясно, что

$$\lim_{z\to i}(z^2-1) = -2,$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \arg z=0}} \frac{z}{|z|} = 1; \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ \arg z=\pi}} \frac{z}{|z|} = -1; \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ \arg z=\frac{\pi}{2}}} \frac{z}{|z|} = i; \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ \arg z=\frac{3\pi}{2}}} = -i.$$

$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$ не существует.

Самостоятельно разберите, что означают на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ следующие записи:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = c, \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Ясно, что справедлива

**ТЕОРЕМА 27.1**

Пусть $f\ :\ E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ и $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$\lim_{z\to z_0=x_0+iy_0} f(z) = c = a+bi \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = a \ \ \& \ \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = b.$$

Из теоремы 27.1 следует, что для предела функции комплексной переменной имеют место свойства, аналогичные свойствам предела функции вещественной переменной (переменных).

### 27.1.1. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ (В ОБЛАСТИ)

**Определение 27.2.** *Пусть $f : E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ и $z_0$ — внутренняя точка множества $E$. Функция $f$ называется непрерывной в точке $z_0$, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

*Функция называется непрерывной на множестве $E'\ (\subset E)$, если она непрерывна в каждой точке множества $E'$.*

Ясно, что функция $f$ непрерывна в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее вещественная и мнимая части.

Из этого очевидного утверждения следует, что для функций комплексного переменного справедливы теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (см. т. 17.5, 17.6, 17.7) и теорема о непрерывности композиции непрерывных функций (теорема 17.8).

● *ПРИМЕР 27.2.* Ясно, что функция $z^n$ непрерывна на $\mathbb{C}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$. Из этого следует, что многочлен

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

— непрерывная функция на всей комплексной плоскости. Дробно-рациональная функция

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

непрерывна во всех точках области определения, т. е. во всех точках $z$ таких, что $b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \neq 0$.

Функция $w = \operatorname{Re} z$ является непрерывной на всей комплексной плоскости.

Функция $\frac{z}{|z|}$ непрерывна во всех точках множества $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, в точке 0 она не является непрерывной.

### 27.1.2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение производной функции комплексного переменного внешне совпадает с определением производной от функции действительного переменного.

**Определение 27.3.** *Пусть $z$ внутренняя точка области определения функции $f$: $E\ (\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Производной функции $f$ в точке $z$ называется величина, обозначаемая $f'(z)$, определяемая следующим:*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{27.1}$$

*Если производная функции $f$ в точке $z$ существует, то говорят, что функция $f$ дифференцируема в точке $z$.*

В определении предела точка $z+\Delta z$ может стремиться к точке $z$ произвольным образом: вдоль произвольной кривой (в том числе по спирали, «закручивающейся» к точке $z$, внутри фиксированного угла с вершиной в точке $z$, по лучу, начинающемуся в точке $z+\Delta z$ и т. д., необходимо только, чтобы $\Delta z \to 0$. Такой произвол в способах стремления точки $z+\Delta z$ к точке $z$ приводит к тому, что даже простая на вид функция может не иметь производной.

● *ПРИМЕР 27.3.* Покажем, что функция $f(z) = x^2 + y^2 - 2i\,xy$ $(z = x + iy)$ не является дифференцируемой ни в одной точке своей области определения, отличной от точки 0.

● Пусть $z \neq 0$. Придадим $z$ приращение $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0$. Найдем

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - 2(x+\Delta x)yi - x^2 - y^2 + 2ixy}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + y^2 - 2ixy - 2i\Delta xy - x^2 - y^2 + 2ixy}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2i\Delta xy}{\Delta x} = 2x - 2iy.$$

Придадим теперь $z$ приращение $\Delta z = 0 + i\Delta y$, найдем

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{x^2 + (y+i\Delta y)^2 - 2ix(y+i\Delta y) - x^2 - y^2 + 2ixy}{i\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2iy\Delta y - (\Delta y)^2 + 2x\Delta y}{i\Delta y} = 2y - 2ix.$$

Мы показали, что при разных способах стремления $\Delta z$ к нулю мы получаем разные пределы для отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$. Это означает, что рассматриваемая функция не является дифференцируемой в точках $z \neq 0$. ●

Каким же условиям должна удовлетворять функция $f$, чтобы быть дифференцируемой? Выделим в функции $f$ действительную и мнимую части:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

Проведем выделение действительной и мнимой части в $\Delta z$:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Тогда

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y) -$$
$$- u(x,y) - i\,v(x,y) = \Delta u + i\Delta v,$$
$$\text{где}\quad \begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y),\\ \Delta v &= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y).\end{aligned}$$

Предположим, что функция $f$ дифференцируема в точке $z$, тогда $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ существует и не зависит от способа стремления $\Delta z$ к нулю.

Пусть $\Delta z$ стремится к нулю по вещественной оси, тогда $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 = \Delta x$. Значит,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} +$$
$$+ i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \quad (27.2)$$

Если же $\Delta z$ стремится к нулю вдоль мнимой оси, то $\Delta z = 0 + i\Delta y$. Значит,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + \\ + i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} = -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \quad (27.3)$$

Приравнивая (27.2) и (27.3), из условия равенства комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \quad (27.4)$$

Итак, мы доказали, что если функция $f$ дифференцируема в точке $z = x+iy$, то должны необходимо выполняться условия (27.4), которые называются условиями Коши–Римана (Даламбера–Эйлера).

Оказывается, что в случае, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке $z = x + iy$ имеют полные дифференциалы, т. е. их приращения представимы в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Delta y + \bar{o}\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right), \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Delta y + \bar{o}\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

условия Коши–Римана являются не только необходимыми, но и достаточными условиями дифференцируемости функции.

Заметим, что для функции примера 27.3 условия Коши–Римана не были выполнены.

### 27.1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z$, то ее приращение в окрестности точки $z$ можно представить в виде

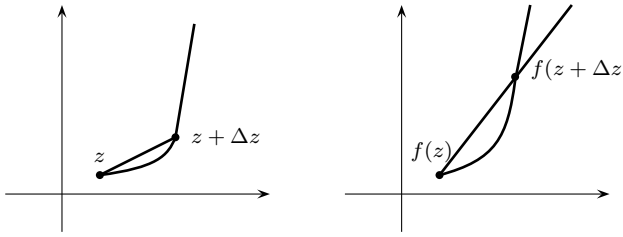
$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \bar{o}\,(\Delta z) \quad (27.5)$$

или

$$\Delta f \approx f'(z)\Delta z. \quad (27.6)$$

Рассмотрим окрестность точки $z$ в плоскости переменной и окрестность точки $f(z)$ в плоскости $w$ (см. рис. 27.1 а) и 27.1 б)).

Рассмотрим в окрестности точки $z$ произвольную кривую $L$, вдоль которой $z+\Delta z$ стремится к $z$. В плоскости $w$ рассмотрим образ кривой $L$ при отображении $f$, обозначим его $f(L)$.




а) б)

*Рис. 27.1.*

Приближенное равенство (27.6) равносильно двум приближенным равенствам

$$\begin{cases} |\Delta f| \approx |f'(z)| \cdot |\Delta z| \\ \arg \Delta f \approx \arg\left(f'(z)\right) + \arg|\Delta z| \end{cases} \tag{27.6′}$$

$|\Delta z|$ — длина отрезка, соединяющего точки $z$ и $z + \Delta z$, $\Delta f$ — длина отрезка, соединяющего точки $f(z)$ и $f(z+\Delta z)$, тогда первое приближенное равенство в (27.6′) означает, что $|f'(z)|$ (если $f'(z) \neq 0$) является коэффициентом деформации дуги кривой, выходящей из точки $z$, при отображении $f$ в окрестности точки $z$. Второе приближенное равенство в (27.6′) означает, что $\arg(f'(z))$ — угол поворота касательной к дуге кривой $L$ в точке $z$ до касательного положения на образе кривой при отображении $f$ в точке $f(z)$.

Эти рассуждения мы провели для произвольной кривой, поэтому если функция дифференцируема в точке $z$, то все кривые, выходящие из точки $z$, при отображении $f$ получают (в образах) одинаковую деформацию ($|f'(z)|$) и «поворачиваются» на один и тот же угол $\left(\arg\left(f'(z)\right)\right)$.

Следствием этого утверждения является

**ТЕОРЕМА 27.2**

Если функция $f$ дифференцируема в точке $z$, то угол между касательными, проведенными в точке $z$ к любым двум кривым, выходящим из точки $z$, равен углу между касательными, проведенными в точке $f(z)$ к образам рассматриваемых кривых.

Если отображение в окрестности точки $z_0$ одинаково деформирует дуги кривых, выходящих из точки $z_0$, и сохраняет углы между кривыми, то говорят, что оно конформно в точке $z_0$.

Мы доказали, что если функция $f$ дифференцируема в точке $z_0$ и $f'(z_0) = 0$, то она в точке $z_0$ конформна.

Если в плоскости переменной $z$ перейти к полярным координатам ($\Leftrightarrow$ к тригонометрической форме комплексного числа), то

$$f(z) = f\left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right) = u(r,\varphi) + i\,v(r,\varphi).$$

В полярных координатах условия Коши–Римана примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases} \tag{27.7}$$

Заметим, что условия Коши–Римана часто бывают выполнены «автоматически». Так, функция $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ дифференцируема в любой точке комплексной плоскости и $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Определение производной таково, что для функций комплексного переменного справедливы теоремы о производной суммы, произведения, частного, композиции функций (сложной функции), обратной функции. Значит, многочлен $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \\ + \cdots + a_1 z + a_0$ дифференцируем на всей комплексной плоскости и

$$\left(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right)' = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1,$$

дробно-рациональная функция дифференцируема во всех точках комплексной плоскости, в которых ее знаменатель не обращается в ноль (т. е. во всех точках своей области определения).

В заключение этого параграфа заметим, что набор элементарных функций, с которыми мы имеем дело в ТФКП, пока еще узок, мы еще не определили элементарные функции $\sin z$, $\cos z$, $e^z$, $\ln z$, а функции $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ оказались многозначными.

## § 27.2. АНАЛИТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ. АНАЛИТИЧНОСТЬ МНОГОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

**Определение 27.4.** *Однозначная функция называется аналитической в области $\mathcal{D}$, если она в каждой точке области $\mathcal{D}$ имеет производную.*

Ясно, что многочлен аналитичен в любой области и на всей комплексной плоскости.

Дробно-рациональная функция аналитична в любой области, не содержащей корней знаменателя.

Обратим внимание, что аналитичность функции определена для области, и значит, можно говорить об аналитичности на множестве $|z| < 1$ и нельзя (пока) говорить об аналитичности на множестве $|z| \leqslant 1$ или об аналитичности в точке $z_0$.

Дадим определения аналитичности функции в точке $z_0$ и $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — область.

**Определение 27.5.** *Функция называется аналитической в точке $z_0$, если существует $\delta > 0$ такое, что функция аналитична в $s(z_0, \delta)$.*

**Определение 27.6.** *Говорят, что функция аналитична в замкнутой области $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$, если существует область $\mathcal{D}'$ такая, что $\overline{\mathcal{D}}$ лежит внутри $\mathcal{D}'$ и функция аналитична в $\mathcal{D}'$.*

*В частности, аналитичность на множестве $|z - a| \leqslant R$ понимается, как существование такого $\delta > 0$, что функция аналитична на множестве $|z - a| < R + \delta$.*

Как понимать, что такое производная многозначной функции и что означает в этом случае аналитичность?

Сейчас мы познакомимся с понятием однозначной ветви многозначной функции, которое позволит преодолеть возникающие трудности.

**Определение 27.7.** *Допустим, на множестве $E$ ($\subset \mathbb{C}$) определена многозначная функция $w = f(z)$. Выберем по какому-нибудь закону или правилу из множества значений функции в точке $z$ какое-то одно значение, тогда мы по многозначной функции $f$, заданной на $E$, определим однозначную функцию $f_0$ так, что*

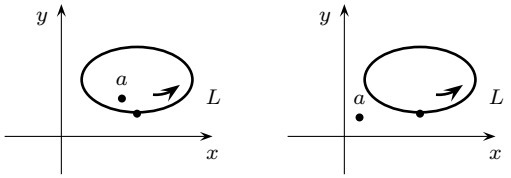
$$f_0(z) \in f(z) \quad \forall z \in E, \tag{27.8}$$

*такая функция называется однозначной ветвью функции $f$.*

Условие (27.8) допускает большой произвол в выделении однозначной ветви многозначной функции, поэтому к условию (27.8) добавляют требование непрерывности однозначной ветви.

**Определение 27.8.** *Говорят, что в области $\mathcal{D}$ выделена однозначная ветвь $f_0(z)$ многозначной функции $f(z)$, если функция $f_0$ непрерывна на $\mathcal{D}$ и*

$$f_0(z) \in f(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$




а) б)

*Рис. 27.2.*

● *ПРИМЕР 27.4.* Выделить однозначную ветвь функции $\sqrt[n]{z-a}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

● Во всех точках $z \neq a$ функция принимает $n$ значений. Положим $z-a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$\sqrt[n]{z-a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{27.9}$$

Выберем из $n$ возможных значений корня одно, т. е. зафиксируем $k$. Ясно, что функция (27.9) при фиксированном значении $k$ непрерывна. Посмотрим, как будет себя вести правая часть равенства (27.9), когда точка $z$ обходит некоторую замкнутую непрерывную кривую $L$ против часовой стрелки. При этом возможны два случая:

1) Кривая $L$ содержит внутри себя точку $a$ (рис. 27.2, а)).

2) Кривая $L$ не содержит внутри себя точки $a$ (рис. 27.2, б)).

Ясно, что при обходе $L$ $r$ и $\varphi$ в (27.9) меняются непрерывно и, вернувшись по $L$ в исходную точку (на рисунках она отмечена), мы получим исходное значение $r$ и $\sqrt[n]{r}$. При обходе $L$ против часовой стрелки в случае 1) мы получим новое значение аргумента $\varphi_1 = \varphi + 2\pi$, т. е. в формуле (27.9) мы перейдем от $k$ к $k+1$. В случае 2) при обходе по кривой $L$ мы вернемся к прежнему значению $r$, $\varphi$.

Таким образом, при обходе точки $a$ по замкнутой кривой $L$ происходит переход от одной однозначной ветви к другой. Поэтому точка $a$ называется точкой ветвления функции $\sqrt[n]{z-a}$.

Ясно, что в области, содержащей точку $z = a$, невозможно выделение однозначной ветви функции $\sqrt[n]{z-a}$. Невозможно такое выделение однозначной ветви и в областях, не содержащих точки $a$, но допускающих обход точки $a$. (Например, область $1 < |z-a| < 2$.) В этих случаях для выделения однозначной ветви на комплексной плоскости производят разрезы. Так, подходящим разрезом для функции $\sqrt[n]{z-a}$ является множество

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z-a) = 0 \\ \operatorname{Re}(z-a) \geqslant 0 \end{cases}$$

— неотрицательная вещественная полуось. ●

## Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что функция $f(z) = \overline{z}$ нигде не дифференцируема.
2. Докажите, что функция $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$. Найдите $f'(0)$.
3. Докажите, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$ в точке $z = 0$ условия Коши–Римана выполняются, но производная не существует.
4. Проверьте выполнение условий Коши–Римана для следующих функций:
   а) $z^n$; б) $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$.

# XXVIII

# ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

## § 28.1. РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Мы уже изучали числовые и функциональные ряды в разделе «Математический анализ». Сейчас мы займемся рассмотрением числовых рядов с комплексными числами, т. е. будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad c_n \in \mathbb{C} \tag{28.1}$$

и функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \tag{28.2}$$

где $u_n(z)$ — функции комплексного переменного.

Все определения для рядов в комплексной плоскости — сходимости, абсолютной сходимости, суммы ряда, правильной сходимости для функционального ряда остаются такими же, как в математическом анализе.

Ясно, что и в случае рядов с комплексными членами необходимым (но не достаточным) условием сходимости ряда (28.1) является стремление его общего члена $c_n$ к нулю при $n \to \infty$.

**ТЕОРЕМА 28.1**

Ряд — геометрическая прогрессия

$$a + az + az^2 + \cdots + az^n + \cdots; \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \tag{28.3}$$

с комплексным знаменателем $z$ сходится и имеет сумму $S(z) = \frac{a}{1-z}$, если $|z| < 1$, и расходится при $|z| > 1$.

● Рассмотрим $n$-ю частичную сумму ряда (28.3)

$$S_n(z) = a + az + \cdots + az^{n-1}. \tag{28.4}$$

Умножая обе части равенства (28.4) на $z$, получим

$$S_n(z) \cdot z = az + az^2 + \cdots + az^n. \tag{28.5}$$

Вычтем из равенства (28.4) равенство (28.5):

$$S_n(z)(1 - z) = a - az^n.$$

Последнее при $z \neq 1$ равносильно равенству

$$S_n(z) = \frac{a - az^n}{1 - z}. \tag{28.6}$$

Тогда

$$S_n(z) = \frac{a}{1 - z} - \frac{az^n}{1 - z}.$$

Очевидно, если $|z| < 1$, то $\left|\frac{az^n}{1-z}\right| = \left|\frac{a}{1-z}\right| \cdot |z|^n$ при $n \to \infty$ стремится к нулю и, значит, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{a}{1 - z}.$$

Последнее означает, что при $|z| < 1$ геометрическая прогрессия (28.3) сходится и ее сумма $S(z)$ равна $\frac{a}{1-z}$.

Если же $|z| > 1$, то

$$\left|az^{n-1}\right| > |a| > 0 \quad (\text{так как } a \neq 0)$$

и, значит, общий член ряда (28.3) не стремится к нулю, что означает расходимость геометрической прогрессии при $|z| > 1$. ●

Следующая теорема устанавливает связь между рядами с комплексными членами и рядами с вещественными членами.

Член ряда (28.1) представим в алгебраической форме:

$$c_n = a_n + b_n i, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

и вместе с рядом (28.1) рассмотрим два ряда с вещественными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{28.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{28.8}$$

образованные действительными частями и мнимыми частями членов ряда (28.1).

**ТЕОРЕМА 28.2**
Ряд с комплексными членами (28.1) сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды, составленные из действительных (28.7) и мнимых частей (28.8) членов данного ряда.

● Обозначим

$$\begin{aligned} S_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n, \\ A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$S_n = A_n + B_n i.$$

Мы знаем (равенство (26.4)), что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = A + B\,i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_n = A \\ \lim_{n\to\infty} B_n = B. \end{cases}$$

Последнее и есть утверждение нашей теоремы. ●

Уточним утверждение о том, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

**ТЕОРЕМА 28.3**
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно, то он сходится, при этом абсолютно сходящимися являются и ряды, составленные из вещественных и мнимых частей членов ряда.

● Имеем
$$|c_n| = |a_n + b_n i| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$
Значит,
$$|a_n| \leqslant |c_n|, \qquad |b_n| \leqslant |c_n|.$$

Так как по условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходится, то по признаку сравнения сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Следовательно, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ являются абсолютно сходящимися, а если они сходятся, тогда по теореме 28.2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. ●

Следствием этой теоремы является теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (сравните с теоремой 24.11).

**ТЕОРЕМА 28.4**
Если ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно, то любой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$, полученный перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

● По предыдущей теореме ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $c_n = a_n + b_n i$ сходятся абсолютно, тогда к этим рядам применима теорема о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов (т. 24.11), и значит, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$, $c'_n = a'_n + b'_n i$ сходятся абсолютно и имеют такие же суммы, как и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из абсолютной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$.

Докажем равенство сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$. Действительно,
$$S = A + B\,i \overset{(*)}{=} A' + B'i = S'.$$

Здесь $A$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $A'$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, $B$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $B'$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$, $S'$ — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$.

Равенство $(*)$ выполняется в силу сказанного для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$, $A = A'$, $B = B'$. ●

### 28.1.1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим функциональный ряд (28.2)
$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots,$$
где $u_k(z)$ — функции (как правило, однозначные) комплексного переменного.

**Определение 28.1.** *Множеством сходимости (областью сходимости) функционального ряда* (28.2) *называется множество точек комплексной плоскости, в которых функциональный ряд сходится.*

Если область сходимости ряда (28.2) обозначить $\mathcal{D}$, то $z_0 \in \mathcal{D}$ означает, что числовой ряд $u_1(z_0) + u_2(z_0) + \cdots + u_n(z_0) + \cdots$ сходится.

Обозначим через $S(z_0)$ сумму ряда $u_1(z_0) + u_2(z_0) + \cdots + u_n(z_0) + \cdots$. Тем самым на $\mathcal{D}$ определена функция $S(z)$ — сумма функционального ряда.

Для функциональных рядов в ТФКП будем использовать понятие правильной сходимости, введенное в разделе «Математический анализ», определение 24.10.

Ясно (в силу теорем 28.2 и 28.3), что для правильно сходящихся рядов в комплексной плоскости справедлива теорема 24.15 об абсолютной сходимости правильно сходящегося ряда в каждой точке множества, на котором он является правильно сходящимся, теорема 24.16 о непрерывности суммы правильно сходящегося ряда непрерывных функций, теоремы 24.17, 24.18 о почленном интегрировании и дифференцировании правильно сходящегося ряда.

Займемся теперь наиболее простым и широко применимым классом функциональных рядов — степенными рядами, т. е. рядами вида

$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,\ a_n \in \mathbb{C}. \tag{28.9}$$

Поскольку замена $z - a = z'$ превращает степенной ряд по степеням $z - a$ в степенной ряд по степеням $z'$, мы основное внимание уделим рядам по степеням переменной, т. е. рядам вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{28.10}$$

Очевидно, что и в случае комплексной переменной большинство свойств степенных рядов, доказанных в вещественном случае, остаются справедливыми.

При $z = 0$ из ряда (28.10) мы получаем сходящийся числовой ряд

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 + \cdots = a_0.$$

Из этого факта следует, что множество сходимости любого степенного ряда не пусто.

Ответ на вопрос о том, что из себя представляет множество сходимости степенного ряда, дает теорема Абеля:

**ТЕОРЕМА 28.5**

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке $z$, такой, что $|z| < |z_1|$, если степенной ряд расходится в точке $z_2$, то он расходится в любой точке $z$, такой, что $|z| > z_2$.

● Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы Абеля 24.20, доказанной нами для вещественных степенных рядов. ●

Теорема Абеля позволяет сделать вывод о том, что множество сходимости степенного ряда (28.10) может:

а) состоять из одной точки $z = 0$;

б) содержать круг $|z| < R$, $R \neq 0$, такой, что для любого $z$, удовлетворяющего неравенству $|z| > R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится;

в) совпадать со всей комплексной плоскостью.

В первом случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен 0, во втором случае $R$ называют радиусом сходимости, в третьем случае говорят, что

радиус сходимости степенного ряда равен $\infty$. Во всех этих случаях радиус сходимости степенного ряда обозначают $R$, а множество $|z| < R$ называют кругом сходимости.

Очевидно, что если коэффициенты степенного ряда таковы, что существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$, $0 < Q < \infty$, то для радиуса сходимости степенного ряда справедлива формула

$$R = \frac{1}{Q} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{28.11}$$

(см. теорему 24.21), а если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \mathcal{D}, \quad 0 < \mathcal{D} < \infty,$$

то для радиуса сходимости степенного ряда справедлива формула

$$R = \frac{1}{\mathcal{D}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{28.12}$$

(см. теорему 24.22).

Следующая теорема проясняет характер сходимости степенного ряда внутри круга сходимости.

**ТЕОРЕМА 28.6**
В круге любого радиуса $r$, меньшего радиуса сходимости $R$, степенной ряд правильно сходится.

● Доказательство аналогично доказательству теоремы 24.24. ●

Следствием этого факта является возможность почленного дифференцирования степенного ряда внутри круга сходимости. Более того, справедлива

**ТЕОРЕМА 28.7**
Степенные ряды, полученные почленным дифференцированием или интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

● ●

**ТЕОРЕМА 28.8**
Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является аналитической функцией и ее производную можно вычислить почленным дифференцированием ряда.

● ●

Более того, из приведенных теорем ясно, что сумма степенного ряда внутри круга сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией, т. е. имеет производные любого порядка, которые могут быть вычислены последовательно почленным дифференцированием степенного ряда.

● *ПРИМЕР 28.1.* Сходится ли ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}(z - (1 - i))^n$$

в точке $i$; в точке $2 - i$?

● Вычислим $R$ — радиус сходимости ряда по формуле Коши (28.11):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n+n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{n}{2^n}} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Изобразим на комплексной плоскости круг сходимости ряда и точки $i$, $2 - i$ (см. рис. 28.1).

Ясно, что точка $i$ не принадлежит кругу сходимости, следовательно, ряд в этой точке расходится, точка $2 - i$ принадлежит кругу сходимости и, значит, ряд в этой точке сходится (абсолютно). ●

## § 28.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ $\sin z$, $\cos z$, $e^z$, $\ln z$ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим степенной ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (28.13)$$

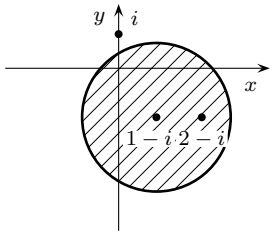


*Рис. 28.1.*

Мы знаем (см. § 24.7 п. «Разложение основных элементарных функций в степенные ряды»), что его радиус сходимости $R = \infty$ и что для вещественных $z$ имеет место равенство

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (28.14)$$

Так как радиус сходимости этого степенного ряда равен $\infty$, то он сходится на всей комплексной плоскости и можно говорить о его сумме как о функции переменной $z$, определенной на $\mathbb{C}$. Положим

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (28.15)$$

Равенство (28.15) задает на комплексной плоскости функцию $e^z$ так, что для вещественных значений $z$ она совпадает с функцией $e^z$, определенной ранее в математическом анализе.

Рассмотрим степенной ряд

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (28.16)$$

В § 24.7 п. «Разложение основных элементарных функций в степенные ряды» мы показали, что радиус сходимости ряда (28.16) равен $\infty$ и для вещественных значений $z$ имеет место равенство

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (28.17)$$

Так как радиус сходимости степенного ряда (28.16) равен $\infty$, то он сходится на всей комплексной плоскости и можно говорить о его сумме как о функции переменной $z$, определенной на $\mathbb{C}$. Положим

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \tag{28.18}$$

Это равенство определило на комплексной плоскости функцию $\sin z$ так, что для всех вещественных значений $z$ она совпадает с функцией $\sin z$, определенной ранее на $\mathbb{R}$ еще в курсе средней школы.

Аналогично полагают

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \tag{28.19}$$

Равенство (28.19) определяет на $\mathbb{C}$ функцию, которая для вещественных $z$ совпадает с функцией $\cos z$, определенной ранее на $\mathbb{R}$ еще в курсе средней школы.

Ясно, что и формулы для дифференцирования определенных нами на $\mathbb{C}$ функций $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, остались прежними:

$$(e^z)' = e^z; \quad (\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Между функциями $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, определенными с помощью степенных рядов, существует связь, которая описывается формулой Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i\,\sin z. \tag{28.20}$$

●
$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} -$$
$$- \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots + \frac{z^{4n}}{(4n)!} + \frac{iz^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{iz^{4n+3}}{(4n+3)!} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \cos z + i\,\sin z. \quad ●$$

Заметим, что из формулы Эйлера следует, что функция $e^z$ на $\mathbb{C}$ является периодической с периодом $2\pi i$.

●
$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z\,(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z(1 + i \cdot 0) = e^z \cdot 1 = e^z. \quad ●$$

Из периодичности функции $e^z$ на $\mathbb{C}$ следует, что эта функция не может иметь обратной функции и определение логарифмической функции на $\mathbb{C}$ дело не такое простое, как в вещественном случае.

**Определение 28.2.** *Натуральным логарифмом комплексного числа $z$ называют комплексное число $w$, удовлетворяющее соотношению:*

$$e^w = z. \tag{28.21}$$

Попробуем, пользуясь определением 28.2, найти $\ln z$. Положим $w = u + iv$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда из (28.21) получаем

$$e^{u+iv} = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{28.22}$$

Преобразуем левую часть в равенстве (28.22):

$$e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v). \tag{28.23}$$

Из (28.22) и (28.23) получаем

$$e^u(\cos v + i \sin v) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{28.24}$$

Приравняем в (28.24) модули выражений в левой и правой частях:

$$e^u = r \quad \overset{r \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad u = \ln r.$$

Из равенства (28.24) заключаем, что аргументы выражений, стоящих слева и справа, могут отличаться на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Окончательно имеем

$$\ln z = w = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \tag{28.25}$$

где $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

● *ПРИМЕР 28.2.*

а) Найти $\ln(1+i)$.

●

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) =$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В частности, при $k = 0$ получаем одно из возможных значений логарифма числа $1+i$

$$\ln(1+i)_{k=0} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} \approx 0{,}3465 + 0{,}7854i.$$
$$\ln(1+i)_{k=1} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{9\pi}{4}i \approx 0{,}3465 + 7{,}0686i \quad ●$$

б) Найти $\ln i$.

●

$$\ln i = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$
$$(\ln i)_{k=0} = i\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708i.$$
$$(\ln i)_{k=-1} = i\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = -\frac{3\pi}{2}i \approx -4{,}7124i. \quad ●$$

Из формулы (28.25) и рассмотренных примеров видно, что логарифмы комплексных чисел, отличных от нуля, существуют, но определены неоднозначно, более того, для каждого комплексного числа $z$ $(\neq 0)$ существует бесконечный набор значений $\ln z$, индексированный множеством целых чисел и задаваемый формулой

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{28.26}$$

Первое слагаемое в правой части (28.26) — натуральный логарифм положительного вещественного числа $|z|$, определенный ранее в курсе элементарной математики.

Таким образом, формула (28.26) задает на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ многозначную функцию $\ln z$. Фиксация в (28.26) значения $k$ выделяет однозначные ветви логарифмической функции $(\ln z)_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ясно, что когда точка $z$ опишет простую замкнутую кривую, не содержащую внутри себя и на себе точки 0, то $|z|$ и $\arg z$ вернутся к своим прежним значениям, т. е. мы

останемся на той же ветви функции $\ln z$. Если же простая кривая содержит внутри себя точку ноль, то при ее обходе против часовой стрелки (по часовой стрелке) $\ln z$ вернется к прежнему значению, а $\arg z$ получит приращение $2\pi$ $(-2\pi)$, это означает переход с ветви $(\ln z)_k$ на ветвь $(\ln z)_{k+1}$ $((\ln z)_{k-1})$.

Эти рассуждения показывают, что точка 0 является точкой разветвления функции $\ln z$.

## § 28.3. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Введем понятие интеграла от функции комплексного переменного вдоль кривой. Пусть в комплексной плоскости задана некоторая дуга $\overset{\smile}{AB}_L$ кривой $L$, на ней выбрано направление от $A$ к $B$, и в каждой точке дуги $\overset{\smile}{AB}_L$ задана функция $f(z)$. Разобьем дугу $\overset{\smile}{AB}_L$ точками деления $z_0 = A$, $z_1$, $\ldots$, $z_n = B$ в направлении от $A$ к $B$. На каждой дуге $z_{i-1}\overset{\smile}{z_i}_L$, $i = 1, \ldots, n$ зафиксируем по точке $\zeta_i$. Составим интегральную сумму

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) \tag{28.27}$$

Обозначим через $\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |z_k - z_{k-1}|$.

**Определение 28.3.** *Интегралом функции $f$ вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}_L$ кривой $L$ называется величина*

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} I_n(f), \tag{28.28}$$

*если предел в правой части* (28.28) *существует.*

Заметим, что если $\overset{\smile}{AB}_L = [a, b]$ — интервал вещественной оси и $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z)$ — вещественная часть функции $f(z)$, $v(z)$ — мнимая часть, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_a^b u(z)\,dz + i \int\limits_a^b v(z)\,dz.$$

### 28.3.1. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА ВДОЛЬ КРИВОЙ

Сформулируем условия на дугу кривой и функцию $f(z)$, гарантирующие существование интеграла от функции вдоль дуги кривой.

**Определение 28.4.** *Дуга $\overset{\smile}{AB}_L$ кривой $L$ называется гладкой, если ее можно представить параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

*в которых $x(t)$ и $y(t)$ на $[t_0, t_1]$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные, не обращающиеся в ноль одновременно ни в одной из точек интервала $[t_0, t_1]$.*

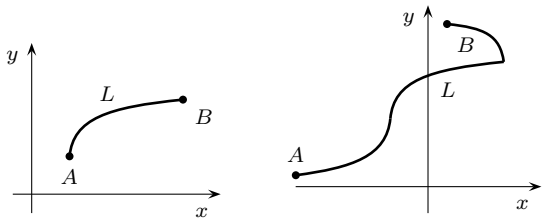



*Рис. 28.2.*

Геометрически условие гладкости означает непрерывность дуги кривой и существование в каждой точке дуги касательной, причем координаты направляющего вектора касательной — непрерывные на $[t_0, t_1]$ функции.

**Определение 28.5.** *Дуга $\breve{AB}_L$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна и состоит из конечного числа гладких частей.*

На рис. 28.2, а) изображена гладкая дуга $\breve{AB}_L$, на рис. 28.2, б) — кусочно-гладкая.

**ТЕОРЕМА 28.9 (Достаточные условия интегрируемости)**
Интеграл от функции $f$ вдоль дуги $\breve{AB}$ существует, если дуга $\breve{AB}$ кусочно-гладкая, а функция $f(z)$ непрерывна на $\breve{AB}$.

● Отделим в $f(z)$ действительную и мнимую части:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y), \quad z = x + i\,y,$$
$$\zeta_k = \xi_k + i\,\eta_k.$$

Тогда

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k - z_{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})]\,[u\,(\xi_k, \eta_k) + i\,v\,(\xi_k, \eta_k)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [u\,(\xi_k, \eta_k)\,(x_k - x_{k-1}) - v\,(\xi_k, \eta_k)\,(y_k - y_{k-1})] +$$
$$+ i \sum_{k=1}^{n} [v\,(\xi_k, \eta_k)\,(x_k - x_{k-1}) + u\,(\xi_k, \eta_k)\,(y_k - y_{k-1})]\,.$$

В разделе «Математический анализ» мы рассматривали криволинейные интегралы (§ 23.3), где было показано, что в условиях нашей теоремы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [u\,(\xi_k, \eta_k)\,(x_k - x_{k-1}) - v\,(\xi_k, \eta_k)\,(y_k - y_{k-1})]$$

существует и равен

$$\int_{\breve{AB}_L} [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy]\,;$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left[v\left(\xi_k, \eta_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) + u\left(\xi_k, \eta_k\right)\left(y_k - y_{k-1}\right)\right]$$

существует и равен

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} \left[v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\right];$$

значит,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

существует и

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_{\breve{AB}_L} \left[u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\right] + i \int\limits_{\breve{AB}_L} \left[v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\right]. \qquad (28.29)$$

Ясно, что если дуга $\breve{AB}_L$ задана параметрически:

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = h(t), \end{cases} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

то из формулы (23.53) получаем

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[u\big(g(t),h(t)\big)g'(t) - v\big(g(t),h(t)\big)h'(t)\right]\,dt + \\ + i \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[v\big(g(t),h(t)\big)g'(t) + u\big(g(t),h(t)\big)h'(t)\right]\,dt \qquad (28.30)$$

или

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[u(g(t),h(t)) + i\,v(g(t),h(t))\right]\left[g'(t) + i\,h'(t)\right]\,dt \qquad (28.31)$$

или

$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f\left(g(t) + i\,h(t)\right)\,d\left[g(t) + i\,h(t)\right]. \qquad (28.32)$$

Ясно, что интеграл от функции вдоль дуги кривой обладает следующими свойствами:

$1^{\circ}$ .
$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = -\int\limits_{\breve{BA}_L} f(z)\,dz.$$

$2^{\circ}$ .
$$\int\limits_{\breve{AB}_L} a\,f(z)\,dz = a \int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz.$$

$3^{\circ}$ .
$$\int\limits_{\breve{AB}_L} \big(f_1(z) + f_2(z)\big)\,dz = \int\limits_{\breve{AB}_L} f_1(z)\,dz + \int\limits_{\breve{AB}_L} f_2(z)\,dz.$$

$4^{\circ}$ .
$$\int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz = \int\limits_{\breve{AC}_L} f(z)\,dz + \int\limits_{\breve{CB}_L} f(z)\,dz$$

для любой точки $C \in \breve{AB}_L$.

● *ПРИМЕР 28.3.* Вычислить

$$\int\limits_{C_R} \frac{dz}{z},$$

где $C_R$ — окружность радиуса $R$ с центром в начале, т. е. $|z| = R$, обход по $C_R$ против часовой стрелки.

● Параметрические уравнения $C_R$ имеют вид

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Тогда по формуле (28.32) получим

$$\int\limits_{C_R} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(R\cos t + i\,R\sin t)}{R(\cos t + i\sin t)} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R(-\sin t + i\cos t)\,dt}{R(\cos t + i\sin t)} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)\,dt}{(\cos t + i\sin t)} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)(\cos t - i\sin t)\,dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[(\sin t\cos t - \sin t\cos t) + i\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\right] dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 28.4.* Вычислить

$$\int\limits_{C_{a,R}} \frac{dz}{(z-a)^m}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где $C_{a,R}$ — окружность $|z - a| = R$, обход $C_{a,R}$ совершается против часовой стрелки.

● Мы уже знаем, что в случае $m = 1$ (см. пример 28.3) имеет место

$$\int\limits_{C_{a,R}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Пусть $m \neq 1$. Очевидно (см. формулу Эйлера (28.20)), параметрическое уравнение окружности $C_{a,R}$ имеет вид $z = R\,e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$

тогда

$$\int\limits_{C_{a,R}} \frac{dz}{(z-a)^m} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\,e^{i\varphi} i\,d\varphi}{(R\,e^{i\varphi})^m} = \frac{i}{R^{m-1}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}}{e^{im\varphi}}\,d\varphi = \frac{i}{R^{m-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-m)\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{i\,e^{i(1-m)\varphi}}{R^{m-1} i\,(1-m)}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{e^{i(m-1)2\pi} - 1}{R^{m-1}(1-m)} \overset{(28.20)}{=}$$

$$= -\frac{1}{(1-m)R^{m-1}} (\cos 2\pi(m-1) + i\,\sin 2\pi(m-1) - 1) =$$

$$= \frac{1}{(1-m)R^{m-1}} (1 + i\cdot 0 - 1) = 0. \quad ●$$

Таким образом, мы получили (см. примеры 28.3, 28.4), что

$$\int\limits_{C_{a,R}} \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } m=1, \\ 0, & \text{если } m \neq 1. \end{cases} \tag{28.33}$$

Очевидно, имеет место теорема об оценке модуля интеграла:

**ТЕОРЕМА 28.10**

Имеет место оценка

$$\left| \int\limits_{\breve{AB}_L} f(z)\,dz \right| \leqslant \max_{z \in \breve{AB}_L} |f(z)| \cdot l\big(\breve{AB}_L\big), \tag{28.34}$$

где $l\big(\breve{AB}_L\big)$ — длина дуги кривой, по которой ведется интегрирование.

● Докажите эту теорему самостоятельно. ●

## § 28.4. ТЕОРЕМА КОШИ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Теперь мы докажем самую значительную теорему всей теории функций комплексной переменной, ее фундаментальная роль станет ясной из последующего изложения.

**ТЕОРЕМА 28.11 (Интегральная теорема Коши)**

Интеграл по замкнутому контуру $C$, ограничивающему односвязную область $\mathcal{D}$, от функции, аналитической в некоторой области $\mathcal{D}'$, целиком содержащей внутри себя $\mathcal{D} \cup C$, равен нулю.

● Выделим в $f(z)$ действительную и мнимую части, т. е. представим $f(z)$ в виде:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y), \quad z = x + i\,y,$$

$u(x,y)$, $v(x,y)$ — вещественные функции. Из формулы (28.29) получаем

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i \int\limits_C [v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy].$$

К каждому из интегралов, стоящему в правой части равенства, применим формулу Грина–Остроградского (23.56):

$$\int\limits_C (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Тогда

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i \iint\limits_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Так как по условиям теоремы функция $f(z)$ аналитическая, то для нее в $\mathcal{D}$ выполняются условия Коши–Римана (27.4), из которых следует, что подынтегральные функции в правой части последнего равенства тождественно равны нулю в $\mathcal{D}$, поэтому

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0 + i \cdot 0 = 0. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 28.5.* Вычислить $\int\limits_C \left(z^5 - 2z^4 + 3\right)\, dz,$

$C$ — произвольная замкнутая кривая.

● Так как функция $z^5 - 2z^4 + 3$ аналитична на всей плоскости, то по теореме Коши

$$\int\limits_C \left(z^5 - 2z^4 + 3\right)\, dz = 0. \quad ●$$

Следствием доказанной теоремы является независимость интеграла от дуги кривой $\overset{\smile}{AB}_L$, соединяющей точки $A$, $B$, лежащие вместе с дугой $\overset{\smile}{AB}_L$ внутри области аналитичности функции.

● Действительно, рассмотрим две дуги — $\overset{\smile}{AB}_L$ и $\overset{\smile}{AB}_{L_1}$, лежащие внутри области аналитичности функции $f$, возможны два случая:

а) дуги $\overset{\smile}{AB}_L$ и $\overset{\smile}{AB}_{L_1}$ не имеют общих точек, отличных от $A$, $B$;

б) дуги $\overset{\smile}{AB}_L$ и $\overset{\smile}{AB}_{L_1}$ пересекаются в конечном числе точек $A_1$, $A_2$, …, $A_{k-1}$, отличных от $A$, $B$ (нумерация от $A$ к $B$).

В случае а) рассмотрим замкнутый контур $C = \overset{\smile}{AB}_L \cup \overset{\smile}{BA}_{L_1}$, ограничивающий односвязную область, лежащую внутри области аналитичности функции $f$, тогда по теореме Коши

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 0.$$

Значит,

$$0 = \int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{BA}_{L_1}} f(z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\, dz - \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_{L_1}} f(z)\, dz. \qquad (28.35)$$

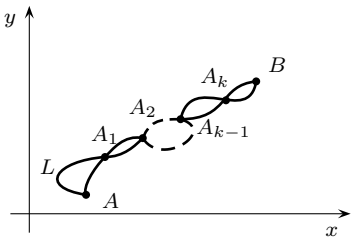



*Рис. 28.3.*

Из (28.35) следует, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\, dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}_{L_1}} f(z)\, dz.$$

Случай б) сводится к случаю а) (см. рис. 28.3).

Действительно,

$$\int\limits_C f(z)\, dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AA}_{1L}} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_1A_2}_L} f(z)\, dz + \cdots + \int\limits_{\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}_L} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_kB}_L} f(z)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\smile}{BA}_{k_{L_1}}} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_kA}_{k-1_{L_1}}} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_{k-1}A}_{k-2_{L_1}}} f(z)\, dz + \cdots + \int\limits_{\overset{\smile}{A_2A}_{1_{L_1}}} f(z)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\smile}{A_1A}_{L_1}} f(z)\, dz = \left(\int\limits_{\overset{\smile}{AA}_{1L}} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_1A}_{L_1}} f(z)\, dz\right) + \left(\int\limits_{\overset{\smile}{A_1A}_{2L}} f(z)\, dz + \int\limits_{\overset{\smile}{A_2A}_{1_{L_1}}} f(z)\, dz\right) + \cdots$$

$$\cdots+\left(\int\limits_{\overset{\smile}{A_{k-1}A_{k_L}}} f(z)\,dz+\int\limits_{\overset{\smile}{A_kA_{k-1_{L_1}}}} f(z)\,dz\right)+\left(\int\limits_{\overset{\smile}{A_kB_L}} f(z)\,dz+\int\limits_{\overset{\smile}{BA_{k_{L_1}}}} f(z)\,dz\right)=$$

$$=\int\limits_{C_1} f(z)\,dz+\int\limits_{C_2} f(z)\,dz+\cdots+\int\limits_{C_k} f(z)\,dz+\int\limits_{C_{k+1}} f(z)\,dz. \quad (28.35')$$

Здесь

$$C_1=A\overset{\smile}{A}_{1L}\cup\overset{\smile}{A_1}A_{L_1},\quad \ldots$$
$$C_i=A_{i-1}\overset{\smile}{A}_{i_L}\cup A_i\overset{\smile}{A}_{i-1_{L_1}},\quad \ldots,\quad C_{k+1}=A_k\overset{\smile}{B}_L\cup B\overset{\smile}{A}_{k_{L_1}}.$$

Контуры $C_1,\ \ldots,\ C_i,\ \ldots,\ C_{k+1}$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, поэтому

$$\int\limits_{C_1} f(z)\,dz=0,\ \ldots,\ \int\limits_{C_i} f(z)\,dz=0,\ \ldots,\ \int\limits_{C_{k+1}} f(z)\,dz=0.$$

Возвращаясь к равенству (28.35′), получаем

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\,dz+\int\limits_{\overset{\smile}{BA}_{L_1}} f(z)\,dz=\int\limits_{C_1} f(z)\,dz+\int\limits_{C_2} f(z)\,dz+\cdots$$
$$\cdots+\int\limits_{C_k} f(z)\,dz+\int\limits_{C_{k+1}} f(z)\,dz=0+0+\cdots+0+0=0.$$

Последнее, как мы знаем означает, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_L} f(z)\,dz=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}_{L_1}} f(z)\,dz. \quad \bullet$$

Отметим без доказательства еще один важный факт, что

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt=f(z)$$

в каждой точке непрерывности функции $f(z)$.

### 28.4.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Теорема Коши позволяет вывести формулу, представляющую значение аналитической функции через интеграл от нее по замкнутому контуру.

**ТЕОРЕМА 28.12**
Если замкнутая кривая $C$ ограничивает односвязную область $\mathcal{D}$ и функция $f$ аналитична в некоторой области $\mathcal{D}'$, целиком содержащей внутри себя $\mathcal{D}\cup C$, то для всякой внутренней точки $z$ области $\mathcal{D}$ справедлива формула

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \quad (28.36)$$

● Функция $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t-z}$ аналитична в двусвязной области $\mathcal{D}' \setminus \{z\}$. Так как точка $z$ — внутренняя для области $\mathcal{D}$, то существует $\delta > 0$, такое, что $s(z,\delta) \subset \mathcal{D}$ (а значит, и в $\mathcal{D}'$), тогда окружность $C_{\delta/2}$ радиуса $\delta/2$ с центром в точке $z$ лежит в $\mathcal{D}$ (а значит, и в $\mathcal{D}'$). Зафиксируем на $C_{\delta/2}$ произвольную точку $A$ и проведем от точки $A$ произвольный разрез $AB$ к кривой $C$ (см. рис. 28.4).

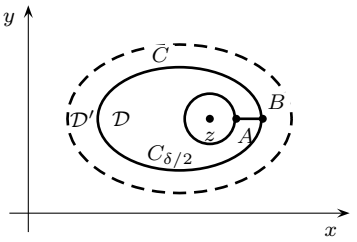



*Рис. 28.4.*

Рассмотрим замкнутый контур $K$, состоящий из обхода кривой $C$ против часовой стрелки от точки $B$, прохода по разрезу в направлении от $B$ к $A$, обхода окружности $C_{\delta/2}$ по часовой стрелке и прохода по разрезу в направлении от $A$ к $B$.

Полученный контур ограничивает односвязную область, в которой функция $\varphi(t)$ аналитична, аналитична она и в более широкой области, содержащей ее внутри себя $(\mathcal{D}' \setminus S(z,\delta/2))$, тогда по теореме Коши

$$\int\limits_K \varphi(t)\,dt = \int\limits_K \frac{f(t)}{t-z}\,dz = 0.$$

Интеграл по контуру $K$ разобьем на четыре интеграла, тогда

$$\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt + \int\limits_{BA} \frac{f(t)}{t-z}\,dt + \int\limits_{-C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt + \int\limits_{AB} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 0$$

(через «$-C_{\delta/2}$» обозначен обход окружности $C_{\delta/2}$ по часовой стрелке). Учитывая, что

$$\int\limits_{AB} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = -\int\limits_{BA} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{-C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = -\int\limits_{C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

получаем

$$\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \int\limits_{C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{28.37}$$

Левая часть равенства (28.37) не зависит от $\delta$, значит, и правая часть от $\delta$ не зависит (так как предел постоянной равен этой постоянной):

$$\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{28.38}$$

Вычислим предел в правой части (28.38), учитывая, что функция $f$ непрерывна в точке $z$ (она в этой точке аналитична):

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{C_{\delta/2}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \overset{t-z=re^{i\varphi}}{=} \lim_{r\to 0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= i \lim_{r\to 0} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z+re^{i\varphi}\right) d\varphi \overset{\substack{f \text{ непрерывна} \\ \text{в точке } z}}{=} 2\pi i f(z).$$

Из последнего равенства и (28.38) получаем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \quad \bullet$$

*Замечание.* Если в условиях теоремы 28.12 предполагать, что точка $z$ лежит вне области $\mathcal{D}$, то по основной теореме Коши

$$\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dz=0.$$

Ясно, что когда точка $z\in C$, интеграл $\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dz$, вообще говоря, не существует.

● *ПРИМЕР 28.6.* Вычислить

$$\int\limits_C \frac{t^2\,dt}{t+1},$$

если:

а) $C$ — окружность $|t|=3$;

б) $C$ — окружность $|t|=\frac{1}{3}$.

● Преобразуем интегральное выражение

$$\begin{cases} \int_C \frac{t^2\,dt}{t+1}=\int_C \frac{t^2\,dt}{t-(-1)}=2\pi i(-1)^2=2\pi i, & \text{если } C \text{ — окружность } |t|=3,\\ 0, & \text{если } C \text{ — окружность } |t|=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Из интегральной формулы Коши следует «совершенно неожиданный» результат о бесконечной дифференцируемости аналитической функции (определенной нами ранее как функция, имеющая производную (только первую!) в каждой точке области (см. определения 27.4, 27.5, 27.6)).

**ТЕОРЕМА 28.13**

Если функция аналитична в области $\mathcal{D}$ (в точке $z$), то она в $\mathcal{D}$ (в точке $z$) бесконечно дифференцируема, причем справедлива формула

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \tag{28.39}$$

где $C$ — простой контур, лежащий внутри $\mathcal{D}$ (внутри окрестности аналитичности точки $z$).

● Пусть функция аналитична в точке $z$, тогда существует окрестность точки $z$, в которой она аналитична (определение 27.5). Рассмотрим контур $C$, лежащий внутри этой окрестности и ограничивающий область, содержащую точку $z$, тогда по формуле Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \tag{28.40}$$

придадим точке $z$ приращение $\Delta z$ такое, что $z+\Delta z$ находится внутри $C$. Тогда

$$f\,(z+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-(z+\Delta z)}\,dt. \tag{28.41}$$

Вычитая из равенства (28.41) равенство (28.40), получаем

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(t)\left(\frac{1}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{t-z}\right)dt.$$

Значит,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\int\limits_C f(t)\left(\frac{t-z-t+z+\Delta z}{(t-z)(t-z-\Delta z)}\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-\Delta z)}\,dt.$$

Переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt. \tag{28.42}$$

Мы получили формулу (28.39) для $n=1$. Заменим в (28.42) $z$ на $z+\Delta z$:

$$f'(z+\Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{(t-(z+\Delta z))^2}\,dt. \tag{28.43}$$

Вычитая из равенства (28.43) равенство (28.42) и разделив полученное на $\Delta z$, получаем

$$\frac{\Delta f'}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\int\limits_C f(t)\left(\frac{1}{(t-z-\Delta z)^2} - \frac{1}{(t-z)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \Delta z}\int\limits_C f(t)\frac{\Delta z(2t-\Delta z-2z)}{(t-z-\Delta z)^2(t-z)^2}\,dt.$$

Переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получаем

$$f''(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f'}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{2\pi i}\int\limits_C f(t)\frac{\left(t-z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{(t-z-\Delta z)^2(t-z)^2}\,dt = \frac{2!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^3}. \tag{28.44}$$

Мы получили формулу (28.39) для $n=2$. Возможность завершить доказательство теоремы, совершив индуктивный переход от $n_0$ к $n_0+1$, мы предоставляем нашим читателям. ●

## Вопросы в конце параграфа

1. Докажите, что если функция аналитична в области $\mathcal{D}$ (в точке $z$), то все ее производные $f'(z)$, $f''(z)$, ... непрерывны в $\mathcal{D}$ (в точке $z$).
2. Зависит ли интеграл $\int_0^z \frac{dt}{t^2-1}$ от пути интегрирования
   а) в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$);
   б) в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$);
   в) в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} z < 0$);
   г) в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$)?
3. Чему равен интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{t\,dt}{(t^2-1)(t-1)},$$

если а) $C$ — окружность $|z-1|=1$; б) $C$ — окружность $|z-i|=1$?

## § 28.5. РЯД ТЕЙЛОРА. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ

В этом параграфе по аналогии с математическим анализом (но средствами ТФКП) будет получено представление аналитической (и, как мы доказали, бесконечно дифференцируемой) функции степенным рядом, называемым рядом Тейлора.

**ТЕОРЕМА 28.14**
Аналитическую функцию в каждой внутренней точке области аналитичности можно разложить в ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots,$$

радиус сходимости которого не меньше расстояния от точки $z_0$ до границы области аналитичности функции.

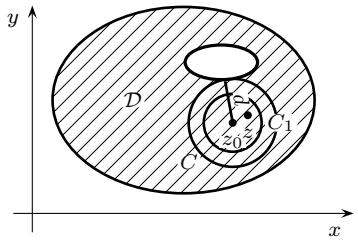



*Рис. 28.5.*

● Пусть $f(z)$ аналитична в области $\mathcal{D}$ (см. рис. 28.5).

Обозначим через $d$ расстояние от точки $z_0$ до $\partial\mathcal{D}$. Рассмотрим окружность $C$ с центром в точке $z_0$ и с радиусом $d$.

Возьмем внутри окружности $C$ произвольную точку $z$ и рассмотрим окружность $C_1$ с центром в точке $z_0$ и радиусом $r$, удовлетворяющим неравенству

$$|z - z_0| < r < d. \tag{28.45}$$

Из неравенства (28.45) следует, что точка $z$ лежит внутри окружности $C_1$ и функция $f(z)$ аналитична не только внутри $C_1$, но и внутри окружности $C$, тогда область, ограниченная окружностью $C_1$ (круг радиуса $r$ с центром в точке $z_0$), удовлетворяет условиям теоремы 28.12 и мы имеем право применить интегральную формулу Коши (28.36):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f(t)}{t - z}\,dt. \tag{28.46}$$

Преобразуем выражение $\frac{1}{t-z}$:

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)} = \frac{1}{(t - z_0)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)}. \tag{28.47}$$

Так как $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| \leqslant \frac{r}{d} < 1$, то дробь $1/\left(1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}\right)$ можно истолковать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{z - z_0}{t - z_0}. \quad \text{где } |q| < 1.$$

По теореме 28.1 получаем

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{t - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^n + \cdots \tag{28.48}$$

и ряд, стоящий в правой части равенства (28.48), является правильно сходящимся. Подставляя (28.48) в (28.47), получаем

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n+\cdots\right). \tag{28.49}$$

Подставим (28.49) в (28.46):

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2}+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n}+\cdots\right)dt=\\&=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_1}\left(\frac{f(t)}{t-z_0}+\frac{(z-z_0)f(t)}{(t-z_0)^2}+\cdots+\frac{(z-z_0)^nf(t)}{(t-z_0)^{n+1}}+\cdots\right)dt\right)=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\,dt+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\,dt+\cdots\\&\qquad\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt+\cdots\end{aligned} \tag{28.50}$$

Почленное интегрирование мы провели, так как ряд

$$\frac{f(t)}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{(t-z_0)^2}f(t)+\cdots+\frac{(z-z_0)^nf(t)}{(t-z_0)^{n+1}}+\cdots$$

на окружности $C_1$ является правильно сходящимся, действительно, если

$$M=\max_{|t-z_0|=r}|f(t)|,$$

то

$$\left|\frac{(z-z_0)^nf(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{|f(t)|}{|t-z_0|\cdot\left|\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n\right|}\leqslant\frac{M}{r}q^n,$$

где $q=\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|<1$.

Применяя к каждому слагаемому в (28.50) формулу (28.39), получим

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots \tag{28.51}$$

Так как точка $z$ нами была выбрана произвольно внутри окружности $C$, то $R$ — радиус сходимости степенного ряда (28.51) не меньше, чем радиус окружности $C$, т. е.

$$R\geqslant d. \quad \bullet$$

### 28.5.1. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ

Что определяет радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$? Оказывается, точка локальной потери аналитичности.

**Определение 28.6.** *Точка $z=a$ называется регулярной точкой функции, если существует $\delta>0$, что в окрестности $s(a,\delta)$ точки $a$ функция аналитическая.*

*Точка $z=a$ называется особой точкой функции, если для любого $\delta>0$ в окрестности $s(a,\delta)$ точки $a$ функция не является аналитической.*

Ясно, что если в области $\mathcal{D}$ функция $f$ аналитична, то любая внутренняя точка области $\mathcal{D}$ является регулярной точкой функции $f$.

Очевидно, что точки разрыва функции и точки разветвления функции являются ее особыми точками.

Например, у функции $f(z) = \frac{\sqrt{z-2}}{z+i}$ особыми являются точки $z = -i$ (точка разрыва) и $z = 2$ (точка разветвления).

Если известны все особые точки функции, то радиус сходимости ее разложения по степеням $(z - z_0)$ равен расстоянию от точки $z_0$ до ближайшей особой точки.

Действительно, из сказанного выше следует, что особые точки функции образуют границу области аналитичности функции. Тогда из теоремы 28.14 следует, что радиус сходимости ряда Тейлора функции не меньше, чем расстояние до ближайшей особой точки. Однако радиус сходимости ряда Тейлора не может быть больше, чем расстояние от точки $z_0$ до ближайшей особой точки, так как в этом случае ближайшая особая точка окажется внутри круга сходимости, но по теореме 28.8 сумма степенного ряда — аналитическая функция во всем круге сходимости, поэтому в нем особой точки быть не может.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 28.15**
Радиус сходимости разложения функции в ряд по степеням $(z - z_0)$ равен расстоянию от точки $z_0$ до ближайшей особой точки функции.

● *ПРИМЕР 28.7.* Найти радиус сходимости разложения функции $f(z) = \sqrt{z-2}/(z+i)$ в ряд Тейлора по степеням $z$.

● Применим к этой функции теорему 28.15. Ясно, что ближайшей к $z_0 = 0$ особой точкой функции является точка $-i$, тогда $R$ — радиус сходимости разложения $f(z)$ по степеням $z$ определяется из простых геометрических соображений:

$$R = |-i-0| = |-i| = 1. \quad \bullet$$

Ряд Тейлора дает разложение функции в степенной ряд, но, может быть, другими средствами можно получить другое разложение той же функции в степенной ряд? Следующая теорема, называемая теоремой единственности разложения функции в степенной ряд, утверждает, что такая ситуация невозможна.

**ТЕОРЕМА 28.16**
Если функция $f(z)$ разлагается в некоторой окрестности точки $z_0$ в ряд по степеням $(z - z_0)$, т. е.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots, \tag{28.52}$$

то этот ряд является ее рядом Тейлора, т. е.

$$a_0 = f(z_0), \quad a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \ldots$$

● См. § 24.7. ●

● *ПРИМЕР 28.8.* Найти разложение функции $f(z) = \frac{1-\cos 2z}{z^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

● Предыдущая теорема позволяет нам обойтись без вычисления производных и их значений в точке $z = 0$. Можно воспользоваться известным разложением в степенной ряд функции $\cos z$ (а вернее, ее определением как функции комплексного переменного):

$$\frac{1-\cos 2z}{z^2} = \frac{1-\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}+\cdots\right)}{z^2} = \frac{4}{2!} - \frac{2^4 z^2}{4!} + \frac{2^6 z^4}{6!} - \cdots \quad ●$$

### 28.5.2. ОЦЕНКИ КОШИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ТЕЙЛОРА

В явном выражении для коэффициентов ряда Тейлора присутствуют значения производных функции $f(z)$ в точке $z_0$ (см. (28.51)), но формулы (28.39) позволяют выразить значение производной через интеграл, в котором фигурирует сама функция $f$. Это позволяет получить оценку коэффициентов ряда Тейлора и значений производной функции в терминах самой функции.

**ТЕОРЕМА 28.17**

Для коэффициентов ряда Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

(для значений производных в регулярной точке $z_0$) справедлива оценка

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{28.53}$$

$$\left(|f^n(z_0)| \leqslant \frac{n!M(r)}{r^n},\right) \tag{28.54}$$

где $r$ — любое положительное число, меньшее, чем радиус сходимости ряда Тейлора, а

$$M(r) = \max_{z \in C_r} |f(z)|, \tag{28.55}$$

где $C_r$ — окружность радиуса $r$ с центром в точке $z_0$.

● Мы знаем ((28.39), (28.50)), что

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt.$$

Тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r}\left|\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_r}\frac{|f(t)|}{|t-z_0|^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{n+1}}\int\limits_{C_r}|f(t)|\,dt \overset{(28.34)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi r^{n+1}}M(r)2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}. \quad ●$$

Простым следствием доказанной теоремы являются две знаменитые теоремы — теорема Лиувилля[1] и основная теорема алгебры.

[1] Лиувилль Жозеф (1809–1882) — французский математик, член Парижской АН (1839), почетный член Петербургской АН. Преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. Построил теорию эллиптических функций, на основе общей теории аналитических функций исследовал краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Доказал теорему существования трансцендентных чисел.

**ТЕОРЕМА 28.18 (Теорема Лиувилля)**
Если функция $f(z)$ аналитична на всей плоскости и ограничена на ней, т. е. существует такое число $M$, что для любого $z$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leqslant M,$$

то функция $f(z)$ равна постоянной, т. е. $f(z) \equiv \text{const}$.

● Так как функция $f$ аналитична на всей плоскости, то ее можно разложить в ряд Тейлора по степеням $z$ и радиус сходимости ряда Тейлора $R = \infty$. Значит, в оценке Коши коэффициентов ряда Тейлора

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$$

может фигурировать любое положительное $r$. Пусть $n \geqslant 1$, учтем ограниченность функции $f$:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M}{r^n}. \tag{28.56}$$

Из оценки (28.56) следует, что

$$|a_n| \leqslant \lim_{r\to\infty} \frac{M}{r^n} = 0. \tag{28.57}$$

Неравенство (28.57) равносильно тому, что

$$|a_n| = 0.$$

Итак, мы доказали, что все коэффициенты ряда Тейлора, начиная с $a_1$, равны нулю, тогда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots = a_0 = f(0). \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 28.19 (Основная теорема алгебры)**
Алгебраическое уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_1 z + a_0 = 0,$$

$a_n \neq 0$ степени $n \geqslant 1$ имеет на комплексной плоскости по крайней мере один корень.

● Докажем теорему от противного, тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

аналитична на всей плоскости. Мы знаем, что

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = 0.$$

Значит, существует такое $R > 0$, что для всех $z$ таких, что $|z| > R$

$$|f(z)| < \frac{1}{2}.$$

В замкнутом круге $|z| \leqslant R$ функция $f(z)$ как аналитическая ограничена, т. е. существует такое $M$, что $|f(z)| \leqslant M$, если $|z| \leqslant R$. Тогда

$$|f(z)| \leqslant \max\left\{\frac{1}{2}, M\right\}$$

на всей комплексной плоскости, и по теореме Лиувилля это означает, что $f(z)$ — постоянная на всей плоскости функция, что невозможно, так как $a_n \neq 0$. ●

## § 28.6. КОРНИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Функция, аналитическая на всей плоскости, т. е. представимая на всей плоскости в виде степенного ряда по степеням $z$, обобщает понятие «многочлен от одной переменной». Особенно четко это прослеживается в теоремах о корнях аналитической функции.

**ТЕОРЕМА 28.20**
Если функция $f(z)$ не равна тождественно нулю, аналитична в точке $z_0$ и обращается в ней в ноль, т. е. $f(z_0) = 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что в некоторой окрестности $s'(z, \delta)$ точки $z_0$ функция не обращается в ноль, т. е. нули аналитической функции друг от друга изолированы.

● Так как функция $f(z)$ аналитична в точке $z_0$, то в некоторой окрестности точки $z_0$ ее можно разложить в ряд по степеням $(z - z_0)$:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Так как $f(z_0) = 0$, то $a_0 = f(z_0) = 0$.

Если бы все остальные коэффициенты ряда Тейлора равнялись нулю, то функция $f(z)$ была бы тождественно равной нулю. Обозначим через $k$ такой индекс, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$. Тогда

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots = \\ = (z - z_0)^k \left(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right),$$

т. е. $z_0$ является корнем кратности $k$ функции $f(z)$. Степенной ряд $a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots$ выражает в некоторой окрестности точки $z_0$ аналитическую функцию $\psi(z)$, а значит, и непрерывную в некоторой окрестности точки $z_0$.

Функция $\psi(z)$ не обращается в ноль в точке $z_0$, действительно, $\psi(z_0) = a_k \neq 0$. Значит, существует такая окрестность точки $z_0$, в которой функция $\psi(z)$ не обращается в ноль. Тогда в этой окрестности функция $f(z) = (z - z_0)^k \cdot \psi(z)$ имеет корень только в точке $z_0$ (кратности $k$). ●

*Следствие 28.1.* Предельная точка нулей не может быть регулярной точкой функции, отличной от тождественного нуля.

● ●

*Следствие 28.2.* Если функция $f(z) \not\equiv 0$ аналитическая в некоторой конечной области $\mathcal{D}$ и на ее границе $\partial\mathcal{D}$, то в $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ может находиться только конечное число нулей функции $f$.

● ●

### Вопросы в конце параграфа

1. Какова кратность
   а) корня $z=0$ функции $z-\sin z$;
   б) корня $z=0$ функции $1-\cos 2z$;
   в) корня $z=\frac{\pi}{2}$ функции $\ln(1-\cos z)$;
   г) корня $z=1$ функции $\cos\frac{\pi z}{2}\ln z$?

## § 28.7. РЯД ЛОРАНА[2]

**ТЕОРЕМА 28.21**
Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, то ее можно разложить в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-z_0)$, сходящийся во всех точках кольца $r<|z-z_0|<R$:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots+\\+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots, \quad (28.58)$$

называемый рядом Лорана.

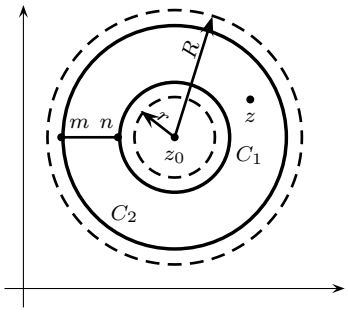



*Рис. 28.6.*

● Пусть $z_0$ — произвольная точка, лежащая внутри кольца. Выберем две окрестности $C_1$ и $C_2$ с центром в точке $z_0$ с радиусами $r_1$ и $r_2$ соответственно так, чтобы $r<r_1<|z-z_0|<r_2<R$ (см. рис. 28.6).

Проведем разрез $mn$, соединяющий окружности $C_1$ и $C_2$.

Рассмотрим контур $L$, состоящий из обхода окружности $C_2$ против часовой стрелки (от точки $m$ до точки $m$), прохода по разрезу от $m$ к $n$, обхода окружности $C_1$ по часовой стрелке и прохода по разрезу от $n$ к $m$.

Этот контур ограничивает соответствующую область, и функция аналитична не только в этой области, но и в более широкой области (исходном кольце). Поэтому мы можем применить формулу Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\\=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt+\int\limits_{mn}\frac{f(t)}{t-z}\,dt+\int\limits_{-C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt+\int\limits_{nm}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right). \quad (28.59)$$

Здесь через $-C_1$ обозначен обход окружности $C_1$ по часовой стрелке. Ясно, что

$$\int\limits_{mn}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=-\int\limits_{nm}\frac{f(t)}{t-z}\,dt, \qquad \int\limits_{-C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=-\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

[2]Лоран Пьер Альфонс (1813–1854) — французский математик, военный инженер, предложил в 1843 г. разложение аналитической функции в кольце в ряд по целым положительным и отрицательным степеням.

Тогда из (28.59) получаем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{28.60}$$

Рассмотрим первый интеграл. Так как в нем $t\in C_2$, а $z$ лежит внутри $C_2$, то $|z-z_0|<|t-z_0|$, поэтому дробь $\frac{1}{t-z}$ можно представить как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{z-z_0}{t-z_0}$, $|q|<1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0+z_0-z}=\frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\\ =\frac{1}{t-z_0}\left(1+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3+\cdots\right)=\\ =\frac{1}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{(t-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3}+\frac{(z-z_0)^3}{(t-z_0)^4}+\cdots\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(t)}{t-z}=\frac{f(t)}{t-z_0}+\frac{(z-z_0)f(t)}{(t-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2f(t)}{(t-z_0)^3}+\cdots+\frac{(z-z_0)^nf(t)}{(t-z_0)^{n+1}}+\cdots \tag{28.61}$$

Легко проверить, что ряд (28.61) на окружности $C_2$ является правильно сходящимся и мы имеем право его проинтегрировать почленно. Значит,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}+\\ +\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^3}+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt+\cdots=\\ \stackrel{\text{def}}{=}a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots\end{aligned} \tag{28.62}$$

Перейдем к рассмотрению второго интеграла в (28.60). В нем переменная интегрирования $t_2\in C_1$, а точка $z$ лежит вне $C_1$, поэтому $|t-z_0|<|z-z_0|$. Значит, дробь $-\frac{1}{t-z}$ можно представить как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{t-z_0}{z-z_0}$, $|q|<1$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{t-z}=\frac{1}{z-t}=\frac{1}{z-z_0+z_0-t}=\frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)}=\\ =\frac{1}{z-z_0}\left(1+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n+\cdots\right).\end{aligned}$$

Ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)}{(z-z_0)}+\frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)(t-z_0)}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots$$

правильно (по $t$) сходится на окружности $C_1$ и его на $C_1$ можно почленно интегрировать.

Значит,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i(z-z_0)}\int\limits_{C_1}f(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^2}\int\limits_{C_1}f(t)(t-z_0)\,dt+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^{n+1}}\int\limits_{C_1}f(t)(t-z_0)^n\,dt+\cdots$$
$$\cdots\stackrel{\text{def}}{=}\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3}+\cdots \quad (28.63)$$

Подставляя (28.62) и (28.63) в (28.60), получаем

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots+$$
$$+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots$$

Отметим, что

1. Ряд Лорана — это сумма двух рядов — степенного по степеням $(z-z_0)$ и ряда по степеням $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Первый, как степенной ряд, сходится внутри круга $|z-z_0|<R$ и выражает внутри него аналитическую функцию. Обозначим ее $f_1(z)$. Второй сходится вне круга $|z-z_0|>r$ и выражает там аналитическую функцию $f_2(z)$. Таким образом, ряд Лорана позволяет представить функцию $f(z)$, аналитическую в кольце $r<|z-z_0|<R$, в виде суммы $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ двух аналитических функций, из которых одна — аналитическая вне меньшей окружности кольца, а другая — аналитическая внутри большей окружности кольца.
2. Мы получили формулы

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^n}\,dt \quad \text{и} \quad a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}f(t)(t-z_0)^n\,dt.$$

Замена в каждой из них $n$ на $-n$ превращала бы первую во вторую, а вторую — в первую, если бы в них интегрирование велось по одному и тому же контуру, но функции $\frac{f(t)}{(t-z_0)^n}$ и $f(t)(t-z_0)^n$, $n\in\mathbb{N}$ аналитичны в кольце и интегралы от каждой из них по любым окружностям, лежащим внутри кольца, равны между собой.

Действительно, пусть $F(z)$ аналитична в кольце $r<|z-z_0|<R$. Рассмотрим две окружности $C_1\colon|z-z_0|=r_1$ и $C_2\colon|z-z_0|=r_2$ и $r<r_1<r_2<R$ (см. рис. 28.6). Тогда по интегральной теореме Коши

$$0=\int\limits_L F(t)\,dt=\int\limits_{C_2}F(t)\,dt+\int\limits_{mn}F(t)\,dt+\int\limits_{-C_1}F(t)\,dt+\int\limits_{nm}F(t)\,dt. \quad (28.64)$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{mn}F(t)\,dt=-\int\limits_{nm}F(t)\,dt \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{-C_1}F(t)\,dt=-\int\limits_{C_1}F(t)\,dt$$

из (28.64) получаем

$$\int\limits_{C_1}F(t)\,dt=\int\limits_{C_2}F(t)\,dt. \quad (28.65)$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ — две произвольные окружности внутри кольца аналитичности функции $F(t)$. Вернемся к формулам для коэффициентов ряда Лорана. Из сказанного следует, что в каждой из них интегрирование можно вести по произвольной окружности $C_\rho$: $|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$, тогда

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(t)}{(t-z_0)^n}\,dt,\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{28.66}$$

3. Как и для ряда Тейлора, для ряда Лорана имеет место единственность разложения, т. е. если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ и разложена в ряд (28.59) , то его коэффициенты выражаются по формулам (28.66).

● *ПРИМЕР 28.9.* Найти разложение функции $f(z)=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}$ в ряд Лорана по степеням $z$.

● Ясно, что точками разрыва этой функции являются точки $z=2$ и $z=3$. В кольце $2<|z|<3$ функция $f(z)$ аналитическая. Представим ее в виде суммы двух функций, одна из которых аналитична вне окружности $|z|=2$, другая — внутри окружности $|z|=3$

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{A}{(z-2)}+\frac{B}{(z-3)};$$
$$Az-3A+Bz-2B=2z-5;$$
$$\begin{cases}A+B=2\\3A+2B=5\end{cases}\iff\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}.$$

Дробь $\frac{1}{z-2}$ разлагаем в ряд по отрицательным степеням $z$ (вне окружности $|z|=2$):

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{z}\right)^n+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\cdots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\cdots$$

Дробь $\frac{1}{z-3}$ разлагаем в ряд Лорана по неотрицательным степеням $z$:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{-3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\cdots+\frac{z^n}{3^n}+\cdots\right)=$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}-\cdots-\frac{z^n}{3^{n+1}}-\cdots$$

Окончательно:

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=-\frac{1}{3}-\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}-\cdots-\frac{z^n}{3^{n+1}}-\cdots+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\cdots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\cdots$$ ●

## Вопросы в конце параграфа

1. Найти разложение функции $$f(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}$$

а) в кольце $1<|z|<2$ по степеням $z$;
б) в кольце $2<|z-4|<3$ по степеням $(z-4)$.

## § 28.8. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРА

**Определение 28.7.** *Особая точка $z_0$ называется изолированной особой точкой однозначного характера (ИОТОХ) функции $f(z)$, если существует $\delta > 0$ такое, что в двусвязной области $s'(z_0, \delta)$ функция $f(z)$ аналитическая.*

● *ПРИМЕР 28.10.* Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}.$$

Ясно, что особой точкой является $z = 0$. Остальные находятся из условия

$$\sin \frac{\pi}{z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{z} = \pi k,\ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

или

$$z_k = \frac{1}{k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Около каждой из этих точек можно взять круг, не содержащий других точек такого вида, значит, точки $z_k = \frac{1}{k}$, $k = \pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, ... являются ИОТОХ. Точка $z = 0$ является предельной для ИОТОХ $z_k$ $(\lim_{|k| \to \infty} z_k = 0)$, поэтому она не является ИОТОХ.

У функции $\sqrt{z}$ точка $z = 0$ является изолированной точкой, но в $s'(0, \delta)$ $\sqrt{z}$ не является аналитической функцией, так как в этой области $\sqrt{z}$ не является однозначной функцией. Поэтому точка $z = 0$ не является ИОТОХ для $\sqrt{z}$.

**ТЕОРЕМА 28.22**

Пусть точка $z_0$ является ИОТОХ функции $f(z)$, тогда существует $\delta > 0$ такое, что в выколотой окрестности $s'(z_0, \delta)$ функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$.

● Пусть $z \in s'(z_0, \delta)$, где $\delta$ выбрано так, что в $s'(z_0, \delta)$ $f(z)$ аналитична.

Рассмотрим $r > 0$ такое, что $|z - z_0| > r$, тогда $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < \delta$ и по теореме 28.21 разлагается в этом кольце по степеням $z - z_0$. Любое $r'$ такое, что $0 < r' < r$, подходит для построения ряда Лорана так же «хорошо», как и $r$. Поэтому разложение, полученное для $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $r < |z - z_0| < \delta$, является разложением на множестве $0 < |z - z_0| < \delta$, а это и есть $s'(z_0, \delta)$. ●

**Определение 28.8.** *В разложении $f(z)$ в окрестности ИОТОХ $z_0$ по степеням $(z - z_0)$ в ряд Лорана*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots + a_{-1}\frac{1}{(z - z_0)} + a_{-2}\frac{1}{(z - z_0)^2} + \cdots + a_{-n}\frac{1}{(z - z_)^n} + \cdots$$

*часть разложения по неотрицательным степеням $(z - z_0)$ называется регулярной частью, а часть разложения по отрицательным степеням $(z - z_0)$ называется главной частью разложения функции $f(z)$.*

**Определение 28.9.** *ИОТОХ называется*

1. *устранимой, если главная часть разложения отсутствует;*
2. *полюсом, если главная часть разложения содержит конечное число членов, при этом если* $a_{-n_0} \neq 0$ *и* $a_{-(n_0+1)} = a_{-(n_0+2)} = \cdots = 0$, *то* $n_0$ *называется порядком полюса;*
3. *существенно особой, если главная часть содержит бесконечное число членов, не равных нулю.*

*ПРИМЕР 28.11.* Ясно, что у функции $\frac{z}{\sin 2z}$ точка $z = 0$ является устранимой ИОТОХ.

Функция $\frac{\cos z}{z}$ имеет в точке $z = 0$ полюс первого порядка.

Действительно,

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{рег. часть}} + \underbrace{\left(-\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \cdots\right)}_{\text{гл. часть}}.$$

Функция $e^{\frac{1}{z-1}}$ имеет в точке $z = 1$ существенно особую точку. Действительно,

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \underbrace{1}_{\text{рег. часть}} + \underbrace{\left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \cdots\right)}_{\text{гл. часть}}.$$

Ясно, что имеет место

**ТЕОРЕМА 28.23**

Точка $z = a$ является полюсом порядка $m$ функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $z = a$ является корнем кратности $m$ функции $\frac{1}{f(z)}$.

Важными являются и теоремы о поведении функции в окрестности ИОТОХ.

**ТЕОРЕМА 28.24**

Если $z = z_0$ — устранимая ИОТОХ функции $f$, то существует конечный $\lim_{z \to z_0} f(z)$ и, значит, в некоторой окрестности точки $z_0$ функция ограничена, и обратно, если в некоторой окрестности ИОТОХ $z_0$ функция $f(z)$ ограничена, то ИОТОХ устранимая.

**ТЕОРЕМА 28.25**

Если $z$ стремится произвольным образом к полюсу $z_0$, то $|f(x)|$ неограниченно растет. Наоборот, если $z_0$ ИОТОХ, такая, что при произвольном приближении $z$ к $z_0$ $|f(x)|$ неограниченно растет, то $z_0$ — полюс.

Более того, ИОТОХ является полюсом порядка $m$ тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=a<\infty. \tag{28.67}$$

**ТЕОРЕМА 28.26 (Теорема Сохоцкого[3])**
В любой окрестности существенно особой ИОТОХ $z_0$ для любого комплексного значения $C$ и любого положительного числа $\varepsilon$ существует хотя бы одна точка $z'$ такая, что

$$|f(z')-C|<\varepsilon \tag{28.68}$$

(из этого, в частности, следует и неограниченность функции в любой окрестности существенно особой ИОТОХ). Справедливо и обратное.

Грубая формулировка теоремы Сохоцкого: «В любой окрестности существенно особой ИОТОХ функция принимает значения как угодно близкие к любому числу».

### Вопросы в конце параграфа

1. Разложить функцию $\frac{z+1}{z^2+z-2}$
   а) в кольце $1<|z|<2$; б) внутри круга $|z|<1$; в) вне окружности $|z|=2$.
2. Разложить $\frac{\sin z}{1-z}$ внутри круга $|z|<1$ и вне его.
3. Найти разложение следующих функций в окрестности точки $z=0$:
$$\frac{1}{\sin z};\quad \operatorname{ctg} z;\quad ze^{-1/z^2};\quad \frac{1}{z-\sin z}.$$
4. Найти нули следующих функций:
   а) $z\cdot e^{z^2}$; б) $\sin(z^2+1)-1/2$; в) $z-\sqrt{z-2}$.
5. Найти полюсы и их порядок следующих функций:
   а) $\frac{z+2}{z^3+z^2-z+1}$; б) $\frac{1-\cos z}{z-\sin z}$; в) $\frac{1}{e^z+1}$.

## § 28.9. ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Одним из главных приложений ТФКП является применение методов ТФКП к вычислению определенных интегралов. Эти простые и красивые результаты основаны на понятии вычет функции относительно ИОТОХ.

**Определение 28.10.** *Вычетом функции $f(z)$ относительно ИОТОХ $z_0$ называется*

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_0}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{C_{z_0}} f(t)\,dt,$$

*где $C_{z_0}$ — произвольная окружность с центром в точке $z_0$ такая, что функция $f$ на ней регулярна и внутри окружности $C_{z_0}$ нет других особых точек функции $f$ (обход против часовой стрелки).*

[3] Сохоцкий Юлиан Васильевич (1842–1927) — русский математик, родился в Варшаве. Окончил Петербургский университет (1866 г.). Профессор этого университета (с 1873 г.), известен работами по ТФКП, алгебре и теории чисел.

Ясно, что определение вычета не зависит от окружности $C_{z_0}$, так как если $C'_{z_0}$ — другая окружность, удовлетворяющая тем же условиям, что и $C_{z_0}$, то

$$\int\limits_{C'_{z_0}} f(t)\,dt = \int\limits_{C_{z_0}} f(t)\,dt.$$

Имеет место

**ТЕОРЕМА 28.27 (Основная теорема о вычетах)**
Если кривая $L$ ограничивает односвязную область $\mathcal{D}$ и функция $f$ регулярна во всех точках $L$ и области $\mathcal{D}$, кроме конечного числа полюсов и существенно особых точек, лежащих внутри $\mathcal{D}$, то

$$\int\limits_L f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res} f\Big|_{z=a_i}. \tag{28.69}$$

Здесь $a_i$ — ИОТОХ, лежащая внутри $\mathcal{D}_0$.

● Окружим каждую точку $a_i$ окружностью $C_{a_i}$, лежащей внутри $\mathcal{D}$ и удовлетворяющей определению 28.10. Каждую окружность $C_{a_i}$ соединим разрезом $m_i n_i$ с $L$ (см. рис. 28.7).

В результате мы получаем контур $\Gamma$, удовлетворяющий условиям теоремы Коши. Тогда

$$\int\limits_\Gamma f(t)\,dt = 0.$$

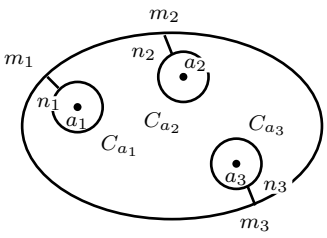


*Рис. 28.7.*

Разбивая интеграл на сумму интегралов и замечая, что все разрезы проходятся дважды в противоположных направлениях, получаем

$$\int\limits_L f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{-C_{a_i}} f(t)\,dt = 0. \tag{28.70}$$

Здесь $-C_{a_i}$ — обход $C_{a_i}$ по часовой стрелке, тогда

$$\int\limits_L f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{C_{a_i}} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{a_i}} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \operatorname{res} f\Big|_{z=a_i}. \quad ●$$

Следующие две теоремы дают ключ к нахождению вычетов.

**ТЕОРЕМА 28.28**
Вычет относительно ИОТОХ $z_0$ равен коэффициенту $a_{-1}$ в главной части ряда Лорана при разложении $f$ по степеням $z - z_0$.

● Разложим $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots + \\ + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots + a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots$$

Возьмем окружность $C_{z_0}$, удовлетворяющую определению 28.10. Проинтегрируем обе части последнего равенства вдоль $C_{z_0}$:

$$\int\limits_{C_{z_0}} f(t)\,dt = \int\limits_{C_{z_0}} a_0\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{C_{z_0}} (t-z_0)^n\,dt \; + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int\limits_{C_{z_0}} (t-z_0)^{-n}\,dt.$$

Почленное интегрирование возможно, так как ряд Лорана на $C_{z_0}$ сходится правильно. Мы знаем (см. формулу (28.33)), что все интегралы при $n \neq -1$ равны нулю, а

$$\int\limits_{C_{z_0}} (t-z_0)^{-1}\,dt = 2\pi i,$$

тогда

$$\int\limits_{C_{z_0}} f(t)\,dt = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

или

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{z_0}} f(t)\,dt \overset{\text{опред. 28.10}}{=} \operatorname{res} f\Big|_{z=z_0}$$

**ТЕОРЕМА 28.29**

Вычет функции $f$ относительно простого полюса $z_0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0),$$

а в случае полюса порядка $m$ по формуле

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right).$$

а) Рассмотрим случай простого полюса (порядок $m=1$). Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \\ + a_n(z-z_0)^n + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(z-z_0)$ и найдем предел при $z \to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \big(a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \\ + \cdots + a_n(z-z_0)^{n+1} + \cdots\big) = a_{-1} \overset{\text{теор. 28.28}}{=} \operatorname{res} f\Big|_{z=z_0}.$$

б) Пусть $z_0$ — полюс порядка $m$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots + \\ + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots + a_{-m}(z-z_0)^{-m}. \quad (28.71)$$

Умножим обе части равенства (28.71) на $(z-z_0)^m$, продифференцируем $m-1$ раз по $z$:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^{m-1}\right) = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-z_0) + \cdots$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(f(z)(z-z_0)^{m-1}\right) = (m-1)!a_{-1} \overset{\text{теорема 28.28}}{=} (m-1)!\operatorname{res} f\Big|_{z=z_0}.$$

Значит,

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}f(z)(z-z_0)^{m-1}\right). \quad \bullet$$

### 28.9.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Сейчас будут приведены примеры применения теории вычетов к вычислению определенных интегралов (как собственных, так и несобственных).

**Интегралы от 0 до $2\pi$ от функций, рациональных относительно синуса и косинуса.** Сейчас на конкретном примере будет показан общий прием, который позволяет вычислить интегралы от таких функций проще, чем это делалось в математическом анализе.

● *ПРИМЕР 28.12.* Вычислить

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}\,d\varphi.$$

● Делаем замену $e^{i\varphi} = z$. По формулам Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz};$$

$$i\varphi = \ln z; \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Интегрирование по $[0, 2\pi]$ переходит в интегрирование по единичной окружности с центром в начале координат

$$I = -\int_C \frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\,dz.$$

Подынтегральная функция имеет внутри $C$ два простых полюса: $z=0$, $z = i(2-\sqrt{3})$. С помощью теоремы 28.29 найдем вычеты $f$ в этих точках:

$$\operatorname{res}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+4z+1}{z^2-4iz-1} = -1.$$

$$\operatorname{res}\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)}\Big|_{z=(2-\sqrt{3})i} = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}(z-(2-\sqrt{3})i)\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4iz-1)} =$$

$$= \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}(z-(2-\sqrt{3})i)\frac{z^2+4z+1}{z(z-(2-\sqrt{3})i)(z-(2+\sqrt{3})i)} =$$

$$= \lim_{z\to(2-\sqrt{3})i}\frac{z^2+4z+1}{z(z-(2+\sqrt{3})i)} = 1+\frac{2i}{\sqrt{3}}.$$

По основной теореме о вычетах (теорема 28.27) получаем

$$I = -2\pi i\left(-1+1+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \quad \bullet$$

**Несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, $R(x)$ — рациональная функция.** Известно, что интеграл существует, если знаменатель функции $R(z)$ не имеет нулей на вещественной оси и степень числителя ниже степени знаменателя по крайней мере на две единицы.

Теорию вычетов в этом случае применяют так. Для функции комплексного переменного $R(z)$ рассматривают односвязную область, ограниченную контуром $L$: $[-R,R]\cup C_{+R}$, где $C_{+R}$ — верхняя полуокружность, имеющая $[-R,R]$ диаметром. $R$ выбирают так, чтобы все полюса функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри области, ограниченной контуром $L$. Тогда

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i\in \operatorname{Im} z>0} \operatorname{res} f\Big|_{z=z_i}. \tag{28.72}$$

Правая часть равенства (28.72) не зависит от $R$. Если при этом окажется, что

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz = 0,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz \overset{(28.72)}{=} 2\pi i \sum_{z_i\in \operatorname{Im} z>0} \operatorname{res} f\Big|_{z=z_i}.$$

Каким условиям в верхней полуплоскости должна удовлетворять функция $f(z)$, чтобы $\lim_{R\to\infty}\int_{C_{+R}} f(z)\,dz = 0$? Достаточные условия дает лемма 28.1

**Лемма 28.1.**

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz = 0,$$

*при условии*

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} z f(z) = 0.$$

● Уравнение полуокружности $C_{+R}$ имеет вид

$$z = R e^{i\varphi}, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

Значит,

$$\int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz = \int\limits_0^{\pi} f\left(R e^{i\varphi}\right) R e^{i\varphi} i\,d\varphi. \tag{28.73}$$

Оценим полученный интеграл. Так как

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} z f(z) = 0,$$

то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $R_0$, что если $|z|>R_0$ и $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, то

$$|z\,f(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}. \tag{28.74}$$

Тогда на полуокружности $C_{+R}$ при $R > R_0$ мы имеем

$$\left|R\,e^{i\varphi} f\left(R\,e^{i\varphi}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\pi}. \tag{28.75}$$

Применяя оценку (28.75) к (28.72), получаем

$$\left|\int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_0^{\pi} f\left(R\,e^{i\varphi}\right)\cdot R\,e^{i\varphi} i\,d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\pi} \left|R\,e^{i\varphi} f\left(R\,e^{i\varphi}\right)\right|\cdot|i|\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \left|R\,e^{i\varphi} f\left(R\,e^{i\varphi}\right)\right|\,d\varphi < \frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\pi = \varepsilon. \tag{28.76$'$}$$

Последнее и означает, что $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_{+R}} f(z)\,dz = 0.$ ●

● *ПРИМЕР 28.13.* Вычислить $I = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{z^2}{z^4+1}\,dz.$

● Так как подынтегральная функция четная, то

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz. \tag{28.76}$$

К полученному интегралу можно применить все, сказанное выше, так как:

1. $z^2+4$ не обращается в ноль на вещественной оси;
2. степень знаменателя на две единицы больше степени числителя;
3. к подынтегральной функции применима лемма 28.1, действительно,

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} z\frac{z^2}{z^4+1} = 0.$$

Найдем полюса функции $\frac{z^2}{z^4+1}$, для чего решим уравнение $z^4+1=0 \iff$

$$z^4 = -1 = \cos(\pi+2\pi k) + i\sin(\pi+2\pi k);$$
$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

В верхней полуплоскости лежат полюса

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Найдем вычеты функции в этих полюсах:

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_1} = \lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{z^4+1}\cdot(z-z_1) = \lim_{z\to z_1} z^2 \cdot \lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)}{z^4+1} =$$

$$= \text{правило Лопиталя } = z_1^2\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = z_1^2\cdot\frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1}.$$

Аналогично получим

$$\operatorname{res} f\Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2}.$$

Возвращаясь к равенству (28.76), получаем

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = \frac{1}{2}\left(2\pi i\left(\operatorname{res} f\Big|_{z=z_1} + \operatorname{res} f\Big|_{z=z_2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) = \frac{\pi i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}+\frac{\sqrt{2}}{(-1+i)}\right) = \frac{\pi i\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{-1+i+1+i}{i^2-1} =$$

$$= \frac{\pi i\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2i}{-2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \quad \bullet$$

**Несобственные интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{R(x)\cos mx\,dx}$; $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{R(x)\sin mx\,dx}$, где $\boldsymbol{R(x)}$ — рациональная функция, $\boldsymbol{m > 0}$.** Известно, что указанные интегралы сходятся, если знаменатель функции $R(x)$ не обращается в ноль на вещественной оси и степень знаменателя больше степени числителя по крайней мере на единицу.

При решении таких примеров в качестве подынтегральной функции выбирают функцию $R(z)\cdot e^{imz}$. Контур интегрирования $L$ выбирается такой же, как и в п. 2, но вместо леммы 28.1 применяется лемма 28.2:

**Лемма 28.2.**

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_{+R}} f(z)\,e^{imz}\,dz = 0, \quad m>0,$$

*если*

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z) = 0.$$

● ●

● *ПРИМЕР 28.14.* Вычислить

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}\,dx.$$

● Так как подынтегральная функция четна, то

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}\,dx. \tag{28.77}$$

Рассмотрим

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3 e^{i2z}}{z^6+1}\,dz.$$

Ясно, что подынтегральная функция удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 3, включая лемму 28.2. Найдем полюсы функции $(z^3e^{i2z})/(z^6+1)$. Для этого решим уравнение $z^6+1=0 \iff$

$$z^6 = -1 = \cos(\pi+2\pi k) + i\sin(\pi+2\pi k).$$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right),$$

$$k = 0,1,2,3,4,5.$$

В верхней полуплоскости лежат полюса

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \qquad z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$
$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Найдем вычеты подынтегральной функции относительно $z_1$, $z_2$, $z_3$:

$$\operatorname{res}\frac{z^3e^{i2z}}{z^6+1}\bigg|_{z=z_1} = \lim_{z\to z_1}\frac{z^3e^{i2z}}{z^6+1}(z-z_1) = \lim_{z\to z_1} z^3e^{i2z}\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)}{z^6+1} \overset{\text{правило Лопиталя}}{=}$$
$$= \lim_{z\to z_1} z^3e^{i2z}\lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = z_1^3e^{i2z_1}\frac{1}{6z_1^5} = \frac{1}{6z_1^2}e^{2iz_1}.$$

Аналогично $\operatorname{res}\dfrac{z^3e^{i2z}}{z^6+1}\bigg|_{z=z_2} = \dfrac{1}{6z_2^2}e^{i2z_2}$; $\operatorname{res}\dfrac{z^3e^{i2z}}{z^6+1}\bigg|_{z=z_3} = \dfrac{1}{6z_3^2}e^{i2z_3}$.

Тогда

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z^3e^{i2z}}{z^6+1}\,dz = \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{e^{2iz_1}}{z_1^2} + \frac{e^{2iz_2}}{z_2^2} + \frac{e^{2iz_3}}{z_3^2}\right) =$$
$$= \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{z_1e^{2iz_1}}{z_1^3} + \frac{z_2e^{2iz_2}}{z_2^3} + \frac{z_3e^{2iz_3}}{z_3^3}\right) = \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{z_1e^{2iz_1}}{i} + \frac{z_2e^{2iz_2}}{-i} + \frac{z_3e^{2iz_3}}{i}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(z_1e^{2iz_1} - z_2e^{2iz_2} + z_3e^{2iz_3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}e^{(\sqrt{3}+i)i} + ie^{-2} + \frac{-\sqrt{3}+i}{2}e^{-(\sqrt{3}+i)i}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}i\left[\frac{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}+\cos\sqrt{3}}{e} + \frac{1}{e^2}\right].$$

Возвращаясь к (28.77), получаем

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im} I_1 = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}+\cos\sqrt{3}}{e} + \frac{1}{e^2}\right).$$

В заключение приведем еще один пример на применение теории вычетов.

● *ПРИМЕР 28.15.* Вычислить интеграл Дирихле:

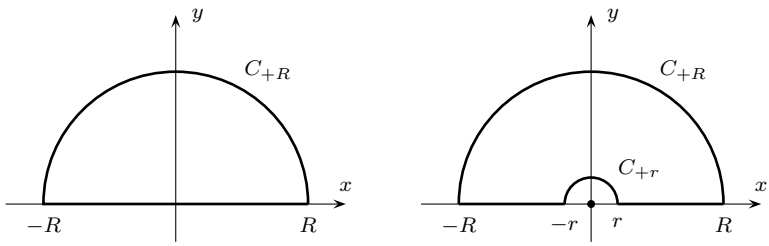
$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

● Ясно, что в точке $x=0$ функция $\frac{\sin x}{x}$ имеет устранимый разрыв. Возьмем в качестве подынтегральной функции $\frac{e^{iz}}{z}$, а контур интегрирования изображен на рис. 28.8, а.

На контуре $L$ подынтегральная функция $\frac{e^{iz}}{z}$ имеет полюс. Чтобы избежать этого, рассмотрим контур $L_1$, изображенный на рис. 28.8, б.

Внутри $L_1$ функция $\frac{e^{iz}}{z}$ не имеет особых точек, тогда по основной теореме Коши интеграл по $L_1$ равен нулю. Тогда

$$\int\limits_{L_1}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{-C_{+r}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{r}^{R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{C_{+R}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0. \qquad (28.78)$$




а) б)

*Рис. 28.8.*

К последнему интегралу в правой части (28.78) применима лемма 28.2, значит,

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_{+R}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0.$$

Найдем

$$\lim_{r\to0}\int\limits_{-C_{+r}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\overset{z=r\,e^{i\varphi}}{=}$$

$$=\lim_{r\to0}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{ir(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{r\,e^{i\varphi}}\,re^{i\varphi}\,i\,d\varphi=\lim_{r\to0}i\int\limits_{\pi}^{0}e^{ir(\cos\varphi+i\sin\varphi)}d\varphi=-\pi i.$$

Тогда из (28.78) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to0}}\left(\int\limits_{-R}^{-r}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int\limits_{r}^{R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\right)=\pi i. \tag{28.79}$$

Тогда

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\right)=(28.79)=\frac{\pi}{2}.$$

## Задачи и упражнения

1. Вычислить

$$\int\limits_{C}\frac{e^z+z}{e^z-1}\,dz\quad\text{и}\quad\int\limits_{C}\frac{\cos z}{z^2}\,dz,$$

$C:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$

2. Вычислить

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dz}{z^4+1};\quad\int\limits_{0}^{\infty}\frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)};\quad\int\limits_{0}^{\infty}\frac{z^4\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+4)};$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{2\sin\varphi+3}\,d\varphi;\quad\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+2};\quad\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(z^2-1)\sin z}{(z^2+1)z}\,dz.$$

## § 28.10. ПРИМЕНЕНИЕ ТФКП К ГИДРОМЕХАНИКЕ

При изучении движения реальной жидкости или газа и движения в них твердого тела, например крыла самолета, приходится делать различные допущения, упрощающие реальную задачу, но позволяющие построить вполне приемлемую математическую модель. Так, при изучении обтекания воздухом крыла самолета считают воздушную среду простирающейся беспредельно и неподвижной. В первом приближении считают, что воздух обтекает крыло без трения. Среду считают однородной и рассматривают плоскую задачу обтекания контура (ортогонального сечения крыла) потоком жидкости или газа, расположенного в плоскости ортогонального сечения.

Таким образом, мы будем изучать плоско-параллельное движение жидкости или газа. Далее будем говорить только о жидкости, считая газ частным случаем жидкости.

Сделаем следующие допущения:

1. Жидкость несжимаема. Поэтому если выделить в пространстве какой-либо объем, то в каждый момент времени количество жидкости, втекающей в объем, равно количеству жидкости, вытекающей из этого объема.
2. Жидкость не имеет вязкости, и отсутствует трение. При ее обтекании профиля частицы движутся вдоль профиля и имеют скорости, касательные к профилю.
3. Движение считается стационарным или установившимся, т. е. векторы скоростей частиц $\vec{v} = (x_x, v_y)$ не зависят от времени, а зависят только от координат точки — $(x, y)$.

Напомним, что циркуляцией вектора-скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$ вдоль замкнутой кривой $L$ называется интеграл

$$\Gamma_C = \int\limits_C v_x\,dx + v_y\,dy, \tag{28.80}$$

а потоком вектора $\vec{v}$ через дугу $\overset{\smile}{AB}$ называется интеграл

$$N_{\overset{\smile}{AB}} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} -v_y\,dx + v_x\,dy. \tag{28.81}$$

Этот интеграл выражает объем жидкости, протекающей через $\overset{\smile}{AB}$ в единицу времени.

Рассмотрим простой замкнутый контур $L$ (см. рис. 28.9).

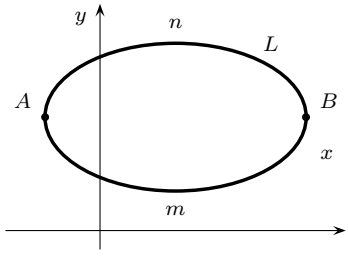



*Рис. 28.9.*

Разобьем его на две дуги $A\overset{\smile}{m}B$ и $A\overset{\smile}{n}B$. Поток $A\overset{\smile}{m}B$ выражает количество жидкости, проходящей через $A\overset{\smile}{m}B$, а поток через $A\overset{\smile}{n}B$ — количество жидкости, проходящей через дугу $A\overset{\smile}{n}B$. Значит, разность этих потоков — избыток жидкости, вышедшей за контур $L$, над вошедшим внутрь него, но

$$\int\limits_{A\overset{\smile}{m}B} -v_y\,dx + v_x\,dy - \int\limits_{A\overset{\smile}{n}B} -v_y\,dx + v_x\,dy =$$

$$= \int\limits_{A\overset{\smile}{m}B} -v_y\,dx + v_x\,dy + \int\limits_{B\overset{\smile}{n}A} -v_y\,dx + v_x\,dy = \int\limits_L -v_y\,dx + v_x\,dy.$$

Таким образом, поток вектора скорости жидкости через контур $L$ выражает избыток вышедшей за контур жидкости над вошедшей внутрь.

Напомним, что движение жидкости называется безвихревым в некоторой области, если в ней циркуляция вектора-скорости вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

Движение жидкости называется соленоидальным в некоторой области, если в ней поток вектора скорости через любой замкнутый контур равен нулю.

Таким образом, движение жидкости в области $\mathcal{D}$ будет одновременно безвихревым и соленоидальным, если для любого замкнутого контура $L$, лежащего в $\mathcal{D}$, равны нулю интегралы

$$\int\limits_L v_x\,dx + v_y\,dy = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_L -v_y\,dx + v_x\,dy = 0. \tag{28.82}$$

Известно, что если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции. Значит, из (28.82) следует, что существуют функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ такие, что

$$\begin{aligned} d\varphi &= v_x\,dx + v_y\,dy \\ d\psi &= -v_y\,dx + v_x\,dy \end{aligned} \tag{28.83}$$

в каждой точке области $\mathcal{D}$.

$$\varphi(x,y) = \int\limits_L^{(x,y)}\limits_{(x_0,y_0)} (v_x\,dx + v_y\,dy) + C_1,$$

$$\psi(x,y) = \int\limits_L^{(x,y)}\limits_{(x_0,y_0)} (-v_y\,dx + v_x\,dy) + C_2,$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.

Из равенства (28.83) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= v_x; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y; \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -v_y; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x. \end{aligned} \tag{28.84}$$

Но тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{28.85}$$

т. е. для функции $f(z) \overset{\text{def}}{=} \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, $z = x + iy$ выполнены в $\mathcal{D}$ условия Коши–Римана, т. е. $f(z)$ является в этом случае в области $\mathcal{D}$ аналитической.

Эту функцию называют комплексным потенциалом движения жидкости или характеристической функцией движения жидкости, функция $\varphi(x,y)$ называется потенциалом скорости, а $\psi(x,y)$ функцией тока.

Легко доказать, что, приравнивая $\psi(x,y)$ различным постоянным числам, мы получим уравнения траекторий различных частиц жидкости. Действительно, в каждой точке касательная к траектории совпадает с вектором скорости частицы. Угловой коэффициент касательной равен $\frac{dy}{dx}$, угловой коэффициент вектора скорости равен $\frac{v_y}{v_x}$, приравнивая их, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \qquad \text{или} \qquad -v_y\,dx + v_x\,dy = 0.$$

Из (28.83) получаем

$$d\psi(x,y) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(x,y) = \text{const}\,.$$

Из формулы (27.2) следует, что

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Используя равенство (28.84) для комплексного потенциала движения жидкости, получаем

$$f'(z) = v_x - i\,v_y. \tag{28.86}$$

Переходя к комплексному сопряжению,

$$\overline{f'(z)} = v_x + i\,v_y. \tag{28.87}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

**ТЕОРЕМА 28.30**
Проекции скорости движения жидкости на оси координат равны действительной и мнимой частям функции, комплексно-сопряженной производной комплексного потенциала движения, а модуль производной комплексного потенциала движения равен величине вектора-скорости.

● Осталось доказать последнее утверждение. Из (28.86) следует, что

$$|f'(z)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\vec{v}|\,. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 28.16.*

●

1. Рассмотрим движение жидкости, имеющее комплексный потенциал

$$f(z) = az, \quad a > 0.$$
$$f'(z) = a, \quad \overline{f'(z)} = a.$$

Тогда из (28.86), (28.87) получаем

$$\begin{cases} v_x - i\,v_y = a, \\ v_x + i\,v_y = a, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad v_x = a; \quad v_y = 0$$

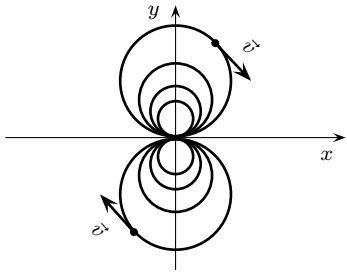


*Рис. 28.10.*

$\vec{v} = (a, 0)$, т. е. все частицы жидкости движутся параллельно оси $Ox$ вправо с постоянной скоростью $a$.

2. Рассмотрим движение жидкости, имеющее комплексный потенциал $f(z) = iaz$, $a > 0$:

$$f'(z) = i\,a; \quad \overline{f'(z)} = -i\,a.$$

Значит,

$$\begin{cases} v_x - i\,v_y = i\,a, \\ v_x + i\,v_y = -i\,a. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad v_x = 0; \quad v_y = -a.$$

$\vec{v} = (0, -a)$, т. е. все частицы жидкости движутся параллельно оси $Oy$ вниз со скоростью $a$.

3. Пусть комплексный потенциал движения жидкости $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$. Чтобы получить траектории движения частиц, нужно взять $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Уравнение траектории движения частицы

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2C} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+y^2+2Cy = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^2+(y-C)^2 = C^2.$$

Таким образом, траектории движения — окружности радиуса $C$ с центром в точке $(0, C)$ (см. рис. 28.10).

Найдем, как происходит движение частиц по изображенным окружностям.

Вектор скорости частиц в каждой точке траектории направлен по касательной к ней. Чтобы понять, в какую сторону направлен вектор $\vec{v}$, найдем

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{(x+iy)^2} = -\frac{(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\,\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Учитывая (28.86), получаем

$$v_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad v_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Значит, $v_y < 0$ в 1-й и 3-й четвертях, $v_y > 0$ во 2-й и 4-й четвертях. Поэтому в верхней полуплоскости движение частиц по окружностям происходит по часовой стрелке, а в нижней полуплоскости против часовой стрелки. По теореме 28.30

$$|\vec{v}| = |f'(z)| = \frac{1}{|z|^2}.$$

Значит, в каждой точке скорость обратно пропорциональна квадрату расстояния от нее до начала координат. ●

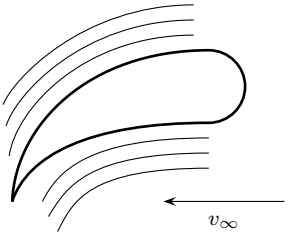



*Рис. 28.11.*

Отметим, что условия Коши–Римана для плоского безвихревого соленоидального поля означают, что поле линий тока и поле линий равного потенциала образуют ортогональное семейство линий (или ортогональную сетку поля).

Приведем теперь вывод формулы С. А. Чаплыгина[2] для подсчета вектора подъемной силы крыла самолета.

Рассмотрим движение крыла самолета с постоянной скоростью — $v_\infty$. Воздух при малых скоростях полета будем считать несжимаемым, поток вдоль крыла — безвихревым. Будем считать, что крыло неподвижно, а на него набегает поток с постоянной скоростью в бесконечности $v_\infty$ (см. рис. 28.11).

[2]Чаплыгин С. А. (1869–1942) — известный российский ученый, специалист в области теоретической механики, гидроаэромеханики, академик АН СССР (1929 г.), Герой Социалистического Труда (1941 г.), окончил Московский университет в 1890 г., профессор Московского университета (1902 г.), с 1918 г. работал в ЦАГИ, с 1921 г. — директор ЦАГИ. Известен результатами в области гидроаэромеханики, газовой динамики, работами по теории крыла, численным методам, дифференциальным уравнениям.

Величина давления в установившемся безвихревом потоке определяется с помощью формулы Бернулли–Эйлера

$$P = A - \frac{\rho}{2}\,|\vec{v}|^2\,, \tag{28.88}$$

где $A$ — некоторая постоянная, $\rho$ — плотность, $\vec{v}$ — вектор скорости потока.

Так как давление на контур $C$ направлено внутрь крыла по нормали, то сила давления, действующая на элемент $d\zeta$ контура $C$, равна

$$P\,i\,d\zeta = A\,i\,d\zeta - \frac{\rho i}{2}\,|\vec{v}|^2\;d\zeta, \tag{28.89}$$

а полная сила давления на контур $C$ (подъемная сила) вычисляется интегрированием по контуру $C$:

$$P = X + i\,Y = \int\limits_C P\,i\,d\zeta = \int\limits_C \left(Ai - \frac{\rho i}{2}\,|\vec{v}|^2\right) d\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int\limits_C |\vec{v}|^2\;d\zeta. \tag{28.90}$$

Так как поток обтекает контур, то в точках контура $C$ скорость направлена по касательной

$$\vec{v} = \overline{f'(\xi)} = |\vec{v}|\;e^{i\varphi},$$

где $\varphi = \arg d\zeta$. Тогда $|\vec{v}| = \overline{f'(\xi)}e^{-i\varphi}$, а формула (28.90) примет вид

$$P = -\frac{\rho i}{2}\int\limits_C \left(\overline{f'(\xi)}\right)^2 e^{-2i\varphi}\,d\zeta = -\frac{\rho i}{2}\int\limits_C \left(\overline{f'(\xi)}\right)^2 e^{-i\varphi}|d\zeta| = -\frac{\rho i}{2}\int\limits_C \left(\overline{f'(\xi)}\right)^2 \overline{d\zeta}.$$

Переходя в последнем равенстве к сопряженным величинам, получаем вектор, комплексно сопряженный вектору подъемной силы:

$$\overline{P} = \frac{\rho i}{2}\int\limits_C \left(f'(\xi)\right)^2\;d\zeta. \tag{28.91}$$

Последняя формула носит имя С. А. Чаплыгина.

# XXIX

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

При изучении задач естествознания нередко оказывается, что исследователь не имеет возможности описать интересующую его функцию, которая характеризует некоторый изучаемый процесс. В то же время, зачастую, он может описать связь, существующую между этой функцией и ее производными. На этом пути и возникают дифференциальные уравнения. Решая дифференциальное уравнение, исследователь находит и интересующую его функцию. Роль дифференциальных уравнений в изучении проблем окружающего мира переоценить невозможно.

Знакомство с этим новым разделом начнем с нескольких определений и поясняющих их примеров.

**Определение 29.1.** *Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое связывает неизвестную функцию, какие-либо ее производные и, возможно, независимые переменные.*

*Замечание.* Термин aequatio differentialis или дифференциальное уравнение был впервые введен Лейбницем в 1676 году.

**Определение 29.2.** *Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если неизвестная функция зависит только от одной независимой переменной.*

**Определение 29.3.** *Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от двух или более независимых переменных, то такое уравнение называется уравнением в частных производных.*

**Определение 29.4.** *Дифференциальное уравнение называется уравнением $n$-го порядка, если максимальный порядок входящих в него производных неизвестной функции равен $n$.*

*ПРИМЕРЫ:*

- $y' = x^2y$ — это обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестной функции $y = y(x)$.
- $xy''' - y = x^4y^2$ — это обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка относительно неизвестной функции $y = y(x)$.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — это дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка относительно неизвестной функции $u = u(x, y, t)$.

**Определение 29.5.** *Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество.*

● *ПРИМЕР.* Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y''(x) = 0$. Легко видеть, что функция $y(x) = C_1x + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, является его решением.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется решением уравнения или интегрированием дифференциального уравнения.

Введенных определений уже достаточно, чтобы очертить круг вопросов, которые будут рассматриваться в ближайших трех главах:

1. Имеет ли данное дифференциальное уравнение решение?
2. Сколько решений имеет данное дифференциальное уравнение?
3. Если уравнение имеет решение, то как его найти?
4. Если решение не удается выразить через элементарные функции, то как можно найти приближенное решение дифференциального уравнения?
5. Можно ли охарактеризовать какие-либо свойства решения, не решая дифференциального уравнения?

В качестве первой иллюстрации рассмотрим такую задачу.

● *ЗАДАЧА.* В водоем внесено некоторое количество $M$ органического вещества. С течением времени под воздействием микроорганизмов это вещество распадается и, тем самым, количество его в водоеме уменьшается. Через какое время количество вещества в водоеме сократится вдвое?

● Обозначим через $x(t)$ — количество органического вещества в водоеме в момент $t$. Считая, что время отсчитывается от нуля, можно записать начальное условие

$$x(0) = M.$$

Приступим к выводу дифференциального уравнения, описывающего процесс распада вещества. Справедливо равенство, выражающее закон сохранения вещества:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - U\left(x(t), \Delta t\right),$$

где $\Delta t$ — «шаг» изменения времени, $U(x(t), \Delta t)$ — количество вещества, распавшегося за время $\Delta t$. Естественно, оно зависит от $x(t)$. При постоянных внешних условиях (температура, освещенность и т. п.) функция $U(x(t), \Delta t)$ довольно хорошо описывается формулой

$$U\left(x(t), \Delta t\right) = k \cdot x(t) \cdot \Delta t,$$

где $k$ — коэффициент распада.

Теперь закон сохранения можно переписать так:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - kx(t) \cdot \Delta t$$

или

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -kx(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

Легко сообразить, что функция $x(t) = Ce^{-kt}$ является решением этого уравнения. (Проверьте это самостоятельно.)

Величина $C$, произвольная постоянная, может быть определена из начального условия:

$$x(0) = M = Ce^0 = C.$$

Окончательно количество вещества в водоеме в любой момент $t$ определяется формулой

$$x(t) = Me^{-kt}.$$

Пусть половина вещества распадается за время $T$. Тогда

$$\frac{M}{2} = Me^{-kT}$$

или

$$\frac{1}{2} = e^{-kT}.$$

Логарифмируя, находим значение $T$:

$$\ln \frac{1}{2} = -kT.$$

Отсюда $T = \frac{\ln 2}{k}$. ●

В самом общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка можно представить так:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{29.1}$$

где $F$ — известная функция.

## § 29.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Будем для простоты считать, что уравнение (29.1) разрешено относительно $y'$. То есть, будем рассматривать далее дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{29.1′}$$

где $f$ — известная функция, заданная и непрерывная в области $\mathcal{D}$. Область $\mathcal{D}$ называется также областью определения уравнения (29.1′).

Пусть $P$ — произвольная точка на плоскости $xOy$, принадлежащая области определения функции $f$. Уравнение (29.1′) определяет для каждой точки $P$ тангенс угла наклона касательной к кривой, являющейся графиком решения уравнения, в этой точке. Эта кривая носит название интегральной кривой.

Фиксируя в каждой точке области $\mathcal{D}$ направление касательной с помощью отрезка, получим поле направлений. Обычно говорят, что в области определения $\mathcal{D}$ уравнение (29.1′) задает поле направлений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \tag{29.2}$$

и подсчитаем значение $\frac{dy}{dx}$ для нескольких точек плоскости $xOy$. Легко видеть, что для всех точек окружности $x^2 + y^2 = C$ значения производной постоянны.

**Определение 29.6.** *Кривая $f(x, y) = C$, в точках которой поле направлений постоянно, носит название изоклины.*

Будем менять значения $C$ и отмечать на окружностях элементы поля направлений (см. рис. 29.1).

Поскольку в каждой точке элемент поля направлений должен касаться интегральной кривой, даже не интегрируя уравнения (29.2), можно представить себе, как выглядит семейство интегральных кривых этого уравнения (см. рис. 29.2).

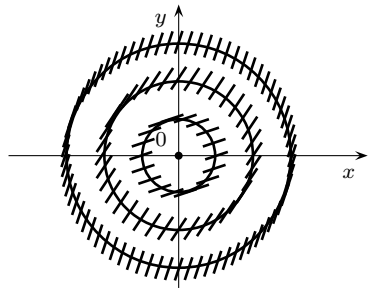



*Рис. 29.1.*

Из рис. 29.2 видно, что уравнение (29.2) имеет множество решений. Чтобы выделить одно из них — то, которое соответствует решаемой задаче, нужно задать некоторое дополнительное условие. Скажем, потребовать, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку, т. е. чтобы выполнялось условие $y(x_0) = y_0$. Приведенная геометрическая интерпретация позволяет сформулировать следующее правило построения приближенного решения уравнения (29.1′).

Чтобы решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ при условии $y(x_0) = y_0$, нужно:

1. Построить поле направлений в $\mathcal{D}$ — области определения функции $f$.
2. Построить кривую, которая проходит через точку $(x_0, y_0)$ и одновременно «касается» поля в каждой точке $\mathcal{D}$. Эта кривая и будет представлять собой график решения уравнения, т. е. будет являться интегральной кривой.

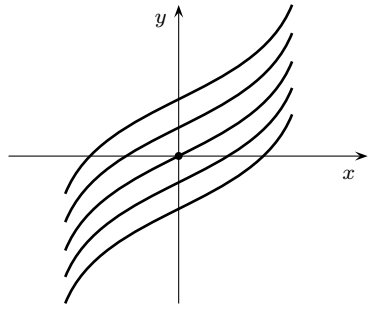



*Рис. 29.2.*

### 29.1.1. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

**Определение 29.7.** *Задача о нахождении решения дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{29.3}$$

*удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.*

Для задачи Коши справедлива следующая (очень важная!) теорема о существовании и единственности решения, которую мы сформулируем без доказательства.

**ТЕОРЕМА 29.1**

Если в уравнении $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ функция $f$ непрерывна в прямоугольнике $\mathcal{D} : x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$ и удовлетворяет в $\mathcal{D}$ условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \gamma \cdot |y_1 - y_2|,$$

где $\gamma$ — постоянная, то существует такое число $\alpha$, что на отрезке $x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha$ существует единственное решение $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ уравнения (29.1′), удовлетворяющее условию $\widetilde{y}(x_0) = y_0$. Единственность означает, что любые два решения, удовлетворяющие одному начальному условияю, совпадают на пересечении их интервалов определения.

*Замечание 29.1.* Теорема не гарантирует существования и единственности решения на всем промежутке $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$. Однако если в качестве начальной взять теперь точку $(x_0 + \alpha, \widetilde{y}(x_0 + \alpha))$, то решение может быть продолжено на отрезок $x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha + \alpha_1$, где $\alpha_1$ — некоторое число. Аналогично можно продолжать решение и дальше. Разумеется, это возможно только тогда, когда $f(x, y)$ удовлетворяет всем необходимым условиям в новых областях.

*Замечание 29.2.* Выполнение условия Липшица можно заменить более сильным условием, накладываемым на функцию $f(x, y)$ — должна существовать ограниченная по модулю частная производная $f'_y(x, y)$ в области $\mathcal{D}$.

Приведенная теорема позволяет по виду дифференциального уравнения, не решая его, судить о наличии и единственности решения задачи Коши. Это чрезвычайно важно, так как невыполнение условий теоремы может уже на ранних этапах исследования в той или иной предметной области подсказать, что создаваемая модель некорректна.

## § 29.2. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, КОТОРЫЕ ЛЕГКО ИНТЕГРИРУЮТСЯ

### 29.2.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Так называются уравнения вида

$$\varphi(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{29.4}$$

и сводимые к ним. При этом предполагается, что функции $f$ и $\varphi$ определены и непрерывны на некоторых интервалах вещественной оси.

Допустим, что мы знаем функцию $y = y(x)$, являющуюся решением уравнения (29.4). Подставив эту функцию в (29.4), получим тождественное равенство, которое можно проинтегрировать и получить при некоторой фиксированной постоянной $C$ следующее равенство для первообразных:

$$\int \varphi(y(x))y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C.$$

Подчеркнем, что здесь и далее для непрерывной функции $g(x)$ через $\int g(x)\,dx$ обозначается одна из ее первообразных, а не их множество.

Таким образом, каждое решение уравнения (29.4) является решением уравнения

$$\int \varphi(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C, \tag{29.5}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Уравнение (29.5) — это уже не дифференциальное, а уравнение, которому удовлетворяют решения уравнения (29.4). Верно и обратное — всякое непрерывно дифференцируемое решение $y = y(x)$ уравнения (29.5) является и решением уравнения (29.4).

**Определение 29.8.** *Всякое уравнение*

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{29.6}$$

*(не дифференциальное!), которое определяет решение дифференциального уравнения $y = y(x)$ как неявную функцию от $x$, называется интегралом соответствующего дифференциального уравнения.*

*Уравнение*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{29.6′}$$

*будем называть общим интегралом уравнения* (29.1′) *в области $G \subset \mathcal{D}$, если при надлежащем выборе постоянной $C$ оно дает любое решение уравнения* (29.1′)*, график которого содержится в области $G$.*

*В частности, уравнение* (29.5) *есть общий интеграл уравнения* (29.4) *в области его определения.*

*ПРИМЕР 29.1.* Решить уравнение

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)\,dx + xy\,dy = 0,$$

предполагая, что $x \neq 0$.

Переменные легко разделяются следующим образом:

$$\frac{x^2 + 1}{x}\,dx + \frac{y}{y^2 - 1}\,dy = 0.$$

При этом следует предполагать, что $y^2 - 1 \neq 0$, т. е. при разделении переменных, вообще говоря, происходит сужение области определения дифференциального уравнения и может происходить потеря решений исходного уравнения. Действительно, функции $y = \pm 1$ — решения конечного уравнения $y^2 - 1 = 0$ — являются решениями исходного уравнения, но не уравнения после разделения переменных.

Интегрируем и получаем

$$x^2 + \ln x^2 + \ln\left|y^2 - 1\right| = C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Полагая $C = \ln C_1$ и потенцируя, приходим к общему интегралу

$$\left|y^2 - 1\right| = C_1\,\frac{e^{-x^2}}{x^2}, \quad C_1 > 0$$

уравнения с разделенными переменными.

Так как для любого решения $y = y(x)$ выражение $y^2 - 1$ сохраняет знак, то общему интегралу можно придать вид

$$y^2 = 1 + C\,\frac{e^{-x^2}}{x^2},$$

где $C$ — любая ненулевая константа.

Далее, постоянные решения $y = \pm 1$ исходного уравнения получаются при $C = 0$, поэтому полученное уравнение, в котором постоянная $C$ принимает любые вещественные значения, представляет общий интеграл исходного уравнения. Он определяет все его решения.

Очень часто оказывается, что интегралы $\int \varphi(y)\,dy$ и $\int f(x)\,dx$ не берутся в элементарных функциях. Однако и в этом случае будем считать, что дифференциальное уравнение проинтегрировано, так как найден его общий интеграл.

● *ПРИМЕР 29.2.* Решить уравнение

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\ln y}.$$

● Переменные уже разделены. Поэтому сразу возможно интегрирование:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\ln y} + C.$$

Хотя оба полученных интеграла не берутся в элементарных функциях, будем считать уравнение проинтегрированным. В этом случае говорят, что уравнение интегрируется в квадратурах. ●

Если требуется найти решение задачи Коши, то это легко сделать следующим образом.

Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (29.4). Подставим это $y = y(x)$ в (29.4) и возьмем определенный интеграл с переменным верхним пределом от обеих частей получившегося тождества:

$$\int_{y_0}^{y} \varphi(\eta)\, d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + C.$$

Полагая $x = x_0$ и, соответственно, $y = y_0$, находим, что $C = 0$.

Соотношение

$$\int_{y_0}^{y} \varphi(\eta)\, d\eta = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \tag{29.7}$$

является частным интегралом дифференциального уравнения (29.4).

● *ПРИМЕР 29.3.* Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 4y^2 x \quad \text{при условии } y(1) = 2.$$

● Разделяем переменные и интегрируем

$$\int_{2}^{y} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{1}^{x} 4\xi\, d\xi.$$

Вычислим оба определенных интеграла

$$-\frac{1}{\eta}\Bigg|_{2}^{y} = 2\xi^2\Bigg|_{1}^{x}$$

или, подставляя пределы интегрирования,

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 2x^2 - 2.$$

Окончательно,

$$y = \frac{2}{5 - 4x^2}.$$

Легко видеть, что найденная функция является решением исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющим условию $y(1) = 2$. ●

Некоторые виды дифференциальных уравнений могут быть легко сведены к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подходящей замены переменных.

Пусть, например,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29.8}$$

Уравнение вида (29.8) называется однородным.

Введем новую неизвестную функцию $z$, связанную с $y$ соотношением

$$y = xz. \tag{29.9}$$

Дифференцируя (29.9), получаем

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z \qquad \text{или} \qquad x\frac{dz}{dx} + z = f(z).$$

Отсюда следует, что при $f(z) - z \neq 0$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{f(z) - z} &= \int \frac{dx}{x} + C \qquad \text{или} \\ \int \frac{dz}{f(z) - z} &= \ln|x| + \ln C \qquad \text{или} \\ x &= Ce^{\int \frac{dz}{f(z) - z}}. \end{aligned} \tag{29.10}$$

Выражение (29.10) с учетом равенства (29.9) представляет собой общий интеграл уравнения (29.8).

Постоянные решения вида $z = a$, где $a$ пробегает множество всех решений конечного уравнения $f(z) - z = 0$, приводят к решениям уравнения (29.8) вида $y = ax$. Они не могут быть получены из (29.10) ни при каком значении постоянной $C$.

● *ПРИМЕР 29.4.* Решить уравнение

$$\left(y^4 - 2x^3y\right)\,dx + \left(x^4 - 2xy^3\right)\,dy = 0.$$

● Разделим обе части уравнения на $x^4$ в предположении, что $x \neq 0$. Имеем

$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 2\frac{y}{x}\right)\,dx + \left(1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)\,dy = 0. \tag{29.11}$$

Уравнение (29.11) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 2\frac{y}{x}}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3},$$

после чего становится ясным, что оно имеет вид уравнения (29.8).

Осуществляя в уравнении (29.11) замену (29.9), получим

$$\left(z^4 + z\right)\,dx - \left(1 - 2z^3\right)x\,dz = 0$$

или после разделения переменных при $z^4+z\neq 0,\ x\neq 0$

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{z}-\frac{3z^2}{1+z^3}\right)dz.$$

Отсюда следует

$$\ln|x|=\ln|z|-\ln|1+z^3|+\ln C,$$

где $C>0$ — произвольная постоянная.

Потенцируя, приходим к выражению (модули снимаются, как и в примере 29.1)

$$x\left(1+z^3\right)=Cz$$

или, возвращаясь к функции $y$, получаем общий интеграл уравнения (29.11)

$$x^3+y^3=Cxy.$$

Постоянные решения $z=0,\ z=-1$ приводят к решениям $y=0,\ y=-x$. Второе получается из общего интеграла при $C=0$, первое формально получается при $C=\infty$. ●

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by), \tag{29.12}$$

то сведение его к уравнению с разделяющимися переменными осуществляется с помощью замены

$$z=ax+by.$$

Действительно,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя в это выражение значение $\frac{dy}{dx}$ из (29.12), получаем новое уравнение

$$\frac{dz}{dx}=a+bf(z), \tag{29.13}$$

в котором переменные легко разделяются

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

Интегрируя, получаем интеграл уравнения (29.13)

$$x=\int\frac{dz}{a+bf(z)}+C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Отсюда, выражая $z$ через $x$ и $y$, находим интеграл уравнения (29.12).

### 29.2.2. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Если оказывается, что левая часть дифференциального уравнения

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0, \tag{29.14}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — известные функции, является полным дифференциалом некоторой функции $W(x,y)$, т. е.

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=dW(x,y)=0, \tag{29.14′}$$

то интеграл уравнения (29.14) может быть сразу выписан:

$$W\big(x, y(x)\big) = C, \tag{29.15}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Остается выяснить, когда же левая часть уравнения (29.14) представляет собой полный дифференциал некоторой функции? Известно, что необходимым и достаточным условием этого в случае односвязной области определения дифференциального уравнения является выполнение равенства

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{29.16}$$

Покажем, каким образом можно проинтегрировать уравнение (29.14), если выполнено условие (29.16). Прежде всего, запишем выражение для полного дифференциала функции $W(x, y)$, исходя из определения дифференциала:

$$dW(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x}\,dx + \frac{\partial W}{\partial y}\,dy. \tag{29.17}$$

Сравнивая равенства (29.17) и (29.14′), можно заключить, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} = M(x, y) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = N(x, y). \tag{29.18}$$

Проинтегрируем первое из соотношений (29.18) по $x$:

$$W(x, y) = \int M(x, y)\,dx + C(y), \tag{29.19}$$

где $C(y)$ — произвольная функция от $y$. (В том, что равенство (29.19) справедливо, можно убедиться, продифференцировав его по $x$.)

Чтобы найти функцию $C(y)$, продифференцируем выражение для $W(x, y)$ из (29.19) по $y$:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right) + C'(y). \tag{29.20}$$

Используя второе из соотношений (29.18), получаем

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right) + C'(y). \tag{29.21}$$

Из (29.21) путем интегрирования можно найти неизвестную функцию $C(y)$ (подынтегральная функция зависит лишь от $y$):

$$C(y) = \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right)\right] dy + C, \tag{29.22}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Подставив выражение для $C(y)$ в (29.19), получаем выражение для интеграла уравнения (29.15):

$$W(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right)\right] dy = C.$$

● *ПРИМЕР 29.5.* Решить уравнение

$$\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}\,dy=0.$$

● Прежде всего убедимся в том, что это уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{2x-y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\left(\frac{2y+x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Итак, условие интегрируемости выполнено. Следовательно, можно найти интеграл уравнения

$$W(x,y)=\int\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx+\int\left[\frac{2y+x}{x^2+y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\right)\right]dy=C.$$

Взяв интегралы и выполнив ряд упрощений, получим

$$\ln(x^2+y^2)-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C.$$

Искомый интеграл найден. ●

*Замечание.* Случается, что левая часть уравнения (29.14) не является полным дифференциалом никакой функции $W(x,y)$, но, если ее умножить на удачно выбранную функцию $\mu(x,y)$, становится таковой. Эта функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем. Уравнение же (29.14) приобретает вид

$$dW(x,y)=\mu(x,y)\cdot M(x,y)\,dx+\mu(x,y)\cdot N(x,y)\,dy=0. \tag{29.23}$$

● *ПРИМЕР 29.6.* Решить уравнение

$$x\,dx+y\,dy+(x^2+y^2)x^2\,dx=0.$$

● Если догадаться выбрать интегрирующий множитель так:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2},$$

то интегрирование уравнения не вызывает никаких трудностей.

После умножения уравнения на $\mu(x,y)$ получаем

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}+x^2\,dx=0.$$

Интегрирование дает

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{x^3}{3}=\ln C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Умножая полученное равенство на 2 и потенцируя

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2x^2}{3}}=C^2$$

или, что то же самое,

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2x^2}{3}}=C.$$

(Так как $C$ — произвольная постоянная, то ее квадрат есть тоже произвольная постоянная, которую можно снова обозначить через $C$.) Интеграл уравнения найден. ●

### 29.2.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Определение 29.9.** *Дифференциальное уравнение называется линейным, если и неизвестная функция, и ее производные входят в уравнение линейно. (Напомним, это означает, что и функция, и производные входят в уравнение только в первой степени.)*

**Метод вариации произвольных постоянных.** Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий общий вид:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x), \tag{29.24}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — известные функции, непрерывные в той области, где требуется проинтегрировать уравнение (29.24).

Если $f(x) = 0$, то уравнение (29.24) называется однородным. В этом случае в нем легко разделяются переменные:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx. \tag{29.25}$$

Проинтегрировав (29.25), получаем

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C, \qquad C > 0$$

и

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \tag{29.26}$$

где $C$ — произвольная положительная постоянная.

*Замечание.* Исходное однородное уравнение имеет решение $y \equiv 0$. Будем считать, что в (29.26) величина $C$ может равняться и нулю, чтобы решение $y \equiv 0$ не оказалось потерянным.

Итак, выражение (29.26) представляет собой общее решение однородного уравнения. А как же быть с решением неоднородного уравнения? Попробуем «на минуточку» забыть, что величина $C$ в выражении (29.26) есть константа, и будем искать решение неоднородного уравнения (29.24) в виде (29.26), но только полагая $C = C(x)$ — некоторой функции от $x$. Какой? Мы постараемся ее подобрать так, чтобы уравнение (29.24) можно было проинтегрировать.

Итак, имеем

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{29.27}$$

Найдем производную от функции $y$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)e^{-\int p(x)\,dx} \cdot p(x). \tag{29.28}$$

Имеющиеся выражения для функции $y$ (29.27) и ее производной (29.28) подставим в уравнение (29.24):

$$C'e^{-\int p(x)\,dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x) \cdot Ce^{-\int p(x)\,dx} = f(x). \tag{29.29}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)\,dx} \tag{29.30}$$

и

$$C(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C_1, \tag{29.31}$$

где $C_1$ — произвольная постоянная.

Подставляя выражение для $C(x)$ из (29.31) в выражение для $y$ (29.27), получаем решение уравнения (29.24) в таком виде:

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx. \tag{29.32}$$

В том, что это действительно решение уравнения (29.24), можно убедиться, подставив $y(x)$ и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (29.24). (Мы настоятельно рекомендуем читателю проделать все необходимые вычисления самостоятельно.)

Содержательно же имеет место следующий факт: общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (первое слагаемое в (29.32)) плюс частное решение неоднородного уравнения (второе слагаемое в (29.32)).

● *ПРИМЕР 29.7.* Решить уравнение

$$y' - ay = e^{mx}, \tag{29.33}$$

где $a$ и $m$ — постоянные, $m \neq a$.

● Решаем однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = ay.$$

Отсюда следует, что

$$y = C\,e^{ax}, \tag{29.34}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Выражение (29.33) есть общее решение однородного уравнения. Будем искать частное решение исходного уравнения в виде

$$y = C(x)\,e^{ax}. \tag{29.35}$$

Найдем производную от функции $y$:

$$y' = C'e^{ax} + C\cdot ae^{ax}. \tag{29.36}$$

Подставим выражения (29.35) и (29.36) в уравнение (29.33):

$$C'e^{ax} + C\cdot ae^{ax} - aCe^{ax} = e^{mx}. \tag{29.37}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dC}{dx} = e^{(m-a)x}.$$

Функция $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = C + \frac{e^{(m-a)x}}{m-a}, \tag{29.38}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Подставляя выражение для функции $C(x)$ из (29.38) в (29.35), получим общее решение уравнения (29.33):

$$y(x) = Ce^{ax} + \frac{e^{mx}}{m-a}. \quad \bullet$$

● *ПРИМЕР 29.8.* Решить уравнение

$$y' - ay = e^{ax}. \tag{29.39}$$

● Общее решение однородного уравнения, как мы уже знаем, дается формулой (29.34). Подставим выражения (29.35) и (29.36) в уравнение (29.39):

$$C'e^{ax} + C \cdot ae^{ax} - aCe^{ax} = e^{ax}. \tag{29.40}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dC}{dx} = 1.$$

Функция $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = x + C, \tag{29.41}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Подставляя выражение для функции $C(x)$ из (29.41) в (29.35), получим общее решение уравнения (29.39):

$$y(x) = Ce^{ax} + xe^{ax}. \quad \bullet$$

*Замечание.* Читатель должен быть готов к тому, что дифференциальные уравнения, возникающие в ходе реальных прикладных исследований (не взятые из учебника!), часто интегрируются только в квадратурах.

## § 29.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выше мы уже отмечали, что лишь некоторые классы дифференциальных уравнений интегрируются явно, а не в квадратурах. Большинство же уравнений, возникающих в реальных прикладных задачах, к этим классам не принадлежит. Возникает противоречие. С одной стороны, для решения важных практических задач требуется уметь находить решения соответствующих дифференциальных уравнений. С другой же стороны, нет надежды найти эти решения. Противоречие это разрешается просто. Существуют численные методы, позволяющие находить приближенные решения с той точностью, которая требуется в каждом конкретном случае. В отличие от точного решения задачи Коши (29.3), представлявшего собой функцию $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$, численные методы позволяют найти ансамбль точек

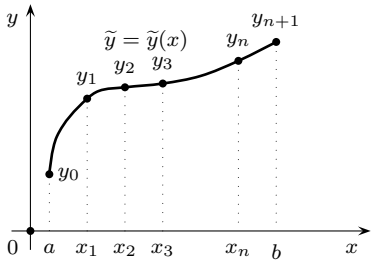



*Рис. 29.3.*

$$\{(a, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (b, y_{n+1})\}, \tag{29.42}$$

где $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, которые в каком-то смысле «близки» к решению, могут его «заменить». Численный метод был бы идеален (рис. 29.3), если бы найденные точки (29.42) удовлетворяли условиям:

$$\begin{cases} y_0 = \widetilde{y}(a), \\ y_1 = \widetilde{y}(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_{n+1} = \widetilde{y}(b). \end{cases} \tag{29.43}$$

Этот случай представлен на рис. 29.3.

К сожалению, «идеального» численного метода не существует, поэтому ансамбль точек (29.42) располагается несколько иначе (см. рис. 29.4). Видно, что при этом условия (29.43) не выполняются.

В этом параграфе мы познакомимся с тремя численными методами решения дифференциальных уравнений.

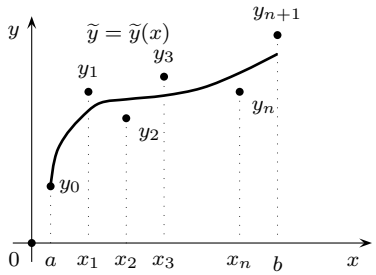



*Рис. 29.4.*

### 29.3.1. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Напомним, что мы рассматриваем задачу Коши — найти решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ при условии $y(x_0) = y_0$ (29.3). Вместо того чтобы искать интегральную кривую $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$, проходящую через точку $(x_0, y_0)$, будем искать ломаную линию, служащую аппроксимацией этой кривой. Процедуру вычислений организуем следующим образом.

Разобьем интервал $(a, b)$, на котором ищем решение задачи Коши (29.3), на $n$ частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Пусть длины всех частей одинаковы:

$$x_{i+1} - x_i = h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Величина $h$ называется шагом вычисления.

Приближенные значения функции $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ в точках $x_i$ обозначим через $y_i$.

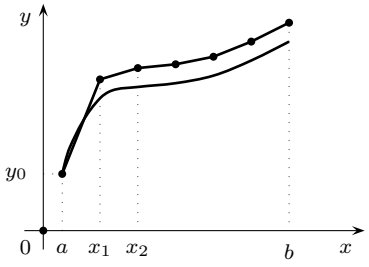



*Рис. 29.5.*

Рассмотрим участок $(x_0, x_1)$ и заменим на этом участке кривую $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ отрезком прямой (см. рис. 29.5).

Так как $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, есть возможность вычислить тангенс угла наклона касательной $k_0$ к интегральной кривой в точке $(x_0, y_0)$. Из начального условия следует, что $k_0 = f(x_0, y_0)$. Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = k_0(x - x_0). \tag{29.44}$$

В качестве $y_1$ выберем ординату точки касательной, абсцисса которой равна $x_1$. Имеем

$$y_1 - y_0 = k_0(x_1 - x_0) \quad \text{или} \quad y_1 = y_0 + k_0 h.$$

Итак, точку $(x_1, \widetilde{y}(x_1))$ интегральной кривой будем аппроксимировать точкой $(x_1, y_1)$. Перейдем к участку $(x_1, x_2)$. И на этом участке заменим интегральную кривую отрезком прямой. Теперь это будет прямая, проходящая через точку $(x_1, y_1)$ и имеющая угловой коэффициент $k_1 = f(x_1, y_1)$. К сожалению, $k_1$ не совпадает, вообще говоря, с угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой в точке $(x_1, \widetilde{y}(x_1))$, но мы используем $k_1$ по двум причинам:

1. Мы не знаем величину $\widetilde{y}(x_1)$ и поэтому не можем вычислить $f(x_1, \widetilde{y}(x_1))$.
2. Если $h$ достаточно мало, то величина $f(x_1, y_1)$ мало отличается от $f(x_1, \widetilde{y}(x_1))$.

Запишем уравнение прямой, отрезок которой аппроксимирует интегральную кривую на участке $(x_1, x_2)$:

$$y - y_1 = k_1(x - x_1).$$

В качестве $y_2$ выберем ординату точки этой прямой, абсцисса которой равна $x_2$. Имеем

$$y_2 - y_1 = k_1(x_2 - x_1) \quad \text{или} \quad y_2 = y_1 + k_1 h.$$

Найдена вторая аппроксимирующая точка $(x_2, y_2)$.

Аналогично процесс продолжается и дальше, вплоть до $x_{n+1} = b$:

$$\begin{array}{rcl} y_3 &=& y_2 + k_2 h, \\ y_4 &=& y_3 + k_3 h, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ y_{n+1} &=& y_n + k_n h, \end{array} \quad \text{где} \quad \begin{array}{rcl} k_2 &=& f(x_2, y_2), \\ k_3 &=& f(x_3, y_3), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ k_n &=& f(x_n, y_n). \end{array} \tag{29.45}$$

Итак, в результате мы получили ансамбль точек $\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_{n+1}, y_{n+1})\}$, которые служат аппроксимацией истинных точек, лежащих на интегральной кривой:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, \widetilde{y}(x_1)), \ldots, (x_{n+1}, \widetilde{y}(x_{n+1}))\}.$$

Чем меньше выбрана величина $h$, т. е. чем больше точек разбиения интервала $(a, b)$, тем более точно ломаная аппроксимирует интегральную кривую.

Можно доказать, что если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, а величина $h \to 0$, то ломаные Эйлера сколь угодно близко приближаются к интегральной кривой.

### 29.3.2. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

Снова начнем с промежутка $(x_0, x_1)$. Представим на этом промежутке задачу (29.3) в интегральной форме:

$$\widetilde{y}(x_1) = \widetilde{y}(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t, \widetilde{y}(t))\, dt. \tag{29.46}$$

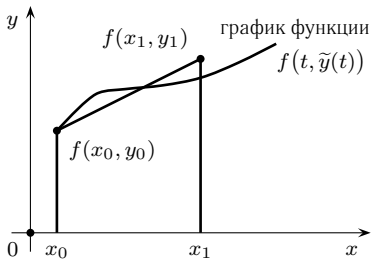



*Рис. 29.6.*

Величина $\widetilde{y}(x_0)$ известна из начального условия $\widetilde{y}(x_0) = y_0$. Чтобы вычислить величину $y_1$, нужно тем или иным способом приближенно вычислить величину второго слагаемого в (29.46). Геометрически это слагаемое представляет собой площадь криволинейной трапеции (см. рис. 29.6).

Заменим криволинейную трапецию прямоугольной. Ее площадь равна

$$S = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right), \tag{29.47}$$

и эта величина может служить приближенным значением интеграла в (29.46).

Величина $y_1$ нам неизвестна, но, заменяя в (29.46) $\widetilde{y}(x_1)$ на $y_1$, а интеграл на значение $S$ из (29.47), можно получить уравнение для определения $y_1$:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right). \tag{29.48}$$

Это уравнение для достаточно малых $h$ имеет корни. Решая его тем или иным путем, найдем корень, по величине наиболее близкий к $y_0$. Обозначим его через $\bar{y}_1$.

Итак, найдена точка $(x_1, \bar{y}_1)$. Переходим к промежутку $(x_1, x_2)$. Та же самая идея позволяет выписать уравнение для определения $y_2$:

$$y_2 = \bar{y}_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_2, y_2)\right). \tag{29.49}$$

Корень этого уравнения, ближайший к $\bar{y}_1$, определяет величину $\bar{y}_2$ и, тем самым, вторую точку $(x_2, \bar{y}_2)$.

Рассуждая аналогично, приходим к уравнениям, из которых можно будет найти $\bar{y}_3,\ \bar{y}_4,\ \ldots,\ \bar{y}_{n+1}$:

$$y_{k+1} = \bar{y}_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, \bar{y}_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right], \tag{29.50}$$

где $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$.

Ансамбль точек $\{(x_0, y_0), (x_1, \bar{y}_1), \ldots, (x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\}$ служит аппроксимацией ансамбля истинных точек, лежащих на интегральной кривой $\{(x_0, y_0),\ (x_1, \widetilde{y}(x_1),\ \ldots,\ (x_{n+1}, \widetilde{y}(x_{n+1}))\}$.

## § 29.4. МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Дифференциальные уравнения столь часто и столь плодотворно используются при описании самых разнообразных проблем окружающей действительности, что не следует удивляться несколько большему, чем ранее, числу моделей в этой и двух последующих главах.

### 29.4.1. МОДЕЛЬ ФЕРХЮЛЬСТА–ПИРЛА (ДИНАМИКА ПОПУЛЯЦИИ)

Один из вопросов, который очень часто возникает в современной экологии, состоит в следующем: как определить численность той или иной популяции через определенное время? Ответ на него представляет не только теоретический интерес, но и имеет большое практическое значение. Действительно, не зная этого ответа, нельзя правильно планировать эксплуатацию различных возобновимых природных ресурсов — промысловых рыб, охотничьих угодий и т. п.

Для иллюстрации рассмотренных методов рассмотрим простейшую ситуацию. Будем считать, что популяция (сообщество особей одного вида) изменяет свою биомассу под воздействием только трех процессов:

1. Естественная рождаемость.
2. Естественная смертность.
3. Внутривидовая конкуренция.

Разумеется, сделанные предположения представляют собой сильное упрощение, которое, впрочем, оправдано тем, что для описания ситуации нам достаточно уже рассмотренных типов уравнений.

Обозначим биомассу популяции в момент $t$ через $x(t)$. В начальный момент биомасса предполагается известной: $x(t_0) = x_0$. Полагаем, что величина биомассы меняется без резких скачков, плавно. С позиций математики, для выражения этого факта потребуем, чтобы $x(t)$ была дифференцируемой функцией. Формализуем процессы, воздействующие на популяцию:

1. Будем предполагать, что рождаемость за промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$ пропорциональна величине $\Delta t$ и биомассе популяции в момент времени $t$, т. е. биомасса $B(t, t + \Delta t)$ родившихся за промежуток $(t, t + \Delta t)$ равна

$$B(t, t + \Delta t) = \alpha x(t) \cdot \Delta t, \tag{29.51}$$

где $\alpha$ — известный коэффициент пропорциональности (коэффициент рождаемости).

2. Будем предполагать, что смертность за промежуток времени от $t$ до $t+\Delta t$ также пропорциональна величине $\Delta t$ и биомассе популяции в момент $t$, т. е. биомасса $M(t, t+\Delta t)$ умерших за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна

$$M(t, t+\Delta t) = \beta x(t) \cdot \Delta t, \tag{29.52}$$

где $\beta$ — известный коэффициент пропорциональности (коэффициент смертности).

3. Будем предполагать, что внутривидовая конкуренция ведет к дополнительной смертности. Пока биомасса мала, влияние внутривидовой конкуренции невелико. Когда биомасса возрастает, роль внутривидовой конкуренции резко возрастает. Разумеется, дать формализованное описание процесса внутривидовой конкуренции, с учетом вышесказанного, можно множеством способов.

Мы, следуя модели, предложенной в работах немецкого ученого Ферхюльста и английского ученого Пирла, примем такое описание:

*Дополнительная смертность из-за внутривидовой конкуренции за промежуток времени от $t$ до $t+\Delta t$ определяется формулой*

$$M_1(t, t+\Delta t) = \gamma \cdot (x(t))^2 \cdot \Delta t, \tag{29.53}$$

*где $\gamma$ — известный коэффициент пропорциональности (коэффициент дополнительной смертности).*

Теперь уже можно сформулировать очень важное балансовое равенство:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \alpha x(t) \cdot \Delta t - \beta x(t) \cdot \Delta t - \gamma (x(t))^2 \Delta t. \tag{29.54}$$

Оно выражает собой закон сохранения на уровне тех трех процессов, которые включены нами в рассмотрение.

Обозначим величину $\alpha - \beta$ через $k$. Естественно считать и $k$, и $\gamma$ большими нуля.

В выражении (29.54) перенесем $x(t)$ в левую часть и разделим обе части равенства на $\Delta t$:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = k \cdot x(t) - \gamma x^2(t). \tag{29.55}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и имея в виду, что $x(t)$ — дифференцируемая функция, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = kx - \gamma x^2. \tag{29.56}$$

Это уравнение вместе с условием $x(t_0) = x_0$ и представляет собой модель Ферхюльста—Пирла. В уравнении (29.56) легко разделяются переменные, и оно может быть проинтегрировано:

$$\frac{dx}{kx - \gamma x^2} = dt. \tag{29.57}$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{k\xi - \gamma \xi^2} = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau. \tag{29.58}$$

Полагая для простоты $t_0 = 0$ и интегрируя, получаем

$$x(t) = \frac{kx_0 e^{kt}}{k - \gamma x_0 (1 - e^{kt})}. \tag{29.59}$$

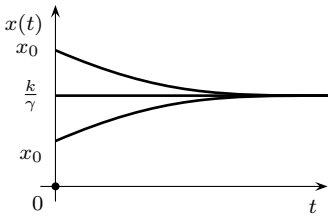



*Рис. 29.7.*

Формула (29.59) позволяет вычислить биомассу популяции в любой момент времени. Интересно, что вид функции существенно зависит от соотношения величин $x_0$ и $k/\gamma$ (см. рис. 29.7).

Из рисунка видно, что, если начальная биомасса $x_0 > k/\gamma$, то в дальнейшем биомасса только убывает. Если же $x_0 < k/\gamma$, то биомасса только возрастает. В обоих случаях с течением времени она неограниченно приближается к величине $k/\gamma$.

*Замечание.* Случай, когда внутривидовая конкуренция не учитывается, т. е. когда $\gamma = 0$, был рассмотрен в модели Мальтуса. Уравнение этой модели имеет вид

$$\frac{dx}{dy} = kx, \tag{29.60}$$

а его решение, с учетом условия $x(0) = x_0$, определяется формулой

$$x(t) = x_0\, e^{kt}. \tag{29.61}$$

### 29.4.2. МОДЕЛЬ СТРИТЕРА–ФЕЛПСА (ДИНАМИКА СОДЕРЖАНИЯ РАСТВОРЕННОГО КИСЛОРОДА В ВОДЕ)

Как известно, проблема качества природных вод приобрела в последние годы особую значимость. Математическое моделирование в задачах управления качеством воды рек и водоемов применяется с большим успехом.

Первую модель, в которой описывалась динамика содержания растворенного кислорода и процесс самоочищения воды, предложили американские ученые Стритер и Фелпс в 1925 году. Впервые она была использована для изучения качества вод реки Огайо. Познакомимся с простейшим вариантом этой модели.

Пусть имеется некоторый объем $V$ воды, содержащей как растворенный кислород, так и органическое вещество. С течением времени и концентрация кислорода, и концентрация органического вещества меняются. Хотелось бы уметь прогнозировать эти изменения. Будем предполагать идеальную перемешиваемость воды в объеме $V$, т. е. в любых двух точках в данный момент одинаковые концентрации кислорода и одинаковые концентрации органического вещества.

Введем переменные (они называются переменными состояния), которые будут в каждый момент времени однозначно характеризовать состояние воды. С одной из них трудностей нет — обозначим через $x_1(t)$ (мг/л) концентрацию растворенного кислорода в момент времени $t$. Хуже обстоит дело с органическим веществом, так как органическое вещество в процессе окисления проходит разные стадии и, оказывается, сказать, что концентрация органического вещества, например, равна 5 мг/л, еще недостаточно, чтобы однозначно охарактеризовать состояние воды. Нужно еще указать, сколько времени это вещество находится в воде. Такая двойная характеристика очень неудобна, и, чтобы ее избежать, вводится некая условная, расчетная величина — биохимическое потребление кислорода (БПК), служащая мерой содержания органического вещества

в воде. Итак, в качестве второй переменной состояния возьмем $x_2(t)$ — концентрацию БПК (мг/л). Теперь следует решить, какие процессы будут включены в модель. Их немного:

1) Процесс аэрации — поступление кислорода в воду из атмосферы.
2) Расходование кислорода на уменьшение БПК.
3) Окисление органического вещества, т. е. уменьшение БПК.

Приведем формальное описание перечисленных процессов:

1. Предполагается, что поступление кислорода в воду из атмосферы за время $\Delta t$ $\Pi(t, t+\Delta t)$ пропорционально величине $\Delta t$ и величине разности между концентрацией насыщения и текущей концентрацией кислорода, т. е.

$$\Pi(t, t+\Delta t) = K_1(C - x_1)\Delta t, \tag{29.62}$$

где $K_1$ — постоянная скорости аэрации, а $C$ — концентрация насыщения воды кислородом.

*Замечание.* Величина $C$ зависит от температуры — при каждом значении температуры существует своя концентрация насыщения воды кислородом. Выше температура воды — ниже концентрация кислорода. В рассматриваемой нами модели температуру воды будем считать постоянной.

2. Предполагается, что расходование кислорода на уменьшение БПК за время от $t$ до $t+\Delta t$, $U(t, t+\Delta t)$, пропорционально величине $\Delta t$ и текущей концентрации БПК, т. е.

$$U(t, t+\Delta t) = K_2 x_2 \Delta t, \tag{29.63}$$

где $K_2$ — коэффициент пропорциональности (он называется еще постоянная скорости уменьшения БПК).

3. Предполагается, что уменьшение БПК за время от $t$ до $t+\Delta t$, $v(t, t+\Delta t)$, пропорционально величине $\Delta t$ и текущей концентрации БПК, т. е.

$$v(t, t+\Delta t) = K_2 x_2 \Delta t. \tag{29.64}$$

Выпишем балансовые соотношения, выражающие законы сохранения кислорода и БПК в объеме $V$ на уровне процессов, включенных в нашу модель:

$$\begin{cases} x_1(t+\Delta t)\cdot V = x_1(t)\cdot V + K_1(C - x_1)V\cdot\Delta t - K_2 x_2\cdot V\cdot\Delta t, \\ x_2(t+\Delta t)\cdot V = x_2(t)\cdot V - K_2 x_2\cdot V\cdot\Delta t. \end{cases} \tag{29.65}$$

Для большей ясности приведем словесную формулировку первого из равенств (29.65):

*Количество кислорода в объеме $V$ в момент $t+\Delta t$ равно тому количеству кислорода, которое там было в момент времени $t$, плюс то количество, которое добавилось в результате аэрации, минус то количество кислорода, которое затрачено на уменьшение БПК.*

В уравнениях (29.65) сделаем очевидные преобразования: сократим обе части на $V$; первые слагаемые из правых частей перенесем в левые части; разделим обе части каждого из уравнений на $\Delta t$.

Предполагая, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ диференцируемые функции, устремим $\Delta t$ к нулю. В пределе получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = K_1(C - x_1) - K_2 x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -K_2 x_2. \end{cases} \tag{29.66}$$

Пусть значения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ заданы при $t = 0$:

$$x_1(0) = x_{10} \qquad \text{и} \qquad x_2(0) = x_{20}. \tag{29.67}$$

Уравнения (29.66) с условиями (29.67) позволяют вычислить $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при любом значении $t$, большем нуля.

До сих пор мы не встречались с системами дифференциальных уравнений. Они будут рассматриваться в следующей главе. Но с этой системой мы «справимся» и без общей теории.

Легко заметить, что второе уравнение интегрируется без труда, так как переменные разделяются. Найденное решение нужно будет подставить в первое уравнение и далее интегрировать его как линейное неоднородное уравнение. По этому плану и будем действовать. Интегрируем второе уравнение:

$$\int\limits_{x_{20}}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int\limits_0^t K_2\, dt. \tag{29.68}$$

Его решение имеет вид

$$x_2(t) = x_{20}\, e^{-K_2 t}. \tag{29.69}$$

Подставляя найденное значение $x_2(t)$ в первое из уравнений (29.66), получим

$$\frac{dx_1}{dt} + K_1 x_1 = K_1 C - K_2 x_{20} e^{-K_2 t}. \tag{29.70}$$

Найдем общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (29.70). Оно имеет вид

$$x_1^{\text{общ.о}}(t) = \mathcal{D}\, e^{-K_1 t}, \tag{29.71}$$

где $\mathcal{D}$ — произвольная постоянная.

Частное решение уравнения (29.70) будем искать в виде

$$x_1^{\text{част.н.}}(t) = A + B\, e^{-K_2 t}, \tag{29.72}$$

где $A$ и $B$ константы, которые нужно определить. Чтобы это сделать, функцию $x_1^{\text{част.н.}}(t)$ и ее производную подставляем в выражение (29.70), которое, тем самым, должно обратиться в тождество. Если это тождество, то и коэффициенты при $e^{-K_2 t}$, и свободные члены в обеих его частях должны быть равны, т. е.

$$A = C, \qquad B = \frac{K_2 x_{20}}{K_2 - K_1}.$$

Общее решение уравнения (29.70) имеет вид

$$x_1^{\text{общ.н.}}(t) = \mathcal{D}\, e^{-K_1 t} + C + \frac{K_2 x_{20}}{K_2 - K_1}\, e^{-K_2 t}. \tag{29.73}$$

Произвольную постоянную $\mathcal{D}$ можно найти из условия $x_1(0) = x_{10}$. Имеем

$$\mathcal{D} = x_{10} - C - \frac{K_2 x_{20}}{K_2 - K_1}.$$

Окончательно функция $x_1(t)$ определяется формулой

$$x_1(t) = \left( x_{10} - C - \frac{K_2 x_{20}}{K_2 - K_1} \right) e^{-K_1 t} + C + \frac{K_2 x_{20}}{K_2 - K_1} e^{-K_2 t}. \qquad (29.74)$$

Выражения (29.69) и (29.74) дают решение рассматриваемой задачи.

*Замечание.* В приведенном решении предполагается, что $K_2 \neq K_1$. Рассмотрите самостоятельно случай равенства, применив к уравнению (29.70) метод вариации произвольной постоянной.

## Контрольные вопросы

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
2. Что такое изоклины и как они связаны с интегральными кривыми дифференциального уравнения?
3. Как формулируется теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка?
4. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка?
5. Как интегрируется дифференциальное уравнение в полных дифференциалах?
6. Как найти приближенное решение дифференциального уравнения с помощью метода Эйлера? С помощью метода трапеций?

# XXX

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

В самом общем виде дифференциальное уравнение $n$-го порядка выглядит так:

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0, \tag{30.1}$$

где $F$ — известная функция.

Если даже в случае уравнения первого порядка не существовало общего метода (исключая численные!), который бы позволил решать любое уравнение, то уж тем более это верно для уравнений $n$-го порядка. Не имея общего метода, приходится рассматривать отдельные классы уравнений, определяемые той или иной спецификой уравнения (30.1) — уравнение не содержит $x$, не содержит искомой функции $y$, ряда ее производных и многие другие. Для каждого такого класса разработаны свои методы интегрирования, и можно сказать, что уже накоплен огромный арсенал таких методов. Применение любого из них, если он позволяет найти решение уравнения, оправдано, так как и для уравнений $n$-го порядка существует очень важная теорема о существовании и единственности решения.

## § 30.1. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $n$-ГО ПОРЯДКА

Будем предполагать для простоты, что уравнение (30.1) разрешено относительно старшей производной, т. е. имеет вид

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big), \tag{30.1′}$$

где функция $f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)$ задана в области $\mathcal{D}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$.

Область $\mathcal{D}$ называется также областью определения дифференциального уравнения (30.1′).

**Определение 30.1.** *Функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $(a, b)$, называется решением уравнения* (30.1′)*, если она $n$ раз непрерывно дифференцируема на $(a, b)$ и для каждой точки $x \in (a, b)$ справедливо равенство*

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big).$$

*При этом, конечно, предполагается, что при $x \in (a, b)$ точка с координатами $(x,\ y(x),\ y'(x), \ldots,\ y^{(n-1)}(x))$ принадлежит области $\mathcal{D}$.*

**Определение 30.2.** *Задачей Коши для уравнения* (30.1′) *с начальными условиями*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{30.2}$$

*где* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ *— точка области* $\mathcal{D}$*, называется задача об отыскании решения уравнения* (30.1′)*, удовлетворяющего начальным условиям* (30.2).

**Определение 30.3.** *Общим решением уравнения* (30.1′) *называется функция*

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{30.3}$$

*зависящая от произвольных постоянных* $C_1$, $C_2$, …, $C_n$, *такая, что для любой точки* $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ *области определения* $\mathcal{D}$ *существует единственный набор постоянных* $C_1$, $C_2$, …, $C_n$, *при которых функция* (30.3) *является решением задачи Коши с начальными условиями* (30.2).

Для уравнения (30.1′) имеет место важная теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

**ТЕОРЕМА 30.1**

Пусть функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ в области $\mathcal{D}$ имеет непрерывные производные по переменным $y$, $y'$, …, $y^{(n-1)}$. Тогда для любых начальных данных $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathcal{D}$ существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (30.1′), определенное на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ и удовлетворяющее условиям определения 30.2.

Единственность решения понимается в том смысле, что любые два решения, удовлетворяющие условию (30.2), совпадают на пересечении их интервалов определения.

Доказательство теоремы мы здесь не приводим.

## § 30.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ $n$-ГО ПОРЯДКА

**Определение 30.4.** *Дифференциальное уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных, называется линейным дифференциальным уравнением. (Сравните с определением 29.9.)*

Исходя из определения, линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{30.4}$$

где $a_i(x)$ — известные функции, коэффициенты уравнения.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (30.4) называется однородным:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{30.4′}$$

Если $f(x) \not\equiv 0$, то — неоднородным.

Приведенная в предыдущем параграфе общая теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $n$-го порядка применительно к уравнению (30.4) может быть уточнена следующим образом.

**ТЕОРЕМА 30.2**
Если все функции $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$, непрерывны при $x \in (a, b)$ и $a_0(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то для любых начальных условий $y_0$, $y_0'$, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$, заданных в произвольной точке $x_0 \in (a, b)$, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (30.4), определенное на всем интервале $(a, b)$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{30.5}$$

Линейные дифференциальные уравнения заслуживают внимательного изучения по нескольким причинам:

1. Очень многие важные прикладные задачи удалось хорошо описать с помощью линейных дифференциальных уравнений.
2. Описывая какую-то новую конкретную проблему, зачастую имеет смысл попробовать сначала простейший тип дифференциального уравнения — линейное дифференциальное уравнение. Если результаты моделирования окажутся неудовлетворительными, тогда нужно переходить к нелинейным уравнениям.
3. Решения линейных дифференциальных уравнений обладают многими интересными свойствами, которые мы сумеем и продемонстрировать, и в дальнейшем использовать.

Изучая линейные дифференциальные уравнения, мы воспользуемся введенными ранее понятиями линейного пространства, подпространства, линейного оператора, базиса и др. Вообще, это прием, типичный для математики: переформулировать задачу (если это возможно!) в терминах некоторого другого продвинутого раздела, а потом применить результаты этого раздела к исходной задаче.

Итак, введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$T = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x). \tag{30.6}$$

Рассмотрим множество $C_\infty([a, b])$ всех функций $\varphi$, определенных на $[a, b]$ и имеющих там производные всех порядков. Это множество образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число. (Проверьте самостоятельно, что $C_\infty([a, b])$ удовлетворяет всем условиям, которым должно удовлетворять линейное пространство.) Легко убедиться, что оператор $T$ осуществляет отображение $C_\infty([a, b]) \to C_\infty([a, b])$, т. е., если взять $\varphi \in C_\infty([a, b])$, то $T\varphi \in C_\infty([a, b])$. Правила вычисления производных позволяют установить, что для любых двух элементов $\varphi_1$, $\varphi_2 \in C_\infty([a, b])$ выполняются следующие свойства:

а) $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$, (аддитивность)
б) $T(\alpha\varphi_1) = \alpha T(\varphi_1)$, (однородность)

где $\alpha$ — произвольная постоянная.

Это означает, что $T$ — линейный оператор $\left(T \in L\left(C_\infty([a, b]), C_\infty([a, b])\right)\right)$.

● *ПРИМЕР 30.1.* Пусть оператор $T$ имеет вид

$$T = 4\frac{d^2}{dx^2} + 5\frac{d}{dx} + 6. \tag{30.7}$$

Возьмем $\varphi = x^4 + \cos x$. Очевидно, что $\varphi \in C_\infty([a,b])$. Покажем, что $T(\varphi) \in C_\infty([a,b])$. Имеем

$$T(\varphi) = 4\frac{d^2(x^4+\cos x)}{dx^2} + 5\frac{d(x^4\cos x)}{dx} + 6(x^4+\cos x) = \\ = 6x^4 + 20x^3 + 48x^2 + 2\cos x - 5\sin x.$$

Отсюда следует, что $T(\varphi) \in C_\infty([a,b])$.

Из свойства линейности оператора $T$ следуют несколько очень важных фактов и теорем, которые были в конечномерном случае сформулированы в § 13.5. В частности, ядро $T$ — $\operatorname{Ker} T = \{\varphi \in C_\infty([a,b]) \,|\, T(\varphi) = 0\}$ является конечномерным подпространством пространства $C_\infty([a,b])$.

Вид ядра оператора $T$, естественно, зависит от вида $T$. Например, пусть $T = \frac{d^4}{dx^4}$. Тогда $\operatorname{Ker} T$ состоит из всех полиномов вида

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3,$$

где $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные, т. е. $\operatorname{Ker} T$ есть множество всех полиномов степени не выше третьей.

**ТЕОРЕМА 30.3**
Пусть $A \in L(X,X)$, $X$ — линейное пространство. Рассмотрим уравнение

$$A(\varphi) = f. \tag{30.8}$$

Тогда если $\varphi_0$ есть какое-нибудь решение уравнения (30.8), то *все* решения $\varphi$ уравнения (30.8) имеют вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega, \tag{30.9}$$

где $\omega \in \operatorname{Ker} A$.

● Возьмем в качестве $\omega$ произвольный элемент $\operatorname{Ker} A$. Рассмотрим функцию $\varphi = \varphi_0 + \omega$. В силу линейности оператора $A$ имеем

$$A(\varphi) = A(\varphi_0 + \omega) = A(\varphi_0) + A(\omega). \tag{30.10}$$

Но по условию $A(\varphi_0) = f$. Если $\omega \in \operatorname{Ker} A$, то $A(\omega) = 0$. Следовательно,

$$A(\varphi) = f. \tag{30.11}$$

Тем самым показано, что выражение вида (30.9) всегда является решением уравнения (30.8). А теперь покажем, что каким бы ни было решение уравнения (30.8), оно всегда может быть представлено в виде (30.9).

Пусть $\varphi$ есть любое решение уравнения (30.8), т. е. $A(\varphi) = f$. Из условия известно, что $A(\varphi_0) = f$. Применим оператор $A$ к элементу $\varphi - \varphi_0$. Имеем

$$A(\varphi - \varphi_0) = A(\varphi) - A(\varphi_0) = f - f = 0. \tag{30.12}$$

Из (30.12) следует, что $\varphi - \varphi_0 \in \operatorname{Ker} A$. Обозначая эту разность через $\omega$, получаем

$$\omega = \varphi - \varphi_0 \qquad \text{и} \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega,$$

что и требовалось доказать. ●

Полученные результаты позволяют уже кое-что (но еще не все!) сказать о решении уравнения (30.4). Любое решение этого уравнения состоит из частного решения уравнения (30.4) и какого-то решения однородного уравнения. Это «какое-то» решение должно быть выбрано в зависимости от начальных условий (30.5). Как? Пока это не ясно, и наша ближайшая задача состоит в отыскании возможности такого выбора.

Снова обратимся к пространству $\operatorname{Ker} T$, элементами которого являются решения однородного уравнения, соответствующего (30.4). Базисом $\operatorname{Ker} T$ является система линейно-независимых функций $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_k$ таких, что все они принадлежат $\operatorname{Ker} T$ и, кроме того, всякий элемент $\omega \in \operatorname{Ker} T$ может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации

$$\omega = C_1\omega_1 + C_2\omega_2 + \cdots + C_k\omega_k, \tag{30.13}$$

где $C_1$, ..., $C_k$ — некоторые константы.

Напомним, что функции $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_k$ называются линейно-независимыми тогда и только тогда, когда равенство

$$\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \cdots + \alpha_k\omega_k = 0 \tag{30.14}$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Если равенство (30.14) выполняется хотя бы при одном $\alpha_i \neq 0$, то элементы $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_k$ называются линейно-зависимыми. (Сравни § 9.2 главы 9). Очень важно уметь проверять, является та или иная система функций линейно зависимой или нет. В этой связи полезна следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 30.4**

Если функции $\omega_1$, ..., $\omega_k$ линейно зависимы на промежутке $x \in [a, b]$, то определитель

$$W[\omega_1, \ldots, \omega_k] = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_k \\ \omega_1' & \omega_2' & \ldots & \omega_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{(k-1)} & \omega_2^{(k-1)} & \ldots & \omega_k^{(k-1)} \end{vmatrix},$$

называемый определителем Вронского, тождественно равен нулю на том же промежутке.

● Дано, что

$$\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \cdots + \alpha_k\omega_k \equiv 0 \tag{30.15}$$

при $x \in [a, b]$, причем не все $\alpha_i = 0$. Продифференцировав тождество (30.15) $k-1$ раз, получим

$$\begin{cases} \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_k\omega_k \equiv 0, \\ \alpha_1\omega_1' + \cdots + \alpha_k\omega_k' \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\omega_1^{(k-1)} + \cdots + \alpha_k\omega_k^{(k-1)} \equiv 0. \end{cases} \tag{30.16}$$

Система (30.16) относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ имеет нетривиальное решение (не все $\alpha_i = 0$) при любом $x \in [a, b]$. Это может быть только в том случае, если определитель системы равен нулю (см. §6.5, теорема 6.8), т. е. если

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \ldots & \omega_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \omega_1^{(k-1)} & \ldots & \omega_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = 0, \tag{30.17}$$

что и требовалось доказать. ●

Было бы очень удобно, если бы мы смогли доказать и такую теорему: если функции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ линейно независимы при $x \in [a, b]$, то в этом же промежутке определитель Вронского $W[\omega_1, \ldots, \omega_k]$ нигде не обращается в нуль. Тогда, имея эту и предыдущую теоремы, можно было бы очень легко исследовать любой набор функций $\omega_1, \ldots, \omega_k$ на линейную зависимость, а именно:

*если определитель Вронского отличен от нуля, то функции линейно независимы, если же он равен нулю, то они линейно зависимы.*

К сожалению, это не так. Сформулированное выше утверждение *не верно*. Ниже приведен пример линейно независимых функций, для которых определитель Вронского тождественно равен нулю на всем отрезке.

● *ПРИМЕР 30.2.* Определим две функции

$$\omega_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{если } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{если } x \in (1, 2] \end{cases}$$

и

$$\omega_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1] \\ (x-1)^2, & \text{если } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Определитель Вронского этих функций

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{при } x \in [0, 2],$$

так как при $x \in [0, 1]$ второй столбец состоит из нулей, а при $x \in (1, 2]$ — первый столбец состоит из нулей.

В то же время легко видеть, что $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ линейно независимы при $x \in [0, 2]$. Действительно, рассматривая тождество $\alpha_1\omega_1(x) + \alpha_1\omega_2(x) \equiv 0$ при $x \in [0, 1]$, получаем, что $\alpha_1 = 0$. Если же $x \in (1, 2]$, то должно быть $\alpha_2 = 0$.

Оказывается, однако, что если к сформулированному неверному утверждению добавить еще кое-какие условия, то получится хотя не такая общая, как хотелось бы, но очень полезная теорема.

**ТЕОРЕМА 30.5**

Если линейно независимые функции $\omega_1, \ldots, \omega_k$ являются решениями уравнения (30.4′), то определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $[a, b]$.

● Доказательство этой теоремы предлагается провести самостоятельно, применив метод «от противного». ●

Выше мы сказали, что базисом $\operatorname{Ker} T$ является система линейно независимых функций $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. А сколько таких функций содержится в базисе? Ответ на этот вопрос — базис содержит в точности $n$ ($n$ — порядок дифференциального оператора $T$) линейно независимых функций — вытекает из следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 30.6**
Общим решением уравнения (30.4′) является линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i$ $n$ линейно независимых на промежутке $[a, b]$ решений с произвольными постоянными коэффициентами.

● Уравнение (30.4′) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности. Поэтому решение $y = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i$ будет общим только в том случае, если удастся подобрать коэффициенты $c_i$ так, чтобы удовлетворялись произвольно заданные условия (30.5). Потребовав, чтобы эти условия выполнялись, получаем систему уравнений для определения коэффициентов $c_i$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i(x_0) = y_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)}. \end{cases} \tag{30.18}$$

Так как решения $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейно независимы, то в соответствии с теоремой 30.5 система (30.18) имеет единственное решение при любых правых частях уравнений и при любом $x_0 \in [a, b]$, так как ее определитель (определитель Вронского) отличен от нуля. ●

Отметим, что любая система из $n$ линейно независимых решений уравнения (30.4′) называется его фундаментальной системой решений.

Теперь, наконец, мы можем до конца охарактеризовать структуру решения уравнения (30.4). При этом оказывается, что удобнее всего с практической точки зрения характеризовать структуру общего решения уравнения (30.4).

Общее решение уравнения (30.4) состоит из суммы общего решения уравнения (30.4′) и какого-нибудь частного решения $\varphi_0$ уравнения (30.4):

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i\omega_i + \varphi_0. \tag{30.19}$$

Любое частное решение уравнения (30.4) находится за счет соответствующего выбора произвольных постоянных в (30.19).

В заключение отметим, что если для линейного однородного уравнения (30.4′) известна фундаментальная система решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, то общее решение неоднородного уравнения (30.4) может быть получено методом вариации произвольных постоянных.

Как и в случае линейного уравнения первого порядка, общее решение неоднородного уравнения (30.4) разыскивается в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x).$$

Неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\ y_1(x) & + C_2'(x)\ y_2(x) & + \cdots + C_n'(x)\ y_n(x) & = 0 \\ C_1'(x)\ y_1'(x) & + C_2'(x)\ y_2'(x) & + \cdots + C_n'(x)\ y_n'(x) & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

являются частными решениями уравнения (30.20) и, следовательно, принадлежат $\operatorname{Ker} T_1$. Размерность $\operatorname{Ker} T_1$ равна $n$. Если нам удастся доказать, что функции (30.24) линейно независимы, то это значит, что они образуют базис $\operatorname{Ker} T_1$.

● Допустим, что функции (30.24) линейно зависимы. Тогда

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \cdots + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0, \tag{30.25}$$

причем хотя бы одно $\alpha_i$ не равно нулю. Пусть для определенности $\alpha_n \neq 0$. Разделим тождество (30.25) на $e^{k_1 x}$ и результат продифференцируем:

$$\alpha_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \cdots + \alpha_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} \equiv 0. \tag{30.26}$$

Поскольку $\alpha_n \neq 0$, то условие (30.26) выражает собой линейную зависимость между $(n-1)$-й показательной функцией с разными показателями.

Тождество (30.26) разделим на $e^{(k_2-k_1)x}$ и результат снова продифференцируем. Повторяя этот процесс $n-1$ раз, придем к тождеству

$$\alpha_n(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)\ldots(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x} = 0, \tag{30.27}$$

которое невозможно, так как все сомножители в левой части не равны нулю. Пришли к противоречию, значит, функции (30.24) линейно независимы. ●

Совершенно аналогично доказательство проводится для случая комплексных значений $k_i$.

Итак, найден базис $\operatorname{Ker} T_1$. Любой элемент этого подпространства, т. е. любое решение уравнения (30.20), может быть представлено в виде

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}, \tag{30.28}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Выражение (30.28) представляет собой общее решение уравнения (30.20).

2. Все корни уравнения (30.23) вещественны, но среди них есть кратные. Пусть лишь один корень $k_i$ кратный и имеет кратность $p$. В этом случае функции

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad \ldots, \quad y_{n-p} = e^{k_n x} \tag{30.29}$$

также являются частными решениями уравнения (30.20). Они линейно независимы, но не образуют базис $\operatorname{Ker} T_1$, так как до базиса «не хватает» еще $p-1$ линейно независимых функций. Можно показать, что функции

$$y_{n-p+1} = xe^{k_i x},\ y_{n-p+2} = x^2 e^{k_i x},\ \ldots,\ y_n = x^{p-1}e^{k_i x} \tag{30.30}$$

также являются частными решениями уравнения (30.20). (Проверьте самостоятельно.) Кроме того, эти функции линейно независимы между собой и с функциями (30.29). Доказательство этого аналогично доказательству п. 1.

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (30.20) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + \cdots + C_i e^{k_i x} + C_{i+1} x e^{k_i x} + \cdots + \\ + C_{i+p} x^{p-1} e^{k_i x} + \cdots + C_n e^{k_n x}, \tag{30.31}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Совершенно очевидны изменения в формуле (30.31), если уравнение (30.23) имеет не один, а несколько кратных корней — каждому корню соответствует столько функций, каков показатель кратности корня.

3. Уравнение (30.23) имеет простой комплексный корень $\alpha+\beta i$. Так как коэффициенты уравнения (30.23) вещественны, то наличие корня $\alpha+\beta i$ влечет за собой и наличие корня $\alpha-\beta i$. Следовательно, функции $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$ являются частными решениями уравнения (30.20). Но по формуле Эйлера (28.20) можно записать
$$\begin{aligned} e^{(\alpha+\beta i)x} &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\\ e^{(\alpha-\beta i)x} &= e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x). \end{aligned} \tag{30.32}$$

   Если функции $y_1$ и $y_2$ являются частными решениями, то и функции
$$\widetilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{и} \qquad \widetilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{30.33}$$
   являются частными решениями. Они также линейно независимы и между собой, и с другими элементами базиса. (Проверьте самостоятельно.) Общее решение уравнения (30.20) имеет вид
$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_3 e^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots + C_n e^{k_n x}, \tag{30.34}$$
   где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.
4. Уравнение (30.23) имеет $p$-кратный комплексный корень $\alpha+\beta i$. Так как коэффициенты уравнения вещественны, то такую же кратность $p$ имеет и корень $\alpha-\beta i$. Повторяя рассуждения п. 2 и п. 3, получим, что этим двум $p$-кратным корням соответствуют частные решения вида
$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta xs,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{gathered}$$
   Именно они должны быть добавлены в базис и, соответственно, в формулу (30.34), дающую общее решение уравнения (30.20). (Проверьте самостоятельно.)

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

● *ПРИМЕР 30.3.* Найти общее решение однородного дифференциального уравнения
$$y''' - 7y' + 6y = 0.$$

● Характеристическое уравнение имеет вид
$$k^3 - 7k + 6 = 0.$$
Легко заметить, что это уравнение имеет три корня
$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = -3.$$
Следовательно, фундаментальная система решений может быть записана так:
$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{-3x},$$
а общее решение уравнения определяется формулой
$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x},$$
где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. (Самостоятельно убедитесь в том, что функция $y = 2e^{-3x}$ является частным решением уравнения.) ●

● *ПРИМЕР 30.4.* Найти общее решение однородного уравнения
$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0.$$

● Составляем характеристическое уравнение:

$$k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$. (Проверьте самостоятельно.).

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + C_3 \cdot e^{2x},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3$ — произвольные постоянные. (Самостоятельно убедитесь в том, что функция $y = xe^x$ является частным решением уравнения.) ●

● *ПРИМЕР 30.5.* Найти общее решение однородного уравнения

$$y'' + 4y = 0.$$

● Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4 = 0.$$

Общее решение уравнения определяется формулой

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные. ●

Перейдем теперь к решению уравнения (30.21). Как было сказано, общее решение уравнения (30.21) состоит из общего решения однородного уравнения, т. е. уравнения (30.20) и какого-нибудь частного решения уравнения (30.21). Поскольку находить общее решение уравнения (30.20) мы уже умеем, осталось выяснить, как находить частное решение уравнения (30.21).

Прежде всего сформулируем очень полезную и важную теорему.

**ТЕОРЕМА 30.7**
Если $A \in L(X, X),\ X$ — линейное пространство и $\varphi_k$ есть решение уравнения $A(\varphi_k) = f_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, то $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_m\varphi_m$ является решением уравнения $A(\varphi) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_m f_m$.

● Доказательство теоремы немедленно следует из свойств линейности оператора $A$. Эта теорема носит название принципа суперпозиции. ●

*Замечание.* Принцип суперпозиции справедлив не только для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, но и для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Вернемся к уравнению (30.21). Нужно отдавать себе отчет, что далеко не при всяком значении правой части уравнения есть надежда в явном виде выписать его частное решение. Пусть, например, в правой части стоит функция $f_i(x) = x^{\sin x}$. Уже в этом простейшем случае выразить частное решение уравнения через элементарные функции не удастся, но можно, применив метод вариации постоянных, записать его в форме интеграла. К счастью, для некоторых часто встречающихся случаев можно указать «рецепты» отыскания частных решений. Знать эти «рецепты» полезно всем, кто имеет дело с решением дифференциальных уравнений.

*Рецепт 1.* Пусть в правой части уравнения (30.21) стоит многочлен степени $p$:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots a_n y = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_p. \tag{30.35}$$

Будем предполагать, что $a_n \neq 0$. Тогда уравнение имеет решение вида

$$y = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_p, \tag{30.36}$$

где $B_0$, $B_1$, ..., $B_p$ — коэффициенты, определяемые из уравнения (30.35). Чтобы их найти, продифференцируем выражение (30.36) $n$ раз и найденные значения производных подставим в уравнение (30.35).

Коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях должны быть равны. (Почему?) Отсюда получаем систему уравнений для последовательного определения величин $B_0$, $B_1$, ..., $B_p$:

$$\begin{aligned} a_n B_0 = A_0 \quad &\Longrightarrow \qquad B_0 = \frac{A_0}{a_n} \\ B_0 p a_{n-1} + a_n B_1 = A_1 \quad &\Longrightarrow \qquad B_1 = \frac{A_1 a_n - A_0 p a_{n-1}}{a_n^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

В рассмотренном случае существенно предположение, что $a_n \neq 0$. А как быть, если $a_n = 0$? Или, более того, если $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$, а $a_{n-k} \neq 0$? На этот раз формула (30.36) заменяется на формулу

$$y = x^k \left( B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_p \right). \tag{30.37}$$

Убедитесь самостоятельно, что и в этом случае удается получить уравнения для определения коэффициентов $B_0$, $B_1$, ..., $B_p$.

*Рецепт 2.* Пусть в правой части уравнения (30.21) стоит функция $f(x)$ вида

$$f(x) = e^{\alpha x} \left( A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots + A_p \right), \tag{30.38}$$

где $A_0$, $A_1$, ..., $A_p$, $\alpha$ и $p$ — известные числа; $p$ — целое. Тогда следует различать два случая.

*1-й случай.* Число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения. В этом случае частное решение уравнения (30.21) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \left( B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_p \right), \tag{30.39}$$

где коэффициенты $B_0$, $B_1$, ..., $B_p$ определяются из уравнения (30.21).

*2-й случай.* Число $\alpha$ является $t$-кратным корнем характеристического уравнения. В этом случае формула (30.39) преобразуется к виду

$$y = x^t e^{\alpha x} \left( B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \cdots + B_p. \right).$$

*Рецепт 3.* Пусть в правой части уравнения (30.21) стоит функция $f(x)$ вида

$$f(x) = e^{\alpha x} \left( P_m(x) \cos sx + Q_n(x) \sin sx \right), \tag{30.40}$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени, соответственно, $m$ и $n$; $\alpha$ и $s$ — известные числа. И здесь следует различать два случая.

*1-й случай.* Число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения. В этом случае частное решение уравнения (30.21) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} \left( R_v(x) \cos \beta x + N_v(x) \sin \beta x \right), \tag{30.41}$$

где $v = \max(m, n)$, $R_v(x)$ и $N_v(x)$ — многочлены степени $v$ с коэффициентами, которые определяются из уравнений (30.21).

*2-й случай.* Число $\alpha + \beta i$ является $t$-кратным корнем характеристического уравнения. В этом случае формула (30.41) преобразуется к виду

$$y = x^t \cdot e^{\alpha x} \left(R_v(x) \cos \beta x + N_v(x) \sin \beta x\right). \tag{30.42}$$

А как быть, если правая часть уравнения (30.21) представляется, например, в виде суммы типа (30.38) и (30.40)? Вот тут приходит на помощь сформулированный выше принцип суперпозиции (теорема 30.7), и частное решение ищется как сумма выражений вида (30.39) и (30.41). (Если реализуются условия, соответствующие первым случаям.)

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

● *ПРИМЕР 30.6.* Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 10y = \sin x.$$

● Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 10 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$k_1 = 1 + 3i; \qquad k_2 = 1 - 3i.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 \cdot e^x \cdot \cos 3x + C_2 \cdot e^x \cdot \sin 3x.$$

Частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{ч}} = A \sin x + B \cos x,$$

где $A$ и $B$ — коэффициенты, которые нужно определить. Чтобы их найти, найдем $y'_{\text{ч}}$ и $y''_{\text{ч}}$. Полученные выражения подставим в уравнение. Так как после подстановки частного решения в уравнение оно превращается в тождество, то коэффициенты в левой и правой частях при $\sin x$ и при $\cos x$, соответственно, должны быть равны. Получаем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} 9A + 2B = 1, \\ 9B - 2A = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{9}{85}$, $B = \frac{2}{85}$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cdot e^x \cdot \cos 3x + C_2 \cdot e^x \cdot \sin 3x + \frac{9}{85} \sin x + \frac{2}{85} \cos x.$$

(Проделайте все выкладки самостоятельно.) ●

● *ПРИМЕР 30.7.* Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = x + 2e^x.$$

● Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Частное решение будем искать в виде

$$y_ч = Ax + B + Dxe^x, \qquad \text{Подумайте, почему?}$$

где коэффициенты $A$, $B$ и $D$ подлежат определению. Подставляя $y_ч$ в дифференциальное уравнение, получим систему уравнений для определения $A$, $B$ и $D$:

$$\begin{cases} -3A + 2B = 0, \\ 2A = 1, \\ -D = 2. \end{cases}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$, $D = -2$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - 2xe^x.$$

(Проделайте все выкладки самостоятельно.) ●

● *ПРИМЕР 30.8.* Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

● Характеристическое уравнение имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$.

Общее решение разыскиваем в виде

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x,$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x^2+1}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Тогда из первого уравнения имеем

$$C_1'(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

После интегрирования устанавливаем, что

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1, \\ C_2(x) &= \operatorname{arctg} x + C_2. \end{aligned}$$

Общее решение задается формулой

$$y(x) = e^x\left(C_1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + xe^x\left(C_2 + \operatorname{arctg} x\right). \quad ●$$

## § 30.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

В предыдущем параграфе было приведено несколько «рецептов», позволяющих находить частные решения уравнений в простейших случаях. А как быть, если нужно решить уравнение, не укладывающееся в рамки «рецептов»? Оказывается очень полезным следующий прием.

Представим решение в виде некоторого ряда с неизвестными коэффициентами. Продифференцировав ряд нужное число раз и подставив его в уравнение, получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов ряда. Определим эти коэффициенты. А теперь исследуем этот ряд на сходимость, на правомерность операции многократного дифференцирования. Так вот, в той области, где ряд сходится, где операция многократного дифференцирования законна, сумма ряда является искомым частным решением. Этот же прием может оказаться полезным и при решении однородных уравнений.

● *ПРИМЕР 30.9.* Найти общее решение однородного уравнения

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

● Будем искать решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

Найдем $y'$ и $y''$. Полученные выражения подставим в уравнение. Коэффициенты при $x^k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, должны быть равны нулю. Отсюда немедленно следует, что коэффициенты ряда должны удовлетворять следующему рекуррентному соотношению:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} = (k-n)a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Фундаментальная система решений определяется заданием начальных условий для рекуррентного соотношения:

$$a_0 = 1,\ \ a_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad a_0 = 0,\ \ a_1 = 1.$$

Последовательно вычисляя коэффициенты, находим оба решения:

$$y_1 = 1 - \frac{n}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)}{4!}x^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{6!}x^6 + \cdots$$
$$y_2 = x - \frac{n-1}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{7!}x^7 + \cdots$$

С помощью известных признаков сходимости рядов можно установить, что оба ряда сходятся при всех значениях $x$.

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad ●$$

## § 30.5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Мы знаем, что общее решение дифференциального уравнения $n$-го порядка содержит $n$ произвольных постоянных. Для того чтобы из множества всех решений уравнения выбрать одно — частное решение, соответствующее изучаемой проблеме, должны быть заданы некоторые дополнительные условия, позволяющие определить значения постоянных.

До сих пор мы рассматривали задачу Коши (задачу с начальными значениями), в которой задавались значения неизвестной функции в начальный момент. Из этих условий и находились значения постоянных. Соответствующая теорема (теорема 30.2) гарантировала существование и единственность решения этой задачи. Пользуясь интерпретацией дифференциального уравнения как модели некоторого динамического процесса, можно сказать, что начальные условия полностью определяют последующий ход процесса. (Разумеется, в предположении, что уравнение правильно отображает динамику процесса.)

Зададимся таким вопросом: а есть ли еще какие-нибудь естественные условия, кроме начальных, которые позволили бы выбрать одно частное решение из множества всех решений уравнения? Оказывается, есть. И они столь естественны, что долго искать их не придется.

Рассмотрим задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту (рис. 30.1). Обычная постановка этой задачи такова. Тело движется под действием только силы тяжести из начала координат с известной начальной скоростью. Требуется найти его траекторию. Уравнения движения имеют вид

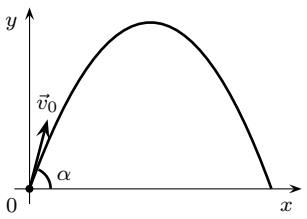



*Рис. 30.1.*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= -mg \end{aligned} \qquad (30.43)$$

при условиях

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \\ y(0) &= 0, \qquad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha. \end{aligned} \qquad (30.44)$$

Это задача Коши. Интегрируя уравнения (30.43), получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= C \cdot t + D, \\ y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + Et + F, \end{aligned} \qquad (30.45)$$

где $C$, $D$, $E$ и $F$ — произвольные постоянные. Эти произвольные постоянные определяются из условий (30.44).

В результате находится единственное частное решение системы уравнений (30.43), которое и определяет единственную траекторию движения тела:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y(t) &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \qquad (30.46)$$

А теперь изменим постановку задачи. Пусть нам известно только, что тело брошено в начальный момент из начала координат, и в некоторый момент $t_1$ оно находится в точке с координатами $(a, 0)$.

Уравнения движения (30.43) свой вид не изменят. А вот условия (30.44) существенно изменятся:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \qquad x(t_1) = a, \\ y(0) &= 0, \qquad y(t_1) = 0. \end{aligned} \qquad (30.47)$$

Это краевая задача. Интегрируя уравнения движения, получаем

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t + D \tag{30.48}$$

и

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} + F. \tag{30.49}$$

Так как $x(0) = y(0) = 0$, то $D = F = 0$.

Отметим, что ни величина $v_0$, ни угол $\alpha$ нам не известны.

Из условия $x(t_1) = a$ находим величину $t_1$:

$$t_1 = \frac{a}{v_0 \cos\alpha}. \tag{30.50}$$

Подставим $t_1$ из (30.50) в уравнение (30.49) и используем условие $y(t_1) = 0$. Имеем

$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{a}{v_0 \cos\alpha} - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\sin 2\alpha = \frac{ga}{v_0^2}. \tag{30.51}$$

*Рис. 30.2.*

Легко видеть, что при любом выборе $v_0$ всегда будут существовать два угла $\alpha_1$ и $\alpha_2$, под которыми можно бросить тело в начальный момент, чтобы через время $t_1$ оно попало в точку $(a, 0)$ (см. рис. 30.2).

Как уже стало ясно, условия (30.47) не позволяют найти единственное частное решение системы уравнений (30.43), которое бы определило единственную траекторию движения тела. Дальше мы увидим, что при решении краевых задач могут возникать еще более неприятные ситуации.

## § 30.6. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку при решении различных прикладных задач очень часто приходится иметь дело именно с системами дифференциальных уравнений, представляется целесообразным познакомиться с некоторыми важными их свойствами.

Итак, будем рассматривать нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{30.52}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0. \tag{30.53}$$

Иногда мы будем пользоваться векторной формой записи:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{30.52$'$}$$

при условии

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}. \tag{30.53'}$$

Здесь $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

В этой системе $t$ — независимая переменная, очень часто интерпретируемая как время; $x_1(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$ — неизвестные функции этой переменной. Относительно функций $f_1$, $\ldots$, $f_n$ предполагается, что они зависят от $(n+1)$-й переменной и заданы в некоторой открытой области $\Omega$ пространства размерности $(n+1)$. Все эти функции предполагаются непрерывными в $\Omega$.

Решением системы уравнений (30.52) называется совокупность непрерывно дифференцируемых функций

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30.54}$$

определенных на некотором интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и удовлетворяющих системе (30.52). Понятно, что точка с координатами

$$(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots\ x_n(t))$$

должна принадлежать $\Omega$ для всех значений $t$ из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

При дополнительных предположениях относительно $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ справедлив следующий результат о существовании и единственности решения.

**ТЕОРЕМА 30.8**

Пусть функции $f_i$ имеют в области $\Omega$ непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любых начальных данных $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ существует единственное решение системы (30.52), удовлетворяющее начальным условиям (30.53). Единственность решения понимается в том смысле, что любые два решения, удовлетворяющие одному начальному условию, совпадают на пересечении их интервалов определения.

Система (30.52′) обычно называется динамической, пространство с координатами $x_1, \ldots, x_n$ называется фазовым, а кривая $\vec{x} = \vec{x}(t)$ называется фазовой траекторией. Можно сказать и так — решение $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $\ldots$, $x_n = x_n(t)$ определяет закон движения по некоторой траектории в фазовом пространстве в зависимости от времени $t$.

Очень часто в систему (30.52) или (30.52′) явно не входит независимая переменная $t$ (время). В этом случае система называется автономной.

Автономные системы возникают в тех случаях, когда при построении математической модели предполагается, что физические или другие законы, управляющие динамикой моделируемого объекта, не зависят от времени. Для траекторий автономной системы имеет место следующий интересный факт, доказательство которого мы оставляем читателю.

Допустим, что выполняются равенства

$$x_i(\tau_1) = x_i(\tau_2), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \tau_1 \neq \tau_2, \tag{30.55}$$

где $\tau_1$ и $\tau_2$ принадлежат $[t_0, t_1]$.

Тогда оказывается, что выполняется один из двух случаев:

1. Для всех $t$ выполняются равенства

$$x_i(t) = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30.56}$$

где $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — точка, принадлежащая $\Omega$. В этом случае решение (30.56) называется положением равновесия системы.

2. Существует такое положительное число $T$, что выполняются равенства

$$x_i(t+T) = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30.57}$$

но при $|s_1 - s_2| < T$ хотя бы для одного $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ имеет место неравенство

$$x_i(s_1) \neq x_i(s_2).$$

В этом случае решение

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{30.58}$$

называется периодическим с периодом $T$, а траектория, соответствующая решению (30.58), называется циклом. Кроме того, $t_0 = -\infty$, а $t_1 = \infty$.

Таким образом, мы можем сказать, что область $\Omega$ заполнена попарно не пересекающимися траекториями. Среди этих траекторий есть и самопересекающиеся — это или положения равновесия, или циклы.

Обсудим теперь различные способы отыскания решений систем дифференциальных уравнений.

### 30.6.1. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Один из часто используемых способов интегрирования системы дифференциальных уравнений состоит в последовательном исключении из системы всех неизвестных функций кроме одной с помощью дифференцирования уравнений, входящих в систему, и различных алгебраических преобразований.

Для этой одной функции строится дифференциальное уравнение, которое и может быть решено. Остальные функции определяются из исходной системы и уравнений, получавшихся при дифференцировании, причем зачастую удается избежать последующего интегрирования уравнений. (См. § 30.7)

### 30.6.2. НАХОЖДЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ

**Определение 30.5.** *Первым интегралом системы* (30.52) *называется уравнение (не дифференциальное)*

$$F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C, \tag{30.59}$$

*где $C$ — некоторая константа, обращающееся в тождество, если вместо $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ подставлено решение системы* (30.52).

Чем большее число первых интегралов системы (30.52) удается найти, тем большее число неизвестных функций удается исключить из исходной системы. В частности, если найдено $n$ первых интегралов системы (30.52)

$$\begin{array}{rcl} F_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & C_1, \\ F_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ F_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & C_n, \end{array} \tag{30.60}$$

то неизвестные функции можно находить не из системы (30.52), а из системы уравнений (30.60).

● *ПРИМЕР 30.10.* Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (30.61)

и исследовать поведение траекторий.

● Складывая и вычитая уравнения системы, приходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x+y) = (x+y)^2, \\ \dfrac{d}{dt}(x-y) = (x-y)^2, \end{cases}$$

которая легко интегрируется и дает два первых интеграла для исходной системы

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = -t + C_1, \\ \frac{1}{x-y} = -t + C_2, \end{cases}$$

Определяя $x$ и $y$ из полученной системы, находим общее решение:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-C_1} + \dfrac{1}{t-C_2}\right), \\ y = \quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-C_2} - \dfrac{1}{t-C_1}\right). \end{cases}$$

Исследуем траектории системы. Имеется единственная точка покоя $x = 0$, $y = 0$ — это единственное решение конечной системы $x^2 + y^2 = 0$, $2xy = 0$.

Далее, исключая из системы первых интегралов время $t$, получаем, что

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = C_2 - C_1.$$

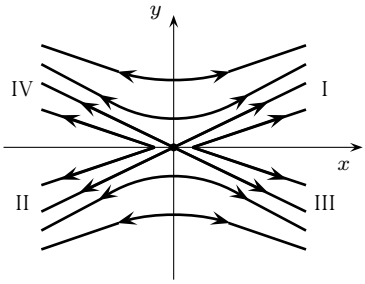



*Рис. 30.3.*

Таким образом, траектории расположены на системе гипербол

$$x^2 - y^2 = 2Cy,$$

и представляют собой половины гипербол в областях I и II и целые гиперболы в областях III и IV (см. рис. 30.3).

Вырожденные «гиперболы» $x = \pm y$ и $y = 0$ включаются в эту систему гипербол при $C = 0$ и $C = \infty$.

Отметим, что, как видно из формулы общего решения, в системе происходят «взрывы» — точка за конечное время уходит на бесконечность. ●

## § 30.7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем параграфе мы обсудили ряд общих вопросов, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений, геометрической интерпретацией их решений. Есть, однако, класс систем уравнений, заслуживающий специального рассмотрения — это линейные системы. Прежде всего, они обладают многими интересными свойствами, которые, к тому же, можно достаточно легко проиллюстрировать. Кроме того, эти уравнения очень часто встречаются в прикладных исследованиях, и специальное знакомство с ними крайне желательно.

Итак, будем рассматривать систему уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{30.62}$$

где $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ — известные функции.

Напомним, что система называется линейной, если в каждое уравнение неизвестные функции и их производные входят только линейно.

Пользуясь векторными обозначениями, систему (30.62) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}, \tag{30.63}$$

где $\vec{x}$ — $n$-мерный вектор с координатами $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, $\vec{f}$ — $n$-мерный вектор с координатами $f_1$, $f_2$, …, $f_n$, а $A$ — матрица $n \times n$, элементами которой являются функции $a_{ij}(t)$.

Если определить линейный оператор $L$ равенством

$$L[\vec{x}] = \frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x},$$

то уравнение (30.63) приобретает вид

$$L[\vec{x}] = \vec{f}. \tag{30.64}$$

(Проверьте самостоятельно, что $L$ — линейный оператор.)

Если $\vec{f} \equiv \vec{0}$, то система $L[\vec{x}] = \vec{0}$ называется однородной.

В тех случаях, когда элементы матрицы $A$ не зависят от времени, система уравнений называется системой с постоянными коэффициентами. Система с постоянными коэффициентами всегда может быть проинтегрирована путем сведения ее к одному линейному уравнению с постоянными коэффициентами порядка выше первого.

В то же время есть возможность проинтегрировать систему, не переходя к одному уравнению.

Будем искать решения однородной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{30.65}$$

в виде

$$\vec{x}(t) = e^{kt}\vec{h}, \tag{30.66}$$

где $h$ — постоянный и пока неизвестный вектор.

Подставляя (30.66) в систему (30.65) и сокращая на $e^{kt}$, приходим к выводу, что вектор-функция $e^{kt}\vec{h}$ является решением системы (30.65) тогда и только тогда, когда число $k$ и вектор $\vec{h}$ удовлетворяют уравнению

$$A\vec{h} = k\vec{h}. \tag{30.67}$$

Таким образом, мы приходим к чисто алгебраической задаче об определении собственных векторов и собственных значений матрицы $A$.

Как известно (см. § 13.4), собственные значения определяются из характеристического уравнения

$$\det(A - kE) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{30.68}$$

### 30.7.1. СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть характеристическое уравнение (30.68) имеет $n$ различных корней: $k_1, \dots, k_n$. Тогда у матрицы $A$ существует $n$ линейно независимых собственных векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n$. Система решений

$$e^{k_1 t}\vec{h}_1, \quad e^{k_2 t}\vec{h}_2, \quad \dots, \quad e^{k_n t}\vec{h}_n$$

образует фундаментальную систему решений. Поэтому общее решение системы (30.65) имеет вид

$$\vec{x} = c_1 e^{k_1 t}\vec{h}_1 + c_2 e^{k_2 t}\vec{h}_2 + \dots + c_n e^{k_n t}\vec{h}_n, \tag{30.69}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

### 30.7.2. СЛУЧАЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрение предыдущего случая показывает, что принципиальным является не наличие у матрицы $A$ простых собственных значений, а наличие полной системы линейно независимых (возможно, даже комплексных) собственных векторов.

В этом случае каждому собственному значению кратности $r \geqslant 1$ отвечает линейно независимая система из $r$ собственных векторов, а объединение всех таких систем собственных векторов образует, вообще говоря, комплексный базис, в котором матрица $A$ имеет диагональный вид.

Пусть $k_s$ — вещественное собственное значение кратности $r \geqslant 1$ и $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_r$ — система отвечающих ему линейно независимых собственных векторов.

Тогда собственному значению $k_s$ отвечает набор решений

$$e^{k_s t}\vec{h}_1, \quad e^{k_s t}\vec{h}_2, \quad \dots, \quad e^{k_s t}\vec{h}_r.$$

Если $k_s = \alpha + i\beta$ — комплексное собственное значение кратности $r \geqslant 1$ и $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_r$ — система отвечающих ему комплексных линейно независимых собственных векторов, то ввиду вещественности матрицы $A$ комплексно-сопряженное число $\overline{k}_s = \alpha - i\beta$ также является собственным значением, а комплексно-сопряженные векторы $\bar{\vec{h}}_1, \bar{\vec{h}}_2, \dots, \bar{\vec{h}}_r$ являются собственными векторами, отвечающими корню $\overline{k}_s$.

Тогда паре корней $k_s$ и $\overline{k}_s$ отвечает набор вещественных решений

$$\begin{matrix}\mathrm{Re}\left(e^{k_s t}\vec{h}_1\right), & \mathrm{Re}\left(e^{k_s t}\vec{h}_2\right), & \ldots, & \mathrm{Re}\left(e^{k_s t}\vec{h}_r\right),\\ \mathrm{Im}\left(e^{k_s t}\vec{h}_1\right), & \mathrm{Im}\left(e^{k_s t}\vec{h}_2\right), & \ldots, & \mathrm{Im}\left(e^{k_s t}\vec{h}_r\right).\end{matrix}$$

Взяв объединение наборов решений для всех вещественных корней и для всех пар комплексных корней, получим фундаментальную систему решений.

### 30.7.3. СЛУЧАЙ НЕДИАГОНАЛИЗИРУЕМОЙ МАТРИЦЫ

В этом случае следует построить базис из корневых (собственных и несобственных) векторов.

Каждому собственному значению $k$ отвечает одна или несколько цепочек корневых векторов. Пусть $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, …, $\vec{h}_p$ — одна из таких цепочек, так что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} A\vec{h}_1 &= k\vec{h}_1\\ A\vec{h}_2 &= k\vec{h}_2 + \vec{h}_1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A\vec{h}_p &= k\vec{h}_p + \vec{h}_{p-1}. \end{aligned} \tag{30.70}$$

Этой цепочке отвечает серия из $p$ линейно независимых решений

$$\vec{x}_1(t) = e^{kt}\vec{h}_1, \quad \vec{x}_2(t) = e^{kt}\vec{\omega}_2(t), \quad \ldots, \quad \vec{x}_p(t) = e^{kt}\vec{\omega}_p(t), \tag{30.71}$$

где

$$\vec{w}_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\vec{h}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\vec{h}_2 + \cdots + \vec{h}_r, \quad r = 2, 3, \ldots, p. \tag{30.72}$$

Фундаментальная система решений в этом случае получается объединением всех серий решений, отвечающих различным цепочкам корневых векторов.

*Замечание 30.1.* Можно избежать построения базиса из корневых векторов. Действительно, если $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_m$, $m \leqslant n$ различные корни характеристического уравнения, имеющие соответственно кратности $k_1$, $k_2$, …, $k_m$, то из предыдущего следует, что общее решение однородной системы (30.65) может быть представлено в форме

$$\vec{x} = \vec{p}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \vec{p}_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + \vec{p}_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $\vec{p}_j(t)$ — векторы, компонентами которых являются многочлены степени не выше $k_j - 1$.

Считая коэффициенты этих многочленов неопределенными, имеем в форме общего решения $n^2$ произвольных постоянных. После подстановки в систему формы общего решения и приравнивания коэффициентов при линейно независимых функциях $t^s e^{\lambda_j t}$ получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочленов. Из этой системы коэффициенты выражаются через $n$ произвольных постоянных. Подставив их в форму общего решения, получаем общее решение системы (30.65).

### 30.7.4. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Предположим, что для линейной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

известна фундаментальная система решений $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$, …, $\vec{x}_n(t)$ однородной системы. Тогда решение неоднородной системы ищется в виде

$$\vec{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t).$$

Функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, ..., $c_n(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{c}_1(t)\vec{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\vec{x}_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\vec{x}_n(t) = \vec{f}(t).$$

Действительно, данная система однозначно разрешима относительно $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$, ..., $\dot{c}_n(t)$ ввиду линейной независимости системы решений $\vec{x}_1(t)$, ..., $\vec{x}_n(t)$. После этого функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, ..., $c_n(t)$ определяются интегрированием.

Рассмотрим несколько примеров решения систем.

● *ПРИМЕР 30.11.* Решить систему методом исключения

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases} \tag{30.73}$$

● Из первого уравнения системы находим

$$y = \dot{x} - 2e^t. \tag{30.74}$$

Подстановка во второе уравнение дает

$$\ddot{x} - x = t^2 + 2e^t. \tag{30.75}$$

Корни характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $x_0(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t$.

Частное решение в соответствии с рецептами §30.3 следует разыскивать в форме

$$x_{\text{ч}}(t) = ate^t + (b + ct + dt^2).$$

Для определения неизвестных коэффициентов имеем систему

$$\begin{aligned} -d &= 1, & c &= 0, \\ 2d - b &= 0, & 2a &= 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x_{\text{ч}} = te^t - t^2 - 2,$$

а общее решение уравнения (30.75)

$$x(t) = x_0(t) + x_{\text{ч}}(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + te^t - t^2 - 2.$$

Из равенства (30.74) находим $y(t)$.

Общее решение системы (30.73) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + te^t - t^2 - 2, \\ y(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^t + (t-1)e^t - 2t. \end{cases}$$ ●

● *ПРИМЕР 30.12.* Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$$

● Представим систему в матричной форме

$$\dot{\vec{w}} = A\vec{w},$$

где

$$\vec{w} = (x, y, z), \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $\det|A - kE| = 0$ суть $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Найдем соответствующие собственные векторы $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$. Пусть $\vec{h}_1 = (a, b, c)$. Согласно определению собственного вектора $\vec{h}_1$ является нетривиальным решением системы

$$(A - k_1 E)\vec{h}_1 = 0,$$

которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} 2a- & b+ & c= & 0 \\ a+ & 2b- & c= & 0 \\ 2a- & b+ & c= & 0 \end{cases}.$$

Приведем матрицу $A - k_1 E$ элементарными преобразованиями строк к почти треугольной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $a$, $b$, $c$ определяются из системы

$$\begin{cases} a+ & 2b- & c= & 0 \\ - & 5b+ & 3c= & 0 \end{cases}.$$

Полагая $c = 5$, имеем $b = 3$, $a = -1$, т. е.

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для $k_2$ и $k_3$ находим

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид:

$$\vec{w} = c_1 e^{-t}\vec{h}_1 + c_2 e^{t}\vec{h}_2 + c_3 e^{2t}\vec{h}_3$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x(t) = & -c_1 e^{-t}+ & c_2 e^{t} & +c_3 e^{2t} \\ y(t) = & 3c_1 e^{-t}+ & c_2 e^{t} & \\ z(t) = & 5c_1 e^{-t}+ & c_2 e^{t} & +c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

● *ПРИМЕР 30.13.* Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by, \\ \dot{y} = bx + ay. \end{cases}$$

● Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a-k & -b \\ b & a-k \end{vmatrix} = k^2 - 2ak + a^2 + b^2 = 0,$$

его корни комплексно сопряжены:

$$k_1 = a + ib, \qquad k_2 = a - ib.$$

Собственные векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$:

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Поэтому фундаментальная система состоит из вектор-функций

$$\operatorname{Re}\left(e^{(a+ib)t}\vec{h}_1\right) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{Im}\left(e^{(a+ib)t}\vec{h}_1\right) = e^{at}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}.$$

Общее решение является линейной комбинацией вектор-функций, составляющих фундаментальную систему:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} + c_2 e^{at}\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \end{pmatrix}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{at}\cos bt + c_2 e^{at}\sin bt, \\ y(t) = c_1 e^{at}\sin bt - c_2 e^{at}\cos bt. \end{cases}$$ ●

● *ПРИМЕР 30.14.* Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y, \\ \dot{y} = \lambda y + z, \\ \dot{z} = \lambda z. \end{cases}$$

●

*1 способ.* Ясно, что эту систему можно решить последовательным интегрированием. Действительно, решая третье уравнение, имеем

$$z = c_1 e^{\lambda t}.$$

Подставив найденное $z(t)$ во второе уравнение, получим уравнение для определения $y(t)$

$$\dot{y} = \lambda y + c_1 e^{\lambda t}. \tag{30.76}$$

Его частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{ч}}(t) = ate^{\lambda t}.$$

Подстановка в уравнение (30.76) приводит к определению $a$: $a = c_1$.

Таким образом, общее решение уравнения (30.76) есть

$$y(t) = c_2 e^{\lambda t} + c_1 t e^{\lambda t}.$$

Подставив $y(t)$ в первое уравнение, имеем

$$\dot{x} = \lambda x + c_2 e^{\lambda t} + c_1 t e^{\lambda t}. \tag{30.77}$$

Далее, частное решение уравнения (30.77) следует искать в форме

$$x_{\text{ч}} = (at^2 + bt)e^{\lambda t}.$$

Подставив в (30.77), получим, что

$$a = \frac{c_1}{2}, \qquad b = c_2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (30.77) есть

$$x(t) = \left(c_3 + \frac{c_1}{2}t^2 + c_2 t\right) e^{\lambda t}.$$

Окончательно получаем общее решение системы

$$\begin{cases} x(t) = \left(c_3 + c_2 t + \dfrac{c_1}{2}t^2\right) e^{\lambda t} \\ y(t) = (c_2 + c_1 t)\, e^{\lambda t} \\ z(t) = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

*2 способ.* Применим общие формулы случая недиагонализируемой матрицы. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

представляет жорданову клетку третьего порядка с собственным значением $\lambda$. Ей отвечает цепочка корневых векторов, состоящая из собственного вектора

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и присоединенных векторов

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему образуют вектор-функции

$$e^{\lambda t}\vec{h}_1, \quad e^{\lambda t}(t\vec{h}_1 + \vec{h}_2), \quad e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}\vec{h}_1 + t\vec{h}_2 + \vec{h}_3\right).$$

Общее решение есть их линейная комбинация

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t}\vec{h}_1 + c_2 e^{\lambda t}(t\vec{h}_1 + \vec{h}_2) + c_3 e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}\vec{h}_1 + t\vec{h}_2 + \vec{h}_3\right),$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x(t) = \left(c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda t} \\ y(t) = (c_2 + c_3 t)\, e^{\lambda t} \\ z(t) = c_3 e^{\lambda t}, \end{cases}$$

что совпадает с полученным ранее решением с точностью до переобозначения произвольных постоянных.

● *ПРИМЕР 30.15.* Решить систему методом вариации постоянных

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$$

● Собственные значения матрицы системы $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, им отвечают собственные векторы

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему однородной системы образуют вектор-функции

$$e^t \vec{h}_1 \qquad \text{и} \qquad e^{2t}\vec{h}_2.$$

Общее решение неоднородной системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1(t) e^t \vec{h}_1 + c_2(t) e^{2t} \vec{h}_2,$$

где неизвестные функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dot{c}_1 e^t + 2\dot{c}_2 e^{2t} = 0 \\ \dot{c}_1 e^t + 3\dot{c}_2 e^{2t} = \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}.$$

Решая эту систему, имеем

$$\dot{c}_1 = -\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}, \quad \dot{c}_2 = \frac{e^t}{e^{2t}+1}.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\ln\left(1 + e^{2t}\right) + c_1, \\ c_2(t) &= \operatorname{arctg} e^t + c_2. \end{aligned}$$

Окончательно, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \left(-\ln(1+e^{2t}) + c_1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \left(\operatorname{arctg} e^t + c_2\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad ●$$

## § 30.8. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

При описании реальной действительности с помощью дифференциальных уравнений постоянно следует иметь в виду следующую проблему.

Пусть мы рассматриваем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}), \tag{30.78}$$

где $\vec{y}$ — есть вектор-функция $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $\vec{f}$ — есть вектор-функция $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$, и начальных условиях

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \tag{30.79}$$

Но ведь в реальной жизни, для реальных объектов начальные условия не могут быть заданы абсолютно точно, так как неизбежно возникают ошибки при измерениях. С другой стороны, известно, что каждому начальному условию соответствует единственное решение.

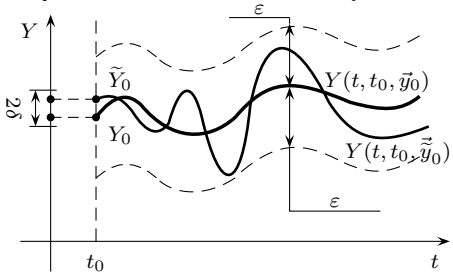



*Рис. 30.4.*

Возникает вопрос, а не может ли случиться так, что решения, соответствующие близким начальным значениям, будут очень сильно отличаться друг от друга? Если это случится, то у нас не будет возможности точно сказать, какое именно решение будет реализовано в действительности. Предсказательная ценность системы дифференциальных уравнений в этом случае снизится до нуля. Поэтому очень важно уметь по виду системы уравнений определять, близки ли друг к другу решения, соответствующие близким начальным условиям. Именно этим кругом вопросов занимается теория устойчивости, элементы которой рассматриваются в этом параграфе.

Обозначим через $\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$ решение системы (30.78) при условии (30.79), определенное при всех $t \in [t_0, \infty)$.

**Определение 30.6.** *Решение $\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из условия*

$$\left|\vec{y}_0 - \vec{\widetilde{y}}_0\right| < \delta \tag{30.80}$$

*следует, что решение $\vec{y}(t, t_0, \vec{\widetilde{y}}_0)$ существует при всех $t \in [t_0, \infty)$ и для него выполняется неравенство*

$$\left|\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0) - \vec{y}(t, t_0, \vec{\widetilde{y}}_0)\right| < \varepsilon \tag{30.81}$$

*при всех $t \geqslant t_0$ (см. рис. 30.4).*

Если из условия (30.80) не следует условие (30.81), то решение $\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$ называется неустойчивым.

**Определение 30.7.** *Если решение $\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0)$ устойчиво и, кроме того, выполняется условие*

$$\lim_{t \to \infty} \left|\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0) - Y(t, t_0, \vec{\widetilde{y}}_0)\right| = 0, \tag{30.82}$$

*то такое решение называется асимптотически устойчивым.*

Оказывается, что исследование на устойчивость некоторого решения системы (30.78) $\vec{\overline{y}}(t, t_0, \vec{y}_0)$ всегда может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения $\vec{x}(t) \equiv 0$ некоторой другой системы уравнений.

Действительно, сделав замену неизвестной функции $\vec{y}(t)$ по формуле

$$\vec{x}(t) = \vec{y}(t) - \vec{\overline{y}}(t), \tag{30.83}$$

систему (30.78) можно переписать так:

$$\frac{d\big(\vec{x}(t) - \vec{\overline{Y}}(t)\big)}{dt} = \vec{f}\,\big(t, \vec{x}(t) + \vec{\overline{y}}(t)\big)\,. \tag{30.84}$$

Дифференцируя почленно левую и правую часть равенства (30.84) и помня, что функция $\vec{\overline{y}}(t)$ является решением системы (30.78), приходим к такой системе уравнений:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}\,\big(t, \vec{x} + \vec{\overline{y}}\big) - \vec{f}\,\big(t, \vec{\overline{y}}\big)\,. \tag{30.85}$$

Очевидно, что функция $\vec{x}(t) \equiv 0$ является решением системы уравнений (30.85).

Если $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$, то $\vec{y}(t) = \vec{\overline{y}}(t)$. А если функция $\vec{x}(t) \not\equiv \vec{0}$, то она характеризует уклонение решения $\vec{y}(t)$ от решения $\vec{\overline{y}}(t)$.

Выше, в § 30.6, мы говорили об автономных системах дифференциальных уравнений и отмечали условия, при которых эти системы имеют стационарные и периодические решения. Исследование на устойчивость именно таких решений зачастую представляет большой интерес.

Итак, мы пришли к заключению, что для исследования на устойчивость тривиального решения $\vec{x}(t) \equiv 0$ следует воспользоваться системой уравнений (30.85). Иначе говоря, для решения общей задачи теории устойчивости нужно уметь исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \tag{30.86}$$

где $\vec{f}(t, 0) = \vec{0}$ при всех значениях $t$. Поясним, что это означает на языке геометрии.

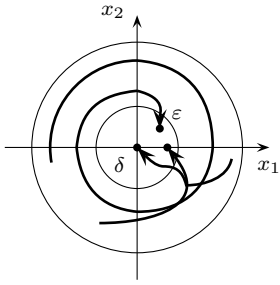



*Рис. 30.5.*

Всякому решению системы (30.86) соответствует некоторая кривая, траектория в фазовом пространстве точек $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тривиальному решению или точке покоя системы соответствует начало координат фазового пространства. Перефразируя данные выше определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, приходим к следующим формулировкам.

Тривиальное решение устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякая траектория, начинающаяся при $t = 0$ в $\delta$-окрестности начала координат, для всех $t > 0$ будет находиться в $\varepsilon$-окрестности начала координат (см. рис. 30.5).

Тривиальное решение асимптотически устойчиво, если оно не только устойчиво, но и если при $t \to \infty$ любая траектория, начавшаяся в $\delta$-окрестности начала координат, стремится к началу координат (см. рис. 30.6).

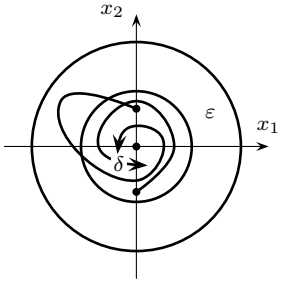



*Рис. 30.6.*

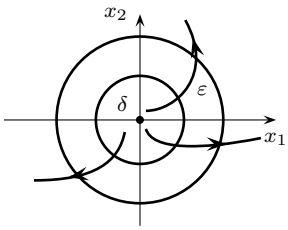



*Рис. 30.7.*

Тривиальное решение неустойчиво, если, каким бы малым ни было $\delta > 0$, найдется такая траектория, начинающаяся в $\delta$-окрестности начала координат, которая при некотором значении $t$ выходит за $\varepsilon$-окрестность начала координат (см. рис. 30.7).

В качестве иллюстрации рассмотрим устойчивость тривиального решения системы двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases}.$$

Понятно, что фазовым пространством в этом случае является плоскость $XOY$.

Из §30.7 мы знаем, что вид решений этой системы определяется видом корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0.$$

В зависимости от того, каковы коэффициенты системы уравнений, вид корней может быть различен.

Рассмотрим возможные случаи.

### 30.8.1. КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫ И РАЗЛИЧНЫ

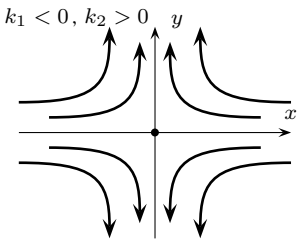



*Рис. 30.8.*

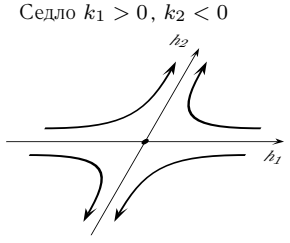



*Рис. 30.9.*

В соответствии с формулой (30.69) из §30.7 можно записать общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{k_1 t}\vec{h}_1 + c_2 e^{k_2 t}\vec{h}_2,$$

где $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$ — собственные векторы.

Если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, то при $t \to \infty$ $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$. Следовательно, тривиальное решение исходной системы асимптотически устойчиво.

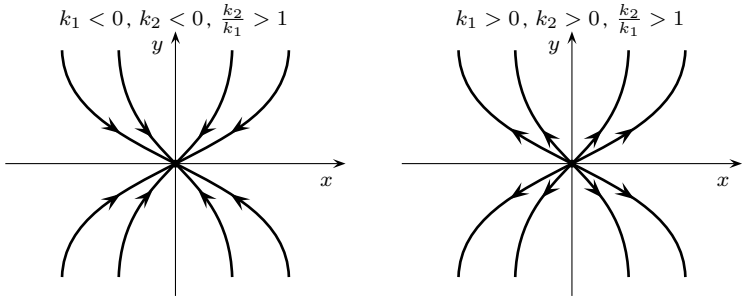
Если хотя бы один корень, скажем, $\lambda_1$, положителен, то найдутся решения (достаточно взять $C_1 \neq 0$, а $C_2 = 0$), компоненты которых неограниченно возрастают. На этот раз тривиальное решение неустойчиво.

Что касается траекторий, то для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 x \\ \dot{y} = k_2 y \end{cases} \qquad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

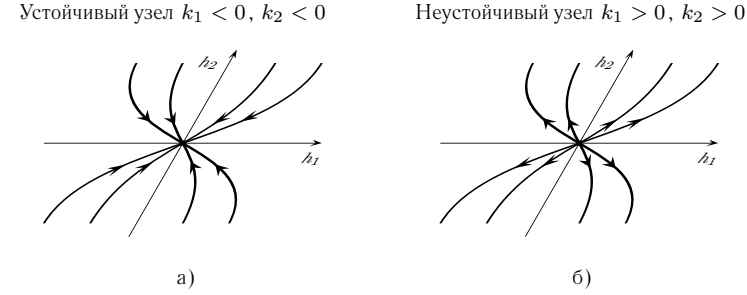
их вид приведен на рис. 30.8, 30.10 (стрелки указывают направление движения точки при $t \to +\infty$).

В случае общей системы поведение траекторий качественно не меняется, фазовый портрет (т. е. картина поведения траекторий) подвергается лишь линейному преобразованию (см. рис. 30.9, 30.11).




а) б)

*Рис. 30.10.*




а) б)

*Рис. 30.11.*

В каждом из рассмотренных случаев точка покоя (тривиальное решение $x_0 = 0,\ y_0 = 0$) носит свое название: узел, если $k_1$ и $k_2$ имеют одинаковые знаки (устойчивый узел, если $k_1 < 0,\ k_2 < 0$, неустойчивый узел, если $k_1 > 0,\ k_2 > 0$); седло, если $k_1$ и $k_2$ имеют противоположные знаки.

### 30.8.2. КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫ

Ограничимся подробным исследованием системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by, \\ \dot{y} = bx + ay. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения суть $k_1 = a + ib,\ k_2 = a - ib$, а общее решение (см. пример 30.13 § 30.7) имеет вид

$$\begin{cases} x = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt, \\ y = c_1 e^{at} \sin bt - c_2 e^{at} \cos bt. \end{cases}$$

Представив пару произвольных постоянных $c_1$ и $c_2$ в форме $c_1 = R\cos\varphi,\ c_2 = R\sin\varphi$ (теперь роль произвольных постоянных играют числа $R > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$), получим для общего решения выражение

$$x = Re^{at}\cos(bt - \varphi),$$

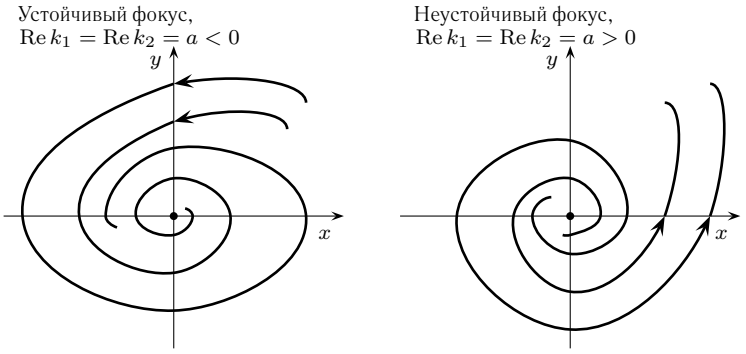



*Рис. 30.12.*

$$y = Re^{at}\sin(bt - \varphi).$$

Из вида решения ясно, что при $a \neq 0$ траектории представляют собой спирали, причем при $a < 0$ движение точки при $t \to +\infty$ направлено к положению равновесия, а при $a > 0$ точка уходит при $t \to +\infty$ на бесконечность. В обоих этих случаях точка покоя называется фокусом, устойчивым при $a < 0$ и неустойчивым при $a > 0$ (см. рис. 30.12).

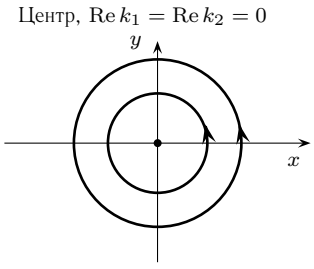



*Рис. 30.13.*

Если $a = 0$, то траекториями являются окружности. Точка покоя называется центром. Центр устойчив, но не является асимптотически устойчивым (см. рис. 30.13).

В случае общей системы с комплексными корнями $k_1 = a+ib$, $k_2 = a-ib$ качественное поведение траектории сохраняется, фазовый портрет лишь линейно преобразуется (см. рис. 30.14–30.15).

Резюмируя сказанное выше, можно сделать следующее заключение. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то тривиальное решение неустойчиво.

Оказывается, однако, что эти утверждения справедливы не только для рассмотренной системы двух уравнений, но и для всякой линейной системы $n$ дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

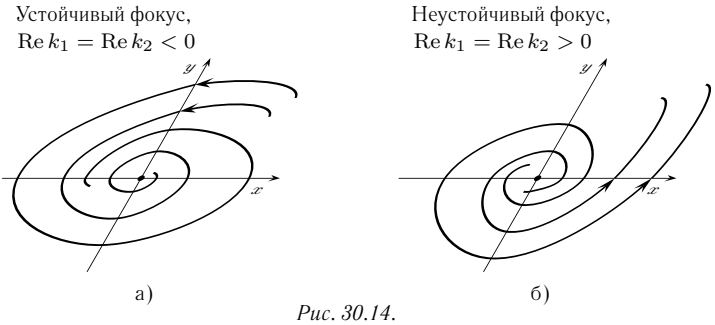



*Рис. 30.14.*

Центр, $\operatorname{Re} k_1 = \operatorname{Re} k_2 = 0$
Траектории — эллипсы

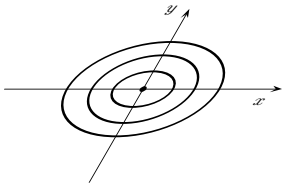



*Рис. 30.15.*

А не могут ли приведенные критерии оказаться полезными при исследовании нелинейных систем уравнений? Могут!

Рассмотрим нелинейную автономную систему уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \tag{30.87}$$

у которой $\vec{x} \equiv 0$ является решением, т. е. $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Предположим, что компоненты вектор-функции $\vec{f}$ могут быть разложены по формуле Тейлора в окрестности нуля.

Тогда система (30.87) может быть записана так:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{b}(\vec{x}), \tag{30.88}$$

где $A$ — матрица с постоянными коэффициентами, а $\vec{b}(\vec{x})$ — вектор-функция, компоненты которой содержат степени $x_i$, более высокие, чем первая.

**Определение 30.8.** *Линейная система*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{30.89}$$

*называется системой первого приближения по отношению к системе* (30.88).

Справедлива следующая теорема об устойчивости по первому приближению, доказанная А. М. Ляпуновым.

**ТЕОРЕМА 30.9**

Если все корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то тривиальное решение системы (30.88) асимптотически устойчиво.

Если хотя бы один корень характеристического уравнения системы первого приближения имеет положительную вещественную часть, то тривиальное решение системы (30.88) неустойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения нет ни одного с положительной вещественной частью, но есть корни с нулевой вещественнной частью (чисто мнимые), то об устойчивости тривиального решения системы (30.88) нельзя судить на основании исследования только системы первого приближения.

Приводить доказательство этой очень полезной теоремы мы не будем.

*Замечание.* Мы обсудили вопросы, связанные с устойчивостью решения системы дифференциальных уравнений. Поскольку система уравнений может быть сведена к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка, сказанное выше легко переносится и на решения дифференциальных уравнений $n$-го порядка. Мы рекомендуем читателю сделать это самостоятельно.

# § 30.9. МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

## 30.9.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

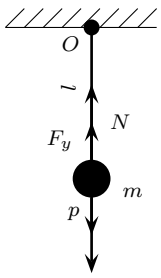



*Рис. 30.16.*

Рассмотрим движение груза, подвешенного на упругой пружине (рис. 30.16).

Как известно (см. школьный курс физики), движение тел под действием внешних сил может быть описано с помощью второго закона Ньютона:

$$m\vec{W} = \vec{F}, \tag{30.90}$$

где $m$ — масса тела,
$\vec{F}$ — внешняя сила,
$\vec{W}$ — ускорение, вызванное действием этой силы.

Введем координатную ось, выбрав начало координат в точке подвеса пружины и считая положительным направление вниз. На тело действуют три силы: сила веса $p$, уравновешивающая ее сила реакции опоры $N$ и упругая сила $F_{\text{у}}$, возникающая из-за того, что груз растягивает пружину. Если вес тела не слишком велик, и пружина испытывает лишь упругие деформации, то в соответствии с законом Гука упругая сила пропорциональна удлинению пружины и направлена в противоположную сторону, т. е.

$$F_{\text{у}} = -kx, \tag{30.91}$$

где $x$ — удлинение пружины,
$k$ — коэффициент упругости пружины.

Спроектировав векторное равенство (30.90) на ось $OX$, получим уравнение движения груза на пружине:

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{30.92}$$

Выясним роль различных начальных условий.

а) Представим себе, что в начальный момент мы растянули пружину так, что координата груза стала $l + x_0$ ($l$ — длина нерастянутой пружины, $x_0 < l$), и плавно отпустим. В этом случае мы должны решить уравнение (30.92) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{30.93}$$

Введя обозначение

$$\frac{k}{m} = \alpha^2, \tag{30.94}$$

перепишем уравнение (30.92) в виде

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0. \tag{30.95}$$

Это однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0. \tag{30.96}$$

Корни уравнения:

$$\lambda_1 = i\alpha, \qquad \lambda_2 = -i\alpha. \tag{30.97}$$

Общее решение уравнения (30.95) имеет следующий вид:

$$x(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t, \tag{30.98}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Потребуем, чтобы функция (30.98) удовлетворяла условиям (30.93). Имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ 0 &= -C_1 \cdot \alpha \cdot \sin \alpha t\big|_{t=0} + C_2 \cdot \alpha \cdot \cos \alpha t\big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0, \\ C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{30.99}$$

Окончательно закон движения груза выглядит так:

$$x(t) = l + x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right). \tag{30.100}$$

Движение, таким образом, представляет собой бесконечный колебательный процесс около положения равновесия.

б) Представим себе, что в начальный момент мы, не растягивая пружину, сообщили грузу начальную скорость $\dot{x}_0$. В этом случае мы должны решить уравнение (30.92) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0. \end{aligned} \tag{30.101}$$

Действуя, как и в случае а), получим следующий закон движения:

$$x(t) = l + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right). \tag{30.102}$$

Делая естественное предположение, что $\dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} < l$, снова приходим к бесконечному колебательному процессу.

1. Усложним исходную задачу. Пусть на движущееся тело действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости тела и направленная противоположно скорости. На этот раз уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}, \tag{30.103}$$

где $\gamma$ — известный коэффициент пропорциональности.
Разделив обе части уравнения (30.103) на $m$ и приняв $\frac{\gamma}{m} = \beta^2$, придем к уравнению

$$\ddot{x} + \beta^2 \dot{x} + \alpha^2 x = 0. \tag{30.103′}$$

Решим это уравнение, например, с начальными условиями (30.93). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \beta^2 \lambda + \alpha^2 = 0. \tag{30.104}$$

Найдем корни уравнения (30.104):

$$\lambda_1 = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{\sqrt{\beta^4 - 4\alpha^2}}{2} \qquad \text{и} \qquad \lambda_2 = -\frac{\beta^2}{2} - \frac{\sqrt{\beta^4 - 4\alpha^2}}{2}.$$

Из физических соображений естественно предположить, что $\beta^4 - 4\alpha^2 < 0$.
Тогда, согласно сказанному в §30.3, общее решение уравнения (30.103′) записывается так:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta^2}{2}t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^4}}{2} \cdot t\right) + \\ + C_2 e^{-\frac{\beta^2}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^4}}{2} \cdot t\right), \quad (30.105)$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные.
Определив значения $C_1$ и $C_2$ из условий (30.93), окончательно получим закон движения груза:

$$x(t) = l + x_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^4}}{2} \cdot t\right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^4}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^4}}{2} \cdot t\right)\right]. \quad (30.106)$$

Видно, что колебания будут быстро затухать. Величина $x(t)$ будет неограниченно приближаться к $l$.
*Замечание.* Если случайно окажется, что величины $\alpha$ и $\beta$ таковы, что выражение $4\alpha^2 - \beta^4$ близко к нулю (знаменатель второго слагаемого в скобках в (30.106) близок к нулю), то ничего страшного не произойдет. Вспомнив, что $\sin\alpha \approx \alpha$ при малых $\alpha$, найдем, что второе слагаемое близко к величине $\frac{\beta^2 t}{2}$. И в этом случае значение $x(t)$ с ростом $t$ будет приближаться к $l$.

2. Еще более усложним задачу. Пусть сила сопротивления воздуха отсутствует, но зато точка $O$, точка подвеса пружины, колеблется по закону $x_1 = \sin\omega t$, где $x_1$ — смещение точки подвеса от ее исходного состояния, а $\omega$ — частота колебаний. В этом случае абсолютное смещение груза равно сумме смещений в переносном движении (вместе с точкой подвеса) и в относительном (смещение груза относительно положения равновесия). (См. школьный учебник физики.) Соответственно, в левой части уравнения (30.92) вместо $m\ddot{x}$ появится выражение $m(\ddot{x} - \omega^2 \sin\omega t)$. Окончательно уравнение (30.92) примет вид

$$m\left(\ddot{x} - \omega^2 \sin\omega t\right) = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = m\omega^2 \sin\omega t. \quad (30.107)$$

Решим это уравнение с начальными условиями (30.93).
Общее решение уравнения (30.107) состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (т. е., как и раньше, оно определяется формулой (30.98)) плюс частное решение неоднородного уравнения (30.107). Это частное решение будем искать в виде

$$x = A\sin\omega t, \quad (30.108)$$

где $A$ — константа, которую нужно определить.
Подставив выражение (30.108) в уравнение (30.107), получим уравнение для определения $A$:

$$-A\omega^2 \sin\omega t + \alpha^2 A \sin\omega t = m\omega^2 \sin\omega t. \quad (30.109)$$

Отсюда

$$A = \frac{m\omega^2}{\alpha^2 - \omega^2}. \quad (30.110)$$

Таким образом, общее решение уравнения (30.107) имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t + \frac{m\omega^2}{\alpha^2 - \omega^2} \sin \omega t, \tag{30.111}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Определим их из условий (30.93). Имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ 0 &= C_2 \cdot \alpha + \frac{m\omega^3}{\alpha^2 - \omega^2}. \end{aligned} \tag{30.112}$$

Окончательно закон движения груза имеет в этом случае вид

$$x(t) = l + x_0 \cos \alpha t + \frac{m\omega^3}{(\omega^2 - \alpha^2)\alpha} \sin \alpha t + \frac{m\omega^2}{\alpha^2 - \omega^2} \sin \omega t. \tag{30.113}$$

Формула (30.113) позволяет объяснить одно очень интересное явление — явление резонанса. Представим себе, что величина $\omega$ (частота вынужденных колебаний) близка к величине $\alpha$ (частоте собственных колебаний тела). Тогда третье и четвертое слагаемое в (30.113) очень велики, так как знаменатели близки к нулю. Величина $x(t)$ возрастает тем больше, чем ближе значение $\omega$ к значению $\alpha$. Совпадение этих частот и носит название резонанса.

Понимание явления резонанса имеет большое практическое значение. За счет выбора частоты вынужденных колебаний можно так «раскачать» систему, что она разрушится. Известен случай, когда мост через реку рухнул только потому, что по нему, маршируя в ногу, прошла воинская часть. С тех пор перед прохождением мостов строем всегда подается команда: «идти не в ногу». Разумеется, прикладные аспекты явления резонанса много богаче, чем ходьба по мосту строем. Но общим для всех них являются математические свойства формулы (30.113).

### 30.9.2. ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

Будем рассматривать две популяции: жертв, с биомассой $x_1(t)$ в момент времени $t$, и хищников, с биомассой $x_2(t)$ в момент времени $t$.

Предположим, что в расчет принимаются только следующие процессы, превалирующие над всеми остальными:

1. Увеличение биомассы жертвы $\Pi(t)$ за счет питания за время $\Delta t$. (Запас корма жертвы считаем неограниченным.) Примем, что величина $\Pi(t)$ пропорциональна величине биомассы и величине промежутка времени $\Delta t$, т. е.

$$\Pi(t) = a x_1(t) \cdot \Delta t, \tag{30.114}$$

где $a$ — коэффициент пропорциональности.

2. Сокращение биомассы жертвы $U(t)$ из-за естественной смертности за время $\Delta t$. Примем, что величина $U(t)$ пропорциональна величине биомассы и величине промежутка времени $\Delta t$, т. е.

$$U(t) = b x_1(t) \cdot \Delta t, \tag{30.115}$$

где $b$ — коэффициент пропорциональности.

3. Сокращение биомассы жертвы $V(t)$ из-за поедания хищниками за время $\Delta t$. Примем, что величина $V(t)$ пропорциональна величине произведения биомасс

хищников и жертв (чем больше произведение, тем чаще встречи) и величине промежутка времени $\Delta t$, т. е.

$$V(t) = cx_1(t) \cdot x_2(t) \cdot \Delta t, \tag{30.116}$$

где $c$ — коэффициент пропорциональности.

4. Сокращение биомассы хищников $W(t)$ из-за естественной смертности за время $\Delta t$. Примем, что величина $W(t)$ пропорциональна величине биомассы хищников и величине промежутка времени $\Delta t$, т. е.

$$W(t) = dx_2(t) \cdot \Delta t, \tag{30.117}$$

где $d$ — коэффициент пропорциональности.

5. Увеличение биомассы хищников $Z(t)$ за счет поедания ими жертв за время $\Delta t$. Примем, так же как в пункте 3, что это увеличение пропорционально величине произведения биомасс хищников и жертв, а также величине промежутка времени $\Delta t$, т. е.

$$Z(t) = ex_1(t) \cdot x_2(t) \cdot \Delta t, \tag{30.118}$$

где $e$ — коэффициент пропорциональности.

В рамках рассматриваемых процессов должны выполняться законы сохранения биомассы хищников и жертв. Имеем:

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + \Pi(t) - U(t) - V(t). \tag{30.119}$$

Подставляя в (30.119) принятые модели процессов (30.114), (30.115) и (30.116), получим

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + ax_1(t)\Delta t - bx_1(t)\Delta t - cx_1(t)x_2(t)\Delta t. \tag{30.120}$$

Пусть $a - b = k$. Естественно считать, что $k > 0$. Перенесем $x_1(t)$ в левую часть уравнения, разделим обе части уравнения (30.29) на $\Delta t$ и устремим $\Delta t \to 0$.

Придем к уравнению

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1(t) - cx_1(t)x_2(t). \tag{30.121}$$

Совершенно аналогично (проделайте самостоятельно!) может быть получено и второе уравнение:

$$\frac{dx_2}{dt} = -d \cdot x_2(t) + ex_1(t)x_2(t). \tag{30.122}$$

Для удобства переобозначим коэффициенты уравнений так, чтобы сразу было понятно, к какому слагаемому относится тот или иной коэффициент. Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 - a_{12}x_1 \cdot x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 \cdot x_2 - a_{22}x_2. \end{cases} \tag{30.123}$$

Вместе с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0 \qquad \text{и} \qquad x_2(0) = x_2^0 \tag{30.124}$$

система (30.123) определяет динамику биомасс обеих популяций.

Система эта нелинейная, поэтому решение ее потребует определенных ухищрений. Прежде всего, найдем стационарные решения, т. е. такие решения, которые не изменяются с течением времени. Из (30.123) имеем

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 - a_{12}x_1 \cdot x_2, \\ 0 = a_{21}x_1 \cdot x_2 - a_{22}x_2. \end{cases} \tag{30.124′}$$

Эта система (30.124′) имеет два стационарных решения: одно — $x_1 \equiv 0$ и $x_2 \equiv 0$ (случай вымирания обеих популяций); второе —

$$x_1 \equiv \frac{a_{22}}{a_{21}} \qquad \text{и} \qquad x_2 \equiv \frac{a_{11}}{a_{12}}. \tag{30.124″}$$

Понятно, что первое решение нас не интересует, а вот второе и, особенно, поведение решений вблизи от него заслуживает подробного рассмотрения.

Найдем интеграл системы (30.123). Для этого выполним ряд преобразований. Умножим первое уравнение на $a_{21}$, второе — на $a_{12}$ и результаты сложим. Получим

$$a_{21}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\frac{dx_2}{dt} = a_{11} \cdot a_{21} \cdot x_1 - a_{22} \cdot a_{12} \cdot x_2. \tag{30.125}$$

Умножим первое уравнение на $\frac{a_{22}}{x_1}$, второе — на $\frac{a_{11}}{x_2}$ и результаты сложим. Получим

$$a_{22}\frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dt} + a_{11}\frac{1}{x_2}\frac{dx_2}{dt} = a_{11} \cdot a_{21} \cdot x_1 - a_{22} \cdot a_{12} \cdot x_2. \tag{30.126}$$

В равенствах (30.125) и (30.126) равны правые части, стало быть, равны и левые:

$$a_{21}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\frac{dx_2}{dt} = a_{22}\frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dt} + a_{11}\frac{1}{x_2}\frac{dx_2}{dt}. \tag{30.127}$$

Проинтегрировав равенство (30.127), будем иметь:

$$a_{21}x_1 + a_{12}x_2 = a_{22}\ln x_1 + a_{11}\ln x_2 + \ln C, \tag{30.128}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Потенцируем выражение (30.128)

$$e^{a_{21}x_1} \cdot e^{a_{12}x_2} = C \cdot x_1^{a_{22}} \cdot x_2^{a_{11}} \tag{30.129}$$

или, окончательно.

$$e^{a_{21}x_1} \cdot x_1^{-a_{22}} = Ce^{-a_{12}x_2} \cdot x_2^{a_{11}}. \tag{30.129′}$$

Равенство (30.129′) представляет собой первый интеграл системы (30.123). Это неявная функция, позволяющая по заданному значению $x_1$ вычислять соответствующее значение $x_2$ и наоборот. Отметим, что произвольная постоянная $C$ определяется из начальных условий (30.124):

$$e^{a_{21}x_1^0} \cdot \left(x_1^0\right)^{-a_{22}} = Ce^{-a_{12}x_2^0} \cdot \left(x_2^0\right)^{a_{11}}.$$

Поскольку нет возможности явно выразить $x_2$ через $x_1$ или наоборот, покажем способ, который позволяет сколь угодно точно изобразить график зависимости $x_2$ от $x_1$.

В выражении (30.129′) левая часть не зависит от $x_2$, а правая часть не зависит от $x_1$. Введем обозначения:

$$y = e^{a_{21}x_1} \cdot x_1^{-a_{22}} \tag{30.130}$$

и

$$x = e^{-a_{12}x_2} \cdot x_2^{a_{11}}. \tag{30.131}$$

Используя эти обозначения, равенство (30.129′) можно выразить так:

$$y = Cx. \tag{30.132}$$

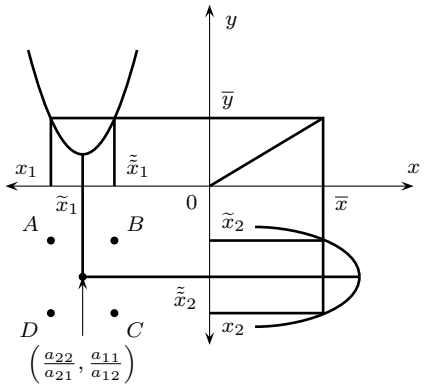



*Рис. 30.17.*

Отметим, что и $y$ как функция $x_1$, и $x$ как функция $x_2$ заданы явно и графики этих функций могут быть легко построены. (Сделать самостоятельно.)

Используем этот факт. Построим на одном рисунке сразу несколько систем координат (рис. 30.17).

В первом квадранте построим график зависимости (30.132). Во втором квадранте построим график зависимости (30.130). В четвертом квадранте построим график зависимости (30.131). Наша задача состоит в том, чтобы построить в третьем квадранте график зависимости (30.129′). Прежде всего отметим найденное ранее стационарное решение (30.124″). Возьмем произвольное значение $x_1 = \widetilde{x}_1$, достаточно близкое к $\frac{a_{22}}{a_{21}}$. Найдем то (те) значения $x_2$, которые ему соответствуют. Для этого последовательно будем просматривать уже имеющиеся на рис. 30.17 графики. Значению $\widetilde{x}_1$ соответствует значение $y_1$. Кстати, этому значению $y_1$ соответствует и величина $\tilde{\tilde{x}}_1$. Значению $y_1$ соответствует величина $\overline{x}$. Используя график в IV квадранте, находим, что $\overline{x}$ соответствуют $\widetilde{x}_2$ и $\tilde{\tilde{x}}_2$.

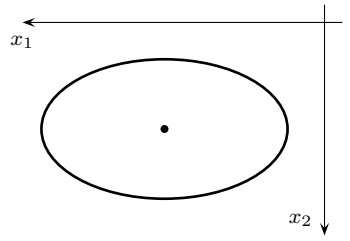



*Рис. 30.18.*

Окончательно, в III квадранте отметим точки $A$, $B$, $C$ и $D$, принадлежащие графику неявной зависимости (30.129′). Повторяя описанный процесс для разных значений $\widetilde{x}_1$, получим график, приведенный на рис. 30.18.

Меняя значения $C$, что соответствует изменению начальных условий, и расположив оси координат более привычным образом, получим траектории системы (30.123) на фазовой плоскости (рис. 30.19)

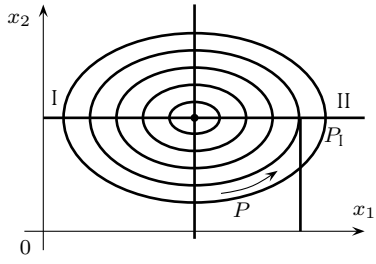



*Рис. 30.19.*

Итак, семейство траекторий системы (30.123) представляет собой семейство замкнутых кривых (циклов), окружающих стационарное решение. Ранее было сказано, что в этом случае стационарное решение устойчиво.

Вид траекторий позволяет сделать определенные выводы и о том, как «ведут себя» функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Рассмотрим, например, траекторию, на которой находится точка $P$ с координатами $(x_1^0, x_2^0)$. Как будет изменяться положение точки $P$ с изменением времени? Уравнения (30.123) позволяют легко ответить на этот вопрос:

$$\frac{dx_1}{dt} > 0, \qquad \text{пока} \qquad x_2 < \frac{a_{11}}{a_{12}}, \tag{30.133}$$

$$\frac{dx_2}{dt} > 0, \qquad \text{пока} \qquad x_1 < \frac{a_{22}}{a_{21}}. \tag{30.134}$$

Раз так, значит и $x_1(t)$ и $x_2(t)$ растут, и точка $P$ движется по траектории против часовой стрелки, вплоть до положения $P_1$. А дальше? В точке $P_1$ условие (30.133) нарушится и функция $x_1(t)$ начнет убывать. Условие же (30.134) продолжает выполняться, и потому функция $x_2(t)$ продолжает расти. Повторяя аналогичные рассуждения, мы убедимся, что изображающая точка $P$ обойдет всю траекторию против часовой стрелки и вернется в исходное положение.

Этот результат получен чисто математическими рассуждениями. Тем более интересно выяснить, не противоречит ли он имеющимся биологическим представлениям о моделируемой системе. Вернемся к биологической терминологии. Вначале имеется мало хищников и мало жертв. В течение некоторого времени (движение от $P$ к $P_1$) растет биомасса и тех и других. Далее, хищники продолжают расти, но их стало так много, что биомасса жертвы сокращается (движение от $P_1$ к $P_2$). Хищники испытывают нехватку корма, и их биомасса начинает убывать. В то же время их давление на жертву еще столь велико, что биомасса жертвы продолжает сокращаться (движение от $P_2$ к $P_3$). Давление хищников на жертву снизилось и биомасса жертвы начинает расти. Биомасса хищников продолжает падать (движение от $P_3$ к $P_4$). И та, и другая биомасса растут (движение от $P_4$ к $P$).

Как видим, полученный математический результат не только не противоречит биологическим представлениям, но полностью им соответствует. Такое соответствие всегда говорит в пользу построенной модели. Эта модель достаточно грубая, многих факторов она не учитывает, но качественную картину взаимодействия двух популяций она описывает хорошо. Именно поэтому появились и продолжают появляться многочисленные модели, так или иначе развивающие и обобщающие исходную модель (30.123).

В рамках модели (30.123) легко можно объяснить такое, на первый взгляд парадоксальное явление: после того как из системы искусственно удалена часть биомассы хищников (отстрел), может оказаться, что довольно скоро биомасса хищников станет больше, чем была ранее. Предлагается провести соответствующее рассуждение самостоятельно. (Подсказка: точка $P$ перейдет на траекторию II).

А возможно ли в принципе сократить биомассу хищников? Разумеется, нужно только правильно выбрать момент, когда это сделать. Правильно организованный компьютерный ($\Leftrightarrow$ вычислительный) эксперимент безусловно позволит «нащупать» эти моменты.

## Контрольные вопросы

1. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения $n$-го порядка? Какие из задач являются задачами Коши:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(0) = a, \quad y''(0) = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''' = f(x, y, y', y'') \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b, \quad y''(1) = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y''') \\ y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad y''(a) = b_2, \quad y'''(a) = b_3. \end{cases}$$

2. Как формулируется теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для общего дифференциального уравнения $n$-го порядка и для линейного уравнения? В чем различия этих теорем?
3. Какова структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $n$-го порядка?
4. Как проверить линейную независимость системы решений однородного линейного дифференциального уравнения?
5. Как строится общее решение однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
6. Как можно построить решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, если правая часть $f(x)$ имеет вид

   а) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n$
   б) $f(x) = e^{\alpha x}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n)$
   в) $f(x) = e^{\alpha x}[(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots a_p)\cos\beta x + (b_0x^q + b_1x^{q-1} + \dots b_q)\sin\beta x]$ ?
7. В чем заключается метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородного дифференциального уравнения $n$-го порядка?
8. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.
9. Как осуществляется интегрирование однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
10. Как реализуется метод вариации постоянных для линейных систем дифференциальных уравнений?
11. Почему возникает необходимость в исследованиях устойчивости решений?
12. Сформулируйте определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.
13. Какие качественно различные фазовые портреты возникают для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?
14. Как можно исследовать устойчивость тривиального решения нелинейной системы по ее линейному приближению?

## Задачи

1. Решить уравнения
   а) $y'' + 4y = 0$
   б) $y''' - 8y = 0$
   в) $y^{(4)} - 10y''' + 9y' = 0$
   г) $y^{(5)} - y = 0$
   д) $y'' - y = 2e^x - x^2$
   е) $y'' + y = 4\sin x$
   ж) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$
   з) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$
   и) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$
   к) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.
2. Решить задачи Коши
   а) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
   б) $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$
   в) $y^{(4)} + 2y'' = 2\cos x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = y'''(0) = 0$.
3. Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных
   а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
   б) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

4. Построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие частные решения
   а) $y_1 = xe^x; \quad y_2 = e^{-x}$
   б) $y_1 = x^2; \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = x\cos x$.
5. Найти линейно независимые решения следующих уравнений в виде степенных рядов
   а) $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$
   б) $(x^2+1)y'' + 5xy' + 3y = 0$
   в) $(1-x)y'' - 2y' + y = 0$.
6. Найти решения краевых задач
   а) $y'' - y = 2x \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1$
   б) $y'' - y' = 0 \quad y(0) = -1, \quad y'(1) - y(1) = 2$.
7. Решить системы

   а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases}$

   д) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x, \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z, \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y, \end{cases}$

   з) $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2, \end{cases}$ и) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

8. Решить системы методом вариации постоянных

   а) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

9. Построить фазовые портреты систем

   а) $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y, \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

10. Исследовать устойчивость равновесий систем по первому приближению

    а) $\begin{cases} \dot{y} = 2y, \\ \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{x} = \ln(1 - x - x^2) - \ln 3. \end{cases}$

# XXXI

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

На протяжении всей истории человечества жизнь каждого человека теснейшим образом связана с множеством разнообразных физических процессов.

Океанские волны набегают на берег и разрушают пляжи. Это физический процесс.

Ветер срывает крыши с домов. Это физический процесс.

Тепло распространяется по кочерге, которой перемешивают угли в камине. Это физический процесс.

Металлическая балка, на которую подвешивают большой груз, изгибается. Это физический процесс.

Этот перечень процессов можно было бы продолжить на сотни страниц, но мы этого, конечно, делать не будем. Вместо этого задумаемся над тем, как, через какие фазы происходило изучение и упомянутых, и вообще всяких физических процессов.

Сначала, конечно, было просто наблюдение и регистрация некоторых качественных фактов. Скажем, высокие волны могут быстро размыть пляж. Затем добавились измерения и регистрация фактов приобрела более современный вид — волны такой-то высоты размывают пляж за такое-то время.

Факты накапливались, и постепенно не мог не возникнуть вопрос — а почему все это происходит? Появились гипотезы, цель которых была — объяснить причины того или другого физического процесса, явления. Важную роль играл и язык, на котором эти гипотезы формулировались. Если в эпоху древних гипотезы формулировались на языке принятой в те времена философии, то после Ньютона (1642–1727 гг.) все более и более принятым становится математическое описание принимаемых гипотез.

Именно на этом пути возникают математические модели физических процессов, позволяющие понять, как происходит процесс, предсказать, как он будет происходить в тех или иных условиях, управлять этим процессом для достижения тех или иных целей.

В связи с тем, что физические процессы происходят в пространстве и во времени, типичным для математических моделей, их описывающих, является наличие в них нескольких переменных, учет пространственных и временных изменений. Таким образом, можно сказать, что основным математическим аппаратом, с которым приходится иметь дело при описании физических процессов, являются дифференциальные уравнения в частных производных. Физическое «происхождение» этих уравнений нередко подчеркивается и таким названием — уравнения математической физики.

Многообразие исследуемых физических процессов порождает и многообразие типов дифференциальных уравнений. Поэтому, естественно, возникает идея классификации уравнений, позволяющей установить какие процессы какими уравнениями описываются.

## § 31.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Прежде всего отметим, что проводимая ниже классификация очень далека от полной. Мы укажем, точнее говоря, лишь три важнейших класса используемых уравнений, отметим те физические процессы, которые соответствуют каждому классу уравнений.

Наиболее часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями 2-го порядка. Поэтому мы будем говорить только о них.

**Определение 31.1.** *Соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно, имеющее вид*

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{31.1}$$

*где $F$ — известная функция, называется уравнением с частными производными (иногда говорят — в частных производных) второго порядка с двумя независимыми переменными.*

*Замечание.* Совершенно аналогично может быть определено уравнение и с бóльшим числом независимых переменных.

**Определение 31.2.** *Уравнение вида*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u'_{x_i} + Cu + f = 0, \tag{31.2}$$

*где $a_{ij}$, $b_i$, $c$ и $f$ — функции переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ и $a_{ij} = a_{ji}$, называется линейным дифференциальным уравнением с частными производными 2-го порядка.*

Введем новые независимые переменные по следующим правилам:

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{31.3}$$

и посмотрим, как будет выглядеть уравнение (31.2) в новых переменных. Вычислив все необходимые производные и подставив их в (31.2), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{kl} u''_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k u'_{\xi_k} + Cu + f = 0, \tag{31.4}$$

где

$$\overline{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl},$$

$$\overline{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_k},$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

А теперь внимание!

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^0_{ij} y_i y_j, \tag{31.5}$$

коэффициенты которой $a_{ij}^0$ совпадают с коэффициентами $a_{ij}$ главной части исходного уравнения в некоторой точке $P(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Как известно, если совершить линейное преобразование переменных $y_i$ по следующему правилу:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{31.6}$$

то форма (31.5) преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l, \qquad \text{где} \quad \overline{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Легко усмотреть, что коэффициенты квадратичной формы меняются при введении новых переменных как коэффициенты главной части уравнения.

Известно, что невырожденным линейным преобразованием квадратичную форму $(a_{ij}^0)$ можно привести к каноническому виду. При этом $\overline{a}_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. § 14.2).

Число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каноническом виде инвариантно относительно используемых невырожденных линейных преобразований — в этом состоит так называемый закон инерции квадратичных форм (см. § 14.3). Именно этот закон дает возможность провести нужную нам классификацию.

**Определение 31.3.** *Уравнение* (31.2) *называется эллиптическим в некоторой точке $P$, если все $n$ коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ одного знака.*

**Определение 31.4.** *Уравнение* (31.2) *называется гиперболическим в некоторой точке $P$, если $(n-1)$ коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ имеют одинаковый знак, а один коэффициент имеет противоположный им знак.*

**Определение 31.5.** *Уравнение* (31.2) *называется параболическим в некоторой точке $P$, если хотя бы один из коэффициентов $\overline{a}_{ii}^0$ равен нулю.*

*Замечание.* Еще раз отметим, что приведенная классификация охватывает лишь наиболее часто встречающиеся типы уравнений.

Если коэффициенты уравнения (31.2) постоянны, то классификация справедлива не в какой-то одной точке, а во всей области определения уравнения.

Приведем теперь канонический вид уравнений каждого типа и укажем те процессы, для которых эти уравнения служат математическими моделями. Будем рассматривать случай двух переменных.

### 31.1.1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

где $f(x, t)$ — известная функция, $a \neq 0$ $(\in \mathbb{R})$ — известная константа.

К уравнениям этого типа приводят задачи о распространении волн в воде, воздухе и других средах, задачи о колебаниях стержней, струн и мембран, электрических колебаниях в проводах.

### 31.1.2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t),$$

где $f(x,t)$ — известная функция, $a \neq 0$ $(\in \mathbb{R})$ — известная константа.

К уравнениям этого типа приводят задачи о распространении тепла, о диффузии газа, о фазовых переходах тел.

### 31.1.3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),$$

где $f(x,y)$ — известная функция.

К уравнениям этого типа приводят задачи, связанные с исследованием стационарных процессов различной физической природы — колебания, теплопроводность, диффузия и др.

В последующих главах мы подробно рассмотрим, как ставятся и как решаются краевые задачи для рассмотренных типов уравнений в частных производных.

# XXXII

# УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

## § 32.1. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Приступим к выводу уравнения, описывающего процесс колебания струны.

Рассмотрим струну, которая в положении покоя совпадает с отрезком $[0, l]$ оси $OX$. Пусть струна натянута (натяжение равно $\tau$) и имеет возможность совершать малые поперечные колебания около положения равновесия. Обозначим через $y(x, t)$ — отклонение точки струны с координатой $x$ от оси $OX$ в момент $t$. Будем считать, что колебания столь малы, что можно пренебрегать более высокими степенями функции $y(x, t)$ и ее производных по сравнению с более низкими.

Предположим вначале, что концы струны закреплены, т. е. выполняются условия

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \quad \forall t. \tag{32.1}$$

Если обозначить линейную плотность струны через $\rho(x)$, то кинетическая энергия струны определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho {y'_t}^2 \, dx. \tag{32.2}$$

Подсчитаем потенциальную энергию, $U$, деформированной струны. Она будет равна удлинению струны, умноженному на $\tau$, т. е.

$$U = \tau \left( \int_0^l \sqrt{1 + {y'_x}^2} \, dx - l \right). \tag{32.3}$$

Пренебрегая малыми высших порядков, получаем

$$U = \frac{1}{2} \tau \int_0^l {y'_x}^2 \, dx. \tag{32.4}$$

В силу принципа наименьшего действия (см. § 53.6) можно утверждать, что функция $y(x, t)$ должна доставлять минимум функционалу

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) \, dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho {y'_t}^2 - \tau {y'_x}^2 \right) dx \, dt. \tag{32.5}$$

А это значит (снова следует обратиться к § 53.6), что искомая функция $y(x,t)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\rho y''_{tt} - \tau y''_{xx} = 0. \tag{32.6}$$

Кроме того, эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$y(0,t) = 0 \quad \text{и} \quad y(l,t) = 0 \qquad \text{— краевые условия;} \tag{32.7}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \qquad \text{— функция, задающая форму струны в начальный момент;} \tag{32.8}$$

$$y'_t(x,0) = y_1(x) \qquad \text{— функция, задающая скорости точек струны в начальный момент.} \tag{32.9}$$

Если на струну действует внешняя возмущающая сила $f(x,t)$, то дифференциальное уравнение движения приобретает вид

$$\rho y''_{tt} - \tau y''_{xx} = f(x,t). \tag{32.10}$$

Итак, однородное и неоднородное уравнения колебаний струны (32.6) и (32.10) получены. Приступим к их решению. Начнем с однородного уравнения:

$$\rho y''_{tt} = \tau y''_{xx} \quad \text{или} \quad y''_{xx} = \mu^2 y''_{tt}, \quad \text{где } \mu = \sqrt{\frac{\rho}{\tau}}. \tag{32.11}$$

Чтобы упростить выкладки, примем, что $\mu = 1$, а длина струны равна $\pi$. (Разумеется, решение можно было провести и без этих предположений, но получающиеся формулы были бы более громоздкими.)

Окончательно приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{32.12}$$

с краевыми условиями

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0. \tag{32.13}$$

## § 32.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ. ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Будем искать решение в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от $x$, а вторая — только от $t$:

$$y(x,t) = v(x) \cdot u(t). \tag{32.14}$$

Подставляя выражение (32.14) в уравнение (32.12), получим

$$v''(x) \cdot u(t) = u''(t) \cdot v$$

или

$$\frac{v''}{v} = \frac{u''}{u}. \tag{32.15}$$

Левая часть этого уравнения не зависит от $t$, а правая — не зависит от $x$. Значит, существует константа, равная приведенным выше отношениям. Обозначим ее $-\lambda$. Уравнение (32.15) оказывается эквивалентным двум уравнениям:

$$v'' + \lambda v = 0 \tag{32.16}$$

и

$$u'' + \lambda u = 0. \tag{32.17}$$

Краевые условия (32.13) перепишутся в виде

$$v(0) \cdot u(t) = v(\pi) \cdot u(t) = 0.$$

Откуда следует, что

$$v(0) = v(\pi) = 0. \tag{32.18}$$

Для уравнения (32.16) можно сразу же выписать общее решение

$$v(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \tag{32.19}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Далеко не при всяком значении $\lambda$ общее решение (32.19) удовлетворяет краевым условиям (32.18). Легко видеть, что только если $\lambda = n^2$, где $n$ — целое, краевые условия удовлетворяются. Следовательно, функции вида $v_n = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$ являются решениями уравнения (32.19) с условиями (32.18). Эти функции получили специальное название — собственные функции задачи. Соответствующие значения $\lambda$ — $1, 2^2, 3^2, \ldots$ называются собственными значениями задачи. Сама задача решения уравнения (32.19) с краевыми условиями (32.18) часто называется задачей о собственных значениях.

Из уравнения (32.17) можно найти функцию $u(t)$:

$$u(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt, \tag{32.20}$$

где $a_n$ и $b_n$ — произвольные постоянные, $n$ — произвольное положительное целое число.

Итак, для всякого положительного целого значения $n$ решение уравнения (32.12) можно представить в следующем виде:

$$y_n(x, t) = \sin nx \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right). \tag{32.21}$$

Движение струны, описываемое формулой (32.21), носит название собственного колебания струны. Число $n$ в этом случае носит название собственной частоты.

В самом общем виде решение уравнения (32.12) можно записать в виде

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right). \tag{32.22}$$

Для того чтобы удовлетворялись начальные условия, требуется выполнение условий

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \\ y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin nx. \end{aligned} \tag{32.23}$$

Из теории рядов Фурье известно, что для достаточно широкого класса функций, которому и должны принадлежать $y_0(x)$ и $y_1(x)$, всегда можно выбрать коэффициенты $a_n$ и $b_n$ так, что условия (32.23) будут выполняться.

Таким образом, однородное уравнение (32.12) решено.

Перейдем к неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Q(x, t), \tag{32.24}$$

где $Q(x,t)$ — произвольная внешняя сила, приложенная к струне. Для его решения функцию $Q(x,t)$ в момент времени $t$ разложим по функциям $\sin nx$:

$$Q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\sin nx, \tag{32.25}$$

где $Q_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}Q(x,t)\sin nx\,dx$.

Решение уравнения (32.24) будем искать в таком же виде:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sin nx, \tag{32.26}$$

где

$$q_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(x,t)\sin nx\,dx. \tag{32.27}$$

Подставляя выражение (32.26) в уравнение (32.24) и приравнивая коэффициенты при $\sin nx$, получаем бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-n^2q_n(t)=q_n''(t)-Q_n(t),\quad n=1,2,\ldots \tag{32.28}$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$q_n(t)=\frac{1}{n}\int_0^{t}\sin n(t-\tau)Q_n(\tau)\,d\tau+a_n\cos nt+b_n\sin nt, \tag{32.29}$$

где $a_n$ и $b_n$ — произвольные постоянные. (Читателю рекомендуется убедиться в этом подстановкой выражения (32.29) в уравнение.)

Подставляя выражение (32.29) в выражение (32.26) и находя коэффициенты $a_n$ и $b_n$ из начальных условий, можем сказать, что

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sin nx \tag{32.30}$$

действительно дает решение неоднородного уравнения.

Для рассмотренных нами уравнений (32.26) и (32.10) справедлива теорема единственности. А именно, если функция $y(x,t)$ и ее производные, входящие в уравнения, непрерывны и если начальные и граничные условия заданы непрерывными функциями, то каждая из краевых задач, поставленных для этих уравнений, имеет единственное решение.

Уравнения (32.6) и (32.10) описывали, соответственно, процесс свободных и процесс вынужденных колебаний однородной струны. А как быть, если струна неоднородна? Из механики известно, что уравнение свободных колебаний в этом случае выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0, \tag{32.31}$$

где $p(x)$ — модуль упругости, умноженный на площадь поперечного сечения струны, а $\rho(x)$ — удельная масса струны в точке $x$.

На этот раз нас будет интересовать решение уравнения (32.31) с краевыми условиями (32.13). Как и ранее, будем искать решение в виде

$$y(x,t)=v(x)\cdot u(t). \tag{32.32}$$

Подставив выражение (32.32) в уравнение (32.31), приходим к уравнению

$$\frac{(pv')'}{v\rho} = \frac{u''}{u}. \tag{32.33}$$

Точно так же, как и раньше, замечаем, что левая часть уравнения не зависит от $t$, а правая — не зависит от $x$. Значит, существует константа (назовем ее $\lambda$), равная приведенным выше отношениям. Уравнение (32.33) эквивалентно таким двум уравнениям:

$$(pv')' + \lambda\rho v = 0, \tag{32.34}$$

$$u'' + \lambda u = 0. \tag{32.35}$$

Для нахождения функции $v(x)$, как и ранее, возникает задача — найти собственные значения $\lambda$ дифференциального уравнения (32.34), для которых существует отличное от тривиального решение, удовлетворяющее краевым условиям (32.13). Такое решение называется собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda$. Эта задача о собственных значениях имеет специальное название — задача Штурма–Лиувилля. (Название дано в честь первых исследователей этой задачи.)

То же самое название относят и к аналогичной задаче, но сформулированной для более общего, чем (32.34), уравнения

$$(pv')' - qv + \lambda\rho v = 0, \tag{32.36}$$

где $q$ — известная непрерывная функция.

Относительно собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля установлено много важных, интересных и полезных свойств. Докажем, например, что если $\lambda_n$ и $\lambda_m$ — два различных собственных значения задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (32.34), а $v_n$ и $v_m$ — принадлежащие им собственные функции, то функции $\sqrt{\rho}v_n$ и $\sqrt{\rho}v_m$ ортогональны.

Действительно, из условия следует, что выполняются два равенства

$$(pv_n')' + \lambda_n\rho v_n = 0 \tag{32.37}$$

и

$$(pv_m')' + \lambda_m\rho v_m = 0. \tag{32.38}$$

Умножим обе части уравнения (32.37) на $v_m$, а обе части уравения (32.38) — на $v_n$. Вычтем второе из первого и проинтегрируем обе части уравнения:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_0^\pi \rho v_n v_m\,dx + \int\limits_0^\pi \frac{d}{dx}\left(p\left(v_n'v_m - v_nv_m'\right)\right)dx = 0. \tag{32.39}$$

Второй интеграл в (32.39) равен нулю в силу краевых условий, а $\lambda_n \neq \lambda_m$. Значит,

$$\int\limits_0^\pi \rho v_n \cdot v_m\,dx = 0. \tag{32.40}$$

В дальнейшем мы будем предполагать собственные функции нормированными.

На примере уравнения (32.36) покажем, что если $q \geqslant 0$, то все собственные значения положительны. Действительно, умножая обе части уравнения (32.36) на $v$ и интегрируя от 0 до $\pi$, получаем

$$\lambda\int\limits_0^\pi \rho v^2\,dx = -\int\limits_0^\pi \left[(pv')'v - qv^2\right]dx. \tag{32.41}$$

Интегрируя правую часть этого равенства по частям и используя краевые условия, убеждаемся в том, что она положительна. Следовательно, $\lambda > 0$.

Можно показать также, что собственные значения задачи Штурма–Лиувилля образуют бесконечную последовательность $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, ..., а соответствующая им система собственных функций представляет собой полную ортогональную систему $v_1$, $v_2$, $v_3$, ... Всякая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям, может быть разложена в правильно сходящийся ряд по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, \tag{32.42}$$

где $c_n = \int_0^{\pi} \rho f(x) v_n \, dx$.

Вернемся, однако, к решению уравнения (32.31) с краевыми условиями (32.13). Положим $\lambda_n = \nu_n^2$. Это можно сделать в силу положительности собственных значений. Решая уравнение (32.35), приходим к выводу, что решение $y(x,t)$ можно записать в виде

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \left(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t\right). \tag{32.43}$$

Поскольку имеет место разложение (32.42), можно гарантировать, что решение (32.43) можно приспособить за счет выбора коэффициентов $a_n$ и $b_n$ к тому, чтобы при $t = 0$ оно совпадало с заданным начальным условием.

Задача решена.

## Контрольные вопросы

1. Как осуществляется вывод уравнения колебаний струны? Какие предположения лежат в основе этого вывода? Проведите самостоятельно вывод уравнения колебаний струны как уравнений Эйлера для функционала (32.5).
2. Как определяются собственные колебания и собственные частоты струны? Найдите собственные колебания струны в случае других однородных граничных условий, например, при
$$(y' + \alpha y)\Big|_{x=0} = 0, \quad (y' + \beta y)\Big|_{x=l} = 0.$$
3. Как решается начально-краевая задача для однородного и неоднородного уравнений колебаний струны?
4. Сформулируйте постановку задачи Штурма–Лиувилля, основные свойства ее собственных функций и собственных значений.

## Задачи

1. Однородная струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$ и в начальный момент времени имеет форму параболы с вершиной с точке $(x = \frac{l}{2}, y = h)$. Определить смещение точек струны при нулевой начальной скорости.
2. Однородная струна длины $l$ натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние $h$ от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Определить смещение $y(x,t)$ для любого момента времени.
3. Построить решение уравнения (32.24) при $Q(x,t) = f(x) \sin \omega t$ при нулевых начальных условиях. Исследовать возможность резонанса.

# XXXIII

# УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Одним из важнейших представителей уравнений этого класса является уравнение теплопроводности

$$k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ +\ F(x,t) = c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{33.1}$$

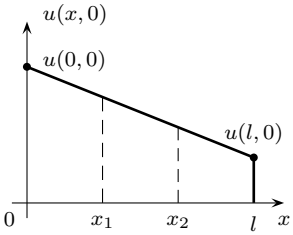


*Рис. 33.1.*

где $k$, $c$, $\rho$ — известные константы, $F(x,t)$ — известная функция, а $u(x,t)$ — неизвестная функция. Решить уравнение (33.1) — это значит найти такую функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению (33.1), а также некоторым начальным и граничным условиям. В этой главе мы обсудим, как уравнение (33.1) связано с физической реальностью, т. е. выведем это уравнение, какими должны быть начальные и граничные условия, позволяющие выделить из всех возможных решений то единственное, которое соответствует рассматриваемой физической задаче.

## § 33.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Будем рассматривать задачу о распространении тепла в тонком однородном стержне (рис. 33.1). Примем следующие допущения и обозначения:

$l$ — длина стержня; $m$ — масса стержня;
$\rho$ — плотность стержня, величина постоянная;
$k$ — коэффициент теплопроводности, величина постоянная;
$S$ — площадь поперечного сечения стержня, величина постоянная;
$c$ — удельная теплоемкость, величина постоянная;
$u(x,t)$ — температура стержня в сечении $x$ в момент времени $t$, предполагается, что температура одинакова во всех точках сечения.

Для того чтобы получить уравнение теплопроводности, необходимо записать закон сохранения тепловой энергии для произвольного участка стержня $(x_1, x_2)$ в течение произвольного промежутка времени $(t_1, t_2)$.

Итак, рассмотрим участок $(x_1, x_2)$. В результате распространения тепла вдоль стержня через сечение $x$ за время от $t_1$ до $t_2$ пройдет такое количество тепла:

$$Q_1 = -S \int\limits_{t_1}^{t_2} k\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dt. \tag{33.2}$$

Формула (33.2) представляет собой количественное выражение известного из физики закона Фурье, утверждающего, что в неравномерно нагретом теле возникают тепловые потоки. Эти потоки направлены от более нагретых мест к менее нагретым и пропорциональны перепаду температур между ними.

Ну, а через участок $(x_1, x_2)$ пройдет тогда за это же время количество тепла

$$Q_{11} = -Sk \int\limits_{t_1}^{t_2} \left( \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_1} \right) dt. \tag{33.3}$$

На участке стержня $(x, x+dx)$ выделяется (или поглощается) за время $(t, t+dt)$ некоторое количество тепла

$$dQ_2 = S\,F(x,t)\,dx\,dt, \tag{33.4}$$

где $F(x,t)$ — плотность тепловых источников в точке $x$ в момент $t$.

Тогда на участке $(x_1, x_2)$ за время $(t_1, t_2)$ выделится (или поглотится) количество тепла

$$Q_{22} = S \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} F(x,t)\,dt\,dx. \tag{33.5}$$

При прохождении тепла по стержню меняется его температура. Чтобы изменить температуру в сечении $x$ на $\Delta u$, требуется поток тепла

$$Q_3 = c\rho\,S\,\Delta u. \tag{33.6}$$

(Это факт, известный из физики.) А для изменения температур во всех сечениях промежутка $(x_1, x_2)$ за время от $t_1$ до $t_2$ потребуется поток тепла

$$Q_{33} = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho\,S\,[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\,dx. \tag{33.7}$$

Используя закон сохранения энергии, можно записать

$$Q_{22} - Q_{11} = Q_{33}. \tag{33.8}$$

Подставляя выражения (33.3), (33.5) и (33.7) в равенство (33.8), получаем уравнение теплопроводности в интегральной форме

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[ k\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_2} - k\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_1} \right] dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} F(x,t)\,dt\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho\,[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\,dx. \tag{33.9}$$

Для того чтобы перейти к уравнению теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$.

*Замечание 33.1.* Это не сильное допущение, так как можно доказать, что всякая функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (33.9), имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Применим к уравнению (33.9) теорему о среднем:

$$\left[ k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t_3) - k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t_3) \right] \Delta t + F(x_4,t_4)\,\Delta x\,\Delta t = c\rho\,[u(x_3,t_2) - u(x_3,t_1)]\,\Delta x. \tag{33.10}$$

С помощью теоремы о конечных приращениях выражение (33.10) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left[k\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_5,t_3)\right]\Delta t\cdot\Delta x+F(x_4,t_4)\,\Delta t\cdot\Delta x=c\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_3,t_5)\right]\Delta t\cdot\Delta x, \qquad (33.11)$$

где $t_3$, $t_4$, $t_5$ — точки из интервала $(t_1,t_2)$, а $x_3$, $x_4$, $x_5$ — точки из интервала $(x_1,x_2)$. Сокращая обе части уравнения (33.11) на произведение $\Delta x\cdot\Delta t$ и переходя к пределу, когда $x_1,x_2\to x$ и $t_1,t_2\to t$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)=c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (33.12)$$

или, учитывая постоянство $k$,

$$k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)=c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (33.12')$$

Уравнение (33.1), тем самым, выведено из вполне определенных физических законов.

Обозначив $\dfrac{k}{c\rho}=a^2$ и $\dfrac{F(x,t)}{c\rho}=f(x,t)$,

приходим к часто используемой записи уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \qquad (33.13)$$

*Замечание 33.2.* Если рассматривать процесс диффузии некоторого газа в полой трубке или трубке, заполненной пористой средой, то, полагая, что концентрация газа в сечении $x$ в момент $t$ есть функция $u(x,t)$, для этой функции может быть получено уравнение, аналогичное (33.1), а также (33.12) и (33.13). Поэтому в соответствующих приложениях уравнение теплопроводности называется уравнением диффузии.

*Замечание 33.3.* Если рассматривать процесс распространения тепла не в тонком однородном стержне, а в однородном пространственном теле и характеризовать этот процесс функцией $u(x,y,z,t)$ — температурой в точке с координатами $x$, $y$, $z$ в момент времени $t$, то можно доказать, что функция $u(x,y,z,t)$ удовлетворяет пространственному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \qquad (33.14)$$

где $f(x,y,z,t)$ — известная функция, $a$ — константа.

## § 33.2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вновь вернемся к уравнению (33.13). Это уравнение имеет множество решений. Для того чтобы из этого множества выделить то единственное решение, которое характеризует рассматриваемую задачу, необходимо к уравнению (33.13) присоединить соответствующие граничные и начальные условия. Эти условия должны отражать физическую суть происходящих процессов.

1) Допустим, что температура левого конца стержня $(x=0)$ с течением времени изменяется по известному закону. Тогда соответствующее краевое условие должно иметь вид

$$u(0,t)=\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — известная функция для $0\leqslant t\leqslant T$, $T$ — время, в течение которого изучается процесс распространения тепла.

2) Допустим, что известна величина потока тепла, $Q(l,t)$, протекающего через торцевое сечение стержня при $x=l$. Тогда соответствующее краевое условие имеет вид
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=\varphi_1(t),$$
где $\varphi_1(t)$ — известная функция для $0\leqslant t\leqslant T$, связанная с величиной потока тепла соотношением
$$\varphi_1(t)=-\frac{Q(l,t)}{k}.$$

3) Допустим, что существует теплообмен между стержнем и окружающей средой, температура которой известна и равна $\theta(t)$, через торцы стержня. Краевые условия в этом случае имеют вид
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \lambda\left[u(0,t)-\theta(t)\right],\\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) &= \lambda\left[u(l,t)-\theta(t)\right].\end{aligned}$$

Возможно задать краевые условия и более сложного типа, чем те, которые приведены выше.

Что касается начальных условий, то наиболее естественно задать температуру во всех точках стержня при $t=0$. Иными словами,
$$u(x,0)=\varphi_2(x),$$
где $\varphi_2(x)$ — известная функция при $0\leqslant x\leqslant l$.

Описанные краевые и начальные условия позволяют ставить различные задачи уравнения теплопроводности.

Корректная постановка задачи обеспечивает не только существование ее решения, но также его единственность и непрерывную зависимость от начальных и граничных условий. На доказательстве этих фактов мы здесь останавливаться не будем.

## § 33.3. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Будем рассматривать следующую задачу:

Найти решение уравнения
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\ t>0 \tag{33.15}$$
при условиях
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l\quad\text{(начальное условие)} \tag{33.16}$$
$$\begin{aligned}u(0,t) &= \varphi_1(t),\\ u(l,t) &= \varphi_2(t),\end{aligned}\quad t\geqslant 0\quad\text{(граничные условия)} \tag{33.17}$$

Назовем ее задачей **A**.

Прежде чем решать задачу **A**, решим несколько более простых задач. Их решения позволят нам решить и задачу **A**.

### 33.3.1. ЗАДАЧА В

Рассмотрим такую задачу.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{33.18}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{33.19}$$

и представимое в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t), \tag{33.20}$$

где $X(x)$ — функция, зависящая только от $x$, а $T(t)$ — функция, зависящая только от $t$.

Подставим выражение (33.20) в уравнение (33.18)

$$XT' = a^2 X'' T. \tag{33.21}$$

Перепишем его так:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{33.22}$$

Поскольку левая часть уравнения (33.22) может зависеть только от $t$, а правая — только от $x$, должна существовать константа, назовем ее $-\lambda$, равная каждой из частей уравнения

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \tag{33.23}$$

Из (33.23) следует, что должны выполняться два уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{33.24}$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{33.25}$$

Граничные условия (33.19) принимают вид

$$X(0) = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = 0. \tag{33.26}$$

Таким образом, для нахождения функции $X(x)$ имеется уравнение (33.24) с краевыми условиями (33.26). Это задача о собственных значениях, задача Штурма–Лиувилля, рассмотренная нами ранее (§ 32.2).

Как было показано, нетривиальные решения уравнения (33.24) существуют только при определенных значениях параметра $\lambda$, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{33.27}$$

Эти нетривиальные решения имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{33.28}$$

Найденным значениям параметра $\lambda$ соответствуют такие решения уравнения (33.25):

$$T_n(t) = C_n\, e^{-a^2 \lambda_n t}, \tag{33.29}$$

где $C_n$ — произвольные постоянные.

Используя представление (33.20), можно сказать, что частные решения уравнения (33.18), удовлетворяющие условиям (33.19), имеют вид

$$u_n(x,t) = C_n\, e^{-a^2\lambda_n t}\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{33.30}$$

### 33.3.2. ЗАДАЧА C

Условие задачи **C** совпадает с условием задачи **B**, но к нему добавляется еще и начальное условие

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{33.31}$$

Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\alpha^2 t}\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{33.32}$$

Очевидно, что она, в силу соотношения (33.30), удовлетворяет условиям (33.19).

Для того чтобы выполнялось условие (33.31), должно выполняться равенство

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{33.33}$$

Иными словами, величины $C_n$ являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам

$$C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\, \sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi. \tag{33.34}$$

Можно показать, что функция

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\, d\xi\right] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\alpha^2 t}\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{33.35}$$

не только удовлетворяет начальным и граничным условиям задачи **C**, но и является дифференцируемой функцией, удовлетворяющей уравнению (33.18) в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$. Задача **C** решена.

*Замечание.* Для того чтобы доказать, что функция (33.35) дифференцируема нужное число раз, нужно гарантировать наличие сходящегося числового ряда, мажорирующего ряд (33.35). В частности, такой ряд всегда можно построить, если $\varphi(x)$ — ограниченная функция.

### 33.3.3. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Прежде чем переходить к следующей по сложности задаче — одной из тех, которые мы должны решить, прежде чем нам удастся решить поставленную ранее задачу **A**, остановимся и проанализируем найденное решение задачи **C**. Особое внимание обратим на его физический смысл.

Легко видеть, что ряд (33.35) при $t > \bar{t}$ мажорируется сходящимся числовым рядом с общим членом

$$a_n = M\, e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\alpha^2\bar{t}}, \tag{33.36}$$

где $M$ — константа такая, что $|\varphi(x)| < M$.

Раз так, значит, ряд (33.35) сходится правильно и в нем можно менять порядок интегрирования и суммирования. Следовательно,

$$u(x,t)=\int\limits_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\alpha^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{33.37}$$

Введем обозначение

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\alpha^2 t}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{l}\xi. \tag{33.38}$$

Функция $G(x,\xi,t)$ носит название функции Грина или функции источника.

С помощью этой функции выражение (33.37) можно представить в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^l G(x,\xi,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{33.39}$$

Можно показать, что функция $G(x,\xi,t)$ имеет прозрачный физический смысл — это температура стержня в точке $x$, $0\leqslant x\leqslant l$ в момент времени $t$, если в начальный момент температура в этой точке равнялась нулю и в этот момент (при $t=0$) в точке $\xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла $(c\rho)$. При этом на краях стержня все время поддерживается нулевая температура. Смысл выражения (33.39) в том, что оно позволяет учесть вклад начальных условий, задаваемых в начальный момент в каждой точке стержня, в температуру в точке $x$ в момент $t$.

Функции Грина оказываются полезными при решении многих задач математической физики, и мы с ними будем встречаться неоднократно.

### 33.3.4. ЗАДАЧА D

Будем рассматривать следующую задачу:

Найти решение уравнения
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{33.40}$$

при условиях
$$u(x,0)=0 \tag{33.41}$$

и
$$u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{33.42}$$

Здесь $f(x,t)$ — известная функция.

Имея уже опыт решения задач **B** и **C**, будем искать решение задачи **D** в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\,\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{33.43}$$

где $C_n(t)$ — функции, подлежащие определению.

Известную функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по функциям $\{\sin\frac{\pi n}{l}x\}$. Имеем

$$f(x,t)\;=\;\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\,\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{33.44}$$

где

$$f_n(t) \;=\; \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\,\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{33.45}$$

Подставим выражения (33.43) и (33.44) в уравнение (33.40):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2C_n(t)+C_n'(t)-f_n(t)\right\}=0. \tag{33.46}$$

Если мы хотим, чтобы $u(x,t)$, определяемое формулой (33.43), было решением уравнения (33.40), необходимо, чтобы все выражения в фигурных скобках в равенстве (33.46) были равны нулю. Имеем

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2C_n(t)+C_n'(t)-f_n(t)=0$$

или

$$C_n'(t)=-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2C_n(t)+f_n(t). \tag{33.47}$$

Для нахождения неизвестных функций $C_n(t)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение. Чтобы найти для него начальное условие, обратимся к условию (33.41) и выражению (33.43).

Так как

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(0)\,\sin\frac{\pi n}{l}x=0, \tag{33.48}$$

то отсюда следует, что

$$C_n(0)=0. \tag{33.49}$$

Интегрируя уравнение (33.47) с начальным условием (33.49), получаем

$$C_n(t)=\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau. \tag{33.50}$$

(Убедитесь самостоятельно в том, что решение найдено верно, подставив выражение (33.50) в уравнение (33.47))

Подставляя выражения (33.50) и (33.45) в формулу (33.43), получаем решение задачи **D** в виде

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{33.51}$$

Легко заметить, что выражение в фигурных скобках нам уже знакомо. Следуя обозначению (33.38), это не что иное, как функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$. С ее помощью решение задачи **D** записывается так:

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{33.52}$$

Несколько слов о физическом смысле этой формулы. Функция $f(\xi,\tau)$ характеризует распределенные непрерывно в области $0 \leqslant \xi \leqslant l$ источники тепла, которые действуют в каждый момент $\tau$, когда $0 \leqslant \tau \leqslant t$. А функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ характеризует вклад в температуру стержня в точке $x$ в момент времени $t$, вызванный источником тепла, находившимся в момент $t-\tau$ в точке $\xi$. Но, так как температура в точке $x$ в момент времени $t$ зависит от *всех* источников тепла, действовавших во *все* моменты времени вплоть до $t$, приходим к необходимости суммирования *всех* влияний, т. е. к формуле (33.52).

*Замечание 33.4.* Мы рассмотрели решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. А как быть, если выполняется условие $u(x,0) = \varphi(x)$? Воспользовавшись решенной ранее задачей **C**, приходим к выводу, что

$$C_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\,\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi + \int\limits_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau.$$

### 33.3.5. ЗАДАЧА A

Вот теперь наконец мы готовы к тому, чтобы приступить к решению задачи **A**, сформулированной в начале §33.3 (уравнение (33.15) при условиях (33.16) и (33.17)).

Вместо того чтобы искать функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (33.15) и условиям (33.16) и (33.17), будем искать функцию $v(x,t)$, связанную с $u(x,t)$ соотношением

$$u(x,t) = \Phi(x,t) + v(x,t), \tag{33.53}$$

где $\Phi(x,t)$ — некоторая известная функция, которую постараемся выбрать так, чтобы упростить решение задачи.

Функция $v(x,t)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \overline{f}(x,t), \tag{33.54}$$

где $\overline{f}(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)$. При этом функция $v(x,t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \overline{\varphi}(x), \qquad \text{где} \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \Phi(x,0);\\ v(0,t) &= \overline{\mu}_1(t), \qquad \text{где} \quad \overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - \Phi(0,t);\\ v(l,t) &= \overline{\mu}_2(t), \qquad \text{где} \quad \overline{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - \Phi(l,t). \end{aligned}$$

Сейчас приступим к выбору функции $\Phi(x,t)$. Если бы $\overline{\mu}_1$ и $\overline{\mu}_2$ оказались равными нулю, то решение задачи свелось бы к уже известным нам решениям задач **C** и **D**. Очевидно, что этого можно добиться, если положить

$$\Phi(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\,(\mu_2(t) - \mu_1(t)). \tag{33.55}$$

(Убедитесь самостоятельно!)

Итак, можно констатировать, что задача **A** решена. Зная ее граничные условия, всегда можно с помощью выбора функции $\Phi(x,t)$ перейти к задаче с нулевыми граничными условиями. А дальше действуют методы, описанные в задачах **C** и **D**.

### 33.3.6. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В зависимости от рассматриваемой физической задачи возможны различные постановки задач, связанных с решением уравнения теплопроводности.

Например, если изучается распределение температур в стержне в достаточно отдаленный момент времени, то начальные условия могут не рассматриваться — роль их пренебрежимо мала.

Если речь идет о распространении тепла в стержне неограниченной длины, то могут не рассматриваться граничные условия.

В тех случаях, когда рассматривается процесс распространения тепла в пространстве, он также может быть охарактеризован распределением температур. Но в этом случае температура, функция $u(x, y, z, t)$, зависит уже от четырех аргументов и удовлетворяет уравнению теплопроводности более общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \tag{33.56}$$

где $f(x, y, z, t)$ — характеристика внешней тепловой нагрузки.

Выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ носит название оператора Лапласа (иногда называется лапласиан) и имеет специальное обозначение

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{33.57}$$

Далее мы рассмотрим некоторые постановки задач для уравнения (33.56).

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторое тело в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных $x$, $y$, $z$, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью $S$, $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in S$ — внутренняя нормаль к $S$.

Задача о распределении температуры $u(x, y, z, t)$ в теле $\mathcal{D}$ формулируется следующим образом:

Найти функцию $u$, удовлетворяющую в $\mathcal{D}$ уравнению (33.56), начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \mathcal{D} \tag{33.58}$$

и одному из граничных условий, задаваемых на $S$:

I. $$u\Big|_S = \varphi \quad \text{(первая краевая задача)} \tag{33.59}$$

II. $$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S \equiv (\vec{n}, \nabla u)\Big|_S \quad \text{(вторая краевая задача)} \tag{33.60}$$

III. $$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S + h\, u\Big|_S = \varphi \quad \text{(третья краевая задача)} \tag{33.61}$$

Здесь $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, $h = h(x, y, z, t)$ и $g = g(x, y, z, t)$ — известные функции, задаваемые соответственно для всех $(x, y, z) \in S$ и $(x, y, z) \in \mathcal{D}$.

Первую краевую задачу называют обычно задачей Дирихле, вторую — задачей Неймана. Физический смысл граничных условий аналогичен смыслу условий, рассмотренных в § 33.2.

## Контрольные вопросы

1. Как выводится уравнение теплопроводности для тонкого однородного стержня? Какие физические законы лежат в основе этого вывода?
2. Как ставятся начальные и граничные условия для уравнения теплопроводности?
3. Как реализуется метод разделения переменных для уравнения теплопроводности? К каким частным задачам сводится решение общей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности?
4. Как определяется функция Грина и каков ее физический смысл?
5. Сформулируйте начальные и краевые условия для уравнения теплопроводности в ограниченном теле.

## Задачи

1. Дан тонкий однородный стержень длины $l$, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого $u(x,0) = \big(cx(l-x)\big)/l^2$. Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Определить температуру стержня в момент времени $t > 0$.
2. Пусть начальная температура стержня длины $l$ равна нулю. На конце $x = l$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = 0$ она растет линейно, так что $u(0,t) = At$. Найти распределение температуры вдоль стержня при $t > 0$.
3. Пусть начальная температура стержня есть $u(x,0) = A\frac{x}{l}$. На конце $x = 0$ температура равна нулю, а на конце $x = l$ изменяется по закону $u(l,t) = Ae^{-t}$. Найти распределение температуры при $t > 0$.

# XXXIV

# УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Предыдущую главу мы завершили рассмотрением уравнения теплопроводности общего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \tag{34.1}$$

где $f(x, y, z, t)$ — характеристика внешней тепловой нагрузки, а $u(x, y, z, t)$ — температура в точке с координатами $(x, y, z)$ в момент времени $t$. Зададимся вопросом, как изменится уравнение (34.1), если применить его к исследованию стационарных процессов? Если процесс стационарен, то функция $u(x, y, z, t)$ не зависит от $t$ и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. С учетом этого факта можно сформулировать основные задачи для уравнений эллиптического типа.

Здесь мы ограничимся описанием лишь одной, но очень важной, задачи, занимающей исключительное место в математике по многочисленности и разнообразию приложений.

Пусть имеется некоторое тело $W$, ограниченное поверхностью $S$. Тогда задача о стационарном распределении температур может быть сформулирована так:

Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{34.2}$$

внутри области $W$ и условию

$$u = f \tag{34.3}$$

на поверхности $S$.

Эта задача называется задачей Дирихле. В ней предполагается отсутствие источников тепла, воздействующих на $W$. Функции, удовлетворяющие уравнению (34.2), получили специальное название — гармонические функции.

Решение задачи Дирихле может быть найдено методом разделения переменных для некоторых достаточно простых областей — шар, круг, цилиндр и др.

В качестве иллюстрации решим задачу Дирихле для круга: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{34.2′}$$

внутри круга и условию

$$u = f \tag{34.3′}$$

на границе круга, где $f$ — заданная функция.

## § 34.1. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Известно, что один и тот же объект (кривая, поверхность и т. п.) может с разной степенью сложности описываться в различных системах координат. Вспомните, например, как упрощалось уравнение кривой второго порядка за счет удачного выбора системы координат (см. § 3.2). Поскольку мы хотим решить задачу Дирихле для круга, то сразу возникает мысль, что вид уравнения Лапласа, соответствующий декартовой системе координат, не очень хорошо соответствует решаемой задаче. Быть может, если бы это уравнение было записано в полярной системе координат, то и задача решалась бы легче. Имея в виду эти соображения, приступим к поиску представления уравнения Лапласа в произвольной ортогональной криволинейной системе координат.

Пусть в пространстве введены криволинейные ортогональные координаты $q_1$, $q_2$ и $q_3$, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z). \tag{34.4}$$

Будем считать возможным и явное выражение декартовых координат любой точки пространства через ее криволинейные координаты

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{34.5}$$

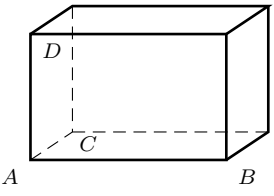


*Рис. 34.1.*

Рассмотрим элемент объема, ограниченный тремя парами новых координатных поверхностей $q_1 = C_1$, $q_2 = C_2$ и $q_3 = C_3$ (см. рис. 34.1).

Пусть вдоль ребра $AB$ $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$, вдоль ребра $AD$ $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$, вдоль ребра $AC$ $q_1 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$. Из геометрии известно, что направляющие косинусы касательных к ребрам $AB$, $AC$ и $AD$ пропорциональны соответствующим «тройкам» частных производных:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}; \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}; \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Поэтому условие ортогональности ребер записывается так:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0, \quad i \neq k. \tag{34.6}$$

Вычислим элемент длины как в старых, так и в новых координатах:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = &\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\cdot dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\cdot dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\cdot dq_3\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\cdot dq_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\cdot dq_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\cdot dq_3\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\cdot dq_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\cdot dq_2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\cdot dq_3\right)^2. \end{aligned} \tag{34.7}$$

Раскроем скобки и, учитывая условие (34.6), приходим к равенству

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \tag{34.8}$$

где

$$\begin{cases} H_1^2 = \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 = \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 = \left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{cases} \tag{34.9}$$

Возвращаясь к рис. 34.1, заметим, что вдоль ребра $AB$ меняется только координата $q_1$ и, следовательно, в силу равенства (34.8) длина этого ребра $ds_1$, определена равенством

$$ds_1 = H_1\, dq_1. \tag{34.10}$$

Аналогично определяются и длины других ребер:

$$ds_2 = H_2\, dq_2 \qquad \text{и} \qquad ds_3 = H_3\, dq_3. \tag{34.11}$$

Теперь появилась возможность выразить элемент объема в новых координатах, что нам понадобится в дальнейшем:

$$dv = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot dq_1 dq_2 dq_3. \tag{34.12}$$

Чтобы получить выражение лапласиана в криволинейных координатах, вспомним некоторые факты из векторного анализа (см. главу 22).

Рассмотрим потенциальное векторное поле $A$, т. е. такое, что

$$\vec{A} = \operatorname{grad} u, \tag{34.13}$$

где $u$ — некоторая скалярная функция. При этом проекции вектора $\vec{A}$ определяются формулами

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}, \quad A_2 = \frac{\partial u}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}, \quad A_3 = \frac{\partial u}{\partial s_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \tag{34.14}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей равенства (34.13):

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u. \tag{34.15}$$

Правая часть этого равенства представляет собой $\Delta u$. Что касается левой части, то для ее вычисления уместно воспользоваться определением

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{v_M \to 0} \frac{\iint\limits_S A_n\, dS}{v_M}, \tag{34.16}$$

где $S$ — поверхность, ограничивающая объем $v_M$. В этом объеме содержится точка $M$, в которой вычисляется дивергенция $\vec{A}$.

Применим формулу (34.16) к элементарному объему, приведенному на рис. 34.1.

Используя теорему о среднем, будем вычислять потоки через противоположные грани:

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3\Big|_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3\Big|_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(H_2 H_3 A_1\right) dq_1 dq_2 dq_3. \tag{34.17}$$

Аналогично

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_3 H_1 A_2\right)\, dq_1 dq_2 dq_3 \tag{34.18}$$

и

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 A_3\right)\, dq_1 dq_2 dq_3. \tag{34.19}$$

Подставляя формулы (34.16), (34.17), (34.18) и (34.19) в выражение (34.15), получаем

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{34.20}$$

Окончательно уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах записывается так:

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] = 0. \tag{34.21}$$

Вот теперь мы можем выяснить, как выглядит уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. В этом случае $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами определяется соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{34.22}$$

Используя их, находим

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = \rho, \qquad H_3 = 1. \tag{34.23}$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{34.24}$$

Предполагая, что функция $u$ не зависит от $z$, мы тем самым переходим к полярным координатам, в которых уравнение Лапласа выглядит так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{34.25}$$

Цель, к которой мы стремились, достигнута.

## § 34.2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГА

Теперь мы имеем возможность решить задачу Дирихле, сформулированную в предыдущем параграфе. Напомним ее:

*Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению*

$$\Delta u = 0 \tag{34.2″}$$

*внутри круга и условию*

$$u = f \tag{34.3″}$$

*на границе круга, где $f$ — заданная функция.*

Воспользуемся уравнением (34.25) и будем искать не функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (34.2″), а функцию $v(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению (34.25). (В случае необходимости, зная функцию $v(\rho, \varphi)$, можно вернуться и к функции $u(x, y)$, так как $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.)

Следуя идеологии метода разделения переменных, представим неизвестную функцию $v(\rho,\varphi)$ в виде

$$v(\rho,\varphi)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi), \tag{34.26}$$

где $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$ — функции, подлежащие определению.

Подставим выражение (34.26) в уравнение (34.25):

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dR}{d\rho}\right)\Phi+\frac{1}{\rho^2}\,R\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0. \tag{34.27}$$

Преобразуя выражение (34.27) с учетом того, что функция $R$ зависит только от $\rho$, а функция $\Phi$ — только от $\varphi$, получим

$$\frac{\left(\rho R'\right)'}{\frac{R}{\rho}}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda, \tag{34.28}$$

где $\lambda$ — константа.

Из условия (34.28) следует, что должны выполняться два уравнения:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0,\quad \Phi\not\equiv 0 \tag{34.29}$$

и

$$\rho\left(\rho R'\right)'-\lambda R=0,\quad R\not\equiv 0. \tag{34.30}$$

Общее решение уравнения (34.29) имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot\varphi\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot\varphi\right), \tag{34.31}$$

где $A$ и $B$ — произвольные постоянные.

Возникает вопрос — любое ли значение $\lambda$ нам подходит, имея в виду не решение уравнения (34.29), а решение исходной задачи?

По смыслу функция $v(\rho,\varphi)$ должна быть периодической с периодом $2\pi$, т. е.

$$v(\rho,\varphi)=v(\rho,\varphi+2\pi). \tag{34.32}$$

Отсюда следует, что и функция $\Phi(\varphi)$ должна обладать тем же свойством:

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \tag{34.33}$$

Это возможно только в том случае, когда $\sqrt{\lambda}=n$, где $n$ — целое число.

Стало быть, для решения уравнения (34.25) нас будут интересовать только частные решения вида

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{34.34}$$

где $A_n$ и $B_n$ — произвольные постоянные (пока произвольные!).

Обратимся к уравнению (34.30). Оно легко преобразуется к виду

$$\rho^2R''+\rho R'-n^2R=0. \tag{34.35}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $R=\rho^k$. Подставляя эту функцию в уравнение (34.35) и выполняя упрощения, получаем

$$k^2-n^2=0\qquad\text{или}\qquad k=\pm n. \tag{34.36}$$

Следовательно, общее решение уравнения (34.35) имеет вид

$$\begin{aligned} &R(\rho)=C+D\ln\rho, && n=0;\\ &R(\rho)=C\rho^n+D\rho^{-n}, && n=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{34.37}$$

где $C$ и $D$ — произвольные постоянные.

Любые ли значения $n$ устраивают нас с точки зрения решения исходной задачи? Нет. Для того чтобы избежать «неприятностей» при $\rho = 0$ (чтобы функция $R(\rho)$ не обращалась в бесконечность при $\rho = 0$), будем рассматривать только частные решения вида

$$R(\rho) = C\rho^n, \qquad \text{где} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{34.38}$$

Итак, мы нашли множество частных решений уравнения (34.25):

$$v_n(\rho, \varphi) = \rho^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{34.39}$$

каждое из которых является гармонической функцией.

*Замечание.* Хотя уравнения (34.25) и теряет смысл при $\rho = 0$, можно доказать, что все же $\Delta v_n = 0$ и при $\rho = 0$.

Искомую функцию $v(\rho, \varphi)$ представим в виде ряда, составленного из частных решений вида (34.39):

$$v(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right). \tag{34.40}$$

Является ли выражение (34.40) решением уравнения (34.25), удовлетворяющим условию (34.3″)? Пока нет. Для того чтобы это было так, нужно убедиться в выполнении двух условий:

1. $v(a, \varphi) = f$.
2. Ряд (34.40) сходится и его можно почленно дифференцировать.

Чтобы выполнялось условие 1, выберем надлежащим образом коэффициенты $A_n$ и $B_n$. С одной стороны, считая функцию $f$ зависящей от $\varphi$, что естественно, мы можем разложить ее в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi\right), \tag{34.41}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

С другой же стороны, из равенства (34.40) при $\rho = a$ следует

$$v(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right). \tag{34.42}$$

Потребовав, чтобы ряды (34.41) и (34.42) совпадали, получаем формулы для вычисления коэффициентов $A_n$ и $B_n$:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \qquad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}. \tag{34.43}$$

Итак, условие 1 будет выполнено, если в качестве $v(\rho,\varphi)$ взять выражение

$$v(\rho,\varphi)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)\,. \tag{34.44}$$

Исследуем свойства ряда (34.44). Для этого используем более общее представление

$$v(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}t^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)+\frac{\alpha_0}{2}, \tag{34.45}$$

где $t=\frac{\rho}{a}\leqslant 1$.

Вычислим $k$-ю производную от функции $v_n(\rho,\varphi)$ по $\varphi$:

$$\frac{\partial^k v_n}{\partial\varphi^k}=t^n n^k\left[\alpha_n\cos\left(n\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)+\beta_n\sin\left(n\varphi+k\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{34.46}$$

Предположим, и это предположение вполне естественно, что функция $f(\varphi)$ ограничена. Тогда ее коэффициенты Фурье ограничены, т. е. существует такое число $M$, что $|\alpha_n|<M$ и $|\beta_n|<M$, где $n=1,2,\ldots$ Имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^k v_n}{\partial\varphi^n}\right|\leqslant t^n n^k\cdot 2\cdot M. \tag{34.47}$$

Зафиксируем некоторое значение $\rho=\rho_0$. Ему соответствует $t_0=\frac{\rho_0}{a}<1$. Убедимся в том, что ряд, соответствующий $k$-й производной по $\varphi$ от функции $v(\rho,\varphi)$, сходится правильно при $t\leqslant t_0<1$. Это следует из того, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}t^n n^k(|\alpha_n|+|\beta_n|)\leqslant 2M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}t_0^n n^k. \tag{34.48}$$

Ряд, стоящий справа, не зависит от $t$ и сходится при любом $k$. Отсюда следует сходимость ряда (34.44) и возможность его дифференцировать по $\varphi$ сколько угодно раз.

Аналогично можно доказать, что и по $\rho$ его можно дифференцировать сколько угодно раз. Окончательный вывод — ряд (34.44) определяет функцию, являющуюся решением задачи Дирихле для круга.

*Замечание 34.1.* Рассмотренная нами задача часто называется внутренней. В отличие от нее внешняя задача Дирихле для круга формулируется так:

> *Найти функцию $v(\rho,\varphi)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta v=0$ вне круга, ограниченную при $\rho\to\infty$ и удовлетворяющую условияю $v=f$ на границе круга, где $f$ — заданная функция.*

Решение ее совершенно аналогично приведенному выше.

*Замечание 34.2.* Как видно из приведенных рассуждений, выполнение граничного условия $v(a,\varphi)=f(\varphi)$ понимается в очень слабом смысле, как совпадение коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$ с соответствующими коэффициентами Фурье функции $v(r,\varphi)$ при $r=a$. Если ряд Фурье функции $f(\varphi)$ сходится к ней равномерно и абсолютно, что гарантируется, например, достаточной гладкостью функции $f(\varphi)$, то граничное условие можно понимать как обычное равенство функций. Этот же факт имеет место, если $f(\varphi)$ всего лишь непрерывна, но доказательство непрерывности $v(r,\varphi)$ в замкнутом круге $r\leqslant a$ и выполнения равенства $v(a,\varphi)=f(\varphi)$ требует дополнительных рассмотрений.

## Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача Дирихле для уравнения Лапласа в случае ограниченной области?
2. Сформулируйте постановку других краевых задач для уравнения Лапласа.
3. Как вводятся системы криволинейных ортогональных координат?
4. Как получается выражение лапласиана в криволинейной системе координат?
5. Найдите выражение лапласиана в сферической системе координат.
6. Как реализуется метод разделения переменных при решении задачи Дирихле для круга?
7. Аналогично задаче Дирихле для круга исследуйте задачу Дирихле для кольца.

## Задачи

1. Доказать, что решение задачи Дирихле для круга радиуса $R$ представляется интегралом Пуассона

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int f(\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi.$$

2. Найти гармоническую функцию внутри кольца $1\leqslant r\leqslant 2$, удовлетворяющую краевым условиям

$$u\Big|_{r=1}=0,\quad u\Big|_{r=2}Ay.$$

3. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $R_1<r<R_2$

$$\Delta u=0,\quad u\Big|_{r=R_1}=f_1(\theta),\quad u\Big|_{r=R_2}=f_2(\theta).$$

4. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге $r<R$

$$\begin{cases}\Delta u=F\\ u\Big|_{r=R}=0\end{cases}.$$

# XXXV

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В предыдущих трех главах мы рассмотрели несколько краевых задач. Можно усмотреть нечто общее в подходах к их решению. В частности, в них всякий раз присутствовали два этапа: сначала находилось решение того или иного уравнения, а потом мы добивались того, чтобы оно удовлетворяло заданным граничным условиям.

Оказывается, что для одного и того же дифференциального уравнения метод решения может существенно зависеть от вида граничных условий. Это, безусловно, не очень удобно.

Такую ситуацию можно изменить, если исходную задачу удается тем или иным способом свести к интегральному уравнению, так как оно оказывается эквивалентным дифференциальному уравнению вместе с соответствующими краевыми условиями. В этом случае отпадают упомянутые выше два этапа и на смену им приходит только один — нужно просто уметь решить интегральное уравнение. Поскольку к одному и тому же интегральному уравнению сводятся нередко самые разнообразные краевые задачи, можно сказать, что интегральные уравнения представляют собой достаточно мощный аппарат для решения и исследования задач математической физики. В этой главе мы познакомимся лишь с одним типом интегральных уравнений — уравнениями Фредгольма[1]. Причем сначала остановимся на свойствах этих уравнений, методах их решения, а потом — на некоторых приложениях.

**Определение 35.1.** *Интегральное уравнение вида*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{35.1}$$

*где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, называется интегральным уравнением Фредгольма II рода.*

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать пределы интеграла конечными, а функцию $f(x)$ — непрерывной в интервале $(a,b)$. Что касается функции $K(x,s)$, называемой ядром уравнения, то ее будем считать определенной и ограниченной в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$. Кроме того, предполагается, что ядро $K(x,s)$ может

[1] Фредгольм Эрик Ивар (1866–1927) — шведский математик. Окончил Стокгольмский университет в 1893 г. С 1898 г. — доцент, с 1906 г. — профессор Стокгольмского университета. Известен своими результатами по теории интегральных уравнений и их применениям как к решению конкретных физических проблем, так и к теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальным уравнениям в частных производных.

иметь лишь конечное число точек разрыва с одной и той же абсциссой $x$ или с одной и той же ординатой $s$.

**Определение 35.2.** *Ядро, удовлетворяющее приведенным выше условиям, называется регулярным.*

Понятие регулярности оказывается весьма полезным, так как имеет место следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 35.1**
Пусть $K_1(x,s)$ и $K_2(x,s)$ — два регулярных ядра в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$. Тогда ядро $K(x,s) = \int_a^b K_1(x,t) \cdot K_2(t,s)\,dt$ будет непрерывным в этой же области.

● Доказательство этой теоремы мы рекомендуем читателю провести самостоятельно, пользуясь методом «от противного». ●

## § 35.1. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Перепишем уравнение (35.1) так:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x). \tag{35.2}$$

Тогда, подставив в правую часть уравнения вместо $\varphi(x)$ произвольную непрерывную функцию $\varphi_0(x)$, получаем

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)\,ds + f(x). \tag{35.3}$$

Функция $\varphi_1(x)$ может быть вычислена из равенства (35.3). Далее, подставляя в (35.3) вместо $\varphi_0(x)$ найденную функцию $\varphi_1(x)$, находим

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)\,ds + f(x). \tag{35.4}$$

Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s)\,ds + f(x). \tag{35.5}$$

Отметим, что ввиду регулярности ядра функции $\varphi_n(x)$ непрерывны. Если нам удастся доказать, что последовательность функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к некоторой функции $\varphi(x)$, то тогда равенство (35.5) при $n \to \infty$ обратится в уравнение (35.2), функция $\varphi(x)$ окажется решением этого уравнения, а функции $\varphi_n(x)$ — последовательными приближениями к этому решению.

Применяя многократно формулу (35.5), приходим к выражению

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)\,ds + \lambda^2 \int_a^b K(x,s)\,ds \int_a^b K(s,s_1)f(s_1)\,ds_1 + \cdots$$
$$\cdots + \lambda^{n-1} \int_a^b K(x,s)\,ds \int_a^b K(x,s_1)\,ds_1 \ldots \int_a^b K(s_{n-3},s_{n-2})f(s_{n-2})\,ds_{n-2} + R_n, \quad (35.6)$$

где

$$R_n = \lambda^n \int_a^b K(x,s)\,ds \int_a^b K(s,s_1)\,ds_1 \ldots \int_a^b K(s_{n-2},s_{n-1})\varphi_0(s_{n-1})\,ds_{n-1}. \quad (35.7)$$

Вследствие регулярности ядра и непрерывности функций $f$ и $\varphi_0$ справедливы следующие неравенства:

$$|K(x,s)| \leqslant M,\ |f(x)| \leqslant P,\ |\varphi_0(x)| \leqslant N,\ a \leqslant (x,s) \leqslant b, \quad (35.8)$$

где $M$, $P$ и $N$ — некоторые константы.

Из неравенств (35.8) следует такая оценка для $R_n$:

$$|R_n| \leqslant [M(b-a)|\lambda|]^n \cdot N. \quad (35.9)$$

Обратимся к выражению (35.6). Функция $\varphi_n(x)$ представлена в виде суммы $n$ первых членов ряда и остатка $R_n$. Оценку для остатка мы уже нашли, что же касается членов ряда, то все они мажорируются членами числового ряда

$$[M(b-a)|\lambda|]^n P.$$

Если предположить, что $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, то оказывается, что этот числовой ряд сходится, а $R_n$ равномерно стремится к нулю при $n$, стремящемся к бесконечности. Отсюда можно заключить, что существует функция $\varphi(x)$, являющаяся пределом последовательности функций $\varphi_n(x)$. Из формул (35.4) и (35.5) следует, что все функции $\varphi_n(x)$ непрерывны. Значит, и функция $\varphi(x)$ непрерывна.

Окончательно можно сформулировать следующий вывод: для всякого значения $\lambda$, удовлетворяющего условию $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, уравнение Фредгольма имеет непрерывное решение $\varphi(x)$, представимое в виде правильно сходящегося ряда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)\,ds + \cdots + \lambda^n \int_a^b K(x,s)\,ds \times$$
$$\times \int_a^b K(x,s_1)\,ds_1 \ldots \int_a^b K(s_{n-2},s_{n-1})f(s_{n-1})\,ds_{n-1} + \cdots \quad (35.10)$$

Легко убедиться в том, что это решение единственно и не зависит от выбора начального приближения $\varphi_0(x)$. (Настоятельно рекомендуем сделать это самостоятельно.)

Формулу (35.10) можно представить в более удобном виде. Для этого определим такую последовательность функций:

$$K_1(x,s)=K(x,s),\quad K_2(x,s)=\int\limits_a^b K(x,t)K_1(t,s)\,dt,\quad \ldots,$$

$$K_n(x,s)=\int\limits_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt,\quad \ldots$$

Члены этой последовательности называются итерированными ядрами.

Используя итерированные ядра, формулу (35.10) можно переписать так:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K_1(x,s)f(s)\,ds+\cdots+\lambda^n\int\limits_a^b K_n(x,s)f(s)\,ds+\cdots \tag{35.11}$$

Однако есть возможность и эту формулу упростить. Введем понятие резольвенты интегрального уравнения, определив ее с помощью ряда

$$R(x,s,\lambda)\stackrel{\text{def}}{=}K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\cdots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\cdots \tag{35.12}$$

Понятно, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно в области $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ при $\lambda$, удовлетворяющих условию $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$. Резольвента зависит от ядра интегрального уравнения. Поэтому, если построить резольвенту для уравнения с регулярным ядром, то сама она окажется регулярной функцией в той же области $a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant s\leqslant b$.

С помощью резольвенты $R(x,s,\lambda)$ формула (35.11) может быть представлена в виде

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b R(x,s,\lambda)f(s)\,ds. \tag{35.13}$$

Формула (35.13) столь похожа на исходное интегральное уравнение, что не покажется удивительным тот факт, что резольвента $R(x,s,\lambda)$ в свою очередь удовлетворяет двум интегральным уравнениям:

$$R(x,s,\lambda)=K(x,s)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t)R(t,s,\lambda)\,dt \tag{35.14}$$

и

$$R(x,s,\lambda)=K(x,s)+\lambda\int\limits_a^b K(t,s)R(x,t,\lambda)\,dt. \tag{35.15}$$

(Убедитесь в этом самостоятельно!)

Подводя итоги содержанию этого параграфа, можно сказать, что метод итераций позволяет найти решение уравнения Фредгольма для малых по модулю значений параметра $\lambda$.

А как быть, если $\lambda$ велико? Значит ли это, что уравнение не имеет решения? Ответы на эти вопросы будут получены в следующем параграфе.

## § 35.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

В работе Фредгольма 1904 года была установлена фундаментальная связь между интегральными и линейными алгебраическими уравнениями, позволившая дать ответы как на вопросы, поставленные в конце предыдущего параграфа, так и на ряд других. Приступим к изложению метода, использованного Фредгольмом.

Промежуток $[a,b]$, на котором определены функции $\varphi(x)$ и $f(x)$, разобьем на $n$ равных интервалов. Будем считать, что в пределах каждого из них эти функции сохраняют постоянные значения. Обозначим абсциссы середин этих интервалов через $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, а значения функций в этих точках через $\varphi_1=\varphi(x_n),\ \ldots,\ \varphi_n=\varphi(x_n)$ и $f_1=f(x_1),\ f_2=f(x_2),\ \ldots,\ f_n=f(x_n)$.

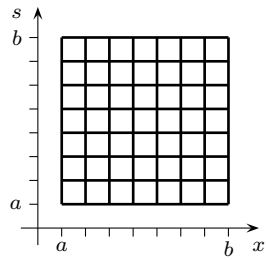


*Рис. 35.1.*

Ядро $K(x,s)$ определено на квадрате $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ (см. рис. 35.1).

Вертикальную сторону этого квадрата также разобьем на $n$ интервалов и обозначим ординаты середин этих интервалов через $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$. Исходный квадрат, область определения ядра $K(x,s)$, в результате этих разбиений распадается на $n^2$ малых квадратов, каждый из которых будем нумеровать парой $(i,j)$, соответствующей координатам центра квадрата $(x_i,s_j)$. Будем считать, что в пределах квадрата $(i,j)$ ядро $K(x,s)$ сохраняет постоянное значение $K_{ij}=K(x_i,s_j)$.

Принятые нами допущения определили некоторую аппроксимацию функций $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x,s)$. С ее помощью можно аппроксимировать и интегральное уравнение (35.1):

$$\varphi_i-\frac{b-a}{n}\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\varphi_j=f_i,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{35.16}$$

Положим $\frac{b-a}{n}=\Delta$. Тогда система уравнений (35.16) примет следующий вид:

$$\begin{cases}\varphi_1-\Delta\lambda\,(K_{11}\varphi_1+K_{12}\varphi_2+\cdots+K_{1n}\varphi_n) &= f_1\\ \varphi_2-\Delta\lambda\,(K_{21}\varphi_1+K_{22}\varphi_2+\cdots+K_{2n}\varphi_n) &= f_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n-\Delta\lambda\,(K_{n1}\varphi_1+K_{n2}\varphi_2+\cdots+K_{nn}\varphi_n) &= f_n\end{cases}. \tag{35.17}$$

Неизвестными здесь выступают величины $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\ldots$, $\varphi_n$. Если определитель системы (35.17) отличен от нуля, то из нее единственным образом могут быть найдены эти величины, представляющие собой кусочно-постоянную аппроксимацию функции $\varphi(x)$ — $\widetilde{\varphi}_n$ (см. рис. 35.2), $\lim_{n\to\infty}\widetilde{\varphi}_n=\varphi$, $\varphi$ — непрерывна на $[a,b]$ и является решением уравнения (35.1).

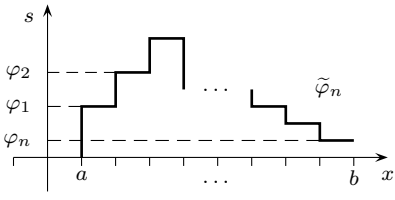


*Рис. 35.2.*

Если теперь мы начнем увеличивать $n$, то аппроксимация будет становиться все более точной. Система уравнений (35.17) в пределе (при $n\to\infty$) перейдет в интегральное уравнение (35.1). Таким образом, в основе метода Фредгольма лежат две гипотезы:

1) интегральное уравнение выступает как предельное для системы уравнений (35.17) при $n \to \infty$;
2) решение интегрального уравнения получается с помощью предельного перехода из решения системы (35.17).

Обе эти гипотезы могут быть оправданы совершенно строго, но мы на этом специально останавливаться не будем. Вместо этого поговорим о решении системы (35.17). Поскольку нам нужно не только разрешить эту систему, но и сделать предельный переход в решении, уместно придать этому решению такой вид, который удобен для выполения предельного перехода.

Введем новые неизвестные $z_i$, определив их с помощью равенств

$$\varphi_i = f_i + z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35.18}$$

Для этих новых неизвестных система (35.17) приобретает вид:

$$z_i - \Delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik} z_k = \Delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik} f_k, \tag{35.19}$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Понятно, что решение системы (35.19) можно представить в виде

$$z_i = \Delta\lambda \left(R_{i1} f_1 + R_{i2} f_2 + \cdots + R_{in} f_n\right), \tag{35.20}$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а коэффициенты $R_{ij}$ не зависят ни от $z_k$, ни от $f_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Подставим выражения (35.20) в (35.18):

$$\varphi_i = f_i + \Delta\lambda \left(R_{i1} f_1 + R_{i2} f_2 + \cdots + R_{in} f_n\right), \tag{35.21}$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Займемся поиском коэффициентов $R_{ij}$. При этом используем тот факт, что они не зависят от значений $f_k$. Положим, например, в равенствах (35.19) и (35.20) $f_j = 1$, а $f_k = 0$ при $k \neq j$. Имеем

$$z_i - \Delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik} z_k = \Delta\lambda K_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{35.22}$$

и

$$z_i = \Delta\lambda R_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35.23}$$

Подставим значение $z_i$ из выражения (35.23) в (35.22). Получаем

$$R_{ij} - \Delta\lambda \sum_{k=1}^{n} K_{ik} R_{kj} = K_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35.24}$$

Так как $j$ может принимать любое значение от 1 до $n$, то равенство (35.24) представляет собой $n$ систем уравнений. В развернутом виде они выглядят так:

$$\begin{cases} R_{1j} - \Delta\lambda \left(K_{11} R_{1j} + K_{12} R_{2j} + \cdots + K_{1n} R_{nj}\right) &= K_{1j} \\ R_{2j} - \Delta\lambda \left(K_{21} R_{1j} + K_{22} R_{2j} + \cdots + K_{2n} R_{nj}\right) &= K_{2j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{nj} - \Delta\lambda \left(K_{n1} R_{1j} + K_{n2} R_{2j} + \cdots + K_{nn} R_{nj}\right) &= K_{nj} \end{cases}, \tag{35.25}$$

где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Определитель каждой из этих систем такой же, как определитель системы (35.17):

$$\mathcal{D}_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\Delta\lambda K_{11} & -\Delta\lambda K_{12} & \dots & -\Delta\lambda K_{1n} \\ -\Delta\lambda K_{21} & 1-\Delta\lambda K_{22} & \dots & -\Delta\lambda K_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\Delta\lambda K_{n1} & -\Delta\lambda K_{n2} & \dots & 1-\Delta\lambda K_{nn} \end{vmatrix}. \tag{35.26}$$

Если обозначить через $\mathcal{D}_{ij}(\lambda)$ определитель, который получится из $\mathcal{D}_n(\lambda)$ при замене $i$-го столбца правыми частями $j$-й системы (35.25), то в соответствии с правилом Крамера будем писать

$$R_{ij}=\frac{\mathcal{D}_{ij}(\lambda)}{\mathcal{D}_n(\lambda)}. \tag{35.27}$$

Если раскрыть определитель, то можно убедиться в том, что и в числителе и в знаменателе стоят многочлены от $\lambda$. Первый — степени $n-1$, второй — степени $n$. Что же произойдет, если $n$ будет неограниченно возрастать? (При этом точки $x_i$, $s_j$ все более плотно будут заполнять отрезок $[a,b]$). Оказывается, что многочлены $\mathcal{D}_n(\lambda)$ и $\mathcal{D}_{ij}(\lambda)$ превратятся в сходящиеся для всех (даже комплексных!) значений $\lambda$ ряды $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x,s,\lambda)$. Так как $\mathcal{D}_n(0)=1$, то $\mathcal{D}(0)=1$, поэтому $\mathcal{D}(\lambda)$ — целая аналитическая функция, не равная тождественно нулю, и, следовательно, имеющая на всей комплексной плоскости $\lambda$ конечное или счетное множество нулей. Если $\mathcal{D}(\lambda)\neq 0$, то выражение (35.27) перейдет в пределе в

$$R(x,s,\lambda)=\frac{\mathcal{D}(x,s,\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}, \tag{35.28}$$

а предельный переход в равенстве (35.21) приведет к известной формуле Фредгольма

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)\,ds, \tag{35.29}$$

где никаких предположений о малости $\lambda$ уже не потребовалось.

Можно показать, что $R(x,s,\lambda)$, определяемая формулой (35.28), удовлетворяет уравнениям (35.14), (35.15) и, следовательно, при достаточно малых $\lambda$ совпадает с резольвентой Фредгольма (35.12).

Возникает вопрос. Формулы (35.13) и (35.29) совпадают, но в первой из них функция $R(x,s,\lambda)$ определена равенством (35.12), а во второй также обозначенная функция определяется совершенно другой (непохожей!) формулой (35.28). Как это может быть? А можно сказать и иначе. Формула (35.28) представляет собой аналитическое продолжение функции $R(x,s,\lambda)$, найденной с помощью итераций и представленной формулой (35.12).

Сейчас, когда стали понятны глубокие связи, существующие между интегральными уравнениями и системами линейных алгебраических уравнений, приведем без доказательства знаменитые теоремы Фредгольма, относящиеся к свойствам интегральных уравнений и их решений. Утверждения этих теорем аналогичны утверждениям, относящимся к линейным алгебраическим уравнениям.

Нам потребуется при этом несколько новых понятий.

**Определение 35.3.** *Те значения $\lambda$, для которых существует резольвента уравнения Фредгольма, будем называть правильными. А те значения $\lambda$, для которых резольвента не существует, будем называть фундаментальными или характеристическими. Величины, обратные к характеристическим, называются собственными числами уравнения.*

**ТЕОРЕМА 35.2**

Если значение $\lambda$ — правильное, то интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{35.30}$$

имеет одно и только одно решение при любой правой части $f(x)$. Это решение, как уже говорилось, определяется формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\,ds. \tag{35.31}$$

Из этой теоремы сразу же следует, что если $\lambda$ — правильное, то однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0 \tag{35.32}$$

имеет только тривиальное решение $\varphi = 0$.

Если же уравнение (35.32) имеет нетривиальное решение $\varphi_1(x)$ (это может иметь место только при условии, что $\lambda$ — характеристическое), то решением является и $c\varphi_1(x)$, где $c$ — произвольная постоянная. Аналогично, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два различных решения уравнения (35.32), то и сумма $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ является решением того же уравнения. Из сказанного сразу же следует, что если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (35.32), то и любая их линейная комбинация $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$, где $c_1$ — произвольные константы, также удовлетворяет этому же уравнению.

Итак, можно заключить, что если однородное интегральное уравнение (35.32) имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то оно имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Введем теперь важное понятие, которое позволит сформулировать следующую теорему Фредгольма.

**Определение 35.4.** *Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения называются собственными или фундаментальными функциями ядра $K(x,s)$ (иногда говорят не ядра, а уравнения), соответствующими данному характеристическому числу.*

**ТЕОРЕМА 35.3**
Каждому характеристическому числу соответствует по крайней мере одна собственная функция. Число линейно независимых собственных функций, соответствующих каждому характеристическому числу, конечно.

Введем еще два важных понятия.

**Определение 35.5.** *Ядро* $\overline{K(s,x)}$*, полученное из данного ядра* $K(x,s)$ *перестановкой аргументов и заменой на комплексно-сопряженное, называется сопряженным с данным ядром.*

**Определение 35.6.** *Уравнение*

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)\,ds = g(x), \tag{35.33}$$

*где* $g(x)$ *— произвольная непрерывная функция, а* $\overline{\lambda}$ *— комплексно-сопряженное значение параметра* $\lambda$*, называется сопряженным с уравнением* (35.30).

Легко видеть, что сопряженность есть свойство взаимное, т. е. уравнение (35.30) есть сопряженное для уравнения (35.33).

Если $K(x,s)$ — действительная функция, то сопряженное ядро получается путем перестановки аргументов.

**ТЕОРЕМА 35.4**
Если $\lambda_0$ есть характеристическое число ядра $K(x,s)$, то $\overline{\lambda_0}$ есть характеристическое число ядра $\overline{K(s,x)}$. Число линейно независимых собственных функций уравнения

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = 0$$

и сопряженного с ним уравнения

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)\,ds = 0$$

одно и то же.

Перед тем как сформулировать четвертую теорему Фредгольма, напомним упоминавшееся уже понятие ортогональности функций.

**Определение 35.7.** *Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными в промежутке $(a, b)$, если*

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx = 0.$$

*В случае действительных функций это условие упрощается и принимает вид*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

**ТЕОРЕМА 35.5**

Пусть $\lambda_0$ — характеристическое число ядра $K(x, s)$. Для того чтобы неоднородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{35.34}$$

имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f(x)$ была ортогональна ко всем собственным функциям сопряженного однородного уравнения

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(x)\,ds = 0. \tag{35.35}$$

Если $\lambda_0$ — характеристическое число и уравнение (35.34) разрешимо, то его общее решение имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots c_n\varphi_n(x), \tag{35.36}$$

где $\varphi_0(x)$ — какое-то решение уравнения (35.34), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — линейно независимые собственные функции уравнения (35.32), $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ — произвольные постоянные.

Из приведенных теорем следует так называемая альтернатива Фредгольма:

*Либо неоднородное уравнение* (35.30) *разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение* (35.32) *имеет нетривиальные решения.*

После прочтения этого параграфа мы рекомендуем еще раз обратиться к § 5.4 (решение систем линейных алгебраических уравнений) и самостоятельно провести аналогии между содержанием этих двух параграфов.

## § 35.3. ВАЖНЫЙ ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

**Определение 35.8.** *Будем называть ядро интегрального уравнения $K(x,s)$ вырожденным, если его можно представить в виде*

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(s), \tag{35.37}$$

*где функции $a_i(x)$, $b_i(s)$ — линейно независимы, а $n$ — конечно.*

Оказывается, что уравнения с вырожденным ядром можно решать довольно просто. Подставив выражение (35.37) в уравнение (35.30), получим

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds=f(x). \tag{35.38}$$

Введем обозначения:

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{35.39}$$

Функции $b_i(s)$ известны, функция $\varphi(s)$ неизвестна. Поэтому можно сказать, что $c_i$ — это неизвестные константы.

После подстановки выражения (35.39) в уравнение (35.38) приходим к такой форме уравнения:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ia_i(x). \tag{35.40}$$

Понятно, что решение $\varphi(x)$ будет найдено, если удастся найти величины $c_i$. Чтобы это сделать, подставим выражение (35.40) в (35.38):

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ia_i(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_ka_k(s)\right]ds=f(x) \tag{35.41}$$

После упрощений получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left\{c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_ka_k(s)\right]ds\right\}=0. \tag{35.42}$$

В силу линейной независимости функций $a_i(x)$ из равенства (35.42) следует выполнение условий

$$c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_ka_k(s)\right]ds=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{35.43}$$

Введем еще несколько обозначений:

$$\int_a^b b_i(s)f(s)\,ds=f_i,\qquad \int_a^b b_i(s)a_k(s)\,ds=a_{ik}.$$

Заметим, что и $f_i$, и $a_{ik}$ — известные числа.

Используя эти обозначения, условия (35.43) можно записать так:

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{35.44}$$

Итак, для нахождения величин $c_i$ имеется система из $n$ линейных алгебраических уравнений (35.44). Если мы решим эту систему, то, подставив найденные значения $c_i$ в выражение (35.40), найдем решение интегрального уравнения (35.38). Если же окажется, что система (35.44) не разрешима, то отсюда будет следовать и неразрешимость уравнения (35.38).

Для выяснения вопроса о разрешимости системы (35.44) обратимся к определителю этой системы $\mathcal{D}(\lambda)$:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{35.45}$$

Так как $\mathcal{D}(\lambda)$ представляет собой многочлен степени не выше $n$, то можно сказать точно, что существует не более $n$ значений $\lambda$, при которых $\mathcal{D}(\lambda) = 0$. При всех остальных значениях $\lambda$ уравнение (35.44), а вместе с ним и уравнение (35.38), имеет единственное решение.

● *ПРИМЕР 35.1.* Решить интегральное уравнение

$$u(x) = x + \int_0^{1/2} u(s)\, ds. \tag{35.46}$$

● Будем искать решение в виде

$$u(x) = x + b,$$

где $b$ — неизвестная пока константа.

Подставим это решение в уравнение (35.46):

$$x + b = x + \int_0^{1/2} (s + b)\, ds. \tag{35.47}$$

Отсюда $b = \frac{1}{4}$.

Окончательно решение уравнения (35.46) имеет вид

$$u(x) = x + \frac{1}{4}. \quad ●$$

● *ПРИМЕР 35.2.* Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x + s)\varphi(x)\, ds = f(x). \tag{35.48}$$

● Решение будем искать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(c_1 x + c_2). \tag{35.49}$$

Подставив выражение (35.49) в уравнение (35.48) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях уравнения, получим систему уравнений для определения неизвестных $c_1$ и $c_2$:

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)c_1 - \lambda c_2 &= f_1, \\ -\dfrac{\lambda}{3}c_1 + \left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)c_2 &= f_2, \end{cases} \tag{35.50}$$

где $f_1 = \int_0^1 f(s)\,ds$ и $f_2 = \int_0^1 sf(s)\,ds$. Определитель системы (35.50) равен $-\frac{\lambda^2}{12}-\lambda+1$. Он обращается в нуль при $\lambda_1 = -6+4\sqrt{3}$ и при $\lambda_2 = -6-4\sqrt{3}$.

Если $\lambda$ отлично от $\lambda_1$ и от $\lambda_2$, то единственное решение уравнения (35.48) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^1 \frac{6(\lambda-2)(x+s)-12\lambda xs-4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12}\,f(s)\,ds. \tag{35.51}$$

Эффективность описанного выше метода столь велика, что естественно возникает вопрос — а нельзя ли его как-нибудь приспособить и для решения уравнений с невырожденным ядром? Оказывается, можно. Если предположить, что ядро $K(x,s)$ интегрального уравнения (35.30) есть непрерывная функция, то в соответствии с теоремой Вейерштрасса его можно аппроксимировать с любой степенью точности полиномом $P_n(x,s)$. А к уравнению с ядром $P_n(x,s)$ этот метод уже применим. Возникающая в результате аппроксимации ошибка характеризуется следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 35.6 (без доказательства)**
Пусть уравнение (35.30) имеет решение при любой функции $f(x)$. Пусть $P_n(x,s)$ — полиномы, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, такие, что интегралы

$$\int\limits_a^b |K(x,s)-P_n(x,s)|\,ds$$

стремятся равномерно к нулю при $a \leqslant x \leqslant b$ и $n \to \infty$.

Тогда выполняются следующие утверждения:

1. При достаточно больших $n$ уравнения

$$\varphi_n(x) - \lambda\int\limits_a^b P_n(x,s)\varphi_n(s)\,ds = f(x)$$

разрешимы.

2. Функции $\varphi_n(x)$ равномерно при $a \leqslant x \leqslant b$ стремятся к решению уравнения (35.30) при $n \to \infty$.

## § 35.4. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

В главе 32 этого раздела мы уже рассмотрели задачу о колебаниях струны. Вернемся к ней снова и покажем, как интегральные уравнения могут быть использованы для ее решения.

Напомним выведенное ранее уравнение колебаний струны:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{35.52}$$

где $\rho(x)$ — плотность струны в точке с абсциссой $x$, $\tau$ — натяжение струны, $f(x,t)$ — распределенная внешняя сила (иными словами, будем считать, что в момент времени $t$ к участку струны $(x, x+dx)$ приложена сила, равная $f(x,t)\,dx$). Функция $y(x,t)$ должна не только удовлетворять уравнению (35.52), но и краевым условиям:

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \tag{35.53}$$

означающим, что струна закреплена на концах, и начальным условиям:

$$y(x,0) = g(x), \qquad y_t(x,0) = \varphi(x), \tag{35.54}$$

где $g(x)$ — отклонение струны от положения равновесия в каждой точке в начальный момент, $\varphi(x)$ — скорость в каждой точке струны в начальный момент (начальные скорости).

Будем интересоваться собственными колебаниями струны, в связи с чем рассмотрим некоторую вспомогательную задачу.

Найдем форму струны, закрепленной на концах и находящейся в равновесии под действием распределенной силы $f(x)$. Уравнение (35.52) в этом случае примет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{\tau}f(x) = 0. \tag{35.55}$$

Относительно силы $f(x)$ предположим, что она всюду равна нулю за исключением точки $x = s$, где она равна единице. Уравнение (35.55) приводится тогда к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \tag{35.56}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &y(x) = \alpha_1 x + \beta_1 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant x < s \\ &y(x) = \alpha_2 x + \beta_2 \qquad \text{при} \quad s < x \leqslant l, \end{aligned} \tag{35.57}$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ — произвольные постоянные.

Из выражения (35.57) следует, что в равновесии струна расположится вдоль двух прямолинейных отрезков. Будем искать коэффициенты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ так, чтобы удовлетворялись условия, определяемые физикой процесса.

Из условий (35.53) следует, что

$$\beta_1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 l + \beta_2 = 0.$$

Следовательно, можно записать

$$y(x) = \begin{cases} \alpha_1 x, & 0 \leqslant x < s, \\ \alpha_2 (x - l), & s < x \leqslant l. \end{cases} \tag{35.58}$$

Оставшиеся неизвестными $\alpha_1$ и $\alpha_2$ найдем из таких условий:

1. В точке $x = s$ струна непрерывна, т. е. должно выполняться равенство

$$\alpha_1 s = \alpha_2 (s - l). \tag{35.59}$$

2. Поскольку речь идет о равновесии, сумма вертикальных проекций натяжения на обоих участках $[0, s]$ и $[s, l]$ равна действующей силе (см. рис. 35.3), т. е.

$$\tau (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) = 1. \tag{35.60}$$

Поскольку углы $\gamma_1$ и $\gamma_2$ можно считать малыми, возможна замена условия (35.60) таким:

$$\tau (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) = 1. \tag{35.61}$$

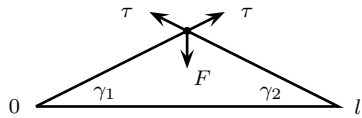



*Рис. 35.3.*

Из (35.58) следует, что $\operatorname{tg} \gamma_1 = \alpha_1$, а $\operatorname{tg} \gamma_2 = -\alpha_2$. Тогда (35.61) заменяется на условие

$$\tau(\alpha_1 - \alpha_2) = 1. \tag{35.62}$$

Из условий (35.59) и (35.62) находим коэффициенты $\alpha_1$ и $\alpha_2$. После подстановки их в выражение (35.58) получаем

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x(l - s)}{l\tau}, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{s(l - x)}{l\tau}, & s \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{35.63}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{x(l - s)}{l}, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ \dfrac{s(l - x)}{l}, & s \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{35.64}$$

С помощью этой функции легко выразить форму равновесия струны:

$$y(x) = \frac{1}{\tau} G(x, s). \tag{35.65}$$

Функция $G(x, s)$, носящая название функции влияния или функции Грина, имеет прозрачный физический смысл. Она характеризует смещение струны в точке $x$, если в

точке $s$ приложена единичная сила. А если приложить силу, равную не единице, а $F$? Тогда формула (35.65) преобразуется так:

$$y(x) = \frac{F}{\tau}\, G(x, s). \tag{35.66}$$

А что произойдет, если к струне приложена не одна сила, а силы $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$ в точках $s_1$, $s_2$, ..., $s_n$? Тогда форма равновесия струны определяется формулой

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{\tau}\, G(x, s_k). \tag{35.67}$$

Если устремить $n$ к бесконечности, то равенство (35.67) в пределе превратится в интегральное уравнение равновесия

$$y(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^l G(x, s) F(s)\, ds. \tag{35.68}$$

Чтобы от него перейти к уравнению колебаний струны, нужно, как известно из принципа Даламбера, на каждом участке $ds$ струны к распределенной силе $F(s)\, ds$, действующей на этом участке, добавить «силу инерции» этого участка — $\rho(s)\, ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

Таким образом, приходим к уравнению

$$y(x, t) = \frac{1}{\tau} \int_0^l G(x, s) F(s)\, ds - \frac{1}{\tau} \int_0^l \rho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2}\, ds. \tag{35.69}$$

Это интегро-дифференциальное уравнение колебаний эквивалентно исходному уравнению (35.52) вместе с краевыми условиями (35.53).

Чтобы получить уравнение свободных колебаний струны, нужно $F(s)$ тождественно приравнять нулю, т. е.

$$y(x, t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^l \rho(s) G(x, s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2}\, ds. \tag{35.70}$$

Будем искать периодические решения этого уравнения в виде

$$y(x, t) = u(x) \sin(\nu t + \varepsilon). \tag{35.71}$$

Подставляя выражение (35.71) в уравнение (35.70), приходим к интегральному уравнению для функции $u(x)$:

$$u(x) - \frac{\nu^2}{\tau} \int_0^l \rho(s) G(x, s) u(s)\, ds = 0. \tag{35.72}$$

Если струна однородная, т. е. $\rho(s) = \rho = \text{const}$, то уравнение упростится:

$$u(x) - \lambda \int_0^l G(x,s)u(s)\,ds = 0, \tag{35.72$'$}$$

где $\lambda = \frac{\nu^2\rho}{\tau}$.

Найдя характеристические числа $\lambda_n$ интегрального однородного уравнения (35.72$'$), мы тем самым определим и частоты собственных колебаний струны $\nu_n$, так как они связаны соотношениями

$$\nu_n = \sqrt{\frac{\tau\lambda_n}{\rho}}. \tag{35.73}$$

Соответствующие собственные функции определяют форму колеблющейся струны.

## Контрольные вопросы

1. Как реализуется метод итераций для интегрального уравнения Фредгольма второго рода?
2. При каких условиях метод итераций гарантирует существование единственного решения?
3. Как определяется резольвента интегрального уравнения?
4. Как представляется решение с помощью резольвенты?
5. Каким интегральным уравнениям удовлетворяет резольвента?
6. В чем заключается метод Фредгольма решения интегрального уравнения?
7. Сформулируйте теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений.
8. Как решаются интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром?

## Задачи

1. Решить уравнения с вырожденными ядрами:

$$a) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 \sin(x+t)y(t)\,dt + 1,$$

$$b) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y}y(t)\,dt + 1.$$

При каких $\lambda$ соответствующие однородные уравнения имеют нетривиальные решения?

2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $K(x,t)$ непрерывно на $[a,b]\times[a,b]$. Применяя метод итераций к интегральному уравнению на $[a,b]$

$$y(x)=\lambda\int\limits_a^x K(x,y)y(t)\,dt+f(x),$$

докажите, что оно имеет единственное решение при любом $\lambda$.

3. Решите интегральное уравнение

$$y(x)=\int\limits_0^\lambda (x-t)y(t)\,dt+t,$$

сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

4. Докажите теорему 35.6.

5. Пусть $k(x)$ и $f(x)$ — непрерывные $2\pi$-периодические функции. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=\int\limits_0^{2\pi} k(x-t)y(t)\,dt+f(t).$$

Указание: разложить входящие в уравнение функции в ряды Фурье.

# IV

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В повседневной жизни часто высказываются суждения, выражаемые словами «возможно», «вероятно», «очень вероятно» и т. д. Для оценки этих понятий можно использовать числовую характеристику степени возможности появления какого-либо события в строго определенных, многократно повторяющихся условиях, которая получила название математической вероятности. Это понятие лежит в основе целого класса закономерностей, носящих название статистических и отражающих особый вид связей между явлениями, характерными для массовых процессов.

Вероятность представляет собой базовое понятие теории вероятностей — математической науки, предметом исследований которой является изучение свойств вероятностей событий, удовлетворяющих некоторым простым соотношениям и позволяющих по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных некоторым образом с первыми.

Также как и другие разделы математики теория вероятностей началась с необходимости ответов на практические вопросы, например, как часто может встретиться то или иное событие в длинной серии испытаний. Впервые такие вопросы, как это не покажется странным, возникли у игроков в азартные игры.

Вероятно, первой книгой по теории вероятностей была «Книга об игре в кости» (“De Ludo Aleae”) Д. Кардано, написанная в Италии в середине XVI в., но опубликованная почти 100 лет спустя. Отголоски этого сохраняются и поныне, что видно из примеров и задач, приводимых во всех руководствах по теории вероятностей, в том числе и в нашем. Оказывается и такая малопочтенная область человеческой деятельности как азартные игры может привести пытливых людей к постановке вопросов, имеющих не только грубо утилитарное, но и научное значение.

И хотя сегодня теория вероятностей имеет такое же отношение к азартным играм, как геометрия к измерению площадей при земляных работах, некоторые ее понятия воспринимаются на уровне интуиции, если иллюстрируются примерами из таких игр, которые или известны большинству читающих, или становятся таковыми при минимальных разъяснениях.

Размышления о случайном известны с древнейших времен, однако численные оценки вероятностей упоминаются в письменных источниках, начиная с XVI в. Многие историки математики относят рождение теории вероятностей, как науки, к 1654 г., когда независимо друг от друга знаменитые французские математики Б. Паскаль и П. Ферма опубликовали решение задачи о разделе ставки, известной с раннего средневековья. Для простейшего случая двух игроков суть ее сводится к следующему. Два игрока

играют в игру, в которой их шансы победить одинаковы. Они договариваются, что тот, кто первым выиграет шесть партий, получит весь приз. Предположим, что в силу внешних обстоятельств игра прекращается до того, как один из игроков выиграл приз (например, один выиграл 5, а второй 3 партии). Как справедливо следует разделить приз? Известными математиками предлагались разные ответы: и $5:3$, и $2:1$ и т. д. Однако правильный ответ в этом конкретном случае гласит, что справедливым является раздел в отношении $7:1$. (Теперь, когда вы знаете ответ, попробуйте в качестве самостоятельного упражнения решить эту задачу.) Естественно, что Б. Паскаль и П. Ферма, а вслед за ними и голландец Х. Гюйгенс нашли решение в общем виде для разного числа игроков и разного числа выигранных ими партий.

Итак, исторически первые строгие определения вероятности были даны в работах Б. Паскаля, П. Ферма, голландца Х. Гюйгенса, швейцарца Я. Бернулли, а свое завершение первоначальное классическое определение вероятности получило в начале прошлого века в трудах выдающегося французского математика П. Лапласа.

Первые исследования по теории вероятностей в России относятся к середине XIX столетия. К этому же времени (1846 г.) относится и появление на русском языке книги В. Я. Буняковского «Основания математической теории вероятностей», терминология которой практически неизменной сохраняется в отечественной специальной литературе до настоящего времени. К концу XIX и началу XX века относится целый ряд выдающихся работ блестящих русских математиков Чебышева П. Л., Ляпунова А. М., Маркова А. А., после которых во всем мире теорию вероятностей стали называть «русской наукой».

Эти традиции были продолжены русскими советскими математиками, среди которых по праву первое место должно быть отдано А. Н. Колмогорову, предложившему аксиоматическое обоснование теории вероятностей. Именно его работа «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.) знаменует новый этап в развитии этой науки.

Сейчас трудно назвать область человеческого знания — от физики до теории стихосложения, — в которой в большей или меньшей мере не использовались бы методы теории вероятностей. Причем в ряде областей, таких, например, как популяционная генетика, теория вероятностей имеет самостоятельное значение в качестве математического аппарата, в других же служит для разработки методов обработки и анализа экспериментальных данных.

Чтобы придать теории вероятностей точный смысл, необходимо строго определить основные понятия, к рассмотрению которых мы и переходим.

# XXXVI

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## § 36.1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Пространство элементарных событий удобно представлять через результаты экспериментов, где под экспериментом понимается процедура, с помощью которой эти результаты наблюдаются. Во время эксперимента — реального или мыслимого — реализуется некоторый комплекс условий, создаваемый искусственно или осуществляющийся независимо от воли экспериментатора. Эксперимент задан, если заданы его условия и определены события, наступление или ненаступление которых следует наблюдать.

Итак, результаты опытов (экспериментов) называются событиями. События бывают составными и элементарными. Сразу оговоримся, что термин «элементарное» событие является таким же неопределенным, как термины «точка» или «прямая».

Сумма очков, например, шесть, выпавшая при бросании двух игральных костей, — составное событие, состоящее из пяти элементарных $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(5,1)$, $(4,2)$.

Эксперименты естественным образом делятся на два класса. В случае, если результаты экспериментов заранее предсказуемы, исходя из естественнонаучных законов, мы имеем дело с классом детерминированных экспериментов. Другой класс — случайных или вероятностных экспериментов — характеризуется тем, что при выполнении одних и тех же условий возможно наступление исключающих друг друга событий. И именно теоретический анализ таких экспериментов и составляет основное содержание теории вероятностей.

Например, известный французский естествоиспытатель Ж. Бюффон проделал 4040 раз эксперимент, связанный с подбрасыванием монеты, при этом 2048 раз выпал «герб». В аналогичных экспериментах, проделанных одним из основателей биометрии К. Пирсоном 12 и 24 тысячи раз(!), выпадение «герба» было зафиксировано соответственно 6019 и 12012 раз. Именно такие эксперименты при всей их кажущейся простоте и «приземленности» позволили сформулировать и проверить решения ряда задач, стимулировавших появление теории вероятностей.

Приведем еще несколько примеров возможных случайных экспериментов.

Растение, полученное при перекрестном опылении двух сортов, наследует по каждому признаку гены обоих родителей. Можно утверждать, что в каждом семени в зависимости от доминантности (проявлении во внешних признаках) или рецессивности (непроявлении в этих признаках) родительских сортов реализуется одна из трех комбинаций: доминантный–доминантный, доминантный–рецессивный, рецессивный–рецессивный. Заранее предсказать, как гены скомбинированы в конкретном семени, невозможно. Следовательно, такой опыт можно рассматривать как случайный эксперимент.

Участники международной встречи говорят на четырех языках. Причем есть такие, которые владеют только родным языком, но есть и такие, которые говорят на двух и трех иностранных языках. Если в лифте встречаются два участника этой встречи, то смогут ли они обойтись без переводчика, если надумают пообщаться друг с другом? Здесь мы также имеем дело со случайным экспериментом.

Итак, событие — результат эксперимента, его исход. Если исход только один, то мы имеем дело с элементарным событием. Рассмотрим множество всех событий $S$, наблюдаемых в случайном эксперименте.

**Определение 36.1.** *Достоверным называется такое событие, которое обязательно произойдет в эксперименте.*

*ПРИМЕР.* Выпадение не более 6 очков при бросании игральной кости.

**Определение 36.2.** *Невозможным называется такое событие, которое не может произойти в эксперименте.*

*ПРИМЕР.* Выпадение 7 очков при однократном бросании игральной кости.

**Определение 36.3.** *Случайным называется такое событие, которое может произойти в эксперименте, а может и не произойти.*

*ПРИМЕР.* Выпадение любого числа очков от 1 до 6 при бросании игральной кости.

**Определение 36.4.** *Противоположными ($A$ и $\bar{A}$) называются пара событий, для которых справедливо, что $A$ наступает, когда не наступает $\bar{A}$, и наоборот.*

*ПРИМЕР.* Если $A$ выпадение четного числа $\{2, 4, 6\}$ при бросании игральной кости, то $\bar{A}$ — выпадение нечетного числа $\{1, 3, 5\}$.

Некоторые события могут быть представлены в виде комбинаций элементарных событий. Наиболее простые комбинации, к которым может быть сведено большинство других, это сумма и произведение событий.

**Определение 36.5.** *События $A$ и $B$ называются несовместными, если появление в результате эксперимента события $A$ исключает появление события $B$.*

**Определение 36.6.** *События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно несовместными (или просто несовместными), если появление любого из них исключает появление любого из остальных.*

*ПРИМЕР.* Выпадение конкретного числа очков при бросании игральной кости исключает выпадение любого другого числа очков.

**Определение 36.7.** *Несколько событий образуют полную группу тогда и только тогда, когда их сумма есть достоверное событие.*

*ПРИМЕР.* При бросаниях игральной кости происходят три следующих события: $A = \{1, 2\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $C = \{4, 5, 6\}$, образующие полную группу событий, так как $A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — есть событие достоверное.

Другими словами, в результате эксперимента произойдет непременно хотя бы одно из этих событий.

Теперь рассмотрим проблему построения правил количественного измерения неопределенности появления случайных событий и их комбинаций.

Множество всех элементарных событий будем обозначать через $S$. Тогда каждой точке $A_k$ этого множества можно поставить в соответствие некоторое число, которое

называется вероятностью элементарного события $A_k$ и обозначается $p(A_k)$. Эти вероятности должны быть неотрицательными и удовлетворять условию

$$p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = 1, \tag{36.1}$$

где сумма распространяется на все точки пространства элементарных событий $S$.

Если теперь произошло событие $E$, заключающееся в том, что наступает одно из благоприятствующих $E$ элементарных событий: или $A_i$, или $A_j$ или ..., или $A_k$, то по определению

$$p(E) = p(A_i) + p(A_j) + \cdots + p(A_k). \tag{36.2}$$

В частном случае, когда

$$p(A_i) = p(A_j) = \cdots = p(A_k) = 1/n, \quad p(E) = k/n. \tag{36.3}$$

Это соотношение часто называют классическим определением вероятности. В соответствии с формулой (36.3) вероятность события $E$ равна отношению числа $k$ благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов. Это отношение заключено в пределах $0 \leqslant p(E) \leqslant 1$.

Следует обратить особое внимание на то, что формула (36.3) справедлива только в случае с равновозможными исходами. Пренебрежение этим требованием приводило к ошибкам при решении простых вероятностных задач даже таких знаменитых математиков, как Г. Лейбниц и Ж. Даламбер. Речь идет о задачах, связанных с бросанием правильной игральной кости и обычной монеты.

Если бросается правильная игральная кость, то любая из граней $1, 2, 3, 4, 5$ или $6$ имеет одинаковые шансы оказаться наверху. Если бросаются две кости, то сумма очков на двух гранях, оказавшихся наверху, заключена между $2$ и $12$. Суммы $9$ и $10$ из чисел от $1$ до $6$ можно получить двумя разными способами: $9 = 3 + 6 = 4 + 5$, а $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. Если бросаются три кости, то и сумма в $9$ очков, и сумма в $10$ очков получаются шестью разными способами. Почему же тогда, как показали многочисленные эксперименты, сумма $9$ появляется чаще, когда бросают две кости, а $10$, когда три?

Эти результаты можно объяснить следующим образом. В случае двух костей сумму, равную девяти, можно получить следующим образом: $9 = 6 + 3 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4$, т. е. девятка «выбрасывается» четырьмя различными способами. Десятка же при бросании двух костей получается только тремя способами: $10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$. Таким образом, шансы «выбросить» $9$ выше, чем $10$ ($4/36$ — для $9$, против $3/36$ — для $10$). Если продолжить рассмотрение этой задачи для случая с тремя костями, то результат получается противоположный: $9$ можно «выбросить» $25$ способами, а $10$ — $26$ способами.

Кажущийся парадокс связан с тем, что события, связанные с выпадением значений на гранях игральных костей для получения сумм в $9$ и $10$, не равновозможны.

Другой хрестоматийный пример — ошибка Ж. Даламбера, попавшая даже во французскую энциклопедию, также связанная с неучетом порядка выпадения разных сторон монеты при проведении экспериментов. Ответ Ж. Даламбера на вопрос о вероятности выпадения «герба» ($\Gamma$) хотя бы один раз при двух бросаниях монеты гласил — $2/3$. Вероятно, он считал, что при двух бросаниях монеты возможны три следующих исхода: $\Gamma-\Gamma$, $\Gamma-$«решетка» ($P$), $P-P$, и среди них только последний является неблагоприятным. На самом же деле для того чтобы исходы были равновозможными, необходимо учитывать, что помимо исхода $\Gamma-P$, возможен и исход $P-\Gamma$. С учетом этого искомая вероятность равна $3/4$.

(Заметим в скобках, что ошибаются и знаменитые математики. Это утешает простых смертных, но не избавляет от необходимости повышенного внимания к определениям при решении даже простых вероятностных задач.)

Другое, частотное определение вероятности может быть получено из следующих рассуждений. Пусть в случайном эксперименте реализуется событие $B$. Выполним эксперимент многократно ($N$ раз) и подсчитаем, сколько раз событие $B$ произошло. Обозначим это число через $n_B$. Отношение $n_B/N$ называют относительной частотой появления события $B$ в $N$ испытаниях. Было постулировано, что существует константа $p(B)$, около которой группируются относительные частоты $n_B/N$, вычисленные по различным сериям экспериментов. Эта величина и служит в качестве вероятности события $B$. И хотя доказать справедливость принятой гипотезы невозможно, практика показывает, что такой подход приемлем.

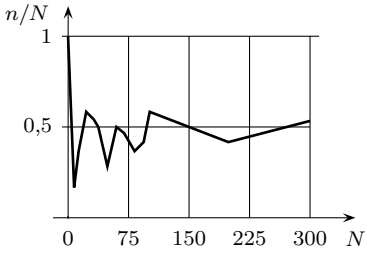


*Рис. 36.1.*

На рис. 36.1 приведены результаты имитационного моделирования бросания монеты и подсчета доли выпадения герба при $N$ бросаниях. Видно, что по мере увеличения $N$ вычисленные значения частоты выпадения герба стабилизируются вокруг значения 0,5, которое и может быть принято в качестве вероятности выпадения герба при случайном бросании правильной монеты.

Наконец, существует и третий аксиоматический подход к определению вероятностей, введенный А. Н. Колмогоровым. Следует сразу оговориться, что если классическое и частотное определения вероятности интуитивно понятны, то строгое аксиоматическое обоснование теории вероятностей требует более основательной математической подготовки, чем предполагается у читателя этой книги, поэтому ограничимся лишь словесными формулировками следующих основных аксиом.

1. Вероятность есть действительное число, заключенное между нулем и единицей
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$
2. Вероятность достоверного события, т. е. события, появляющегося при каждом эксперименте, равна 1.
3. Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий
$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

## § 36.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

В предыдущем параграфе при оценке вероятности рассматривались возможные эксперименты, в которых реализуется конечное множество событий. Однако существует большое количество задач, для которых такое предположение не является справедливым. Например, в некоторой точке $C$ телефонного кабеля $AB$ длиной $L$ произошел обрыв, а нас интересует вероятность того, что точка обрыва будет удалена от точки $A$ на расстояние не меньшее $l$, $l < L$. Или на плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны $a$ и $b$ см, $b > a$. На эту плоскость наудачу бросается круг диаметром $d$ см, $a < d < b$, и необходимо определить вероятность, что ни одна из линий не будет пересечена.

При решении таких и аналогичных задач предполагается, что множество реализуемых событий может быть представлено в виде некоторой геометрической фигуры, а конкретное

событие соответствует точке заданной части этой фигуры. Тогда вероятность такого события определяется как отношение эвклидовой длины (площади, объема) части фигуры, которой оно — это событие — принадлежит, к длине (площади, объему) всей фигуры.

Рассмотрим несколько примеров.

Студент и студентка договариваются о встрече на заданном промежутке времени $T$. Тот, кто приходит первым ожидает другого в течение времени $t < T$, а затем уходит. Какова вероятность встречи?

В качестве множества элементарных событий рассмотрим квадрат, состоящий из точек $(x, y)$, $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$, где $x$ и $y$ — время прихода его и ее.

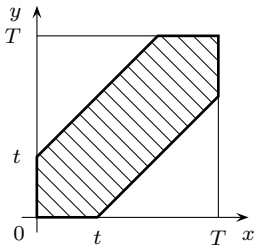


*Рис. 36.2.*

Благоприятствующие исходы образуют точки, для которых $|x - y| < t$ (рис. 36.2), т. е. точки квадрата между прямыми $y = x - t$, $y = x + t$. Площадь получающейся фигуры равна $T^2 - (T - t)^2$, а площадь всего квадрата — $T^2$. Отсюда искомая вероятность

$$p = 1 - \frac{(T - t)^2}{T^2}.$$

Другой пример — это знаменитая задача Ж. Бюффона.

На плоскости проведено семейство параллельных прямых. Расстояние между соседними прямыми равно $l$. На эту плоскость наудачу бросается отрезок длины $l$. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из прямых семейства?

На рис. 36.3а через $y$ обозначено расстояние от правого конца отрезка до ближайшей слева прямой. Через $\varphi$ обозначим угол между отрезком и лучом, параллельным прямым семейства, начало которого совпадает с правым концом отрезка. Очевидно, что $0 < y \leqslant l$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Для того чтобы отрезок пересекал хотя бы одну из прямых семейства, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $y = l$ или $y \leqslant l \sin \varphi$. Используя представление о брошенном наудачу отрезке, мы имеем в виду, что произвольная точка $(y, \varphi)$ наудачу брошена на прямоугольник (рис. 36.3б). На этом рисунке заштрихована фигура, координаты которой удовлетворяют неравенству $y \leqslant l \sin \varphi$. Площадь этой фигуры, деленная на площадь всего прямоугольника, и будет равна искомой вероятности. Площадь прямоугольника $S = l\pi$, а площадь заштрихованной фигуры

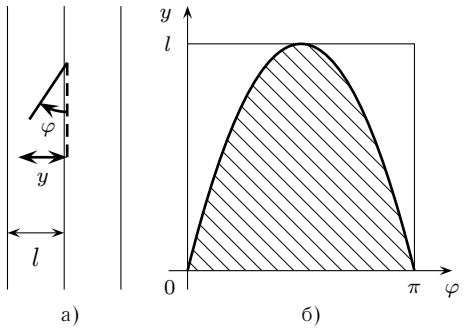


*Рис. 36.3.*

$$s = \int_0^\pi l \sin \varphi \, d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = 2l.$$

Отсюда искомая вероятность равна

$$p = \frac{s}{S} = \frac{2l}{l\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Использованный подход может быть естественно обобщен на произвольное расстояние между параллельными прямыми и произвольную длину бросаемого отрезка.

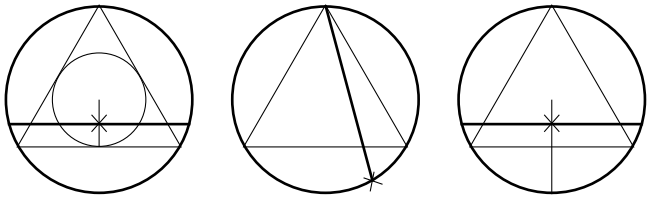



*Рис. 36.4.*

Кроме того, как следует из приведенной формулы, если воспользоваться имитационным моделированием, можно приближенно оценить числовое значение $\pi$. Для этого необходимо сымитировать условия задачи и, проведя несколько сот «бросаний», оценить значение $p$ (как отношение числа случаев, когда отрезок пересечет некоторую прямую, к общему числу экспериментов), а затем вычислить $\pi$.

Оперирование с геометрическими вероятностями требует, как, впрочем, и для всех вероятностных задач, строгого определения условий, определяющих искомую вероятность. В противном случае возможны такие ситуации как в известном парадоксе Ж. Бертрана, суть которого состоит в следующем.

Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Нужно найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность. Оказывается, что разные представления о том, что есть такое «случайный выбор», приводят к разным результатам. Рассмотрим три возможных подхода. Еще два предлагаются для самостоятельного решения.

В круге, ограниченном данной окружностью, случайно (равномерно) выбирается точка. Эта точка определяет единственную хорду, серединой которой она является. Эта хорда длиннее стороны нашего правильного треугольника тогда и только тогда, когда ее середина лежит внутри круга, вписанного в треугольник (рис. 36.4а). Радиус этого круга равен половине радиуса исходного круга, и, следовательно, площадь вписанного круга составляет $1/4$ площади исходного. Исходя из определения геометрической вероятности, вероятность того, что случайно выбранная точка лежит внутри вписанного круга, равна $1/4$. Это и есть ответ.

Возможен, однако, и другой подход. С учетом соображений симметрии можно считать, что одним концом хорды является произвольная фиксированная точка на окружности. Пусть этой точкой будет одна из вершин вписанного правильного треугольника (рис. 36.4б). Второй конец хорды выбирается на окружности случайно с одной и той же вероятностью для любой выбираемой точки. В этом случае хорда будет длиннее стороны правильного треугольника, если она пересекает этот треугольник. С другой стороны, вершины правильного вписанного треугольника делят окружность на три равные дуги, так что искомая вероятность будет равной $1/3$.

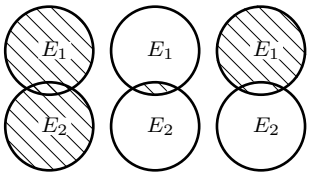
Еще один вариант выглядит следующим образом. Выберем, как и в предыдущем случае, точку случайным образом равномерно на радиусе окружности и возьмем хорду, которая перпендикулярна этому радиусу и проходит через выбранную точку (рис. 36.4в). Тогда случайная хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, если выбранная точка лежит на той половине радиуса, которая ближе к центру. Соображения симметрии показывают, что неважно, какой радиус выбран для построения. Во всех случаях искомая вероятность равна $1/2$.

В заключение еще раз обратим внимание, что неоднозначность понятия «равномерный случайный выбор» приводит к разным значениям искомой вероятности.

## § 36.3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Прежде чем приступить к формулировке и доказательству соответствующих теорем, проиллюстрируем графически несколько определений для множества элементарных событий $S$. Использование графиков позволит наглядно убедиться в справедливости формально получаемых результатов.

С любой парой событий $E_1$ и $E_2$ можно связать два новых события, определяемых условиями: «имеют место или $E_1$ или $E_2$» и «имеют место и $E_1$ и $E_2$». Эти события обозначают так, как это принято в теории множеств, $E_1 \cup E_2$ или $(E_1 + E_2)$ и $E_1 \cap E_2$ или $(E_1 \times \times E_2)$. Первое из этих событий содержит все точки, за исключением тех, которые не принадлежат ни $E_1$, ни $E_2$ (рис. 36.5а), а второе — все точки, общие событиям $E_1$ и $E_2$ (рис. 36.5б).




$E_1 \cup E_2$ $E_1 + E_2$ а) $E_1 \cap E_2$ $E_1 \cdot E_2$ б) $E_1 \setminus E_2$ $E_1 - E_2$ в)

*Рис. 36.5.*

Разность событий $E_1 - E_2$ (рис. 36.5в) — событие, которое наступает при одновременном наступлении $E_1$ и ненаступлении $E_2$, и может быть записано, как $E_1 \cdot \bar{E}_2$.

А теперь рассмотрим теперь несколько теорем, с помощью которых по вероятностям одних случайных событий можно вычислять вероятности других случайных событий.

**ТЕОРЕМА 36.1 (сложения вероятностей)**
Каковы бы ни были события $E_1$ и $E_2$ и каково бы ни было пространство элементарных событий $S$, вероятность объединения (суммы) равна

$$p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1E_2) \tag{36.4}$$

● Все множество элементарных событий, для которого определены события $E_1$ и $E_2$, может быть разделено на 4 подмножества точек в соответствии с тем, относятся ли эти точки к обоим событиям $E_1$ и $E_2$, только к одному из них, или ни к одному. Если число всех точек пространства элементарных событий обозначить через $n$, а через $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ — число точек в каждом из указанных подмножеств, т. е. $m_1$ будет соответствовать событию $(E_1E_2)$, $m_2$ — $(E_1\bar{E}_2)$, $m_3$ — $(\bar{E}_1E_2)$, $m_4$ — $(\bar{E}_1\bar{E}_2)$, то

$$p(E_1 + E_2) = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n}, \quad p(E_1) = \frac{m_1 + m_2}{n},$$

$$p(E_2) = \frac{m_1 + m_3}{n}, \quad p(E_1E_2) = \frac{m_1}{n}.$$

Если теперь эти вероятности подставить в (36.4), то мы получим тождество, что и доказывает сформулированную теорему. ●

Если события $E_1$ и $E_2$ несовместны, так что $p(E_1E_2) = 0$, то получается соотношение, принятое в качестве одной из аксиом при аксиоматическом обосновании теории вероятности, о котором уже говорилось выше, а именно, что вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т. е.

$$p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2). \tag{36.5}$$

В обеих приведенных формулировках теорема сложения вероятностей допускает естественное обобщение на случай $r$ событий. Для случая попарно несовместных событий это обобщение очевидно. Общая же формула для вероятности суммы $r$ произвольных случайных событий будет выведена ниже.

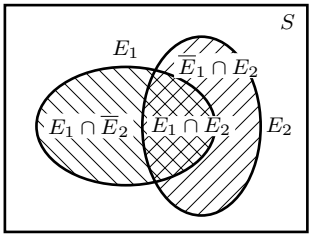



*Рис. 36.6.*

Приведенное выше доказательство теоремы сложения вероятностей является вполне строгим и им можно было бы ограничиться. Однако, в порядке исключения, мы хотим привести два других доказательства, чтобы продемонстрировать многообразие подходов, возможных даже при решении относительно несложных задач, связанных с доказательством теоретических положений.

Итак, пусть события $E_1$ и $E_2$ не являются несовместными, т. е. событие $E_1 \cdot E_2$ содержит элементарные события из множества $S$ (рис. 36.6).

Как видно из приведенного рисунка, области событий $E_1$ и $E_2$ можно разбить на части $E_1E_2$ и $E_1\bar{E}_2$, а также $E_2E_1$ и $E_2\bar{E}_1$, причем область $E_1E_2$ содержит общие для $E_1$ и $E_2$ элементарные события. Из этого следует, что событие $E_1 + E_2$ можно рассматривать как сумму трех попарно несовместных событий и вследствие этого

$$p(E_1 + E_2) = p(\bar{E}_1E_2) + p(E_1E_2) + p(E_1\bar{E}_2). \tag{36.6}$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$p(E_1 + E_2) = p(\bar{E}_1E_2) + p(E_1E_2) + p(E_1\bar{E}_2) + p(E_1E_2) - p(E_1E_2). \tag{36.7}$$

Так как события $E_2E_1$ и $E_2\bar{E}_1$, а также $E_1E_2$ и $E_1\bar{E}_2$ несовместны, то, используя равенство (36.5), имеем соответственно:

$$p(\bar{E}_1E_2) + p(E_1E_2) = p(\bar{E}_1E_2 + E_1E_2) = p(E_2) \tag{36.8}$$

и

$$p(E_1\bar{E}_2) + p(E_1E_2) = p(E_1\bar{E}_2 + E_1E_2) = p(E_1). \tag{36.9}$$

Подставляя два последних соотношения в (36.7), получаем выражение, фигурирующее в теореме сложения вероятностей:

$$p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1E_2).$$

Еще одно доказательство этой теоремы может быть получено с использованием приведенных в конце предыдущего параграфа основных аксиом теории вероятностей. Так как события $E_1E_2$ и $E_1\bar{E}_2$ несовместны (см. рис. 36.6), то из аксиомы 3 следует, что

$$p(E_1) = p(E_1E_2) + p(E_1\bar{E}_2). \tag{36.10}$$

В свою очередь, событие $E_1 + E_2$ может быть представлено, как объединение двух несовместных событий $E_2$ и $E_1\bar{E}_2$, откуда следует (с учетом (36.10) и аксиомы 3)

$$p(E_2 + E_1) = p(E_2 + E_1\bar{E}_2) = p(E_2) + p(E_1\bar{E}_2) = p(E_2) + p(E_1) - p(E_1E_2),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим гипотетический пример использования теоремы сложения вероятностей. Пусть мы имеем в хромосоме некоторый локус с двумя генами $A$ и $a$. Если организм несет два одинаковых гена в локусе, он называется гомозиготным. Если для организма вероятности быть чистым доминантом, т. е. нести пару $AA$, или чистым рецессивом,

т. е. нести в одном локусе пару генов $aa$, равны соответственно $1/2$ и $1/4$, то в силу несовместности у одного и того же организма комбинаций $AA$ и $aa$ в одном локусе вероятность того, что организм гомозиготен, равна $1/2 + 1/4 = 3/4$.

Другой пример. Два стрелка независимо друг от друга производят по выстрелу (события $E_1$ и $E_2$) по движущейся мишени. Из предыдущих наблюдений известно, что первый стрелок поражает мишень с вероятностью $0{,}7$, а второй — с вероятностью $0{,}6$. Какова вероятность обнаружить хотя бы одну пробоину в мишени? Так как события $E_1$ и $E_2$ независимы, то искомая вероятность

$$p(E_1 + E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1)p(E_2) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88.$$

## § 36.4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Предположим, что события $E_1$ и $E_2$ могут появиться при осуществлении некоторого эксперимента. Нас интересует вероятность события $E_1$, если известно, что осуществилось событие $E_2$. Будем обозначать эту вероятность как $p(E_1/E_2)$ (читается: «условная вероятность события $E_1$ при условии, что произошло событие $E_2$» или более коротко: «вероятность события $E_1$ при условии $E_2$»).

Если есть информация, что событие $E_2$ осуществилось, необходимо рассматривать не все пространство элементарных исходов, а только совокупность элементарных событий $A_i$, соответствующих $E_2$. Каждому элементарному событию $A_i$ поставим в соответствие некоторое неотрицательное число $p(A_i/E_2)$, назовем его условной вероятностью и потребуем, чтобы имело место равенство

$$p(A_1/E_2) + p(A_2/E_2) + \cdots = 1. \tag{36.11}$$

Суммирование должно осуществляться по всем элементарным событиям из $E_2$.

Если определить условную вероятность элементарного события $A_i$ при условии $E_2$ как

$$p(A_i/E_2) = \frac{p(A_i)}{p(E_2)}, \tag{36.12}$$

то несложно убедиться, что приведенное равенство (36.11) будет выполняться. В самом деле,

$$\sum_{A_i \in E_2} p(A_i/E_2) = \frac{1}{p(E_2)} \sum_{A_i \in E_2} p(A_i) = \frac{p(E_2)}{p(E_2)} = 1.$$

Итак, чтобы вычислить условную вероятность $p(E_1/E_2)$, надо воспользоваться формулой (36.12) и просуммировать условные вероятности всех тех элементарных событий $A_i$, которые принадлежат $E_1$ и $E_2$ одновременно. Имеем

$$p(E_1/E_2) = \sum_{A_i \in E_1 \cap E_2} p(A_i/E_2) = \frac{1}{p(E_2)} \sum_{A_i \in E_1 \cap E_2} p(A_i) = \frac{p(E_1E_2)}{p(E_2)}. \tag{36.13}$$

Из этой формулы естественным образом может быть получено несколько соотношений, полезных при решении задач.

Во-первых,

$$p(E_1E_2) = p(E_1/E_2)p(E_2) = p(E_2/E_1)p(E_1), \tag{36.14}$$

которое легко распространить на случай трех событий $E_1$, $E_2$, $E_3$:

$$p(E_1E_2E_3) = p(E_1/E_2E_3)p(E_2/E_3)p(E_3), \tag{36.15}$$

если выполняются условия: $p(E_2E_3) > 0$, $p(E_3) > 0$.

Обобщение на $n$ событий будет приведено ниже (формула (36.19)).

Другое соотношение

$$p(E_1/\bar{E}_2) = \frac{p(E_1)}{p(\bar{E}_2)} = \frac{p(E_1)}{1 - p(E_2)}. \tag{36.16}$$

То, что это соотношение имеет место, доказывается прямым методом подсчета вероятностей, который использовался при доказательстве теоремы сложения вероятностей, и предлагается в качестве упражнения. Для доказательства необходимо потребовать, чтобы события $E_1$ и $E_2$ были несовместны в рассматриваемом пространстве элементарных событий, а $\bar{E}_2$ не являлось невозможным событием.

Рассмотрим пример на использование понятия условной вероятности. На каждой из 6 карточек написано по одной букве, из которых складывается слово «карета». Карточки перемешиваются и затем выкладываются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

Так как букв 6, то вероятность выложить первой букву «р» (событие $E_1$) равна $1/6$. После этого у нас остается пять карточек, и с учетом того, что букв «а» две, $p(E_2/E_1) = 2/5$. Исходя из таких же соображений, вероятности остальных букв будут соответственно $1/4$, $1/3$, $1/2$, 1, а искомая вероятность — $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{360}$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть есть потомок двух гибридов и известно, что он несет доминантный признак. Событие $E_1$ состоит в том, что потомок — гибрид, событие $E_2$ — в том, что он рецессив. Так как нам известно, что потомок несет доминантный признак, то события $E_1$ и $E_2$ несовместны. Предположим, что интерес представляет вероятность того, что потомок — гибрид, если он несет доминантный признак. Известно, что при скрещивании двух гибридов вероятность того, что потомок будет гибридом или чистым доминантом, равна соответственно $1/2$ и $1/4$. Вероятность того, что потомок будет чистым рецессивом, равна $1/4$. Следовательно,

$$p(E_1/\bar{E}_2) = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Если за событие $E_3$ считать, что потомок чистый доминант, то

$$p(E_3\bar{E}_2) = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Используя введенное понятие условной вероятности, можно сформулировать вторую основную теорему теории вероятностей — теорему умножения.

**ТЕОРЕМА 36.2**

Каковы бы ни были события $E_1$ и $E_2$, не являющиеся невозможными, и каково бы ни было пространство элементарных исходов $S$, вероятность произведения $E_1E_2$ равна

$$p(E_1E_2) = p(E_1)p(E_2/E_1) = p(E_2)p(E_1/E_2) \tag{36.17}$$

● Все множество элементарных событий, для которого определены события $E_1$ и $E_2$, как и в случае теоремы о сложении вероятностей, может быть разделено на 4 группы точек в соответствии с тем, относятся ли эти точки к обоим событиям $E_1$ и $E_2$, только к одному из них, или ни к одному. Если все множество точек пространства элементарных событий обозначить через $n$, а через $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ — число точек

в каждой из указанных выше групп, т. е. $m_1$ будет соответствовать событию $(E_1E_2)$, $m_2$ — $(E_1\bar{E}_2)$, $m_3$ — $(\bar{E}_1E_2)$, $m_4$ — $(\bar{E}_1\bar{E}_2)$, то

$$\begin{cases} p(E_1E_2) = \frac{m_1}{n} \\ p(E_1) = \frac{m_1+m_2}{n} \\ p(E_2/E_1) = \frac{m_1}{m_1+m_2} \end{cases} \tag{36.18}$$

(Для вычисления вероятности $p(E_2/E_1)$ мы воспользовались формулой (36.13)).

Если теперь подставить (36.18) в (36.17), то получим тождество, что и доказывает теорему. ●

Эта теорема легко обобщается на случай оценки вероятности произведения $n$ событий. Имеет место формула

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = p(E_1)p(E_2/E_1)p(E_3/E_2E_1)\ldots p\left(E_n/\prod_{i=1}^{n-1} E_i\right). \tag{36.19}$$

Выше, рассматривая представления об условных вероятностях, мы привели соотношение (36.16) и предложили в качестве упражнения доказать его справедливость путем прямых вероятностных расчетов. Теперь, с использованием теоремы умножения, можно предложить совсем другой, более тонкий подход.

В самом деле, $E_2+\bar{E}_2$ — достоверное событие; отсюда вытекает, что $E_1$ эквивалентно произведению $E_1(E_2+\bar{E}_2) = E_1E_2 + E_1\bar{E}_2$. Так как $E_1$ и $E_2$ несовместны, то $E_1E_2$ — невозможное событие и, следовательно, $E_1$ эквивалентно $E_1\bar{E}_2$, а значит,

$$p(E_1) = p(E_1\bar{E}_2).$$

Применяя теорему умножения к вероятности в правой части этого равенства, получим

$$p(E_1) = p(\bar{E}_2E_1) = p(\bar{E}_2)p(E_1/\bar{E}_2), \tag{36.20}$$

откуда и следует (36.16).

При использовании теорем сложения и умножения вероятностей очень важно обращать особое внимание на множество элементарных событий, к которым относятся упоминаемые в этих теоремах вероятности. Иногда об этом забывают и в результате возникают так называемые «парадоксы». Приведем искусственный пример.

Пусть очень строгий экзаменатор составил билеты с двумя вопросами так, что вероятность не ответить на первый ($B_1$) из них равна $p_1 = 0{,}6$, а не ответить на второй ($B_2$) равна $p_2 = 0{,}7$. Необходимо оценить вероятность $p_0$ того, что «неуд» будет получен за неудовлетворительный ответ на $B_1$ или $B_2$.

На первый взгляд событие «не ответить на $B_1$ или на $B_2$» есть сумма двух событий: «не ответить на $B_1$» и «не ответить на $B_2$». После того как студент не ответил на один вопрос, экзамен прекращается, и, следовательно, оба этих события несовместны. Тогда на основании теоремы сложения вероятностей получается парадоксальный результат:

$$p_0 = p_1 + p_2 = 0{,}6 + 0{,}7 = 1{,}3!$$

(Студент, изучающий теорию вероятностей, в этом случае на экзамен не пойдет, поскольку неудовлетворительный итог более чем достоверен!)

На самом деле все обстоит не так плохо, и если задуматься над пространствами элементарных событий, то этот «парадокс» сразу исчезает. В самом деле, $p_1$ и $p_2$ относятся к разным пространствам элементарных событий, которые мы обозначим через $S_1$ и $S_2$.

Пространство $S_1$ может слагаться из попыток, когда студент достаточно хорошо подготовлен только по одной части курса, находящей свое отражение в вопросах $B_1$, и ответ на $B_1$ является его единственной целью. К этому же пространству $S_1$ относятся попытки сначала ответить на $B_1$, а потом уже на $B_2$ (а вдруг повезет, чем черт не шутит!). Аналогично пространство элементарных событий $S_2$ может слагаться из попыток ответить только на $B_2$, если этот раздел усвоен лучше, или из ответов на $B_2$, а уже затем на $B_1$.

Отсюда видно, что пространства элементарных исходов $S_1$ и $S_2$ различаются между собой и использовать теорему сложения к вероятностям $p_1$ и $p_2$ нельзя. Более того, в той постановке задачи, которая была приведена выше, пространство элементарных исходов $S_0$ для $p_0$ не определено однозначно. Можно предположить, что $p_0$ относится к $S_0'$, совпадающему с $S_1$ и состоящему в том, что студент сначала отвечает на $B_1$, и если ответ удовлетворителен, то переходит к $B_2$. При таком предположении $p_2$ — условная вероятность неудовлетворительного ответа на второй вопрос, если известно, что на первый вопрос студент ответил. Тогда

$$p_0' = 1 - p(\text{ответ на оба вопроса } /S_0') = 1 - (1-p_1)(1-p_2) = \\ = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}88.$$

Но можно себе представить, что $p_0$ относится к другому множеству элементарных событий $S_0''$, когда студент заранее решает, что будет отвечать только на один вопрос, а на какой именно, определяет подбрасыванием монеты: выпадает «герб» — отвечает на первый, выпадает «решетка» — на второй. В этом случае нетрудно видеть, что

$$p_0'' = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{2}0{,}6 + \frac{1}{2}0{,}7 = 0{,}65.$$

Этот пример, так же как и пример, приведенный в параграфе о геометрических вероятностях, показывает, что правильное и строгое определение пространства элементарных событий является принципиальным моментом при расчете вероятностей сложных событий.

## § 36.5. ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Прежде чем привести формальный вывод формулы полной вероятности, рассмотрим две задачи, ставшие почти «классическими».

Слепой старец без поводыря вышел из пункта $A$ в пункт $B$ (рис. 36.7).

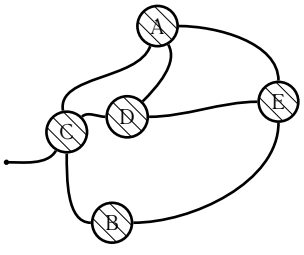



*Рис. 36.7.*

Какова вероятность $p(B)$ того, что он достигнет конечного пункта? Так как предполагается, что старец случайным образом выходит на ту или иную дорогу, то вероятность попасть в каждый из промежуточных пунктов $C$, $D$, $E$ одинакова и равна $1/3$. Однако из этих пунктов он попадет в конечный пункт $B$ уже с разными вероятностями. Для пункта $C$ эта вероятность — $1/3$, так как из него ведут три дороги, для $D$ — вероятность равна $1/2$, для $E$ — 1. Таким образом, общая вероятность для слепого старца попасть из пункта $A$ в пункт $B$ (именно эта вероятность и есть полная вероятность) равна

$$p(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{18}.$$

Другая задача. В группе студентов-старшекурсников 4 отличника, 13 хорошо успевающих и 8 слабых студентов. Результаты предшествующих экзаменационных сессий показали, что отличники на экзаменах получают только отличные оценки (потому они и отличники); «хорошисты», как правило, в девяти случаях из десяти получают отличные или хорошие оценки; наконец, слабые студенты в одном случае из пяти получают хорошие оценки, а в оставшихся четырех с равной вероятностью получают удовлетворительные и неудовлетворительные оценки.

Для сдачи экзамена наугад выбирается один студент. Найти вероятность события $A$, что студент получит хорошую или отличную оценку.

Итак, если студент — отличник, то с вероятностью единица он получает отличную или хорошую оценку, а вероятность, что именно такой студент будет выбран, равна $4/25$. Если студент успевает хорошо, то с вероятностью $9/10$ он получает хорошую или отличную оценку, а вероятность, что он будет выбран наугад, составляет $13/25$. Наконец, выбираемый с вероятностью $8/25$ слабый студент получает хорошую оценку с вероятностью $1/5$. Так как выбор экзаменующегося студента осуществляется случайно и независимо, то

$$p(A) = \frac{4}{25} \cdot 1 + \frac{13}{25} \cdot \frac{9}{10} + \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{173}{250} \approx 0{,}69.$$

Теперь, после получения интуитивно понятных результатов, формальным образом введем понятие полной вероятности.

Пусть мы имеем полную группу попарно несовместных событий $E_1$, $E_2$, .... Это означает, что $\sum_{i=1}^{n} p(E_i) = 1$, $p(E_i) > 0$ и $p(E_iE_j) = 0$. Если теперь событие $A$ реализуется вместе с одним из событий $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$, то

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cdot E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A/E_i)p(E_i). \tag{36.21}$$

Это и есть формула полной вероятности, используемая при решении широкого круга задач.

Те же условия, что и для формулы полной вероятности, были использованы для формулирования так называемой теоремы гипотез или формулы Байеса. (Сразу отметим, что сам Томас Байес — английский математик XVIII века — формулу эту не выводил. Она названа так в знак признания его работ по теории вероятностей.)

Итак, до проведения экспериментов или наблюдений есть какие-то гипотезы, выражаемые численно в виде вероятностей некоторых событий. После проведения экспериментов, как правило, приходится проводить переоценку первоначальных гипотез и для этого необходимо иметь соответствующую формулу, чтобы указанную процедуру проводить строго однозначно.

Пусть попарно несовместные события $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$ образуют полную группу событий, т. е.

$$p(E_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$p(E_iE_j) = 0, \quad i \neq j;$$
$$p(E_1) + p(E_2) + \cdots + p(E_n) = 1.$$

Рассмотрим некоторое событие $A$ в том же пространстве элементарных событий, что и $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$.

**Определение 36.8.** *Вероятность $p(E_i)$ осуществления события (гипотезы) $E_i$, вычисленная безотносительно к событию $A$, называется априорной вероятностью.*

**Определение 36.9.** *Условная вероятность $p(E_i/A)$ выполнения события (гипотезы) $E_i$, вычисленная в предположении, что событие $A$ осуществилось, называется апостериорной вероятностью.*

Так как события $E_i$, $E_j$ попарно несовместны и образуют полную группу, то

$$p(A) = p\{(A \cdot E_1) + (A \cdot E_2) + \cdots + (A \cdot E_n)\} = p(A \cdot E_1) + \cdots + p(A \cdot E_n).$$

Используя результат теоремы об умножении вероятностей (формула (36.17)), имеем

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A/E_i)p(E_i). \tag{36.22}$$

Вычислим теперь условную вероятность события $E_i$, если известно, что событие $A$ реализовалось. По формуле условной вероятности (36.13) имеем

$$p(E_i/A) = \frac{p(A/E_i)p(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A/E_i)p(E_i)}. \tag{36.23}$$

Это и есть формула Байеса, которую иногда называют формулой переоценки гипотез в тех случаях, когда события $E_i$ рассматривают как гипотезы.

Рассмотрим два примера использования этой формулы.

Пусть при сдаче экзамена положительная оценка ставится с вероятностью $0{,}95$, если студент подготовлен достаточно хорошо, и с вероятностью $0{,}05$, если он не подготовлен. Другими словами, событие $E_1$ заключается в том, что студент подготовлен к экзамену удовлетворительно, $E_2$ — «подготовлен неудовлетворительно», $A$ — «положительная оценка», т. е. $p(E_1) = 0{,}95$ и $p(E_2) = 0{,}05$. Таким образом, в $5\%$ случаев неподготовленный студент будет получать положительную отметку и в $5\%$ случаев подготовленный студент будет получать неудовлетворительную оценку. Пусть теперь имеется множество студентов, среди которых доля студентов хорошо подготовленных составляет $0{,}8$, а доля неподготовленных — $0{,}2$. Возникает вопрос, как на основании априорной информации определить вероятность того, что получивший хорошую оценку студент действительно был хорошо подготовлен.

По формуле Байеса имеем

$$p(E_1/A) = \frac{p(A/E_1)p(E_1)}{p(A/E_1)p(E_1) + p(A/E_2)p(E_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}8}{0{,}95 \cdot 0{,}8 + 0{,}05 \cdot 0{,}2} = 0{,}987.$$

Таким образом, если пользоваться априорными условными вероятностями, то можно ожидать, что неправильная оценка знаний на экзамене будет почти исключена: в длинной серии экзаменов не более двух человек из ста, будучи плохо подготовленными, смогут получить хорошую оценку.

Условия следующей задачи имеют отношения к проблеме медицинской диагностики, хотя точно такой же подход может быть использован для решения аналогичных диагностических задач в любой области науки и техники.

Итак, предполагается, что диагностический тест ракового заболевания дает положительную реакцию с вероятностью $0{,}95$, если у обследуемого действительно есть рак, и с вероятностью $0{,}05$, если у обследуемого этого заболевания нет. Запишем это более формально: событие $E_1$ — «обследуемый болен раком», событие $E_2$ — «обследуемый не болен раком», $A$ — «положительная реакция», $p(A/E_1) = 0{,}95$ и $p(A/E_2) = 0{,}05$. Следовательно, при использовании этого теста не более $5\%$ действительно больных

будут отнесены к здоровым и не более 5% здоровых ошибочно будут причислены к больным. Пусть теперь с использованием этого теста обследуется группа, в которой каждый индивидуум имеет вероятность быть больным, равную 0,001, т. е. $p(E_1) = 0{,}001$ и $p(E_2) = 0{,}999$. Зададимся вопросом, какова вероятность того, что индивидуум из этой группы, имеющий положительную реакцию на тест, в действительности болен раком?

Используя формулу Байеса, имеем

$$p(E_1/A) = \frac{p(A/E_1)p(E_1)}{p(A/E_1)p(E_1) + p(A/E_2)p(E_2)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}001}{0{,}95 \cdot 0{,}001 + 0{,}05 \cdot 0{,}999} \approx 0{,}0187.$$

Таким образом, из обследуемых в этой группе и имеющих положительную реакцию на тест меньше 2% в действительности больны раком.

Попытки использовать вероятностные методы для моделирования ситуаций, возникающих на практике, наталкиваются на специфические трудности. Во-первых, ни одна реальная задача не связана с таким математическим понятием как множество элементарных событий, которое определяет результат решения. Поэтому прежде чем приступить к решению задачи вероятностными методами, необходимо сформулировать ее в соответствующих понятиях. Собственно к этому и сводится построение математической модели реальной ситуации. Существует много способов построения моделей, и их адекватность может быть проверена или эмпирическим путем, или, что бывает значительно чаще, базироваться на интуитивном представлении о соответствии модели реальному механизму изучаемого явления. При этом следует отдавать себе отчет в том, что полученное решение соответствует использованной нами модели, но совсем не обязательно будет соответствовать реальной ситуации, для которой эта модель построена. И только в том случае, если формальные или интуитивные представления, положенные в основу модели, адекватны исследуемому процессу или явлению, следует ожидать удовлетворительного совпадения «выходов» модели и «выходов» реальной системы.

Вторая трудность при решении практически важных задач состоит в том, что реальные проблемы чрезвычайно сложны и попытки их адекватного отражения в математической модели приводят зачастую к непреодолимым математическим сложностям, так что приходится пересматривать модель, жертвуя ее адекватностью ради возможности получить решение за приемлемое время и с приемлемыми затратами сил и средств.

Эти соображения следует иметь в виду, оценивая приводимые в этом и других разделах задачи, имеющие отношение к реальности.

В заключение этой главы рассмотрим пример, связанный с вероятностными расчетами для ситуации, которая могла бы возникнуть реально.

Пусть мы проверяем новый измерительный комплекс для проведения физико-химического анализа проб почв, состоящий из двух узлов: измерительного (первого) и регистрирующего (второго). Вероятности безотказной работы за время $t$ (надежность работы) известны из паспортных данных фирмы-изготовителя и равны соответственно $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}9$. Узлы отказывают независимо друг от друга. По истечении времени $t$ выяснилось, что прибор неисправен. Возможны три предположения (гипотезы):

$$H_1 = \{\text{неисправен только первый узел}\};$$
$$H_2 = \{\text{неисправен только второй узел}\};$$
$$H_3 = \{\text{неисправны оба узла}\}.$$

Вообще-то, до начала испытаний существовала еще одна гипотеза $H_0 = \{\text{исправны оба узла}\}$, но так как прибор все-таки отказал, то эта гипотеза исключается.

Для локализации неисправности прибор тестируется с помощью трех независимых тестов: $T_1$, $T_2$, $T_3$, в результате чего оказывается, что первые два теста дали положительный результат, а третий — отрицательный, т. е. реализовалось событие $B = \{++-\}$, где плюсом обозначены положительные результаты тестов, а минусом — отрицательный результат. Известны также условные вероятности положительного результата тестов $T_1$, $T_2$, $T_3$ при гипотезах $H_1$, $H_2$, $H_3$. Эти вероятности обозначаются как $p_{ij}$, где $i$ — номер теста, $j$ — номер гипотезы. Имеем

$$\begin{array}{lll} p_{11} = 0{,}4; & p_{12} = 0{,}6; & p_{13} = 0{,}9; \\ p_{21} = 0{,}5; & p_{22} = 0{,}6; & p_{23} = 0{,}6; \\ p_{31} = 0{,}7; & p_{32} = 0{,}6; & p_{33} = 0{,}3. \end{array}$$

Необходимо определить наиболее вероятное из возможных состояний прибора.

Прежде всего необходимо оценить априорные вероятности каждой из трех гипотез, используя известные вероятности безотказной работы каждого из узлов. Обозначая через $q_i = 1 - p_i$, $i = 1,\ 2$ вероятность неисправности $i$-го узла, имеем

$$\begin{array}{l} p(H_1) = q_1 \cdot p_1 = (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}9 = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18; \\ p(H_2) = p_1 \cdot q_2 = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08; \\ p(H_3) = q_1 \cdot q_2 = (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02. \end{array}$$

Эти значения получены с учетом условия, что узлы прибора отказывают независимо.

Так как, в конечном счете, прибор отказал, то будем считать, что реализовалось некоторое событие $A = H_1 + H_2 + H_3$, вероятность которого

$$p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(H_i) = 0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}02 = 0{,}28.$$

Тогда в соответствии с формулой Байеса

$$p(H_i/A) = p(H_i) / \sum_{i=1}^{k} p(H_i), \quad i = 1, 2, \ldots k$$

апостериорные вероятности гипотез будут равны соответственно

$$\begin{array}{l} p(H_1/A) = 0{,}18/0{,}28 \approx 0{,}643; \\ p(H_2/A) = 0{,}08/0{,}28 \approx 0{,}286; \\ p(H_3/A) = 0{,}02/0{,}28 \approx 0{,}071. \end{array}$$

На следующем этапе для учета результатов тестирования эти вероятности могут использоваться уже как априорные, и с их использованием необходимо вычислить условные вероятности события $B$ при тех же гипотезах. Имеем

$$\begin{array}{l} p(B/H_1) = p_{11} \cdot p_{12} \cdot q_{13} = p_{11} \cdot p_{12} \cdot (1 - p_{13}) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}024; \\ p(B/H_2) = p_{21} \cdot p_{22} \cdot q_{23} = p_{21} \cdot p_{22} \cdot (1 - p_{23}) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}120; \\ p(B/H_3) = p_{31} \cdot p_{32} \cdot q_{33} = p_{31} \cdot p_{32} \cdot (1 - p_{33}) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}294. \end{array}$$

И в этом случае при расчетах использовано условие о том, что результаты тестирования независимы.

Вторично применяя формулу Байеса, получим

$$p(H_1/A \cdot B) = \frac{0{,}643 \cdot 0{,}024}{0{,}643 \cdot 0{,}024 + 0{,}286 \cdot 0{,}120 + 0{,}071 \cdot 0{,}294} \approx 0{,}298;$$

$$p(H_2/A \cdot B) = \frac{0{,}286 \cdot 0{,}080}{0{,}643 \cdot 0{,}024 + 0{,}286 \cdot 0{,}120 + 0{,}071 \cdot 0{,}294} \approx 0{,}662;$$

$$p(H_3/A\cdot B)=\frac{0{,}071\cdot 0{,}294}{0{,}643\cdot 0{,}024+0{,}286\cdot 0{,}120+0{,}071\cdot 0{,}294}\approx 0{,}040.$$

Из этих результатов следует, что наиболее вероятное состояние прибора соответствует второй гипотезе — «отказал только второй узел». В этом случае целесообразно начинать ремонтные работы именно со второго узла, так как вероятность выхода из строя именно этого узла более чем в два раза превышает вероятность выхода из строя первого.

## Вопросы для самопроверки

1. Правильная игральная кость при бросании с равными шансами падает на любую из граней. В случае бросания двух и трех костей сумма выпавших чисел заключена между 2 и 12 и 3 и 18 соответственно. Из чисел $1, 2, \ldots, 6$, выпадающих на каждой грани при бросании двух костей, можно получить сумму в 9 и 10 двумя разными способами: $9=3+6=4+5$ и $10=4+6=5+5$. В задаче с тремя костями и 9, и 10 получаются шестью способами. Объясните, почему при бросании двух костей сумма 9 появляется чаще, чем 10, а при бросании трех — наоборот.
2. С какой вероятностью монета, брошенная дважды, по крайней мере один раз выпадет гербом? Знаменитый французский математик Даламбер дал ответ $2/3$. Что получается у вас?
3. Докажите, что события $A, B, \overline{A+B}$ образуют полную группу.
4. События $A$, $B$ и $C$ означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События $A_k$ и $B_s$ означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты $k$, а из второго $s$ томов. Что означают события: а) $A+B+C$; б) $ABC$; в) $A_1+B_3$; г) $A_2B_2$; д) $(A_1B_3+B_1A_3)C$?
5. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие $A$ — выбранное число делится на 5; событие $B$ — данное число оканчивается нулем. Что означает событие $A-B$?
6. Найдите случайное событие $X$, когда $\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B$.
7. Каким неравенством связаны вероятности объединения и пересечения двух произвольных случайных событий?
8. Если все априорные вероятности гипотез одинаковы, то остаются ли их апостериорные вероятности, вычисляемые по формуле Байеса, также всегда одинаковыми?
9. Какими теоремами и формулами задаются основные правила действия в вероятностном пространстве?
10. Сформулируйте основные аксиомы теории вероятностей.
11. Докажите справедливость соотношения (36.16).
12. Сформулируйте и докажите теорему о полной вероятности. Выведите из нее теорему Байеса.
13. Дайте объяснение понятию условной вероятности.
14. Дайте определение статистически независимым событиям.
15. Пусть событие $E$ — «студент в очках», а событие $F$ — «студент-математик». Укажите содержание событий:

$$\bar{E}, \bar{F}, \bar{E}\bar{F}, (E+F), \overline{(E+F)}, (E-F), F/E, E/\bar{F}, (E+F)/F, \overline{(E+F)}/E.$$

16. Докажите, что

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

## Упражнения и задачи

1. На поверхность стола, разграфленного на квадраты со стороной 3,2 см, бросается монета диаметром 2,4 см. Если монета попадает полностью внутрь квадрата, то бросающий получает награду, в противном случае он теряет свою монету. Если монета упала на стол, то каковы шансы выиграть? (Толщиной линий пренебрегаем.)
2. Великий английский физик Исаак Ньютон однажды решил следующую предложенную ему задачу. Какое из событий более вероятно:
   а) появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 игральных костей;
   б) появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей;
   в) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей.
   Найдите, вслед за Ньютоном, требуемые вероятности. Как будут изменяться вероятности выпадения 4, 5, и т. д. шестерок, если число подбрасываемых костей будет равно соответственно 24, 30 и т. д.?
3. Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда длиннее стороны правильного вписанного в эту окружность треугольника, если а) хорда проводится в произвольном направлении через случайно выбранную в заданном круге точку, а угол, определяющий направление, равномерно распределен по всей области изменений угла и не зависит от выбора точки; б) хорда получается соединением двух случайных точек на окружности.
4. Юноша и девушка договорились встретиться в условленном месте между 8 часами и 8 часами 20 минутами вечера. Тот, кто приходит первым, ожидает второго 10 мин, после чего уходит. Определить вероятность того, что свидание состоится, если приход каждого из них независим и равновозможен в любой момент указанного промежутка времени.
5. Вероятность получения желаемого результата в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты проводятся последовательно до получения желаемого результата. Определить вероятность того, что придется проводить пятый опыт.
6. а) Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому выбирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. б) Как изменится эта вероятность, если он помнит, что последняя цифра нечетная?
7. Предположим, что в первые два года обучения студента-естественника ждут 12 экзаменов. Если он не очень старается, есть вероятность ($p = 0{,}1$), что у него не получится сдать любой из них с первого раза. Вероятность того, что в последние два года бакалавриата студенту удастся сдать все экзамены с первого раза, оценивается как 0,7. Определите для этого студента вероятность сдать с первого раза все экзамены в течение четырехлетнего цикла обучения.
8. В потоке $n$ студентов, из которых $r$ не пришли на лекцию по математике. Лектор из списков групп называет случайно $r$ фамилий. Какова вероятность того, что он назовет всех прогульщиков?
9. Вдоль дороги на одинаковом расстоянии друг от друга посеяны в одну линию семена $n$ растений. При пересечении дороги пешеходом в неустановленном месте может быть повреждена посадка одного растения с вероятностью $p$, $p < 1/n$. Определить вероятность того, что $m$-й пешеход, пересекающий

дорогу в неустановленном месте, повредит посадку, если пешеходы пересекают дорогу последовательно и независимо друг от друга.

10. Из четырех человек первый получил информацию, которую в виде сообщения «да» или «нет» передал второму, второй — третьему, третий — четвертому. Этот последний объявляет полученное им сообщение в том же виде, как и остальные. Известно, что каждый из этих людей говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность того, что первый из этих лгунов сказал правду, если известно, что четвертый из них сказал все-таки правду?
11. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность ($p$) попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго ($q$) — 0,3. Найти вероятность ($P$), что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.
12. В лотерее из 40 000 ($N$) билетов крупные выигрыши падают на 3 ($n$) билета. Определить: а) вероятность ($P$) хотя бы одного крупного выигрыша на 1000 ($k$) билетов; б) сколько ($M$) надо купить билетов, чтобы вероятность ($p$) крупного выигрыша была не менее 0,5?
13. Пусть вероятность ($p$) равновозможного события — забить гол в любой момент за время ($T = 90$ мин) футбольного матча равна 0,6. Если в течение первого тайма ($t = 45$ мин) это не произошло, какова вероятность ($P$) того, что это случится во втором тайме?
14. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 25 вопросов. Определить, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из второго билета.
15. Для того чтобы проверить утверждение о наличии экстрасенсорных способностей, иногда проводят следующий опыт. Тасуется 8 карт, 4 красные и 4 черные, а затем на каждую из них по очереди смотрит экспериментатор. В другой комнате обследуемый субъект пытается угадать, является карта, на которую смотрит экспериментатор, красной или черной. Он должен сказать четыре раза «черная» и четыре раза «красная». Если субъект не является экстрасенсом, то его последовательные определения цвета карт будут сравнимы с расположением в случайном порядке восьми объектов, среди которых поровну красных и черных. При таком предположении, какова вероятность того, что субъект точно «угадает» цвета 6 из 8 карт?
16. Трое охотников произвели по одному выстрелу по медведю, в результате чего он был убит одной пулей. Вероятности попадания одним выстрелом для этих охотников равны соответственно 0,1, 0,4, 0,8. Определить вероятность того, что попал (а) первый, (б) второй, (в) третий охотник.
17. Известно, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых. Вероятность рождения мальчика 0,51, а девочки — 0,49. Принимая равными вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.
18. В группе 20 студентов, из которых 5 человек знают 90% экзаменационных билетов из каждого из трех разделов курса, 7 человек — 70%, 4 человека — 60% и 4 человека — 50%. На экзамене студент из этой группы дал верные ответы на два вопроса по двум разделам программы и отказался отвечать на вопрос по третьему разделу. Каковы вероятности того, что данный студент выучил соответственно а) 90%, б) 70%, в) 60% или г) 50% программы?

# XXXVII

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При измерении определенной характеристики какого-либо объекта получают некоторую величину, которая, как правило, является действительным числом. При этом для разных объектов или даже для одного и того же объекта при повторных измерениях эти числа представляют собой случайные величины, характеризующиеся определенными закономерностями. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что случайные величины являются существенным элементом любой модели, предназначенной для описания условий и результатов очень многих научных экспериментов.

## § 37.1. ПОНЯТИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ И ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Определение 37.1.** *Величина, значение которой меняется от опыта к опыту случайным образом, носит название* случайной *или* стохастической *величины.*

В отличие от неслучайных (детерминированных) величин для случайной величины нельзя предсказать точно, какое она примет значение в определенных условиях, а можно только указать закон распределения этой случайной величины.

Закон распределения считается заданным, если известны:

- множество возможных значений случайной величины;
- способ количественного определения вероятности попадания случайной величины в произвольную область этого множества.

*ПРИМЕР.* Пусть на плоскость бросают два тела, имеющие форму тетраэдра, грани которого занумерованы числами $1$, $2$, $3$, $4$. Допустим, что для каждого тетраэдра вероятность упасть на любую грань равна $1/4$. В этом случае, если бросания тетраэдров выполняются независимо, то вероятность получить, например, результат $(2,4)$, т. е. вероятность того, что первый тетраэдр упадет на грань $2$, второй — на грань $4$, равна $(1/4)(1/4) = 1/16$. Аналогично вычисляются и вероятности других исходов, так что каждый из $16$ элементарных исходов имеет вероятность $1/16$. На этом же пространстве элементарных исходов определим некоторую величину $X$, которая будет называться случайной величиной и значения которой $x$ представляют собой суммы чисел, стоящих на нижних гранях тетраэдра. Элементарные исходы и соответствующие значения $x$ приведены в табл. 37.1.

*Таблица 37.1.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(1,1)=2$ | $(2,1)=3$ | $(3,1)=4$ | $(4,1)=5$ |
| $(1,2)=3$ | $(2,2)=4$ | $(3,2)=5$ | $(4,2)=6$ |
| $(1,3)=4$ | $(2,3)=5$ | $(3,3)=6$ | $(4,3)=7$ |
| $(1,4)=5$ | $(2,4)=6$ | $(3,4)=7$ | $(4,4)=8$ |

Используя данные этой таблицы, легко получить распределение вероятностей $f(x)$ случайной величины $X$ (табл. 37.2, рис. 37.1).

*Таблица 37.2.*

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1/16 | 2/16 | 3/16 | 4/16 | 3/16 | 2/16 | 1/16 |

**Определение 37.2.** *Пусть $S$ — множество элементарных событий, тогда всякая однозначная числовая функция $X$, определенная на множестве $S$, называется случайной величиной.*

Если пространство элементарных исходов конечно или счетно, мы имеем дело с дискретными случайными величинами, и их распределение вероятностей называется дискретным.

В том случае, когда значения случайной величины заполняют целиком некоторый замкнутый или открытый, в том числе бесконечный интервал, говорят о непрерывных случайных величинах и непрерывных распределениях вероятности.

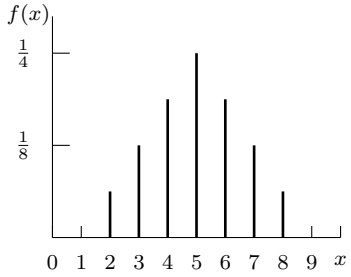


*Рис. 37.1.*

**Определение 37.3.** *Функция $F(x) = p(X < x)$, определенная на множестве всех вещественных чисел $x$ и задающая вероятность того, что случайная величина $X$ не превзойдет $x$, называется функцией распределения случайной величины $X$.*

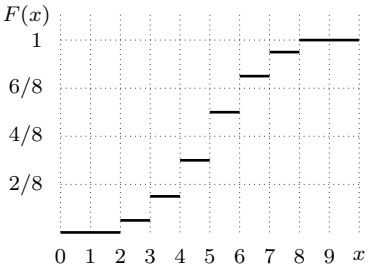


*Рис. 37.2.*

График функции распределения для рассмотренного примера с тетраэдрами приведен на рис. 37.2.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1°. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ при $x_2 \geqslant x_1$;

2°. Функция $F(x)$ непрерывна слева, т. е.

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x-\varepsilon), \quad \varepsilon > 0;$$

3°. Функция $F(x)$ стремится к нулю, если $x$ стремится к $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0;$$

4°. Функция $F(x)$ стремится к единице, если $x$ стремится к $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Из определения функции распределения и ее второго свойства следует, что разность $F(x)-F(x_0)$ стремится к вероятности того, что случайная величина примет значение $x_0$, если $x$ приближается к $x_0$ справа, и стремится к нулю, если $x$ приближается к $x_0$ слева.

Функция распределения непрерывной величины всюду непрерывна и имеет непрерывную производную, кроме, может быть, конечного числа точек на всяком конечном интервале.

**Определение 37.4.** *Если $X$ — случайная величина, то каково бы ни было вещественное число $x$, существует функция $f(x)=p(X=x)$, задающая вероятность того, что $X$ принимает значение $x$. Эта функция определяет распределение частот и носит название плотности вероятности.*

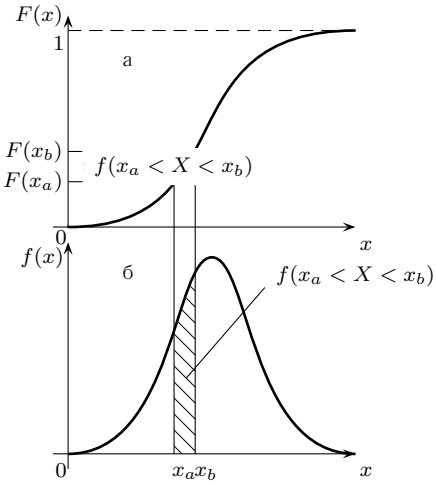



*Рис. 37.3.*

Функция распределения непрерывной случайной величины связана с плотностью вероятности следующим соотношением:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{37.1}$$

(В этой главе случайные величины и действительные переменные обозначаются одной и той же буквой, поэтому и переменная интегрирования и предел интегрирования обозначены через $x$.)

Из свойства 4° функции распределения $F(x)$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1. \tag{37.2}$$

Таким образом, кривая плотности распределения вместе с осью $x$ ограничивают область, площадь которой равна единице (рис. 37.3б).

Вероятность того, что случайная величина $x$ примет значение, лежащее между двумя заданными числами $x_a$ и $x_b$, равна площади области, ограниченной кривой плотности распределения, осью $x$ и ординатами, проходящими через точки $x_a$ и $x_b$ (заштрихованная область на рис. 37.3б). Эта площадь равна

$$F(x_a<x\leqslant x_b)=F(x_b)-F(x_a)=\int\limits_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx. \tag{37.3}$$

Для дискретных случайных величин плотность распределения определяется набором вероятностей для отдельных дискретных значений в пространстве элементарных событий.

Рассмотрим пример непрерывного распределения. Говорят, что случайная величина $X$ имеет равномерное распределение на интервале $(b,c)$, если ее плотность вероятности $f(x)$ задается следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{c-b}, & \text{если } b<x<c,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{37.4}$$

В специальном случае $c=a/2$, $b=-a/2$, $a>0$ плотность распределения есть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & \text{если } |x|<\frac{a}{2},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{37.5}$$

График этой плотности приведен на рис. 37.4а.

Функция распределения, соответствующая этой плотности, получается в следующем виде:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{a}\int\limits_{-a/2}^{x} dt = \frac{x}{a} + \frac{1}{2}, \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}. \tag{37.6}$$

Для $x < -a/2$ имеем $F(x) = 0$, для $x > a/2$ — $F(x) = 1$ (рис. 37.4б).

Определения и соотношения для плотности и функции распределения, рассмотренные выше, естественным образом с помощью кратных интегралов обобщаются на $n$-мерные распределения.

Рассмотрим случай двумерного распределения. Пара случайных величин $(x, y)$ графически изображается точкой в прямоугольной системе координат. Рассмотрим неотрицательную функцию $f(x, y)$ такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1. \tag{37.7}$$

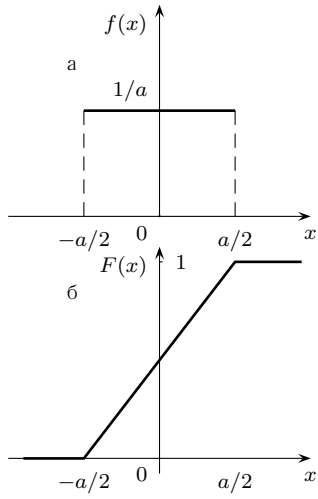


*Рис. 37.4.*

Функцию $f(x, y)$ можно рассматривать как двумерную плотность вероятности, и она является двумерным аналогом одномерной плотности для непрерывных случайных величин. Аналогично тому, как это делалось в одномерном случае, можно определить функцию двумерного распределения:

$$F(x, y) = F(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{37.8}$$

Функция $f(x, y)$ задает некоторую поверхность над плоскостью $(x, y)$. Согласно (37.7) объем, заключенный между этой поверхностью и плоскостью $(x, y)$, равен 1. В свою очередь, $F(x, y)$ есть объем, заключенный между поверхностью $f(x, y)$ и частью координатной плоскости, ограниченной конкретными значениями $x$ и $y$.

В случае двумерных дискретных величин распределение может быть задано таблицей, в клетках которой представлены вероятности $f(x, y)$, сопоставляемые дискретным значениям, определяемым координатами $(x, y)$.

## § 37.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При решении целого ряда теоретических и прикладных вопросов теории вероятностей и математической статистики возникает задача нахождения такого математического описания случайных величин, получаемых либо в ходе теоретических построений, либо при проведении экспериментов, с помощью которого они могут быть охарактеризованы посредством небольшого числа параметров. Этот подход состоит в попытке найти математическое выражение для так называемого теоретического распределения и определить на основании аналитических выкладок и экспериментов параметры этого распределения таким образом, чтобы вся существенная информация, заключенная в анализируемых наборах случайных величин, сконцентрировалась в этих параметрах, а также в функциональной форме распределения.

Из большого числа теоретических распределений мы рассмотрим достаточно подробно в этом параграфе только три, играющие важнейшую роль в теории вероятностей: биномиальное, пуассоновское и нормальное. О некоторых других теоретических распределениях речь пойдет в следующем разделе.

### 37.2.1. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Прежде чем приступить к обсуждению вопросов, непосредственно связанных с биномиальным распределением, рассмотрим некую теоретическую схему, к которой сводятся многие интересные задачи теории вероятностей, представляющие как теоретический, так и практический интерес.

**Определение 37.5.** *Повторные независимые испытания называются испытаниями Бернулли, если при каждом испытании имеется только два возможных исхода и вероятности этих исходов остаются неизменными для всех испытаний.*

Пространство элементарных событий для каждого отдельного испытания состоит из двух точек, которые принято называть «успехом» (У) и «неудачей» (Н), а их вероятности обозначать соответственно через $p$ и $q$, $p+q=1$. Для $n$ испытаний Бернулли пространство элементарных событий содержит $2^n$ точек или последовательностей из $n$ символов У и Н, где каждая точка представляет возможный исход составного опыта. Можно подсчитать вероятность появления какой-то определенной последовательности. Так как опыты независимы, то такая вероятность получается перемножением вероятностей элементарных событий У и Н, составляющих данную последовательность.

Рассмотрим следующий пример. Пусть пол новорожденного не зависит от пола детей, родившихся в семье до него. Примем для простоты, что соотношение полов $1:1$, а это значит, что вероятности рождения мальчика или девочки одинаковы и равны $1/2$. Если в семье двое детей, то можно оценить вероятность и того, что оба ребенка мальчики или девочки или один — мальчик, а другой — девочка. При принятом упрощении вероятности рождения двух мальчиков или двух девочек равны $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, а вероятности рождения сначала девочки, а потом мальчика и наоборот также равны $1/4$.

Усложним задачу. Пусть в семье пятеро детей и нас интересует вероятность того, что трое из них — мальчики, а двое — девочки, и при этом последовательность, в которой рождались эти дети, неважна. Тогда, исходя из тех же предположений, что и в предыдущем параграфе, вероятность рождения трех мальчиков будет равна $(1/2)^3$, а двух девочек — $(1/2)^2$, а общая вероятность в семье с пятью детьми иметь трех мальчиков и двух девочек равна $(1/2)^3 \cdot (1/2)^2 \cdot n_5$, где $n_5$ — число различных последовательностей рождений трех мальчиков и двух девочек в рассматриваемой семье. Чему же равно это число? Очевидно, что оно равно числу сочетаний из пяти по два или по три, т. е.

$$\binom{2}{5} = \binom{3}{5} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Таким образом, интересующая нас вероятность равна $5/16$. Этот результат может быть записан в виде

$$\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Как в этой, так и в большом числе других задач представляет интерес лишь общее число успехов или неудач, достигнутых в последовательности из $n$ испытаний Бернулли,

независимо от порядка их следования. В общем случае, если производится серия из $n$ независимых испытаний, в каждом из которых возможны два исхода с вероятностями $p$ и $q = 1 - p$, не меняющимися от испытания к испытанию, и при этом $k$ раз имел место успех, а $(n - k)$ раз — неудача ($0 \leqslant k \leqslant n$), то вероятность

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}. \tag{37.9}$$

Из элементарного курса алгебры известно, что для любых действительных чисел $a$ и $b$ и целого положительного $n$ имеет место следующее соотношение (формула бинома Ньютона):

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Подставляя вместо $a$ и $b$ соответственно $p$ и $q$ и меняя индекс суммирования $i$ на $k$, получим

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Отсюда следует, что $P_n(k)$ является членом биномиального разложения, а функция $P_n(k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$ задает биномиальное распределение.

Для различных значений $n$ и $p$ будут получаться различные распределения. На рис. 37.5 приведены графики биномиального распределения для $p = 1/2$ и различных $n$.

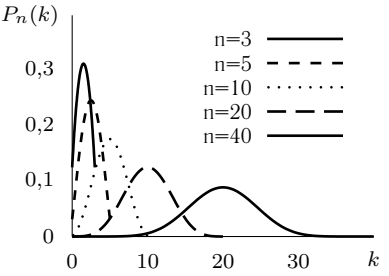


*Рис. 37.5.*

Функция $P_n(k)$ разрывна, так как она определена только для целых $k$. Описание ее поведения можно получить исследованием отношения двух последовательных членов:

$$g(k) = \frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{37.10}$$

Функция $P_n(k)$:

- убывающая, если $g(k) < 1$ для всех $k$, откуда

$$g(0) = \frac{np}{1-p} < 1 \qquad \text{или} \qquad p < \frac{1}{n+1};$$

- возрастающая, если $g(k) > 1$ для всех $k$, т. е.

$$g(n-1) = \frac{p}{n(1-p)} > 1 \qquad \text{или} \qquad p > \frac{n}{n+1};$$

- возрастает, а затем убывает, если $g(0) > 1 > (n-1)$ или

$$\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

В этом последнем случае может быть найдена максимальная вероятность или «наиболее вероятное число успехов» $r$ для биномиального распределения.

Сделать это можно, используя неравенство

$$g(r-1) \geqslant 1 > g(r). \tag{37.11}$$

Подставляя в него (37.10), получим

$$\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{p}{1-p}\geqslant 1>\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{p}{1-p},$$

откуда

$$(n+1)\cdot p-1<r\leqslant(n+1)\cdot p, \tag{37.12}$$

т. е. наиболее вероятное число успехов равно наибольшему целому числу, меньшему или равному $(n+1)p$.

Рассмотрим несколько гипотетических примеров, связанных со схемой испытаний Бернулли и приводящих к биномиальному распределению.

*ПРИМЕР 37.1.* Пусть в аудитории имеется 6 светильников и каждый из них при включении может перегореть с вероятностью $1/4$. Считается, что аудитория непригодна для занятий, если горят меньше чем четыре лампочки. Интерес представляет определение вероятности того, что после включения освещения аудитория будет непригодна для занятий.

Событие, означающее пригодность светильника при включении, обозначим через $A$. Тогда $p(A)=3/4$, а $q(A)=1/4$. Аудитория будет пригодна для занятий, если в ней будет гореть 4, 5 или 6 светильников. Вероятность сложного события, состоящего в том, что не менее 4 лампочек будет исправно, может быть подсчитана следующим образом:

$$S_6(4)=\sum_{k=4}^{6}P_6(k)=\sum_{k=4}^{6}\binom{6}{k}p^k\cdot q^{6-k}=\binom{6}{4}(3/4)^4\cdot(1/4)^2+$$
$$+\binom{6}{5}(3/4)^5\cdot(1/4)+\binom{6}{6}(3/4)^6=\frac{3402}{4096}=0{,}831.$$

*ПРИМЕР 37.2.* Представим себе, что некоторое редкое заболевание встречается у 0,1% данной большой популяции. Из этой популяции случайно выбирают 5000 человек и проверяют на это заболевание. Интерес представляет определение того, каково наиболее вероятное число людей, имеющих это заболевание, и какова вероятность, что оно будет обнаружено именно у этого количества людей.

Условия задачи полностью соответствуют схеме Бернулли, поэтому в соответствии с формулой (37.12) наиболее вероятное число людей, у которых будет обнаружено заболевание при обследовании 5000 людей, равно $n\cdot p=5000\cdot 0{,}001=5$. Вероятность того, что именно у 5 человек будет найдено это заболевание, может быть найдено из распределения Бернулли:

$$P_{5000}(5)=\binom{5000}{5}0{,}001^5\cdot 0{,}999^{4995}.$$

Даже на непросвещенный взгляд вычисление интересующего нас результата при таких параметрах получить довольно сложно. Мы отложим получение численного значения интересующей нас вероятности и перейдем к рассмотрению нового распределения, которое может быть представлено как приближение биномиального.

### 37.2.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Пусть в нашем распоряжении имеется биномиальная случайная величина с параметрами $n$ и $p$, распределение вероятностей которой задается формулой (37.10). Предположим, что $n$ неограниченно увеличивается, а параметр $p$ стремится к нулю таким образом, что произведение $n\cdot p=\lambda$ остается постоянным.

Так как

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda}{k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right] \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n,$$

то при $n \to \infty$ все члены произведения в квадратных скобках, а также $(1-\lambda/n)^k$ стремятся к нулю, в то время как $\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = e^{-\lambda}$. Отсюда следует, что

$$P_n(k) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}]{} p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{37.13}$$

Полученный предельный закон распределения и называется распределением Пуассона. Для того чтобы убедиться, что полученное выражение в самом деле является функцией плотности вероятности, необходимо показать, что сумма от нее, взятая в пределах от нуля до бесконечности, равна единице. Это доказательство предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

Теперь вернемся к численной оценке вероятности обнаружения в случайной популяции из 5000 людей ровно пяти человек, страдающих неким заболеванием, встречающимся с частотой 0,001. Используя пуассоновское приближение биномиального распределения, имеем ($\lambda = n \cdot p = 5$):

$$P_{5000}(5) \approx \frac{5^5}{5!} e^{-5} = \frac{3025}{120} \cdot \frac{1}{146{,}17} = 0{,}172.$$

В следующей главе мы еще раз вернемся к этим вычислениям, когда речь пойдет о теореме Муавра–Лапласа.

Другой пример, связанный с пуассоновским приближением биномиального распределения, относится к подсчету клеток под микроскопом и иллюстрирует распределение случайных точек в пространстве.

Предположим, что $n$ клеток определенного типа случайным образом распределены по предметному стеклу, которое разбито квадратной решеткой на $30 \times 30 = 900$ равных участков. Вероятность, что конкретная клетка лежит в данном участке, равна $p = 1/900$. Процесс размещения $n$ клеток на предметном стекле можно рассматривать как $n$ повторных испытаний для биномиального эксперимента, где «успех» определяется как попадание клетки в конкретный участок решетки. Если $n$ велико, то для вычисления вероятности того, что конкретный участок решетки содержит $k$ клеток, можно воспользоваться пуассоновским приближением биномиального распределения. Параметр $\lambda = np = n/900$ и, значит,

$$P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \left(\frac{n}{900}\right) \frac{e^{-n/900}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Величина $P_n(k)$ дает долю тех из 900 участков, в которых содержится по $k$ клеток. Общее количество участков, содержащих по $k$ клеток, равно $900\,P_n(k)$. Например, ожидается, что $900 \cdot e^{-n/900}$ участков не содержат ни одной клетки.

Это дает метод оценки общего числа имеющихся клеток путем определения числа тех участков квадратной решетки, которые не содержат этих клеток. Например, если

мы определили, что в 75 участках решетки нет клеток, то $75 \approx 900 \cdot e^{-n/900}$, откуда $n = 900 \ln 900/75 \approx 2240$.

А сейчас рассмотрим еще один способ получения распределения Пуассона, являющийся более естественным по сравнению с использованным выше и раскрывающий большое практическое значение этого распределения.

Пусть вероятность того, что некоторое событие произойдет в интервале времени $(t, t+\delta t)$, равна $\varepsilon\,\delta t$, где $\varepsilon$ — положительная постоянная, а длина $\delta t$ этого временного интервала настолько мала, что вероятность того, что данное событие произойдет более чем один раз за интервал $(t, t+\delta t)$, есть величина более высокого порядка малости, чем $\delta t$, и ею можно пренебречь. Обозначим через $p_k(t)$ вероятность появления рассматриваемого события $k$ раз за промежуток времени $(0, t)$. Тогда вероятность того, что событие ни разу не произойдет в интервале $(0, t+\delta t)$, можно записать в виде $p_0(t+\delta t)$. Если допустить, что событие не произошло в интервале $(0, t+\delta t)$, это значит допустить, что оно не произошло ни в интервале $(0, t)$, ни в интервале $(t, t+\delta t)$. Так как вероятность того, что интересующее нас событие не произойдет в интервале $(0, t)$, равна $p_0(t)$, а соответствующая вероятность для интервала $(t, t+\delta t)$ равна $1-\varepsilon\,\delta t$, то, полагая, что эти два исхода независимы, имеем

$$p_0(t+\delta t) = p_0(t) \cdot (1 - \varepsilon\,\delta t) = p_0(t) - \varepsilon p_0(t)\,\delta t$$

и, следовательно,

$$\frac{p_0(t+\delta t) - p_0(t)}{\delta t} = -\varepsilon p_0(t).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\varepsilon p_0(t).$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого есть $p_0(t) = e^{-\varepsilon t}$. (Константа, которая получается при интегрировании, равна нулю, так как должно выполняться естественное условие, что $p_0(0) = 1$).

На следующем шаге рассмотрим вероятность $p_k(t+\delta t)$ при $k > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} p_k(t+\delta t) = P\{&\text{событие появится } k \text{ раз за время } (0, t+\delta t)\} = \\ &= P\{\text{событие появится } k \text{ раз за время}(0,t)\} \times \\ &\times P\{\text{событие не появится за время } (0, t+\delta t)\} + \\ &+ P\{\text{событие появится } k-1 \text{ раз за время}(0,t)\} \times \\ &\times P\{\text{событие появится один раз за время}(t, t+\delta t)\} = \\ &= p_k(t) \cdot (1 - \varepsilon\,\delta t) + p_{k-1}\varepsilon\,\delta t. \end{aligned}$$

Перегруппировывая и переходя к пределу, получим уравнение

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\varepsilon(p_k(t) - p_{k-1}(t)),$$

решением которого будет

$$p_k(t) = \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} e^{-\varepsilon t}. \tag{37.14}$$

Поэтому распределение числа появлений нашего события в интервале $(0, t)$ является распределением Пуассона с параметром $\varepsilon t$.

Аналогичный подход может быть использован, если вместо распределения случайных событий по оси $t$ рассматривать случайное распределение точек по площади или в пространстве.

Для пуассоновских распределений справедлива следующая теорема, доказательство которой предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

**ТЕОРЕМА 37.1**
Сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся распределению Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$, также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

С распределением Пуассона связано много физических, биологических и технических задач. Например, этому распределению подчиняется число $\alpha$-частиц, достигающих в течение времени $t$ некоторого участка пространства, число клеток с измененными под действием рентгеновского излучения хромосомами, число ошибочных телефонных вызовов в течение суток и т. д.

### 37.2.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В теории вероятностей и математической статистике важнейшую роль играет так называемое нормальное или гауссовское распределение. Оно также широко применяется и при решении прикладных задач. Значимость нормального распределения определяется тем, что оно служит хорошим *приближением* для большого числа наборов случайных величин, получаемых при наблюдениях и экспериментах. Нормальное распределение почти всегда имеет место, когда наблюдаемые случайные величины формируются под влиянием большого числа случайных факторов, ни один из которых существенно не превосходит остальные.

С другой стороны, нормальное распределение появляется как *точное решение* некоторых математических задач в рамках принятых моделей исследуемых явлений. Одни из первых таких решений, приводящие к нормальному закону распределения, были получены К. Гауссом при решении задач теории ошибок наблюдений и Дж. Максвеллом при изучении распределения скоростей молекул в газе.

**Определение 37.6.** *Функция*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \tag{37.15}$$

*носит название плотности нормального распределения, а ее интеграл*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \tag{37.16}$$

*называется нормальной функцией распределения.*

Постоянные $\mu$ и $\sigma^2$ называются параметрами распределения.

Случайная величина с плотностью распределения (37.15) называется нормально распределенной случайной величиной с параметрами $(\mu, \sigma^2)$.

Постоянная $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ определена таким образом, что вероятность попадания случайной величины в интервал $-\infty < x < \infty$ была равна единице, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1. \tag{37.17}$$

● Вместо того чтобы доказывать непосредственно, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1,$$

проще доказать, что $I^2 = 1$. Введем новую переменную $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ и получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Далее

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\, du\, dv.$$

Перейдем в этом интеграле к полярным координатам

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \quad \text{так что } u^2 + v^2 = r^2, \quad du\, dv = r\, dr\, d\varphi.$$

С учетом этого получим

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{\infty} r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]\Big|_0^{\infty} = 1. \quad ●$$

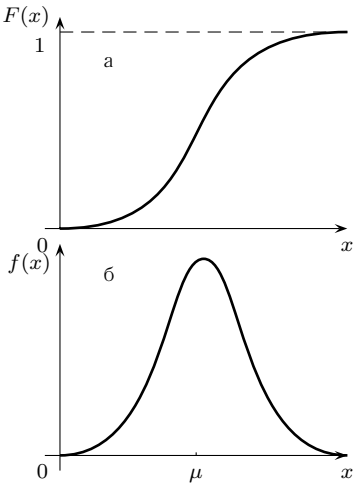



*Рис. 37.6.*

Переход к новой переменной $u = (x-\mu)/\sigma$ носит название *стандартизации* и приводит к так называемому *единичному нормальному распределению*, которое характеризуется математическим ожиданием, равным нулю, и единичной дисперсией (математическое ожидание и дисперсия будут определены в § 37.3).

Графическое представление функции и плотности нормального распределения приведено на рис. 37.6а,б.

Исследуя форму «колоколообразной» плотности распределения, заметим, что кривая симметрична относительно прямой $x = \mu$. Наклон кривой выражается величиной

$$f'(x) = -\frac{(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Эта производная положительна при $x < \mu$ и отрицательна при $x > \mu$. Отсюда следует, что $f(x)$ возрастает до максимума, когда $x$ увеличивается до значения $\mu$, а затем убывает с уменьшением $x$. Вторая производная $f(x)$ имеет вид

$$f''(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - 1\right].$$

Если $f''(x) = 0$, т. е. $x = \mu + \sigma$ и $x = \mu - \sigma$, то получаются точки перегиба. Ясно, что $f(x) > 0$ при всех значениях $x$ и что $f(x)$ стремится к нулю, когда $x$ стремится к бесконечности.

Практически невозможно протабулировать значения всех нормальных распределений, которые встречаются при решении практических задач. Но оказывается, что этого и не требуется, что вытекает из следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 37.2**
Если $X$ — нормальная случайная величина со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$, то $Y = (X - \mu)/\sigma$ является случайной величиной с единичным нормальным распределением.

● Функция распределения для $X$ имеет вид

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Если $Y = (x - \mu)/\sigma$, то $P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant \mu + \sigma y) = F(\mu + \sigma y)$.

Значит,

$$P(Y \leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\mu+\sigma y} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Произведя в этом интеграле замену переменных $u = (x - \mu)/\sigma$, получаем

$$P(Y \leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Таким образом, показано, что $Y$ имеет единичное нормальное распределение.

Обращение этой теоремы состоит в том, что если $Y$ имеет единичное нормальное распределение, то величина $X = \sigma Y + \mu$ распределена нормально со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$.

В приложении приведена таблица функции распределения для единичного нормального распределения (рис. 37.7), значения которой могут быть использованы при вычислении вероятностей нормальных случайных величин с произвольными значениями средних и дисперсий.

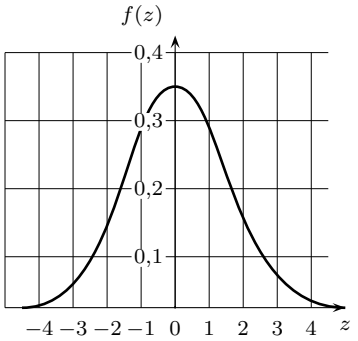


*Рис. 37.7.*

Рассмотрим пример. Пусть случайная величина $X$ распределена нормально со средним 5 и стандартным отклонением 2. Какова вероятность того, что $X$ принимает значение между 2,4 и 6? Какова вероятность значений, больших, чем 10?

Определим единичную нормальную случайную величину (рис. 37.8) $u = (x - 5)/2$.

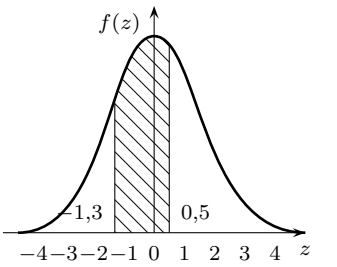


*Рис. 37.8.*

Тогда $u_1 = (2{,}4 - 5)/2 = -1{,}3$ и $u_2 = (6 - 5)/2 = 0{,}5$.

В соответствии с доказанной теоремой для первой интересующей нас вероятности

$$P(u_1 \leqslant x \leqslant u_2) = F(u_2) - F(u_1) = 0{,}692 - 0{,}097 = 0{,}595.$$

Для ответа на второй вопрос заметим, что

$$F(-x) = P(X \leqslant -x) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x).$$

Тогда $u = (10-5)/2 = 2{,}5$ и $P(u \geqslant 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$.

Общим для всех кривых нормального распределения является то, что примерно 68%, 95,6% и 99,7% площади под ними лежат соответственно в пределах $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$.

## § 37.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Наиболее часто используемыми числовыми характеристиками случайных величин являются математическое ожидание и дисперсия.

Понятие математического ожидания очень близко к интуитивному представлению о средней величине и может иметь следующую механическую интерпретацию. Предположим, что на оси абсцисс в точках с координатами $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ помещены массы $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, причем $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$. В этом случае математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести данной системы материальных точек.

**Определение 37.7.** *Математическое ожидание для дискретных случайных величин определяется как*

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \tag{37.18}$$

*Для непрерывных случайных величин*

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx. \tag{37.19}$$

В качестве иллюстрации к использованию приведенных формул найдем математические ожидания для дискретных и непрерывных распределений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Прежде всего найдем математическое ожидание для биномиальной случайной величины. Имеем

$$M[x] = \sum_{i=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{i=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x}.$$

Обозначим $n-1 = m$, а $x-1 = y$. Тогда

$$M[x] = np \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} = np[p + (1-p)]^m = np,$$

так как $p + q = 1$ и, следовательно, $(p+q)^m = 1$.

Найдем математическое ожидание для пуассоновского распределения. Для этого нам придется еще раз вспомнить формулу из анализа, согласно которой

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Далее, используя определение математического ожидания, имеем

$$M[x] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Если положить $l = k-1$, получим

$$M[x] = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Следовательно, параметр распределения Пуассона является одновременно и его средним, а учитывая возможность пуассоновского приближения к биномиальному распределению, имеем $\lambda = np$.

Найдем математическое ожидание для равномерного распределения. Имеем

$$M[x] = \int\limits_{-a/2}^{a/2} a\frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\frac{x^2}{2}\Big|_{-a/2}^{a/2} = 0.$$

Для нормального распределение математическое ожидание может быть определено как

$$M[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\mu+(x-\mu)]\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$
$$= \mu\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu.$$

Интеграл равен нулю, поскольку отрицательные и положительные значения $(x-\mu)$ имеют одинаковый вес.

Таким образом, один из параметров нормального распределения равен математическому ожиданию или среднему этого распределения.

Используя аналогии из механики, как и для математического ожидания, можно сделать вывод, что изменчивость или разброс случайных величин относительно среднего эквивалентна моменту инерции данной системы материальных точек.

**Определение 37.8.** *Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины $x$ от своего среднего, являющееся мерой разброса возможных значений случайной величины, называется дисперсией*

$$D[x] = M\left[(x - M[x])^2\right]. \tag{37.20}$$

Как мера рассеяния дисперсия имеет ряд математических и статистических преимуществ, которые выявятся при дальнейшем изложении. Размерность дисперсии совпадает с квадратом размерности случайной величины $X$. Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется стандартным отклонением.

Определим дисперсии для уже рассмотренных дискретных распределений. Нам понадобится следующее тождество:

$$D[x] = M\left[x^2 - 2xM[x] + (M[x])^2\right] = M[x^2] + (M[x])^2 - 2(M[x])^2 =$$
$$= M[x^2] - (M[x])^2 = M[x^2] - M[x] - (M[x])^2 + M[x] =$$
$$= M[x(x-1)] - M[x](M[x]-1).$$

Определим дисперсию для биномиального распределения. Имеем

$$M[x(x-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)p(x) = \sum_{x=0}^{n}(x-1)x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Так как

$$x(x-1)\binom{n}{x} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} = n(n-1)\binom{n-2}{x-2},$$

то

$$M[x(x-1)] = n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-x}.$$

Если заменить $(x-2)$ на $y$, а $(n-2)$ на $m$, то

$$M[x(x-1)] = n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{n}\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y},$$

и так как

$$\sum_{y=0}^{n}\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y} = [p+(1-p)]^m = 1,$$

то

$$M[x(x-1)] = n(n-1)p^2. \tag{37.21}$$

Исходя из того, что $M[x] = np$, имеем

$$D[x] = n(n-1)p^2 - np(np-1) = np(1-p) = npq. \tag{37.22}$$

Для пуассоновского распределения дисперсия

$$D[x] = np = \lambda. \tag{37.23}$$

Таким образом, мы видим, что в пуассоновском распределении математическое ожидание и дисперсия совпадают, что является одним из важных свойств этого распределения.

Определим дисперсии для двух непрерывных распределений, рассмотренных выше: равномерного и нормального, но предварительно запишем еще одно тождество, используемое при расчете дисперсий непрерывных распределений:

$$D[x] = M\left[(x-M[x])^2\right] = M\left[x^2 + (M[x])^2 - 2xM[x]\right] = \\ = M[x^2] + (M[x])^2 - 2(M[x])^2 = M[x^2] - (M[x])^2.$$

Учитывая это тождество, для равномерного распределения имеем

$$M[x^2] = \int_{-a/2}^{a/2} x^2\frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{a^2}{12},$$

и с учетом того, что для этого распределения $M[x] = 0$, получим следующее значение для дисперсии:

$$D[x] = \frac{a^2}{12} - (0)^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Для того чтобы определить значение дисперсии для нормального распределения, введем новую переменную

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Используя формулу для дисперсии, получим

$$D[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du =$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\,d\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} - ue^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sigma^2.$$

Этот результат следует из того, что

$$ue^{-\frac{u^2}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{при } |u|\to\infty, \text{ а } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1.$$

Таким образом, второй параметр нормального распределения равен дисперсии этого распределения.

Средние и дисперсии играют важную роль при анализе характера вероятностных распределений. Предположим, что $X$ является непрерывной случайной величиной со средним (математическим ожиданием) $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. Характер распределения во многом определяется вероятностями того, что $X$ принимает значения, сильно отличающиеся от среднего. Оценить такие вероятности можно с использованием *неравенства Чебышева*.

**ТЕОРЕМА 37.3**

Пусть $X$ — непрерывная случайная величина со средним $\mu$ и стандартным отклонением $\sigma$. Тогда для любого $t > 0$ вероятность того, что $X$ принимает значения, отличающиеся от $\mu$ не менее чем на $t\mu$, меньше $1/t^2$, т. е. $P(|X-\mu| \geqslant t\sigma) \leqslant 1/t^2$.

● Разделим диапазон $X$ на два множества: $S_1 = \{\, x : (x-\mu)^2 \geqslant t^2\sigma^2 \,\}$ и $S_2 = \{\, x : (x-\mu)^2 < t^2\sigma^2 \,\}$. По определению,

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int\limits_{S_1}(x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int\limits_{S_2}(x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

Так как второй интеграл неотрицателен, то $\sigma^2 \geqslant \int_{S_1}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$. Но на множестве $S_1$ имеет место неравенство $(x-\mu)^2 \geqslant t^2\sigma^2$, откуда следует, что

$$\sigma^2 \geqslant \int\limits_{S_1} t^2\sigma^2 f(x)\,dx = t^2\sigma^2\int\limits_{S_1} f(x)\,dx.$$

Интеграл в правой части этого неравенства в точности совпадает с интересующей нас вероятностью. А это значит, что $\sigma^2 \geqslant t^2\sigma^2 P(|X-\mu| > t\sigma)$. Преобразовывая, получаем то, что требовалось доказать:

$$P(|X-\mu| \geqslant t\sigma) < 1/t^2.$$

Используя ту же схему рассуждений, можно получить доказательство для дискретной случайной величины, так что неравенство Чебышева справедливо для любого распределения вероятностей.

● *ПРИМЕР.* Известно, что в большой популяции дрозофил 40% особей имеют некоторую мутацию. Какого размера должна быть выборка из этой популяции, чтобы с достоверностью 95% доля особей с данной мутацией составляла от 38% до 42% выборки?

● Обозначим интересующий нас объем выборки через $n$. Можно считать, что мы имеем дело с $n$ повторными экспериментами в схеме испытаний Бернулли с $p = 0{,}4$. Тогда $\mu = np = 0{,}4n$ и $\sigma^2 = npq = 0{,}24n$. Если $X$ — случайная величина, равная числу мутантных дрозофил в выборке, то $X/n$ — это доля таких дрозофил, и ищется вероятность

$$P\left|\frac{X}{n} - \frac{\mu}{n}\right| \geqslant 0{,}02 = P|X - \mu| \geqslant 0{,}02n.$$

В задаче требуется определить $n$ настолько большое, чтобы приведенная вероятность была меньше $0{,}05$.

В обозначениях неравенства Чебышева имеем $t\sigma = 0{,}02n$, $1/t^2 = 0{,}05$. Отсюда следует, что

$$t^2 = \frac{(0{,}02)^2 n^2}{\sigma^2} = \frac{(0{,}02)^2 n^2}{0{,}24n} \text{ и } n = \frac{0{,}24}{(0{,}02)^2 \cdot 0{,}05} = 12000.$$

Таким образом, размера выборки в 12000 особей достаточно для того, чтобы гарантировать от 38% до 42% мутантов в 95% всех таких выборок. ●

При рассмотрении этого примера не делалось никаких предположений о характере распределения интересующей нас случайной величины. Неравенство Чебышева гарантирует получение результата при любом распределении. Но именно эта общность приводит к тому, что оно дает сильно завышенную оценку необходимого числа наблюдений. В следующей главе с использованием нормального приближения будут получены более оптимистичные оценки объема выборки.

## Вопросы для самопроверки

1. Докажите теорему 37.1.
2. Объясните, как биномиальное распределение возникает в эксперименте, состоящем из $n$ независимых испытаний.
3. Объясните, что надо понимать под «независимыми испытаниями Бернулли».
4. Докажите, что для всех допустимых в биномиальном распределении значений вероятности $\sum_{k=0}^{n} p(k) = 1$.
5. Что такое функция и плотность распределения случайной величины?
6. Увеличится или уменьшится вероятность в распределении Бернулли, если к общему числу испытаний добавить еще два испытания, а вероятность появления события в одном испытании оставить неизменной?
7. При каких условиях справедлив закон Пуассона?
8. Вероятностью какого случайного события является функция распределения случайной величины и какими свойствами эта функция обладает?
9. Докажите, что для любого распределения:

$$M[cx] = cM[x], \quad M[cg(x)] = cM[g(x)], \quad M[ax + b] = aM[x] + b,$$
$$M\left[(x - \mu)^3\right] = M[x^3] - 3\mu M[X^2] + 2\mu^3, \quad a, b, c \text{ — const}.$$

10. Показать для пуассоновского распределения, что в общем случае

$$\mu = \sum xp(x) = \lambda.$$

## Упражнения и задачи

1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормальная случайная величина отклонится от своего математического ожидания больше чем на три среднеквадратических отклонения.
2. Случайная величина подчиняется закону распределения $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}$, $x \geqslant 0$. Доказать справедливость неравенства $p\big(0 < x < 2(m+1)\big) > \frac{m}{m+1}$.
3. Событие $A$ происходит в каждом испытании с вероятностью $1/2$. Можно ли с вероятностью большей 0,97 утверждать, что появление события $A$ в 1000 испытаний будет в пределах от 400 до 600?
4. Одинаковы ли вероятности выпадения одной или более шестерок при четырех бросаниях и выпадения одной или более двойных шестерок при 24 бросаниях двух правильных игральных костей (задача шевалье де Мере, 1654 г.).
5. На конкурсе красоты участницы выходят на подиум по три. Пусть с вероятностью $\theta$ любая из них имеет голубые глаза и пусть $E_1$ — событие, состоящее в том, что не более чем одна девушка на подиуме имеет голубые глаза, а $E_2$ — событие, состоящее в том, что по крайней мере одна из девушек имеет голубые глаза. (а) При каких значениях $\theta$, не равных 0 и 1, события $E_1$ и $E_2$ независимы? (б) Тот же вопрос, но если на подиум выходят четыре девушки.
6. Для случайной величины $X$, имеющей математическое ожидание $M[x] = 10$ и стандартное отклонение $\sigma = 2$, вычислить

$$M[x^2], \quad M\left[M[x^2]\right], \quad D[M[x^2]], \quad D[D[x^2]].$$

7. Показать, что если случайная величина $X$ (число испытаний до первого успеха) имеет распределение $p_X(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$, $x \geqslant 1$ (геометрическое распределение), то $M[x] = 1/\theta$ и $D[x] = (1-\theta)/\theta^2$.
8. Найти константу $c$, минимизирующую $M[(x-c)^2]$.
9. Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 100$ и $\sigma^2 = 100$. Вычислить:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad F(X < 95); & (b) \quad F(X > 90); \\ (c) \quad F(80 \leqslant X \leqslant 85); & (d) \quad F(|X - 100| < 20). \end{array}$$

10. В условиях предыдущей задачи найти такие значения $a$, $b$, $c$, при которых:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad F(X < a) = 0{,}95; & (b) \quad F(X > b) = 0{,}90; \\ \multicolumn{2}{c}{(c) \quad F(|X - 100| < c) = 0{,}90.} \end{array}$$

11. Выборочное пространство $X\{0,1,2,3\}$, а функция распределения $F(x) = \frac{C}{2+x}$. Определить значение $C$, нарисовать график функции распределения и определить вероятности следующих событий:

$$x = 3; \quad x < 3; \quad x \in \{2,3\}.$$

12. Найти и нарисовать функцию распределения случайной величины $X$, имеющей функцию плотности распределения

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + 1\right), \quad 0 < x < 2.$$

Определить вероятности следующих событий:

$$x < 1; \quad x \leqslant 1{,}5; \quad 1 < x \leqslant 1{,}5; \quad x > 0{,}75.$$

13. Непрерывная случайная переменная $X$ имеет функцию плотности вероятности $f(x) = C(2x+1)$, $0 < x < 2$. Нарисовать график, найти значение $C$ и определить $M[x]$ и $M[x^2]$.
14. Случайная переменная $X$ имеет биномиальное распределение вероятностей с параметром $p$. Показать, что

$$M[X] = p, \quad M[(X-\mu)^3] = pq(q-p).$$

15. Написать функцию плотности вероятности для биномиального распределения с $n = 15$, $p = 0{,}1$, вычислить значения $p_k(x)$ для $k = 0$, $6$, $9$, $14$, а также найти математическое ожидание и дисперсию этого распределения.
16. В нормальном распределении $15\%$ значений меньше $12$, а $40\%$ значений больше $16{,}2$. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение для этого распределения.
17. При условии, что $49\%$ значений нормального распределения лежит между математическим ожиданием (средним), равным $83$ и величиной $x = 99$, необходимо найти стандартное отклонение.

# XXXVIII

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Практика показывает, что множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, которые позволяют не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценивать некоторые средние характеристики этих явлений. Определенные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при действии множества слабых воздействий, не поддающихся учету. Выражением этих закономерностей и устойчивости средних показателей являются предельные теоремы теории вероятностей. Принципиальное значение этих теорем состоит в том, что они гарантируют при большом числе опытов высокое качество статистических оценок, о которых пойдет речь в следующем разделе. Более того, практически приемлемые количественные оценки массовых явлений часто могут, как это следует из этих же теорем, быть получены при сравнительно небольшом числе экспериментов.

## § 38.1. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Предельные теоремы теории вероятностей образуют две группы теорем: первая группа относится к закону больших чисел, вторая группа — центральные предельные теоремы.

Закон больших чисел имеет несколько форм, каждая из которых устанавливает ту или иную устойчивость средних при большом числе наблюдений. Этот закон — общий принцип, в силу которого совместное действие большого числа случайных факторов приводит, при некоторых весьма общих условиях, к результату, почти не зависящему от случая.

Исторически первая теорема — простейшая форма закона больших чисел — была сформулирована и доказана Я. Бернулли, тем самым знаменитым швейцарским математиком, о котором шла речь в главе 36 этого раздела, когда рассматривалась схема независимых испытаний. Изящное доказательство теоремы Бернулли, предложенное знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым, будет приведено ниже, а пока сформулируем без доказательств другие теоремы, относящиеся к закону больших чисел.

**ТЕОРЕМА 38.1 (Пуассона)**
При неограниченном увеличении числа $n$ независимых испытаний, в которых событие $A$ появляется с вероятностями $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, частота $P_n^*$ события $A$ сходится по вероятности к средней вероятности события:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|P_n^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Здесь и в следующих теоремах используется понятие сходимости по вероятности. Поясним его. Пусть задана последовательность случайных величин $\{x_n\}$ и случайная величина $x$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится по вероятности к $x$, если для любого $\varepsilon > 0$ $P(|x_n - x| > \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$.

**ТЕОРЕМА 38.2 (Чебышева)**
При неограниченном увеличении числа $n$ независимых испытаний, в каждом из которых случайная величина $X$ с математическим ожиданием $\mu$ принимает какое-то значение $X_i$, среднее арифметическое этих значений сходится по вероятности к математическому ожиданию случайной величины $X$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

**ТЕОРЕМА 38.3 (Маркова)**
Если $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимые случайные величины с математическими ожиданиями $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_4$ и дисперсиями $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, ..., $\sigma_n^2$, причем все дисперсии ограничены сверху одним и тем же числом, то при неограниченном возрастании $n$ среднее арифметическое наблюденных значений случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Рассмотрим теперь теорему Бернулли. Впервые эта теорема и ее доказательство были приведены в основополагающем труде Я. Бернулли «Ars conjectandi» («Искусство предположений»), опубликованном в 1713 г. Мы приводим здесь доказательство теоремы Бернулли в виде, предложенном П. Л. Чебышевым.

**ТЕОРЕМА 38.4 (Бернулли)**
Если при каждом из $n$ независимых испытаний вероятность некоторого события равна $p$, то вероятность того, что частота $m/n$ появления события удовлетворяет неравенству $|(m/n) - p| > \varepsilon$ ($\varepsilon$ — произвольно малое положительное число), становится сколь угодно близкой к нулю при достаточно большом числе $n$ испытаний:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0. \qquad (38.1)$$

● В доказательстве этой теоремы используется тот же подход, что и при доказательстве неравенства Чебышева (§ 37.3). Прежде всего отметим, что в теореме речь идет о результатах испытаний, полученных по схеме Бернулли (§ 37.2), так что вероятность $m$ появлений некоторого события при $n$ независимых испытаний равна $P_n(m)$. Вероятность, фигурирующая в условиях теоремы, представляет собой сумму $P_n(m)$ для всех тех значений $m$, которые отстоят от $np$ больше, чем на $n\varepsilon$.

Итак,
$$P(|m-np|>n\varepsilon)=\sum_{|m-np|>n\varepsilon}P_n(m). \tag{38.2}$$

Если рассмотреть область, по которой идет суммирование, то очевидно, что

$$\left|\frac{m-np}{n\varepsilon}\right|>1,\ \text{и тем более}\ \left(\frac{m-np}{n\varepsilon}\right)^2>1.$$

Если теперь в (38.2) каждый член правой части заменить выражением $\left(\frac{m-np}{n\varepsilon}\right)^2P_n(m)$, то сумма только увеличится и, значит,

$$P(|m-np|>n\varepsilon)<\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{|m-np|>n\varepsilon}(m-np)^2P_n(m).$$

Эту сумму можно увеличить еще больше, если заставить $m$ пробегать весь ряд возможных значений от 0 до $n$. Именно в этом и состоит «изюминка» доказательства Чебышева, так как с помощью такого подхода удается заменить трудно оцениваемую сумму в (38.2) на сумму, которая допускает точное вычисление:

$$P(|m-np|>n\varepsilon)<\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2P_n(m). \tag{38.3}$$

Имеем

$$\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2P_n(m)=\sum_{m=0}^{n}m^2P_n(m)-2np\sum_{m=0}^{n}mP_n(m)+n^2p^2\sum_{m=0}^{n}P_n(m).$$

Третья сумма в правой части равна 1, как сумма вероятностей полной системы событий, и поэтому третий член правой части

$$n^2p^2\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=n^2p^2. \tag{38.4}$$

В двух оставшихся суммах нужно начинать суммировать с $m=1$, так как слагаемые для $m=0$ также равны нулю. Так как $P_n(m)$ представляет собой плотность биномиального распределения, то

$$\sum_{m=1}^{n}mP_n(m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m\cdot n!}{m!\,(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m},$$

или, преобразуя,

$$\sum_{m=1}^{n}mP_n(m)=np\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,[(n-1)-(m-1)]!}\times p^{m-1}(1-p)^{[(n-1)-(m-1)]}.$$

Если теперь в правой части заменить $(m-1)$ на $k$, то получим

$$\sum_{m=1}^{n}mP_n(m)=np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}p^k(1-p)^{n-1-k}=np\sum_{k=0}^{n-1}P_{n-1}(k).$$

Сумма в правой части — это сумма вероятностей полной группы событий и потому равна 1. Откуда следует, что
$$\sum_{m=0}^{n}mP_n(m)=np. \tag{38.5}$$

Остается вычислить еще одну сумму $\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m)$, входящую в (38.3). Эту сумму можно представить как

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_n(m) + \sum_{m=0}^{n} mP_n(m).$$

Вторая сумма в правой части нам уже известна, поэтому остается вычислить первую. Обратим внимание, что суммирование в ней надо начинать с $m = 2$. Обозначив по аналогии с предыдущим $m - 2 = l$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_n(m) &= \sum_{m=2}^{n} m(m-1)P_n(m) = \\ &= \sum_{m=2}^{n} \frac{m(m-1)\cdot n!}{m!\,(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \\ = n(n-1)\cdot p^2 \sum_{m=2}^{n} &\frac{(n-2)!}{(m-2)!\,[(n-2)-(m-2)]!} p^{m-2}(1-p)^{[(n-2)-(m-2)]} = \\ = n(n-1)\cdot p^2 \sum_{l=0}^{n-2} &\frac{(n-2)!}{l!\,(n-2-l)!} p^l (1-p)^{n-2-l} = n(n-1)\cdot p^2 \sum_{l=0}^{n-2} P_{n-2}(l) = \\ &= n(n-1)p^2,\end{aligned}$$

так как последняя сумма, как сумма вероятностей полной системы событий, равна единице.

Итак, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_n(m) + \sum_{m=0}^{n} mP_n(m) &= n(n-1)p^2 + np = \\ &= n^2p^2 + np(1-p).\end{aligned}$$

Подставляя полученные значения для сумм в (38.3), получим

$$\sum_{m=0}^{n} (m-np)^2 P_n(m) = n^2p^2 + np(1-p) - 2np\cdot np + n^2p^2 = np(1-p)$$

и, наконец,

$$P(|m-np| > n\varepsilon) < \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \tag{38.6}$$

Этим, собственно говоря, и заканчивается доказательство теоремы Бернулли, так как, взяв $\varepsilon$ сколь угодно малым, мы его больше не меняем, а число испытаний $n$ может быть сколь угодно большим, поэтому и дробь (38.6) становится сколь угодно малой.

## § 38.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В основе ведущей схемы, по которой идет использование результатов теории вероятностей в естествознании, лежит представление о том, что наблюдаемые процессы и явления формируются под влиянием очень большого числа независимо действующих случайных факторов. Каждый из этих факторов очень незначительно изменяет течение процесса или явления, так что внешний наблюдатель может регистрировать лишь суммарное действие всех факторов.

Таким образом возникает задача, связанная с изучением сумм эффекта действия большого числа независимых случайных величин, каждая из которых оказывает на сумму малое влияние. Эта задача получила решение в центральных предельных теоремах теории вероятностей.

Свое название эти теоремы получили в связи с подходом к их доказательству, в котором рассматривается последовательность сумм со все большим и большим числом слагаемых, а решение ищется в виде предельных функций распределения для последовательности функций распределения частичных сумм.

Мы приведем здесь только формулировки центральной предельной теоремы в форме А. А. Ляпунова и ее частного случая — теоремы Муавра–Лапласа. Их полное доказательство приводится в более продвинутых курсах, представленных в списке рекомендованной литературы.

**ТЕОРЕМА 38.5 (Центральная предельная теорема)**
Если $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — попарно независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математическое ожидание $\mu$ и дисперсию $\sigma^2$, то при $n \to \infty$ закон распределения суммы $\sum_{i=1}^{n} X_i$ сходится к нормальному:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \qquad (38.7)$$

Для справедливости такой формулировки должно быть выполнено условие А. А. Ляпунова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} M\,|X_i - \mu|^2}{(n\sigma^2)^{3/2}} = 0.$$

**ТЕОРЕМА 38.6 (Теорема Муавра–Лапласа.)**
Если в каждом из $n$ независимых опытов событие $A$ появляется с вероятностью $p$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\alpha < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta), \qquad (38.8)$$

где $X$ — число появлений события $A$ в $n$ опытах, а $q = 1 - p$.

Приведенные теоремы позволяют получать решения для целого ряда интересных прикладных задач.

С момента появления электронных вычислительных машин широкое распространение получил численный метод решения математических задач при помощи машинного моделирования случайных процессов и событий, получивший название метод Монте-Карло. (Название метода идет от названия города Монте-Карло, известного своим казино с рулеткой). При использовании этого метода искомая величина, например, интеграл представляется в виде математического ожидания множества случайных величин с определенной плотностью распределения, которая и моделируется на ЭВМ с помощью специальных программ — датчиков псевдослучайных чисел. Обычно моделируют

случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0,1]$, а затем их преобразовывают в нужное распределение.

Итак, перейдем к рассмотрению следующей задачи. Сколько надо произвести опытов при вычислении интеграла

$$J=\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью 0,9 можно было считать относительную погрешность в вычисленном значении интеграла менее $5\%$?

Мы специально взяли интеграл, для которого можно получить аналитическое решение, чтобы не затушевывать как существо метода Монте-Карло, так и применение центральной предельной теоремы.

Для вычисления указанного интеграла методом Монте-Карло его рассматривают как математическое ожидание функции случайной величины $X$, равномерно распределенной в интервале $[0,\frac{\pi}{2}]$. В этом случае приближенное значение интеграла можно записать в виде

$$J_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos x_k,$$

где $x_k$ — случайные числа из интервала $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Составим новую случайную величину

$$T_n=\frac{J_n-J}{\sqrt{D[J_n]}},$$

имеющую своим предельным законом распределения, согласно теореме Ляпунова, функцию $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, так как $x_k$ независимы и одинаково распределены, а $J=M[J_n]$. Имеем

$$D[J_n]=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{4}D[\cos X]=\frac{\pi^2}{4n}\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx-\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)^2\right]=$$

$$=\frac{\pi^2}{4n}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-8}{8n}.$$

Отсюда

$$\sqrt{D[J_n]}=\sqrt{\frac{\pi^2-8}{8n}}$$

и, применяя теорему Ляпунова, при $b=-a=\varepsilon$ получим

$$P\left(\sqrt{\frac{8n}{\pi^2-8}}\,|J_n-J|<\varepsilon\right)\approx\Phi(\varepsilon)=0{,}9,$$

откуда $\varepsilon=1{,}645$.

Для того чтобы относительная погрешность $(J_n-J)/J$ была меньше 0,05, и учитывая, что $J=1$, необходимо провести число опытов $n$ такое, при котором

$$0{,}05\sqrt{\frac{8n}{\pi^2-8}}>1{,}645.$$

Несложно подсчитать, что $n>252$.

## Вопросы для самопроверки

1. Приведите формулировки центральной предельной теоремы.
2. Приведите формулировки закона больших чисел.
3. Сформулируйте условия, при которых нормальное распределение может служить аппроксимацией к биномиальному.
4. Случайные величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ имеют одинаковые математические ожидания и ограниченные дисперсии. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел, если все величины $M[(X_i - \overline{x})(X_j - \overline{x})]$ отрицательны?
5. Пусть $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ последовательность случайных величин такая, что $X_k$ может зависеть только от $X_{k-1}$ и $X_{k+1}$, но не зависит от всех других. Доказать, что к последовательности этих случайных величин применим закон больших чисел, если только все $X_k$ имеют конечные дисперсии и математические ожидания.
6. Пользуясь теоремой Муавра–Лапласа, показать, что при достаточно большом числе опытов $n$
$$P\left(p - \varepsilon \leqslant \frac{m}{n} \leqslant p + \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$
где $\frac{m}{n}$ — частота появления события, вероятность которого $p$.
7. Плотность распределения вероятности случайных ошибок измерения известной постоянной величины $a$ некоторым прибором в процессе $n$ независимых опытов остается неизменной. Можно ли принять величину
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2,$$
где $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ — результаты измерения величины $a$, в качестве приближенного значения дисперсии ошибок исследуемого прибора?

## Упражнения и задачи

1. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1$, $X_2$, ..., $X_i$, ... задана плотностью распределения
$$p(X_i = k) = \frac{1}{k^3\zeta(3)}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots,$$
где $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = 1{,}20256$ — значение функции Римана при аргументе 3. Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.
2. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1$, $X_2$, ..., $X_i$, ... задана плотностью распределения
$$p\left\{X_i = (-1)^{k-1}k\right\} = \frac{6}{k^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$
Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.
3. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1.

4. Вероятность появления события при одном испытании равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 испытаниях будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4.
5. Вычисление интеграла $J = \int_0^1 x^2\,dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых испытаний. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении интеграла не превзойдет 0,001.
6. Сколько опытов надо произвести при вычислении интеграла $J = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $p \geqslant 0{,}99$ можно было считать абсолютную погрешность в вычисленном значении интеграла не превосходящей 0,1% от его значения?
7. Найти вероятность того, что среди 10 000 случайных цифр цифра 1 появится не более 968 раз.
8. Найти приближенное значение для вероятности того, что число выпадений шестерки при 12 000 бросаний кости будет заключено между 1900 и 2150.
9. Найти такое число $k$, чтобы с вероятностью 0,5 число выпадений герба при 1000 бросаниях монеты было заключено между 440 и $k$.
10. Чтобы найти процент женщин в обществе, производится выборка. Найти такой объем выборки, чтобы с вероятностью не меньше 0,99 ошибка при выборке была меньше 0,005.
11. При 10 000 бросаний монеты герб выпал 5400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?
12. Для оценки качества партии продовольствия она подвергается проверке. Вероятность того, что наудачу выбранный образец продовольствия окажется некачественным при каждой проверке, одна и та же и равна 0,1. Партия продовольствия не принимается при обнаружении не менее 10 бракованных образцов. Сколько надо проверить образцов, чтобы с вероятностью 0,6 можно было утверждать, что партия, имеющая 10% некачественного товара, не будет принята?
13. Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число независимых опытов, обеспечивающих с вероятностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по неравенству Чебышева и по теореме Лапласа.
14. Доказать, что если $M[e^{X^2}]$ существует, то

$$P\left(|X| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{M[e^{X^2}]}{e^{\varepsilon^2}}.$$

# XXXIX

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Строгое понятие информации, точнее количества информации, появилось только в 50-х годах XX столетия, хотя само слово — латинское informatio — разъяснение, изложение — известно очень давно и широко использовалось и используется для обозначения сведений и процесса их передачи и получения.

Потребности теории связи привели к развитию комплекса идей, составивших, в конечном счете, теорию информации. Теория информации в ее современном виде — это научная дисциплина, изучающая способы передачи и хранения информации наиболее надежными и экономными методами. Однако, являясь разделом математики и кибернетики, теория информации используется для решения широкого круга задач в самых разных областях знания.

Официальной датой рождения этой научной дисциплины считается 1948 год, когда были опубликованы «Математическая теория связи» Клода Шеннона и «Кибернетика» Норберта Винера. Нисколько не умаляя заслуг этих двух выдающихся американских ученых, следует отметить, что в разных областях науки еще задолго до выхода в свет этих работ появлялись идеи, на базе которых и сформировалась современная теория информации.

Впервые идею о связи между вероятностью и информацией высказал известный английский статистик Рональд Фишер. С другой стороны, ряд результатов, сыгравших значительную роль в формировании теории информации, был сформулирован в физике еще в прошлом веке. Так, например, на базе фундаментальных работ, выполненных Л. Больцманом, стало возможным связать понятия вероятности с мерой необратимости (неопределенности) тепловых процессов, получившей название термодинамической энтропии. Впоследствии понятие энтропии, но уже применительно к процессам передачи сигналов стало, наряду с понятием количества информации, основным в теории информации.

Значительный вклад в становление теории информации внесли такие крупнейшие отечественные специалисты в области теории вероятностей и математической статистики как А. Н. Колмогоров, С. Н. Бернштейн, А. Я. Хинчин и ряд других. Так как основные положения теории информации построены на понятиях и методах теории вероятностей и математической статистики, то в определенном смысле теория информации может считаться хотя и самостоятельной, но ветвью этих математических дисциплин.

## § 39.1. МЕРА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

В теории информации собственно понятие информации не определено. Однако необходимым и достаточным условием для построения этой теории является понятие *количества информации*. Количество информации должно определяться через нечто, присущее всему многообразию существующей информации, оставаясь нечувствительным при этом к ее смыслу и ценности. Этим общим является факт проведения эксперимента (опыта), понимаемого в обобщенном смысле, и наличие неопределенности в том или ином исходе эксперимента. В самом деле, если бы получателю до опыта было бы известно, какое сообщение он получит в результате его проведения, то получив сообщение, он не приобрел бы никакого количества информации.

Понятно также, что после проведения эксперимента ситуация становится более определенной, так как либо можно однозначно ответить на вопрос, который стоял перед проведением эксперимента, либо число возможных ответов, а следовательно, и неопределенность уменьшатся. Количество снятой неопределенности после эксперимента можно считать тем количеством информации, которое было получено в ходе этого эксперимента.

Итак, мера количества информации должна отвечать следующим интуитивно понятным свойствам:

1. Количество получаемой информации больше в том испытании, в котором больше число возможных исходов, т. е.

$$I(k) \geqslant I(r), \text{если } k > r. \tag{39.1}$$

   Здесь $I$ — количество информации, $k$ и $r$ — число исходов.

2. Испытание с одним исходом, т. е. когда имеет место достоверное событие, несет количество информации, равное нулю:

$$I(k = 1) = 0. \tag{39.2}$$

3. Количество информации в двух независимых испытаниях должно равняться сумме количеств информации от каждого из них:

$$I(k \cdot r) = I(k) + I(r). \tag{39.3}$$

Единственной функцией от числа возможных исходов, отвечающей этим требованиям, является логарифмическая. Таким образом, если после испытания неопределенность отсутствует, то количество информации после испытания с $k$ возможными исходами

$$I = c \log_a k. \tag{39.4}$$

В этом выражении предполагается, что все исходы равновероятны, т. е. $p = 1/k$, так что оно может быть переписано в виде

$$I = -c \log_a p.$$

Основание логарифмов $a$ и постоянная $c$ могут быть выбраны произвольно в силу известного тождества $\log_b n = \log_b a \cdot \log_a n$. Отсюда следует, что переход от одной системы логарифмов к другой сводится к умножению на постоянный множитель, т. е. эквивалентен простому изменению масштаба. Для удобства принимают $c = 1$ и $a = 2$, тогда

$$I = -\log_2 p = \log_2 k. \tag{39.5}$$

Единица измерения количества информации при основании логарифмов $a = 2$ носит название двоичной единицы — бита (англ. binary digit) и соответствует количеству

информации, получаемому в результате испытания с двумя равновероятными исходами. (В дальнейшем изложении обозначение log без указания основания будет означать логарифм по основанию 2.)

Рассмотрим теперь более общий случай, когда исходы испытаний не равновероятны. Пусть у испытания $X$ имеется $n$ исходов $x_i$ с вероятностями $p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. В этом случае количество информации, получаемое при реализации исхода $x_i$, является случайной величиной и равно $I(x_i) = -\log p(x_i)$. Случайная мера информации неудобна для использования, поэтому производят операцию усреднения частных количеств информации по отдельным исходам и получают следующее соотношение:

$$I = \overline{I(x_i)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i. \tag{39.6}$$

Это соотношение определяет среднее количество информации, которое несет произвольный исход $x_i$ при условии, что после опыта неопределенность исхода отсутствует.

Для иллюстрации свойств количества информации рассмотрим несколько задач.

*ЗАДАЧА 39.1.* Пусть в некотором университете студенты-естественники составляют 25% от общего числа студентов, 50% из них (естественников) юноши, а всего в университете 35% юношей. Вопрос состоит в том, какое количество информации содержится в сообщении, что встреченный юноша — студент-естественник?

Решение этой задачи можно получить двумя способами. По первому из них, события: «встречен юноша» и «встречен студент-естественник» обозначим через $x_1$ и $x_2$ соответственно. Тогда вероятность совместного наступления событий $x_1$ и $x_2$ по теореме умножения вероятностей равна $p(x_1)p(x_2/x_1) = p(x_2)p(x_1/x_2)$, откуда $p(x_2/x_1) = \frac{p(x_2)p(x_1/x_2)}{p(x_1)}$.

Из условий задачи имеем: $p(x_1) = 0{,}35$, $p(x_2) = 0{,}25$, $p(x_1/x_2) = 0{,}5$. Следовательно,

$$p(x_2/x_1) = \frac{p(x_2)p(x_1/x_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{0{,}35} = 0{,}357.$$

Откуда $I = -\log p(x_2/x_1) = -\log 0{,}357 = 1{,}486$ (бит).

Второй подход к решению этой задачи выглядит так. Количество информации, которое содержится в сообщении, что встреченный юноша — студент-естественник, равно

$$I(x_1, x_2) = -\log p(x_1, x_2) = -\log[p(x_2)p(x_1/x_2)] = -\log(0{,}25 \cdot 0{,}5).$$

В то же время, если встречен просто юноша, то количество информации равно $I(x_1) = -\log p(x_1) = -\log 0{,}35$. Это количество информации мы получаем из условий задачи, так как известно, что встречен был юноша. Таким образом, нам необходимо узнать, сколько дополнительной информации содержится в сообщении, что он студент-естественник. Естественно, ответ на это можно получить, вычитая из количества информации о том, что встреченный юноша — студент-естественник, известное нам количество информации о том, что встреченный студент — юноша:

$$I = I(x_1, x_2) - I(x_1) = -\log(0{,}25 \cdot 0{,}5) - (-\log 0{,}35) = -\log \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{0{,}35} = 1{,}486 \text{ бит}.$$

Естественно, что независимо от подхода к решению, ответ остается одним и тем же.

● *ЗАДАЧА 39.2.* Известно, что среди 12 драгоценных монет одинакового достоинства одна монета фальшивая (имеет меньший вес). Какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах без гирь надо произвести, чтобы обнаружить фальшивую монету?

Понятно, что любая монета, взятая наугад, может оказаться фальшивой. Поэтому количество информации, полученное из сообщения «взятая наугад монета фальшивая», $I_1 = -\log(1/12) = 3{,}58$ (бита). Так как произвольное взвешивание имеет три равновероятных исхода (чашки весов в равновесии, перевесила правая чашка, перевесила левая чашка), то количество информации от одного взвешивания равно $I_2 = -\log(1/3) = 1{,}58$ (бита). Следовательно, минимальное число взвешиваний равно целой части отношения

$$[I_1/I_2] = [2{,}3] + 1 = 3.$$

Как же должно быть организовано взвешивание, позволяющее выделить информацию, «имеющуюся» у фальшивой монеты? В данном случае процедура должна быть организована так, чтобы всякий раз в результате взвешивания получать 1,58 бита информации. Для этого разбивают 12 монет на три равные подгруппы по 4 монеты, взвешивают и сравнивают веса любых двух групп, более легкую из них снова разбивают на три подгруппы $(1, 1, 2)$, сравнивают веса первых двух подгрупп (по одной монете) и, если чашки остались в равновесии, сравнивают веса двух оставшихся монет, что и позволит однозначно определить фальшивую монету.

● *ЗАДАЧА 39.3.* Эксперимент имеет три исхода: $x_1, x_2, x_3$ с соответствующими вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}3$. Необходимо найти точные и средние количества информации, которые несут указанные выше исходы.

Точные количества информации, получаемые в результате реализации каждого из исходов, равны соответственно: $I_1 = -\log 0{,}2 = 2{,}32$ (бита); $I_2 = -\log 0{,}5 = 1$ (бит); $I_3 = -\log 0{,}3 = 1{,}74$ (бита).

Так как каждый из исходов появляется со своей вероятностью, то $\overline{I(x_i)} = 2{,}32 \times \times 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}5 + 1{,}74 \cdot 0{,}3 = 1{,}49$ (бит). Из этого результата следует, что операцией усреднения индивидуальное различие исходов по информативности уничтожается.

Приведенные примеры иллюстрируют общие подходы к оценке количества информации. При этом естественно, что содержательная сторона задач может меняться в зависимости от области исследования.

## § 39.2. ЭНТРОПИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Формула (39.6) определяет среднее количество информации, которое содержится в произвольном исходе $x_i$, при условии, что после проведения испытания неопределенность отсутствует. В тех же случаях, когда после испытания остается некоторая неопределенность, в рассмотрение вводится новое понятие — энтропия.

**Определение 39.1.** *Энтропией $H(X)$ называется среднее количество неопределенности того или иного исхода до проведения испытания.*

Формула для вычисления энтропии такая же, как и для количества информации, так как количество уменьшенной неопределенности после проведения испытания тождественно количеству полученной информации в результате такого испытания.

Рассмотрим основные свойства энтропии:

$1^{\circ}$. Энтропия неотрицательна, т. е. $H(X) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только в том случае, когда испытание имеет один достоверный исход.

Положительность энтропии видна из формулы для ее определения. В самом деле, вероятности, входящие в эту формулу, положительны и заключены между нулем и единицей, откуда следует, что их логарифмы отрицательны. Знак «минус» перед выражением для энтропии делает всю сумму положительной.

$2^{\circ}$. При заданном $n$ энтропия максимальна и равна $\log n$, когда все исходы, получаемые в ходе проведения испытания, равновероятны.

● Необходимо найти максимум функции $H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$ при очевидном условии, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Этот максимум можно отыскать, используя множители Лагранжа. Составим функцию

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right),$$

где $\lambda$ — множитель Лагранжа, и приравняем к нулю частные производные этой функции:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left[H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\right] = 0. \tag{39.7}$$

Подставляя в это равенство значение энтропии и выполняя дифференцирование, получим

$$-\frac{1}{\ln 2}(\ln p_i + 1) + \lambda = 0,$$

откуда $p_i = e^{\lambda \ln 2 - 1}$.

Используя дополнительное условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda \ln 2 - 1} = n e^{\lambda \ln 2 - 1} = 1,$$

откуда $e^{\lambda \ln 2 - 1} = 1/n = p_i$.

Таким образом, показано, что энтропия достигает экстремального значения при равновероятных исходах испытания. Если теперь найти вторую производную в (39.7), то

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i^2}\left[H(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right)\right] = -\frac{1}{p_i \ln 2} < 0,$$

откуда следует, что значения $p_i = 1/n$ обеспечивают максимум функции энтропии. Если теперь подставить найденные для $p_i$ значения в формулу для энтропии, то получим

$$H(X) = -\sum \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n,$$

что и требовалось доказать.

$3^{\circ}$. Средняя неопределенность до испытания совместного наступления любого из событий $(x_i, y_i)$ задается выражением

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j).$$

В данном случае речь идет о сложном испытании ($XY$), включающем в себя два более простых испытания ($X$) и ($Y$) со следующими вероятностями различных исходов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_n) \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ p(y_1) & p(y_2) & \ldots & p(y_m) \end{pmatrix}.$$

Такое сложное испытание имеет $nm$ возможных исходов с вероятностями $p(x_i, y_j)$, причем $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$. Примером может служить испытание с одновременным подбрасыванием двух игральных костей, когда какой-то из 36 возможных исходов с необходимостью реализуется.

4°. $H(X,Y) = H(Y,X)$. Это свойство следует из того, что $p(x_i, y_j) = p(y_j, x_i)$.

5°. Неопределенность совместного наступления двух событий меньше суммы неопределенностей каждого из них, т. е. $H(X,Y) \leqslant H(X)+H(Y)$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда исходы $x_i$ и $y_j$ для всех $i$ и $j$ независимы.

● Пусть $P_k$ и $G_k$ произвольные положительные числа, такие, что $\sum_{k=1}^{r} P_k = \sum_{k=1}^{r} G_k = 1$. Покажем, что в этом случае

$$-\sum_{k=1}^{r} G_k \log G_k \leqslant -\sum_{k=1}^{r} G_k \log P_k. \tag{39.8}$$

Очевидно, что равенство в этом соотношении выполняется, когда $P_k = G_k$.

Определим, рассматривая $G_k$ как параметры, при каких значениях $P_k$ функция $F(P_1, P_2, \ldots, P_r) = -\sum_{k=1}^{r} G_k \log P_k$ имеет минимальное значение. Применяя уже использованный выше способ множителей Лагранжа, найдем $P_k$ из уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[F(P_1, P_2, \ldots, P_k) + \lambda\left(\sum_{k=1}^{r} P_k - 1\right)\right] = 0,$$

подставляя в них значения $F$.

Выполнив дифференцирование, получим $P_k = G_k/\lambda \ln 2$. Если теперь просуммировать обе части этого равенства по $k$, то

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = \frac{1}{\lambda \ln 2}\sum_{k=1}^{r} G_k.$$

По принятому условию $\sum_{k=1}^{r} P_k = \sum_{k=1}^{r} G_k = 1$, следовательно, $\lambda \ln 2 = 1$ и, значит, $P_k = G_k$. Несложно показать, что вторая производная функции $F(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ положительна. Поэтому значения $P_k = G_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$ обеспечивают минимум этой функции и, следовательно, во всех остальных случаях, когда $P_k \neq G_k$, правая часть (39.8) больше левой. Показав это, можно приступить к доказательству самого свойства энтропии.

Из свойств вероятности известно, что

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_i) = 1.$$

Следовательно, можно записать

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(x_i) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log p(x_i) \tag{39.9}$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(x_i/y_j)\log p(y_j) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log p(y_j). \tag{39.10}$$

После сложения (39.9) и (39.10) имеем

$$H(X) + H(Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log\big(p(x_i)p(y_j)\big).$$

Пусть теперь $r = mn$, $G_k = p(x_i, y_j)$, $P_k = p(x_i)p(y_j)$.

Тогда

$$H(X,Y) = -\sum_{k=1}^{r} G_k \log G_k; \quad H(X) + H(Y) = -\sum_{k=1}^{r} G_k \log P_k.$$

Из сравнения этих равенств с (39.8) следует

$$H(X,Y) \leqslant H(X) + H(Y),$$

что и требовалось доказать.

6° $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)$.

● Определим условную энтропию опыта $Y$ как

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i). \tag{39.11}$$

Эта величина дает среднюю неопределенность исхода любого из событий $y_j$ ($j = 1,2,\ldots,m$) при любом известном исходе $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Имеем

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i) \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i) = H(X) + H(Y/X).$$

7° . $H(Y/X) \geqslant 0$.

Положительность условной энтропии очевидна, так же как и для энтропии вообще, а равенство нулю возможно только в тех случаях, когда события $x_i$ и $y_j$ статистически полностью зависимы. В этом случае, если известен исход любого события $x_i$, то с вероятностью 1 известен и исход связанного с ним события $y_j$.

8° . Если события $x_i$ и $y_j$ статистически независимы при любых $i$ и $j$, то $H(Y/X) = H(Y)$. В самом деле, в этом случае, зная исход $x_i$, мы не получаем никакой информации о $y_j$, т. е. средняя неопределенность в исходе $y_j$ остается равной $H(Y)$, независимо от того, знаем ли мы об исходе $x_i$ или нет.

9° Если события $x_i$ и $y_j$ статистически зависимы, то всегда $H(Y/X) < H(Y)$. Это неравенство становится очевидным, если рассмотреть свойства 5° и 6° .

Описанные свойства энтропии хорошо согласуются с интуитивно понятными требованиями, предъявляемыми к количественной мере неопределенности, и это естественно, так как в определение энтропии заложены сформулированные в предыдущем параграфе постулаты относительно количества информации, получаемой в результате проведения экспериментов с вероятностными исходами.

Когда в предыдущем параграфе вводилась формула для количества информации, то предполагалось, что после проведения эксперимента неопределенности в его исходе нет. Однако в значительном числе практически интересных случаев неопределенность все же остается. Пусть у нас есть канал передачи информации, на который действуют шумы, искажающие передаваемые по каналу сигналы. Например, в качестве такого канала можно рассмотреть репродуктивную систему животных или человека, по которой передается наследственная информации в виде молекул ДНК, а поля разной физической

природы могут рассматриваться как шум, который иногда приводит к искажению передаваемых сигналов со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Итак, обозначим передаваемые сигналы через $x_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а принимаемые — через $y_j$, где $j = 1, 2, \ldots, m$. Так как при передаче сигнал может подвергнуться искажению, то для принятия правильного решения о том, какой сигнал $x_i$ передан, если принят сигнал $y_j$, необходимо использовать вероятности $p(x_i/y_j)$. Используя эту вероятность, можно подсчитать, какое количество информации (в среднем) содержится в принятом сигнале $y_j$ относительно переданного сигнала $x_i$. В самом деле, после получения конкретного сигнала неопределенность его соответствия конкретному переданному сигналу равна случайной величине $-\log p(x_i/y_j) = H(x_i/y_j)$. Если речь идет о соответствии данного $y_j$ любому из $x_i$, то среднее значение неопределенности равно

$$H(X/y_i) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j).$$

Величина $H(X/y_j)$ также случайна, вероятности ее значений равны $p(y_j)$, а среднее значение определит среднее количество неопределенности соответствия любого $y_j$ любому $x_i$, т. е.

$$H(X/Y) = \sum_{j=1}^{m} H(X/y_j) \cdot p(y_j) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j).$$

Если учесть, что неопределенность передачи некоторого сигнала до начала передачи $H(X)$, а после получения сигнала $H(X/Y)$, то количество информации, имеющееся в принятом сигнале относительно переданного, равно

$$I(Y, X) = H(X) - H(X/Y). \tag{39.12}$$

Используя свойства энтропии $4^{\text{o}}$ и $6^{\text{o}}$ , имеем

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y).$$

Подставляя это выражение в (39.12), получим

$$I(Y, X) = H(X) + H(Y) - H(X/Y).$$

Несложные преобразования, предлагаемые в качестве самостоятельного упражнения, переводят (39.12) в следующее выражение:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) \cdot p(y_j)}. \tag{39.13}$$

Из этой формулы следует ряд основных свойств количества информации. Перечислим их:

$1^{\text{o}}$ . $I(X, Y) = I(Y, X)$, т. е. количество информации, содержащееся в случайном объекте $Y$ о случайном объекте $X$, равно количеству информации, содержащемуся в случайном объекте $X$ о случайном объекте $Y$, что следует из (39.13), если учесть, что $p(x_i, y_j) = p(y_j, x_i)$.

$2^{\text{o}}$ . $I(X, Y) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место тогда, когда объекты $X$ и $Y$ независимы. Это свойство вытекает из свойства $9^{\text{o}}$ энтропии и из того факта,

что если объекты $X$ и $Y$ независимы, то по теореме умножения вероятностей $p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$ и под знаком логарифма в (39.13) будет стоять единица во всех слагаемых, так что правая часть этой формулы будет равна нулю.

$3^{\circ}$. $I(X, X) = H(X)$, т. е. энтропия может быть истолкована как информация, содержащаяся в объектах относительно самих себя, и из этого следует, что максимальное количество информации, которое можно получить об объекте, численно равно энтропии.

Рассмотрим гипотетический пример, связанный с оценкой количества информации, которую получает преподаватель после приема у студентов зачета по математике.

Итак, студент сдает указанный зачет с вероятностью $a$, не проработав весь материал курса, и с вероятностью $b$, если весь курс проработан. С другой стороны, он может не сдать зачет и в том случае, если весь курс не проработан, и в том случае, если проработан (соответствующие вероятности $c$ и $d$). Как упоминалось выше, нас интересует количество информации, получаемое преподавателем после приема зачета.

Обозначим через $X$ случайное число студентов, сдававших зачет (сдавших и не сдавших), а через $Y$ число студентов (тоже случайное) с разной степенью подготовки (подготовленных и не подготовленных).

Итак, $x_1$ и $x_2$ — случайное число студентов, соответственно сдавших и не сдавших зачет, $y_1$ и $y_2$ — случайное число студентов, соответственно подготовленных и неподготовленных к зачету. Как следует из условий примера:

$$p(x_1, y_2) = a; \quad p(x_1, y_1) = b; \quad p(x_2, y_2) = c; \quad p(x_2, y_1) = d.$$

Для определения интересующего нас количества информации необходимо найти соответствующие условные вероятности, что может быть сделано с использованием формулы полной вероятности:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j), \quad p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j).$$

Если в эти формулы подставить приведенные выше совместные вероятности, то получим $p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) = a + b$ и соответственно $p(x_2) = c + d$, $p(y_1) = b + d$, $p(y_2) = a + c$.

Подставив все эти промежуточные результаты в (39.13), имеем

$$I(X, Y) = b \log \frac{b}{(a+b)(b+d)} + a \log \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \\ + d \log \frac{d}{(c+d)(b+d)} + c \log \frac{c}{(c+d)(a+c)}.$$

Имеет смысл (в качестве упражнения для самостоятельной работы), приписывая соответствующим вероятностям различные численные значения, получить для количества информации оценку в битах и выработать в соответствии с этим стратегию поведения при сдаче и приеме соответствующего зачета.

В заключение заметим, что рассмотренные понятия энтропии и количества информации были введены и обсуждались для дискретных объектов, имеющих конечное (счетное) множество состояний. Однако они допускают обобщение и на непрерывные случайные величины.

## Вопросы для самопроверки

1. Показать, что количество информации о случайной величине $X$, которое может быть получено в результате наблюдения случайной величины $Y$, есть неотрицательная величина.
2. Доказать, что $I(X/Y) = I(Y/X)$.
3. Доказать, что максимальное значение количества информации $I(X/Y)$ о дискретной величине $X$, получаемое по наблюдениям другой случайной величины $Y$, равно энтропии $H(X)$.
4. Для некоторой системы двух зависимых дискретных случайных величин $(X, Y)$ имеет место равенство $I(X/Y) = H(X)$. Известно, что вероятности $p(X = x_k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ отличны от нуля. Что означает данное равенство и когда оно возможно?
5. Сформулируйте задачу из области специализации, при решении которой необходимо вычислить энтропию и количество информации.
6. Перечислите свойства, которым должна удовлетворять мера количества информации.

## Упражнения и задачи

1. Вероятность появления события при одном испытании равна $p$, непоявления события $q = 1 - p$. При каком $p$ результат испытания обладает наибольшей неопределенностью?
2. Производится стрельба по двум мишеням: по первой сделано два выстрела, по второй — три. Вероятности попадания при одном выстреле равны соответственно $1/2$ и $1/3$. Исход стрельбы по какой мишени является более определенным?
3. В правильный $n$-угольник путем соединения середин его соседних сторон вписан другой правильный $n$-угольник. Точка, поставленная внутри данного многоугольника, может оказаться внутри или вне вписанного многоугольника. Определить: а) энтропию опыта; б) значение $n$, при котором энтропия максимальна.
4. Имеются два условия проведения эксперимента: а) внутри правильного треугольника ставится наугад точка, которая может оказаться внутри или вне вписанного в него круга; б) внутри круга наугад ставится точка, которая может оказаться внутри вписанного в него правильного треугольника. Исход какого из экспериментов более неопределен?
5. Определить энтропию случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения: а) в общем случае; б) при $n = 2$, $p = q = 0{,}5$.
6. Число $X$ появлений события $A$ в серии из $n$ независимых испытаний распределено по биномиальному закону с вероятностью $p$ появления события в одном испытании. В зависимости от результатов этой серии происходит или не происходит событие $B$ с условными вероятностями $p(B/X = m) = q_m$, $p(\overline{B}/X = m) = 1 - q_m$. Определить количество информации о появлении события $B$, рассматривая последнее как случайную величину, принимающую значения 1 и 0.
7. В условиях предыдущей задачи определить количество информации, если

$$q_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m > 0. \end{cases}$$

8. В условиях предыдущей задачи определить: а) число испытаний в серии $k$, которому соответствует максимальное значение количества информации о событии $B$ при заданном $p$; б) диапазон значений $p$, при котором $20 \leqslant k \leqslant 30$.
9. Число $X$ появлений события $A$ в серии независимых испытаний распределено по закону Пуассона. В зависимости от результатов этой серии происходит или не происходит событие $B$ с условными вероятностями $p(B/X = m) = q_m$, $p(\overline{B}/X = m) = 1 - q_m$. Определить количество информации о появлении события $B$, если
$$q_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m > 0. \end{cases}$$
10. В условиях предыдущей задачи определить математическое ожидание $\mu$ числа появлений события $A$, которому соответствует максимальное значение количества информации о появлении события $B$.
11. Из-за помех имеется элемент неопределенности в приеме сигналов. Приему зеленого сигнала в трех случаях из четырех соответствует передача сигнала «Да» и в одном случае сигнала «Нет». Приему красного сигнала в двух случаях из четырех соответствует передача сигнала «Да», а в двух других случаях сигнала «Нет». Определить количество информации о переданном сигнале, содержащееся в принятом сообщении, если прием зеленого или красного сигнала одинаково вероятен.
12. В условиях предыдущей задачи приему сигнала того или иного цвета соответствует один и тот же процент случаев передачи сигналов «Да» или «Нет». Определить количество информации, содержащейся в таком сообщении.

# XL

# ОБЩИЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Математическая статистика является теоретической основой анализа экспериментальных данных. Она представляет собой научную дисциплину, предметом исследования которой являются математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Термин «статистика» (от латинского status) и производные от него слова получили свое современное понимание относительно недавно — каких-то 150 лет назад, хотя само по себе слово известно еще со средних веков, когда оно обозначало политическое состояние и науку о политическом состоянии отдельных государств. С таким пониманием этого слова можно встретиться даже в художественной литературе того времени. Так, например, в сцене на кладбище в пятом акте «Гамлета» В. Шекспира главный герой произносит следующие слова: «Возможно, голова, с которой этот осел обходится так пренебрежительно, принадлежала какому-нибудь статистику, который собирался перехитрить самого господа Бога».

В дальнейшем термин «статистика» приобрел более узкий смысл, как описание рядов чисел, характеризующих отдельные стороны деятельности государства, а затем был перенесен и на числовые ряды из других областей знания, таких, например, как метеорология и антропология. Этот смысл слова «статистика» сохранился до нашего времени и является общеупотребительным. Это слово употребляется также еще в двух смыслах: как название математической дисциплины, являющейся предметом рассмотрения в настоящем разделе, а также для обозначения числовой характеристики, описывающей множество данных.

Основы статистики как математической дисциплины были заложены еще в трудах П. Лапласа и К. Гаусса по теории ошибок. Решающее значение для развития математической статистики сыграли работы представителей русской классической школы теории вероятностей П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова и др. Практически в том виде, в каком она существует и поныне, математическая статистика, особенно в той части, которая связана с решением практических задач анализа экспериментальных данных, сформировалась в конце XIX и начале XX века. Именно в это время трудами Ф. Гальтона, К. Пирсона и Р. Фишера, инициированными необходимостью решения ряда практических задач из биологии, были разработаны новые разделы в математической статистике, получен ряд основополагающих теоретических результатов, проведена огромная работа по составлению статистических таблиц, позволивших сделать математическую статистику инструментом практического анализа данных наблюдений и экспериментов.

Доказывать важность статистики для естествознания нет никакой необходимости. И если среди специалистов-естественников иногда и возникают споры о том, важна ли статистика или нет, то это частично объясняется естественным недоверием, которое возникает у каждого при знакомстве с какой-либо трудной и не до конца понятной теорией, а частично — резонной критикой злоупотреблений статистическими методами в некоторых практических задачах, в которых использование этих методов не является естественным.

В многочисленных применениях математической статистики можно разграничить три типа ее взаимоотношений с естествознанием. Во-первых, это создание математического аппарата некоторых разделов отдельных естественных наук, во-вторых, это описание случайных процессов, протекающих в системах самой разной природы, и наконец, это обработка результатов экспериментов и наблюдений.

В основе этих взаимоотношений лежат совершенно объективные причины. В первом случае — это статистический характер ряда фундаментальных законов природы, во втором — случайный характер событий, образующих сложные естественные процессы, в третьем — экспериментальный характер естествознания.

Статистические методы — это не только способ обобщения опытных данных в виде определенных показателей. И в общих, и в частных случаях эти методы способны служить основой для принятия правильных решений тогда, когда нужно сделать выбор между альтернативными подходами. Самым важным в статистических методах является то, что они способствуют более глубокому пониманию изучаемых объектов и процессов и соответствуют природе вещей в окружающей нас среде.

Анализ данных играет чрезвычайно важную роль в работе естествоиспытателя. Он требует большого опыта и, в определенной степени, базируется на интуиции. Возникает вопрос: что можно посоветовать студенту или начинающему исследователю, желающему как можно быстрее достичь достаточно высокого уровня в анализе данных? Или все, что остается сказать, так это посоветовать приобрести большой опыт, который и является основой как для выработки интуиции, так и для использования строгих логических методов в анализе данных?

Конечно, опыт — вещь незаменимая. Его приобретение в профессиональной области вообще и в анализе данных в частности, начинается, как правило, с заимствования исходных подходов из литературы или из общения со специалистами, когда собственного опыта и интуиции еще недостаточно. (Кстати, этот учебник, как и любой другой, есть в определенной части набор начальных рекомендаций для «подражания».) Однако только ознакомление с тем, как анализируют данные другие, недостаточно для того, чтобы профессионально овладеть анализом данных. И связано это вот с чем.

Излагая результаты исследований, гипотезы, лежащие в их основе, и методы, с помощью которых эти результаты были получены, обычно используют логическую реконструкцию проведенной работы, которая, вообще говоря, не имеет практически никакого отношения к реальным психологическим процессам, имеющим место при решении конкретных исследовательских задач.

В научных статьях, монографиях, да и в учебниках тоже, зачастую описывают все так, как если бы заранее было известно, какие результаты должны быть получены. Все жестко логически упорядочено, все следствия получаются в результате последовательных дедуктивных шагов. И у начинающего исследователя или студента может сложиться впечатление, что именно так и строится процесс анализа данных. На самом деле это совсем не так. Следует об этом помнить и развивать собственные способности интуитивно понимать существо исследуемого процесса или явления,

не копируя слепо последовательность строго логических шагов, которые приводятся в публикациях. Кстати, ограничения на объем публикаций не позволяют автору привести все сформулированные, но оказавшиеся впоследствии ложными гипотезы, результаты тех расчетов, которые оказались ненужными, и т. д.

Конечно, профессионализм в анализе данных предполагает наличие некоторых стандартных «схем», число которых в значительной мере зависит от характера тех задач, с которыми приходилось встречаться ранее. Однако число реальных ситуаций настолько велико, что отыскивать готовую схему, полностью применимую в конкретном случае, довольно проблематично. Перейдем к некоторым рекомендациям, которые, возможно, окажутся полезными для выработки собственного опыта в организации анализа данных.

Прежде всего, анализ данных следует рассматривать как последовательную итеративную процедуру, в ходе которой происходит все большее и большее извлечение информации из исходных «сырых» данных и формулирование все более содержательных выводов. Начинать следует с наиболее простых методов обработки данных, эволюционно наращивая сложность этих методов. Несмотря на кажущуюся тривиальность такой рекомендации, ее необходимо здесь привести, так как начинающие (да и не только начинающие) исследователи, особенно те из них, которые располагают современными пакетами прикладных программ статистического анализа, грешат использованием сразу очень сложных подходов к анализу данных. Итог, как правило, разочарование, так как с помощью вычисленных показателей, ввиду их сложности и неоднозначности, не удается дать содержательную трактовку в рамках анализа данных.

Вторая рекомендация состоит в том, что целесообразно использовать в качестве начального приближения набор методов по аналогии, извлекаемых из работ, где анализ данных привел к интересным результатам. Получаемые собственные результаты дают основание либо остановиться в дальнейшем анализе, либо попробовать в соответствии с поставленной задачей другие показатели или их комбинации для содержательной трактовки.

Но даже остановившись с анализом на данном этапе, следует помнить, что использование иных методов, чем те, что были использованы, может позволить взглянуть на имеющиеся экспериментальные данные совсем с другой, не менее интересной стороны.

И вообще, необходимо отчетливо осознавать, что только использование разных наборов показателей и методов анализа позволит получить достаточно содержательную трактовку экспериментальных данных. К сожалению, это становится ясным лишь после опробования всех этих показателей и методов. Но именно такая «избыточная» работа способствует выработке умения и интуиции.

## § 40.1. ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ДАННЫХ

Приступая к статистическому анализу, необходимо иметь достаточный объем качественных экспериментальных данных. Для их получения принципиально важно планирование экспериментов, которое при своем правильном использовании позволяет очень существенно сократить силы и средства для получения исходных данных и повысить эффективность последующего анализа. Планирование экспериментов в настоящее время является самостоятельной математической дисциплиной на базе математической статистики, знакомство с основными идеями которой необходимо каждому естествоиспытателю.

Ввиду того, что результаты наблюдений и измерений обладают изменчивостью, иногда значительной, желательно иметь как можно больше исходных данных. К сожалению,

не всегда объем данных достаточно велик, и приходится для получения достоверных выводов прибегать к довольно изощренным методам анализа. Конечно, по возможности необходимо получить как можно больший объем данных, так как это главный залог достоверности получаемых в результате статистического анализа выводов. Но при этом не следует затрачивать слишком большие усилия для получения соответствующих величин с очень высокой точностью, так как это почти не сказывается на окончательных результатах статистического анализа.

Данные, независимо от их объема, должны быть тщательно документированы, что существенно облегчает преемственность работы с ними разных специалистов, позволяет возвращаться к анализу этих данных вновь в связи с появлением новых гипотез, и т. д. Такое документирование обязательно должно включать в себя имя как самого исследования, так и имена собранных массивов данных, переменных и способов анализа. Все это достигается при современном уровне развития математического обеспечения ЭВМ довольно простыми средствами, но позволяет решать при этом очень важные задачи, связанные с контролем переменных при проведении дальнейшего статистического анализа, обнаружением неточностей и ошибок и т. д.

Если экспериментальных данных достаточно много, то возникает проблема их группировки, т. е. представления в более компактной и наглядной форме. При этом надо различать вопросы, связанные с представлением динамических рядов, и группировкой тех данных, для которых пространственные и временные факторы не играют существенной роли. В этой главе мы будем иметь дело с данными второго типа. Проблемы анализа динамических рядов будут специально рассмотрены в главе 47.

Кроме того, следует иметь в виду, что экспериментальные данные могут быть разнотипны, т. е. представлены в количественной или порядковой шкалах, а также быть одно- и многомерными. И хотя большинство из обсуждаемых в этом разделе методов предполагают работу с одномерными количественными данными, определенное место уделено как многомерным методам, так и методам анализа данных, представленных ранговыми и двоичными переменными.

Статистические данные в «сыром» виде представляют, как правило, беспорядочную массу материала. Поэтому первой задачей статистического анализа является такая группировка данных, при помощи которой можно было бы оценить их значение в связи с поставленной задачей, облегчить сравнение с другими данными того же рода и получить возможность дальнейшего анализа. Прежде чем результаты измерений или наблюдений будут подвергнуты дальнейшей обработке и обобщению, позволяющим делать из них выводы, им должна быть придана определенная форма и ясная структура в виде распределения численностей.

Начальным этапом предварительного анализа данных является их *ранжирование*. Ряд называется ранжированным, если все его значения расположены в порядке возрастания. Ранжирование позволяет представить общую структуру данных и подготавливает основу для дальнейшего анализа. Следующим шагом является *группирование*, т. е. объединение результатов наблюдений в определенные совокупности. И здесь сразу возникает вопрос о ширине интервала группирования. Строгих правил для выбора числа интервалов группирования, а следовательно, и для выбора ширины интервала не существует. Практический же опыт первичного анализа экспериментальных данных показывает, что удовлетворительным в подавляющем числе случаев является число интервалов от 5 до 15. При этом следует иметь в виду, что чем однороднее материал, тем большее число интервалов выбирается и наоборот.

Определив, на какое число групп будут разбиваться все данные, ширину интервала группирования находят из соотношения

$$\Lambda = (x_{\max} - x_{\min})/k,$$

где $\Lambda$ — ширина интервала, $x_{\max}$, $x_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное измеренные значения, $k$ — число интервалов группирования.

Определив число интервалов и их ширину, приступают к заполнению таблицы распределения численностей, т. е. определяют, какое число экспериментальных значений попадает в каждый класс-интервал. Табл. 40.1 представляет пример таблицы распределения численностей.

*Таблица 40.1.*

| Класс-интервал, мм | $n_i$ | $\overline{p}_i$ |
|---|---|---|
| 140,0–142,9 | 15 | 0,015 |
| 143,0–145,9 | 43 | 0,043 |
| 146,0–148,9 | 80 | 0,080 |
| 149,0–151,9 | 131 | 0,131 |
| 152,0–154,9 | 236 | 0,236 |
| 155,0–157,9 | 185 | 0,185 |
| 158,0–160,9 | 142 | 0,142 |
| 161,0–163,9 | 99 | 0,099 |
| 164,0–166,9 | 37 | 0,037 |
| 167,0–169,9 | 15 | 0,015 |
| 170,0–172,9 | 12 | 0,012 |
| 173,0–176,0 | 5 | 0,005 |
| | $\sum_{i=1}^{12} n_i = 1000$ | $\sum_{i=1}^{12} \overline{p}_i = 1{,}00$ |

В качестве исходных данных для ее построения использовались результаты измерений ширины головы взрослых мужчин.

Исходные данные, используемые для построения таблиц распределения численностей, измеряются с определенной точностью, и может оказаться, что расчет ширины интервала приводит к тому, что одно или несколько значений попадают точно на границу интервала. При этом возникает проблема, к какому класс-интервалу относить эти значения. Чтобы избежать неоднозначности, принято верхнюю границу каждого из класс-интервалов, кроме последнего, уменьшать на величину, которая на порядок меньше точности проводимого измерения. Данные, приведенные в табл. 40.1, измерялись с точностью до миллиметра, поэтому верхние границы интервалов были уменьшены на 0,1 мм. Если бы замеры велись с точностью до десятой миллиметра, то следовало бы уменьшить верхние границы на 0,01 мм и т. д. Этим самым мы гарантируем себя от попадания измеренного значения точно на границу и от неопределенности, к какому класс-интервалу его относить.

Таблицы распределения численностей позволяют экспериментатору представить материал измерений и наблюдений в упорядоченном виде и служат исходным пунктом для дальнейшего анализа. Фактически в этих таблицах сконцентрирована вся информация о характере экспериментальных данных.

Учитывая, однако, что человек лучше ориентируется в графически представленных данных, чем в цифрах, желательно таблицы распределения численностей изображать графически. Вообще значимость этапа графического представления данных трудно переоценить. Зачастую оказывается, что визуальный анализ графических изображений может исчерпать исследование экспериментальных данных или, по крайней мере, внести в него существенные коррективы. Но даже если такого визуального анализа оказывается недостаточно, наглядное представление материала занимает важнейшее место в предварительном анализе экспериментальных данных.

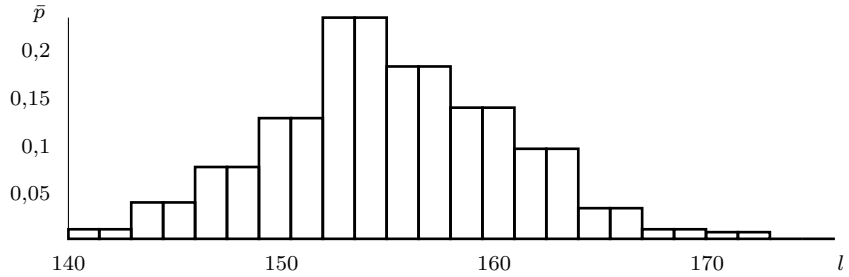



*Рис. 40.1.*

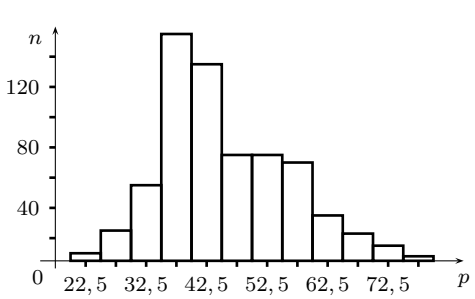



*Рис. 40.2.*

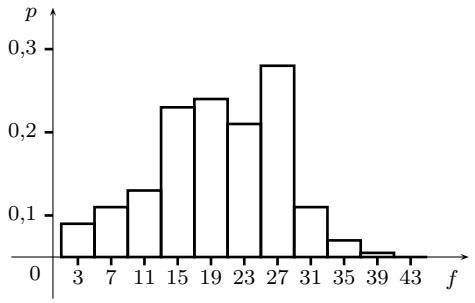



*Рис. 40.3.*

Существует несколько типов графических изображений данных, содержащихся в таблицах распределения численностей. Важнейшими из них являются *гистограмма*, *полигон* и *кривая накопленных частот*.

*Гистограммой* называется столбиковая диаграмма, графически представляющая таблицу распределения численностей. Каждый столбик гистограммы имеет своим основанием отрезок, равный по величине ширине класс-интервала, а высота этого столбика равна в соответствующем масштабе числу значений, попадающих в данный класс-интервал. Образец гистограммы, соответствующий данным, представленным в табл. 40.1, приведен на рис. 40.1.

Другие гистограммы приведены на рис. 40.2–40.4.

Из этих гистограмм видно, что экспериментальные данные могут иметь самый различный характер: быть симметричными или скошенными, уплощенными или заостренными и т. д. Обо всех этих особенностях эмпирических распределений численностей мы будем подробно говорить далее, а здесь отметим только следующее.

Количество данных, по которым строятся гистограммы, может быть самым разным, и, чтобы иметь возможность сравнивать между собой графики, построенные в одном случае по десяткам, в другом — по тысячам значений, необходимо строить гистограммы

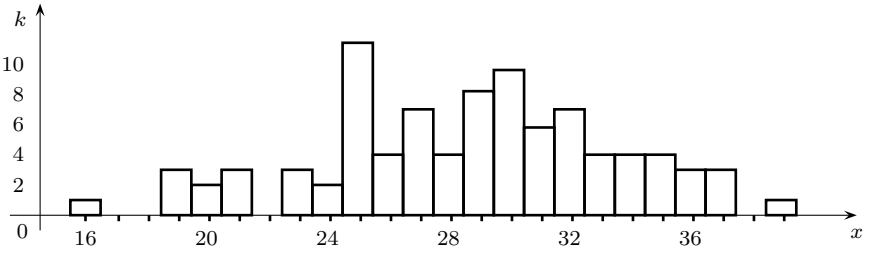



*Рис. 40.4.*

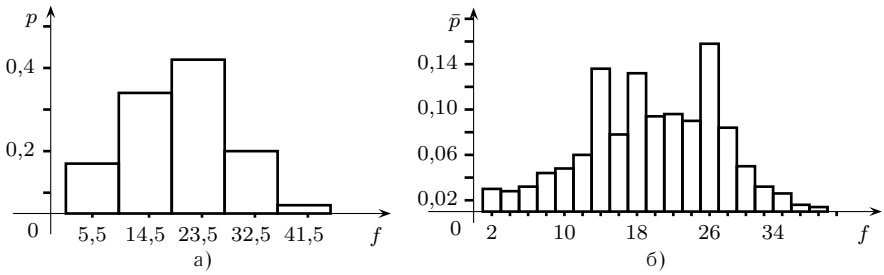



*Рис. 40.5.*

не в абсолютных цифрах числа значений, попадающих в определенный класс-интервал, а в относительных, представляющих собой долю, которую составляет это число от общего числа экспериментальных данных, включенных в таблицу распределения численностей (третий столбец в табл. 40.1).

Выше мы уже говорили о том, что число интервалов разбиения выбирается произвольно в диапазоне от 5 до 15. При отсутствии достаточного опыта это число может быть выбрано неудачно, что приводит или к чрезмерному сглаживанию гистограммы, или к тому, что гистограмма получается «рваной» (рис. 40.5 а,б соответственно).

Как бы то ни было, истинный характер распределения численностей при этом затушевывается. Чтобы избежать этого, существует графический способ аппроксимации гистограмм непрерывными кривыми, суть которого состоит в следующем.

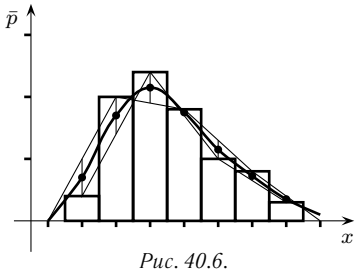



*Рис. 40.6.*

По обе стороны от крайних интервалов гистограммы откладывается по одному интервалу с нулевой численностью. Фактически это просто отрезки на оси абсцисс, равные по ширине значению класс-интервала. Отметив середины каждого столбика гистограммы, их соединяют через один между собой. Из середины каждого столбика восстанавливают перпендикуляр до пересечения с отрезком прямой, соединяющим середины соседних столбиков. Затем находят середину отрезка, заключенного между основанием перпендикуляра и точкой пересечения, найденной на предыдущем шаге. Если теперь соединить эти середины между собой плавной линией, то полученная кривая достаточно хорошо соответствует распределению численностей и является более информативной, чем исходная гистограмма. Хотя предложенный эмпирический метод аппроксимации не имеет строгого обоснования, он дает вполне удовлетворительные результаты. Графическое представление изложенной процедуры дано на рис. 40.6.

Другой тип графического представления таблиц распределения численностей реализуется с помощью так называемого *полигона* частот. Для его построения из середин каждого интервала восстанавливается перпендикуляр, высота которого равна числу или доле числа значений, попадающих в этот интервал. Концы всех перпендикуляров последовательно соединяются ломаной линией. Для того чтобы получить замкнутый многоугольник, крайние точки этой ломаной соединяются с точками, лежащими на оси абсцисс и представляющими середины интервалов с нулевой численностью, расположенных по обе стороны от крайних интервалов.

Построение и использование полигонов частот целесообразно в тех случаях, когда на одном графике хотят поместить для сравнения изображения нескольких распределений численностей. В этом случае применять гистограммы нежелательно,

так как столбики перекрывают друг друга и рисунок становится недостаточно наглядным. На рис. 40.7 приведен полигон частот по данным табл. 40.1.

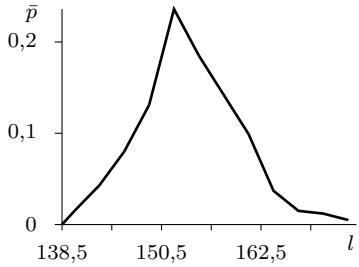



*Рис. 40.7.*

Еще один вид графического представления исходных данных — так называемые *кривые накопленных частот (огивы)*. Эти интегральные кривые используются для сравнения законов распределения исследуемых случайных переменных и понадобятся нам в дальнейшем при обсуждении критерия Колмогорова–Смирнова в главе 45.

Так же, как и полигоны, кривые накопленных частот могут быть использованы для графического сопоставления двух и более распределений. Кроме того, с их помощью иногда можно визуально установить некоторые закономерности, не обнаруживаемые при рассмотрении гистограмм и полигонов.

Принцип подготовки данных, необходимых для построения кривой накопленных частот, становится очевидным из рассмотрения табл. 40.2.

*Таблица 40.2.*

| **Класс-интервал, мм** | $n_i$ | $\bar{p}_i$ | $\sum_{i=1}^{12} n_i$ | $\sum_{i=1}^{12} \bar{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 140,0–142,9 | 15 | 0,015 | 15 | 0,015 |
| 143,0–145,9 | 43 | 0,043 | 58 | 0,058 |
| 146,0–148,9 | 80 | 0,080 | 138 | 0,138 |
| 149,0–151,9 | 131 | 0,131 | 269 | 0,269 |
| 152,0–154,9 | 236 | 0,236 | 505 | 0,505 |
| 155,0–157,9 | 185 | 0,185 | 690 | 0,690 |
| 158,0–160,9 | 142 | 0,142 | 832 | 0,832 |
| 161,0–163,9 | 99 | 0,099 | 931 | 0,931 |
| 164,0–166,9 | 37 | 0,037 | 968 | 0,968 |
| 167,0–169,9 | 15 | 0,015 | 983 | 0,983 |
| 170,0–172,9 | 12 | 0,012 | 995 | 0,995 |
| 173,0–176,0 | 5 | 0,005 | 1000 | 1,000 |
| | $\sum_{i=1}^{12} n_i = 1000$ | $\sum_{i=1}^{12} \bar{p}_i = 1{,}000$ | | |

Первые три столбца этой таблицы повторяют табл. 40.1. Два последующих представляют собой накопленные к началу каждого следующего класс-интервала численности и частоты соответственно. График, представляющий собой кривую накопленных частот, показан на рис. 40.8.

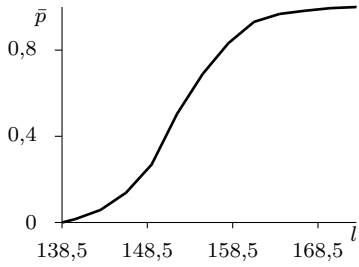



*Рис. 40.8.*

Помимо трех упомянутых, существует еще целый ряд графиков и диаграмм, с правилами построения можно ознакомиться по рекомендуемой литературе и по описаниям к пакетам прикладных программ, о которых пойдет речь в следующем параграфе. Каждый из существующих видов графических изображений экспериментальных данных может оказаться наилучшим в зависимости от характера исходных данных и той цели, которой хотят достичь. Но независимо от вида любой правильно построенный и хорошо изображенный график способствует лучшему пониманию данных, представленных таблично, позволяет осуществлять операции контроля и в конечном счете глубже разобраться в существе изучаемых процессов или объектов. Вот почему первичный анализ и интерпретация обобщенных исходных данных обязательно должны сопровождаться наглядным графическим представлением.

## § 40.2. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИКИ

Современные информационные технологии существенно облегчают проведение трудоемких вычислений при статистическом анализе экспериментальных данных, и без использования современной вычислительной техники и программного обеспечения трудно себе представить серьезную экспериментальную работу. Однако следует сразу сделать одно замечание. В настоящее время имеется достаточное число хороших методов обработки данных, пригодных для решения большинства возникающих задач статистического анализа, и программное обеспечение, реализующее эти методы. Поэтому так или иначе формальное решение почти любой задачи обработки данных всегда может быть получено. В этой связи исследователь-экспериментатор должен качеством исходных данных и содержательной интерпретацией гарантировать, что полученный машинными методами результат имеет под собой реальный смысл.

Одним из широко используемых программных продуктов являются электронные таблицы, включающие в себя, помимо электронных бланков экспериментальных данных, программы обработки этих данных и программы графического представления как исходных данных, так и результатов их анализа. Кроме того, в состав программного обеспечения электронных таблиц входят специальные, ориентированные на конкретную электронную таблицу, языки программирования, позволяющие пользователю создавать собственные, не входящие в стандартный набор, библиотеки программ обработки и представления экспериментальных данных.

Программное обеспечение современных электронных таблиц за счет стандартизации электронных форматов представления исходных данных и результатов вычислений позволяет использовать их как для дальнейшей более сложной обработки, так и для передачи в базы данных.

Электронные таблицы в достаточно полной мере реализуют требования к документированию и паспортизации экспериментальных данных, позволяют легко их редактировать и пополнять. Просмотр электронных таблиц позволяет достаточно легко обнаруживать грубые ошибки, допущенные в ходе документирования или паспортизации данных, при их вводе в таблицы, а также аномальные значения, которые должны быть предметом специального анализа.

Электронные таблицы позволяют осуществлять сортировку данных, в том числе и ранжирование, и получать первые, грубые представления о характере распределения экспериментального материала.

Другим интенсивно развиваемым программным средством для статистического анализа с использованием ЭВМ являются пакеты прикладных программ (ППП).

Развитие ППП идет как по пути разработки и включения в них новых алгоритмов статистического анализа, так и по пути совершенствования человеко-машинного интерфейса, обеспечивающего простоту и доступность проведения анализа даже относительно неквалифицированному пользователю.

Все современные ППП имеют тщательно подобранную и хорошо оформленную документацию, позволяющую составить себе представление о потенциальных возможностях этих пакетов и правилах работы с ними. С помощью простых инструкций можно формулировать задания для обработки экспериментальных данных и легко исправлять возникающие иногда при этом ошибки.

Естественно, что все ППП статистического анализа предусматривают диалоговый режим работы, позволяющий легко манипулировать данными, представленными или в

электронных таблицах, или вводимыми непосредственно с клавиатуры, или попадающими в ЭВМ через систему автоматизированного проведения экспериментов. Они обеспечивают возможность организации последовательных многошаговых процедур обработки данных, в том числе и большой размерности. Кроме того, практически все существующие и перспективные ППП представляют промежуточные и окончательные результаты в виде, доступном для использования другими программами и на других типах ЭВМ.

Мы умышленно не обсуждаем возможности конкретных ППП, равно как и электронных таблиц (например, BMDP, SPSS, Excel и др.), предназначенных для документирования и статистического анализа экспериментальных данных, так как к моменту выхода этого учебника в свет появятся новые версии уже существующих или совсем новые программные продукты. Однако нам представляется, что принципиальные их возможности, приведенные выше, останутся неизменными в течение ближайшей перспективы.

В заключение хочется обратить внимание на два момента, связанных с использованием вычислительных машин и пакетов прикладных программ для статистической обработки данных.

Во-первых, пользователям-экспериментаторам надо отрешиться от того почти мистического благоговения, с которым они относятся к вычислительным машинам. Машина, хоть и электронная и вычислительная, не более, чем машина — великолепный помощник при выполнении рутинных операций. Правда, ЭВМ делают для нас через программы и базы данных доступными опыт и знания, заложенные в них специалистами, но все равно не могут заменить нам «маленькие серые клеточки», так же как и для знаменитого героя А. Кристи.

Во-вторых, результаты, получаемые с помощью ЭВМ, верны настолько, насколько не ошибаются программисты, создающие программы, и пользователи, собирающие данные и организующие ввод этих данных в ЭВМ.

И, наконец, в-третьих, учитывая индуктивный характер выводов, получаемых с помощью статистической обработки данных, и существующую веру в непогрешимость ЭВМ и их программное обеспечение, велика опасность дать содержательную трактовку любому полученному результату, всерьез демонстрируя шуточный «постулат»: число разумных гипотез, объясняющих любое данное явление, бесконечно.

В заключение этой главы еще раз отметим, что применение статистических методов в естествознании по существу представляет собой *выбор* некоторой статистической *модели*, *проверку* ее *соответствия* экспериментальным данным и *анализ* статистических и содержательных результатов, вытекающих из ее рассмотрения. Основная цель — получение осмысленных заключений из подверженных разбросу данных.

Перечислим теперь основные задачи обработки данных, решаемые с использованием методов математической статистики:

- выбор и определение вида распределений для полученных в эксперименте наборов случайных величин;
- оценка параметров распределений;
- сравнение параметров разных распределений;
- выявление статистических связей.

Подходы к решению этих задач будут рассмотрены в последующих главах.

# XLI

# ОПИСАТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ

## § 41.1. КОНЦЕПЦИЯ СЖАТИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Как было указано в предыдущей главе, графическое представление всей совокупности экспериментальных данных позволяет многими способами осмыслить длинные ряды наблюдений. Тем не менее построение графиков и таблиц представляет собой только первый шаг при статистическом анализе данных. Следующий шаг — представление результатов в компактной форме, удобной для хранения, сопоставления с другими данными и т. д. При этом желательно, чтобы характерные особенности распределения численностей выражались небольшим числом показателей.

Графические представления распределения численностей, приведенные в предыдущей главе, очень существенно отличаются друг от друга. Однако у всех этих графиков существуют и общие характерные особенности, которые позволяют их сравнивать между собой.

Прежде всего видно, что все распределения группируются относительно некоторого центра. Для измерения положения этого центра существует группа показателей, носящих название мер центральной тенденции. К ним относятся средние (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое), мода и медиана.

Другой характерной особенностью распределений численностей является разброс экспериментальных значений относительно центра распределения. Количественная оценка этого разброса осуществляется с помощью мер рассеяния, важнейшими из которых являются размах, дисперсия, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Визуальный анализ графических изображений показывает, что некоторые распределения асимметричны, т. е. по обе стороны от центра расположено неравное количество значений, причем асимметрия может быть как право-, так и левосторонней. Наконец, графики некоторых распределений более заострены, а других — уплощены. Эти характерные особенности распределений экспериментальных данных — скошенность и островершинность — также могут быть описаны с помощью показателей асимметрии и эксцесса (островершинности).

Оказывается, что для описания практически любого встречающегося на практике распределения численностей достаточно этих четырех групп мер: показателей центральной тенденции, показателей рассеяния (вариации), показателей асимметрии и показателей эксцесса, вся совокупность которых получила название статистик свертки.

Эти статистики должны отвечать целому ряду интуитивно понятных требований. В самом деле, ясно, что когда множество результатов измерений редуцируется, т. е. описывается небольшим числом показателей, то естественно потребовать, чтобы эти показатели извлекали максимум содержащейся в данных информации. Это в свою очередь предъявляет определенные требования к статистикам свертки. Более подробно

об этих требованиях будет говориться в главе 44, посвященной статистическому оцениванию. Здесь же попытаемся обсудить свойства статистик свертки и проблемы, которые при этом возникают, в содержательных понятиях.

Как указывалось выше, для оценки каждой из характерных особенностей распределений численности существует несколько различных показателей. Отдельные из этих показателей позволяют извлечь из исходных данных разное количество информации в зависимости от формы кривой распределения, от объема экспериментальных данных и т. д. Естественно, для количественного описания распределения численностей в конкретных условиях нужно выбирать такие показатели, которые позволяют извлечь из имеющихся данных максимум информации. Такими показателями будут те, и это интуитивно понятно, которые по мере увеличения числа наблюдений все более точно описывают соответствующие особенности кривых распределений.

С данными объектами, например, определенным видом животных или растений может работать как один исследователь в течение нескольких сезонов, так и целые группы ученых. В силу присущей природным объектам изменчивости получаемые каждый раз совокупности данных будут несколько отличаться как у одного, так и у разных экспериментаторов.

Естественно потребовать, чтобы вычисляемые показатели при работе с одними и теми же объектами отличались друг от друга как можно меньше. Так как для оценки какой-либо характерной особенности распределения численностей может быть использовано несколько показателей, то целесообразно выбрать тот, у которого разброс значения для множества совокупностей экспериментальных данных будет минимальным.

Приведенные соображения о свойствах показателей, с помощью которых можно сжато представлять весь объем опытных данных, должны учитываться при выборе тех из них, которые наилучшим образом соответствуют сформулированным требованиям и, следовательно, позволяют извлечь максимум информации из экспериментальных данных. Для всех используемых в математической статистике показателей теоретически исследованы их свойства, поэтому экспериментатору следует лишь знать и осмысленно выбирать наиболее подходящие из них. К сожалению, в силу разных причин не всегда можно построить такие оценки, которые удовлетворяли бы всем указанным свойствам, поэтому приходится идти на компромисс.

Кроме приведенных соображений, в значительной мере представляющих интерес для теоретических статистических исследований, существует и ряд сугубо практических требований к показателям, используемым для более компактного описания экспериментальных данных. Некоторые из них мы перечислим.

Во-первых, любой из показателей должен вычисляться с помощью строго определенного алгоритма.

Во-вторых, при вычислении значения показателя, как правило, должны использоваться все имеющиеся данные.

В-третьих, любой показатель не должен иметь слишком абстрактный характер и должен обладать достаточно простыми и ясными свойствами, чтобы была возможна его содержательная интерпретация.

И, наконец, в-четвертых, показатели должны быть достаточно устойчивы, т. е. не сильно различаться для отдельных выборок, взятых из одного и того же множества данных.

В последующих параграфах этой главы будут рассмотрены основные показатели, используемые для описания распределения численностей, и будет обсуждено, насколько каждый из них соответствует требованиям, вытекающим из концепции сжатия экспериментальных данных.

## § 41.2. ПОКАЗАТЕЛИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

### 41.2.1. СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ

Пусть имеется $n$ объектов, для которых после измерения некоторой характеристики получаем набор значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ (ряд $X$).

Величина

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{41.1}$$

носит название среднего арифметического или выборочного среднего. В дальнейшем будем называть его просто средним. Среднее, как и требуется от меры центральной тенденции, представляет собой координату точки, относительно которой группируются все значения ряда данных. Эта мера в полном объеме соответствует тем требованиям к статистикам свертки, о которых говорилось выше, и в силу этого является наиболее употребительной.

Среднее обладает рядом свойств, которые представляют интерес сами по себе и понадобятся при дальнейшем изложении.

Сформулируем несколько вопросов. Если найти разности между всеми значениями ряда $X$ и средним, а затем сложить эти отклонения, то чему будет равна эта сумма? Оказывается, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0,$$

т. е. *сумма отклонений всех значений ряда $X$ от собственного среднего равна нулю*. Доказательство этого и двух других свойств, излагаемых ниже, предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

А что будет с величиной среднего, если ко всем значениям ряда прибавить некоторую константу $a$ или умножить на некоторую константу $b$? Ответы на эти вопросы представляют собой формулировки еще двух свойств среднего.

*Если ко всем значениям ряда $X$ прибавить константу $a$, то новое среднее станет равным $\overline{x} + a$.*

*Если все значения ряда $X$ умножить на некоторую константу $b$, то новое среднее станет равным $b\overline{x}$.*

Еще одно свойство среднего формулируется так:

*Сумма квадратов отклонений всех значений ряда $X$ от их среднего меньше суммы квадратов отклонений от любого другого значения.*

Что в этом контексте означает выражение «любое другое значение»? Это значит, что такое значение отличается от среднего на произвольную константу $c$. Докажем справедливость сформулированного свойства:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i - (\overline{x} + c)\big)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\big((x_i - \overline{x}) - c\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\big((x_i - \overline{x})^2 - 2c(x_i - \overline{x}) + c^2\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 - 2c\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} c^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + nc^2,\end{aligned}$$

так как $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ в силу указанного выше свойства среднего. Величина $nc^2$ всегда больше или равна $0$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + nc^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - (\overline{x} + c)\big)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2. \tag{41.2}$$

Это свойство среднего имеет приложения в приближенных решениях задач следующего вида. Допустим, на основании достаточно обширного экспериментального материала известны средние характеристики одного и того вида животных или растений, занимающих разные экологические ниши. Экземпляры из разных мест обитания будут, как правило, отличаться по численным значениям некоторых характеристик. Если в распоряжении исследователя оказалась одна или несколько особей, для которых известно, что они взяты из одного какого-то местообитания, но неизвестно, из какого именно, то как решить вопрос об их принадлежности к той или иной экологической нише? (Впервые поставил и решил такую задачу немецкий ихтиолог Ф. Гейнике при изучении принадлежности отдельных особей к той или иной расе сельдей Северного моря. При этом было использовано приведенное выше свойство среднего.)

Как практически его использовать, покажем на следующем примере. Были использованы данные о количестве язычковых цветков в соцветиях нивяника, произрастающего на сыром лугу ( $X$ ) и на опушке леса ( $Y$ ). По рядам наблюдений, насчитывающих много сот значений, были получены соответствующие средние значения: $\overline{x} = 26{,}8$, $\overline{y} = 22{,}7$. Затем из каждого набора данных случайно было выбрано по 10 значений: $x$: 28, 26, 22, 27, 27, 28, 21, 28, 23, 33 и $y$: 23, 25, 31, 26, 24, 21, 22, 23, 23, 22. Здесь важно подчеркнуть, что значения в выборках перекрываются, так что качественный анализ не позволяет ответить на вопрос, к какому местообитанию относятся растения по данному признаку.

Если же рассчитать $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2$, $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{y})^2$, $\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2$, $\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{x})^2$, то получим соответственно 114,6; 137,7; 78,9; 152,4. Отсюда следует, что сумма квадратов отклонений значений ряда от собственного среднего меньше, чем от среднего другого ряда. Следовательно, можно достаточно уверенно утверждать, из какого местообитания взяты растения.

В данном примере заранее была известна принадлежность обеих выборок к тому или иному местообитанию. Однако и в реальной ситуации используется тот же самый подход.

Расчеты, проведенные с помощью соответствующих алгоритмов для ЭВМ, показывают, что если в расчет принимается только одна характеристика объекта, то достаточно в выборке, принадлежность которой к определенной совокупности неизвестна, иметь 6–8 значений, чтобы использование обсуждаемого здесь свойства среднего позволило решить задачу идентификации, т. е. отнесения взятой выборки к определенной совокупности.

Таким образом, можно сделать предположение о том, что даже один объект достаточно обоснованно может быть отнесен к той или иной совокупности, если он характеризуется 6–8 независимыми признаками и если известны средние по этим же признакам для всех совокупностей. Так, известен пример определения вида по 8 количественным характеристикам измерения черепа. Были найдены отклонения этих характеристик для черепа зайца неизвестного вида от соответствующих средних для зайца-беляка и зайца-русака. Ряды отклонений по абсолютной величине выглядят так: от беляка — 1,7; 4,2; 0; 2; 1,8; 3,4; 0,6; 6,1, от русака — 2,8; 2,5; 1; 0; 0,8; 2,1; 2,1; 2. Суммы квадратов этих отклонений равны соответственно 60,05 и 28,55, поэтому сделан вывод о том, что неизвестный череп принадлежал зайцу-русаку.

### 41.2.2. МЕДИАНА

Медиана ( $Md$ ) определяется как срединное значение в ранжированном ряду данных. Это значит, что по обе стороны от нее расположено ровно по половине данных. Применительно к кривой распределения медиана представляет такую точку на оси абсцисс, что ордината, проходящая через нее, делит площадь под кривой на две равные части.

Если число данных $n$ в выборке нечетно, то медиана соответствует $(n+1)/2$ по порядку значению в ранжированном ряду. Если же $n$ четно, то медиана выбирается равной среднему арифметическому из двух значений, занимающих в этом ряду $(n/2)$ и $(n/2)+1$ места по порядку.

В тех случаях, когда в выборке относительно немного данных, медиана ищется по указанному правилу. Если же данных много и они представлены в виде таблицы распределения численностей, то медиана определяется приближенно в том класс-интервале, для которого накоплено более половины значений анализируемого ряда данных.

*Таблица 41.1.*

| **Интервал, с** | **Срединная точка интервала, $a_0$** | **Численность, $n_i$** | **Отклонение в единицах интервала, $d_i$** | $n_i \cdot d_i$ | $n_i \cdot d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,490–0,614 | | 27 | −2 | −54 | 108 |
| 0,614–0,738 | | 40 | −1 | −40 | 40 |
| 0,738–0,862 | 0,800 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 0,862–0,986 | | 15 | 1 | 15 | 15 |
| 0,986–1,110 | | 2 | 2 | 4 | 8 |

Рассмотрим вычисление медианы по данным о длительности сердечного цикла у детей, приведенным в табл. 41.1.

Так как число значений в выборке четно, то медиана равна среднему из 63 и 64 значений в ранжированном ряду. Из таблицы видно, что эти значения лежат во втором класс-интервале. Предположим, что все 40 значений этого интервала распределены внутри него равномерно, так что на каждое значение приходится $1/40$ ширины интервала, т. е. $0{,}124/40 = 0{,}003$ (этой точности в данном случае достаточно). К началу второго интервала было уже накоплено 27 значений, значит, интересующие нас 63 и 64 порядковые значения занимают во втором интервале соответственно $63 - 27 = 36$ и $64 - 27 = 37$ места и, следовательно, отстоят от нижней границы интервала на 0,108 и 0,111. Таким образом, чтобы найти медиану, необходимо к нижней границе второго интервала прибавить 0,108 и 0,111 и для полученных таким образом значений найти среднее: $Md = ((0{,}614 + 0{,}108) + (0{,}614 + 0{,}111))/2 = 0{,}723$ с.

Медиана обладает одним интересным свойством, на котором основывается ее теоретическое и практическое применение. Это свойство состоит в том, что

**ТЕОРЕМА 41.1**
Сумма абсолютных значений отклонений всех значений ряда от его медианы есть величина наименьшая.

● Пусть даны значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, расположенные в порядке возрастания. Найдем величину $M$ такую, что $x_1 < M < x_n$ и $\sum_{i=1}^{n} |x_i - M| = min$. Предположим, что $x_k \leqslant M \leqslant x_{k+1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - M| = \sum_{i=1}^{k} (M - x_i) + \sum_{l=k+1}^{n} (x_l - M) \to \min.$$

Продифференцировав это выражение и приравняв производную нулю, получим $k - (n - k) = 0$, откуда $k = n/2$. Таким образом, сумма абсолютных отклонений ранжированного ряда от некоторого значения минимальна в том случае, если это значение занимает срединное положение в таком ряду. А это не что иное, как медиана. ●

### 41.2.3. МОДА

Мода ($Mo$) представляет собой наиболее часто встречающееся в распределении численностей значение. Если к данным таблицы распределения численностей подобрать теоретическую кривую распределения, то мода равна абсциссе точки, имеющей максимальную для этой кривой ординату. Иногда кривая распределения имеет две или более вершин, в этом случае кривая называется би- или полимодальной. При этом только одно значение удовлетворяет определению моды, и это значение носит название *наибольшей моды*.

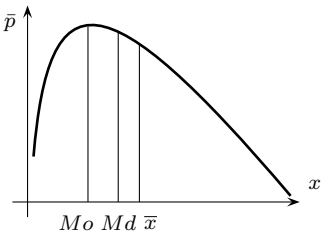


*Рис. 41.1.*

Существует несколько приближенных способов оценки моды. Один из них состоит в том, что гистограмма тем или иным способом аппроксимируется непрерывной кривой, и затем находится абсцисса, соответствующая максимальной ординате. Она и будет приближенно равна моде.

В симметричных распределениях $\overline{x}, Mo, Md$ совпадают, в умеренно асимметричных распределениях $Md$ находится между $\overline{x}$ и $Mo$ на расстоянии от $\overline{x}$, равном примерно одной третьей расстояния от $\overline{x}$ до $Mo$ (рис. 41.1). На этом и построено приведенное ниже эмпирическое соотношение (41.3)

$$Mo = \overline{x} - 3(\overline{x} - Md). \tag{41.3}$$

### 41.2.4. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

Прежде всего рассмотрим, как оценивать среднее, моду и медиану по объединенным выборкам. Пусть известны средние значения диаметров эритроцитов (в мкм) для трех групп людей:

$$\overline{x}_A = 7{,}18;\ n_A = 125;\ \overline{x}_B = 8{,}39;\ n_B = 87;\ \overline{x}_C = 6{,}87;\ n_C = 34$$

и необходимо найти среднее для объединения всех трех групп.

Общее число значений $n = n_A + n_B + n_C = 125 + 87 + 34 = 246$. Среднее объединенной выборки есть сумма всех 246 значений, деленная на 246. Сумма значений группы $A$ в соответствии с формулой (41.1) равна $\sum_{i=1}^{n_A} x_i = n_A\overline{x}_A = 125 \cdot 7{,}18 = 897{,}5$. Аналогично для групп $B$ и $C$: $\sum_{k=1}^{n_B} x_k = n_B\overline{x}_B = 87 \cdot 8{,}39 = 729{,}93$; $\sum_{l=1}^{n_C} x_l = n_C\overline{x}_C = 34 \cdot 6{,}87 = 233{,}58$.

Таким образом, $\overline{x} = 7{,}56$.

Справедлива общая формула

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}, \tag{41.4}$$

где $k$ — число групп.

Что касается моды и медианы, то для их определения в объединенной выборке, к сожалению, формул, подобных (41.4), не существует.

На величину среднего влияют все значения ряда, поэтому появление «выбросов», т. е. данных, значения которых находятся далеко от центра группирования, может существенно исказить величину среднего, особенно в выборках небольшого объема. В таких ситуациях, если речь идет о выборках из непрерывных распределений, более предпочтительной является медиана, которая нечувствительна к выбросам. К выбросам

нечувствительна и мода, но если число значений в выборке невелико, она непоказательна, особенно когда данные не обладают явно выраженной тенденцией группироваться у центра.

Представим себе ситуацию, когда имеющийся в нашем распоряжении прибор не позволяет получить точные значения для некоторых измерений либо за счет малой чувствительности, либо за счет ограниченности верхнего предела шкалы измерений. В этом случае среднее не может быть вычислено, однако и мода, и медиана могут быть оценены, если известно общее число значений, выходящих за границы измерительной шкалы прибора, и в этом их преимущество.

Вычисление показателей центральной тенденции, в частности, среднего арифметического предусматривается не только в пакетах прикладных программ для ЭВМ, но и «зашито» в аппаратную часть большинства даже относительно простых калькуляторов и поэтому не представляет никакой сложности.

В предыдущем параграфе при перечислении мер центральной тенденции были упомянуты еще два вида средних: среднее геометрическое и среднее гармоническое. Эти средние в основном используются в экономических расчетах, а в естественнонаучных исследованиях используются весьма ограниченно и потому здесь не рассматриваются.

## § 41.3. ПОКАЗАТЕЛИ ИЗМЕНЧИВОСТИ

В предыдущем параграфе были рассмотрены некоторые показатели, с помощью которых можно судить, относительно каких значений группируется все множество данных. Однако ни один из этих показателей сам по себе не может дать достаточно исчерпывающего описания распределения численностей. Дело в том, что практически любая совокупность экспериментальных данных, независимо от области исследования, в которой она получена, характеризуется изменчивостью, т. е. количественными различиями между отдельными элементами. Эта изменчивость является характерной особенностью подавляющего числа природных и социальных явлений. Поэтому никакое описание совокупности данных не будет законченным, если в нем отсутствует оценка изменчивости этой совокупности.

В самом деле, если степень рассеяния или изменчивости данных очень велика, то средние вообще теряют свой смысл, так как нельзя указать никакой ясно выраженной центральной тенденции.

Изучение и количественное описание изменчивости (вариации) осуществляется различными методами, и без преувеличения можно сказать, что разработанные в математической статистике методы и приемы анализа экспериментальных данных в значительной своей части предназначены именно для оценки вариации.

Рассмотрим несколько основных показателей изменчивости, которые достаточно широко используются для описания распределения численностей.

### 41.3.1. РАЗМАХ

Размах представляет собой просто разность между максимальным и минимальным значениями ряда данных:

$$w = x_{\max} - x_{\min}. \tag{41.5}$$

Из определения размаха видно, что он является довольно грубой мерой изменчивости, так как не несет никакой информации о характере изменчивости распределения численностей внутри диапазона возможных изменений измеряемого признака. Кроме

того, величина размаха зависит только от значений двух крайних членов ряда, так что появление хотя бы одного резко выделяющегося наблюдения существенно изменяет размах. Эта неустойчивость сужает возможности использования размаха как показателя изменчивости, несмотря на очень ясный смысл и простоту вычисления.

Тем не менее развитие теории порядковых статистик позволило использовать размах как промежуточную величину при расчете более эффективных показателей вариации. Наиболее целесообразно использовать размах в тех случаях, когда в распоряжении исследователя оказывается достаточно большое число совокупностей данных небольшого объема ($n \leqslant 10$).

### 41.3.2. ДИСПЕРСИЯ

Размах, как видно из (41.5), не учитывает всех значений анализируемого ряда и, как следствие, не несет информацию об их вариации. Такую информацию можно получить, измеряя отклонения всех значений от среднего арифметического совокупности экспериментальных данных. Однако сумму $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$ использовать в качестве показателя изменчивости нельзя, так как она, как мы выяснили, равна нулю. Чтобы обойти это ограничение, можно возвести каждое отклонение в квадрат. При этом, как известно из свойств среднего, полученная сумма будет минимальна. Но сумма квадратов отклонений зависит от того, сколько имеется данных, поэтому сравнение изменчивости двух совокупностей, например, не может быть осуществлено, если они разного объема. Чтобы снять и это ограничение, в качестве показателя вариации используют величину

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}, \tag{41.6}$$

которая носит название дисперсии. (Почему мы делим на $n-1$, а не на $n$, станет ясно из материала, приведенного в главе 44, при описании свойств различных оценок). Формула для вычисления дисперсии путем алгебраических преобразований может быть представлена в виде, более удобном для вычислений:

$$s_x^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}. \tag{41.7}$$

Доказательство эквивалентности (41.6) и (41.7) предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

Мерой изменчивости, тесно связанной с дисперсией, является *среднее квадратическое (стандартное) отклонение*, представляющее собой положительное значение корня квадратного из дисперсии:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}. \tag{41.8}$$

Дисперсия и особенно стандартное отклонение в достаточно полной мере отвечают требованиям, предъявляемым к показателям, характеризующим распределения численностей. Поэтому эти показатели получили наиболее широкое применение как в теоретических исследованиях, так и в практике статистического анализа.

Дисперсия характеризуется некоторыми свойствами, которые, как и в случае среднего арифметического, могут быть использованы для преобразования данных и реализации упрощенного метода ее расчета по сгруппированным данным.

Как повлияет на дисперсию ряда наблюдений $X$ добавление некоторой константы $c$? Добавив константу $c$ ко всем значениям ряда $X$, мы получим новый ряд $Y$, где каждое значение $y_i = x_i + c$. Рассчитаем дисперсию для этого нового ряда:

$$s_y^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(x_i + c) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+c)}{n}\right]^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + c - \overline{x} - c)}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = s_x^2.$$

Таким образом, *добавление константы ко всем значениям исходного ряда данных не изменяет его дисперсии*.

А как изменится дисперсия, если все значения ряда умножить на некоторую константу? Имеем

$$s_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(cx_i - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} cx_i}{n}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(cx_i - c\overline{x})^2}{n-1} = \frac{c^2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = c^2 s_x^2.$$

Отсюда видно, что *умножение всех значений исходного ряда данных на некоторую константу приводит к тому, что начальная дисперсия умножается на квадрат этой константы*.

Несмотря на наличие пакетов прикладных программ, иногда возникают ситуации, когда необходимо рассчитать некоторые описательные статистики, пользуясь простейшими калькуляторами. В этих случаях, особенно когда данные представлены таблицей распределения численности в сгруппированном виде, целесообразно использовать упрощенный метод вычисления среднего арифметического, а также дисперсии и стандартного отклонения. Технику вычислений, использующую свойства среднего и дисперсии, проиллюстрируем на данных, представляющих собой измеренные значения кардиоцикла у детей (табл. 41.1).

Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Будем считать, что все наблюдения, попавшие в соответствующий интервал, имеют значения, равные среднему значению этого интервала, а его ширину примем равной единице. Выберем в качестве условного начала срединную точку одного из класс-интервалов поблизости от центра распределения. Тогда отклонения в условных единицах относительно выбранного условного начала будут равны соответственно $-1$, $-2$, $-3$ и т. д.; $+1$, $+2$, $+3$ и т. д. для интервалов, расположенных выше и ниже условного начала. Если все отклонения умножить на численность соответствующих интервалов, найти алгебраическую сумму этих произведений и разделить ее на общее число членов, то получим условное среднее в единицах интервала.

Фактически предыдущие действия означают вычитание от всех значений исходного ряда некоторой константы, равной срединному значению класс-интервала, выбранного в качестве начального, и деление всех значений ряда на константу, численно равную ширине класс-интервала.

С учетом свойств среднего, умножив полученную величину условного среднего на величину класс-интервала, определим условное среднее в первоначальных единицах. Если теперь к полученному значению прибавить срединное значение класс-интервала,

принятого в качестве условного, то получим истинное значение среднего. Естественно, что упрощенный способ расчета дает приближенное значение среднего. Однако погрешность, возникающая за счет допущения, что все значения в каждом интервале равны срединному значению соответствующего интервала, не превышает, как правило, $1-2\%$, что вполне допустимо.

Если число наблюдений $>50$, то в знаменателе формулы (41.6) можно заменить $(n-1)$ на $n$, и формула для вычисления дисперсии будет выглядеть так:

$$s_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-2\overline{x}\cdot x_i+\overline{x}^2)}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}^2}{n} = \\ = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\cdot n\cdot\overline{x}+n\overline{x}^2}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\overline{x}^2. \quad (41.9)$$

Такая замена приводит к погрешности, не превышающей $2\%$, что, как указывалось, является допустимым.

Из этой формулы видно, что если рассчитать значения обоих входящих в нее членов в условных единицах, например, в единицах интервала относительно условного начала, то значение дисперсии в истинных единицах можно получить, умножив полученные значения на квадрат ширины класс-интервала. Это соответствует одному свойству дисперсии. А из другого следует, что выбор начала, относительно которого рассчитываются отклонения, не оказывает влияния на величину дисперсии.

Вычисления по данным табл. 41.1:

$$n=\sum_{i=1}^{5}n_i=126; \qquad \sum_{i=1}^{5}n_id_i=-75;$$

Условное среднее в единицах интервала:

$$c=\frac{\sum_{i=1}^{5}n_id_i}{n}=\frac{-75}{126}=-0{,}595;$$

Ширина интервала:

$$\Lambda=0{,}124;$$

Условное среднее в первоначальных единицах:

$$C=\Lambda\cdot c=0{,}124\cdot(-0{,}595)=-0{,}074;$$
$$\overline{x}=a_0+C=0{,}800-0{,}074=0{,}726;$$
$$\sum_{i=1}^{n}n_id_i=171;$$
$$s^2_{\text{усл}}=\frac{\sum_{i=1}^{5}n_id_i^2}{n}-c^2=\frac{171}{126}-(-0.595)^2=1{,}003;$$
$$s_x^2=s^2_{\text{усл}}\cdot\Lambda^2=1{,}003\cdot 0{,}124^2=0{,}0154\,c^2;$$
$$s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{0{,}0154}=0{,}124\,c,$$

где $s^2_{\text{усл}}$ — дисперсия в единицах интервала.

Иногда возникает ситуация, когда объединяют две или более совокупности в одну, и для этой объединенной совокупности надо найти показатели, которые характеризовали бы ее, и в том числе дисперсию. В предыдущем параграфе было показано, как отыскать

среднее в этом случае (формула (41.4)). С дисперсией объединенной совокупности дело обстоит сложнее. В этом случае нельзя отыскать эту дисперсию, используя только дисперсии совокупностей ее составляющих. В самом деле, рассмотрим предельный случай, когда обе частичные совокупности состоят из одинаковых значений, например, 2; 2; 2 и 7; 7; 7; 7. Очевидно, что дисперсии каждой из этих выборок равны нулю. Однако дисперсия объединенной совокупности будет равна 7,143.

Приведем формулу, позволяющую находить дисперсию объединенной совокупности двух выборок:

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2 + n_1(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 + n_2(\overline{x}_2 - \overline{x})^2}{n_1 + n_2 - 1}, \qquad (41.10)$$

где $n_1$, $n_2$ — численности первой и второй выборок соответственно; $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $s_1^2$, $s_2^2$ — средние и дисперсии первой и второй выборок; $\overline{x}$ — среднее объединенной совокупности, равное

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

Вывод формулы (41.10) предлагается в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Из приведенной формулы следует, что дисперсия объединенной совокупности зависит как от дисперсий, так и от средних составляющих ее выборок. Обобщение формулы (41.10) на любое число выборок очевидно.

Рассчитаем дисперсию для искусственной совокупности, приведенной выше. Имеем:

$$s_1^2 = s_2^2 = 0;\ \overline{x}_1 = 2;\ \overline{x}_2 = 7;\ \overline{x} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 7}{3 + 4} = 4{,}857,$$
$$s^2 = \frac{(3 - 1) \cdot 0 + (4 - 1) \cdot 0 + 3(2 - 4{,}857)^2 + 4(7 - 4{,}857)^2}{3 + 4 - 1} = 7{,}143.$$

Как и должно быть, ответы, полученные с помощью формулы (41.10) и формулы (41.7), совпадают.

### 41.3.3. КОЭФФИЦИЕНТ ВАРИАЦИИ

Рассмотренные до сих пор показатели изменчивости: размах, дисперсия, стандартное отклонение определяют вариацию в абсолютных единицах, имеют размерность такую же или в квадрате (для дисперсии), как и сама измеряемая величина. При описании распределений численности это удобно, но если есть необходимость сравнить показатели рассеяния двух распределений, данные которых имеют разные размерности, то естественно возникают затруднения. Такие же затруднения возникают иногда даже в тех случаях, когда измеряемые величины имеют одну и ту же размерность. Например, показатели рассеяния в распределениях количества выпавших осадков и роста людей вычислены в сантиметрах. Однако из того, что стандартное отклонение роста людей больше, чем стандартное отклонение выпавших осадков, не следует, что изменчивость в первом случае больше. Меры изменчивости при сравнении показательны лишь в соотношении со средними, от которых измеряются отклонения.

Поэтому возникает необходимость в таком показателе рассеяния, который был бы безразмерным и указывал на изменчивость по отношению к среднему, относительно которого вычисляются отклонения. Наиболее часто используемым показателем, удовлетворяющим этим требованиям, является коэффициент вариации

$$C.V. = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\%. \tag{41.11}$$

Применяя эту формулу к данным табл. 41.1, получаем, что

$$C.V. = \frac{0{,}124}{0{,}726} \cdot 100\% = 17{,}1\%.$$

Пусть для той же возрастной группы, для которой измерялась длительность сердечного цикла по кардиограмме, известно и количество сульфгидрильных групп сыворотки крови (ммоль/100 мл). Эти данные приведены в табл. 41.2.

*Таблица 41.2.*

| Интервал, ммоль/100 мл | Численность |
|---|---|
| 21,75–26,89 | 11 |
| 26,89–32,03 | 10 |
| 32,03–37,17 | 11 |
| 37,17–42,31 | 20 |
| 42,31–47,45 | 12 |
| 47,45–52,56 | 16 |
| 52,56–57,70 | 5 |

Для этих данных $\overline{x} = 39{,}41$; $s = 9{,}18$ и, значит,

$$C.V. = \frac{9{,}18}{39{,}41} \cdot 100\% = 23{,}3\%.$$

Полученные коэффициенты вариации показывают, что измеренные показатели для одной возрастной группы имеют примерно одинаковую изменчивость.

Из формулы (41.11) видно, что на величину коэффициента вариации влияет как стандартное отклонение, так и среднее. Причем, так как среднее стоит в знаменателе, то при стремлении его к нулю коэффициент вариации становится неопределенным. Поэтому для распределений численностей со средними, близкими к нулю, использование коэффициента вариации в качестве показателя изменчивости нежелательно.

### 41.3.4. СТАНДАРТИЗОВАННЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 41.2 построена по 85 значениям, одно из интересующих нас было равно 31,5. Из этой информации и знания того, что среднее всей совокупности равно 39,41, не очевидно относительное положение интересующего нас значения. Тем не менее достаточно часто желательно иметь возможность описать место некоторого значения в совокупности данных. Это можно сделать, измеряя его отклонение от среднего в единицах стандартного отклонения, т. е.

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}. \tag{41.12}$$

Величины $z_i$ носят название стандартизованных (*стандартизированных*) величин.

Ясно, что при переходе к стандартизированным данным любое распределение численностей преобразуется в распределение со средним, равным нулю, и единичной дисперсией. (Проверьте это самостоятельно.)

Стандартизованные данные, как и коэффициент вариации, являются безразмерными величинами, поэтому с их помощью можно сравнивать между собой распределения численностей, имеющие разную размерность.

## § 41.4. ПОКАЗАТЕЛИ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

При анализе распределения численностей значительный интерес представляет оценка отклонения данного распределения от симметричного, или, иначе говоря, его скошенность. Степень скошенности (асимметрия) является одним из наиболее важных свойств распределения численностей. Существует целый ряд статистических показателей, предназначенных для вычисления асимметрии. Все они отвечают как минимум двум требованиям, предъявляемым к любому показателю скошенности: он должен быть безразмерным и равным нулю, если распределение симметрично.

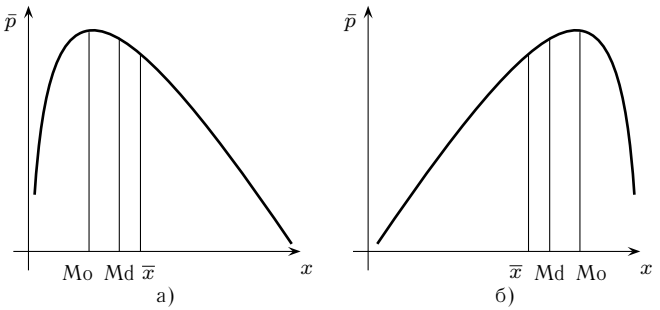



*Рис. 41.2.*

На рис. 41.2 а, б приведены кривые двух асимметричных распределений численностей, одна из которых скошена влево, а другая — вправо. Качественно показано взаимное расположение моды, медианы и среднего. Видно, что один из возможных показателей скошенности может быть построен с учетом расстояния, на котором находятся друг от друга средняя и мода. Но учитывая сложность определения моды по эмпирическим данным, а с другой стороны, известное соотношение (41.3) между модой, медианой и средним, была предложена следующая формула для вычисления показателя асимметрии:

$$As = \frac{3(\overline{x} - Md)}{s}. \tag{41.13}$$

Из этой формулы следует, что распределения, скошенные влево, имеют положительную асимметрию, а скошенные вправо — отрицательную. Естественно, что для симметричных распределений, для которых среднее и медиана совпадают, асимметрия равна нулю.

Вычислим показатели асимметрии для данных, приведенных в табл. 41.1 и 41.2. Для распределения длительности сердечного цикла имеем:

$$\overline{x} = 0{,}726;\ Md = 0{,}723;\ s = 0{,}124;\ As = \frac{3(0{,}726 - 0{,}723)}{0{,}124} = 0{,}072.$$

Таким образом, это распределение имеет небольшую левостороннюю скошенность. Полученное значение для асимметрии является приближенным, а не точным, так как для ее расчета использовались приближенные значения $\overline{x}$, $Md$ и $s$.

Для распределения сульфгидрильных групп сыворотки крови имеем:

$$\overline{x} = 39{,}44;\ Md = 40{,}0;\ s = 9{,}18;\ As = \frac{3(39{,}41 - 40{,}0)}{9{,}18} = -0{,}193.$$

Таким образом, это распределение имеет отрицательную асимметрию, т. е. скошено вправо.

Известно, что величина $As$, определяемая по формуле (41.13), находится в интервале $[-3,3]$. Но практически эта величина очень редко достигает своих крайних значений, и для умеренно асимметричных одновершинных распределений она по модулю обычно меньше единицы.

Показатель асимметрии может быть использован не только для формального описания распределения численностей, но и для содержательной интерпретации полученных данных.

В самом деле, если наблюдаемый нами признак формируется под воздействием большого числа независимых друг от друга причин, каждая из которых вносит относительно небольшой вклад в величину этого признака, то в соответствии с некоторыми теоретическими предпосылками, обсуждавшимися в разделе по теории вероятностей, мы вправе ожидать, что получаемое в результате эксперимента распределение численностей будет симметричным. Однако если для экспериментальных данных получена значительная величина асимметрии (большая по абсолютной величине, чем $(0{,}4 \div 0{,}5)$), то можно предположить, что условия, указанные выше, не соблюдаются.

В этом случае имеет смысл предположить либо существование какого-то одного или двух факторов, вклад которых в формирование наблюдаемой в эксперименте величины существенно больше, чем остальных, либо постулировать наличие специального механизма, отличного от механизма независимого влияния множества причин на величину наблюдаемого признака.

Так, например, если изменения интересующей нас величины, соответствующие действию некоторого фактора, пропорциональны самой этой величине и интенсивности действия причины, то получаемое при этом распределение будет всегда скошено влево, т. е. иметь положительную асимметрию. С таким механизмом сталкиваются, например, биологи, оценивая величины, связанные с ростом растений и животных.

Другой способ оценки асимметрии основан на методе моментов, который будет обсуждаться в главе 44. В соответствии с этим методом для расчета асимметрии используют сумму отклонений всех значений ряда данных относительно средней, возведенных в третью степень, т. е.:

$$As = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{n \cdot s_x^3}. \tag{41.14}$$

Нечетная степень обеспечивает равенство нулю числителя этого выражения для симметричных распределений, а деление на $s_x^3$ обеспечивает безразмерность для показателя асимметрии.

Формула (41.14) может быть преобразована следующим образом. В предыдущем параграфе были введены стандартизованные величины

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}.$$

Значит,

$$\frac{(x_i - \overline{x})^3}{s_x^3} = \left(\frac{x_i - \overline{x}}{s_x}\right)^3 = z_i^3$$

и

$$As = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^3}{n} = \overline{z_x^3}. \tag{41.15}$$

Таким образом, мера скошенности представляет собой среднее значение стандартизованных данных, возведенных в куб.

Для тех же данных, для которых по формуле (41.13) была рассчитана асимметрия, найдем показатель по формуле (41.15). Имеем:

$$\overline{x}_1 = 0{,}726; \quad s_1 = 0{,}124; \quad n_1 = 126; \quad \sum_{i=1}^{126} z_i^3 = 27{,}8; \qquad As = 0{,}22;$$

$$\overline{x}_2 = 39{,}41; \quad s_2 = 9{,}18; \quad n_2 = 85; \quad \sum_{i=1}^{85} z_i^3 = -11{,}51; \quad As = -0{,}135.$$

Показатели асимметрии, вычисленные по разным формулам, отличаются друг от друга по величине, но одинаково указывают на характер скошенности. В пакетах прикладных программ для статистического анализа при расчете асимметрии используют формулу (41.15). Для предварительных же расчетов с использованием простейших калькуляторов можно пользоваться формулой (41.13).

### 41.4.1. ЭКСЦЕСС

Итак, мы рассмотрели три из четырех групп показателей, с помощью которых описываются распределения численностей. Последней из них является группа показателей островершинности, или эксцесса. Для вычисления одного из возможных показателей эксцесса используется следующая формула:

$$Ex = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{n \cdot s_x^4}. \tag{41.16}$$

Используя тот же подход, который был применен при преобразовании формулы асимметрии (41.14), легко показать, что

$$Ex = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^4}{n} = \overline{z_x^4}. \tag{41.17}$$

Показано, что величина эксцесса для нормальной (гауссовой) кривой распределения, играющей в статистике, так же как и в теории вероятностей большую роль, равна 3. Исходя из целого ряда соображений, заостренность этой кривой принимают за стандарт, и поэтому в качестве показателя эксцесса используют величину

$$\gamma = Ex - 3.$$

*Таблица 41.3.*

| Число краевых цветков | Численность растений |
|---|---|
| 7–9 | 10 |
| 10–12 | 212 |
| 13–15 | 705 |
| 16–18 | 57 |
| 19–21 | 16 |

Найдем значение островершинности для данных, приведенных в табл. 41.1. Имеем:

$$\overline{x} = 0{,}726;\ s = 0{,}124;\ Ex = 2{,}47;\ \gamma = -0{,}53.$$

Таким образом, кривая распределения длительности сердечных циклов уплощена по сравнению с нормальной кривой, для которой $\gamma = 0$.

В табл. 41.3 приведено распределение числа краевых цветков у одного из видов хризантем. Для этого распределения имеем $Ex = 32{,}4$, а $\gamma = 29{,}4$.

Эксцесс может принимать очень большие значения, как это видно из приведенного примера, но он не может быть меньше единицы. Оказывается, что если распределение двувершинно (бимодально), то значение эксцесса близко к единице, так что $\gamma$ близко к $-2$. Экспериментально установлено, что если значение $\gamma$ меньше $-1{,}4$,

то можно быть уверенным, что имеющееся в нашем распоряжении распределение численностей по крайней мере бимодально. Это особенно важно учитывать, когда экспериментальные данные, минуя стадию предварительной обработки, анализируются с помощью ЦВМ и перед глазами исследователя нет непосредственно графического изображения распределения численностей.

Двувершинность кривой распределения опытных данных может возникать по многим причинам. В частности, такое распределение может появиться за счет объединения в единую совокупность двух наборов разнородных данных. Для иллюстрации этого мы искусственно объединили данные о ширине раковин двух видов ископаемых моллюсков в одну совокупность (табл. 41.4, рис. 41.3).

*Таблица 41.4.*

| Ширина раковины, мм | Число раковин |
|---|---|
| 17,00–18,88 | 7 |
| 18,88–20,76 | 16 |
| 20,76–22,64 | 27 |
| 22,64–24,52 | 14 |
| 24,52–26,40 | 9 |
| 26,40–28,28 | 32 |
| 28,28–30,16 | 21 |
| 30,16–32,04 | 11 |

На рисунке явно видно наличие двух мод, так как смешаны два набора данных из разных совокупностей. Расчет дает для величины эксцесса 1,74, и, следовательно, $\gamma = -1{,}26$. Таким образом, расчетная величина показателя островершинности указывает, в соответствии с ранее высказанным положением, что распределение имеет две вершины.

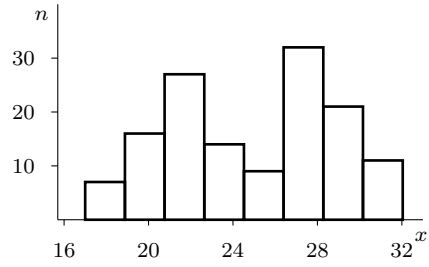


*Рис. 41.3.*

Здесь нужно сделать одно предостережение. Действительно, во всех случаях, когда распределение численностей будет иметь два максимума, величина эксцесса будет близка к единице. Однако из этого факта нельзя автоматически делать вывод о том, что анализируемая совокупность данных представляет собой смесь двух разнородных выборок. Во-первых, такая смесь в зависимости от численности составляющих ее совокупностей может и не иметь двух вершин, и показатель эксцесса будет значительно больше единицы. Во-вторых, две моды может иметь и однородная выборка, если, например, нарушены требования к отбору экспериментальных данных. Таким образом, в этом, как, впрочем, и в других случаях, вслед за формальным расчетом различных статистик должен осуществляться тщательный профессиональный анализ, который позволит дать полученным данным содержательную интерпретацию.

## Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры, которые, как вам кажется, иллюстрируют неправильные применения расчета средних значений.
2. Как изменения элементов ряда экспериментальных данных воздействуют на среднее?
3. Может ли оказаться, что
   а) значение дисперсии равно значению стандартного отклонения?
   б) значение дисперсии меньше значения стандартного отклонения?
4. Как соотносятся среднее, мода и медиана для распределений, скошенных влево (вправо)?
5. Какой знак имеет показатель асимметрии для распределений, скошенных влево (вправо)?

6. При каких условиях распределение случайных величин может оказаться бимодальным?
7. К какому значению близок показатель островершинности, когда распределение бимодально?
8. Какие факторы должны учитываться при выборе числа класс-интервалов гистограммы?

## Упражнения и задачи

1. Полученные в ходе экспериментов значения разбиты на класс-интервалы, середины каждого из которых и число попадающих в них значений приведены в таблице 41.5.

*Таблица 41.5.*

| $x_i^*$ | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 18 | 120 | 48 | 33 | 5 | 1 | 1 | 1 |

Определить показатели асимметрии и эксцесса. Объяснить полученные результаты.

2. Экспериментальные данные о скорости записи людьми цифр арабского алфавита приведены в таблице 41.6.

*Таблица 41.6.*

| **Цифра** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Скорость,1/сек** | 5,9 | 3,1 | 3,6 | 3,4 | 2,1 | 4,5 | 2,8 | 2,8 | 2,9 | 5,0 |

Рассчитать среднее, медиану, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, асимметрию и эксцесс.

3. Есть два ряда наблюдений: $X$ — 20, 16, 17, 15, 19, 19, 18, 12, 13, 13, 17, 16, 14, 14, 16, 15, 18 и $Y$ — 3, 11, 5, 12, 9, 8, 16, 13, 12, 11, 15, 12, 0, 11, 6, 19, 16. Рассчитайте средние и дисперсии для каждого из рядов, затем объедините их в один и для этого нового ряда также найдите среднее и дисперсию. Сравните полученные значения со значениями, вычисленными по формулам для среднего и дисперсии объединенных совокупностей.
4. Определить выборочное среднее арифметическое, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для следующих экспериментальных данных:
   а) фоновый счет перед регистрацией радиоактивного образца (каждый отсчет за 2 мин): 12, 15, 10, 18, 14.
   б) счет, зарегистрированный в присутствии радиоактивного образца (каждый отсчет за 2 мин): 95, 92, 103, 89, 88, 95, 90, 93, 89, 102.
5. Для двух серий экспериментов по определению с использованием ядерных фотопластинок энергетического распределения протонов отдачи внутри реактора на быстрых нейтронах были получены таблицы 41.7 распределения численностей треков. Построить гистограммы, аппроксимировать их непрерывными кривыми, для каждого распределения вычислить среднее арифметическое, дисперсию, стандартное отклонение, показатели асимметрии и эксцесса. Какие содержательные выводы можно сделать из анализа гистограмм и вычисленных статистик?

*Таблица 41.7.*

| Энергетический интервал, (Мэв) | Число треков | |
|---|---|---|
| | 1 серия | 2 серия |
| 0,3–0,4 | 12 | 11 |
| 0,4–0,5 | 32 | 30 |
| 0,5–0,6 | 26 | 59 |
| 0,6–0,7 | 21 | 22 |
| 0,7–0,8 | 3 | 17 |
| 0,8–0,9 | 9 | 8 |
| 0,9–1,0 | 9 | 5 |
| 1,0–1,1 | 6 | 4 |
| 1,1–1,2 | 5 | 1 |
| 1,2–1,3 | 4 | 5 |

6. В одном социологическом обследовании приведены данные о времени (в минутах), проведенном 100 посетителями за столиком в одном из кафе:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 67 | 34 | 39 | 23 | 66 | 24 | 37 | 45 | 58 | 51 | 37 | 45 | 26 | 41 | 55 | 27 | 96 | 22 | 43 |
| 73 | 48 | 63 | 39 | 19 | 31 | 38 | 68 | 22 | 35 | 31 | 58 | 35 | 82 | 28 | 35 | 44 | 40 | 41 | 34 |
| 15 | 31 | 34 | 56 | 45 | 27 | 54 | 46 | 62 | 29 | 51 | 31 | 56 | 43 | 39 | 35 | 23 | 28 | 45 | 48 |
| 47 | 41 | 34 | 47 | 30 | 54 | 49 | 34 | 53 | 61 | 82 | 45 | 26 | 35 | 67 | 73 | 30 | 16 | 52 | 35 |
| 46 | 40 | 41 | 56 | 37 | 51 | 33 | 92 | 70 | 63 | 72 | 35 | 62 | 28 | 38 | 61 | 33 | 49 | 59 | 35 |

Для этого набора данных построить гистограмму, полигон и кривую накопленных частот, выбрав ширину класс-интервала, равную 10 мин. Повторить эти задания для значений ширины класс-интервала, равных соответственно 5 мин и 20 мин. Вычислить среднее арифметическое, медиану, стандартное отклонение и показатель асимметрии.

7. В «Энциклопедии мелочей» приведены предметы и явления, встречающиеся группами. Например, три пространственных координаты или три грации (Аглая, Талия, Эвфросина), пять лучей звезды, пять олимпийских колец, семь чудес света, семь дней недели и т. д. Выборка таких предметов и явлений показывает, что групп с двумя предметами — 1, с тремя — 15, с четырьмя — 7, с пятью — 6, с шестью — 3, с семью — 16, с восемью — 0, с девятью — 1, с десятью — 1.
Для приведенных данных построить гистограмму и полигон частот, рассчитать показатель эксцесса. Привести примеры групп с четырьмя и семью объектами, попытаться дать объяснение бимодальности полученных графиков.

8. По результатам опроса группы взрослых людей получены следующие данные о численности тех из них, кто в течение года не приобрел ни одного раза некоторый ежемесячный журнал, приобрел один номер, два номера и т. д.:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число покупателей: | 320 | 120 | 40 | 16 | 8 | 8 | 8 | 0 | 8 | 8 | 24 | 80 | 160 |
| Число приобретенных номеров: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Для этого распределения построить гистограмму, аппроксимировать ее непрерывной кривой, найти среднее арифметическое, медиану, показатели асимметрии и эксцесса. Дайте содержательное объяснение полученным результатам.

9. При подсчете под микроскопом числа дрожжевых клеток, попавших в одно поле зрения, получены следующие данные:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число клеток: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Число полей зрения: | 20 | 43 | 53 | 86 | 70 | 54 | 37 | 18 | 10 | 5 | 2 | 2 |

Построить полигон частот, кривую накопленных частот, рассчитать моду, среднее арифметическое, медиану, стандартное отклонение, показатель асимметрии.

# XLII

# ОЦЕНКА ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

## § 42.1. КОРРЕЛЯЦИЯ И ПРИЧИННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

В предыдущей главе были рассмотрены различные показатели, с помощью которых можно охарактеризовать распределение численностей одного измеряемого признака объекта или процесса. Между тем более глубокое проникновение в суть изучаемых явлений с необходимостью требует наблюдения над целым рядом признаков, чтобы по полученным данным изучать взаимоотношения между этими величинами и таким образом приблизиться к решению поставленных исследовательских задач. В табл. 42.1 приведены некоторые примеры объектов и процессов, при изучении которых измеряются два или более признаков.

*Таблица 42.1.*

| **Объект** | **Измеряемая характеристика исследования** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Человек | Частота пульса | Артериальное давление | | |
| Ископаемый моллюск | Длина раковины | Ширина раковины | Горизонт залегания | |
| Рыбы | Вес | Коэффициент зрелости | Количество икринок | Вес одного ооцита |

Конечно, четыре признака — не предел при изучении взаимосвязей. Например, при решении задач классификации растений или ископаемых моллюсков оцениваются взаимосвязи между десятками количественно и качественно измеряемых показателей. Но независимо от числа исследуемых признаков цель остается одной и той же: получение объективных сведений о характере взаимодействия между изучаемыми показателями, необходимых для проверки существующих или выдвижения новых гипотез о внутренних механизмах интересующих нас процессов.

Ввиду того, что измеряемые в экспериментах признаки являются случайными величинами в силу присущей всем естественным объектам изменчивости, изучение их совместного варьирования представляет собой задачу об определении статистической зависимости.

Возможны две постановки этой задачи. Нас может интересовать либо взаимозависимость между измеряемыми величинами, либо зависимость одной или нескольких величин от остальных. Например, можно рассмотреть вопрос, существует ли связь между среднегодовой температурой и географической широтой городов на территории России. При такой постановке — это задача о взаимозависимости, но если мы хотим, используя данные о географической широте, получить информацию о среднегодовой температуре, то приходим к задаче о зависимости. Отличие возникает за счет того, что

в первом случае обе используемые величины — случайные, а во втором — случайными являются только значения среднегодовой температуры, а значения географических широт фиксированы, например, с шагом в 5°.

В приведенном примере интерес представляет оценка как зависимости, так и взаимозависимости. С другой стороны, существуют ситуации, в которых интересно или то, или другое. Исследование взаимозависимости приводит к теории корреляции, исследование зависимости — к теории регрессии. Некоторые теоретические и практические вопросы корреляции и регрессии будут рассмотрены в этой и следующей главах.

Однако прежде чем приступить к изложению теории корреляции, необходимо сделать одно замечание, имеющее принципиальное значение при изучении статистической зависимости.

Статистическая зависимость, как бы сильна она ни была, никогда не может установить наличия причинной связи. Соображения о причинно-следственных отношениях не могут и не должны быть выведены только из анализа экспериментальных данных. Для формулирования гипотез об этих соотношениях должны привлекаться сведения извне, т. е. основанные на теоретических представлениях о сущности изучаемых процессов.

Конечно, корреляционные показатели можно использовать при изучении и причинных связей, но только при экспериментальной проверке вытекающих из теоретических предпосылок следствий.

К сожалению, иногда показатели корреляции используются для неправильных утверждений о якобы имеющей место причинной зависимости и ее направленности. Но это абсолютно неправомерно. Изучение совместной вариации двух или более случайных величин, а именно это и составляет суть корреляционного анализа, не дает никаких логических оснований для утверждения о существовании между этими величинами причинной связи, а тем более о ее направленности.

## § 42.2. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Как уже было указано выше, при проведении экспериментов или наблюдений очень часто измеряются две или более характеристики объекта исследования. При этом значительный интерес представляет изучение численной меры степени взаимосвязи. Рассмотрим одну из таких мер, предназначенную для оценки взаимозависимости между двумя переменными, введенную в статистическую практику К. Пирсоном.

Пусть при исследовании свойств почв одного из географических районов получены следующие данные (табл. 42.2).

*Таблица 42.2.*

| Общее количество фосфора, % сухого веса | Общее количество азота, % сухого веса | Общее количество фосфора, % сухого веса | Общее количество азота, % сухого веса |
|---|---|---|---|
| 0,12 | 0,63 | 0,01 | 0,21 |
| 0,15 | 1,19 | 0,08 | 0,63 |
| 0,36 | 2,30 | 0,08 | 0,88 |
| 0,17 | 1,29 | 0,07 | 0,45 |
| 0,14 | 0,73 | 0,13 | 0,43 |
| 0,06 | 0,52 | 0,08 | 0,31 |
| 0,10 | 0,33 | 0,05 | 0,33 |
| 0,11 | 0,61 | 0,08 | 0,52 |
| 0,11 | 0,47 | 0,06 | 0,44 |
| 0,12 | 0,66 | 0,05 | 0,28 |
| 0,10 | 0,37 | 0,12 | 0,81 |
| 0,15 | 1,81 | 0,06 | 0,99 |

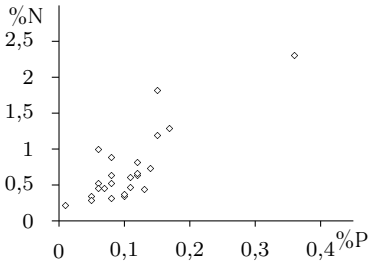



*Рис. 42.1.*

Связь между общим количеством фосфора и общим количеством азота можно выразить графически в виде диаграммы рассеяния (рис. 42.1), где каждая проба почвы характеризуется точкой, координаты которой $x$ и $y$ равны соответственно проценту сухого веса фосфора и азота.

Интуитивно ясно, что о взаимозависимости между парой переменных можно говорить в тех случаях, когда уменьшению (увеличению) одной из них будет соответствовать уменьшение (увеличение) другой, либо когда уменьшению (увеличению) первой будет соответствовать увеличение (уменьшение) второй переменной. В первом случае будем говорить о положительной корреляции (прямая зависимость), во втором — об отрицательной (обратная зависимость).

Попытаемся этим интуитивным представлениям придать количественную оценку. Из диаграммы рассеяния видно, что положение объекта относительно остальных по каждой из координат характеризуется величиной и знаком отклонения от средней величины, т. е. $x_j - \overline{x}$ и $y_j - \overline{y}$. Рассмотрим произведение этих отклонений. Если объект имеет по обоим переменным значения, большие или меньшие средней величины, то произведение отклонений будет положительным, так как знаки отклонений одинаковы.

Если изменения переменных разнонаправлены, то положительным значениям $x_j - \overline{x}$ будут в основном соответствовать отрицательные значения $y_j - \overline{y}$, и наоборот.

Суммировав произведения отклонений по всем объектам, получим величину $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$, которая будет велика и положительна, когда $x$ и $y$ сильно связаны прямой зависимостью, и велика и отрицательна, когда $x$ и $y$ сильно связаны обратной зависимостью.

В тех случаях, когда между $x$ и $y$ нет систематической связи, т. е. большим значениям $x$ одинаково часто соответствуют как большие, так и малые значения $y$, величина $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$ должна быть достаточно близкой к нулю.

Сама по себе величина $\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})$ непригодна в качестве меры связи, так как она зависит от числа пар значений, учитываемых при расчетах. А так как во многих случаях желательно сравнить степень связи между $x$ и $y$ в выборках разного объема, то показатель взаимосвязи не должен зависеть от него. Это достигается усреднением по объему выборки. По той же причине, что и при расчете дисперсии, следует разделить сумму произведений отклонений на $n - 1$. Полученная величина

$$s_{xy} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{n-1} \tag{42.1}$$

носит название ковариации.

Признаки $x$ и $y$, между которыми рассчитывается взаимосвязь, могут измеряться в разных единицах, иметь произвольные средние и дисперсии. Вычитание соответствующих средних из $x$ и $y$ делает $s_{xy}$ независимым от средних. Если теперь разделить ковариацию на произведение стандартных отклонений, то получится безразмерный коэффициент связи

$$r_{xy} = s_{xy}/s_x s_y, \tag{42.2}$$

который носит название коэффициента корреляции.

Ясно, что $s_{xy} = s_{yx}$ и $r_{xy} = r_{yx}$. Поэтому с помощью коэффициента корреляции можно численно оценивать величину взаимосвязи, но ничего нельзя сказать о ее направленности.

Несложные преобразования позволяют привести формулу (42.2) к виду, рациональному для вычислений и программирования:

$$r_{xy} = \frac{n\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)}{\sqrt{\left(n\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right)\left(n\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)^2\right)}}. \tag{42.3}$$

Используя эту формулу, рассчитаем коэффициент корреляции между общим количеством фосфора и азота.

Промежуточные вычисления: $\sum_{j=1}^{n} x_j = 2{,}56$; $\sum_{j=1}^{n} y_j = 17{,}19$; $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0{,}374$; $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 18{,}11$; $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 2{,}465$.

Окончательно имеем

$$r_{xy} = \frac{24 \cdot 2{,}465 - 2{,}56 \cdot 17{,}19}{\sqrt{(24 \cdot 0{,}374 - 6{,}554)(24 \cdot 18{,}11 - 295{,}496)}} = 0{,}826.$$

Таким образом, оказалось, что существует достаточно тесная положительная связь между общим количеством фосфора и азота для данного набора образцов почв.

По принципу своего построения коэффициент корреляции предназначен для измерения только линейной статистической связи между двумя переменными. Покажем, что в случае, когда между $x$ и $y$ существует функциональная зависимость (строгая прямая или обратная связь), значения коэффициента корреляции равны соответственно $\pm 1$.

Для упрощенного доказательства рассмотрим выражение $\sum(z_x - z_y)^2$, где $z_x$ и $z_y$ — стандартизованные значения $x$ и $y$. $\sum(z_x - z_y)^2$ всегда больше или равна нулю, т. е.

$$\sum(z_x - z_y)^2 = \sum z_x^2 - 2\sum z_x z_y + \sum z_y^2 \geqslant 0.$$

(Здесь и в дальнейшем мы опускаем индексы суммирования у знаков сумм в тех случаях, когда это не приводит к неоднозначности.)

В предыдущей главе было показано, что $s_z^2 = \sum z^2/(n-1) = 1$. Следовательно, имеем $\sum z_x^2 = \sum z_y^2 = n - 1$.

С учетом этого соотношения

$$\begin{gathered}(n-1) + (n-1) \geqslant 2\sum z_x z_y, \\ 2(n-1) \geqslant \sum z_x z_y, \\ (n-1) \geqslant \sum z_x z_y.\end{gathered} \tag{42.4}$$

С другой стороны,

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{(n-1)\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}\frac{\sum(y-\overline{y})}{n-1}}} = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x-\overline{x})^2\sum(y-\overline{y})^2}},$$

и если $x$ и $y$ представлены в стандартизованной форме, то

$$r_{xy} = \frac{\sum z_x z_y}{\sqrt{\sum z_x^2 \sum z_y^2}} = \frac{\sum z_x z_y}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = \frac{\sum z_x z_y}{n-1}, \quad z_x z_y = r_{xy}(n-1). \tag{42.5}$$

Подставив (42.5) в (42.4), получим $(n-1) \leqslant (n-1)r_{xy}$, $r_{xy} \leqslant 1$. Равенство выполняется, когда имеет место прямая функциональная зависимость. Во всех остальных случаях прямой статистической связи $0 < r_{xy} < 1$.

Совершенно аналогично, но используя выражение $\sum(z_x + z_y)^2$, можно показать, что в случае обратной линейной функциональной зависимости между $x$ и $y$ $r_{xy} = -1$, а в остальных случаях обратной статистической связи $-1 < r_{xy} < 0$.

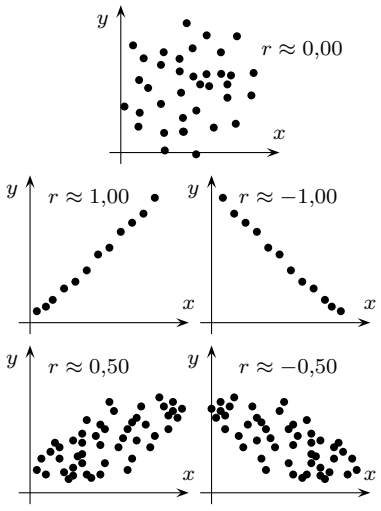



*Рис. 42.2.*

Приближенно определить значение коэффициента корреляции можно, анализируя диаграмму рассеяния. Чем теснее расположены точки относительно некоторой прямой, тем больше по абсолютной величине $r_{xy}$, и наоборот, чем более расплывчато облако точек на диаграмме рассеяния, тем ближе к нулю коэффициент корреляции (рис. 42.2).

Величины $x$ и $y$, для которых рассчитывается коэффициент корреляции, могут иметь произвольные средние и дисперсии. Можно ли изменять, и если можно, то как, эти статистики, не изменяя при этом величину $r_{xy}$? Положительный ответ позволил бы в ряде случаев существенно упростить вычисления при расчетах $r_{xy}$.

Покажем, что в самом деле линейные преобразования величин $x$ и $y$ не изменяют по абсолютной величине значения $r_{xy}$. Пусть исходные величины $x$ и $y$ подвергнуты линейным преобразованиям и получены новые величины $v$ и $w$, связанные с $x$ и $y$ следующим образом: $v = ax+b$, $w = cy + d$. Здесь $a$, $b$, $c$ и $d$ — произвольные константы. Найдем $r_{vw}$:

$$r_{vw} = \frac{s_{vw}}{s_v s_w}.$$

Из известных свойств среднего и дисперсии вытекает, что

$$s_v^2 = \frac{\sum(v-\overline{v})^2}{n-1} = \frac{\sum((ax+b)-(a\overline{x}+b))^2}{n-1} = \frac{a^2\sum(x-\overline{x})^2}{n-1} = a^2 s_x^2,$$

откуда $s_v = |a|\, s_x$. Аналогично $s_w = |c|\, s_y$. Ковариация

$$s_{vw} = \frac{\sum(v-\overline{v})(w-\overline{w})}{n-1} = \frac{\sum((ax+b)-(a\overline{x}+b))((cy+d)-(c\overline{y}+d))}{n-1} =$$
$$= \frac{ac\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n-1} = acs_{xy}.$$

Тогда

$$r_{vw} = \frac{acs_{xy}}{|a|\,|c|\,s_x s_y} = \frac{ac}{|a|\,|c|} r_{xy}. \qquad (42.6)$$

Отсюда видно, что, во-первых, значение $r_{vw}$ не зависит от величин и знаков констант $b$ и $d$ и, во-вторых, что в случае, если константы $a$ и $c$ имеют одинаковые знаки, $r_{vw} = r_{xy}$. В случае же разных знаков абсолютная величина $r_{vw}$ не меняется, но изменяется знак.

С учетом этого ясно, что исходные величины $x$ и $y$ можно умножать на произвольную константу одного знака и прибавлять к ним произвольные константы, не изменяя при этом величину коэффициента корреляции между ними.

Такое свойство коэффициента корреляции полезно использовать, когда $x$ и $y$ имеют значения с большим количеством значащих цифр, неважно, до или после запятой. В этих случаях подбором соответствующих констант можно существенно упростить вычисления.

Рассмотрим смежные вопросы, связанные с использованием коэффициента корреляции.

Довольно часто в исследовательской практике требуется определить дисперсию суммы или разности двух или более случайных величин. Выведем формулу для этой дисперсии, которая может прояснить, как влияния, например, двух величин комбинируются в общие эффекты. Имеем

$$s_{xy}^2 = \frac{\sum((x+y)-\overline{(x+y)})^2}{n-1} = \frac{\sum((x+y)-(\overline{x}+\overline{y}))^2}{n-1} = \frac{\sum((x-\overline{x})+(y-\overline{y}))^2}{n-1} = \\ = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1} + \frac{2\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n-1} + \frac{\sum(y-\overline{y})^2}{n-1}. \quad (42.7)$$

Из соотношения (42.7) видно, что первый и третий член правой части представляют собой дисперсии $s_x^2$ и $s_y^2$, а второй член — удвоенную ковариацию $s_{xy}$. Таким образом,

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}. \quad (42.8)$$

Учитывая, что $s_{xy} = r_{xy}s_x s_y$, получаем

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2r_{xy}s_x s_y. \quad (42.9)$$

Если величины $x$ и $y$ некоррелированны, то $r_{xy} = 0$ и соотношение (42.9) приобретает вид

$$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2. \quad (42.10)$$

В том случае, когда $r_{xy} \neq 0$, анализ уравнения (42.9) показывает, что положительная корреляция между $x$ и $y$ приводит к увеличению дисперсии их суммы, а отрицательная — к уменьшению.

По аналогии с приведенными преобразованиями легко получить

$$s_{x-y}^2 = s_x^2 + s_y^2 - 2r_{xy}s_x s_y. \quad (42.11)$$

Полученные формулы (42.9) и (42.11) обобщаются на случай более чем двух переменных. Например, для случая трех переменных (42.9) обобщается следующим образом:

$$s_{x+y+z}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2r_{xy}s_x s_y + 2r_{xz}s_x s_z + 2r_{yz}s_y s_z. \quad (42.12)$$

Теперь рассмотрим вопрос, как влияют на величину коэффициента корреляции ошибки измерения тех признаков, между которыми оценивается взаимосвязь.

Пусть $u$ и $v$ измеряемые величины, связанные с истинными значениями признаков $x$ и $y$ следующими соотношениями:

$$u = x + \delta, \quad (42.13)$$

$$v = y + \varepsilon. \quad (42.14)$$

Будем считать, что случайные ошибки $\delta$ и $\varepsilon$ имеют средние, равные нулю, и некоррелированны с $u$ и $v$. Тогда, $\overline{u} = \overline{x}$, $\overline{v} = \overline{y}$, а $s_u^2 = s_x^2 + s_\delta^2$, $s_v^2 = s_y^2 + s_\varepsilon^2$ в силу полученного соотношения (42.10).

С учетом вышесказанного легко показать, что $s_{uv} = s_{xy}$, и если теперь записать выражения для $r_{xy}$ и $r_{uv}$ и взять их отношение, то получим

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}; \quad r_{uv} = \frac{s_{uv}}{s_u s_v}; \quad \frac{r_{xy}}{r_{uv}} = \frac{s_{xy}s_u s_v}{s_x s_y s_{uv}} = \frac{s_u s_v}{s_x s_y}. \quad (42.15)$$

Ввиду того, что $s_u > s_x > 0$ и $s_v > s_y > 0$, то и $s_u s_v > s_x s_y$, откуда следует, что если при измерениях допускаются ошибки, то наблюдаемая корреляция меньше истинной, причем с увеличением числа наблюдений их расхождение не уменьшается.

Рассмотрим, наконец, как изменяется коэффициент корреляции в результате смешивания коррелированных пар с некоррелированными. Пусть у нас имеется $n_1$ пар наблюдений над $x$ и $y$, которые дали коэффициент корреляции $r_1$, и пусть к этому материалу добавлено $n_2$ пар, имеющих средние и квадратические отклонения, равные тем, которые были вычислены для первых $n_1$ пар, но равный нулю коэффициент корреляции. При таких условиях коэффициент корреляции объединенной совокупности будет равен

$$r_2 = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{(n_1+n_2-1)s_x s_y}.$$

Откуда

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-1}. \tag{42.16}$$

Таким образом, видно, что в результате смешения получаемый коэффициент корреляции будет меньше.

## § 42.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

По поводу интерпретации $r_{xy}$ следует сделать два важных замечания. При выводе формулы для коэффициента корреляции никаких специальных предположений о характере совместного двумерного распределения величин $x$ и $y$ не делалось. Однако выводы о пределах изменения от $-1$ до $+1$ для $r_{xy}$, а также выражения «сильная связь», «умеренная связь» и т. д. справедливы только в рамках определенной статистической модели. В частности, сделанные выводы справедливы в том случае, если совместное распределение $x$ и $y$ представляет собой двумерную нормальную поверхность — симметричную колоколообразную поверхность, о которой более подробно пойдет речь в главе 44.

Нарушение этого предположения не препятствует вычислению $r_{xy}$, однако его интерпретация существенно меняется. Так, если частотные распределения $x$ и $y$ существенно скошены в разных направлениях, то даже при максимально возможной линейной связи между $x$ и $y$ $r_{xy}$ не будет превышать по абсолютной величине $0{,}6-0{,}7$.

Эта зависимость максимальной величины $r_{xy}$ от характера распределения $x$ и $y$ приводит к трудностям при интерпретации получаемых конкретных значений $r_{xy}$. В самом деле, что означает величина $r_{xy} = 0{,}6$? Максимально возможную линейную связь при положительной и отрицательной асимметрии распределений $x$ и $y$ или умеренную связь этих переменных при совместном распределении, подобном двумерному нормальному? Ответы на эти вопросы и, следовательно, дальнейшая интерпретация $r_{xy}$ могут быть получены из качественного анализа диаграмм рассеяния и гистограмм распределения $x$ и $y$.

Второе замечание по поводу интерпретации коэффициентов корреляции связано со значениями этих коэффициентов, близкими к нулю.

Рассмотрим диаграммы рассеяния, приведенные на рис. 42.3.

Ранее уже подчеркивалось, что $r_{xy}$ измеряет тесноту только линейной связи между переменными $x$ и $y$. Поэтому для диаграммы рассеяния, приведенной на рис. 42.3а, $r_{xy} \approx 0$. Однако $r_{xy} \approx 0$ и для диаграммы рассеяния 42.3б, несмотря на то, что в этом случае имеет место почти функциональная зависимость. Происходит это из-за нелинейной связи между $x$ и $y$.

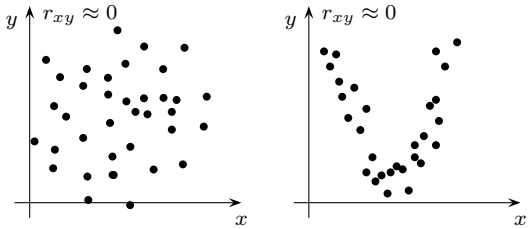



*Рис. 42.3.*

Этот пример должен служить предостережением против опрометчивого вывода о том, что равенство нулю коэффициента корреляции между переменными $x$ и $y$ всегда свидетельствует об отсутствии статистической связи между ними.

Поэтому для исключения возможных ошибок содержательной интерпретации коэффициента корреляции должен сопутствовать визуальный анализ диаграммы рассеяния.

Но даже в тех случаях, когда исходные предпосылки корреляционного анализа выполняются, исследователя при объяснении смысла полученных значений $r_{xy}$ подстерегают опасности, связанные с так называемой ложной корреляцией. Проблемы, которые при этом возникают, проиллюстрируем на примере расчетов для двух искусственных рядов, взятых из таблицы случайных чисел:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$: | 0 | 4 | 2 | 6 | 6 | 2 | 9 | 8 | 5 | 3 |
| $y$: | 8 | 9 | 1 | 0 | 5 | 2 | 4 | 6 | 7 | 1. |

Для этих двух рядов, как и следовало ожидать, коэффициент корреляции близок к нулю: $r_{xy} = 0{,}006$.

Пусть теперь имеется еще один ряд $z$: 7, 2, 5, 7, 2, 3, 9, 2, 2, 1, по отношению к которому определены два первых ряда $x$ и $y$. Например, в виде $x/z$ и $y/z$. Таким образом, по отношению к $x$ и $y$ $z$ выступает в виде общей причины. Под действием этой общей причины ряды $x$ и $y$ принимают следующий вид:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$: | 0,00 | 2,00 | 0,40 | 0,86 | 3,00 | 0,67 | 1,00 | 4,00 | 2,50 | 3,00 |
| $y$: | 1,14 | 4,50 | 0,20 | 0,00 | 2,50 | 0,67 | 0,44 | 3,00 | 3,50 | 1,00. |

Коэффициент корреляции в этом случае $r_{xy} = 0{,}583$.

Таким образом, несмотря на отсутствие статистической связи между $x$ и $y$, действие общей причины приводит к $r_{xy} \neq 0$, указывающему на умеренную корреляционную связь, что может послужить основой для неправильного истолкования взаимосвязи между $x$ и $y$, когда механизм связи неизвестен.

Другой возможный вариант возникновения ложной корреляции связан с появлением в совокупности исходных данных аномальных значений либо за счет неоднородности анализируемого материала, либо за счет ошибок при регистрации данных. Предположим, что случайные ряды $x$ и $y$, которые были использованы ранее, получены из показаний какого-то прибора путем деления этих показателей на 5, для того чтобы перейти, например, от условных единиц к истинным значениям. При этом для одной пары значений по ошибке такой переход не был сделан. В этом случае ряды $x$ и $y$ будут выглядеть следующим образом:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$: | 0 | 4 | 2 | 6 | 6 | 2 | 9 | 8 | 25 | 3 |
| $y$: | 8 | 9 | 1 | 0 | 5 | 2 | 4 | 6 | 35 | 1. |

Одной такой ошибки достаточно, для того чтобы коэффициент корреляции стал равным 0,874, т. е. значение $r_{xy}$ в этом случае указывает на довольно тесную связь, что в свою очередь может привести к неправильным содержательным выводам.

Наконец, ложная корреляция может возникнуть за счет того, что при анализе взаимосвязи исследователь произвольно выбирает из всего множества экспериментальных данных некоторый их набор, в котором пары величин изменяются однонаправленно в силу совпадения случайных обстоятельств. Например, в приводимом ниже примере значения $x$ и $y$ взяты из таблицы случайных чисел, но не подряд, а по определенному правилу. В результате имеем два ряда

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$: | 3 | 6 | 7 | 1 | 2 | 4 | 0 | 2 | 9 | 8 |
| $y$: | 7 | 2 | 1 | 9 | 7 | 5 | 6 | 3 | 0 | 4, |

для которых $r_{xy} = -0{,}780$.

Таким образом, приведенные примеры еще раз подтверждают соображения, высказанные при обсуждении общих проблем корреляции, о необходимости подробного логико-теоретического анализа явлений, одной из оценок которых является коэффициент корреляции. Только такой анализ может помочь исследователю избежать ошибок при интерпретации полученных коэффициентов корреляции.

## § 42.4. ДРУГИЕ МЕРЫ СВЯЗИ

### 42.4.1. РАНГОВЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Не всегда, когда нас интересует измерение взаимосвязи между двумя признаками, эти признаки или, по крайней мере, один из них могут быть оценены количественно. Достаточно часто такую оценку приходится проводить качественно. Например, группа городов с разной степенью урбанизации оценивается по уровню загрязненности окружающей среды. Эксперт или группа экспертов упорядочивают все города по обоим показателям, а затем интерес может представлять вопрос: согласованы ли уровень урбанизации и степень загрязнения окружающей среды. Процесс упорядочения носит название ранжирования, т. е. приписывание каждому городу ранга — порядкового номера, который соответствует месту, занимаемому им во всей совокупности. Такое ранжирование проводится по обоим интересующим нас признакам.

Или другой пример. Из некоторой культуры берется ряд проб, и исследователя интересует, влияет ли порядок взятия проб на число содержащихся в них бактерий. В этом случае первая переменная — порядок взятия проб — представляет собой упорядоченный набор номеров: 1-я проба, 2-я проба и т. д. Число же бактерий, соответствующее каждой пробе, может быть точно подсчитано.

И для первого, и для второго из приведенных примеров обычный коэффициент корреляции вычислен быть не может. Тем не менее мы можем получить ответы на интересующие нас вопросы, так как существуют разработанные специально для таких случаев коэффициенты взаимосвязи — ранговые коэффициенты корреляции. Наиболее употребимы из них два, предложенные американским психологом К. Спирменом и английским статистиком М. Кендаллом. Мы рассмотрим один из них — ранговый коэффициент корреляции К. Спирмена.

Формула для его вычисления выглядит так:

$$r_3 = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}, \tag{42.17}$$

где $d_i$ — разность рангов по обоим признакам $i$-го объекта; $n$ — число объектов.

Эта формула может быть получена с использованием обобщенного выражения для коэффициента корреляции (42.2).

Имеем
$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y})}{(n-1)s_x s_y}.$$

Если $x$ и $y$ — ранги, то они представляют собой два одинаковых множества натуральных чисел от 1 до $n$, следовательно, $s_x = s_y$ и $s_x s_y = s_x^2 = s_y^2$, где $s_x^2$ — дисперсия натурального ряда длиной $n$, которая может быть вычислена по формуле (41.7)
$$s_x^2 = \frac{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}{n(n-1)}.$$

Если $x$ (или $y$) — множество натуральных чисел длиной $n$, то, как известно из курса алгебры,
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{42.18}$$

Подставляя эти соотношения в формулу для расчета дисперсии, получаем
$$s_x^2 = \frac{\frac{nn(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{[n(n+1)]^2}{4}}{n(n-1)} = \frac{4n^2(n+1)(2n+1) - 6n^2(n+1)^2}{24n(n-1)} =$$
$$= \frac{2n^2(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{24n(n-1)} = \frac{n(n+1)}{12}.$$

Таким образом, знаменатель в выражении для расчета рангового коэффициента корреляции равен
$$\frac{(n-1)n(n+1)}{12} = \frac{n(n^2-1)}{12} = \frac{n^3-n}{12}. \tag{42.19}$$

Для числителя этого выражения с учетом (42.18) имеем
$$\sum (x-\overline{x})(y-\overline{y}) = \sum xy - \overline{x}\sum y - \overline{y}\sum x + \sum \overline{xy} =$$
$$= \sum xy - n\overline{xy} - n\overline{xy} + n\overline{xy} = \sum xy - n\overline{xy} = \sum xy - n\overline{x}^2 =$$
$$= \sum xy - n\left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^2 = \sum xy - \frac{n(n+1)^2}{4}. \tag{42.20}$$

Сумма произведений рангов может быть получена следующим образом. Пусть $d_i = x_i - y_i$. Тогда $\sum d_i^2 = \sum (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 - 2\sum x_i y_i - \sum y_i^2$ и, опуская индексы,
$$\sum xy = \frac{\sum d^2 - \sum x^2 - \sum y^2}{2} = \frac{\sum d^2 - 2\sum x^2}{2}. \tag{42.21}$$

Подставим (42.21) в (42.20):
$$\frac{\sum d^2 - 2\sum x^2}{2} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{\sum d^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}{2} - \frac{n(n+1)^2}{4} =$$
$$\frac{3\sum d^2 - n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n^3-n}{12} - \frac{\sum d^2}{2}.$$

Разделив это выражение на (42.19), получим
$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}.$$

Очень подробная последовательность выкладок для получения рангового коэффициента корреляции приведена здесь потому, что, описывая ниже другие меры связи,

мы будем приводить только конечные расчетные формулы, но следует иметь в виду, что все они могут быть получены с помощью аналогичных выкладок.

*Таблица 42.3.*

| Города | А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З | И | К |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Степень урбанизации | 3 | 7 | 5 | 9 | 1 | 8 | 6 | 10 | 4 | 2 |
| Уровень загрязненности | 2 | 4 | 3 | 5 | 1 | 9 | 8 | 10 | 7 | 6 |
| Разности $d_i$ | 1 | 3 | 2 | 4 | 0 | $-1$ | $-2$ | 0 | $-3$ | $-4$ |
| Разности $d_i^2$ | 1 | 9 | 4 | 16 | 0 | 1 | 4 | 0 | 9 | 16 |

● *ПРИМЕР 42.1.* Рассмотрим пример вычисления рангового коэффициента корреляции.
● Предположим, что группа городов ранжирована по степени урбанизации и уровню загрязненности окружающей среды. Обозначим города буквами от $A$ до $K$ и выпишем для них следующие две последовательности рангов (табл. 42.3).

Тогда

$$r_s = 1 - \frac{1+9+4+16+0+1+4+0+9+16}{10^3-10} = 0{,}636. \quad ●$$

Значение полученного коэффициента указывает на довольно высокую степень согласованности между степенью урбанизации и уровнем загрязненности окружающей среды в городах. Естественно, что такой вывод справедлив только в том случае, если $r_s$ может изменяться в определенных пределах, в частности в пределах $\pm 1$. То, что это именно так, мы сейчас докажем.

Интуитивно понятно, что $r_s$ достигает предельных значений, когда последовательности рангов либо совпадают, либо прямо противоположны. Если последовательности рангов полностью совпадают, то все разности $d_i$ будут равны нулю и по формуле (42.17) $r_s = 1$. Предположим теперь, что последовательности рангов для двух признаков $A$ и $B$ прямо противоположны, а общее число объектов, для которых эти признаки оцениваются, равно $n = 2m+1$, т. е. будем считать, что $n$ — нечетно. (Для четных $n = 2m$ вывод аналогичен.)

Имеем:

$$\begin{array}{lccccccccc} A\colon & 1, & 2, & \ldots, & m, & m+1, & m+2, & \ldots, & 2m, & 2m+1 \\ B\colon & 2m+1, & 2m, & \ldots, & m+2, & m+1, & m, & \ldots, & 2, & 1 \\ d\colon & -2m, & -(2m-2), & \ldots, & -2, & 0, & 2, & \ldots, & 2m-2, & 2m \end{array}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{2m+1} d_i^2 = 8[m^2 + (m-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2] = \frac{8m(m+1)(2m+1)}{6} =$$

$$= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) = \frac{1}{3}(n^3 - n).$$

Подставив это значение в (42.17), получим

$$r_s = 1 - \frac{6(n^3-n)}{3(n^3-n)} = 1 - 2 = -1.$$

Таким образом, мы убедились в том, что ранговый коэффициент имеет те же пределы изменения, что и обычный коэффициент корреляции. Это является следствием внутренней связи, существующей между всеми показателями корреляции, которые будут рассматриваться.

Иногда при ранжировании объектов по признакам сталкиваются с ситуацией, когда ни одному из них нельзя отдать предпочтение. В таких случаях считают, что объекты являются связанными, и каждому из них приписывается ранг, равный среднему рангов, который они бы имели, если бы были различимы. Например, если связанными оказались четвертый и пятый объекты, то каждому из них приписывается ранг 4,5, а если связаны объекты от третьего до седьмого, то каждый получает ранг $(3 + 4 + 5 + 6 + 7) : 5 = 5$. В этих случаях расчетная формула для рангового коэффициента корреляции имеет более сложный вид, она приводится в рекомендуемой литературе.

### 42.4.2. КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМНОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ

Кроме признаков, выраженных количественно или допускающих ранжирование, встречаются и такие, относительно которых можно утверждать только то, имеются ли они у данного объекта или отсутствуют. При этом наличие или отсутствие определенного признака обозначается нулем или единицей (битовые данные). Для данных, представленных в таком виде, также существует коэффициент, который позволяет оценивать корреляцию между ними

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}, \tag{42.22}$$

где $p_x$ и $p_y$ — доля объектов, имеющих единицу по признакам $x$ и $y$ соответственно; $q_x$ и $q_y$ — доля объектов, имеющих нуль по признакам $x$ и $y$ соответственно; $p_{xy}$ — доля объектов, имеющих одновременно единицу и по $x$ и по $y$.

Очевидно, что $p_x + q_x = p_y + q_y = 1$.

Формула (42.22) вытекает из формулы для обычного коэффициента корреляции (42.3), если в последнюю вместо $x$ и $y$ подставить соответствующие значения, выраженные в долях.

● *ПРИМЕР 42.2.* Рассмотрим пример использования коэффициента взаимной сопряженности. Пусть имеются данные об условиях гнездования двух видов чаек: серебристых и сизых. Совершенно произвольно серебристых будем обозначать как 1, а сизых — как 0. Каждый из этих видов может гнездоваться в камнях (1) или в других местах (0). Обследование дало следующие результаты:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вид чайки: | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| Место гнездования: | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0. |

Имеем: $p_x = 7/12$, $p_y = 4/12$, $q_x = 5/12$, $q_y = 8/12$, $p_{xy} = 3/12$. По формуле (42.22)

$$\varphi = \frac{0{,}25 - 0{,}583 \cdot 0{,}333}{\sqrt{0{,}583 \cdot 0{,}417 \cdot 0{,}333 \cdot 0{,}667}} = \frac{0{,}056}{0{,}232} = 0{,}24. \quad ●$$

Предельным случаем для дихотомических данных (данных, выражаемых единицами и нулями) является такой, когда для всех данных в целом учитывается, обладают они или нет некоторым качеством. В этом случае мы приходим к четырехпольной таблице сопряженности признаков, общая форма которой представлена в табл. 42.4.

*Таблица 42.4.*

| Признак | | $y$ | | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | |
| $x$ | 0 | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| | 1 | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| Сумма | | $a+c$ | $b+d$ | $n$ |

Легко видеть, что доли, которые были использованы для расчета $\varphi$, могут быть выражены через значения, указанные в отдельных клетках четырехпольной таблицы. Несложные преобразования позволяют от формулы (42.22) перейти к соответствующему соотношению, являющемуся эквивалентом $\varphi$ для четырехпольной таблицы:

$$\varphi' = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}. \tag{42.23}$$

● *ПРИМЕР 42.3.* Пусть у нас есть результаты экзаменов по химии и математике, которые сведены в таблицу 42.5. Найдем коэффициент взаимной сопряженности.

*Таблица 42.5.*

| Признак | | Результаты экзамена по химии | | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| | | **сдали** | **не сдали** | |
| Результаты экзамена по математике | сдали | 88 | 12 | 100 |
| | не сдали | 51 | 49 | 100 |
| Сумма | | 139 | 61 | 200 |

● По формуле (42.23) имеем

$$\varphi' = \frac{88 \cdot 49 - 51 \cdot 12}{\sqrt{139 \cdot 61 \cdot 100 \cdot 100}} = 0{,}402. \quad ●$$

Таким образом, в этом гипотетическом примере наблюдается положительная сопряженность между успешной сдачей экзаменов по обеим дисциплинам.

При использовании коэффициентов $\varphi$ и $\varphi'$ следует иметь в виду, что, несмотря на то что формулы для их вычисления получены исходя из обобщенной формулы для коэффициента корреляции, тем не менее ввиду особенностей, присущих дихотомическим данным, нельзя считать, что получаемые значения, например $r_{xy} = 0{,}402$ и $\varphi$ или $\varphi' = 0{,}402$, могут быть одинаково интерпретированы. В частности, $\varphi'$ может принимать значение $+1$ только в том случае, если $b$ и $c$ равны нулю. Поэтому, как правило, $\varphi$ и $\varphi'$ не могут принимать крайних значений $\pm 1$ и оценка существенности полученных значений вызывает определенные трудности, но в принципе возможна. В главе, посвященной проверке статистических гипотез, мы вновь вернемся к этому вопросу.

### 42.4.3. КОЭФФИЦИЕНТ СОПРЯЖЕННОСТИ ЧУПРОВА

Дальнейшим обобщением четырехпольных таблиц являются многопольные таблицы, для которых сопряженность наиболее часто оценивается по формуле, предложенной русским статистиком А. А. Чупровым. Прежде чем приводить ее, рассмотрим несколько реальных ситуаций, когда такая оценка может понадобиться. Известно, например, что окраска тюльпанов связана с наличием определенных пигментов. Может представлять

интерес вопрос о том, с какими именно пигментами преимущественно связана та или иная окраска цветка. Или другой пример. Окружающая гнездо полярной крачки обстановка может представлять собой зеленые растения, растения и гальку, пестрые камешки и т. д. При этом можно наблюдать самые разные по качеству гнезда: от его отсутствия до очень хорошо сделанного. В этом случае желательно знать, связано ли качество гнезда с какой-то одной или несколькими характеристиками окружающей среды. Общим для этих и других подобных задач является то, что в распоряжении экспериментатора оказываются данные о некотором множестве объектов, обладающих двумя признаками, причем каждый из этих признаков может иметь несколько градаций.

Именно для решения задач такого типа и был предложен А. А. Чупровым его коэффициент взаимной сопряженности

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(k-1)(m-1)}}}, \tag{42.24}$$

где $n$ — общее число объектов; $k$ и $m$ — числа градаций по одному и другому признаку.

Что касается величины $\chi^2$ («хи-квадрат»), то ее надо пояснить особо.

Итак, пусть в нашем распоряжении есть $n$ объектов, каждый из которых характеризуется парой признаков $A$ и $B$ с $k$ и $m$ градациями соответственно. Все данные расположим, как в таблице 42.6.

*Таблица 42.6.*

| **Признак** | $B_1$ | ... | $B_j$ | ... | $B_m$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $n_{11}$ | ... | $n_{1j}$ | ... | $n_{1m}$ | $n_{1\bullet}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_i$ | $n_{i1}$ | ... | $n_{ij}$ | ... | $n_{im}$ | $n_{i\bullet}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_k$ | $n_{k1}$ | ... | $n_{kj}$ | ... | $n_{km}$ | $n_{k\bullet}$ |
| $\sum$ | $n_{\bullet 1}$ | ... | $n_{\bullet j}$ | ... | $n_{\bullet m}$ | $n$ |

Здесь $n_i$ и $n_j$ обозначают общее число объектов, имеющих $i$-ю градацию по признаку $A$ и $j$-ю градацию по признаку $B$. Если бы не существовало зависимости между градациями признаков $A$ и $B$, то следовало бы ожидать, что в клетку с номером $ij$ должно попасть $n^*_{ij} = n_i n_j / n$ объектов. Реально же в клетку попадает $n_{ij}$ объектов. Вводится величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{(n_{ij} - n^*_{ij})^2}{n^*_{ij}}, \tag{42.25}$$

обладающая особыми свойствами, которые будут подробно обсуждены в главе, посвященной статистическому оцениванию. Пока же примем на веру, что функция от $\chi^2$ может служить показателем взаимной сопряженности.

Теперь рассмотрим пример использования коэффициента Чупрова для данных о колониях бактерий в трех видах пирожных, приведенных в табл. 42.7.

*Таблица 42.7.*

| **Вид пирожных** | **Колонии** | | | **Всего** |
|---|---|---|---|---|
| | **малые** | **средние** | **большие** | |
| Эклер | 92 | 37 | 46 | 175 |
| Наполеон | 53 | 15 | 19 | 87 |
| Ореховое | 75 | 19 | 12 | 106 |
| Всего | 220 | 71 | 77 | 368 |

Результаты промежуточных вычислений приведены в табл. 42.8.

*Таблица 42.8.*

| $n^*_{ij}$ | | |
|---|---|---|
| 104,620 | 33,764 | 36,617 |
| 52,011 | 16,785 | 18,204 |
| 63,370 | 20,451 | 22,179 |
| | $d_{ij} = n_{ij} - n^*_{ij}$ | |
| −16,620 | 3,236 | 9,383 |
| 0,989 | −1,785 | 0,796 |
| 11,630 | −1,451 | −10,179 |
| | $d^2_{ij}/n^*_{ij}$ | |
| 1,5223 | 0,3101 | 2,4044 |
| 0,0188 | 0,1898 | 0,0348 |
| 2,1344 | 0,1029 | 4,6716 |

Посмотрим, как получается для этой таблицы значение, помещенное в клетку на пересечении второй строки и третьего столбца. Имеем:

$$n_{2\bullet} = 87,\ n_{\bullet 3} = 77,\ n_{23} = 19 = n^*_{23} = \frac{8777}{368} = 18{,}204,$$

$$n_{23} - n^*_{23} = d_{23} = 0{,}796, \quad \frac{d^2_{23}}{n^*_{23}} = \frac{0{,}796^2}{18{,}204} = 0{,}0348.$$

Используя результаты таблицы 42.8, получим $\chi^2 = 11{,}389$, откуда

$$T = \sqrt{\frac{11{,}389}{368\sqrt{(3-1)(3-1)}}} = 0{,}148.$$

Сама по себе величина $T$, как, впрочем, и другие показатели взаимной сопряженности для многопольных таблиц, ничего не говорит о том, что за зависимость имеет место. Даже в том случае, если удастся показать, что полученное значение $T$ свидетельствует о существовании сопряженности между средой и величиной колонии бактерий, необходимо провести дополнительный качественный анализ отклонений теоретически ожидаемых численностей от наблюдаемых в эксперименте. В данном случае такой анализ показывает, что только для ореховых пирожных и эклеров существует сопряженность с размерами колоний бактерий. Причем сопряженность для двух этих видов взаимно обратна, т. е. ореховые пирожные имеют относительно малое число больших колоний (знак у $d_{33}$ отрицательный) и относительно большое число малых колоний (знак у $d_{31}$ положительный), а у эклеров эти отклонения противоположны.

В заключение отметим, что коэффициент Чупрова имеет пределы изменения от 0 до 1, но наибольшее значение — единица — может быть получено только тогда, когда число градаций по обоим признакам одинаково, в остальных случаях значение $T$ меньше единицы.

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте объяснение понятию корреляции.
2. Объясните значение фраз «высокая положительная корреляция» и «низкая отрицательная корреляция». Приведите примеры и графики, иллюстрирующие эти понятия.
3. Сформулируйте в содержательных понятиях задачу из области специализации, при решении которой необходимо вычислить:

а) обычный коэффициент корреляции;
б) ранговый коэффициент корреляции;
в) коэффициент корреляции для дихотомических данных;
г) коэффициент взаимной сопряженности;
д) коэффициент сопряженности Чупрова.

4. Объясните смысл коэффициента ранговой корреляции.
5. Перечислите причины появления ложной корреляции.
6. К каким изменениям коэффициента корреляции приводят:
   а) ошибки измерений тех признаков, для которых оценивается взаимосвязь;
   б) объединение коррелированных и некоррелированных пар наблюдений.
7. Может ли коэффициент корреляции быть равным нулю, когда между измеряемыми признаками существует функциональная зависимость?
8. Что произойдет с величиной коэффициента корреляции, если линейному преобразованию будут подвергнуты наборы случайных величин, по которым он вычисляется?
9. Приведите примеры, в которых нулевая корреляция предполагает независимость, и когда нулевая корреляция такой независимости не предполагает.

## Упражнения и задачи

1. Предположим, что $X$ и $Y$ — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины. Найти плотность распределения случайной величины $X/Y$.
2. Доказать, что при обратной функциональной зависимости коэффициент корреляции равен $-1$.
3. Из общей формулы для коэффициента корреляции вывести:
   а) коэффициент взаимной сопряженности для дихотомических данных;
   б) коэффициент взаимной сопряженности для четырехпольной таблицы.
4. Ниже приводятся данные по конверсии различных нафталиновых продуктов во фталевый ангидрид. Чему равен коэффициент корреляции между процентом конверсии и

   а) временем контакта; б) соотношением подач воздуха и сырья.

   Рассчитайте также коэффициент корреляции между временем контакта и соотношением подач. Как можно интерпретировать эти результаты?

| Время контакта, с | Соотношение подач воздуха и сырья (г/г) | Мольный процент конверсии во фталевый ангидрид |
|---|---|---|
| 0,69 | 29 | 50,5 |
| 0,66 | 91 | 30,9 |
| 0,45 | 82 | 37,4 |
| 0,49 | 99 | 37,8 |
| 0,48 | 148 | 19,7 |
| 0,48 | 165 | 15,5 |
| 0,41 | 133 | 49,0 |

5. Приведенные ниже данные получены в конкретном исследовании, где измерялись $X$ — возраст человека к моменту смерти, округленный до ближайшего целого года, и $Y$ — длина «линии жизни» на левой руке в сантиметрах. Некоторые люди верят, что продолжительность жизни линейно зависит от длины их «линии жизни». Вычислите коэффициент корреляции между приведенными в таблице данными и сделайте вывод об обоснованности такой веры.

| *X* | *Y* | *X* | *Y* | *X* | *Y* | *X* | *Y* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 9,75 | 61 | 7,20 | 69 | 7,80 | 76 | 6,00 |
| 40 | 9,00 | 62 | 7,95 | 69 | 10,05 | 77 | 8,85 |
| 42 | 9,60 | 62 | 8,85 | 70 | 10,50 | 80 | 9,00 |
| 42 | 9,75 | 65 | 8,25 | 71 | 9,15 | 82 | 9,75 |
| 47 | 11,25 | 65 | 8,85 | 71 | 9,45 | 82 | 10,65 |
| 49 | 9,45 | 65 | 9,75 | 71 | 9,45 | 82 | 13,20 |
| 50 | 11,25 | 66 | 8,85 | 72 | 9,45 | 83 | 7,95 |
| 54 | 9,00 | 66 | 9,15 | 73 | 8,10 | 86 | 7,95 |
| 56 | 7,95 | 66 | 10,20 | 74 | 8,85 | 88 | 9,15 |
| 56 | 12,00 | 67 | 9,15 | 74 | 9,60 | 88 | 9,75 |
| 57 | 8,10 | 68 | 7,95 | 75 | 6,45 | 94 | 9,00 |
| 57 | 10,20 | 68 | 8,85 | 75 | 9,75 | | |
| 58 | 8,55 | 68 | 9,00 | 75 | 10,20 | | |

6. С помощью двух шаров-зондов изучалось количество положительно и отрицательно заряженных частиц космического излучения, в результате чего были получены следующие данные:

| **Энергия (в МЭВ)** | **Число частиц** | |
|---|---|---|
| | **Положительные** | **Отрицательные** |
| 50–100 | 9 | 20 |
| 100–300 | 32 | 51 |
| 300–1000 | 23 | 117 |

Найти коэффициент взаимной сопряженности между относительными пропорциями положительных и отрицательных частиц и уровнем их энергии.

7. В таблице приведены данные о содержании двух веществ в датчиках для сцинтилляционных счетчиков частиц, а также относительная чувствительность этих датчиков. Найти коэффициенты корреляции между относительной чувствительностью и содержанием каждого из веществ в материале датчиков. Какие предварительные выводы можно сделать из полученных значений коэффициентов корреляции?

| **Относительная чувствительность** | **Терфенил (г)** | **Стеарат свинца (г)** |
|---|---|---|
| 29,4 | 207 | 8,3 |
| 26,9 | 212 | 7,9 |
| 26,3 | 220 | 7,2 |
| 21,2 | 210 | 8,0 |
| 26,3 | 205 | 7,7 |
| 23,1 | 213 | 8,2 |
| 26,8 | 200 | 7,8 |
| 25,4 | 217 | 7,8 |

8. Определите корреляцию по ковариации и дисперсии и поясните утверждение «независимые переменные всегда некоррелированны, но не все некоррелированные величины независимы».

# XLIII

# РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Довольно часто в практике исследовательской работы имеет место ситуация, когда важнейшие переменные, описывающие некоторый процесс, известны заранее, но модель процесса еще неизвестна. В этом случае возможны разные подходы. Одним из них является построение эмпирических моделей.

Построение эмпирических моделей предполагает проведение экспериментов или наблюдений для сбора опытных данных, выбор одной определенной модели из некоторого множества возможных, вычисление коэффициентов модели («подгонку») и оценку полученных результатов.

Рассмотрим несколько примеров. Исходные данные и соответствующие графики приведены в табл. 43.1—43.5 и рис. 43.1—43.3.

*Таблица 43.1.*

**Число цветков при разном количестве неорганического брома в почве**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество неорганического брома (мкг/см$^3$) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| Среднее число цветков на одном растении гвоздики | 3,6 | 2,9 | 3,2 | 1,8 | 2,3 | 1,7 | 0,8 |

*Таблица 43.2.*

**Частота сокращений сердца червя при различных температурах**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Температура, °C | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Частота сердечных сокращений | 39 | 54 | 74 | 100 | 136 | 182 | 254 |

*Таблица 43.3.*

**Длина змеи и средний видовой ареал**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Длина, см | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 150 |
| Ареал, условные площадки | 196 | 208 | 215 | 220 | 220 | 222 | 224 | 225 | 226 | 238 |

В этой главе будет рассмотрен только этап, связанный с вычислением коэффициентов модели. Вообще говоря, эмпирические модели могут быть как линейными, так и нелинейными. Причем термин «линейность» может относиться как к независимым переменным модели, так и к ее коэффициентам (параметрам). В дальнейшем изложении под линейной моделью понимается модель, представляющая собой линейную комбинацию параметров.

*Таблица 43.4.*

**Барометрическое давление и высота**

| Высота, м | 1000 | 1100 | 1200 | 1400 | 1500 | 1600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Давление, мм. рт. ст. | 690 | 595 | 504 | 363 | 310 | 267 |

*Таблица 43.5.*

**Зависимость давления пара от температуры в системе серная кислота–вода**

| Давление пара, мм. рт. ст. | 0,0015 | 0,0037 | 0,0133 | 0,0415 | 0,1230 | 0,4370 | 1,4200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Абсолютная температура, К | 308 | 318 | 333 | 348 | 363 | 383 | 403 |

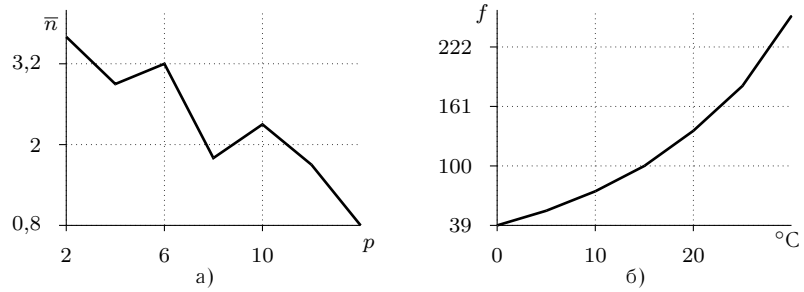



*Рис. 43.1.*

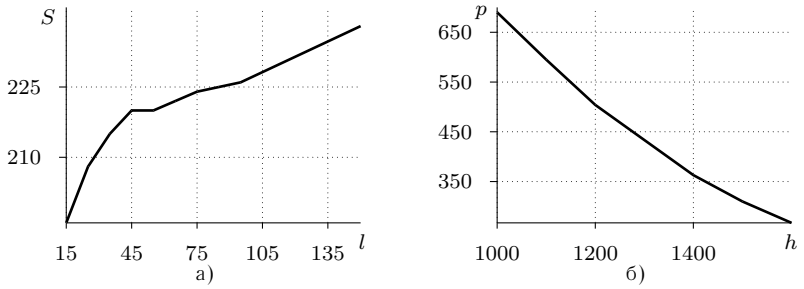



*Рис. 43.2.*

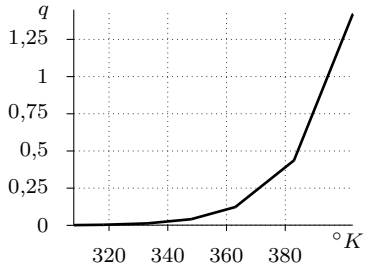



*Рис. 43.3.*

## § 43.1. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод наименьших квадратов, разработанный знаменитыми математиками К. Гауссом и А. Лежандром, берет свое начало от задач геодезии и астрономии. Рассмотрим его существо на примере линейной модели. Итак, пусть для представления полученных данных мы выбрали линейную модель $y^* = a + bx$, где $x$ — независимая переменная, т. е. переменная, которую экспериментатор может изменить по своему усмотрению; $y^*$ — зависимая переменная или отклик; $a$ и $b$ — коэффициенты (параметры). Из данных, приведенных в табл. 43.1 и рис. 43.1а, видно, что именно такой моделью (уравнением прямой линии) может быть описана зависимость между содержанием брома в почве и средним числом цветков на одном растении гвоздики для стандартных делянок.

С другой стороны, из рис. 43.1а видно также, что реально наблюденные значения отклика $y_i$ несколько отличаются от откликов $y_i^*$, соответствующих уравнению модели. И такое положение будет всегда, даже в тех случаях, когда зависимая и независимая переменные будут связаны строгой функциональной зависимостью. В этом случае отклонения эмпирических значений от теоретических связаны с погрешностями измерений, которые всегда имеют место.

Итак, каждому значению независимой переменной в общем случае соответствует ошибка:

$$\xi_i = y_i - y_i^*. \tag{43.1}$$

Естественно, что в зависимости от того, как будет проведена прямая, аппроксимирующая набор экспериментальных данных, величины $\xi_i$ будут различны. Именно для того, чтобы избежать субъективности при построении эмпирической модели, и был разработан метод наименьших квадратов, позволяющий однозначно определять параметры выбранной модели. В основе этого метода лежит критерий минимизации суммы квадратов ошибок, т. е. требование, чтобы

$$S = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 \tag{43.2}$$

была минимальной.

Покажем, как используется метод наименьших квадратов на примере оценки параметров для уравнения $y^* = a + bx$.

Начнем с преобразования формулы (43.2):

$$S = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (a + bx_i)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i^2 - 2y_i(a + bx_i) + (a + bx_i)^2\big).$$

Опуская (для краткости) индекс $i$, получим:

$$S = \sum y^2 - 2a \sum y - 2b \sum xy + na^2 + 2ab \sum x + b^2 \sum x^2. \tag{43.3}$$

Нас интересует нахождение таких значений параметров $a$ и $b$, которые обращают в минимум (43.3). Как известно, для этого необходимо найти частные производные $\partial S/\partial a$ и $\partial S/\partial b$ и приравнять их к нулю. В общем случае после такой процедуры необходимо убедиться, что в данной точке имеет место минимум (а не максимум или точка перегиба). Итак,

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum y + 2na + 2b \sum x = 2(na - \sum y + b \sum x) = 0, \tag{43.4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum xy + 2a \sum x + 2b \sum x^2 = 2(a \sum x + b \sum x^2 - \sum xy) = 0. \tag{43.5}$$

Из (43.4) и (43.5) получаем систему двух уравнений, построенных по методу наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum x; \\ \sum xy = a\sum x + b\sum x^2, \end{cases} \tag{43.6}$$

из которых определяются коэффициенты $a$ и $b$.

Проиллюстрируем нахождение этих коэффициентов на данных, приведенных в табл. 43.1. Для этого вычислим сначала промежуточные величины: $\sum y = 16{,}3$; $\sum x = 56$; $\sum x^2 = 560$; $\sum xy = 107$. Имеем

$$\begin{aligned} 16{,}3 &= 7a + 56b; \\ 107 &= 56a + 560b. \end{aligned}$$

Откуда $a = 4{,}0$; $b = -0{,}209$ и модель, связывающая среднее число цветков на одно растение гвоздики с количеством неорганического брома в почве принимает вид $y^* = 4{,}0 - 0{,}209x$.

В табл. 43.6 проведено сравнение между реальными данными и данными, полученными с использованием эмпирической модели, а также величины ошибок.

*Таблица 43.6.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3,6 | 2,9 | 3,2 | 1,8 | 2,3 | 1,7 | 0,8 |
| $y^*$ | 3,582 | 3,164 | 2,746 | 2,328 | 1,91 | 1,492 | 1,074 |
| $\xi_i$ | 0,018 | −0,264 | 0,454 | −0,528 | 0,39 | 0,208 | −0,274 |
| $\sum \xi_i$ | | | | 0,825 | | | |

Представляет интерес рассмотреть уравнения (43.6) с точки зрения их связи с другими описательными статистиками. Разделив первое из уравнений на $n$, получим

$$\frac{\sum y}{n} = a + b\frac{\sum x}{n}; \quad \overline{y} = a + b\overline{x}. \tag{43.7}$$

Подставим значения для $a$ из (43.7) во второе уравнение из (43.6):

$$\sum xy = (\overline{y} - b\overline{x})\sum x + b\sum x^2 = \overline{y}\sum x + b(\sum x^2 - \overline{x}\sum x).$$

Если первое слагаемое из правой части перенести в левую и разделить обе части уравнения на $n(n-1)$, то

$$\frac{\frac{\sum xy}{n} - \overline{y}\frac{\sum x}{n}}{n-1} = \frac{b\left(\frac{\sum x^2}{n} - \overline{x}\frac{\sum x}{n}\right)}{n-1},$$

откуда следует, что

$$s_{xy} = bs_x^2. \tag{43.8}$$

Из двух последних уравнений имеем

$$\begin{cases} a = \overline{y} - b\overline{x} \\ b = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}. \end{cases} \tag{43.9}$$

Уравнение (43.8) определяет семейство параллельных прямых линий с угловым коэффициентом $b$, а уравнение (43.7) позволяет выбрать из этого семейства ту прямую, которая проходит через точку с координатами, равными средним значениям переменных.

Существует связь между коэффициентом $b$ и коэффициентом корреляции $r_{xy}$. Умножим обе части второго уравнения в (43.9) на $s_x/s_y$:

$$b\frac{s_x}{s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}\cdot\frac{s_x}{s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = r_{xy}; \quad b = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}. \tag{43.10}$$

В частности, если $s_y = s_x$, то $b = r_{xy}$. Учитывая, что $r_{xy}$ изменяется в пределах от $+1$ до $-1$, делаем вывод, что коэффициент $b$ не превосходит по абсолютной величине $s_x/s_y$.

Полученные методом наименьших квадратов уравнения могут быть использованы для предсказания отклика, т. е. значений зависимой переменной по значениям независимой переменной. Однако при прогнозе надо соблюдать осторожность, используя значения $x$, существенно отличающиеся от тех, которые применялись при определении коэффициентов эмпирической модели. Как правило, во избежание больших ошибок при прогнозе значений зависимой переменой можно использовать значения $x$, выходящие за крайние значения на величину, не превосходящую более чем на 10–15% размах изменений независимой переменной.

## § 43.2. ВЫБОР ФОРМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Пусть имеется ряд данных, представляющих одну зависимую и одну независимую переменную, и требуется определить функциональную связь между ними. Универсального способа решения этой задачи не существует. Иногда анализ графического изображения имеющихся данных, а также понимание механизма исследуемого процесса помогают выбрать вид аналитической зависимости. Особенно просто оценить вид функциональной зависимости, если экспериментальные данные укладываются или группируются относительно некоторой прямой. Поэтому, если удается найти такое преобразование исходных величин, что вновь полученные значения укладываются на прямую, вид исходной функциональной зависимости определить относительно несложно.

Значительное число зависимостей, встречающихся в практике научных исследований в самых разных областях знания, может быть описано следующими уравнениями:

$$y = a + bx, \tag{43.11}$$
$$y = a + bx + cx^2, \tag{43.12}$$
$$y = ab^x, \tag{43.13}$$
$$y = ax^b, \tag{43.14}$$
$$y = \frac{x}{a + bx}. \tag{43.15}$$

Уравнения (43.13) и (43.14) легко привести к линейному виду, прологарифмировав их левые и правые части:

$$\lg y = \lg a + x\lg b \text{ или } Y = A + Bx;$$
$$\lg y = \lg a + b\lg x \text{ или } Y = A + bX,$$

где $Y = \lg y$; $A = \lg a$; $B = \lg b$; $X = \lg x$.

Уравнение (43.15) приводится к линейному виду, если ввести новую переменную $Y = x/y$:

$$Y = a + bx.$$

Коэффициенты уравнения (43.12) можно найти по методу наименьших квадратов из следующей системы:

$$\begin{aligned} \sum y &= an + b\sum x + c\sum x^2, \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3, \\ \sum x^2 y &= a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4. \end{aligned} \tag{43.16}$$

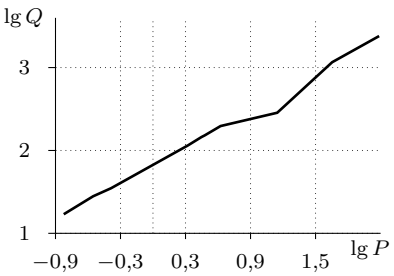



*Рис. 43.4.*

Таким образом, если известен вид функциональной зависимости, то нахождение коэффициентов особого труда не представляет. Определить же приближенно, какое из уравнений является наиболее подходящим для описания набора экспериментальных данных, можно, если вспомнить, что для прямой линии отношение $\Delta y/\Delta x$ — есть величина постоянная, и последовательно для каждого уравнения найти это отношение для соответствующих преобразованных величин.

Технику подбора подходящей аналитической зависимости продемонстрируем на данных, приведенных в табл. 43.7 (рис. 43.4).

*Таблица 43.7.*

**Суточная теплопродукция у различных животных**

| | **Вес, кг** | **Теплопродукция, ккал** |
|---|---|---|
| Горлица | 0,15 | 17 |
| Вяхирь | 0,28 | 28 |
| Морская свинка | 0,41 | 35 |
| Курица | 2,1 | 115 |
| Петух | 2,8 | 145 |
| Кошка | 3,0 | 152 |
| Макак | 4,2 | 197 |
| Собака | 14,0 | 285 |
| Овца | 45,0 | 1160 |
| Свинья | 122,0 | 2400 |

Последовательность вычислений приведена в табл. 43.8.

*Таблица 43.8.*

| $x$ | $y$ | $\lg x$ | $\lg y$ | $\frac{x}{y}$ | $\Delta x$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 x$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta \lg y$ | $\Delta \lg x$ | $\Delta\left(\frac{x}{y}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,15 | 17 | −0,824 | 1,230 | 0,009 | — | — | — | — | — | — | — |
| 0,28 | 28 | −0,553 | 1,447 | 0,010 | 0,13 | 11 | — | — | 0,217 | 0,271 | 0,001 |
| 0,42 | 35 | −0,377 | 1,544 | 0,012 | 0,14 | 7 | 0,01 | −4 | 0,093 | 0,176 | 0,002 |
| 2,10 | 115 | 0,322 | 2,061 | 0,018 | 1,68 | 80 | 1,54 | 73 | 0,517 | 0,699 | 0,006 |
| 2,80 | 145 | 0,447 | 2,161 | 0,019 | 0,70 | 30 | −0,98 | −50 | 0,100 | 0,125 | 0,001 |
| 3,00 | 152 | 0,477 | 2,182 | 0,020 | 0,20 | 7 | −0,50 | −23 | 0,019 | 0,030 | 0,001 |
| 4,20 | 207 | 0,623 | 2,316 | 0,020 | 1,20 | 55 | 1,00 | 48 | 0,134 | 0,146 | 0,001 |
| 14,00 | 485 | 1,146 | 2,686 | 0,029 | 9,80 | 278 | 8,60 | 222 | 0,370 | 0,523 | 0,000 |
| 45,00 | 1160 | 1,653 | 3,064 | 0,039 | 31,00 | 675 | 21,20 | 398 | 0,378 | 0,507 | 0,009 |
| 122,0 | 2400 | 2,086 | 3,380 | 0,051 | 77,00 | 1240 | 46,00 | 565 | 0,316 | 0,433 | 0,012 |

Из анализа этой таблицы следует, что наиболее близкими к некоторой постоянной будут отношения $\Delta \lg y/\Delta \lg x$. Следовательно, зависимость между теплопродукцией и весом животного может быть приближенно описано уравнением $y = ax^b$. Если теперь составить соответствующую систему уравнений и подставить в нее значения из табл. 43.7, то окажется, что $a = 68{,}1$; $b = 0{,}734$ и уравнение имеет вид: $y = 68{,}1x^{0{,}734}$.

## § 43.3. ЛИНЕЙНЫЕ РЕГРЕССИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотренный в параграфе § 43.1 метод наименьших квадратов представляет основной способ оценивания в регрессионном анализе, т. е. анализе, связанном с изучением зависимости среднего одной из случайных величин от другой или других случайных величин, связанных с ней.

Основы регрессионного анализа, так же как и корреляционного, были разработаны известным английским антропологом и метеорологом Ф. Гальтоном. Он же ввел в научный оборот и само это слово в применении к широкому классу задач. Будучи близким родственником Чарльза Дарвина, он решил оказать ему помощь в количественной оценке некоторых фактов, имеющих отношение к теории естественного отбора. Он провел обширное экспериментальное исследование, измеряя рост сыновей и отцов, на основании которого пришел к выводу, что у сыновей имеет место регрессия к среднему, т. е. не проявляется тенденция к наследованию сыновьями роста отцов, и у высоких отцов сыновья, как правило, ниже, а у низкорослых наоборот.

В предыдущем параграфе было показано, что зависимость одной случайной величины от другой может описываться различными аналитическими выражениями, но здесь будет рассмотрен лишь простейший случай линейной зависимости и соответствующие ему линейные регрессионные уравнения. Кроме того, будем считать, что каждому значению независимой переменной $x$ соответствует несколько значений зависимой переменной $y$.

Естественно, что уравнения, составленные по методу наименьших квадратов, всегда позволяют вычислить значения коэффициентов $a$ и $b$ даже в тех случаях, когда выбранное уравнение регрессии $y = a + bx + e$ не слишком удачно. В значительной мере достоверность полученных оценок $a$ и $b$ зависит от некоторых предположений относительно поведения случайной ошибки $e$. Перечислим эти требования.

1. Случайный характер: отдельные ошибки представляют собой случайные величины.
2. Нулевое среднее: каждое отклонение $e_i$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и не зависит от значений $x_i$.
3. Гомоскедастичность: дисперсия каждого $e_i$ одинакова для всех $i$ независимо от $x_i$.
4. Отсутствие взаимозависимости (автокорреляции) ошибок: значения ошибок отдельных наблюдений не коррелированы между собой.
5. Нормальность: требование, чтобы ошибка $e$ имела нормальное распределение.

В следующих главах будут описаны приемы, с помощью которых можно проверить выполнение этих требований. Здесь же будем предполагать, что они выполняются, и попытаемся приближенно оценить точность предсказания $y$ по $x$, так как именно предсказание является одной из главных целей регрессионного анализа.

Такая оценка будет осуществляться с использованием дисперсии ошибки оценки $s_e^2$. Имеем

$$s_e^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i - \overline{e})^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}{n-1}, \tag{43.17}$$

так как согласно сделанному предположению $\overline{e} = 0$.

Выразим $s_e^2$ через $s_y^2$ и $r_{xy}$. Это позволит выявить некоторые связи между корреляцией и предсказанием. Итак,

$$s_e^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2}{n-1}. \tag{43.18}$$

С учетом (43.7)

$$s_e^2 = \frac{\sum(y_i - bx_i + b\overline{x} - \overline{y})^2}{n-1} = \frac{\sum\big((y_i - \overline{y}) - b(x_i - \overline{x})\big)^2}{n-1} =$$
$$= \frac{\sum(y_i - \overline{y})^2}{n-1} - \frac{2b\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n-1} + \frac{b^2\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = s_y^2 - 2bs_{xy} + b^2 s_x^2.$$

Воспользовавшись соотношением (43.10), получим

$$s_e^2 = s_y^2 - 2r_{xy}\frac{s_y}{s_x}s_{xy} + r_{xy}^2\frac{s_y^2}{s_x^2}s_x^2 = s_y^2 - 2r_{xy}^2 s_y^2 = s_y^2(1 - r_{xy}^2). \tag{43.19}$$

Положительное значение корня квадратного из дисперсии ошибки оценки носит название стандартной ошибки:

$$s_e = s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}. \tag{43.20}$$

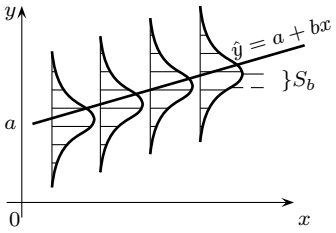



*Рис. 43.5.*

Эта ошибка оценки может быть использована для приближенного определения тех пределов в окрестностях предсказанного значения $\hat{y}$, внутрь которых попадает фактическое значение $y$. Если считать, что выполняется требование нормальности распределения ошибки, то можно использовать стандартную ошибку оценки для построения полосы относительно эмпирической линии регрессии, в которую попадают с определенной степенью вероятности истинные значения $y$ при заданных $x$ (рис. 43.5).

Линейный регрессионный анализ естественным образом обобщается на случай, когда зависимая переменная зависит не от одной, а от нескольких независимых переменных.

В табл. 43.9 приведены значения максимального артериального давления ($y$), возраста ($x_1$) и веса детей ($x_2$).

*Таблица 43.9.*

| $y$ | $x_1$, месяцы | $x_2$, кг | $y$ | $x_1$, месяцы | $x_2$, кг | $y$ | $x_1$, месяцы | $x_2$, кг |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 95 | 48 | 15,90 | 96 | 30 | 12,50 | 108 | 14 | 10,20 |
| 90 | 42 | 14,50 | 115 | 7 | 7,35 | 100 | 11 | 10,05 |
| 105 | 36 | 13,90 | 120 | 14 | 10,50 | 110 | 8 | 9,30 |
| 94 | 36 | 13,70 | 120 | 13 | 11,00 | 105 | 15 | 9,85 |
| 120 | 10 | 9,68 | 107 | 14 | 10,25 | 110 | 18 | 12,30 |
| 115 | 10 | 8,76 | 107 | 23 | 12,30 | 108 | 5 | 7,07 |
| 105 | 9 | 8,65 | 98 | 24 | 13,00 | 98 | 6 | 6,50 |
| 108 | 9 | 9,25 | 105 | 19 | 13,10 | 115 | 24 | 13,00 |
| 110 | 7 | 7,60 | 110 | 23 | 12,10 | 110 | 4 | 6,70 |
| 115 | 11 | 9,85 | 105 | 13 | 11,25 | 108 | 6 | 7,40 |

Необходимо построить уравнение регрессии, связывающее $y$ с $x_1$ и $x_2$: $y = a + bx_1 + cx_2$.

Неизвестные коэффициенты найдем из системы уравнений, составленной по методу наименьших квадратов. Имеем

$$\sum y = an + b\sum x_1 + \sum x_2,$$
$$\sum x_1 y = a\sum x_1 + b\sum x_1^2 + c\sum x_1 x_2,$$
$$\sum x_2 y = a\sum x_2 + b\sum x_1 x_2 + c\sum x_2^2.$$

Подставляя соответствующие численные значения, получим

$$\begin{aligned} 3212 &= 30a + 509b + 316{,}5c, \\ 52955 &= 509a + 12485b + 6151{,}6c, \\ 33646{,}3 &= 316{,}5a + 6151{,}6b + 3529{,}3c. \end{aligned}$$

Откуда $a = 97{,}5;\ b = -0{,}87;\ c = 2{,}31$ и уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 97{,}5 - 0{,}87x_1 + 2{,}31x_2. \tag{43.21}$$

Представим себе теперь, что в нашем распоряжении имелись бы только данные, связывающие максимальное артериальное давление либо с возрастом, либо с весом. В этом случае (проверьте самостоятельно!) регрессионные уравнения имели бы вид:

$$y = 113{,}9 - 0{,}4x_1, \tag{43.22}$$

$$y = 120{,}4 - 1{,}26x_2. \tag{43.23}$$

*Таблица 43.10.*

| $e_i$ | $e'_i$ | $e''_i$ | $e_i$ | $e'_i$ | $e''_i$ | $e_i$ | $e'_i$ | $e''_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,5 | −0,3 | −5,4 | −4,3 | −5,9 | −8,6 | −0,9 | −0,3 | 0,5 |
| −4,4 | −7,1 | −12,1 | 6,6 | 2,9 | 3,9 | −11,1 | −9,5 | −7,7 |
| 6,7 | 5,5 | 2,1 | 10,4 | 11,7 | 12,8 | −2,0 | −0,7 | 1,3 |
| −3,8 | −5,5 | −9,1 | 8,4 | 11,3 | 13,5 | −2,2 | −2,9 | −3,0 |
| 8,8 | 10,1 | 11,8 | −2,0 | −1,3 | −0,5 | −0,2 | 3,3 | 5,1 |
| 6,0 | 5,1 | 5,6 | 1,1 | 2,3 | 2,1 | −1,5 | −3,9 | −3,5 |
| −4,6 | −5,3 | −4,5 | −8,7 | −6,3 | −6,0 | −8,3 | −13,5 | −14,2 |
| −3,0 | −2,3 | −0,7 | −6,2 | −1,3 | 1,1 | 8,3 | 11,7 | 11,0 |
| 1,0 | −1,1 | −0,8 | 4,6 | 5,3 | 4,9 | 2,8 | −2,3 | −3,2 |
| 4,3 | 5,5 | 7,0 | −7,2 | −3,7 | −1,2 | −1,4 | −3,5 | −3,1 |

В табл. 43.10 приведены ошибки оценки $e_i$, $e'_i$, $e''_i$, соответствующие уравнениям (43.21)–(43.23).

Стандартные ошибки оценок, вычисленные по данным табл. 43.10, равны $s_e = 5{,}7$; $s_{e'} = 6{,}2$; $s_{e''} = 7{,}0$. Видно, что стандартные ошибки оценки при использовании двух независимых переменных меньше, чем когда используется только одна независимая переменная. Это следствие более общего результата, состоящего в том, что оценки, полученные по уравнению множественной регрессии, являются не менее надежными, чем оценки, полученные по уравнениям регрессии, включающим только одну независимую переменную. Как правило, с помощью уравнений множественной регрессии получается существенно лучшее приближение к экспериментальным данным, чем при учете только отдельных независимых переменных.

Уже на этом примере видно, что одновременный учет нескольких факторов, связанных с интересующей нас величиной, позволяет построить модель, которая более точно описывает имеющиеся данные и лучше прогнозирует зависимую переменную. Вот почему множественный регрессионный анализ довольно широко используется в последние годы для построения уравнений, описывающих изучаемый процесс или явление.

Естественно, что интересующая нас величина может зависеть от большого числа факторов, так что даже в тех случаях, когда любой из этих факторов поддается измерению, возникает вопрос, какие факторы имеет смысл учитывать при построении эмпирической модели в виде линейного уравнения регрессии, т. е. как из нескольких возможных моделей выбрать наиболее подходящую. Неразумно, даже имея в распоряжении вычислительную машину, рассчитывать все возможные уравнения регрессии, получаемые путем добавления или исключения из модели отдельных переменных.

Вообще говоря, процедура оценивания наиболее эффективна при правильно спланированном эксперименте, но рассмотрения требуют и те случаи, когда мы располагаем опытными данными, полученными в неспланированном заранее эксперименте. В этом случае нужно пользоваться некоторыми правилами, которые позволяют выбрать наиболее подходящую модель с наименьшими возможными затратами сил и средств. Вот основные из них.

1. Модель — регрессионное уравнение — должна содержать минимальное число коэффициентов, а следовательно, и переменных, обеспечивающих приемлемую ошибку.
2. Модель должна иметь простейшую форму, совместимую с этой ошибкой. Например, при возможности нужно ограничиваться только первыми степенями переменных, не вводя квадратов и более высоких степеней.
3. Желательно, чтобы форма модели имела под собой содержательное обоснование. Например, рост численности популяции, если нет ограничений на пищевые и другие ресурсы, осуществляется по экспоненте, поэтому при изучении этого процесса должна быть выбрана соответствующая функциональная зависимость и т. д.
4. Сумма квадратов отклонений между эмпирическими и предсказанными по данному уравнению значениями должна быть минимальна.

Одной из лучших процедур, позволяющих осуществлять отбор наиболее подходящих моделей и учитывающих некоторые из приведенных выше правил, является шаговый регрессионный анализ. Сущность этого метода состоит в том, что отдельные переменные последовательно включаются в первоначальную модель, и на каждом этапе проводится проверка того, приводит ли добавление переменной к существенному или статистически значимому приближению предсказанных значений к эмпирическим данным. Такая проверка осуществляется с помощью дисперсионного анализа.

Необходимо также отметить, что уже для трех и более независимых переменных шаговый регрессионный анализ должен проводиться с использованием стандартных пакетов прикладных программ для ЭВМ.

При использовании шагового регрессионного анализа вопрос о том, какую из независимых переменных ввести в модель, решается с помощью частных коэффициентов корреляции, к рассмотрению которых мы и переходим.

## § 43.4. ЧАСТНАЯ И МНОЖЕСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

В предыдущей главе мы уже упоминали о том, что обнаруживаемая по коэффициенту корреляции взаимосвязь между двумя случайными величинами может быть всего лишь отражением того, что обе они коррелируют с третьей величиной или группой величин. В такой ситуации необходимо рассмотреть так называемую частную корреляцию, т. е. условную корреляцию между двумя величинами, когда остальные величины фиксированы.

В примере, который был рассмотрен в предыдущем параграфе, это могло бы выглядеть так. Для того чтобы определить частную корреляцию между максимальным артериальным давлением и, например, весом, нужно было бы иметь очень большую выборку детей, среди которых следовало бы отобрать детей одного возраста, и для каждой такой возрастной группы получить данные о максимальном артериальном давлении и весе, между которыми и рассчитать корреляцию.

Практически реализовать такой метод не удается ввиду ограниченности данных, да в нем и нет особой нужды. Разработаны специальные приемы, с помощью которых можно оценить частные корреляции по произвольному набору данных, получаемых в эксперименте.

Что же показывает частная корреляция? Если корреляция между двумя величинами уменьшается, когда третья величина фиксируется, то это значит, что взаимозависимость между этими двумя величинами возникает частично за счет действия третьей величины. В пределе, если корреляция между указанными двумя величинами становится равной нулю, то можно считать, что взаимозависимость между ними целиком возникает за счет третьей величины. В противоположном случае, когда корреляция между парой величин возрастает при фиксации третьей величины, можно считать, что эта величина ослабляет истинную корреляцию.

Частные коэффициенты корреляции различают по их порядкам. Если оценивается «чистая» корреляция между парой случайных величин при одной третьей фиксированной величине, говорят о коэффициентах частной корреляции первого порядка. Если фиксированных величин две — имеем дело с коэффициентами частной корреляции второго порядка и т. д.

Начнем рассмотрение с вывода соотношения для частных коэффициентов корреляции первого порядка. Пусть в нашем распоряжении имеются три случайные величины $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Можно построить уравнения регрессии $x_1$ и $x_2$ по $x_3$. В этом случае ошибки предсказания могут быть представлены в следующем виде:

$$e_{13} = x_1 - (a + bx_3),$$
$$e_{23} = x_2 - (a^* + b^* x_3).$$

Коэффициент корреляции между $e_{13}$ и $e_{23}$ называется частным коэффициентом корреляции, так как он представляет собой корреляцию между $x_1$ и $x_2$ после того, как части $x_1$ и $x_2$, которые могут быть предсказаны с использованием $x_3$, были удалены из $x_1$ и $x_2$. Обозначим этот коэффициент через $r_{12,3}$, где подписной индекс после запятой относится к переменной, которая фиксирована.

По известной формуле для коэффициента корреляции

$$r_{12,3} = \frac{s_{e_{13}e_{23}}}{s_{e_{13}} s_{e_{23}}}. \tag{43.24}$$

Ранее было показано, что стандартная ошибка может быть представлена в виде $s_e = s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}$. С учетом этого знаменатель в (43.24) оказывается равным

$$s_{13} \cdot s_{23} = s_1\sqrt{1 - {r_{13}}^2} \cdot s_2\sqrt{1 - {r_{23}}^2} = s_1 s_2\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}, \tag{43.25}$$

далее $e$ опускаем.

Используя обычное соотношение для ковариации, легко показать, что числитель в (43.24) имеет вид:

$$s_{13,23} = s_{12} - bs_{23} - b^* s_{13} + bb^* s_3^2. \tag{43.26}$$

Рассмотрев соотношения между коэффициентами в регрессионных уравнениях и коэффициентами корреляции, мы выяснили, что в общем случае $b = r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$. Используя это соотношение и соотношение $s_{xy} = r_{xy}s_x s_y$ для нашего случая, получим

$$s_{13,23} = r_{12}s_1 s_2 - r_{13}\frac{s_1}{s_3}r_{23}s_2 s_3 - r_{23}\frac{s_2}{s_3}r_{13}s_1 s_3 + \\ + r_{13}\frac{s_1}{s_3}r_{23}\frac{s_2}{s_3}s_3^2 = s_1 s_2(r_{12} - r_{13}r_{23}). \tag{43.27}$$

Подставляя в (43.24) соотношения (43.25) и (43.27), имеем:

$$r_{12,3} = \frac{s_1 s_2 (r_{12} - r_{13} r_{23})}{s_1 s_2 \sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}. \tag{43.28}$$

Это и есть формула для расчета частного коэффициента корреляции первого порядка. Два других коэффициента $r_{13,2}$ и $r_{23,1}$ получаются циклической перестановкой коэффициентов в (43.28).

Рассчитаем частные коэффициенты корреляции для данных, приведенных в табл. 43.9, обозначая максимальное артериальное давление, возраст и вес соответственно через $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Имеем: $r_{12} = -0{,}59$; $r_{13} = -0{,}41$; $r_{23} = 0{,}91$. Откуда

$$r_{12,3} = \frac{-0{,}59 - (-0{,}49)(0{,}91)}{\sqrt{\left(1 - (-0{,}41)^2\right)\left(1 - 0{,}91^2\right)}} = -0{,}57;$$

$$r_{13,2} = \frac{-0{,}41 - (-0{,}59)(0{,}91)}{\sqrt{\left(1 - (-0{,}41)^2\right)\left(1 - 0{,}91^2\right)}} = 0{,}38;$$

$$r_{23,1} = \frac{0{,}91 - (0{,}59)(-0{,}41)}{\sqrt{\left(1 - (-0{,}59)^2\right)\left(1 - (-0{,}41)^2\right)}} = 0{,}91.$$

Попытаемся истолковать в содержательных понятиях полученные результаты, имея в виду, что в случае частной корреляции предположения о причинной связи не должны и не могут базироваться на вычисленных коэффициентах корреляции.

Прежде всего мы видим, что $r_{12,3}$ и $r_{23,1}$ практически не отличаются от $r_{12}$ и $r_{23}$. Это значит, что вес и максимальное артериальное давление не оказывают воздействия на взаимосвязь между возрастом и максимальным артериальным давлением и между возрастом и весом у детей. Что же касается взаимосвязи между весом и максимальным артериальным давлением, то здесь наглядно видно, какие «ловушки» подстерегают исследователя при истолковании коэффициентов корреляции.

В самом деле, если бы в нашем распоряжении оказались только данные о максимальном артериальном давлении и весе детей, то, базируясь только на вычисленном коэффициенте корреляции, нужно было бы сделать вывод, что увеличение веса в среднем приводит к уменьшению максимального артериального давления. На самом же деле такая взаимосвязь существует между возрастом и максимальным артериальным давлением, а вес имеет очень тесную положительную взаимосвязь с возрастом, за счет чего и получается вычисленное значение $r_{13}$.

Таким образом, вывод, сделанный на основании значения $r_{13,2}$, прямо противоположен выводу, основанному на $r_{13}$. Отсюда следует подтверждение высказанного ранее предупреждения о том, что формальные вычисления коэффициентов корреляции обязательно должны сопровождаться содержательным анализом рассматриваемой ситуации, а выводы о причинно-следственных связях должны иметь внестатистическую основу.

Из анализа формулы (43.28) следует, что даже если $r_{12}$ равен нулю, то $r_{12,3}$ нулю не должен быть равен. И наоборот, из равенства $r_{12,3} = 0$ не следует, что и $r_{12} = 0$. Кроме того,

$$\frac{(r_{12} - r_{13} r_{23})^2}{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)} \leqslant 1,$$

т. е.

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2 r_{12} r_{13} r_{23} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что если $r_{12}$ и $r_{13}$ известны, то $r_{23}$ имеет следующие границы:

$$r_{12}r_{13} - \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{12}r_{13}} \leqslant r_{23} \leqslant r_{12}r_{13} + \sqrt{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{12}r_{13}}.$$

Аналогично можно построить границы возможных значений для $r_{12}$ и $r_{13}$.

По тому же самому принципу, как была получена формула для расчета частного коэффициента корреляции первого порядка, может быть получено соотношение для частных коэффициентов корреляции любого порядка:

$$r_{12,34\ldots n} = \frac{r_{12,34\ldots(n-1)} - r_{1n,34\ldots(n-1)}r_{2n,34\ldots(n-1)}}{\sqrt{(1 - r_{1n,34\ldots(n-1)}^2)(1 - r_{2n,34\ldots(n-1)}^2)}}. \tag{43.29}$$

Вернемся теперь к вопросу о процедуре выбора наилучшей регрессионной модели. Если переменная (отклик) $y$ зависит от нескольких переменных $x_i$, то оцениваются все частные коэффициенты корреляции между $y$ и каждым $x_i$ при фиксированных остальных переменных, и первой включается та переменная, для которой частный коэффициент корреляции будет максимален. Второй включается переменная, имеющая наибольший частный коэффициент корреляции среди оставшихся переменных и т. д.

Рассмотрим, наконец, вопрос о коэффициенте множественной корреляции. Пусть имеется зависимая переменная $y$ и $k$ независимых переменных $x$. Для $y$ может быть построена оценка $\hat{y}$ в виде уравнения множественной регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k.$$

Коэффициенты $b_0$, $b_1$, $b_2$, …, $b_k$ находятся по методу наименьших квадратов так, чтобы $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum(y_i - b_0 - b_1x_{i1} - b_2x_{i2} - \cdots - b_kx_{ik})^2$ была минимальной.

Если теперь вычислить корреляцию между $y$ и $\hat{y}$, то она будет служить мерой того, как сумма независимых переменных с соответствующими коэффициентами позволяет предсказывать зависимую переменную $y$. Коэффициент такой корреляции носит название *коэффициента множественной корреляции* и обозначается $R_{y,123\ldots k}$.

Найдем выражение для вычисления коэффициента множественной корреляции в частном случае, когда $y$ зависит только от $x_1$ и $x_2$. Для этого вспомним, что

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_xs_y} = \sqrt{\frac{s_{xy}s_{xy}}{s_x^2s_y^2}} = \sqrt{\frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \frac{s_{xy}}{s_y^2}} = \sqrt{b\frac{s_{xy}}{s_y^2}}.$$

Если у нас одна зависимая и две независимые переменные, то

$$r_{y,12} = \sqrt{\frac{b_1s_{y1}}{s_y^2} + \frac{b_2s_{y2}}{s_y^2}}. \tag{43.30}$$

Это соотношение может быть выражено через парные коэффициенты корреляции между всеми переменными.

В качестве самостоятельного упражнения предлагаем показать, что для стандартизованных величин имеют место равенства

$$b_1 = \frac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}, \qquad b_2 = \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{1 - r_{12}^2}.$$

Используя последнее равенство, выразим множественный коэффициент корреляции через парные коэффициенты корреляции между всеми переменными:

$$r_{y,12} = \sqrt{\frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}}. \tag{43.31}$$

Из анализа этой формулы следует, что чем сильнее новая переменная коррелирует со старыми переменными, тем меньше ее вклад в величину $R$, а следовательно, и в улучшение прогноза.

Для уже использованных в предыдущем параграфе данных найдем коэффициент множественной корреляции. Вновь будем обозначать переменные через $x_1$ (максимальное артериальное давление), $x_2$ (возраст) и $x_3$ (вес). Имеем

$$r_{1,23} = \sqrt{\frac{(-0{,}59)^2 + (-0{,}41)^2 - 2(-0{,}59)(-0{,}41)(0{,}91)}{1 - 0{,}91^2}} = 0{,}66;$$

$$r_{2,13} = \sqrt{\frac{(-0{,}59)^2 + (0{,}91)^2 - 2(-0{,}59)(0{,}91)(-0{,}41)}{1 - (-0{,}41)^2}} = 0{,}94;$$

$$r_{3,12} = \sqrt{\frac{(-0{,}41)^2 + (0{,}91)^2 - 2(-0{,}41)(0{,}91)(-0{,}59)}{1 - (-0{,}59)^2}} = 0{,}85.$$

Из полученных значений следует, что наилучшим образом может быть предсказан возраст, если в качестве независимых переменных будут взяты максимальное артериальное давление и вес.

Соотношения (43.30) и (43.31) естественным образом обобщаются на случай произвольного числа независимых переменных.

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте содержательное объяснение методу наименьших квадратов.
2. Перечислите виды функциональных зависимостей, наиболее широко используемые при построении эмпирических моделей.
3. Сформулируйте в содержательных понятиях задачи из области специализации, при решении которых понадобится:
   а) регрессионное уравнение;
   б) частные коэффициенты корреляции;
   в) множественный коэффициент корреляции;
   г) эмпирическая модель.

## Упражнения и задачи

1. На двух участках в течение определенного периода произведены замеры осадков (в мм), приводимые ниже:

| № п/п | $X$ | $Y$ | № п/п | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26,7 | 16,8 | 8 | 50,8 | 33,8 |
| 2 | 35,6 | 29,5 | 9 | 24,4 | 24,4 |
| 3 | 17,5 | 16,3 | 10 | 33,3 | 35,6 |
| 4 | 35,8 | 27,2 | 11 | 52,6 | 43,4 |
| 5 | 13,0 | 8,4 | 12 | 25,9 | 19,1 |
| 6 | 37,8 | 40,4 | 13 | 22,6 | 19,1 |
| 7 | 35,1 | 28,2 | 14 | 40,4 | 23,4 |

   а) Получить уравнения регрессии $X$ на $Y$ и $Y$ на $X$;
   б) Если известно, что $X = 35{,}6$, то что можно сказать о величине $Y$?
   в) Если известно, что $Y = 28{,}7$, то что можно сказать о величине $X$?

2. По данным об урожайности сена ($x$), весенним осадкам ($y$) и количеству весенних дней с температурой воздуха выше 5 градусов ($z$) получены следующие коэффициенты корреляции: $r_{xy} = 0{,}80$, $r_{xz} = -0{,}40$, $r_{yz} = -0{,}56$. Найти частные коэффициенты корреляции. С их использованием дать интерпретацию корреляции между урожаем сена и температурой воздуха и объяснить, является ли высокая температура причиной низких урожаев или она связана с небольшим количеством осадков.
3. По данным предыдущей задачи вычислить множественный коэффициент корреляции между урожаем сена и количеством весенних осадков и температуры воздуха.
4. Компоненты вектора соответствуют скорости производства вычислений ($x_1$), способности производить вычисления ($x_2$), памяти на слова ($x_3$), памяти на осмысленные символы ($x_4$) и памяти на бессмысленные символы ($x_5$). По 140 наблюдениям получены следующие коэффициенты корреляции, сведенные в корреляционную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}425 & 0{,}042 & 0{,}022 & 0{,}057 \\ 0{,}425 & 1{,}000 & 0{,}149 & 0{,}249 & 0{,}284 \\ 0{,}042 & 0{,}149 & 1{,}000 & 0{,}669 & 0{,}466 \\ 0{,}022 & 0{,}249 & 0{,}669 & 1{,}000 & 0{,}692 \\ 0{,}057 & 0{,}284 & 0{,}466 & 0{,}692 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

   Найти:
   а) частный коэффициент корреляции между $x_4$ и $x_5$, считая $x_3$ фиксированной;
   б) частный коэффициент корреляции между $x_1$ и $x_2$, считая $x_3$, $x_4$ и $x_5$ фиксированными;
   в) множественный коэффициент корреляции между $x_1$ и множеством $x_3$, $x_4$ и $x_5$.
5. Вязкость полиэфиров в расплавленном состоянии указывает на степень полимеризации. При химическом исследовании для пяти степеней полимеризации ($X$) измерялась вязкость расплавленного полиэфира при высоком ($Y_1$) и низком ($Y_2$) давлении. Результаты приведены ниже:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | 4,05 | 5,08 | 6,34 | 7,37 | 7,84, |
| $Y_1$: | 30,1 | 62,0 | 120,2 | 180,5 | 230,5, |
| $Y_2$: | 28,8 | 64,1 | 120,3 | 179,1 | 259,9. |

   а) Построить график зависимости $Y_1$ от $Y_2$;
   б) Найти методом наименьших квадратов линейную зависимость логарифма вязкости под высоким давлением ($\log Y_1$) от степени полимеризации;
   в) Найти линейную зависимость $\log Y_2$ от $X$.
6. Оценками математического ожидания и ковариационной матрицы для длины и ширины головы старшего и младшего сыновей, полученными в одном сравнительном исследовании, являются вектор средних и выборочная ковариационная матрица

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 185{,}7 \\ 151{,}1 \\ 183{,}8 \\ 149{,}2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 95{,}29 & 52{,}87 & 69{,}66 & 46{,}11 \\ 52{,}87 & 54{,}36 & 51{,}31 & 35{,}05 \\ 69{,}66 & 51{,}31 & 100{,}81 & 56{,}54 \\ 46{,}11 & 35{,}05 & 56{,}54 & 45{,}02 \end{pmatrix}.$$

Найти частный коэффициент корреляции $r_{34,12}$, найти выборочные множественные коэффициенты корреляции между $x_3$ и $(x_1, x_2)$, а также между $x_4$ и $(x_1, x_2)$.

7. Зависимость норадреналина ($Y$) от уровня натрия ($X$), вводимого с пищей, является либо полиномиальной, либо экспоненциальной. Используя данные, приведенные ниже:

*Таблица 43.11.*

| Уровень натрия | Норадреналин | Уровень натрия | Норадреналин |
|---|---|---|---|
| 2 | 31,66 | 103 | 5,58 |
| 10 | 19,20 | 122 | 15,21 |
| 5 | 45,03 | 136 | 7,58 |
| 6 | 13,30 | 80 | 9,77 |
| 20 | 23,44 | 196 | 13,60 |
| 3 | 20,61 | 196 | 10,01 |
| 14 | 18,46 | 224 | 3,68 |
| 21 | 11,98 | 245 | 7,03 |
| 97 | 13,90 | 171 | 14,12 |
| 86 | 14,00 | 257 | 7,30 |
| 56 | 14,61 | 157 | 10,32 |
| 127 | 15,26 | | |

а) построить диаграмму рассеяния;
б) рассчитать и построить полиномиальную модель;
в) рассчитать и построить экспоненциальную модель;
г) определить, какое из уравнений обеспечивает лучшую подгонку.

8. Развитие детей оценивалось двумя методиками (А и Б) (см. табл. 43.12), использующими хронологический возраст ($X$) и задержку умственного развития ($Y$), измеренные в месяцах. Построить регрессию $Y$ по $X$ для каждой из методик и определить, какая из них дает лучший результат подгонки. Оценить коррелированность обоих методик.

*Таблица 43.12.*

| А | | Б | |
|---|---|---|---|
| $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ |
| 8,4 | 2,4 | 8,7 | 0,4 |
| 12,4 | 3,2 | 12,4 | 2,1 |
| 14,0 | 4,5 | 13,8 | 5,0 |
| 14,2 | 4,7 | 13,9 | 4,7 |
| 16,2 | 7,7 | 16,4 | 4,9 |
| 16,3 | 3,3 | 16,5 | 1,5 |
| 16,8 | 6,8 | 17,0 | 6,0 |
| 17,0 | 5,0 | 16,7 | 3,7 |

# XLIV

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Различные статистические показатели, о которых шла речь в предыдущих главах этого раздела, вычисляются на основе некоторых ограниченных по объему совокупностей экспериментальных данных. Сбор и последующий анализ этих данных направлен на проверку определенных предположений относительно возможных механизмов изучаемых процессов или явлений, выдвигаемых исследователем при постановке задачи. Несмотря на то, что число объектов или процессов в каждом конкретном исследовании, как правило, сравнительно невелико, мы бы хотели, чтобы получаемые в результате анализа статистики достаточно хорошо описывали все реально существующее или мыслимое множество объектов или процессов, представляющее интерес в данном исследовании. Для этого делаются некоторые предположения о том, как вычисленные на основе экспериментальных данных показатели соотносятся с параметрами тех распределений, которые могли бы быть получены, если бы в нашем распоряжении оказалось все множество интересующих нас объектов. Это и составляет, в общих чертах, основную задачу статистического оценивания. Решение этой задачи представляет собой главную часть любого анализа экспериментальных данных и тесно связано с использованием ряда теоретических распределений некоторых специальных переменных, с рассмотрения которых мы и начнем.

## § 44.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ВЫВОДАХ

Распределением, играющим, пожалуй, основную роль в теории статистического оценивания, является нормальное распределение. Его свойства были подробно рассмотрены в предыдущем разделе, поэтому здесь мы приведем только формулу для плотности этого распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{44.1}$$

и отметим следующее. Широкое использование в статистических выводах нормального распределения имеет под собой как определенное эмпирическое, так и теоретическое обоснование. Во-первых, многочисленные примеры построения гистограмм и аппроксимация их непрерывными кривыми для экспериментальных данных самой различной природы показывают, что во многих случаях нормальное распределение действительно является довольно точным представлением таких данных. Во-вторых, доказано, что

благодаря усреднению некоторого числа отдельных значений, которые сами по себе имеют произвольное распределение, получаемое распределение в среднем оказывается близким к нормальному. И, наконец, нормальное распределение имеет ряд определенных математических достоинств, позволяющих существенно облегчить доказательства некоторых основополагающих моментов теории статистического вывода.

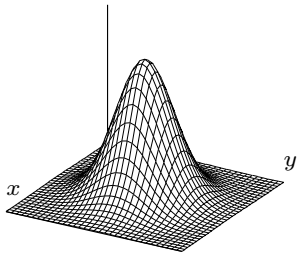



*Рис. 44.1.*

Следует четко представлять, что нормальное распределение — это чисто математический инструмент, и совсем необязательно, чтобы реальные экспериментальные данные точно описывались этим распределением, хотя во многих случаях, допуская небольшую ошибку, это распределение может быть принято в качестве модели для реальных данных.

Наряду с одномерным, важную роль в статистике, особенно в теории корреляции, играет двумерное нормальное распределение:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{x-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)}. \qquad (44.2)$$

которое представляет собой колоколообразную поверхность в трехмерном пространстве (рис. 44.1) и обладает рядом характерных особенностей.

Во-первых, если взять только значения переменной $x$ без учета значений переменной $y$, которым они соответствуют, то распределение этих $x$ является нормальным. То же справедливо и для значений $y$. Во-вторых, если зафиксировать какое-то значение переменной $x$, то все соответствующие ему значения переменной $y$ имеют также нормальное распределение (аналогично для $y$). И, наконец, средние значения $y(x)$ для каждого отдельного значения $x(y)$ ложатся на прямую.

Дальнейшим обобщением нормального распределения является $n$-мерное нормальное распределение, широко используемое в многомерном статистическом анализе.

### 44.1.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

Другим играющим важную роль в статистических выводах распределением является распределение $\chi^2$ (хи-квадрат), введенное в статистическую практику К. Пирсоном.

Представим себе очень большую совокупность нормально распределенных значений с нулевым средним и единичным стандартным отклонением. Обозначим через $\chi_1^2 = z^2$ квадрат стандартизованной величины, выбранной из этой совокупности. Таких величин можно получить очень большое количество, для них построить гистограмму и аппроксимировать ее непрерывной кривой. Если теперь выбрать масштаб для ординат этой кривой так, чтобы площадь под ней была равна единице, то получим кривую распределения хи-квадрат с одной степенью свободы. Одна степень свободы указывает, что для получения $\chi^2$ использовались квадраты одной величины.

Выберем случайно из исходной совокупности по два значения, возведем их в квадрат и сложим. Получим величину $\chi^2 = z_1^2 + z_2^2$. Если эту процедуру выбора повторить многократно, а затем, так же как и в предыдущем случае, построить гистограмму и аппроксимировать ее непрерывной кривой, то получим другую кривую распределения, а именно $\chi_2^2$ (хи-квадрат с двумя степенями свободы). Аналогичным образом можно получать кривые распределения хи-квадрат для сумм произвольного числа квадратов стандартизованных величин, взятых из совокупности с нормальным

распределением. Известно аналитическое выражение для кривой распределения $\chi^2_n$, однако ввиду сложности приводить мы его не будем.

На рис. 44.2 приведены кривые $\chi^2$ для разного числа степеней свободы.

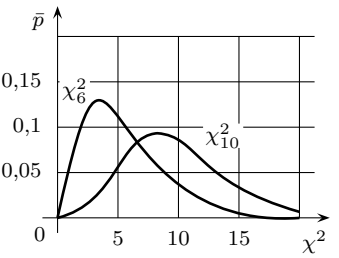


*Рис. 44.2.*

Как видно из рисунка, свойства кривой $\chi^2_n$ существенно зависят от $n$. Все семейство распределений хи-квадрат характеризуется следующими свойствами:

1°. Среднее значение распределения хи-квадрат с $n$ степенями свободы равно $n$.

2°. Мода $\chi^2_n$ находится в точке $n-2$ для $n \geqslant 2$.

3°. Дисперсия $\chi^2$ равна $2n$.

4°. Асимметрия $\chi^2$ равна $\sqrt{8/n}$.

5°. Для больших $n$ $\chi^2_n$ стремится к нормальному распределению со средним $n$ и стандартным отклонением $\sqrt{2n}$.

6°. Если $\chi^2_{n_1}$ имеет распределение хи-квадрат с $n_1$ степенями свободы и если $\chi^2_{n_2}$ имеет распределение хи-квадрат с $n_2$ степенями свободы и не зависит от $\chi^2_{n_1}$, то $\chi^2_{n_1}+\chi^2_{n_2}$ имеет также распределение хи-квадрат с $n_1+n_2$ степенями свободы.

В Приложении приведена таблица 2 со значениями $\chi^2$ для разного числа степеней свободы, соответствующими определенным долям площади под кривой распределения. Например, что означает число 11,07 для $\alpha = 0{,}05$ и $n = 5$? Это число показывает, что сумма квадратов пяти значений $z$, случайно выбранных из нормального распределения, только в пяти случаях из ста будет превышать 11,07. В остальных 95 случаях она будет меньше. Другими словами, вероятность получить значение $\chi^2_5$ между 0 и 11,07 равна 0,95.

### 44.1.2. *F*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Распределение Фишера ($F$-распределение) возникает в результате следующих действий. Пусть имеется переменная $\chi^2_{n_1}$ и независимая от нее переменная $\chi^2_{n_2}$. Случайная величина, называемая $F$-отношением, получается так:

$$F_{n_1 n_2} = \frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}. \qquad (44.3)$$

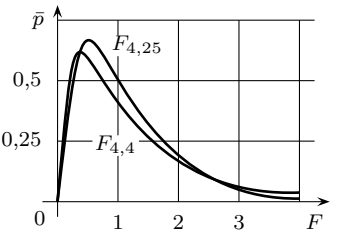


*Рис. 44.3.*

Можно вычислить множество $F$-отношений для разных $n_1$ и $n_2$. Построив для них гистограмму и аппроксимировав ее непрерывной кривой, получим распределение $F$ с $n_1$ и $n_2$ степенями свободы. Графики кривых этого распределения для разных чисел степеней свободы приведены на рис. 44.3.

По тем же причинам, что и для распределения хи-квадрат, мы не приводим аналитического выражения для $F$-распределения, а упомянем о некоторых его особенностях. Это распределение характеризуется унимодальностью, положительной асимметрией, имеет медиану $Md \leqslant 1$ и среднее, равное $n_2/(n_2-2)$ для $n_3 \geqslant 3$.

В Приложении 1 приведена таблица $F$-распределения, в которой каждой паре степеней свободы соответствуют два числа. Эти числа представляют собой граничные значения, слева от которых лежит соответственно 95% и 99% от общей площади под кривой $F$-распределения.

### 44.1.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Если в нашем распоряжении есть нормированное нормальное распределение и распределение $\chi^2_n$, то, как показал Стьюдент (псевдоним крупного английского статистика В. Госсета), величина

$$t = \frac{z}{\sqrt{\chi^2_n/n}} \qquad (44.4)$$

имеет распределение ($t$-распределение), обладающее рядом важных свойств. Как и для $F$-распределений, существует целое семейство $t$-распределений (рис. 44.4).

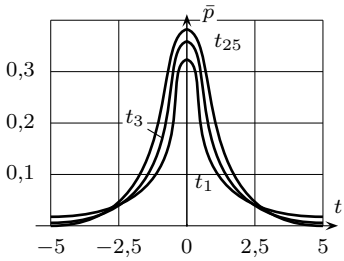


*Рис. 44.4.*

Все эти распределения симметричны, унимодальны и имеют нулевое среднее и дисперсию, равную $n/(n-2)$. По мере роста $n$ распределение начинает быстро приближаться к нормальному. Для различных значений $n$ по аналитическому выражению для $t$-распределения вычислены величины, приведенные в соответствующей таблице Приложения 1.

Например, числа 2,365 и 3,499 для числа степеней свободы, равного 7, означают, что только в пяти и соответственно одном случае из ста вычисленное значение по абсолютной величине превысит эти числа. Или, другими словами, что в диапазоне 2,365 и 3,499 заключено соответственно 95% и 99% площади под кривой $t$-распределения.

Распределение Стьюдента играет в теоретической и прикладной статистике почти такую же важную роль, как и нормальное распределение.

## § 44.2. ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ОЦЕНОК

После проведения экспериментов в распоряжении исследователя оказывается определенное ограниченное количество результатов измерений, характеризующих объект исследования по интересующему его признаку. Из их анализа должен быть сделан вывод, относящийся ко всем объектам данного вида. Множество объектов, конечное или бесконечное, относительно которого делаются статистические выводы, носит название генеральной совокупности. Этот термин приобретает смысл в сочетании с понятием о выборке, т. е. части этого множества. Реально же мы имеем дело с конечными генеральными совокупностями, размеры которых, правда, могут колебаться в очень широких пределах.

Например, вся генеральная совокупность уссурийских тигров насчитывает около двухсот особей, в то время как число таких деревьев, как березы или осины, измеряется миллионами. В статистических выводах важен не сам по себе объем генеральной совокупности, а та доля от него, которую составляет выборка. Во всех случаях, когда объем выборки меньше сотой части всей генеральной совокупности, последнюю по отношению к выборке принято считать практически бесконечной и использовать математический аппарат, основанный на таком представлении.

Ряд показателей, которые уже были рассмотрены: среднее, дисперсия и т. д., характеризуют выборку и носят название статистик. Такие же показатели, но характеризующие всю генеральную совокупность в целом, носят название параметров. Таким образом, можно считать, что статистики служат оценками для параметров. Чтобы отличать статистики от параметров, принято последние обозначать греческими буквами: $\mu$ — среднее, $\sigma^2$ — дисперсия, $\rho$ — коэффициент корреляции и т. д.

Пусть теперь мы извлекаем из генеральной совокупности большое число выборок, для каждой из которых вычисляется некоторая статистика, например среднее. Если для множества полученных средних (их будет столько, сколько было извлечено выборок) построить гистограмму, а затем аппроксимировать ее непрерывной кривой, выбрав масштаб так, чтобы площадь под кривой равнялась единице, то получим приближенное выборочное распределение среднего. Естественно, что такие выборочные распределения могут быть построены для любых интересующих нас статистик.

Предположим, что в очень большой генеральной совокупности признаки $(x)$, принимающие численные значения от единицы до десяти, встречаются одинаково часто. Тогда распределение этих признаков будет иметь вид, как на рис. 44.5.

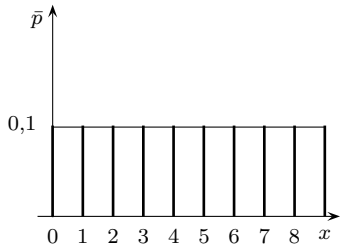


*Рис. 44.5.*

Пусть теперь из всей совокупности объектов с этими признаками извлекаются 100 выборок по два объекта в каждой. Если теперь для средних этих выборок $(\overline{x})$ построить распределение, то оно будет иметь вид, как на рис. 44.6.

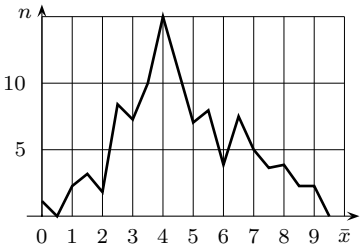


*Рис. 44.6.*

Возникает вопрос, случайно ли, что это распределение более или менее симметрично и имеет такой вид, что если его аппроксимировать непрерывной кривой, то эта кривая будет приближаться к колоколообразной? Оказывается, нет. Мы уже упоминали специальную теорему (см. главу 38), в которой утверждается, что если из бесконечной генеральной совокупности с произвольным распределением и параметрами $\mu$ и $\sigma^2$ извлекаются случайные выборки объема $n$, где $n$ достаточно велико, то выборочное среднее будет иметь распределение, приближающееся к нормальному с параметрами $\mu$ и $\sigma^2/n$ ($\sigma^2$ — дисперсия генеральной совокупности).

Попытаемся нестрого доказать эту теорему. Предположим, что из генеральной совокупности извлекается большое число выборок объемом $n$. Все выборочные значения $x$ имеют номера от 1 до $n$, причем эти номера указывают только, в каком порядке извлекались объекты в каждой выборке. Если считать, что среднее и дисперсия генеральной совокупности равны $\mu$ и $\sigma^2$, то, взяв только первые или только вторые и т. д. значения из каждой выборки, получим совокупности со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. Таким образом, случайные переменные $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ имеют одинаковые средние и дисперсии.

Отсюда следует, что выборочное среднее равно $(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$. Среднее выборочного распределения $\overline{x}$ должно быть равно ожидаемому значению $\overline{x}$ (математическому ожиданию). Имеем

$$M[\overline{x}] = M[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n] = \frac{1}{n} M[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] = \\ = \frac{1}{n}\big(M[x_1] + M[x_2] + \cdots + M[x_n]\big). \quad (44.5)$$

Выше было указано, что ожидаемые значения для всех $x$ независимо от их порядковых номеров одинаковы и равны $\mu$.

Следовательно,

$$M[\overline{x}] = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Таким образом, ожидаемое значение генерального среднего в выборочном распределении средних равно $\mu$, т. е. среднему совокупности, из которой извлекаются выборки.

Докажем, что дисперсия распределения выборочных средних равна $\sigma^2/n$. Предположим, что мы извлекаем из генеральной совокупности выборки объема два. Для каждой выборки $\overline{x} = (x_1 + x_2)/2$. Объекты $x_1$ и $x_2$ во всех выборках извлекаются независимо, и, следовательно, ряды $x_1$ и $x_2$, полученные по всем выборкам, не коррелированы между собой. Как указывалось выше, совокупности $x_1$ и $x_2$ имеют дисперсии $\sigma^2$. Найдем теперь дисперсию выборочных средних для данного случая:

$$\sigma^2_{\overline{x}} = \sigma^2_{(x_1+x_2)/2}. \tag{44.6}$$

В главе 42 было показано (42.9), что

$$\sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2r\sigma_x\sigma_y.$$

Так как в нашем случае $x$ и $y$, т. е. $x_1$ и $x_2$ некоррелированы, то приведенное соотношение приобретает вид

$$\sigma^2_{x_1+x_2} = \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2}.$$

Учитывая, что $\sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2} = \sigma^2$, а также свойство дисперсии, состоящее в том, что умножение переменной на константу приводит к умножению дисперсии на квадрат этой константы, получаем

$$\sigma^2_{\overline{x}} = \sigma_{(x_1+x_2)/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2_{x_1+x_2} = \frac{1}{4}(\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2}) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2}. \tag{44.7}$$

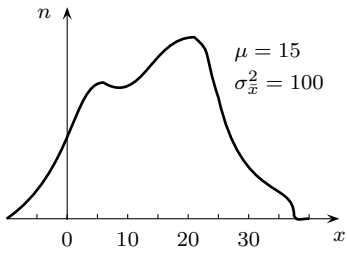


*Рис. 44.7.*

То, что дисперсия средних для выборок объемом два равна половине дисперсии генеральной совокупности, не случайно. По индукции можно доказать, что

$$\sigma^2_{(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n} = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{44.8}$$

Величина в правой части (44.8) носит название дисперсии ошибки среднего, а арифметическое значение корня квадратного из нее называется стандартной ошибкой среднего, т. е. $\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

То, как для некоторого распределения генеральной совокупности (рис. 44.7) выглядит распределение средних, когда объемы выборок равнялись 100, представлено на рис. 44.8, из которого видно, что кривая подходит очень близко к оси абсцисс в точках с координатами $M[\bar{x}] \pm 3\sigma_{\bar{x}}$.

Другой пример выборочного распределения — распределение коэффициентов корреляции, полученных из двумерной нормальной генеральной совокупности с $\rho = 0$ (рис. 44.9).

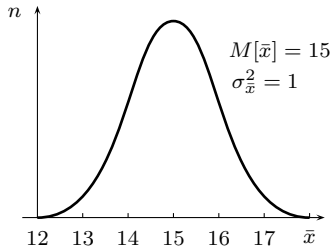


*Рис. 44.8.*

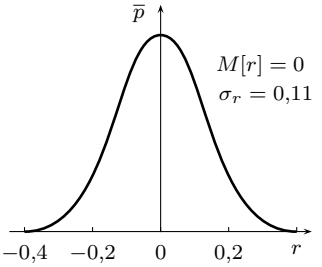


*Рис. 44.9.*

Теоретически было показано, что распределение выборочных коэффициентов корреляции в этом случае стремится к нормальному распределению с нулевым средним и стандартной ошибкой $\sigma_r = 1/\sqrt{n-1}$. Имея рисунок в достаточно большом масштабе (или используя аналитическое выражение для нормального распределения), можно видеть, что в пяти случаях из ста в выборках объемом, например, в 80 объектов из генеральной совокупности с некоррелированными признаками вычисленные коэффициенты корреляции могут быть по абсолютной величине больше 0,22.

Теперь мы переходим к рассмотрению вопроса, о котором уже упоминалось в главе 41, когда речь шла об описательных статистиках. Разговор пойдет о свойствах оценок. Итак, как подчеркивалось ранее, описательные статистики используются как оценки параметров. Однако возникает вопрос, какую из статистик предпочесть в качестве оценки параметра, если есть выбор, либо насколько хорошо оценивает тот или иной параметр некоторая новая статистика. Существенный вклад в решение проблемы формализации свойств оценок принадлежит английскому статистику Р. Фишеру.

Рассмотрим три свойства оценок: *несмещенность*, *состоятельность* и *эффективность*.

Оценка называется *несмещенной*, если среднее выборочного распределения оценки равно величине оцениваемого параметра. Из рассмотренных нами описательных статистик несмещенной оценкой является среднее, причем несмещенность среднего сохраняется при любом распределении генеральной совокупности. В случае симметричных распределений несмещенной оценкой среднего генеральной совокупности является также медиана.

Именно желание получить несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности приводит к тому, что в формуле для расчета выборочной дисперсии в знаменателе стоит $n-1$, а не $n$. Покажем это. Обозначим среднее выборочного распределения дисперсии через $\hat{\sigma}^2$, тогда можно записать, что

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum\big((x-\mu)-(\overline{x}-\mu)\big)^2}{n}, \tag{44.9}$$

где $\mu$ — среднее генеральной совокупности, а $\overline{x}$ — выборочная оценка этого среднего. Далее

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x-\mu)^2 - 2\sum(x-\mu)(\overline{x}-\mu) + \sum(\overline{x}-\mu)^2}{n} = \\ = \frac{\sum(x-\mu)^2 - n(\overline{x}-\mu)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum(x-\mu)^2 - (\overline{x}-\mu)^2.$$

Так как ожидаемое значение квадратов отклонений измеряемой случайной величины от среднего генеральной совокупности равно дисперсии этой совокупности $\sigma^2$, а ожидаемое значение суммы квадратов отклонений выборочного среднего от $\mu$ есть не что иное, как дисперсия выборочных средних, то с учетом (44.8) последнее соотношение может быть переписано в следующем виде:

$$M[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}M\Big[\sum(x-\mu)^2\Big] - M[(\overline{x}-\mu)^2] = \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{44.10}$$

Таким образом, видно, что ожидаемое значение оценки $\hat{\sigma}^2$ не равно в точности параметру $\sigma^2$ генеральной совокупности. Если же ввести выборочную оценку

$$s^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}, \tag{44.11}$$

то, как несложно видеть, ее ожидаемое значение точно равно дисперсии генеральной совокупности, и, значит, $s^2$ является несмещенной оценкой.

Конечно, если $n$ достаточно велико, например, больше 50, то для практических целей непринципиально, делим ли мы в формуле для дисперсий на $n$ или на $(n-1)$. Однако для небольших $n$ использование смещенной оценки дисперсии приводит к существенным отличиям, поэтому нужно пользоваться только формулой (44.11).

Несмотря на то, что выборочная дисперсия является несмещенной оценкой, корень квадратный от нее — стандартное отклонение $s$ — является смещенной оценкой. Правда, смещение его очень незначительно (например, для $n=6$ оно составляет около $5\%$), и поэтому в практических расчетах поправку не вносят.

Второе свойство оценок — *состоятельность*, свойство, обладание которым даже для смещенных оценок приводит при постоянном увеличении объема выборки к тому, что вычисляемая оценка приближается к оцениваемому параметру.

Формально, если мы имеем оценку $\hat{\theta}$ параметра $\theta$, то вероятность

$$P(|\hat{\theta}-\theta|<\xi)\to 1, \text{ когда } n\to\infty.$$

Это свойство соответствует здравому смыслу, и все используемые в практике статистики являются состоятельными.

Еще одно свойство оценок — их эффективность. Понятие *эффективности* приобретает смысл только при сравнении этого свойства у двух или нескольких оценок и характеризует точность оценки параметра. Чем, в свою очередь, определяется точность? Если из генеральной совокупности извлекается несколько выборок и для каждой из них вычисляется, например, среднее, то все они будут иметь разброс относительно среднего генеральной совокупности. Разброс этот можно охарактеризовать дисперсией, которая в данном случае будет равна $\sigma^2/n$.

Пусть наша гипотетическая генеральная совокупность имеет нормальное распределение, тогда в качестве оценки ее среднего можно использовать и медиану, которая в этом случае также будет несмещенной оценкой. Однако если взять множество выборок, для каждой из них найти медиану, а затем вычислить дисперсию распределения выборочных медиан, то окажется (и это можно доказать), что эта дисперсия равна $1{,}57\sigma^2/n$. Как видно, точность приближения среднего генеральной совокупности медианой меньше, чем при использовании среднего арифметического.

Таким образом, *эффективность* двух оценок может быть определена через отношение дисперсий этих оценок. В случае среднего и медианы это отношение составляет $63{,}7\%$, т. е. для получения одинаковой точности в оценке среднего генеральной совокупности с помощью медианы нужно взять, например, выборки объемом в 100 и 64 значения соответственно. Следовательно, более эффективная оценка (в данном случае среднее арифметическое) позволяет ограничиваться при заданной точности меньшим числом наблюдений.

## § 44.3. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Существует много методов оценивания параметров. Три из них, широко используемые, мы рассмотрим. Один из них — *метод наименьших квадратов* — уже рассматривался в предыдущей главе при оценке коэффициентов в уравнениях регрессии. Два других метода — *метод максимального правдоподобия*, разработанный Р. Фишером, и *метод моментов*, предложенный К. Пирсоном.

### 44.3.1. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Суть этого метода состоит в следующем. Пусть имеются независимые случайные величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, каждая из которых имеет плотность распределения $f(x;\theta)$, если мы имеем дело с непрерывными случайными величинами, либо $f(x;\theta) = P(X_i = x)$, если случайные величины $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ распределены дискретно. Предполагается, что функция $f(x;\theta)$ известна с точностью до неизвестного параметра $\theta$, который и необходимо оценить по выборкам $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$.

Рассмотрим функцию

$$L = L(\theta) = f(X_1;\theta)\cdot f(X_2;\theta)\cdot\ldots\cdot f(X_n;\theta). \tag{44.12}$$

Эта функция называется *функцией правдоподобия*. Она получается в результате подстановки $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ в качестве аргументов совместного распределения этих величин.

Суть метода максимального правдоподобия состоит в том, чтобы найти такое значение параметра $\theta$, которое обращает в максимум $L$ для данных значений $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$.

Так как точка максимума функции $L$ совпадает с точкой максимума функции $\log L$, то бывает удобней искать требуемое значение $\theta$, решая уравнение правдоподобия в виде

$$\frac{\partial \log L}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \log f(X_i;\theta)}{\partial\theta} = 0, \tag{44.13}$$

в котором выбор основания логарифма производится исходя из удобства вычислений.

При довольно общих условиях оценки максимального правдоподобия обладают желательными свойствами состоятельности, асимптотической эффективности и нормальности, хотя и не всегда бывают несмещенными.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть производятся независимые испытания по схеме Бернулли, в каждом из которых мы имеем «успех» с одной и той же неизвестной вероятностью $\theta$. Чему в этом случае равна максимально правдоподобная оценка параметра $\theta$, если в результате $n$ испытаний получено $k$ «успехов» и $n-k$ «неудач»?

Так как в данном случае мы имеем дело с биномиальным распределением, то функция правдоподобия имеет вид

$$L = P_n(k) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}.$$

Логарифмируя это выражение, получим

$$\log L = \log\binom{n}{k} + k\log\theta + (n-k)\log(1-\theta).$$

Чтобы найти точку максимума этой функции, необходимо в соответствии с (44.13) продифференцировать ее и приравнять производную нулю:

$$\frac{\partial \log L}{\partial\theta} = \frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0.$$

Решением полученного уравнения является $\hat\theta \approx \frac{k}{n} = p$, которое является асимптотически эффективной оценкой $\theta$, когда число испытаний неограниченно растет.

Найдем максимально правдоподобные оценки параметров $\mu$ и $\sigma^2$ для плотности нормального распределения. Имеем

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}\cdot e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

и

$$\log L = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2. \tag{44.14}$$

Прежде чем вычислить оценки максимального правдоподобия для $\mu$ и $\sigma^2$, заметим, что обращение в максимум $\log L$ по параметру $\mu$ эквивалентно обращению в минимум суммы квадратов $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. Но это именно то условие, которое использовалось при оценке коэффициентов уравнений регрессии по методу наименьших квадратов. Таким образом, метод наименьших квадратов, являясь одним из способов оценки неизвестных параметров, представляет собой частный случай метода максимального правдоподобия, когда результаты экспериментов или наблюдений распределены нормально.

Продифференцируем (44.14) сначала по $\mu$:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu).$$

Приравняв правую часть нулю, получим уравнение относительно $\mu$: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0$, решая которое, получим

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{x}.$$

Следовательно, для нормального распределения максимально правдоподобной оценкой для параметра $\mu$ является среднее арифметическое.

Продифференцируем (44.14) по $\sigma^2$:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

Так как в данном случае оценка параметра $\mu$ нам известна, то приравняв правую часть этого уравнения к нулю и решив его относительно $\sigma^2$, получим

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{n-1}{n}s_x^2.$$

Таким образом, максимально правдоподобная оценка параметра $\sigma^2$ в нормальном распределении представляет собой смещенную оценку выборочной дисперсии.

### 44.3.2. МЕТОД МОМЕНТОВ

Этот метод представляет собой исторически один из первых методов точечной оценки параметров распределений случайных величин. При исследовании с помощью этого метода плотности распределения вероятности, содержащей $n$ параметров $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, вычисляются первые $n$ моментов случайной переменной $x$: $\alpha_i = \sum_{-\infty}^{\infty}x^i f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ — для дискретного распределения и $\alpha_i = \int_{-\infty}^{\infty}x^i f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ — для непрерывного распределения, которые затем приравниваются выборочным моментам, вычисленным из экспериментальных данных, и, таким образом, получают оценки неизвестных параметров. В отличие от метода максимального правдоподобия метод моментов не всегда приводит к эффективным оценкам, хотя и обеспечивает их состоятельность.

Приведенные выше формулы определяют начальные моменты. В частности, первый начальный момент равен среднему. Кроме них существуют и центральные моменты,

определяемые, например, для непрерывного распределения как $\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_x)^i f(x)\,dx$, где $\mu_x$ — математическое ожидание величины $x$.

В качестве примеров применения метода моментов можно воспользоваться ранее полученными результатами для биномиального и нормального распределения (параграф §37.3), где фактически показано, что первые начальные моменты для биномиального и нормального распределений равны соответственно $n\theta$ и $\mu_x$, а второй центральный момент для нормального распределения равен $\sigma_x^2$.

Если теперь приравнять эти моменты величины $X$ соответствующим выборочным моментам, получим для оценок $\theta, \mu_x$ следующие выражения:

$$n\hat{\theta} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \overline{x} \text{ или } \hat{\theta} = \frac{1}{n}\overline{x}; \qquad \hat{\mu}_x = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \overline{x};$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}.$$

Полезно знать соотношения между начальными и центральными моментами первых порядков:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3,$$
$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_2\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.$$

Через центральные моменты могут быть выражены асимметрия ($\beta$) и эксцесс ($\gamma$) распределений вероятностей случайных величин:

$$\beta = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \gamma = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

## § 44.4. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Различные статистики, получаемые в результате вычислений, представляют собой точечные оценки соответствующих параметров. В предыдущем параграфе указывалось, что если из генеральной совокупности извлечь некоторое количество выборок и для каждой из них найти интересующую нас статистику, то вычисленные значения будут представлять собой случайные величины, имеющие некоторый разброс вокруг оцениваемого параметра. Как правило, в результате эксперимента в распоряжении исследователя имеется одна выборка, поэтому значительный интерес представляет получение интервальной оценки, т. е. интервала, внутри которого, как можно предположить, лежит истинное значение параметра.

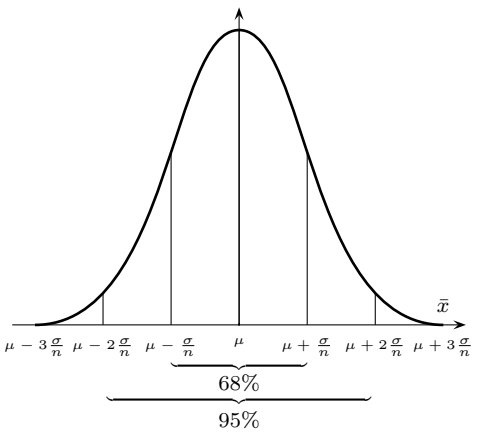



*Рис. 44.10.*

Для примера интервального оценивания рассмотрим $\overline{x}$ как оценку $\mu$. Нам известно, что если выборки извлекаются из генеральной совокупности с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$, то распределение выборочных $\overline{x}$ будет иметь среднее, равное $\mu$, и дисперсию $\sigma^2/n$ и будет стремиться к нормальному (рис. 44.10).

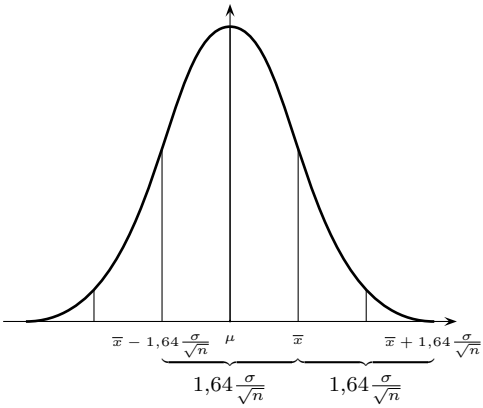



*Рис. 44.11.*

Для такого распределения 68% наблюдений лежит в пределах одного стандартного отклонения, относительно $\mu$, т. е. в пределах $\mu \pm \sigma/\sqrt{n}$ (стандартное отклонение выборочного распределения $\overline{x}$ — не что иное, как стандартная ошибка среднего). Соответственно в пределах $\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n}$ и $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$ лежит около 95% и 99% всех возможных значений выборочных средних. (Коэффициенты 2 и 3 взяты для упрощения. На самом деле они равны 1,96 и 2,58.) Отсюда следует вывод, что если, например, 95% значений $\overline{x}$ расположено внутри интервала $\pm 2\sigma/\sqrt{n}$ относительно $\mu$, то $\overline{x} \pm 2\sigma/\sqrt{n}$, где $\overline{x}$ вычислено по одной выборке из генеральной совокупности с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$, дает интервал, который заключает $\mu$ в своих границах. Иллюстрация этого приведена на рис. 44.11.

Сделанный вывод допускает и следующую формулировку: вероятность $P$ того, что расстояние от $\overline{x}$ до $\mu$, измеренное в единицах стандартной ошибки, больше или меньше $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, равна $1-\alpha$, т. е.

$$P\left(\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha. \tag{44.15}$$

Поясним этот вывод. Как мы уже говорили, для выборок достаточно большого объема распределение $\overline{x}$ приближается к нормальному. Следовательно, используя соответствующую таблицу площадей под кривой стандартного нормального распределения, можно определить значения $\pm z$, между которыми заключена интересующая нас часть площади. Оставшуюся часть площади обозначим через $\alpha$. В силу того, что кривая распределения симметрична, слева от $-z$ и справа от $z$ будет находиться по $\alpha/2$ части площади стандартного нормального распределения. Табличные значения $z$ даны в единицах стандартного отклонения, которое для стандартизованного нормального распределения равно единице. Следовательно, чтобы найти интересующую нас часть площади $1-\alpha$ под кривой нормального распределения с произвольными параметрами, необходимо табличные значения $z_{1-\alpha/2}$ умножить на величину стандартного отклонения, которое в нашем случае равно $\sigma/\sqrt{n}$. Величина $1-\alpha = P$ носит название доверительной вероятности, а сам доверительный интервал, т. е. интервал, внутрь которого с заданной доверительной вероятностью попадает истинное значение параметра, задается выражением

$$\overline{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{44.16}$$

*ПРИМЕР 44.1.* Пусть $n = 144$, $\sigma^2 = 49$, а доверительная вероятность произвольно выбрана равной 0,91, т. е. $P = 1-\alpha = 0{,}91$. Отсюда $\alpha = 0{,}09$. Из табл. 1 Приложения видно, что доля $\alpha/2 = 0{,}045$ (или 4,5%) площади под единичной нормальной кривой лежит слева от значения $z = 1{,}7$. Следовательно, $z_{0{,}955} = 1{,}7$. Пусть среднее этой выборки равно 18,2. Тогда доверительный интервал для $\mu$ равен

$$\overline{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 18{,}2 \pm 1{,}7\frac{7}{12} = 18{,}2 \pm 0{,}992 = (17{,}208; 19{,}192).$$

*Замечание 44.1.* В данном примере предполагалось, что дисперсия генеральной совокупности известна, однако на практике этого почти никогда не бывает. Поэтому вместо $\sigma^2$ обычно используют $s^2$, вычисленную по выборке, и вместо таблиц стандартного нормального распределения пользуются таблицами распределения Стьюдента. Более подробно об этом пойдет речь в следующей главе.

Рассмотренные принципы построения доверительных интервалов справедливы, естественно, не только для средних, но и для всех других статистик, для которых показано, что распределение их выборочных значений приближается к нормальному.

Требование нормальности является принципиальным, так как только при его выполнении имеет смысл приведенная выше процедура построения доверительных интервалов. Как правило, для большинства рассмотренных нами статистик это требование выполняется, но не для всех. В частности, нормальность выборочных коэффициентов корреляции имеет место только для случая, когда в двумерной генеральной совокупности, из которой извлекаются выборки с последующим вычислением $r_{xy}$, $\rho = 0$. Для других значений $\rho$ распределение выборочных коэффициентов корреляции имеет большую асимметрию и не может быть аппроксимировано кривой нормального распределения (рис. 44.12).

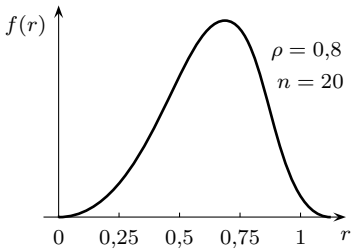


*Рис. 44.12.*

Тем не менее интервальное оценивание возможно и в этом случае, но при использовании не самих выборочных коэффициентов корреляции, а некоторых преобразованных величин. Р. Фишером было показано, что величина

$$z_r = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \tag{44.17}$$

где $r$ — выборочный коэффициент корреляции, имеет нормальное распределение со средним, равным $z_\rho$, и стандартным отклонением $1/\sqrt{n-3}$ (здесь и в дальнейшем для простоты индекс «$xy$» у коэффициента корреляции опущен).

Рассмотрим пример построения доверительного интервала для $r$ с использованием $z$-преобразования Фишера. Значения $z_\rho$ для различных значений коэффициента корреляции приведены в табл. 8 Приложения.

Пусть число пар значений, по которым вычислялось $r$, равно 12, а само полученное значение коэффициента корреляции равно 0,79. Необходимо построить доверительный интервал для $r$, который с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$ накрывал бы истинное значение параметра $\rho$.

Преобразуем $r$ в $z_r$ и из табл. 8 Приложения для $r = 0{,}79$ имеем $z = 1{,}07$. Преобразованная величина $z_r$, как уже было сказано выше, имеет нормальное распределение со стандартным отклонением $\sigma_z = 1/\sqrt{n-3}$. Так как $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96$, то доверительный интервал для $z_r$ будет равен

$$z_r \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{z_r} = 1{,}07 \pm 1{,}96\frac{1}{\sqrt{12-3}} = 1{,}07 \pm 0{,}653 = (0{,}41; 1{,}723).$$

Теперь, вновь используя таблицу $z$-преобразования, можно перейти к значениям $r$. Доверительные пределы для коэффициента корреляции будут приближенно равны $(0{,}396; 0{,}938)$.

В заключение этого параграфа приведем формулы для стандартных ошибок некоторых статистик и те условия, при выполнении которых распределения выборочных

значений этих статистик приближаются к нормальным, и, следовательно, для них можно строить доверительные интервалы по описанным выше правилам.

1. Медиана ($Md$) — $\sigma_{Md} = \sqrt{2n/\pi}\sigma$. Здесь $n$ — число значений в выборке, $\sigma$ — стандартное отклонение генеральной совокупности. Формула справедлива, если генеральная совокупность симметрична, а $n \geqslant 30$.
2. Стандартное отклонение — $\sigma_\sigma = \sqrt{2\pi}\sigma$. Распределение выборочных стандартных отклонений близко к нормальному, когда $n \geqslant 100$ и исходная генеральная совокупность нормальна.
3. Коэффициент вариации ($cv$) —
$$\sigma_{cv} = \frac{cv}{\sqrt{2n}}\sqrt{1 + \frac{2(cv)^2}{10^4}}.$$
Вторым сомножителем в этом выражении можно ввиду его малости пренебречь, тогда $\sigma_{cv} = cv/\sqrt{2n}$. Ограничения те же, что и для стандартного отклонения.
4. Коэффициенты регрессии ($a$ и $b$) — $\sigma_a = \sigma/\sqrt{n}$, $\sigma_b = \sigma/\sqrt{\sum(x - \overline{x})^2}$, где $\sigma$ — стандартное отклонение зависимой переменной $y$, которая должна иметь обязательно нормальное распределение с параметром $\sigma^2$ для всех значений независимой переменной $x$.
5. Для дихотомической случайной переменной, в которой доля объектов вида $A$ представляет собой величину $p_A = n_A/n$, где $n_A$ и $n$ — соответственно число объектов вида $A$ и общее число объектов
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}},$$
где в данном случае через $\pi$ обозначена доля объектов вида $A$ в генеральной совокупности.

## § 44.5. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Этот параграф требует к себе особого внимания. Только хорошо разобравшись в его содержании, исследователь сможет осознанно, а не механически использовать многочисленные критерии для проверки статистических гипотез, критически оценивать использование этих критериев в работах других ученых, а также получить необходимый минимум сведений, позволяющий ему продолжить изучение вопросов, связанных с проверкой статистических гипотез, по более продвинутым в математическом плане курсам.

Итак, после проведения эксперимента в распоряжении исследователя оказывается некоторое множество значений измеренных показателей, и возникает вопрос, какие выводы о свойствах генеральной совокупности можно сделать по этим выборочным наблюдениям. Первым шагом в решении поставленной задачи может быть вычисление различных статистик и построение для них доверительных интервалов по методике, обсуждавшейся в предыдущих параграфах. Вторым обязательным шагом является проверка выдвигаемых статистических гипотез.

Нужно четко представлять себе разницу между гипотезой в обычном понимании и гипотезой статистической. Статистическая гипотеза — это любое предположение относительно распределения наблюдаемых случайных величин, в то время как в других областях знаний гипотеза — предположительное суждение о закономерной, причинной связи явлений.

Мы не будем здесь более подробно касаться интересных и важных методологических вопросов, с которыми можно познакомиться в рекомендуемой литературе, а перейдем к фактическому изложению подходов к проверке статистических гипотез.

Пусть, например, при изучении взаимосвязи между двумя переменными получена выборка из двумерной генеральной совокупности и рассчитан коэффициент корреляции. Будем считать, что эта выборка достаточно представительна (репрезентативна), т. е. хорошо отражает свойства всей генеральной совокупности. Имея в своем распоряжении выборочный коэффициент корреляции $r$, исследователь выдвигает статистическую гипотезу о том, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $\rho$ равен какому-то значению, например нулю. Формально это записывается так: $H : \rho = 0$. (Здесь и в дальнейшем буквой $H$ обозначается статистическая гипотеза.) Процедура, которая будет использоваться для принятия решения об истинности или ложности сформулированной статистической гипотезы, называется проверкой гипотезы. Итак, если вычисленное значение $\rho \neq 0$, значит ли это, что $H$ ошибочна?

Мы уже знаем, что выборочные значения различных статистик, в том числе и коэффициента корреляции, представляют собой случайные величины, имеющие порой довольно большой разброс, поэтому даже в том случае, когда $\rho = 0$, вычисленные по выборке значения могут существенно отличаться от нуля. Следовательно (и это зависит от объема выборки), утверждать с уверенностью по полученному значению $r$, равен или не равен нулю коэффициент корреляции, исследователь не может. Эти соображения составляют один из основных принципов, лежащих в основе проверки статистических гипотез: при проверке любой статистической гипотезы решение никогда не принимается с абсолютной уверенностью, всегда существует риск принятия неправильного решения. Именно в контроле и оценке этого риска состоит сущность проверки статистических гипотез.

Мы уже говорили о том, что если выборочные значения представляют собой случайные величины, то возможно получение любого значения в нашем случае для коэффициента корреляции в диапазоне $\pm 1$. Однако некоторые значения более, а другие менее вероятны. В частности, выборочное распределение коэффициентов корреляции для выборок объемом 100 (рис. 44.13) показывает, что, если в генеральной совокупности $\rho = 0{,}1$, получение выборочных значений, например $r = 0{,}4$ или $r = -0{,}2$, весьма маловероятно, хотя полностью их исключить нельзя.

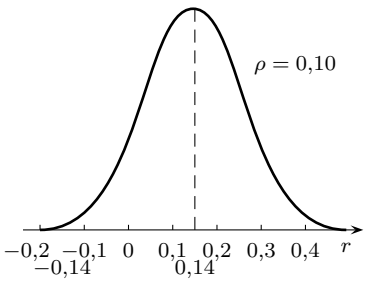



*Рис. 44.13.*

Какой вывод можно из этого сделать? Пусть, например, получено выборочное значение $r = 0{,}5$. С одной стороны, такое значение должно способствовать отклонению гипотезы $H : \rho = 0$ ввиду ничтожной вероятности его появления, если истинное значение коэффициента корреляции в самом деле равно 0,1. Эта вероятность конечно же очень мала, но все-таки не равна нулю. С другой стороны, истинное значение $\rho$ в генеральной совокупности на самом деле нам неизвестно. А если, например, $\rho = 0{,}3$? В этом случае появление выборочного значения $r = 0{,}5$ не такое уж маловероятное событие. А какое-то решение принимать надо. И здесь мы сталкиваемся с еще некоторыми понятиями, составляющими основу теории проверки статистических гипотез. Речь идет о так называемых ошибках первого и второго рода.

Вернемся к нашему примеру. Если в самом деле $\rho = 0$ и выдвинута гипотеза $H : \rho = 0$, но получив значение $r = 0{,}5$, мы ее отвергаем (а сделать это можно, поскольку и такое значение, хотя и очень редко, может появиться), возникает ошибка первого рода.

Пусть выдвинута та же гипотеза $H : \rho = 0$, в то время как истинное значение в генеральной совокупности равно, например, $-0{,}3$, и мы, получив значение $r = 0{,}12$, примем ее, появляется ошибка второго рода.

Таким образом, при проверке статистических гипотез существует четыре возможности:

1. $H$ верна, и она принимается.
2. $H$ верна, но она отвергается (ошибка первого рода).
3. $H$ неверна, и она отвергается.
4. $H$ неверна, но она принимается (ошибка второго рода).

Ошибки первого и второго рода существенно различаются между собой по значимости, и это оказывает большое влияние на всю процедуру проверки статистических гипотез.

Здесь необходимо еще раз подчеркнуть, что никакая гипотеза не может быть окончательно принята или отвергнута. Поэтому используемые в дальнейшем довольно категорические утверждения «принять» и «отвергнуть» являются просто условными сокращениями выражений вида «опытные данные не противоречат выдвинутой гипотезе» и «опытные данные противоречат выдвинутой гипотезе».

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, сформулируем основные этапы проверки статистических гипотез.

1. Формулируется проверяемая гипотеза, например $H : \rho = 0$. В силу исторической традиции проверяемая гипотеза носит название *нуль-гипотезы*.
2. Делаются некоторые предположения относительно выборочного распределения статистики, с помощью которой планируется оценивать параметр, входящий в гипотезу.
3. Принимается степень риска отвергнуть выдвинутую гипотезу, если она верна. Этот риск $\alpha$ называется *уровнем значимости* проверки гипотезы и выражается как вероятность. Из определения уровня значимости следует, что его величина определяет уровень ошибки первого рода. Уровень значимости определяет также критические области, т. е. области, попадание в которые выборочного значения статистики, оценивающей параметр, приводит к отвержению сформулированной гипотезы. Критические области и область принятия гипотезы для $H : \rho = 0$ и $\alpha = 0{,}05$ приведены на рис. 44.14.

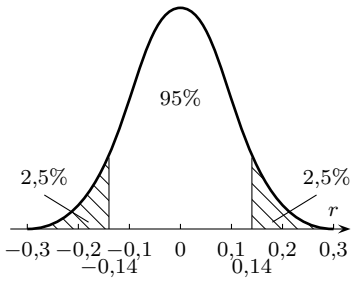


*Рис. 44.14.*

4. Извлекается выборка, рассчитывается значение интересующей нас статистики, определяется, в какую область, критическую или допустимую, она попала, и на основании этого принимается решение относительно истинности $H$. Решение принимается с использованием критерия для проверки статистической гипотезы, который представляет собой правило для определения ложности или истинности выдвинутой гипотезы.

Уровнем значимости, а значит, и вероятностью ошибки первого рода можно управлять. В самом деле, в принципе мы можем установить любую приемлемую для нас степень риска для неправильного вывода на основе выборочных данных об ошибочности выдвинутой гипотезы. Поэтому на первый взгляд кажется целесообразным выбирать уровень значимости как можно меньшим, так как в этом случае вероятность отвергнуть правильную гипотезу будет минимальной. Однако сформулировав проверяемую гипотезу,

мы не знаем, верна ли она. Поэтому уменьшение вероятности ошибки первого рода автоматически будет приводить к увеличению вероятности ошибки второго рода. Поясним это на примере.

Обозначим нуль-гипотезу о том, что $\rho = 0$, через $H_0 : \rho = 0$, а альтернативную ей гипотезу — $H_1 : \rho \neq 0$. Предположим, что на самом деле истинное значение $\rho = 0{,}20$ и извлекается выборка объемом $n = 200$. На рис. 44.15 кривые представляют собой распределения выборочных коэффициентов корреляции для генеральных совокупностей с $\rho = 0$ и $\rho = 0{,}2$.

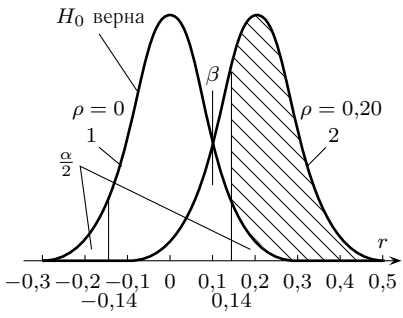


*Рис. 44.15.*

Из рисунка видно, что если выбрать уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, то в случае истинности $H_0 : \rho = 0$ появление выборочных значений, больших $0{,}14$ или меньших $-0{,}14$, возможно только в пяти случаях из ста, и для таких значений гипотеза $H_0$ будет отвергаться. Все же остальные значения $r$, попадающие в интервал $(-0{,}14; 0{,}14)$, будут приводить к принятию $H_0$. Но что будет, если на самом деле $\rho = 0{,}20$? Тогда нуль-гипотезу $H_0 : \rho = 0$ следовало бы отклонить в пользу альтернативной гипотезы $H_1 : \rho \neq 0$, и это будет делаться для значений $r > 0{,}14$ (область со штриховкой).

Площадь этой заштрихованной области численно равна вероятности отвергнуть неправильную гипотезу, а сама эта вероятность носит название мощности выбранного критерия, в данном случае критерия $\rho = 0{,}20$.

С другой стороны, если мы приняли $H_0 : \rho = 0$, в то время как справедлива $H_1 : \rho = 0{,}20$, такие значения, как $r = 0{,}1$, будут свидетельствовать в пользу этой неправильной гипотезы, т. е. будет совершаться ошибка второго рода. Из рисунка видно, что площадь под кривой 2, соответствующая выборочным значениям $r < 0{,}14$ и перекрывающаяся с областью принятия гипотезы $H_0 : \rho = 0$, довольно значительна (в данном случае она равна $18\%$). Поэтому и вероятность принять неправильную гипотезу о том, что $\rho = 0$, численно равная этой площади, тоже велика. При этом мы видим, что если уровень значимости $\alpha$ выбрать еще меньше, то вероятность ошибки второго рода еще больше возрастает, а мощность критерия $1 - \beta$ — уменьшается.

Таким образом, становится ясно, что уровень значимости и мощность критерия связаны между собой, причем связь эта нелинейная. Поэтому произвольно по нашему усмотрению изменять уровень значимости нельзя, так как неоправданное уменьшение ошибки первого рода может привести к существенной потере мощности критерия для проверки статистической гипотезы.

Наиболее часто в статистической практике используются уровни значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$, потому что они обеспечивают разумный компромисс между ошибками первого и второго рода. Но абсолютизировать эти уровни значимости нельзя. Вообще приемлемый уровень значимости выбирать необходимо исходя из условий решаемой исследовательской задачи.

*ПРИМЕР 44.2.* Пусть испытывается вновь созданный лекарственный препарат, действие которого направлено на поддержание некоторого существенного для жизни показателя в определенных пределах. Испытывая этот препарат, можно, например, выдвинуть гипотезу, что он в самом деле удерживает среднее значение показателя в нужных пределах. И если был выбран уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, то в случае

справедливости выдвинутой гипотезы она будет отвергаться в одном случае из двадцати. Но если гипотеза неверна, то при таком уровне ошибки первого рода ошибка второго рода будет достаточно высока, а это значит, что мы можем принять неправильную гипотезу во многих случаях, когда препарат не выполняет своих функций. Естественно, что это недопустимо, когда речь идет о здоровье или жизни людей. Поэтому в этих случаях нужно выбирать уровень значимости по крайней мере $\alpha = 0{,}10$ или даже еще больше, чтобы свести риск принятия неправильной гипотезы к минимальному значению. Правда, при этом мы значительно чаще будем отвергать правильную гипотезу, и возможно, что для ее окончательной проверки понадобится провести значительно больше экспериментов. Это будет, конечно, связано с дополнительными затратами сил и средств, но в случаях, аналогичных вышеприведенному, эти соображения всегда должны отодвигаться на второй план.

*ПРИМЕР 44.3.* С другой стороны, может встретиться прямо противоположная ситуация, когда уровень значимости нужно выбирать меньше даже, чем 0,01. Это может потребоваться в тех случаях, когда проверяются статистические гипотезы о некоторых параметрах, выборочные статистики для которых получаются при проведении экспериментов, направленных на поиск новых эффектов, предсказываемых теорией, или связанных с использованием уникального оборудования. В этих случаях экспериментатору очень важно не упустить эффект, если он есть. Поэтому он может предусмотреть, чтобы выдвигаемая им и, как он считает, правильная гипотеза отвергалась не более чем в одном случае из тысячи. При этом экспериментатор должен отдавать себе полный отчет в том, что существенно возрастает ошибка второго рода, т. е. вероятность принять выдвигаемую гипотезу, даже если она неверна, со всеми вытекающими отсюда последствиями.

В заключение заметим, что, варьируя уровень значимости $\alpha$ и число наблюдений $n$, можно в каждом конкретном случае выбрать разумный компромисс между $\alpha$ и мощностью критерия $1 - \beta$, помня при этом, что мощность критерия для проверки статистической гипотезы возрастает с увеличением $n$ и $\alpha$.

## Вопросы для самопроверки

1. Объясните смысл следующих терминов: нулевая гипотеза, значимость критерия, мощность критерия.
2. Дайте определение несмещенной оценки и покажите, что $ns^2/(n-1)$ есть несмещенная оценка $\sigma^2$, где $s^2$ — дисперсия выборки объема $n$.
3. Что произойдет со стандартной ошибкой среднего, если а) размер некоторой выборки увеличится в 4 раза; б) увеличится с 16 до 144 значений?
4. Покажите, что оценка, образованная как взвешенная средняя несмещенных оценок некоторого параметра, сама является несмещенной оценкой этого параметра.
5. Покажите, что среднее значение выборочного распределения средних равно среднему (математическому ожиданию) генеральной совокупности.
6. Что представляют собой ошибки первого и второго рода?
7. Приведите примеры, когда требуется выбрать уровень ошибки первого рода, отличный от 0,05 и 0,01?
8. Дайте определение свойствам эффективности, состоятельности и несмещенности оценок.

## Упражнения и задачи

1. Для определения точности измерительного прибора-дальномера, систематическая ошибка которого практически равна нулю, произведено 5 независимых измерений, давших следующие результаты: 2781 м, 2836 м, 2807 м, 2763 м, 2858 м. Определить несмещенную оценку для дисперсии ошибок прибора, если а) значение измеряемого расстояния известно и равно 2800 м; б) значение измеряемой величины неизвестно.
2. При измерении максимальной скорости винтомоторного спортивного самолета были получены следующие значения его максимальной скорости: 622,2; 618,7; 625,6; 620,3; 625,8; 623,1; 631,5; 628,2; 638,3; 634,0; 611,3; 617,2; 613,5; 641,3; 623,0 м/сек. Определить несмещенные оценки для математического ожидания и стандартного отклонения максимальной скорости самолета.
3. Результаты независимых измерений известной постоянной дали следующие значения: $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Ошибки измерений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Обработка ведется для определения подходящего значения стандартной ошибки по специальной формуле:
$$\tilde{s} = k \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| .$$
Каким должно быть $k$, чтобы были несмещенными оценки: а) дисперсии ошибок; б) среднеквадратического отклонения ошибок?
4. Проведено $n$ независимых неравноточных измерений: $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ одной и той же неизвестной постоянной величины. Ее подходящее значение определяется по формуле
$$\tilde{x} = \left( \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \right) \Big/ \left( \sum_{i=1}^{n} A_i \right).$$
Какими должны быть $A_i$, чтобы дисперсия была минимальной, если среднеквадратическая ошибка $i$-го измерения равна $s_i$?
5. Стандартная ошибка показаний высотомера 15 м. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с вероятностью 0,99 ошибка среднего для оценки высоты была бы больше ($-30$ м), если ошибки высотомеров нормальны и не имеют систематической ошибки?
6. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены для срока их службы среднее арифметическое и среднеквадратическое отклонение, равные соответственно $\overline{x} = 3000$ часов, $s = 20$ часов. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной величиной, определить: а) доверительный интервал для среднего и стандартного отклонения, который с вероятностью 0,9 накроет истинное значение определяемых параметров; б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения $\overline{x}$ не превзойдет 10 час, а ошибка в определении $s$ будет меньше 2 час.
7. Проведено 40 независимых измерений базы постоянной длины. После обработки результатов получены значения $\overline{x} = 10400$ м и $s = 85$ м. Ошибки измерения расстояния подчиняются закону нормального распределения. Найти вероятность того, что истинные значения измеряемых параметров математического ожидания и стандартного отклонения ($\mu$ и $\delta$) лежат в пределах $\pm 0{,}1\%$ от $\overline{x}$ для $\mu$ и $\pm 5\%$ от $s$ для $\sigma$.
8. На двух участках в течение определенного периода произведены замеры осадков (в мм), приводимые в табл. 44.1:

*Таблица 44.1.*

| № п/п | $X$ | $Y$ | № п/п | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26,7 | 16,8 | 8 | 50,8 | 33,8 |
| 2 | 35,6 | 29,5 | 9 | 24,4 | 24,4 |
| 3 | 17,5 | 16,3 | 10 | 33,3 | 35,6 |
| 4 | 35,8 | 27,2 | 11 | 52,6 | 43,4 |
| 5 | 13,0 | 8,4 | 12 | 25,9 | 19,1 |
| 6 | 37,8 | 40,4 | 13 | 22,6 | 19,1 |
| 7 | 35,1 | 28,2 | 14 | 40,4 | 23,4 |

Вычислить коэффициент корреляции $r_{xy}$ и сравнить его с коэффициентом корреляции $r_{xy} = 0{,}703$, полученным для другой пары участков (уровень значимости $\alpha = 0{,}05$).

9. Построить 95% доверительный интервал для коэффициента корреляции, равного 0,5, полученного из выборки объема 15.
10. Использовать $z$-распределение Фишера для проверки гипотезы с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, если выборочное значение коэффициента корреляции для $N = 50$ равно $r = 0{,}5$.
11. Для некоторого сорта пшеницы получены следующие данные об урожайности на десяти опытных участках: 45,4; 48,0; 40,1; 47,4; 45,6; 43,9; 44,8; 46,4; 47,0; 45,4. Построить доверительные 95% и 99% интервалы для среднего.
12. Ниже приведены данные о времени пригорания ($X$) в минутах натурального каучука при температуре 160°C в зависимости от чистоты катализатора ($Y$), задаваемой в %.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | 43,7 | 49,2 | 48,7 | 45,5 | 54,0 | 47,5 | 49,0 | 50,5 | 50,5 | 53,7 |
| $Y$: | 89,3 | 90,9 | 91,7 | 93,4 | 93,5 | 94,2 | 94,5 | 97,5 | 98,7 | 99,5 |

а) Вычислить коэффициент корреляции.
б) Определить объем выборки, при котором полученная величина коэффициента корреляции будет значима при уровне значимости 0,01.
в) Определить предельную величину коэффициента корреляции, значимого для данной выборки при уровне значимости, равном 0,01.

# XLV

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ

В практике статистического анализа экспериментальных данных основной интерес представляет не само по себе вычисление тех или иных статистик, а ответы на вопросы такого типа. Действительно ли среднее генеральной совокупности равно некоторому числу? Значимо ли отличается от нуля коэффициент корреляции? Равны ли дисперсии двух выборок? И таких вопросов в зависимости от конкретной исследовательской задачи может возникать много. Соответственно разработано и множество критериев для проверки выдвигаемых статистических гипотез. Некоторые наиболее употребительные из них мы и рассмотрим. В основном они будут относиться к средним, дисперсиям, коэффициентам корреляции и распределениям численностей.

Все критерии для проверки статистических гипотез делятся на две большие группы: параметрические и непараметрические. Параметрические критерии основаны на предположении о том, что выборочные данные взяты из генеральной совокупности с известным распределением, и основная задача состоит в оценке параметров этого распределения. Для непараметрических критериев не требуется никаких предположений о характере распределения, за исключением предположения о том, что оно непрерывно.

Первыми рассмотрим параметрические критерии. Последовательность проверки будет включать формулирование нуль-гипотезы $H_0$ и альтернативной гипотезы $H_1$, формулирование сделанных допущений, определение выборочной статистики, используемой при проверке $H_0$ и $H_1$, получение выборочного распределения проверяемой статистики, определение критических областей для выбранного критерия и построение доверительного интервала для выборочной статистики.

## § 45.1. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ

Пусть проверяемая гипотеза состоит в том, что параметр генеральной совокупности $\mu = a$. Необходимость такой проверки может возникнуть, например, в следующей ситуации. Предположим, что на основании обширных исследований установлен диаметр раковины ископаемого моллюска в отложениях из некоторого фиксированного места. Пусть также в нашем распоряжении оказалось некоторое количество раковин, найденных в другом месте, а мы делаем предположение, что конкретное место не оказывает влияния на диаметр раковины, т. е. что среднее значение диаметра раковины для всей популяции моллюсков, когда-то живших в новом месте, равно известному значению, полученному ранее при изучении данного вида моллюсков в первом местообитании.

Если это известное значение равно $a$, то нуль-гипотеза $H_0$ и альтернативная гипотеза $H_1$ записываются следующим образом: $H_0 : \mu = a$, $H_1 : \mu \neq a$. Примем, что переменная $x$ в рассматриваемой совокупности имеет нормальное распределение, а величина дисперсии генеральной совокупности $\sigma_x^2$ неизвестна.

Будем проверять гипотезу $H_0$ с помощью статистики

$$t = \frac{\overline{x} - a}{s_x/\sqrt{n}}, \tag{45.1}$$

где $s_x$ — выборочное стандартное отклонение.

Было показано, что если $H_0 : \mu = a$ справедлива, то $t$ в выражении (45.1) имеет $t$-распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Если выбрать уровень значимости (вероятность отбросить правильную гипотезу) равным $\alpha$, то в соответствии с тем, о чем шла речь в предыдущей главе, можно определить критические значения для проверки $H_0 = 0$.

В данном случае, так как распределение Стьюдента симметрично, то $(1-\alpha)$ часть площади под кривой этого распределения с $n-1$ степенями свободы будет заключена между точками $\pm_{1-(\alpha/2)}t_{n-1}$, которые равны друг другу по абсолютной величине. Следовательно, все значения меньше отрицательного и больше положительного значения для $t$-распределения с заданным числом степеней свободы при выбранном уровне значимости будут составлять критическую область. Попадание выборочного значения $t$ в эту область приводит к принятию альтернативной гипотезы.

Доверительный интервал для $\mu$ строится по описанной ранее методике и определяется из следующего выражения:

$$\overline{x} \pm {}_{1-(\frac{\alpha}{2})}t_{n-1}\frac{s_x}{\sqrt{n}}. \tag{45.2}$$

Итак, пусть в нашем случае известно, что диаметр раковины ископаемого моллюска равен 18,2 мм. В нашем распоряжении оказалась выборка из 50 вновь найденных раковин, для которых $\overline{x} = 18{,}9$ мм, а $s_x = 2{,}18$ мм. Проверим $H_0 : \mu = 18{,}2$ против $H_1 \neq 18{,}2$. Имеем

$$t = \frac{18{,}9 - 18{,}2}{2{,}18/\sqrt{50}} = 2{,}25.$$

Если уровень значимости выбрать $\alpha = 0{,}05$, то критическое значение $t = \pm 2{,}01$. Отсюда следует, что $H_0$ можно отклонить в пользу $H_1$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Таким образом, для нашего гипотетического примера можно утверждать (естественно, с некоторой вероятностью), что диаметр раковины ископаемых моллюсков определенного вида зависит от мест, в которых они обитали.

*Замечание 45.1.* Здесь необходимо пояснить, как построена таблица 10 Приложения, из которой было взято критическое значение для $t$. В связи с тем, что $t$-распределение симметрично, приводятся только положительные значения $t$ этого распределения при выбранных уровнях значимости и числе степеней свободы. Причем учитывается не только доля площади под кривой распределения справа от значения $t$, но и одновременно слева от значения $-t$. Это связано с тем, что в большинстве случаев при проверке гипотез нас интересует существенность отклонений сама по себе, независимо от того, в большую или меньшую сторону эти отклонения, т. е. мы проверяем $H_0 : \mu = a$ против $H_1 : \mu \neq a$, а не против $H_1 : \mu > a$ или $H_1 : \mu < a$.

Вернемся теперь к нашему примеру. Доверительный $100(1-\alpha)$-процентный интервал для $\mu$ равен

$$18{,}9 \pm 2{,}01\frac{2{,}18}{\sqrt{50}} = 18{,}9 \pm 0{,}62 = (18{,}28; 19{,}52).$$

Рассмотрим теперь случай, когда необходимо сравнить между собой средние двух генеральных совокупностей. Проверяемая гипотеза выглядит так: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Предполагается также, что $x_1$ имеет нормальное распределение со средним $\mu_1$ и дисперсией $\sigma_x^2$, а $x_2$ — нормальное распределение со средним $\mu_2$ и той же дисперсией $\sigma_x^2$. Кроме того, принимаем, что выборки, по которым оцениваются генеральные совокупности, извлекаются независимо друг от друга и имеют объем соответственно $n_1$ и $n_2$. Из независимости выборок следует, что если взять большее их число и для каждой пары рассчитать средние значения, то множество этих пар средних будет полностью некоррелированно.

Проверка нулевой гипотезы проводится с использованием статистики

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \tag{45.3}$$

где $s_1^2$ и $s_2^2$ — оценки дисперсии для первой и второй выборок соответственно. Нетрудно видеть, что (45.3) представляет собой обобщение (45.1).

Было показано, что статистика (45.3) имеет $t$-распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы. При равенстве $n_1$ и $n_2$, т. е. $n_1 = n_2 = n$ формула (45.3) упрощается и имеет вид

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{n}}} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_{\overline{x}_1}^2 + s_{\overline{x}_2}^2}}. \tag{45.4}$$

*ПРИМЕР 45.1.* Пусть при измерении стеблевых листьев одной и той же популяции растений в течение двух сезонов получены следующие результаты: $\overline{x}_1 = 53{,}5$; $s_1^2 = 20{,}4$; $n_1 = 485$; $\overline{x}_2 = 50{,}2$; $s_2^2 = 17{,}1$; $n_2 = 325$. Будем считать, что условия для использования критерия Стьюдента, т. е. нормальность генеральных совокупностей, из которых взяты выборки, существование неизвестной, но одной и той же дисперсии для этих совокупностей и независимость выборок выполнены. Оценим $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$. Имеем

$$t = \frac{53{,}5 - 50{,}2}{\sqrt{\frac{485\cdot 20{,}4+325\cdot 17{,}1}{485+325-2}\left(\frac{1}{485}+\frac{1}{325}\right)}} = 10{,}54.$$

Табличное значение $t = 2{,}58$. Поэтому гипотеза $H_0$ о равенстве средних значений длин стеблевых листьев для популяции растений в течение двух сезонов должна быть отвергнута на выбранном уровне значимости.

*Замечание 45.2. Внимание!* В качестве нулевой гипотезы в математической статистике выбирается гипотеза об отсутствии значимых различий между сравниваемыми показателями, причем независимо от того, идет ли речь о средних, дисперсиях или других статистиках. И во всех этих случаях, если эмпирическое (вычисленное по формуле) значение критерия больше теоретического (выбранного из таблиц), то $H_0$ отвергается. Если же эмпирическое значение меньше табличного, то $H_0$ принимается.

Для того чтобы построить доверительный интервал для разности средних $\mu_1 - \mu_2$ этих двух генеральных совокупностей, обратим внимание на то, что критерий Стьюдента, как видно из формулы (45.3), оценивает значимость разности между средними относительно стандартной ошибки этой разности. В том, что знаменатель в (45.3) представляет именно эту стандартную ошибку, нетрудно убедиться, используя уже рассмотренные

ранее соотношения и сделанные предположения. В самом деле, нам известно, что в общем случае

$$s^2_{x-y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\big((x_i - y_i) - (\overline{x} - \overline{y})\big)^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\big((x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y})\big)^2}{n-1} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1} - \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n-1} = s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}.$$

Если $x$ и $y$ независимы, то $s_{xy} = 0$ и $s^2_{x-y} = s_x^2 + s_y^2$.

Взяв вместо $x$ и $y$ выборочные значения $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ и припомнив сделанное предположение о том, что обе генеральные совокупности имеют одну и ту же дисперсию $\sigma_2^2$, получим

$$s^2_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_x^2}{n_2} = \sigma_x^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right). \tag{45.5}$$

Оценка дисперсии $\sigma_x^2$ может быть получена из следующего соотношения:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \overline{x}_1)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \overline{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \tag{45.6}$$

(Мы делим на $n_1 + n_2 - 2$, потому что по выборкам оцениваются две величины $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, и значит, число степеней свободы должно быть уменьшено на два.)

Если теперь подставить (45.6) в (45.5) и извлечь квадратный корень, то получится знаменатель в выражении (45.3).

После этого отступления вернемся к построению доверительного интервала для $\mu_1 - \mu_2$ через $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$.

Имеем

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm {}_{1-(\alpha/2)}t_{n_1+n_2-2} \cdot s_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = 3{,}3 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}313 = (4{,}11; 3{,}23).$$

*Замечание 45.3.* Сделаем некоторые замечания, связанные с предположениями, используемыми при построении $t$-критерия. Прежде всего было показано, что нарушения допущения о нормальности для $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ имеют незначительное влияние на уровень значимости и мощность критерия для $n \geqslant 30$. Несущественно также и нарушение предположения об однородности дисперсий обеих генеральных совокупностей, из которых берутся выборки, но только в том случае, когда объемы выборок равны. Если же $n_1 \neq n_2$, а дисперсии обеих совокупностей отличаются друг от друга, то вероятности ошибок первого и второго рода будут существенно отличаться от ожидаемых.

В этом случае для проверки $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ следует пользоваться критерием

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \tag{45.7}$$

с числом степеней свободы

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)}{n_2 - 1}}. \tag{45.8}$$

Как правило, $\nu$ получается дробным числом, поэтому при пользовании таблицами $t$-распределения необходимо брать табличные значения для ближайших целых значений и проводить интерполяцию для нахождения $t$, соответствующего полученному $\nu$.

*ПРИМЕР 45.2.* При изучении двух подвидов озерной лягушки рассчитывалось отношение длины тела к длине голени. Были взяты две выборки с объемами $n_1 = 49$ и $n_2 = 27$. Средние и дисперсии интересующего нас отношения оказались равными соответственно $\overline{x}_1 = 2{,}34$; $\overline{x}_2 = 2{,}08$; $s_1^2 = 0{,}21$; $s_2^2 = 0{,}35$. Если теперь проверять гипотезу $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ с использованием формулы (45.2), то получим, что

$$t = \frac{2{,}34 - 2{,}08}{\sqrt{\frac{48 \cdot 0{,}21 + 26 \cdot 0{,}35}{74}\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{27}\right)}} = 2{,}13.$$

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ мы должны отвергнуть нулевую гипотезу (табличное значение $t = 1{,}995$) и считать, что есть статистически достоверные на выбранном уровне значимости различия между средними значениями измеряемых показателей для двух подвидов лягушки.

При использовании же формул (45.6) и (45.7) имеем

$$t = \frac{2{,}34 - 2{,}08}{\sqrt{\frac{0{,}21}{49} + \frac{0{,}35}{27}}} = 1{,}98;\ \nu = \frac{\left(\frac{0{,}21}{49} + \frac{0{,}35}{27}\right)^2}{\frac{(0{,}21/49)^2}{48} + \frac{(0{,}35/27)^2}{26}} = 44{,}8.$$

В данном случае для того же уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ табличное значение $t = 2{,}015$, и нулевая гипотеза принимается.

Этот пример показывает, что пренебрежение условиями, принимаемыми при выводе того или иного критерия, может привести к результатам, прямо противоположным тем, которые имеют место на самом деле. Конечно же, в данном случае, имея выборки разного объема в отсутствие заранее установленного факта о том, что дисперсии измеряемого показателя в обеих популяциях статистически равны, следовало пользоваться формулами (45.7) и (45.8), которые и показали отсутствие статистически значимых различий.

Поэтому следует повторить еще раз, что проверка соблюдения всех предположений, сделанных при выводе того или иного критерия, является совершенно необходимым условием для его корректного использования.

Неизменным требованием в обеих приведенных модификациях $t$-критерия было требование о независимости между собой выборок. Однако на практике достаточно часто встречаются ситуации, когда это требование не может быть выполнено по объективным причинам. Например, измеряются некоторые показатели на одном и том же животном или участке территории до и после действия внешнего фактора и т. д. И в этих случаях нас может интересовать проверка гипотезы $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ против $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$. Будем по-прежнему предполагать, что обе выборки взяты из нормальных генеральных совокупностей с одинаковой дисперсией.

В этом случае можно воспользоваться тем фактом, что разности между нормально распределенными величинами также имеют нормальное распределение, и поэтому можно воспользоваться критерием Стьюдента в форме (45.1). Таким образом, будет проверяться гипотеза о том, что $n$ разностей $(x_{1i} - x_{2i})$ есть выборка из нормально распределенной генеральной совокупности со средним $(\mu_1 - \mu_2)$, равным нулю.

Обозначив $i$-ю разность через $d_i$, имеем

$$t = \frac{\overline{x} - a}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{\overline{d} - 0}{s_d/\sqrt{n}}, \tag{45.9}$$

где

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n},$$

а

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}.$$

*ПРИМЕР 45.3.* Пусть в нашем распоряжении имеются данные о количестве импульсов отдельной нервной клетки за определенный интервал времени до ($x_1$) и после ($x_2$) действия раздражителя (табл. 45.1).

*Таблица 45.1.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 13 | 9 | 9 | 9 | 12 | 8 | 10 | 11 | 7 | 9 |
| $x_2$ | 14 | 13 | 11 | 14 | 11 | 11 | 10 | 13 | 12 | 12 |
| $d$ | $-1$ | $-4$ | $-2$ | $-5$ | 1 | $-3$ | 0 | $-2$ | $-5$ | $-3$ |

Отсюда $\bar{d} = -1{,}8$; $s_d = 1{,}73$; $|t| = 4{,}39$. Имея в виду, что (45.9) имеет $t$-распределение, и выбрав уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, из таблицы 10 Приложения найдем, что критическое значение $t$ для $n-1 = 10-1 = 9$ степеней свободы равно 3,25. Сравнение теоретического и эмпирического значений $t$-статистики показывает, что нулевая гипотеза об отсутствии статистически значимых различий между частотой импульсации до и после подачи стимула должна быть отвергнута. Можно сделать вывод о том, что используемый раздражитель статистически значимо меняет частоту импульсации.

*Замечание 45.4.* В экспериментальных исследованиях, как упоминалось выше, зависимые выборки появляются достаточно часто. Тем не менее этот факт иногда игнорируется и $t$-критерий некорректно используется в форме (45.3).

В неправомерности этого можно убедиться, рассматривая стандартные ошибки разности между некоррелированными и коррелированными средними. В первом случае

$$\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{n}} = \sqrt{\sigma_x^2 \frac{2}{n}},$$

а во втором

$$\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_x^2}{n} - 2\rho_{12}\frac{\sigma_x^2}{n}} = \sqrt{\sigma_x^2\left(\frac{2}{n} - \frac{2\rho_{12}}{n}\right)}.$$

Стандартная ошибка разности $d$ равна

$$s_d = s_{x_1 - x_2} = \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 - 2r_{x_1x_2}s_{x_1}s_{x_2}}.$$

С учетом этого знаменатель в (45.9) будет иметь вид

$$\frac{s_d}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s_{x_1}^2}{n} + \frac{s_{x_2}^2}{n} - \frac{2r_{x_1x_2}s_{x_1}s_{x_2}}{n}}.$$

Теперь обратим внимание на то, что числители выражений (45.4) и (45.9) совпадают:

$$\overline{d} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{1i} - x_{2i})}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i}}{n} = \overline{x}_1 - \overline{x}_2,$$

следовательно, различие в величине $t$ в них зависит от знаменателей.

Таким образом, если в задаче с зависимыми выборками будет использована формула (45.3), и при этом выборки будут иметь положительную корреляцию, то получаемые значения $t$ будут меньше, чем они должны были бы быть при использовании формулы (45.9), и может возникнуть ситуация, что будет принята нулевая гипотеза, в то время как она неверна. Обратная ситуация может возникнуть, когда между выборками будет существовать отрицательная корреляция, т. е. в этом случае значимыми будут признаваться такие различия, которые на самом деле таковыми не являются.

Вернемся вновь к примеру с импульсной активностью и вычислим для приведенных данных значение $t$ по формуле (45.3), не обращая внимания на то, что выборки связаны. Имеем: $\overline{x}_1 = 9{,}7$; $\overline{x}_2 = 12{,}1$; $s_1^2 = 3{,}34$; $s_2^2 = 1{,}88$; $|t| = 3{,}32$. Для числа степеней свободы, равного 18, и уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ табличное значение $t = 2{,}88$ и, на первый взгляд, кажется, что ничего не произошло, даже при использовании непригодной для данных условий формулы. И в этом случае вычисленное значение $t$ приводит к отбрасыванию нулевой гипотезы, т. е. к тому же самому выводу, который был сделан с использованием правильной в данной ситуации формулой (45.9).

Однако давайте переформируем имеющиеся данные и представим их в следующем виде (табл. 45.2).

*Таблица 45.2.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 13 | 9 | 12 | 9 | 10 | 9 | 11 | 7 | 9 | 8 |
| $x_2$ | 10 | 13 | 12 | 12 | 11 | 13 | 11 | 14 | 11 | 14 |

Это те же самые значения, и они вполне могли бы быть получены в каком-нибудь из опытов. Так как все значения в обеих выборках сохранены, то использование критерия Стьюдента в формуле (45.3) дает уже полученное ранее значение $|t| = 3{,}32$ и приводит к тому же самому выводу, который уже был сделан.

А теперь рассчитаем значение $t$ по формуле (45.9), которая и должна использоваться в данном случае. Имеем: $\bar{d} = -2{,}4$; $s_d = 2{,}44$; $|t| = 3{,}11$. Критическое значение $t$ при выбранном уровне значимости и девяти степенях свободы равно $3{,}25$. Следовательно, оснований отвергнуть нулевую гипотезу у нас нет, мы ее принимаем, и оказывается, что этот вывод прямо противоположен тому, который был сделан при использовании формулы (45.3).

На этом примере мы вновь убедились в том, как важно для получения правильных выводов при анализе экспериментальных данных строго соблюдать все требования, которые были положены в основу определения того или иного критерия.

Рассмотренные модификации критерия Стьюдента предназначаются для проверки гипотез относительно средних двух выборок. Однако возникают ситуации, когда появляется необходимость сделать выводы относительно равенства одновременно $k$ средних. Для этого случая тоже разработана определенная статистическая процедура, которая будет рассмотрена в дальнейшем при обсуждении вопросов, связанных с дисперсионным анализом.

## § 45.2. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ДИСПЕРСИЙ

Проверка статистических гипотез относительно дисперсий генеральных совокупностей проводится в той же последовательности, что и для средних. Напомним вкратце эту последовательность.

1. Формулируется нулевая гипотеза (об отсутствии статистически значимых различий между сравниваемыми дисперсиями).
2. Делаются некоторые предположения относительно выборочного распределения статистики, с помощью которой планируется оценивать параметр, входящий в гипотезу.

3. Выбирается уровень значимости для проверки гипотезы.
4. Вычисляется значение интересующей нас статистики и принимается решение относительно истинности нулевой гипотезы.

Начнем с проверки гипотезы о том, что дисперсия генеральной совокупности $\sigma_x^2 = a$, т. е. $H_0 : \sigma_x^2 = a$ против $H_1 : \sigma_x^2 \neq a$. Если предположить, что переменная $x$ имеет нормальное распределение и что выборка объема $n$ извлекается из генеральной совокупности случайно, то для проверки нулевой гипотезы $H_0$ используется статистика

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{a}. \tag{45.10}$$

Подставляя формулу для дисперсии в (45.10), получаем:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{a \cdot (n-1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{a}. \tag{45.11}$$

Из этого выражения видно, что числитель представляет собой сумму квадратов отклонений нормально распределенных величин от их среднего. Каждое из этих отклонений также распределено нормально. Поэтому в соответствии с известным нам распределением суммы квадратов нормально распределенных величин статистики (45.10) и (45.11) имеют $\chi^2$-распределение с $n-1$ степенью свободы.

По аналогии с использованием $t$-распределения при проверке гипотезы $H_0 : \sigma_x^2 = a$ для выбранного уровня значимости $\alpha$ по таблице 2 распределения $\chi^2$ устанавливают критические точки, соответствующие вероятностям принятия нулевой гипотезы $1-\alpha/2$ и $\alpha/2$. Доверительный интервал для $\sigma_x^2$ при выбранном $\alpha$ строится следующим образом:

$$\frac{(n-1)s_x^2}{{}_{1-\alpha/2}\chi^2_{n-1}} < \sigma_x^2 < \frac{(n-1)s_x^2}{{}_{\alpha/2}\chi^2_{n-1}}. \tag{45.12}$$

*ПРИМЕР 45.4.* Пусть на основании обширных экспериментальных исследований установлено, что дисперсия содержания алкалоидов одного вида растений из определенного района равна 4,37 условных единиц. В распоряжение специалиста попадает выборка объемом $n = 28$ таких растений, предположительно из того же района. Проведенный анализ показал, что для этой выборки $s_x^2 = 5{,}01$, и нужно убедиться в том, что эта и известная ранее дисперсии статистически неразличимы на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

По формуле (45.10) имеем

$$\chi^2 = \frac{(28-1)\cdot 5{,}01}{4{,}37} = 30{,}95.$$

Полученную величину необходимо сравнить с критическими значениями $\alpha/2 = 0{,}05$ и $1-\alpha/2 = 0{,}95$. Из таблицы 2 Приложения для $\chi^2$ с 27 степенями свободы имеем соответственно 40,1 и 16,2, откуда следует, что нулевая гипотеза может быть принята. Соответствующий доверительный интервал для $s_x^2$ равен $3{,}37 < \sigma_x^2 < 8{,}35$.

В отличие от проверки гипотез относительно выборочных средних с использованием критерия Стьюдента, когда ошибки первого и второго рода несущественно менялись при нарушении предположения о нормальном распределении генеральных совокупностей, в случае гипотез о дисперсиях при невыполнении условий нормальности ошибки меняются существенно.

Рассмотренная выше задача о равенстве дисперсии некоторому фиксированному значению представляет ограниченный интерес, так как довольно редко встречаются ситуации, когда известна дисперсия генеральной совокупности. Значительно больший интерес представляет случай, когда нужно проверить, равны ли дисперсии двух совокупностей, т. е. проверка гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативы $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. При этом предполагается, что выборки объемом $n_1$ и $n_2$ случайно извлекаются из генеральных совокупностей с дисперсиями $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$.

Для проверки нулевой гипотезы используется критерий отношения дисперсий Фишера

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \tag{45.13}$$

Так как суммы квадратов отклонений нормально распределенных случайных величин от их средних значений имеют распределение $\chi^2$, то и числитель и знаменатель (45.13) представляют собой величины с распределением $\chi^2$, поделенные соответственно на $n_1$ и $n_2$, и следовательно, их отношение имеет $F$-распределение с $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ степенями свободы.

Общепринято — и так построены таблицы $F$-распределения, — что в качестве числителя в (45.13) берется бóльшая из дисперсий, и поэтому определяется только одна критическая точка, соответствующая выбранному уровню значимости.

Пусть в нашем распоряжении оказались две выборки объемом $n_1 = 11$ и $n_2 = 28$ из популяций обыкновенных и овальных прудовиков, для которых отношения высоты к ширине имеют дисперсии $s_1^2 = 0{,}59$ и $s_2^2 = 0{,}38$. Необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий для изучаемых популяций при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Имеем

$$F_{10,27} = \frac{0{,}59}{0{,}38} = 1{,}552.$$

Из таблицы 3 Приложения критическое значение $F$-распределения с $(10, 27)$ степенями свободы равно $2{,}20$. Следовательно, нулевая гипотеза принимается.

*Замечание 45.5.* В литературе иногда можно встретить утверждение о том, что проверке гипотезы о равенстве средних по критерию Стьюдента должна предшествовать проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Это неправильная рекомендация. Более того, она может привести к ошибкам, которых можно избежать, если ей не следовать.

В самом деле, результаты проверки гипотезы о равенстве дисперсий с использованием критерия Фишера в значительной мере зависят от предположения о том, что выборки взяты из совокупностей с нормальным распределением. В то же время критерий Стьюдента малочувствителен к нарушениям нормальности, и если удается получить выборки равного объема, то предположение о равенстве дисперсий также не является существенным. В случае неравных $n$ следует пользоваться для проверки гипотезы формулами (45.7) и (45.8).

При проверке гипотез о равенстве дисперсий возникают некоторые особенности в расчетах, связанных с зависимыми выборками. В этом случае для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативы $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ используется статистика

$$t = \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{\frac{4 s_1^2 s_2^2}{n-2}(1 - r_{12}^2)}}. \tag{45.14}$$

Если нулевая гипотеза справедлива, то статистика (45.14) имеет $t$-распределение Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы.

При измерении блеска 35 образцов покрытий была получена дисперсия $s_1^2 = 134{,}5$. Повторные измерения через две недели показали $s_2^2 = 199{,}1$. При этом коэффициент корреляции между парными измерениями оказался равным $r_{12} = 0{,}876$. Если не обращать внимание на то, что выборки зависимы, и воспользоваться критерием Фишера для проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то получим $F = 1{,}48$. Если выбрать уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, то нулевая гипотеза будет принята, так как критическое значение $F$-распределения для $f_1 = 35 - 1 = 34$ и $f_2 = 35 - 1 = 34$ степеней свободы равно $1{,}79$.

В то же время, если использовать подходящую для данного случая формулу (45.14), то получим $t = 2{,}35$, в то время как критическое значение $t$ для 33 степеней свободы и выбранного уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ равно $\approx 2{,}03$. Следовательно, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий в этих двух выборках должна быть отклонена. Таким образом, из этого примера видно, что, как и в случае проверки гипотезы о равенстве средних, использование критерия, не учитывающего специфику экспериментальных данных, приводит к ошибке.

В рекомендуемой литературе можно найти критерий Бартлетта, используемый при проверке гипотез об одновременном равенстве $k$ дисперсий. Кроме того, что вычисления статистики этого критерия довольно трудоемки, основной недостаток этого критерия в том, что он необычайно чувствителен к отклонениям от предположения о нормальности распределений совокупностей, из которых извлекаются выборки. Таким образом, при его использовании никогда нельзя быть уверенным в том, что нулевая гипотеза отклонена в самом деле из-за того, что статистически значимо различаются дисперсии, а не из-за того, что выборки не имеют нормального распределения. Поэтому в случае возникновения проблемы сравнения нескольких дисперсий необходимо искать такую постановку задачи, когда можно будет использовать критерий Фишера или его модификации.

## § 45.3. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Начнем с проверки гипотезы о том, что обычный коэффициент $\rho_{xy}$ корреляции равен некоторому фиксированному значению $a$, т. е. $H_0 : \rho_{xy} = a$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \rho_{xy} \neq a$.

При этом предполагается, что случайная выборка $n$ пар наблюдений извлекается из двумерной нормальной генеральной совокупности, в которой корреляция между $x$ и $y$ численно равна $\rho_{xy}$. Для проверки $H_0$ используется статистика

$$z = \frac{z_r - z_a}{1/\sqrt{n-3}}, \tag{45.15}$$

где $z_r$ и $z_a$ — $z$-преобразованные по Фишеру значения, соответствующие выборочному $r_{xy}$ и $a$ соответственно.

Как правило, проверяется гипотеза о том, что $\rho_{xy} = 0$. В этом случае статистика (45.15) приобретает вид

$$z = \frac{z_r}{1/\sqrt{n-3}}. \tag{45.16}$$

Если нулевая гипотеза верна, то статистика (45.16) имеет единичное нормальное распределение, и способ построения доверительных интервалов для $z_r$, а следовательно, и для $\rho_{xy}$ очевиден.

Пусть для данных о содержании азота и фосфора в 50 пробах почвы был рассчитан коэффициент корреляции, который оказался равным $r_{xy} = 0{,}38$. Проверим с уровнем

значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу $H_0 : \rho_{xy} = 0$. На первом этапе с помощью таблицы 8 $z$-преобразования, приведенной в Приложении 1, найдем величину $z_r = 0{,}4$. Отсюда $z = 0{,}4 \cdot \sqrt{47} = 2{,}742$. Из таблицы нормального распределения (1) следует, что критической точкой для $\alpha = 0{,}05$ является величина $\pm 1{,}96$. Следовательно, на данном уровне значимости нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

Для построения доверительного интервала сначала вычисляют

$$z_r \pm {}_{1-\alpha/2} z \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0{,}40 \pm 0{,}286.$$

Полученные таким образом две точки на шкале $z$-преобразования $(0{,}114; 0{,}686)$ переводят в значения $r_{xy}$ и получают доверительный интервал для $\rho_{xy}$ с выбранным уровнем значимости. В данном случае имеем

$$0{,}11 < \rho_{xy} < 0{,}59.$$

Кроме статистики (45.16) для проверки существует еще одна статистика $H_0 : \rho_{xy} = 0$.

$$t = \frac{r_{xy}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)/(n-2)}}, \tag{45.17}$$

которая при $\rho_{xy} = 0$ имеет $t$-распределение с $n-2$ степенями свободы. Использование этой статистики позволило составить таблицы критических значений $r_{xy}$, превышение которых приводит к отклонению $H_0 : \rho_{xy} = 0$. Такая таблица 9, существенно облегчающая проверку нулевой гипотезы в данном случае, приведена в Приложении.

Проверка статистических гипотез о равенстве двух коэффициентов корреляции, т. е. $H_0 : \rho_1 = \rho_2$ против $H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$, также проводится с использованием статистики

$$z = \frac{z_{r_1} - z_{r_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}, \tag{45.18}$$

имеющей единичное нормальное распределение. Это справедливо, если выборки извлекаются из двумерных нормальных генеральных совокупностей, характеризующихся коэффициентами корреляции $\rho_1$ и $\rho_2$.

Вся последовательность действий при вычислениях по формуле (45.18) аналогична использованной выше, поэтому рассмотрим сразу пример.

*ПРИМЕР 45.5.* При подсчете коэффициента корреляции между частотой пульса и артериальным давлением в двух возрастных группах с $n_1 = 14$ и $n_2 = 19$ были получены значения $r_1 = -0{,}785$ и $r_2 = -0{,}624$. Необходимо проверить гипотезу о равенстве коэффициентов корреляции в совокупностях, из которых взяты эти выборки, на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Имеем $z_{r_1} = -1{,}06$, $z_{r_2} = -0{,}73$. (Знак $z$-преобразованной величины зависит от знака коэффициента корреляции, а абсолютная величина остается одной и той же для равных по величине, но имеющих разные знаки коэффициентов корреляции.)

По формуле (45.18) подсчитываем

$$z = \frac{-1{,}06 - (-0{,}73)}{\sqrt{\frac{1}{14-3} + \frac{1}{19-3}}} = -0{,}842.$$

Отсюда следует, что нулевая гипотеза принимается, так как критическая точка для $\alpha = 0{,}01$ в единичном нормальном распределении равна $\pm 2{,}58$.

*Замечание.* Нулевая гипотеза, которую мы проверяли, утверждает, что $\rho_{r_1} = \rho_{r_2}$. Эта гипотеза имеет определенный смысл и всегда может быть проверена. В то же время, имея в виду формулу (45.18), иногда утверждают, что с ее помощью проверяют гипотезу о разности между $r_1$ и $r_2$. Это некорректное утверждение, потому что рассмотрение этой разности самой по себе лишено смысла. В самом деле, разность, равную, например, 0,3 можно получить для пар коэффициентов корреляции, равных 0,9 и 0,6, 0,5 и 0,2, 0,1 и $-0{,}2$ и т. д. Естественно, что в каждом из этих случаев значимость разности 0,3 существенно различна, потому что она отражает неодинаковые возможности предсказания одной переменной по другой. Это следует помнить, чтобы правильно формулировать проверяемую гипотезу, а затем проводить интерпретацию полученного вывода в содержательных понятиях.

Гипотезы о равенстве двух ранговых или двух частных коэффициентов корреляции могут быть также проверены с использованием статистики (45.17) или соответствующей ей таблицы с той только разницей, что для ранговых коэффициентов корреляции вместо $r_{xy}$ используются значения $r_s$, а при проверке частных коэффициентов корреляции вместо $r_{xy}$ подставляются значения вида $r_{xy.z}$, а в знаменателе вместо делителя $n-2$ используется делитель $n-3$.

## § 45.4. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДОЛЕЙ

Довольно часто приходится анализировать совокупности, в которых объекты могут быть отнесены к одной из двух категорий. Например, по принадлежности к полу в некоторой популяции, по наличию некоторого микроэлемента в почве, по темной или светлой окраске яиц у некоторых видов птиц и т. д.

Долю элементов, обладающих определенным качеством, обозначим через $\Pi$, где $\Pi$ представляет собой отношение объектов с интересующим нас качеством ко всем объектам в совокупности.

Пусть проверяется гипотеза о том, что в некоторой достаточно большой совокупности доля $\Pi$ равна некоторому числу $a$, $0 < a < 1$, т. е. $H_0 : \Pi = a$ против $H_1 : \Pi \neq a$.

Для дихотомических (имеющих две градации) переменных, как в нашем случае, $\Pi$ играет ту же роль, что и среднее генеральной совокупности переменных, измеряемых количественно. С другой стороны, в предыдущей главе было указано, что стандартная ошибка доли $\Pi$ может быть представлена в виде

$$\sigma_{\overline{p}} = \sqrt{\frac{\Pi(1-\Pi)}{n}}.$$

Тогда, если верна гипотеза $H_0 : \Pi = a$, то статистика

$$z = \frac{p-a}{\sqrt{p(1-p)/n}}, \tag{45.19}$$

где $p$ — выборочное значение $\Pi$, имеет единичное нормальное распределение. Сразу нужно оговориться, что такая аппроксимация справедлива, если меньшее из произведений $np$ или $(1-p)n$ больше 5.

*ПРИМЕР 45.6.* Из литературных данных известно, что в популяции озерной лягушки доля особей, имеющих продольную полосу на спине, составляет 62% или 0,62. В нашем распоряжении оказалась выборка из 125 ($n$) особей, 93 ($f$) из которых

имеют продольную полосу на спине. Необходимо выяснить, соответствует ли доля особей с интересующим нас признаком в популяции, из которой извлечена выборка, известным данным.

Имеем: $p = f/n = 93/125 = 0{,}744$, $a = 0{,}62$, $n(1-p) = 125(1-0{,}744) = 32 > 5$ и

$$z = \frac{0{,}744 - 0{,}620}{\sqrt{0{,}620(1-0{,}620)/125}} = 2{,}86.$$

Следовательно, и для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$, и для $\alpha = 0{,}01$ нулевая гипотеза должна быть отвергнута, так как критическое значение для $\alpha = 0{,}05$ равно $\pm 1{,}96$, а для $\alpha = 0{,}01$ — $\pm 2{,}58$.

Если существуют две большие совокупности, в которых доли объектов с интересующим нас свойством составляют соответственно $\Pi_1$ и $\Pi_2$, то интерес представляет проверка гипотезы $H_0 : \Pi_1 = \Pi_2$ против альтернативной $H_1 : \Pi_1 \neq \Pi_2$. Для проверки извлекаются случайно и независимо две выборки объемами $n_1$ и $n_2$. По этим выборкам оцениваются $p_1$ и $p_2$ и определяется статистика

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\left(\frac{f_1+f_2}{n_1+n_2}\right)\left(1 - \frac{f_1+f_2}{n_1+n_2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \tag{45.20}$$

где $f_1$ и $f_2$ — число объектов, обладающих данным признаком, соответственно в первой и второй выборках.

Из формулы (45.20) можно понять, что при ее выводе использовался все тот же принцип, с которым мы сталкивались и ранее. А именно, для проверки статистических гипотез определяется количество стандартных отклонений, составляющих разность между интересующими нас показателями. В самом деле, величина $(f_1 + f_2)/(n_1 + n_2)$ представляет собой долю объектов с заданным признаком в обеих выборках одновременно. Если обозначить ее через $p^*$, то выражение во второй скобке знаменателя (45.20) представляет собой $(1 - p^*)$ и становится очевидным, что выражение (45.20) эквивалентно формуле для проверки нулевой гипотезы $H_0 : \mu_1 = \mu_2$:

$$t = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{s_x^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

так как $p^*(1-p^*) = s_p^2$.

С другой стороны, стандартная ошибка $s_{\overline{p}} = s_p/\sqrt{n}$. Таким образом, (45.20) может быть записано в виде

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}. \tag{45.21}$$

Единственное различие между этой статистикой и статистикой, используемой при проверке гипотез о средних, состоит в том, что $z$ имеет не $t$-, а единичное нормальное распределение.

*ПРИМЕР 45.7.* Пусть изучение группы людей ($n_1 = 82$) показало, что доля лиц, у которых в электроэнцефалограмме обнаруживается $\alpha$-ритм, составляет 0,84 или 84%. Исследование группы людей в другой местности ($n_2 = 51$) показало, что эта доля составляет 0,78. Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ необходимо проверить, что доли лиц, обладающих мозговой альфа-активностью в генеральных совокупностях, из которых взяты выборки, одинаковы.

Прежде всего убедимся в том, что имеющиеся экспериментальные данные позволяют пользоваться статистикой (45.20). Имеем:

$$n_1(1-p_1) = 82 \cdot 0{,}16 \approx 13 < 5, \quad n_2(1-p_2) = 51 \cdot 0{,}22 \neq 11 > 5.$$

Далее рассчитаем

$$z = \frac{0{,}84 - 0{,}78}{\sqrt{\frac{69+40}{82+51}\left(1 - \frac{69+40}{82+51}\right)\left(\frac{1}{82} + \frac{1}{51}\right)}} = 0{,}985,$$

и так как $z$ имеет нормальное распределение, для которого критической точкой при $\alpha = 0{,}05$ является $1{,}96$, то нулевая гипотеза принимается.

*Замечание 45.6.* Рассмотренный критерий справедлив, если выборки, для которых сравнивались доли объектов, обладающих интересующим нас признаком, являются независимыми.

*Таблица 45.3.*

| Признак | | у | | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0 | |
| $x$ | 1 | $a$ | $b$ | $a+b$ |
| | 0 | $c$ | $d$ | $c+d$ |
| Сумма | | $a+c$ | $b+d$ | $n$ |

● *ПРИМЕР 45.8.* Обозначим наличие у объекта некоторого интересующего нас признака через 1, а его отсутствие — через 0. Тогда мы приходим к таблице 45.3, где $(a+c)$ — число объектов в первой выборке, обладающих некоторым признаком, $(a+c)$ — число объектов с этим признаком во второй выборке, а $n$ — общее число обследованных объектов.

Очевидно, что это уже известная четырехпольная таблица, взаимосвязь в которой оценивается с помощью коэффициента

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}.$$

В реальных ситуациях, когда число объектов больше 10, для проверки нулевой гипотезы используется статистика

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \tag{45.22}$$

которая в случае, если нулевая гипотеза верна, имеет распределение хи-квадрат с одной степенью свободы.

*Таблица 45.4.*

| Признак | | Эффективность | | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| Время года | 0 | 16 | 28 | 44 |
| | 1 | 34 | 284 | 318 |
| Сумма | | 50 | 312 | 362 |

● *ПРИМЕР 45.9.* Пусть в течение двух лет проверялась эффективность прививок от малярии, сделанных в разное время года. Полученные данные сведены в табл. 45.4, где условно 1 обозначены успешность прививки и вторая половина года.

Проверяется гипотеза о том, что эффективность прививок не зависит от времени года, когда они делаются. Имеем

$$\chi^2 = \frac{362(284 \cdot 16 - 34 \cdot 28)}{318 \cdot 44 \cdot 312 \cdot 50} = 21{,}4.$$

Табличное значение $\chi^2$ для $\alpha = 0{,}05$ равно $3{,}84$, а для $\alpha = 0{,}01$ — $6{,}64$. Следовательно, на любом из этих уровней значимости нулевая гипотеза должна быть отвергнута, и в этом примере (впрочем, имеющем отношение к действительности) может

быть сделан вывод о том, что прививки, сделанные во второй половине года, значительно эффективней.

Естественным обобщением коэффициента связи для четырехпольной таблицы является, как уже упоминалось ранее, коэффициент взаимной сопряженности Чупрова. Для этого коэффициента

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(r-1)(c-1)}}}$$

неизвестно точное распределение, поэтому о справедливости гипотезы $H_0 : T = 0$ судят на основании сравнения вычисленного значения $\chi^2 = n\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}^2/(n_{i\bullet}n_{\bullet j}) - 1\right)$ и выбранного уровня значимости с критическими точками для этого распределения. Число степеней свободы равно $(r-1)(c-1)$, где $r$ и $c$ — число градаций по каждому из признаков.

● *ПРИМЕР 45.10.* В табл. 45.5 приведены данные, полученные при исследовании дальности зрения правым и левым глазом у людей, не имеющих аномалий зрения.

*Таблица 45.5.*

| Левый глаз / Правый глаз | 1 | 2 | 3 | 4 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 821 | 112 | 85 | 35 | 1053 |
| 2 | 116 | 494 | 145 | 27 | 782 |
| 3 | 72 | 151 | 583 | 87 | 893 |
| 4 | 43 | 34 | 106 | 331 | 514 |
| Сумма | 1052 | 791 | 919 | 480 | 3242 |

Условно эта дальность разбита на четыре категории, и нас интересует статистическая достоверность связи между дальностью зрения левым и правым глазом.

Сначала найдем все слагаемые в двойной сумме. Для этого квадрат каждого значения, приводимого в таблице, делится на сумму элементов строки и столбца, к которым принадлежит выбранное число. Имеем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet}n_{\bullet j}} = \frac{821^2}{1053\cdot 1052} + \frac{112^2}{1053\cdot 791} + \frac{85^2}{1053\cdot 919} + \frac{35^2}{1053\cdot 480} +$$
$$+ \frac{116^2}{782\cdot 1052} + \frac{494^2}{782\cdot 791} + \frac{145^2}{782\cdot 919} + \frac{27^2}{782\cdot 480} + \frac{72^2}{893\cdot 1052} +$$
$$+ \frac{151^2}{893\cdot 791} + \frac{583^2}{893\cdot 919} + \frac{87^2}{893\cdot 480} + \frac{43^2}{514\cdot 1052} + \frac{34^2}{514\cdot 791} +$$
$$+ \frac{106^2}{514\cdot 919} + \frac{331^2}{514\cdot 480} = 2{,}019.$$

Используя это значение, получим $\chi^2 = 3303{,}6$ и $T = 0{,}583$.

Отсюда следует вывод, что для уровня значимости, например, $\alpha = 0{,}01$ существует статистически значимая связь.

## § 45.5. КРИТЕРИИ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧИСЛЕННОСТЕЙ

В классических экспериментах по селекции гороха, знаменовавших начало генетики, Г. Мендель наблюдал частоты различных видов семян, получаемых при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и с морщинистыми зелеными семенами.

● *ПРИМЕР 45.11.* В табл. 45.6 помимо этих данных приводятся теоретически ожидаемые вероятности, следующие из законов Менделя.

*Таблица 45.6.*

| Семена | Численность | Теоретическая вероятность |
|---|---|---|
| Круглые и желтые | 315 | 9/16 |
| Морщинистые и желтые | 101 | 3/16 |
| Круглые и зеленые | 108 | 3/16 |
| Морщинистые и зеленые | 32 | 1/16 |
| | $n = 556$ | $p = 1{,}00$ |

В данном и аналогичном случаях интерес представляет проверка нулевой гипотезы о равенстве функций распределения генеральных совокупностей, из которых извлекаются выборки, т. е. $F_1(x) = F_2(x)$.

При решении такой задачи может быть использована статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}. \tag{45.23}$$

Критерий, использующий эту статистику, был предложен К. Пирсоном и носит его имя. Критерий Пирсона применяется для группированных данных независимо от того, имеют ли они непрерывное или дискретное распределение. В (45.23) $k$ — число интервалов группирования, $n_i$ — эмпирические численности, а $n_i^*$ — ожидаемые или теоретические численности ($n_i^* = p_i n$). В случае справедливости нулевой гипотезы статистика (45.23) имеет $\chi^2$-распределение с $k-1$ степенями свободы.

Для приведенных в таблице 45.6 данных

$$\chi^2 = \frac{\left(315 - 556 \cdot \frac{9}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{9}{16}} + \frac{\left(101 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(108 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \\ + \frac{\left(32 - 556 \cdot \frac{1}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{1}{16}} = 0{,}016 + 0{,}101 + 0{,}135 + 0{,}218 = 0{,}47.$$

Критические точки $\chi^2$-распределения с 3 степенями свободы для $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$ равны соответственно 7,81 и 11,3. Следовательно, нулевая гипотеза принимается и делается вывод, что расщепление в потомстве достаточно хорошо соответствует теоретическим закономерностям.

*ПРИМЕР 45.12.* В колонии морских свинок получены в течение года следующие численности рождения самцов по месяцам, начиная с января: 65, 64, 65, 41, 72, 80, 88, 114, 80, 129, 112, 99. Можно ли считать, что полученные данные соответствуют равномерному распределению, т. е. распределению, в котором численность рождающихся в отдельные месяцы самцов в среднем одинакова?

Если принять такую гипотезу, то ожидаемое среднее число рождающихся самцов будет равно $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 1009/12 = 92{,}3$. Тогда

$$\chi^2 = \frac{(65 - 92{,}3)^2}{92{,}3} + \frac{(64 - 92{,}3)^2}{92{,}3} + \cdots + \frac{(99 - 92{,}3)^2}{92{,}3} = 85{,}7.$$

Критическое значение распределения $\chi^2$ с 11 степенями свободы и $\alpha = 0{,}01$ равно 24,7, поэтому на выбранном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается.

Дальнейший анализ экспериментальных данных показывает, что вероятность рождения самцов морских свинок во второй половине года повышается.

В случае, когда теоретическое распределение предполагается равномерным, проблем с вычислением теоретических численностей не возникает. Для других распределений расчеты усложняются. Рассмотрим на примерах, как рассчитываются теоретические численности для нормального и пуассоновского распределения, которые достаточно часто встречаются в исследовательской практике.

### 45.5.1. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Идея состоит в том, чтобы преобразовать наше эмпирическое распределение в распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Естественно, что при этом границы класс-интервалов будут выражаться в единицах стандартного отклонения, и тогда, помня о том, что площадь под участком кривой, ограниченной верхним и нижним значением каждого интервала, равна вероятности попадания в данный интервал, умножением этой вероятности на общую численность выборки мы и получим искомую теоретическую численность.

*ПРИМЕР 45.13.* Пусть у нас есть эмпирическое распределение для длины листьев дуба и необходимо проверить, можно ли считать с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, что это распределение статистически незначимо отличается от нормального.

Исходные данные и результаты промежуточных вычислений приведены в табл. 45.7.

*Таблица 45.7.*

| Интервал, см | Эмпирич. численность | Интервал в единицах стандартного отклонения | Вероятность | Теоретическая численность | $\lvert n_i - n_i^* \rvert$ | $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4–6 | 53 | $-2{,}36 \div -1{,}61$ | 0,045 | 45 | 8 | 1,422 |
| 6–8 | 145 | $-1{,}61 \div -0{,}86$ | 0,141 | 141 | 4 | 0,113 |
| 8–10 | 265 | $-0{,}86 \div -0{,}11$ | 0,262 | 262 | 3 | 0,034 |
| 10–12 | 266 | $-0{,}11 \div 0{,}64$ | 0,283 | 283 | 17 | 1,021 |
| 12–14 | 196 | $0{,}64 \div 1{,}39$ | 0,179 | 179 | 17 | 1,614 |
| 14–16 | 57 | $1{,}39 \div 2{,}14$ | 0,066 | 66 | 9 | 1,227 |
| 16–18 | 18 | $2{,}14 \div 2{,}89$ | 0,014 | 14 | 4 | 1,143 |
| | $n = 1000$ | | | $n^* = 990$ | | $\chi^2 = 6{,}674$ |

Поясним, как вычислялись значения, приводимые в таблице. Во-первых, по стандартной методике для группированных данных были вычислены среднее и стандартное отклонение, которые оказались равными $\overline{x} = 10{,}3$ и $s_x = 2{,}67$. По этим значениям были найдены границы интервалов в единицах стандартного отклонения, т. е. найдены стандартизованные величины $z_i = (x_i - \overline{x})/s$. Например, для границ интервала $(4 \div 6)$ имеем: $(4 - 10{,}3)/2{,}67 = -2{,}36$; $(6 - 10{,}3)/2{,}67 = -1{,}61$. Затем для каждого интервала была вычислена вероятность попадания в него. Например, для интервала $(-0{,}11 \div 0{,}64)$ из таблицы нормального распределения имеем, что слева от точки $(-0{,}11)$ лежит $0{,}456$ площади единичного нормального распределения, а слева от точки $(0{,}64)$ — $0{,}739$ этой площади. Таким образом, вероятность попадания в этот интервал равна $0{,}739 - 0{,}456 = 0{,}283$. Остальные вычисления очевидны.

Следует объяснить разницу между $n$ и $n^*$. Она возникает за счет того, что теоретическое нормальное распределение можно считать для практических целей сосредоточенным на интервале $\pm 5\sigma$. В эксперименте же значений, отклоняющихся больше,

чем на $3 \div 4\sigma$ от среднего, не бывает. Поэтому площадь под кривой эмпирического распределения не равна единице, за счет чего и возникает погрешность. Однако эта погрешность не вносит существенных изменений в окончательные результаты.

При сравнении эмпирического и теоретического распределений число степеней свободы для $\chi^2$-распределения находится из соотношения $f = m - \ell - 1$, где $m$ — число класс-интервалов, а $\ell$ — число независимых параметров распределения, оцениваемых по выборке. Для нормального распределения $\ell = 2$, так как оно зависит от двух параметров: $\mu$ и $\sigma^2$.

Число степеней свободы уменьшается также на 1, так как для любого распределения выполнено условие, что $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, и следовательно, число независимо определяемых вероятностей равно $k - 1$, а не $k$.

Для приведенного примера $f = 8 - 2 - 1 = 5$ и критическое значение при $\alpha = 0{,}05$ для $\chi^2$-распределения с 5 степенями свободы равно 11,07. Следовательно, нулевая гипотеза принимается.

### 45.5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

*ПРИМЕР 45.14.* Технику сравнения эмпирического распределения с распределением Пуассона рассмотрим на классическом примере о числе смертей драгун за месяц в прусской армии от удара лошадиным копытом (табл. 45.8).

*Таблица 45.8.*

| Число смертей | Эмпирическая численность | Теоретическая численность | $\lvert n_i - n_i^* \rvert$ | $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 109 | 106,1 | 8 | 0,079 |
| 1 | 65 | 68,9 | 4 | 0,221 |
| 2 | 22 | 22,5 | 3 | 0,011 |
| 3 и более | 8 | 4,9 | 17 | 1,961 |
| | $n = 204$ | $n^* = 202{,}4$ | | $\chi^2 = 2{,}272$ |

Данные относятся к XIX веку, а численности смертей 0, 1, 2 и т. д. характеризуют эти печальные, но, к счастью происходившие сравнительно редко события в прусской кавалерии почти за 20 лет наблюдений.

Как известно распределение Пуассона имеет следующий вид:

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda$ — параметр распределения, равный среднему, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Так как распределение дискретное, то интересующие нас вероятности находятся непосредственно по формуле для этого распределения.

Покажем, например, как определяется теоретическая численность для $k = 3$. Обычным способом находим, что среднее в этом распределении равно 0,652. Имея это значение, найдем

$$p_3(0{,}652) = \frac{0{,}652}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-0{,}652} = 0{,}024.$$

Отсюда $n_3^* = np(3) = 204 \cdot 0{,}024 = 4{,}9$.

Если выбрать $\alpha = 0{,}05$, то критическое значение для $\chi^2$-распределения с двумя степенями свободы равно 5,99, и, следовательно, гипотеза о том, что эмпирическое распределение на выбранном уровне значимости не отличается от пуассоновского, принимается. Число степеней свободы в данном случае равно двум, потому что

распределение Пуассона зависит от одного параметра, и значит, в соотношении $f = m - \ell - 1$ число параметров, оцениваемых по выборке $\ell = 1$, и $f = 4 - 1 - 1 = 2$.

На практике важно знать, различаются ли между собой два распределения, даже если неизвестно, каким теоретическим распределением они соответствуют. Это особенно важно в тех случаях, когда, например, их средние и/или дисперсии между собой статистически значимо не различаются. Обнаружение существенных различий в характере распределений может помочь исследователю сделать предположения относительно возможных факторов, которые приводят к этим различиям.

В этом случае может быть использована статистика (45.23), причем в качестве эмпирических численностей используются значения одного распределения, а в качестве теоретического — другого. Естественно, что в этом случае разбиение на класс-интервалы должно быть единым для обоих распределений. Это значит, что для всех данных из обеих выборок выбираются минимальное и максимальное значение, независимо к какой выборке они относятся, а затем в соответствии с выбранным числом класс-интервалов определяется их ширина и подсчитывается число объектов, попавших в отдельные интервалы, для каждой выборки отдельно.

При этом может оказаться, что в некоторые классы не попадает или попадает мало $(3 \div 5)$ значений. Использование критерия Пирсона дает удовлетворительные результаты, если в каждый интервал попадает не менее $3 \div 5$ значений. Поэтому, если это требование не выполняется, необходимо объединять соседние интервалы. Конечно же, это делается для обоих распределений.

И, наконец, еще одно замечание, касающееся сравнения вычисленного значения $\chi^2$ и критических точек для него по выбранному уровню значимости. Нам уже известно, что если $\chi^2_{\text{эмп}} > \chi^2_{\text{теор}}$, то нулевая гипотеза отвергается. Однако и значения $\chi^2$, близкие к критической точке $(1 - \alpha)$ справа, должны вызывать у нас подозрения, потому что такое слишком хорошее совпадение эмпирического и теоретического распределений или двух эмпирических распределений вряд ли может встретиться для случайных распределений. В этом случае возможны два альтернативных объяснения: либо мы имеем дело с законом, и тогда получаемый результат неудивителен, либо экспериментальные данные в силу каких-то причин «подогнаны» друг к другу, что требует их повторной проверки.

Кстати, в примере с горохом мы имеем как раз первый случай, т. е. появление семян разной гладкости и окраски в потомстве определяется законом, и поэтому неудивительно, что вычисленное значение $\chi^2$ получилось таким малым.

*ПРИМЕР 45.15.* Теперь вернемся к проверке статистической гипотезы об идентичности двух эмпирических распределений. В табл. 45.9 приведены данные о распределении числа лепестков цветков анемона, взятых из разных местообитаний.

*Таблица 45.9.*

| Число лепестков | Численность | |
|---|---|---|
| | Место A | Место B |
| 4 | 0 | 2 |
| 5 | 20 | 38 |
| 6 | 614 | 450 |
| 7 | 306 | 390 |
| 8 | 44 | 94 |
| 9 | 14 | 24 |
| 10 | 2 | 2 |

Из табличных данных видно, что два первых и два последних интервала должны быть объединены, так как число значений, попадающих в какой-нибудь из них, недостаточно для корректного использования критерия Пирсона. Из этого примера видно также, что если бы анализировалось только распределение из местообитания $A$, то класс-интервала, содержащего 4 лепестка, вообще бы не было. Он появился в результате того, что рассматриваются два распределения одновременно, а во втором распределении такой класс имеется.

Итак, проверим гипотезу, что два этих распределения не отличаются друг от друга. Имеем

$$\chi^2 = \frac{(20-40)^2}{40} + \frac{(614-450)^2}{450} + \frac{(306-390)^2}{390} + \frac{(44-94)^2}{94} + \frac{(16-26)^2}{26} = 222{,}5.$$

Для числа степеней свободы 4 и уровня значимости, даже равного 0,001, нулевая гипотеза отвергается.

Для сравнения двух выборочных распределений можно использовать и непараметрический критерий, предложенный Н. В. Смирновым и основанный на статистике, введенной ранее А. Н. Колмогоровым. Этот критерий основан на сравнении рядов накопленных частот. Статистика этого критерия находится как

$$d = \max |F_1 - F_2|, \tag{45.24}$$

где $F_1$ и $F_2$ — кривые распределения накопленных частот.

Критические точки для статистики (45.24) находятся из соотношения

$$d^* = \lambda \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \tag{45.25}$$

где $n_1$ и $n_2$ — объемы первой и второй выборок.

*ПРИМЕР 45.16.* Критические значения $\lambda$ для $\alpha = 0{,}1$; $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$ равны соответственно 1,22; 1,36; 1,63. Проиллюстрируем использование критерия Смирнова на группированных данных, приведенных в табл. 45.10 и представляющих собой рост школьников одинакового возраста из двух разных районов.

*Таблица 45.10.*

| Интервал, см | Численность | | Частота | | Накопленная частота | | $\lvert F_i - F_i' \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_i$ | $n_i'$ | $p_i$ | $p_i'$ | $F_i$ | $F_i'$ | |
| 156–158 | 3 | 5 | 0,009 | 0,011 | 0,009 | 0,011 | 0,002 |
| 158–160 | 6 | 11 | 0,018 | 0,024 | 0,027 | 0,035 | 0,008 |
| 160–162 | 24 | 63 | 0,072 | 0,135 | 0,099 | 0,170 | 0,071 |
| 162–164 | 48 | 92 | 0,144 | 0,197 | 0,243 | 0,367 | 0,124 |
| 164–166 | 85 | 118 | 0,256 | 0,253 | 0,499 | 0,620 | 0,121 |
| 166–168 | 103 | 101 | 0,308 | 0,217 | 0,807 | 0,837 | 0,030 |
| 168–170 | 64 | 76 | 0,193 | 0,163 | 1,000 | 1,000 | 0,000 |
| | $n = 333$ | $n' = 466$ | | | | | |

Максимальная разность между кривыми накопленных частот равна 0,124. Если выбрать уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, то из формулы (45.25) имеем

$$d^* = 1{,}36 \sqrt{\frac{1}{333} + \frac{1}{466}} = 0{,}098.$$

Таким образом, максимальная эмпирическая разность больше теоретически ожидаемой, поэтому на принятом уровне значимости нулевая гипотеза об идентичности двух рассматриваемых распределений отвергается.

Критерий Смирнова может быть использован и не для группированных данных, единственное требование состоит в том, что эти данные должны быть извлечены из генеральных совокупностей с непрерывным распределением. Желательно также, чтобы число значений в каждой из выборок было не менее $40-50$.

Для проверки нулевой гипотезы, согласно которой двум независимым выборкам объемом $n$ и $m$ отвечают одинаковые функции распределения, Ф. Вилкоксоном был предложен непараметрический критерий, получивший обоснование в работах Г. Манна и Ф. Уитни. Поэтому в литературе этот критерий называется то критерием Вилкоксона, то критерием Манна–Уитни. Этот критерий целесообразно использовать, когда объемы получаемых выборок малы и использование других критериев неправомерно.

Приводимые ниже выкладки иллюстрируют подход к построению критериев, использующих статистики, связанные не с самими выборочными значениями, а с их рангами.

Пусть в нашем распоряжении оказались две выборки объема $n$ и $m$ значений. Построим из них общий вариационный ряд, и каждому из этих значений сопоставим его ранг $(r_i)$, т. е. порядковый номер, который оно занимает в ранжированном ряду. Если справедлива нулевая гипотеза, то любое распределение рангов равновероятно, а общее число всевозможных комбинаций рангов при заданных $n$ и $m$ равно числу сочетаний из $N = n + m$ элементов по $m$.

Критерий Вилкоксона основан на статистике

$$W = \sum_{i=1}^{m} r_i. \tag{45.26}$$

Формально для проверки нулевой гипотезы необходимо подсчитать все возможные комбинации рангов, при которых статистика $W$ принимает значения, равные или меньшие того, которое получено для конкретного ранжированного ряда, и найти отношение этого числа к общему числу возможных комбинаций рангов по обеим выборкам. Сравнение полученного значения с выбранным уровнем значимости позволит принять или отвергнуть нулевую гипотезу. Разумность такого подхода состоит в том, что если одно распределение смещено относительно другого, то это проявится в том, что маленькие ранги должны соответствовать в основном одной выборке, а большие — другой. В зависимости от этого соответствующие суммы рангов должны быть маленькими или большими в зависимости от того, какая альтернатива имеет место.

*ПРИМЕР 45.17.* В табл. 45.11 приведены результаты гипотетического опыта с использованием двух методов для измерения атомного веса углерода. Необходимо проверить гипотезу об одинаковости функций распределения, характеризующих оба метода измерения, с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

*Таблица 45.11.*

| **Метод А** | | **Метод В** | |
|---|---|---|---|
| **измерение** | **ранг** | **измерение** | **ранг** |
| 12,0054 | 2 | 11,9853 | 1 |
| 12,0072 | 4 | 12,0061 | 3 |
| 12,0077 | 5 | | |

В данном примере $n=3$, $m=2$, $N=2+3=5$, а сумма рангов, соответствующих измерениям по методу $B$, равна $1+3=4$.

Выпишем все $\binom{N}{m}=\frac{N!}{m!\,(N-m)!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$ возможных распределений рангов и их суммы:

| Ранги: | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 3,4 | 3,5 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Суммы: | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9. |

Отношение числа комбинаций рангов, сумма которых не превосходит полученного значения 4 для метода $B$, к общему числу возможных комбинаций рангов равно $2/10=0{,}2>0{,}05$, так что для этого примера нулевая гипотеза принимается.

*Замечание 45.7.* При малых значениях $n$ и $m$ проверку нулевой гипотезы можно осуществлять непосредственным подсчетом числа комбинаций соответствующих сумм рангов. Однако для выборок большого объема это становится практически невозможным, поэтому была получена аппроксимация для статистики $W$, которая, как оказалось, асимптотически стремится к нормальному распределению с соответствующими параметрами. Мы проведем расчет этих параметров, чтобы проиллюстрировать подход к синтезу статистических критериев, основанных на рангах. При этом мы воспользуемся результатами, приведенными в главе 38.

Пусть $W$ — сумма рангов, соответствующих одной из выборок, например той, что имеет объем $m$. Пусть $\overline{W}=W/m$ — среднее арифметическое этих рангов. Математическое ожидание величины $\overline{W}$ равно

$$M[\overline{W}]=M\left[\frac{1}{m}W\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k,$$

так как при нулевой гипотезе ранги элементов выборки объемом $m$ представляют собой выборку из конечной совокупности $1,\ 2,\ \ldots,\ N$ ($N=n+m$). Известно, что

$$\sum_{k=1}^{N}k=1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2},$$

поэтому

$$M[\overline{W}]=\frac{N+1}{2},\quad M[W]=\frac{m(N+1)}{2}.$$

При вычислении дисперсии $D[\overline{W}]$ воспользуемся тем фактом, что сумма квадратов рангов общего ранжированного ряда, составленного из значений обеих выборок, равна

$$\sum_{k=1}^{N}k^2=1^2+2^2+\cdots+N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

С учетом полученных ранее соотношений для оценки дисперсий генеральных совокупностей и выборок имеем

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(M[x])^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k^2-(M[\overline{W}])^2=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2=\frac{N^2-1}{12},$$

а

$$D[\overline{W}]=\frac{\sigma^2}{m}\left(1-\frac{m-1}{N-1}\right)=\frac{N^2-1}{12m}\left(1-\frac{m-1}{N-1}\right)=\frac{n(n+m+1)}{12m}.$$

Отсюда следует, что

$$D[W]=\frac{n(n+m+1)}{12m}.$$

Было показано, что статистика

$$U = \frac{\overline{W} - M[\overline{W}]}{\sqrt{D[\overline{W}]}} = \frac{\overline{W} - \frac{N+1}{2}}{\sqrt{\frac{n(n+m+1)}{12m}}} = \frac{2W - m(n+m+1)}{\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{3}}} \qquad (45.27)$$

для больших $n$ и $m$ имеет асимптотически единичное нормальное распределение.

*ПРИМЕР 45.18.* Пусть для двух возрастных групп получены данные о полярографической активности фильтрата сыворотки крови. Необходимо с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что выборки взяты из генеральных совокупностей, имеющих одинаковые функции распределения. Исходные данные для обеих выборок и соответствующие им ранги приведены в табл. 45.12.

*Таблица 45.12.*

| Группа 1 | | Группа 2 | |
|---|---|---|---|
| **измерение** | **ранг** | **измерение** | **ранг** |
| 18,5 | 6 | 25,5 | 14 |
| 16,0 | 3 | 21,0 | 10 |
| 20,5 | 9 | 22,0 | 11 |
| 18,0 | 5 | 22,5 | 12 |
| 15,5 | 1 | 19,5 | 7 |
| 16,0 | 2 | 19,5 | 8 |
| 17,5 | 4 | 26,0 | 15 |
| | | 24,5 | 13 |

Сумма рангов для первой выборки равна 30, для второй — 90. Проверкой правильности подсчета сумм рангов является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{j=1}^{m} r_j = \big((n+m)(n+m+1)\big)/2.$$

В нашем случае $30 + 90 = (7+8)(7+8+1)/2 = 120$. По формуле (45.27), используя сумму рангов второй выборки, имеем

$$z_{U_2} = \frac{180 - 8(7+8+1)}{\sqrt{\frac{7 \cdot 8(7+8+1)}{3}}} = 3{,}01.$$

Если использовать сумму рангов для первой выборки, то получим значение $z_{U_1} = -3{,}01$. Так как вычисленная статистика имеет единичное нормальное распределение, то естественно, что и в первом, и во втором случае нулевая гипотеза отвергается, так как критическое значение для 5% уровня значимости равно по модулю 1,96.

При использовании критерия Вилкоксона определенные трудности возникают, когда в обеих выборках встречаются одинаковые значения, так как при этом использование приведенной выше формулы приводит к уменьшению мощности критерия, иногда очень существенному.

Чтобы для таких случаев свести ошибки к минимуму, целесообразно пользоваться следующим эмпирическим правилом. Первый раз, когда встречаются одинаковые значения, принадлежащие разным выборкам, то какое из них в вариационном ряду поставить первым, определяется случайно, например подбрасыванием монеты. Если таких значений несколько, то, определив случайно первое, остальные равные значения из обеих выборок чередуют через одно.

## § 45.6. КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛУЧАЙНОСТИ И ОЦЕНКИ РЕЗКО ВЫДЕЛЯЮЩИХСЯ НАБЛЮДЕНИЙ

Довольно часто данные получают сериями во времени или пространстве. Например, в процессе проведения психофизиологических экспериментов, которые могут длиться несколько часов, несколько десятков или сотен раз, измеряется латентный (скрытый) период реакции на предъявляемый зрительный стимул, или в географических обследованиях, когда на площадках, расположенных в определенных местах, например вдоль опушки леса подсчитывается число растений некоторого вида и т. д. Являются ли полученные данные независимыми? Ведь именно такое предположение обеспечивает достоверность при вычислении различных статистик. Поэтому интерес представляет его проверка.

Сначала рассмотрим критерий для проверки нулевой гипотезы о независимости одинаково нормально распределенных величин. Таким образом, этот критерий является параметрическим. Он основан на расчете среднего квадратов последовательных разностей

$$d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2. \tag{45.28}$$

Если ввести новую статистику $q = d^2/2s^2$, то, как известно из теории, при справедливости нулевой гипотезы статистика

$$A = (q-1)\sqrt{\frac{n^2-1}{n-2}} \tag{45.29}$$

для $n > 10$ распределена асимптотически по стандартному нормальному распределению.

*ПРИМЕР 45.19.* В табл. 45.13 приведены времена реакции ($x_i$) испытуемого в одном из психофизиологических экспериментов.

*Таблица 45.13.*

| $i$ | $x_i$ | $d_i$ | $i$ | $x_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 630 | | 13 | 690 | 15 |
| 2 | 610 | −20 | 14 | 605 | −85 |
| 3 | 680 | 70 | 15 | 580 | −25 |
| 4 | 695 | 15 | 16 | 595 | 15 |
| 5 | 645 | −50 | 17 | 650 | 55 |
| 6 | 675 | 35 | 18 | 625 | −25 |
| 7 | 605 | −70 | 19 | 630 | 5 |
| 8 | 595 | −10 | 20 | 660 | 30 |
| 9 | 705 | 110 | 21 | 595 | −65 |
| 10 | 680 | −25 | 22 | 615 | 20 |
| 11 | 640 | −40 | 23 | 645 | 30 |
| 12 | 675 | 35 | | | |

Имеем: $s^2 = 1346{,}9$; $d^2 = 2311{,}4$; $q = 0{,}858$, откуда

$$A = (0{,}858 - 1)\sqrt{\frac{23^2-1}{23-2}} = -0{,}712.$$

Так как для $\alpha = 0{,}05$ критическое значение равно $\pm 1{,}96$, нулевая гипотеза о независимости полученного ряда принимается с выбранным уровнем значимости.

Другой вопрос, который часто возникает при анализе экспериментальных данных, состоит в том, что делать с некоторыми наблюдениями, которые резко отличаются от

основной массы наблюдений. Такие резко выделяющиеся наблюдения могут возникнуть при методических ошибках, ошибках вычислений и т. д. Во всех тех случаях, когда экспериментатору известно, что в наблюдение вкралась ошибка, он должен исключать это значение независимо от его величины. В других случаях существует только подозрение на ошибку, и тогда необходимо использовать соответствующие критерии, с тем чтобы принять то или иное решение, т. е. исключить или оставить резко выделяющиеся наблюдения.

В общем случае вопрос ставится так: произведены ли наблюдения над одной и той же генеральной совокупностью или некоторая часть или отдельные значения относятся к другой генеральной совокупности?

Конечно, единственным надежным способом для исключения отдельных наблюдений является тщательное изучение условий, при которых эти наблюдения получены. Если по каким-то причинам условия отличались от стандартных, то наблюдения должны быть исключены из дальнейшего анализа. Но в определенных случаях имеющиеся критерии, хотя и несовершенные, могут оказать существенную пользу.

Мы приведем здесь без доказательства несколько соотношений, которые могут быть использованы для проверки гипотезы о том, что наблюдения производятся случайно над одной и той же генеральной совокупностью. Имеем

$$\lambda = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{s_x}, \tag{45.30}$$

$$\lambda^* = \frac{x_{(n)} - \overline{x}}{s_x}, \tag{45.31}$$

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{x_{(n)}}, \tag{45.32}$$

где $x_{(n)}$ — подозреваемое на «выброс» наблюдение. Если все значения ряда проранжировать, то в нем резко выделяющееся наблюдение будет занимать $n$-е последнее место.

Для статистики (45.30) протабулирована функция распределения. В табл. 45.14 приведены критические точки этого распределения для некоторых $n$.

*Таблица 45.14.*

| $n$ | $\lambda_{0,05}$ | $\lambda_{0,01}$ |
|---|---|---|
| 10 | 1,5 | 2,0 |
| 20 | 1,3 | 1,8 |
| 30 | 1,2 | 1,7 |
| 50 | 1,1 | 1,6 |
| 100 | 1,0 | 1,5 |
| 1000 | 0,8 | 1,2 |

Критическими значениями для статистики (45.31) в зависимости от $n$ являются

$$\begin{aligned} \lambda^* &= 4{,}0; \quad && 6 < n < 100 \\ \lambda^* &= 5{,}6; && 100 < n < 1000 \\ \lambda^* &= 5{,}0; && n > 1000. \end{aligned}$$

В формуле (45.31) предполагается, что $\overline{x}$ и $s_x$ вычисляются без учета подозреваемого наблюдения.

Со статистикой (45.32) дело обстоит сложнее. Для нее показано, что в случае, если $x_i$ распределены равномерно, математическое ожидание и дисперсия $z_n$ имеют вид:

$$M[z_n] = \frac{n+1}{2}, \quad D[z_n] = \frac{n-1}{12}.$$

Критическую область образуют малые значения $z_n$, которые соответствуют большим значениям $x_{(n)}$. Если интересует проверка на «выброс» наименьшего значения $x_{(1)}$, то сначала преобразуют данные, чтобы они имели равномерное распределение на интервале $[0,1]$, а затем берут дополнение этих равномерных величин до 1 и проверяют $x_{(n)}$ по формуле (45.32).

*ПРИМЕР 45.20.* Рассмотрим использование приведенных критериев для следующего проранжированного ряда наблюдений: 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 17. Необходимо решить, следует ли отвергнуть наибольшее значение 17.

Имеем: $\overline{x} = 7{,}0$; $s_x = 3{,}81$; $s'_x = 2{,}61$. По формуле (45.30) $\lambda = (17-11)/3{,}81 = 1{,}57$, и нулевая гипотеза должна быть принята при $\alpha = 0{,}01$. По формуле (45.31) $\lambda^* = (17-7{,}0)/2{,}61 = 3{,}83$, и нулевая гипотеза также должна быть принята. Для использования третьего критерия найдем $x_{(n)} = 5{,}53$, тогда

$$w = \frac{z_n - M[z_n]}{\sqrt{D[z_n]}} = \frac{z_n - \frac{n+1}{2}}{\sqrt{\frac{n-1}{12}}} = \frac{5{,}23 - 6{,}5}{\sqrt{\frac{11}{12}}} = -1{,}013.$$

Статистика распределена нормально с нулевым средним и единичной дисперсией, и, следовательно, нулевая гипотеза при $\alpha = 0{,}05$ принимается.

## Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте в содержательных понятиях задачи из области специализации, при решении которых необходимо использовать:
   а) критерий Стьюдента; б) критерий Стьюдента для сопряженных выборок; в) критерий Фишера; г) критерий $\chi^2$ Пирсона; д) критерий Смирнова–Колмогорова; е) критерий для оценки независимости; ж) критерии для оценки резко выделяющихся наблюдений; з) критерий Вилкоксона.
2. Перечислите требования, выполнение которых необходимо для корректного использования
   а) критерия Стьюдента; б) критерия $\chi^2$ Пирсона; в) критерия Смирнова–Колмогорова; г) критерия для сравнения долей.
3. Как учитывается при проверке гипотез о равенстве дисперсий сопряженность выборок, для которых такое сравнение производится?
4. Как должны рассчитываться значения среднего арифметического и стандартного отклонения при использовании критерия для оценки резко выделяющихся наблюдений?

## Упражнения и задачи

1. Радиоактивное вещество наблюдалось в течение 2608 равных промежутков времени (по 7,5 с каждый). Для каждого из этих интервалов регистрировалось число частиц, попавших в счетчик. Данные приведены в таблице.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_k$ | 57 | 203 | 383 | 525 | 532 | 408 | 273 | 139 | 25 | 27 | 16 |

   Проверить гипотезу с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ о согласии наблюденных данных с законом Пуассона.

2. Анализ вопросов, заданных 120 студентам на экзамене, показал, что 43 из них получили вопросы из первой части курса, 52 — из второй и 25 — из третьей. Можно ли принять гипотезу, что студент равновероятно получает вопрос из любой части курса (для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$)?
3. Цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$ среди 800 первых десятичных знаков числа появлялись $74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91$ раз соответственно. Проверить с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о согласии этих данных с равномерным законом распределения.
4. Решить предыдущую задачу, используя критерий Смирнова–Колмогорова и полагая, что вероятность появления каждой цифры среди первых 800 десятичных знаков числа $\pi$ равна $0{,}1$.
5. Результаты наблюдений за среднесуточной температурой приведены в таблице.

| $^\circ t_i$ | $n_k$ | $^\circ t_i$ | $n_k$ |
|---|---|---|---|
| $-40 \div -30$ | 5 | $10 \div 20$ | 81 |
| $-30 \div -20$ | 11 | $20 \div 30$ | 36 |
| $-20 \div -10$ | 25 | $30 \div 40$ | 20 |
| $-10 \div 0$ | 42 | $40 \div 50$ | 8 |
| $0 \div 10$ | 88 | $50 \div 60$ | 4 |

   Проверить с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ согласие наблюдений с законом нормального распределения.
6. Обследование 199 заядлых курильщиков показало, что 38,2% из них имеют повышенное кровяное давление. Для умеренно, мало и некурящих обследование было проведено на 288, 152 и 161 человеке соответственно. Случаи повышенного кровяного давления составляли 40,3%, 45,5% и 50,3%. Проверить гипотезу, согласно которой вероятность повышения кровяного давления не зависит от степени курения.
7. В течение 25 лет фиксировалось число ураганов в года в одном из пунктов над тихоокеанским побережьем: 2, 2, 6, 10, 5, 5, 5, 2, 4, 2, 4, 4, 2, 5, 6, 4, 2, 4, 5, 8, 11, 8, 6, 5, 6. Проверить нулевую гипотезу с уровнем значимости 0,01, согласно которой эта последовательность является случайной.
8. Геологическая партия забурила в одном створе 46 скважин через равные расстояния и провела анализ взятых проб на содержание руды, получив следующие значения (в условных единицах) в порядке следования скважин: 170, 178, 263, 185, 311, 312, 190, 178, 160, 308, 223, 130, 195, 170, 160, 148, 130, 100, 70, 100, 160, 148, 130, 300, 160, 148, 130, 100, 70, 100, 130, 178, 190, 291, 241, 130, 70, 215, 223, 195, 160, 100, 130, 252, 240, 271. Проверить ($\alpha = 0{,}05$), что последовательность наблюдений является случайной. Какие практические выводы можно сделать, если гипотеза случайности была принята или отвергнута на некотором разумном уровне значимости?
9. Оценивались действия двух лекарств на изменения длительности сна (суммарное изменение за три дня) у 8 пациентов. Получены следующие результаты:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Лекарство А: | 0,3 | 6,3 | 3,7 | 2,8 | 5,8 | −1,4 | 1,7 | 2,3 |
| Лекарство Б: | −1,7 | 1,6 | −1,8 | 0,6 | 4,5 | 1,9 | 2,4 | 6,8 |

   Проверить гипотезу об отсутствии значимых ($\alpha = 0{,}01$) различий в эффективности действия исследованных лекарств.

10. В эксперименте по искусственному стимулированию дождя были замерены дождевые осадки в течение 16 пар дней, причем в каждой паре один день облака засеивали стимулятором ($X$), а в другой день нет ($Y$). Для каждой пары день засеивания выбирался случайным образом. Ниже приведены значения количества выпавших осадков:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | 0 | 2,09 | 0,07 | 0,30 | 0 | 2,55 | 1,62 | 0 | 0 | 1,87 | 2,50 | 3,15 | 0,15 | |
| $Y$: | 1,37 | 0 | 0 | 0,10 | 0,44 | 0 | 1,01 | 0,54 | 0 | 0,62 | 0 | 5,54 | 0,01 | |
| $X$: | 2,96 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | |
| $Y$: | 0 | 0 | 0,75 | | | | | | | | | | | |

Проверить нулевую гипотезу ($\alpha = 0{,}05$), согласно которой засеивание не оказывает эффекта.

11. В течение нескольких дней кофе приготавливали на двух различных электрических кофеварках (А и Б). Время приготовления кофе в минутах приведено ниже. Возможно, что необходимое время колеблется день ото дня вследствие изменения таких факторов, как температура воды или напряжение в электрической сети.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| А: | 9,9 | 9,7 | 8,8 | 9,8 | 6,8 | 7,3 | 12,0 | 11,0 |
| Б: | 14,3 | 11,5 | 8,8 | 13,5 | 8,2 | 10,1 | 10,1 | 11,9 |

С использованием критерия Вилкоксона и Стьюдента найти значение вероятности при проверке нулевой гипотезы, согласно которой среднее время приготовления кофе одно и то же для обеих кофеварок.

12. В двух выборках ($n_1 = 42$, $n_2 = 51$) измерялся вес студентов-естественников и студентов-гуманитариев. Получены значения $\overline{x}_1 = 73{,}2$, $s_1 = 6{,}25$, $\overline{x}_2 = 83{,}8$, $s_2 = 5{,}65$. Используя критерии Фишера и Стьюдента с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, проверить нулевую гипотезу о том, что обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности.

# XLVI

# ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Дисперсионный анализ является одним из наиболее распространенных методов, используемых для сравнения большого числа наборов случайных величин. Он широко применяется в планировании экспериментов, для проверки гипотез о наличии связи между откликом (ответом) системы и исследуемыми факторами, а также для установления силы влияния факторов и их взаимодействий.

Основная идея метода заключается в изучении источников изменчивости зависимой переменной (отклика) и разложении общей дисперсии наблюдаемых значений отклика на составляющие — дисперсию, обусловленную влиянием изучаемых факторов, и остаточную дисперсию, являющуюся следствием действия случайных причин и неучтенных факторов. Сравнивая дисперсию факторов с остаточной дисперсией, можно проверить гипотезу о влиянии факторов на величину изменчивости отклика.

Можно сказать, что дисперсионный анализ представляет собой систему понятий и технических приемов, позволяющих обобщить процедуру сравнения двух средних для двух выборок, взятых из генеральных совокупностей с нормальным распределением, на случай большого числа выборок.

## § 46.1. ДВЕ МОДЕЛИ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим два простых примера.

● *ПРИМЕР 46.1.* Пусть из данной продукции — силикагеля — берутся $kn$ гранул. Затем $k$ групп из $n$ гранул каждая хранятся при различных условиях, и после хранения определяется содержание воды в каждой грануле.

В этом примере мы рассматриваем содержание воды в $n$ гранулах системы, извлеченной в качестве случайной выборки из нормально распределенной генеральной совокупности со средним значением и дисперсией, которые характеризуют эффект специфических условий хранения этих гранул. Если бы мы взяли другую случайную выборку в $n$ гранул и поместили ее в те же условия хранения и провели те же измерения, то можно было бы считать, что мы имеем вторую выборку, извлеченную из той же самой генеральной совокупности и т. д. Иные системы наблюдений, соответствующие другим условиям хранения, интерпретируются аналогичным образом, т. е. каждому из $k$ условий хранения сопоставляется нормально распределенная генеральная совокупность, и при этом предполагается, что $k$ систем данных о содержании воды в гранулах извлечены из

этих совокупностей случайным образом. Генеральные совокупности характеризуются $k$ математическими ожиданиями и $k$ дисперсиями, которые оцениваются $k$ выборочными средними и дисперсиями соответственно.

Если эксперимент необходимо повторить, то создаются те же самые $k$ условий хранения гранул, так как цель такого эксперимента состоит именно в анализе эффектов выбранных условий.

Таким образом, определяющим моментом этого типа дисперсионного анализа является предположение о том, что мы имеем $k$ нормально распределенных генеральных совокупностей с математическими ожиданиями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ и одной и той же дисперсией $\sigma^2$. Это предположение содержит $k+1$ неизвестных параметров, а именно $k$ математических ожиданий и одну дисперсию, и целью дисперсионного анализа этого типа является оценка этих параметров, отыскание выборочных распределений оценок и проверка определенных гипотез относительно значений параметров. В частности, в приведенном примере в первую очередь проверяется гипотеза о том, что $k$ генеральных средних равны, т. е. различия в условиях хранения не влияют на содержание воды в гранулах силикагеля.

Главной особенностью рассматриваемого типа дисперсионного анализа является то, что каждое наблюдение рассматривается как сумма двух компонент, а именно неизвестного среднего значения генеральной совокупности, из которой получено наблюдение и которое одинаково для всех наблюдений в пределах системы, и отклонения от этого среднего значения. Первая компонента считается неизвестной постоянной, тогда как вторая считается случайной величиной. Систематические различия между генеральными совокупностями характеризуются $k$ генеральными средними, которые выражают эффекты $k$ причин (способов обработки, условий хранения и т. д.).

Рассмотрим второй пример.

*ПРИМЕР 46.2.* Из продукции производства окрашенных листов полистирола случайным образом берутся $k$ листов. Из каждого листа случайным образом вырезается $n$ кусков, и определяется толщина окрашенного слоя.

Из каждого листа мы берем случайным образом $n$ кусков и определяем толщину окраски. Эти измерения отклоняются случайным образом, потому что невозможно обеспечить одинаковую глубину проникновения красителя по всей поверхности листа из-за неоднородностей, которые всегда имеют место. Предполагается, что $n$ измерений образуют случайную выборку, извлеченную из гипотетической бесконечной совокупности нормально распределенных измерений глубины проникновения красителя в одном и том же листе. Для $i$-го листа среднее значение соответствующей генеральной совокупности $\mu_i$ является мерой глубины проникновения красителя в этом листе, а дисперсия $\sigma^2$ является мерой неоднородности листа. (Предполагается, что дисперсия одна и та же для всех листов.)

Из-за изменений в технологическом процессе глубина проникновения красителя может изменяться от листа к листу. Отсюда следует, что $k$ листов рассматриваются как случайная выборка, извлеченная из гипотетической бесконечной совокупности окрашенных листов, которые могли быть изготовлены в данном процессе. Предполагая, что распределение глубины проникновения красителя в листы полистирола для данной совокупности нормально, можно рассматривать систему $\mu_i$ как случайную выборку из этой совокупности, которая характеризуется генеральным средним $\mu$ и дисперсией $\omega^2$.

Для данного примера повторение эксперимента означает, что берется новая выборка из $k$ окрашенных листов, потому что конечной целью является характеристика процесса окрашивания в целом, а не сравнение каких-то конкретных $k$ листов.

Главная особенность этого вида дисперсионного анализа состоит в предположении о том, что каждое измерение глубины проникновения красителя имеет две случайные компоненты:

- отклонение измерения от $\mu_i$;
- отклонение $\mu_i$ от $\mu$.

Такое предположение влечет за собой появление трех неизвестных параметров — среднего и двух дисперсий, — а целью проводимого дисперсионного анализа попрежнему является оценка этих параметров, отыскание их выборочных распределений, проверка определенных гипотез относительно значений параметров.

В данном примере интерес представляет сравнение всех трех параметров, а затем сравнение двух дисперсий с тем, чтобы по результату такого сравнения определить, какой источник рассеяния является более важным. Таким образом, основным в этом виде дисперсионного анализа является то, что каждое измерение рассматривается как сумма уже не двух, как в предыдущем случае, а трех компонент:

- неизвестной постоянной — среднего значения, одного и того же для всех измерений;
- случайной компоненты, связанной с группой причин, приводящих к рассеянию внутри систем измерений;
- случайной компоненты, связанной с группой причин, приводящих к рассеянию между системами измерений.

Конечно, существуют значительно более сложные, чем рассмотренные, варианты дисперсионного анализа, зависящие одновременно и от множества факторов и от комбинаций постоянных и случайных эффектов, однако общие идеи, связанные с четким разграничением систематических и случайных компонент и существованием показателей изменчивости внутри и между системами наблюдений или измерений, остаются одними и теми же.

## § 46.2. РАЗБИЕНИЕ СУММЫ КВАДРАТОВ

Дальнейшее изложение будет вестись для одного фактора с несколькими уровнями. Результаты экспериментов или наблюдений обычно представляются, как в табл. 46.1.

*Таблица 46.1.*

| Номер опыта | Уровень фактора | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | ... | $j$ | ... | $k$ |
| 1 | $x_{11}$ | ... | $x_{1j}$ | ... | $x_{1k}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $i$ | $x_{i1}$ | ... | $x_{ij}$ | ... | $x_{ik}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $x_{n1}$ | ... | $x_{nj}$ | ... | $x_{nk}$ |

По результатам применения каждого уровня действующего фактора вычисляются средние значения $\overline{x}_j$. Однако сравниваются между собой не полученные средние, а так называемые эффекты $\alpha_j = \overline{x}_j - \overline{x}$, где $\overline{x}$ — среднее всех наблюдений. Тогда результат $i$-го опыта при использовании уровня фактора $j$ можно записать в виде

$$x_{ij} = \overline{x}_j + e_{ij} = \overline{x} + \alpha_j + e_{ij}, \tag{46.1}$$

где $e_{ij}$ — ошибка результата.

Из этого равенства следует, что

$$x_{ij} - \overline{x} = \alpha_j + e_{ij}. \tag{46.2}$$

Возведя обе части в квадрат, получим

$$(x_{ij} - \overline{x})^2 = \alpha_j^2 + 2\alpha_j e_{ij} + e_{ij}^2. \tag{46.3}$$

Таких равенств для каждого уровня $j$ всего $n$, а всего уровней — $k$. Поэтому, складывая все равенства такого вида для каждого уровня, получим

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_j\sum_i \alpha_j^2 + 2\sum_j\sum_i \alpha_j e_{ij} + \sum_j\sum_i e_{ij}^2. \tag{46.4}$$

С учетом того, что $\sum_j \sum_i \alpha_j e_{ij} = \sum_j(\alpha_j \sum_i e_{ij}) = 0$,

$$\sum_j\sum_i(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_j\sum_i \alpha_j^2 + \sum_j\sum_i e_{ij}^2$$

или

$$\sum_j\sum_i(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_j\sum_i(x_j - \overline{x})^2 + \sum_j\sum_i(x_{ij} - \overline{x}_j)^2. \tag{46.5}$$

Это тождество и является основным в дисперсионном анализе. Из него следует, что варьирование всех результатов наблюдений или измерений около общего среднего может быть разложено на суммы квадратов, первая из которых характеризует варьирование, обусловленное изменчивостью эффектов различных уровней фактора, а вторая — варьирование под влиянием неучтенных факторов (ошибка эксперимента).

## § 46.3. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ С ПОСТОЯННЫМИ ЭФФЕКТАМИ

В этом параграфе будет рассмотрена схема дисперсионного анализа с постоянными эффектами. Нас будет интересовать процесс статистического вывода относительно множества главных эффектов $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_k$.

Представим себе наличие бесконечной последовательности повторений эксперимента, в каждом из которых будет $n$ объектов с $k$ уровнями. При этом $k$ совокупностей фиксируется таким образом, чтобы каждая из них обеспечивала получение одной выборки объема $n$ при каждом повторении эксперимента.

Таким образом, мы приходим к схеме дисперсионного анализа с постоянными эффектами. Будем также предполагать, что $n$ наблюдений на каждом уровне независимы и взяты из нормальной генеральной совокупности с дисперсией $\sigma^2$. Предполагается, что дисперсия $\sigma^2$ одинакова на всех $k$ уровнях, а число наблюдений для них одинаково и равно $n$.

Дисперсионный анализ включает в себя следующие этапы:

1. Для объяснения данных постулируется модель $x_{ij} = \overline{x} + \alpha_j + e_{ij}$, где все $e_{ij}$ независимы, а $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0$.
2. Формулируется нуль-гипотеза $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ против $H_1$, что, по крайней мере, два $\alpha_i$ различны. Или иначе

$$H_0 : \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_k, \quad H_1 : \sum_{j=1}^{k}(\overline{x}_j - \overline{x})^2 \neq 0.$$

3. Выбирается уровень значимости $\alpha$, как правило, между 0,01 и 0,1.
4. Производятся вычисления сумм квадратов ($CK$), степеней свободы и средних квадратов ($CCK$) по следующим формулам: между уровнями

$$CK_M = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2 = \sum_j\sum_i x_{ij}^2 - \frac{\sum_j\left(\sum_i x_{ij}\right)^2}{n},$$

внутри уровней

$$CK_B = \sum_{k=1}^{k} n(x_j-\overline{x})^2 = \frac{\sum_j\left(\sum_i x_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_j\sum_j x_{ij}\right)^2}{kn},$$

при этом число степеней свободы для $CK$ равно $k(n-1)$, а для $CK_B$ — $(k-1)$ и $CCK_M = \frac{CK_M}{k(n-1)}$, $CCK_B = \frac{CK_B}{k-1}$.
5. Рассчитывается дисперсионное отношение $F = CCK_M/CCK_B$ и сравнивается с критическим значением $F$-распределения для выбранного уровня значимости.

*ПРИМЕР 46.3.* В табл. 46.2 приведены данные о времени простой зрительно-моторной реакции 40 испытуемых на предъявляемые стимулы разной интенсивности. Будем проверять гипотезу $H_0 : \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = \overline{x}_4$ с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

*Таблица 46.2.*

| Уровень интенсивности стимула | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 260 | 510 | 520 | 410 |
| 340 | 500 | 640 | 490 |
| 460 | 330 | 390 | 560 |
| 480 | 280 | 540 | 640 |
| 420 | 470 | 580 | 720 |
| 490 | 500 | 530 | 650 |
| 740 | 480 | 770 | 630 |
| 610 | 600 | 560 | 870 |
| 510 | 710 | 630 | 770 |
| 530 | 420 | 590 | 620 |

Прежде всего найдем степени свободы для $CCK_M$ и $CCK_B$, которые будут равны соответственно $4-1=3$ и $4(10-1)=36$. Промежуточные данные приведены в табл. 46.3.

*Таблица 46.3.*

| Уровень интенсивности стимула | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $n_1 = 10$ | $n_2 = 10$ | $n_3 = 10$ | $n_4 = 10$ |
| $\overline{x}_1 = 484$ | $\overline{x}_2 = 480$ | $\overline{x}_3 = 575$ | $\overline{x}_4 = 636$ |
| $\sum x_{i1} = 4840$ | $\sum x_{i2} = 4800$ | $\sum x_{i3} = 5750$ | $\sum x_{i4} = 6360$ |
| $\sum x_{i1}^2 = 2\,502\,400$ | $\sum x_{i2}^2 = 2\,439\,200$ | $\sum x_{i3}^2 = 3\,392\,500$ | $\sum x_{i4}^2 = 4\,203\,400$ |
| | $\sum\sum x_{ij} = 21\,750$ | $\sum\sum x_{ij}^2 = 12\,537\,500$ | |

Используя эти данные, имеем

$$\sum_j\sum_i x_{ij} = 21750 \quad \sum_j\sum_i x_{ij}^2 = 12537500;$$

$$CK_B = \frac{(4840)^2+(4800)^2+(5750)^2+(6360)^2}{10} - \frac{(21750)^2}{40} = 171208;$$

$$CK_M = 12537500 - \frac{(4840)^2+(4800)^2+(5750)^2+(6360)^2}{10} = 539730;$$

$$CCK_B = \frac{171\,208}{3} = 57\,069;$$
$$CCK_M = \frac{539\,730}{36} = 14\,993;\ F = \frac{57\,069}{14\,993} = 4{,}38.$$

Критическое значение $F$-распределения для 3 и 36 степеней свободы при выбранном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ равно 3,81. Поэтому нулевая гипотеза на данном уровне значимости должна быть отвергнута, а мы должны сделать вывод, что использование разных интенсивностей стимула приводит к статистически значимым изменениям времени реакции.

Достаточно часто на практике сталкиваются с ситуацией, когда в силу тех или иных причин число наблюдений для каждого уровня фактора неодинаково. Изложенная выше методика распространяется и на этот случай. Числа степеней свободы для $CCK_B$ и $CCK_M$ остаются прежними, а сами формулы для средних квадратов модифицируются:

$$CCK_M = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2\right)^2}{n_j},$$
$$CCK_B = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2\right)^2}{n_j} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}\right)^2}{N},$$

где $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Обсуждаемые здесь проблемы значимости результатов дисперсионного анализа базируются на определенных предположениях, в частности, на предположении о нормальности исходных данных и равенстве (однородности) дисперсий. Интерес представляет выяснение того, как нарушения этих предпосылок сказываются на уровне значимости. Теоретические и экспериментальные исследования показали следующее:

1. Когда объемы выборок равны, влиянием неоднородности дисперсий на уровень значимости $F$-критерия можно пренебречь;
2. Когда объемы выборок и их дисперсии не равны, а из совокупностей с большими дисперсиями выбирается меньшее число объектов, вероятность ошибки первого рода больше;
3. При этих же условиях, если из совокупностей с большими дисперсиями берется большее число объектов, то вероятность ошибки первого рода меньше;
4. Влияние нарушения нормальности на номинальный уровень значимости $F$-критерия очень незначительно.

Таким образом, мы видим, что процедура дисперсионного анализа достаточно устойчива к нарушению предпосылок, лежащих в ее основе.

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только варианта однофакторного дисперсионного анализа с постоянными эффектами, так как он является базовым, и его освоение позволит начинающему исследователю или специалисту осознанно использовать более сложные модификации дисперсионного анализа, содержащиеся во всех пакетах прикладного статистического анализа.

## § 46.4. МНОЖЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ

Если ограничиться в результате дисперсионного анализа при непринятии нулевой гипотезы только констатацией факта, что не все средние равны между собой, то это несет не слишком много информации. В самом деле, если при достаточно большом $N$ $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = 30$, а $\overline{x}_4 = 80$ и $\overline{x}_1 = 10$, $\overline{x}_2 = 30$, $\overline{x}_3 = 50$ и $\overline{x}_4 = 80$, то, очевидно, в обоих случаях однофакторный дисперсионный анализ приведет к

отклонению нулевой гипотезы, хотя характер различия между средними совершенно разный. Поэтому результаты дисперсионного анализа с необходимостью должны быть дополнены множественным сравнением средних.

Возникает мысль о попарном сравнении всех средних с использованием, например, $t$-критерия. Однако $t$-критерий для этих целей непригоден, так как он разрабатывался для сравнения двух выборок и поэтому рассчитывать на его валидность для определения значимости различий между минимальным и максимальным выборочными средними в совокупности $k$ средних не приходится. В самом деле, если $k$, например, равно 50 и из одной и той же генеральной совокупности извлекается 50 выборок случайным образом, то $t$-критерий будет описывать максимальное и минимальное значения как существенно различающиеся гораздо чаще, чем предсказывает выбранный уровень значимости $\alpha$.

Поэтому были разработаны различные методы множественных сравнений, один из которых мы и рассмотрим, не вдаваясь в его теоретическое обоснование, а обращая внимание на технику вычислений.

Прежде всего введем понятие стьюдентизированного размаха. Пусть $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$ — независимые одинаково распределенные нормальные случайные величины и пусть $W_k$ — размах этой выборки, а $s^2$ — оценка параметра $\sigma_2$, имеющая $n-1$ степень свободы и не зависящая от $W_k$. Тогда случайная величина $q_{k,n-1} = W_k/s$ носит название стьюдентизированного размаха.

В наших обозначениях стьюдентизированный размах представляет собой разность между максимальным и минимальным средним $k$ независимых выборок по $n$ элементов из нормальной генеральной совокупности, деленную на $\sqrt{CCK_B/n}$, и является критическим значением для выбранного уровня значимости $\alpha$.

Итак, сначала определяются все $k(k-1)/2$ сравнения между выборочными средними. Например, если $k=3$, то вычисляются $\overline{x}_1-\overline{x}_2$, $\overline{x}_1-\overline{x}_3$, $\overline{x}_2-\overline{x}_3$. Все разности такого вида делятся на $\sqrt{CCK_B/n}$, где $n$ — число наблюдений в группе, соответствующей любому уровню фактора.

Полученные значения сравниваются со стьюдентизированным размахом и делаются соответствующие выводы.

Однако более важным является построение доверительных интервалов для всех разностей средних. Такие интервалы определяются по формуле

$$(\overline{x}_j - \overline{x}_{j^*}) \pm {}_{1-\alpha}q_{k,k(n-1)}\sqrt{CCK_B/n},$$

где ${}_{1-\alpha}q_{k,k(n-1)}$ — критическое значение стьюдентизированного размаха с $k$ и $k(n-1)$ степенями свободы и уровнем значимости $\alpha$.

*ПРИМЕР 46.4.* Пусть в результате эксперимента получены значения

$$\overline{x}_1 = 22{,}6; \quad \overline{x}_2 = 23{,}4; \quad \overline{x}_3 = 28{,}5; \quad n = 11; \quad CCK_B = 4{,}1.$$

Имеем $\overline{x}_1-\overline{x}_2 = -0{,}8$; $\overline{x}_1-\overline{x}_3 = -5{,}9$; $\overline{x}_2-\overline{x}_3 = -5{,}1$. Эти разности, деленные на $\sqrt{4{,}1/11} = 0{,}61$, дают $-1{,}311$, $-9{,}672$, $-8{,}361$. Табличное значение $q_{3,30}$ для $\alpha = 0{,}05$ равно $3{,}49$. Следовательно, можно сделать вывод о том, что первое и второе средние незначимо отличаются друг от друга, а третье среднее отличается и от первого и от второго. Доверительные интервалы будут выглядеть так: $(-2{,}93;\ 1{,}33)$; $(-8{,}03;\ -3{,}77)$; $(-7{,}23;\ -2{,}97)$.

Как указывалось уже в конце параграфа § 46.2, дисперсионный анализ и множественное сравнение средних могут быть проведены и для значительно более сложных схем. Последовательность проверки нулевых гипотез, которых может быть достаточно много, сохраняется та же, что и в случае простого однофакторного эксперимента. Сохраняется и способ построения доверительных интервалов.

## Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте в содержательных понятиях задачи из области специализации, при решении которых целесообразно воспользоваться обеими моделями дисперсионного анализа.
2. Докажите основное тождество дисперсионного анализа.
3. В чем состоят отличия 1-й и 2-й моделей дисперсионного анализа?
4. С какой целью разработаны методы множественного сравнения средних?
5. Что такое степень свободы и как оцениваются числа степеней свободы для внутри- и межгрупповых сумм квадратов?
6. Перечислите основные предпосылки дисперсионного анализа и укажите, как их нарушения влияют на окончательные результаты.

## Упражнения и задачи

1. С целью сравнения отражательных способностей четырех видов краски был проведен эксперимент, по окончании которого случайным образом отобрали по несколько образцов для каждого из видов краски и провели соответствующие измерения. Результаты в условных единицах приведены в табл. 46.4.

*Таблица 46.4.*

| Краска | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 195 | 45 | 230 | 110 |
| 150 | 40 | 115 | 55 |
| 205 | 195 | 235 | 120 |
| 120 | 65 | 225 | 50 |
| 160 | 145 | | 80 |
| | 195 | | |

   а) Построить таблицу дисперсионного анализа;
   б) определить, существуют ли различия между дисперсиями для различных красок
   в) определить 95%-ный доверительный интервал для среднего значения отражательной способности краски 1.
2. Астроному важно знать истинную яркость звезды. Вследствие поглощения звездного света межзвездной пылью истинную яркость нельзя определить без поправки на поглощение. В таблице 46.5 приводятся данные об измерении коэффициента поглощения для 21 звезды. Каждая звезда была выбрана случайным образом в одном из четырех интервалов значений галактической долготы.
   а) Построить таблицу дисперсионного анализа и проверить с уровнем значимости 0,01 гипотезу о том, что поправка на поглощение не зависит от галактической долготы;

*Таблица 46.5.*

| Интервал значений долготы, град | | | |
|---|---|---|---|
| 43–45 | 45–47 | 100–102 | 102–104 |
| 0,757 | 0,744 | 0,655 | 0,750 |
| 0,793 | 0,811 | 0,679 | 0,741 |
| 0,681 | 0,833 | 0,681 | 0,717 |
| 0,791 | 0,826 | 0,762 | 0,706 |
| 0,852 | 0,752 | | 0,736 |
| 0,852 | | | |
| 0,841 | | | |

б) провести множественное сравнение средних;

в) сравнить средние значения первых двух интервалов со средними значениями двух последних интервалов для определения значимости различий коэффициентов поглощения;

г) как соотносятся между собой результаты, полученные в п. б и в.

3. Для оценки качества кормовой патоки, производимой на трех разных заводах (А, Б, В), измерялся показатель количества твердого вещества. В таблице приведены значения этого показателя для 8 выбранных случайно партий патоки для каждого из заводов.

| А | Б | В |
|---|---|---|
| 81,6 | 81,8 | 82,1 |
| 81,3 | 84,7 | 79,6 |
| 82,0 | 82,0 | 83,1 |
| 79,6 | 85,6 | 80,7 |
| 78,4 | 79,9 | 81,8 |
| 81,8 | 83,2 | 79,9 |
| 80,2 | 84,1 | 82,6 |
| 80,7 | 85,0 | 81,9 |

а) Найти оценки дисперсии измеренного показателя для каждого завода;

б) провести дисперсионный анализ, в ходе которого проверить гипотезу о равенстве показателя количества твердого вещества в кормовой патоке для всех трех заводов;

в) построить совместные доверительные интервалы для средних значений измеренного показателя по всем трем заводам.

4. В приведенной ниже таблице приведены два последних десятичных знака, полученные в эксперименте по определению гравитационной константы (например, табличное значение 67 соответствует наблюденному значению 6,667). Эксперимент ставился с шарами из золота, платины и стекла.

| золото | платина | стекло |
|---|---|---|
| 83 | 61 | 78 |
| 81 | 61 | 71 |
| 76 | 67 | 75 |
| 78 | 67 | 72 |
| 79 | 64 | 74 |

а) Провести дисперсионный анализ и проверить гипотезу с уровнем значимости 0,01 о независимости результатов экспериментов от материала, из которого сделан испытательный шар;

б) определить, какие средние значимо отличаются друг от друга.

5. Для проб бензина одной марки, отобранных в случайном порядке на четырех нефтеперерабатывающих заводах (А, Б, В, Г), получены значения октанового числа, приведенные в таблице 46.6:

*Таблица 46.6.*

| А | Б | В | Г | А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 84,0 | 82,4 | 83,2 | 80,2 | 84,0 | 83,1 | 83,3 | 86,7 |
| 83,5 | 82,4 | 82,8 | 82,9 | 84,2 | 82,5 | 83,8 | 82,6 |
| 84,0 | 83,4 | 83,4 | 84,6 | 82,2 | | 85,1 | 82,4 |
| 85,0 | 83,3 | 80,2 | 84,2 | 83,6 | | 83,1 | 83,4 |
| 83,1 | 83,1 | 82,7 | 82,8 | 84,9 | | 84,2 | 82,7 |
| 83,5 | 83,3 | 83,0 | 83,0 | | | 80,6 | 82,9 |
| 81,7 | 82,4 | 85,0 | 82,9 | | | 82,3 | 83,7 |
| 85,4 | 83,3 | 83,0 | 83,4 | | | | 81,5 |
| 84,1 | 82,6 | 85,0 | 83,1 | | | | 81,9 |
| 83,0 | 82,0 | 83,7 | 83,5 | | | | 81,7 |
| 85,8 | 83,2 | 83,6 | 83,6 | | | | 82,5 |

а) провести дисперсионный анализ для проверки нулевой гипотезы, согласно которой октановое число одно и то же для всех четырех заводов (уровень значимости 0,05);

б) построить 95%-ные доверительные пределы для оценки значимости различий выборочных средних октанового числа для всех заводов одновременно.

# XLVII

# ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ

В окружающей нас внешней среде имеется огромное количество явлений и объектов, изменяющихся во времени и (или) в пространстве, и любой набор набор данных, состоящий из упорядоченных по этим координатам измерений, может рассматриваться как динамический ряд.

В качестве примеров можно указать на ежечасные или ежесуточные изменения температуры окружающей среды, ежемесячное число рождений в колонии лабораторных животных, выход во времени продуктов некоторой химической реакции, изменения длины крыла у некоторых видов птиц для последовательных значений географической широты местообитания и т. д. В каждом из этих случаев определяется последовательность чисел, связанная с временным или пространственным параметром. Приведенные примеры представляют собой образцы дискретных рядов, т. е. измерения при их формировании выполняются в определенные моменты времени или в фиксированных точках пространства. С другой стороны, кривая, зарегистрированная при спектрофотометрировании снимка участка лесной растительности, полученного с помощью аэрофотосъемки, или запись электрической активности мозга представляют собой примеры непрерывных динамических рядов.

Характерной особенностью динамических рядов — дискретных и непрерывных — является то, что существенная информация заложена не только в численных значениях измеряемых признаков, но и в порядке их следования.

Анализ динамических рядов, как и статистический анализ вообще, направлен на изучение тех причинных механизмов, которые обуславливают появление этих рядов, поэтому после того, как данные получены, возникает необходимость подготовить их к обработке и извлечь всю полезную информацию.

Большую роль при этом играет визуальный анализ графиков динамических рядов. Конечно, выводы, полученные при визуальном анализе, являются предварительными и не имеют количественного характера, тем не менее они позволяют оценить в общих чертах характерные особенности изучаемого динамического ряда и выбрать наиболее подходящие методы строгого количественного анализа.

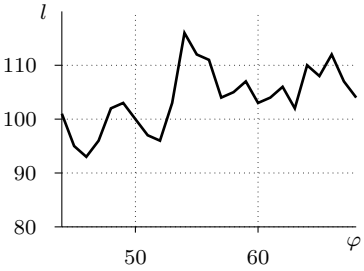


*Рис. 47.1.*

На рис. 47.1 и 47.2 представлены соответственно графики изменения длины крыла жаворонка ($l$) по мере увеличения географической широты местообитания

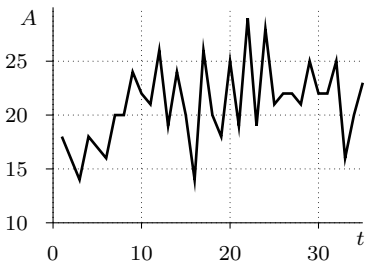


*Рис. 47.2.*

($\varphi$) и временной ($t$) динамики амплитуды ($A$) биоэлектрической активности левого затылочного отведения мозга бодрствующего человека.

Из рис. 47.1 видно, что существует определенная тенденция к увеличению длины крыла по мере продвижения к северным границам ареала. Однако эта направленность маскируется нерегулярными циклическими колебаниями. С другой стороны, рис. 47.2 явно указывает на присутствие в исследуемом ряду довольно регулярных колебаний и практическое отсутствие временной направленности (тренда).

Общепринято считать, что типичные динамические ряды могут складываться из трех составляющих.

1. Направленность (тренд) — постепенное изменение за длительное время или на больших расстояниях.
2. Колебательная компонента — нерегулярные волнообразные изменения относительно тренда.
3. Случайная компонента.

Иногда при анализе временных рядов специально выделяют так называемую сезонную компоненту — колебательные изменения, связанные с воздействием на систему внешнего механизма, отражающего строго периодические процессы в природе, такие, например, как времена года, изменения температуры в течение дня и т. д.

Анализ динамических рядов фактически сводится к разложению данных на указанные выше компоненты и их дальнейшее изучение. При этом, однако, следует помнить, что из возможности представления динамических рядов в виде нескольких компонент совсем не следует, что каждой из них соответствует независимо действующая причина, хотя в некоторых случаях это может быть именно так.

## § 47.1. ОБНАРУЖЕНИЕ И ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА

Прежде всего следует отметить, что введенное понятие тренда (направленности) довольно относительно, так как то, что с одной точки зрения, т. е. в рамках одного масштаба, является длительным, с другой таковым не является. Например, если характер изменения биоэлектрической активности мозга животных или человека исследуется для интервалов времени, равных нескольким десяткам секунд, то медленные изменения, вызванные минутными ритмами, могут рассматриваться как тренд. Но если мы располагаем данными регистрации этой же активности в течение суток, то окажется, что то, что воспринималось как тренд, на самом деле оказывается лишь частью некоторого медленного колебательного процесса. Поэтому если интервал регистрации в несколько десятков секунд относился, например, к процессу решения какой-то задачи, делать вывод о том, что амплитуда электроэнцефалограммы нарастает или падает в зависимости от того, будет ли тренд иметь положительный или отрицательный наклон, неправомерен. Об этой относительности понятия тренда следует помнить всегда, когда дается содержательная интерпретация получаемым результатам.

Существуют различные виды направленности, такие, например, как тренд среднего, тренд дисперсии и т. д. Здесь будет рассмотрен, как наиболее часто встречающийся, тренд среднего.

Как правило, имея графическое представление динамического ряда, визуально можно определить, имеет ли место тренд среднего. Однако в некоторых случаях сделать это,

не имея соответствующих навыков, довольно сложно. С другой стороны, непрерывно увеличивается число исследований и наблюдений, когда экспериментальные данные непосредственно вводятся в вычислительную машину, поэтому первым этапом анализа динамических рядов является проверка гипотезы о случайности получаемых значений. В главе 45 были рассмотрены некоторые критерии случайности, которые могут быть использованы для проверки интересующей нас гипотезы. Здесь же мы покажем, как можно использовать для этой цели ранговый коэффициент корреляции Спирмена.

Данные табл. 47.1 соответствуют графическому изображению на рис. 47.1.

*Таблица 47.1.*

| **Широта $\varphi$, град** | $R_1$ | **Длина крыла $l$, мм** | $R_2$ | **Широта $\varphi$, град** | $R_1$ | **Длина крыла $l$,мм** | $R_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 1 | 97 | 26,5 | 52 | 20 | 96 | 28,5 |
| 34 | 2 | 99 | 23 | 53 | 21 | 103 | 16 |
| 35 | 3 | 98 | 24,5 | 54 | 22 | 116 | 1 |
| 36 | 4 | 88 | 33,5 | 55 | 23 | 112 | 2 |
| 37 | 5 | 100 | 21,5 | 56 | 24 | 111 | 4 |
| 38 | 6 | 98 | 24,5 | 57 | 25 | 104 | 13 |
| 39 | 7 | 87 | 35 | 58 | 26 | 105 | 10,5 |
| 40 | 8 | 88 | 33,5 | 59 | 27 | 107 | 7,5 |
| 41 | 9 | 86 | 36 | 60 | 28 | 103 | 16 |
| 42 | 10 | 84 | 37 | 61 | 29 | 104 | 13 |
| 43 | 11 | 95 | 30,5 | 62 | 30 | 106 | 9 |
| 44 | 12 | 101 | 20 | 63 | 31 | 102 | 18,5 |
| 45 | 13 | 95 | 30,5 | 64 | 32 | 110 | 5 |
| 46 | 14 | 93 | 32 | 65 | 33 | 108 | 6 |
| 47 | 15 | 96 | 28,5 | 66 | 34 | 112 | 3 |
| 48 | 16 | 102 | 18,5 | 67 | 35 | 107 | 7,5 |
| 49 | 17 | 103 | 16 | 68 | 36 | 104 | 13 |
| 50 | 18 | 100 | 21,5 | 69 | 37 | 105 | 10,5 |
| 51 | 19 | 97 | 26,5 | | | | |

Ранги для широты представляют собой натуральный ряд чисел, отражающий естественную последовательность пунктов наблюдения. Ранжирование данных о длине крыла проведено по обычным правилам.

Используя формулу коэффициента корреляции Спирмена, имеем

$$r_s = 1 - 6\sum_{i=1}^{37} \frac{d_i^2}{n^3 - n} = 1 - 1{,}83 = -0{,}83.$$

Известно, что для $n > 10$ проверка нулевой гипотезы о коэффициенте ранговой корреляции Спирмена может быть осуществлена с помощью статистики

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{(1 - r_s^2)/(n-2)}},$$

имеющей, при справедливости нулевой гипотезы, распределение Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы. В нашем случае

$$t = \frac{-0{,}83}{\sqrt{\left(1 - (-0{,}83)^2\right)/(37-2)}} = -8{,}8.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и 35 степеней свободы табличное (теоретическое) значение равно 2,73, что по модулю меньше, чем полученное эмпирически (расчетное). Поэтому нулевая гипотеза отвергается, и мы должны сделать вывод о том, что

приведенный ряд не представляет собой набор случайных значений и, вероятно, имеет тренд среднего.

Установив визуально или с помощью расчетов факт наличия тренда среднего, необходимо попытаться выделить (элиминировать) его. Для этого существуют различные методы, такие как подбор соответствующей функциональной зависимости, использование скользящих средних и т. д.

Наиболее эффективным методом описания тренда является подбор некоторого аналитического выражения, как правило полинома невысокой степени. Такой подбор осуществляется с использованием метода наименьших квадратов по правилам, описанным в главе 43.

Для данных, представленных на рис. 47.1 и в табл. 47.1, запишем уравнения тренда в виде

$$y_1 = a_1 + b_1 x,$$
$$y_2 = a_2 + b_2 x + c x^2.$$

По методу наименьших квадратов имеем

$$\begin{cases} 37\ a_1 + 1887\ b_1 = 3\,722 \\ 1887\ a_1 + 100\,455\ b_1 = 191\,922 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 37\ a_2 + 1887\ b_2 + 100\,455\ c = 3\,722 \\ 1887\ a_2 + 100\,455\ b_2 + 5\,553\,441\ c = 191\,922 \\ 100\,455\ a_2 + 5\,553\,441\ b_2 + 317\,003\,190\ c = 10\,319\,070 \end{cases}.$$

Решив эти системы уравнений, получим $a_1 = 75{,}2$; $a_2 = 0{,}5$; $b_2 = -1{,}82$; $c = 0{,}022$.

В таблице 47.2 приведены отклонения значений, вычисленных по уравнениям $y_1 = 75{,}2 + 0{,}5x$ и $y_2 = 132{,}3 - 1{,}82x + 0{,}022x^2$ от опытных данных.

*Таблица 47.2.*

| $i$ | $y_i - \beta_{i1}$ | $y_i - \beta_{i2}$ | $i$ | $y_i - \beta_{i1}$ | $y_i - \beta_{i2}$ | $i$ | $y_i - \beta_{i1}$ | $y_i - \beta_{i2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,3 | 0,8 | 14 | −5,2 | −1,9 | 27 | 2,3 | 5,5 |
| 2 | 6,8 | 3,1 | 15 | −2,7 | 0,6 | 28 | −2,2 | 0,7 |
| 3 | 5,3 | 2,4 | 16 | 2,8 | 6,4 | 29 | −1,7 | 0,8 |
| 4 | −5,2 | −7,3 | 17 | 3,3 | 7,1 | 30 | −0,2 | 1,9 |
| 5 | 6,3 | 4,9 | 18 | −0,2 | 3,7 | 31 | −4,7 | 3,0 |
| 6 | 3,8 | 3,1 | 19 | −3,7 | 0,3 | 32 | 3,8 | 4,1 |
| 7 | −7,7 | −7,8 | 20 | −5,2 | −1,1 | 33 | 0,3 | 1,0 |
| 8 | −7,2 | −6,7 | 21 | 1,3 | 5,4 | 34 | 3,8 | 3,9 |
| 9 | −9,7 | −8,7 | 22 | 13,8 | 17,8 | 35 | −1,7 | −2,1 |
| 10 | −12,2 | −10,7 | 23 | 9,3 | 13,2 | 36 | −5,2 | −6,3 |
| 11 | −1,7 | 0,3 | 24 | 7,8 | 11,6 | 37 | −4,7 | −6,5 |
| 12 | 3,8 | 6,2 | 25 | 0,3 | 9,0 | | | |
| 13 | −2,7 | 0,0 | 26 | 0,8 | 4,3 | | | |

Из этих значений видно, что, в принципе, для описания тренда подходят оба уравнения. Однако нужно иметь точный количественный метод для строгой проверки того, какое из пары уравнений лучше подходит для описания тренда. Естественно, что лучшим является то уравнение, которое дает меньшую сумму квадратов отклонений от экспериментальных данных. Однако выбор в качестве уравнения тренда, например, полинома более высокого порядка будет оправдан только в том случае, если получаемое при его использовании уменьшение суммы квадратов отклонение от опытных данных будет статистически значимо. Таким образом, мы приходим к задаче сравнения двух уравнений регрессии. Ее можно решать, используя методы дисперсионного анализа, обсуждавшиеся в предыдущей главе. Здесь же мы приведем сравнительно простой критерий, предложенный Е. Уильямсом и Н. Клутом.

Если есть два уравнения регрессии (линейных или нелинейных), то нулевая гипотеза состоит в том, что они одинаково хорошо способны предсказывать значения зависимой переменной $y$. Проверка осуществляется путем оценивания углового коэффициента $\lambda$ в соотношении

$$z \equiv \left( y - \frac{1}{2}(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) \right) = \lambda(\hat{y}_1 - \hat{y}_2). \qquad (47.1)$$

Было показано, что если более подходящей моделью является модель $\hat{y}_1$, то $\lambda$ имеет значимое отрицательное значение. И аналогично, если более корректна модель $\hat{y}_2$, то должны получаться значимые положительные значения для $\lambda$. Если же $\lambda$ незначимо отличается от нуля, никакого выбора между $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$ сделать нельзя, и здесь вступают в силу нестатистические соображения о том, какую модель выбрать для описания тренда.

Угловой коэффициент $\lambda$ — это не что иное, как коэффициент уравнения, описывающего зависимость $z$ от $(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$, проходящую через начало координат.

В табл. 47.3 приведены все необходимые промежуточные данные для определения этого коэффициента.

*Таблица 47.3.*

| $y$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_2 - \beta_1$ | $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ | $z = y - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ | $y$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_2 - \beta_1$ | $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ | $z = y - \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 97 | 91,7 | 96,2 | 4,5 | 93,95 | 3,05 | 96 | 101,2 | 97,1 | −4,1 | 99,15 | −3,15 |
| 99 | 92,2 | 95,9 | 3,7 | 94,05 | 4,95 | 103 | 101,7 | 97,6 | −4,1 | 99,65 | 3,35 |
| 98 | 92,7 | 95,6 | 2,9 | 94,15 | 3,85 | 116 | 102,2 | 98,2 | −4,0 | 100,20 | 15,80 |
| 88 | 93,2 | 95,3 | 2,1 | 94,25 | −6,25 | 112 | 102,7 | 98,8 | −3,9 | 100,75 | 11,25 |
| 100 | 93,7 | 95,1 | 1,4 | 94,40 | 5,60 | 111 | 103,2 | 99,4 | −3,8 | 101,30 | 9,70 |
| 98 | 94,2 | 94,9 | 0,7 | 94,55 | 3,45 | 104 | 103,7 | 100,0 | −3,7 | 101,85 | 2,15 |
| 87 | 94,7 | 94,8 | 0,1 | 94,75 | −7,75 | 105 | 104,2 | 100,7 | −3,5 | 102,45 | 2,55 |
| 88 | 95,2 | 94,7 | −0,5 | 94,95 | −6,95 | 107 | 104,7 | 101,5 | −3,2 | 103,10 | 3,90 |
| 86 | 95,7 | 94,7 | −1,0 | 95,20 | 9,20 | 103 | 105,2 | 102,3 | −2,9 | 103,75 | −0,75 |
| 84 | 96,2 | 94,7 | −1,5 | 95,45 | −11,45 | 104 | 105,7 | 103,2 | −2,5 | 104,45 | −0,45 |
| 95 | 96,7 | 94,7 | −2,0 | 95,70 | −0,7 | 106 | 106,2 | 104,1 | −2,1 | 105,15 | 0,85 |
| 101 | 97,2 | 94,8 | −2,4 | 96,00 | 5,00 | 102 | 106,7 | 105,0 | −1,7 | 105,85 | −3,85 |
| 95 | 97,7 | 95,0 | −2,7 | 96,30 | −1,30 | 110 | 107,2 | 105,9 | −1,3 | 106,55 | 3,45 |
| 93 | 98,2 | 94,9 | −3,3 | 96,80 | −3,80 | 108 | 107,7 | 107,0 | −0,7 | 107,35 | 0,65 |
| 96 | 98,7 | 95,4 | −3,3 | 97,15 | −1,15 | 112 | 108,2 | 108,1 | −0,1 | 108,15 | 3,85 |
| 102 | 99,2 | 95,6 | −3,6 | 97,40 | 4,60 | 107 | 108,7 | 109,1 | 0,4 | 108,90 | −1,90 |
| 103 | 99,7 | 95,9 | −3,8 | 97,80 | 5,20 | 104 | 109,2 | 110,3 | 1,1 | 109,75 | −5,75 |
| 100 | 100,2 | 96,3 | −3,9 | 98,25 | −1,75 | 105 | 109,7 | 111,5 | 1,8 | 110,60 | −5,60 |
| 97 | 100,7 | 96,7 | −4,0 | 98,70 | −1,70 | | | | | | |

Используя $z$ в качестве зависимой, а $(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$ в качестве независимой переменной, найдем, что $\lambda = -0{,}44$. Дисперсия этого коэффициента равна $0{,}111$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и $34$ степеней свободы $t = 2{,}03$, так что доверительный интервал для $\lambda$ равен $-1{,}118 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}238$. Таким образом, доверительный интервал для $\lambda$ накрывает нуль, и, следовательно, можно сделать вывод, что ни одна модель не лучше другой.

Рассмотрев пример, обсудим некоторые общие вопросы выбора уравнений для тренда. Иногда считают, что аналитическое описание тренда связано с некоторым «законом» развития изучаемого процесса в пространстве или во времени. Такой взгляд оправдан только в том случае, когда «закон» расценивается не более чем проявление некоторой тенденции, а его аналитическое описание — просто как способ наглядного изображения изучаемого отрезка динамического ряда. Поэтому, как правило, представление о том, что уравнения тренда это нечто большее, чем просто описание эмпирических данных, не является очевидным. Кроме этого, следует иметь в виду, что для одного и того же динамического ряда могут быть подобраны самые разные

уравнения тренда, одинаково хорошо соответствующие имеющимся данным. Поэтому выбор подходящей кривой должен осуществляться с использованием нестатистической информации о сущности исследуемого ряда, которая в некоторых случаях позволяет выбрать из множества возможных кривых для описания тренда какую-то одну. В противном случае, когда эта информация отсутствует, подбор уравнения тренда осуществляется по тем же правилам, которые мы рассматривали ранее, обсуждая вопросы построения функциональных зависимостей.

Может оказаться, что, подбирая аналитическое выражение для описания тренда, мы столкнемся с ситуацией, когда для приемлемого согласия с эмпирическими данными придется остановиться на такой зависимости, которая имеет очень сложный вид, например, полином высокой степени. Как правило, такая ситуация свидетельствует о том, что весь наблюдаемый ряд состоит из нескольких частей. Поэтому используя априорную информацию и проведя визуальный анализ, необходимо определить эти части и уравнения тренда находить для каждой из них. Описание тренда должно быть по возможности простым, т. е. включать в себя минимальное число параметров. В частности, при использовании полиномов оно не должно быть, как правило, выше второго порядка. В этом случае есть надежда дать содержательную трактовку получаемым уравнениям. Естественно, что простота описания не должна идти в ущерб статистически значимому соответствию эмпирическим данным.

## § 47.2. ОБНАРУЖЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКОГО РЯДА

Обнаружение и выделение тренда является первым этапом при анализе динамических рядов. Описав его соответствующим регрессионным уравнением, находят величины $y_i$ для каждого момента времени или пространственной координаты по этому уравнению и вычитают их из исходных эмпирических данных. На рис. 47.3 приведены в качестве примера значения, полученные после вычленения тренда из исходных данных табл. 47.1.

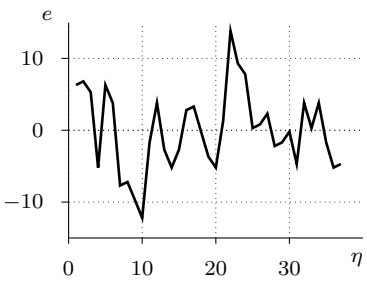


*Рис. 47.3.*

Как правило, получаемые после элиминирования тренда ряды имеют нерегулярный волнообразный характер. Однако прежде чем пытаться обнаружить в этих рядах колебательные составляющие, необходимо убедиться в том, что они представляют собой неслучайные совокупности данных. Часто на практике такие ряды представляют собой только тенденцию, с наложенными на нее случайными возмущениями. В этом случае после выделения тренда останется случайная составляющая, для которой бывает необходимым оценить только дисперсию. С другой стороны, очень часто динамические ряды включают в себя все три компоненты, так что после элиминирования тренда необходимо провести анализ колебательной компоненты и в последнюю очередь — случайной.

Итак, мы сталкиваемся с задачей обнаружения взаимозависимости между значениями анализируемого ряда. Кстати, такая же задача стоит и при построении уравнений регрессии, когда проверка коррелированности остатков является необходимой для проверки адекватности выбранного уравнения и обоснованности использования метода наименьших квадратов для оценки параметров.

Наиболее распространенным критерием для проверки коррелированности является критерий, предложенный Дж. Дарбином и Г. Уотсоном. Статистика критерия очень проста:

$$D = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}, \tag{47.2}$$

где $e_i$ — остаток $y_i - \hat{y}_i$, $e_i - e_{i-1}$ — разность последовательных остатков.

В отличие от других методов статистической проверки гипотез, рассматривавшихся ранее, при употреблении статистики $D$ критические границы принятия нулевой гипотезы и непринятия альтернативной гипотезы не совпадают между собой (рис. 47.4).

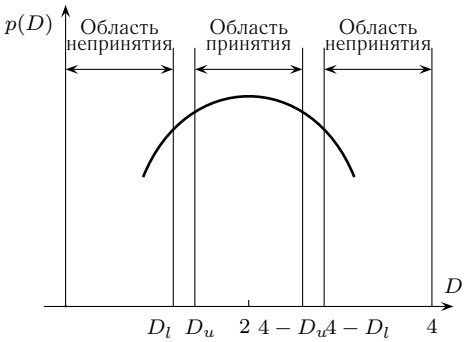



*Рис. 47.4.*

*ПРИМЕР 47.1.* Найдем статистику $D$ по данным, приведенным в табл. 47.2, считая, что в качестве уравнения тренда выбрана прямая. Необходимые промежуточные вычисления приведены в табл. 47.4.

Имеем

$$D = \frac{1089}{1117} = 0{,}975.$$

Из таблицы 12 Приложения для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ имеем $K = 1$, $D_l = 1{,}40$, $D_u = 1{,}52$. Следовательно, нулевая гипотеза должна быть отвергнута, и делается вывод о том, что полученные после элиминирования тренда значения коррелированны между собой.

*Таблица 47.4.*

| $e_i$ | $e_i^2$ | $e_{i-1}$ | $e_i - e_{i-1}$ | $(e_i - e_{i-1})^2$ | $e_i$ | $e_i^2$ | $e_{i-1}$ | $e_i - e_{i-1}$ | $(e_i - e_{i-1})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,3 | 39,69 | | | | −5,2 | 27,04 | −3,7 | 1,5 | 2,25 |
| 6,8 | 46,24 | 6,3 | 0,5 | 0,25 | 1,3 | 1,69 | −5,2 | 6,5 | 42,25 |
| 5,3 | 28,09 | 6,8 | −1,5 | 2,25 | 13,8 | 190,44 | 1,3 | 12,5 | 156,25 |
| −5,2 | 27,04 | 5,3 | −10,5 | 110,25 | 9,3 | 86,49 | 13,8 | −4,5 | 20,25 |
| 6,3 | 39,69 | −5,2 | 11,5 | 132,25 | 7,8 | 60,84 | 9,3 | −1,5 | 2,25 |
| 3,8 | 14,44 | 6,3 | −2,5 | 6,25 | 0,3 | 0,09 | 7,8 | −7,5 | 56,25 |
| −7,7 | 59,29 | 3,8 | −11,5 | 132,25 | 0,8 | 0,64 | 0,3 | 0,5 | 0,25 |
| −7,2 | 51,84 | −7,7 | 0,5 | 0,25 | 2,3 | 5,29 | 0,8 | 1,5 | 2,25 |
| −9,7 | 94,09 | −7,2 | −2,5 | 6,25 | −2,2 | 4,84 | 2,3 | −4,5 | 20,25 |
| −12,2 | 148,84 | −9,7 | −2,5 | 6,25 | −1,7 | 2,89 | −2,2 | 0,5 | 0,25 |
| −1,7 | 2,89 | −12,2 | 10,5 | 110,25 | −0,2 | 0,04 | −1,7 | 1,5 | 2,25 |
| 3,8 | 14,44 | −1,7 | 5,5 | 30,25 | −4,7 | 22,09 | −0,2 | −4,5 | 20,25 |
| −2,7 | 7,29 | 3,8 | −6,5 | 42,25 | 2,8 | 7,84 | −4,7 | 7,5 | 56,25 |
| −5,2 | 27,04 | −2,7 | −2,5 | 6,25 | 0,3 | 0,09 | 2,8 | −2,5 | 6,25 |
| −2,7 | 7,29 | −5,2 | 2,5 | 6,25 | 3,8 | 14,44 | 0,3 | 3,5 | 12,25 |
| 2,8 | 7,84 | −2,7 | 5,5 | 30,25 | −1,7 | 2,89 | 3,8 | −5,5 | 30,25 |
| 3,3 | 10,89 | 2,8 | 0,5 | 0,25 | −5,2 | 27,04 | −1,7 | −3,5 | 12,25 |
| −0,2 | 0,04 | 3,3 | −3,5 | 12,25 | −4,7 | 22,09 | −5,2 | 0,5 | 0,25 |
| −3,7 | 13,69 | −0,2 | −3,5 | 12,25 | | | | | |

После того как мы убедились в том, что вновь полученный ряд не является набором независимых случайных величин, нужно определить периоды колебаний, наиболее характерные для анализируемого ряда. Существует очень большое число методов, с помощью которых решается задача выделения гармонических составляющих.

Как правило, алгоритмы имеются в виде программ для вычислительных машин. Здесь же мы приведем наиболее простой и исторически первый способ выделения скрытых периодичностей, предложенный еще в середине XVIII века французским математиком О. Бюй-Балло. Способ настолько прост и прозрачен, что любой из читателей, воспроизведя его сначала вручную, сможет составить самостоятельно небольшую программу для ЭВМ, позволяющую автоматизировать расчеты.

Вычислительная схема Бюй-Балло состоит в следующем. Весь интервал наблюдаемого процесса $x(t)$, заданного в виде непрерывной кривой или таблицы значений, разбивается на отрезки длиной $T$ и вычисляется среднее арифметическое значение функций на всех отрезках. Всего отрезков длиной $T$ берется $r$. Их должно быть достаточно много ($r > > 15$). Если $r$ нечетно, т. е. $r = 2k + 1$, то выбрав начало отсчета в точке $kT$, можно преобразование по схеме Бюй-Балло представить в следующем виде:

$$x^{(l)}(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{l=-k}^{k} x(t + lT). \tag{47.3}$$

Это преобразование обладает селективными свойствами, т. е. выделяет периодическую функцию с периодом, равным пробному периоду $T$. При этом эффективность селекции увеличивается пропорционально увеличению отношения длины анализируемого участка к пробному периоду.

Для лучшего уяснения природы селективного действия преобразования Бюй-Балло представим себе, что есть синусоида с определенным периодом. Пусть пробный период в точности равен периоду синусоиды. Тогда используя формулу (47.3), для каждого момента времени $t$ будут суммироваться равные значения, относящиеся к разным участкам длиной $T$. Например, если начать с максимума положительной полуволны, то будут складываться все максимумы, так как они отстоят друг от друга на $T$. Совершенно аналогично будет выглядеть процедура для максимумов отрицательной полуволны и для всех других точек. Другими словами, преобразование Бюй-Балло для синусоиды при использовании пробного периода, равного периоду гармоники, никак не изменит значения ее амплитуд.

В том случае, когда пробный период $T$ не равен периоду синусоиды, будут складываться неравные между собой значения, т. е. большие и меньшие, положительные и отрицательные, так что результирующая кривая будет существенно сглажена.

Зависимость наибольших отклонений $d = x^{(l)}_{\max} - x^{(l)}_{\min}$ от пробных периодов носит название периодограммы, а ее пики соответствуют возможным значениям периодов колебательных составляющих анализируемого динамического ряда.

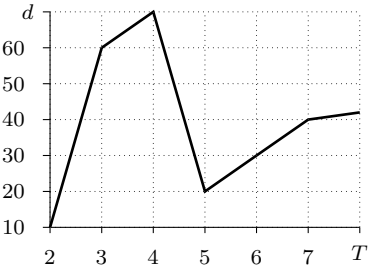


*Рис. 47.5.*

● *ПРИМЕР 47.2.* В табл. 47.5 приведены все значения ряда амплитуд одного из отведений электроэнцефалограммы человека, часть из которых была использована для построения рис. 47.2.

Последовательные значения отстоят друг от друга на 33 мс. Этот ряд выбран специально для иллюстрации, так как мы заведомо знаем, что при заданных условиях регистрации в электроэнцефалограмме должен присутствовать $\alpha$-ритм, т. е. колебания с частотой от 8 до 12 Гц. Были использованы пробные периоды $T$, включавшие от двух до семи точек измерений. Шаг $\Delta T$ был

*Таблица 47.5.*

| $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ | $i$ | $x_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 33 | 16 | 65 | 21 | 97 | 20 | 129 | 20 | 161 | 17 |
| 2 | 16 | 34 | 20 | 66 | 23 | 98 | 16 | 130 | 21 | 162 | 20 |
| 3 | 14 | 35 | 23 | 67 | 22 | 99 | 20 | 131 | 17 | 163 | 22 |
| 4 | 18 | 36 | 20 | 68 | 21 | 100 | 24 | 132 | 17 | 164 | 20 |
| 5 | 17 | 37 | 17 | 69 | 22 | 101 | 20 | 133 | 16 | 165 | 16 |
| 6 | 16 | 38 | 23 | 70 | 17 | 102 | 16 | 134 | 15 | 166 | 20 |
| 7 | 20 | 39 | 20 | 71 | 22 | 103 | 26 | 135 | 17 | 167 | 16 |
| 8 | 20 | 40 | 18 | 72 | 20 | 104 | 28 | 136 | 14 | 168 | 20 |
| 9 | 24 | 41 | 26 | 73 | 16 | 105 | 21 | 137 | 17 | 169 | 23 |
| 10 | 22 | 42 | 20 | 74 | 20 | 106 | 24 | 138 | 18 | 170 | 20 |
| 11 | 21 | 43 | 16 | 75 | 24 | 107 | 22 | 139 | 17 | 171 | 18 |
| 12 | 26 | 44 | 20 | 76 | 17 | 108 | 20 | 140 | 21 | 172 | 25 |
| 13 | 19 | 45 | 23 | 77 | 20 | 109 | 22 | 141 | 20 | 173 | 10 |
| 14 | 24 | 46 | 20 | 78 | 24 | 110 | 24 | 142 | 16 | 174 | 17 |
| 15 | 20 | 47 | 16 | 79 | 18 | 111 | 18 | 143 | 20 | 175 | 26 |
| 16 | 14 | 48 | 20 | 80 | 24 | 112 | 24 | 144 | 26 | 176 | 20 |
| 17 | 26 | 49 | 24 | 81 | 21 | 113 | 20 | 145 | 17 | 177 | 13 |
| 18 | 20 | 50 | 17 | 82 | 21 | 114 | 16 | 146 | 20 | 178 | 25 |
| 19 | 18 | 51 | 24 | 83 | 24 | 115 | 20 | 147 | 24 | 179 | 20 |
| 20 | 25 | 52 | 20 | 84 | 26 | 116 | 26 | 148 | 20 | 180 | 18 |
| 21 | 19 | 53 | 24 | 85 | 20 | 117 | 16 | 149 | 18 | | |
| 22 | 29 | 54 | 26 | 86 | 27 | 118 | 20 | 150 | 21 | | |
| 23 | 19 | 55 | 20 | 87 | 20 | 119 | 28 | 151 | 21 | | |
| 24 | 28 | 56 | 18 | 88 | 17 | 120 | 16 | 152 | 22 | | |
| 25 | 21 | 57 | 28 | 89 | 22 | 121 | 20 | 153 | 22 | | |
| 26 | 22 | 58 | 24 | 90 | 28 | 122 | 26 | 154 | 17 | | |
| 27 | 22 | 59 | 20 | 91 | 14 | 123 | 17 | 155 | 23 | | |
| 28 | 21 | 60 | 23 | 92 | 20 | 124 | 26 | 156 | 25 | | |
| 29 | 25 | 61 | 20 | 93 | 26 | 125 | 22 | 157 | 17 | | |
| 30 | 22 | 62 | 18 | 94 | 16 | 126 | 24 | 158 | 24 | | |
| 31 | 22 | 63 | 22 | 95 | 14 | 127 | 23 | 159 | 18 | | |
| 32 | 25 | 64 | 21 | 96 | 24 | 128 | 22 | 160 | 22 | | |

выбран равным единице, и использовалось одно и то же число пробных периодов $r = 19$ независимо от их длины. Таким образом, часть значений временного ряда не использовалась. На рис. 47.5, 47.6 и в табл. 47.6 приведены результаты вычислений, а также периодограмма и график значений преобразованных функций для $T = 4$ и $T = 7$.

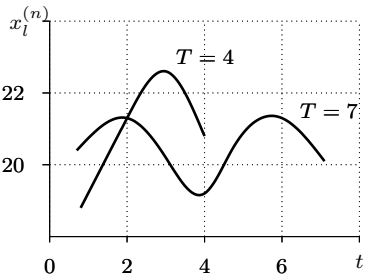



*Рис. 47.6.*

Из приведенных результатов видно, что в наблюдаемом ряду имеется максимум для пробного периода $T = 4$, у которого разность между максимальным и минимальным значениями (рис. 47.5) равна 3,5. Для $T = 3$ эта разность равна 3,2. Если привлечь те сведения, которыми мы располагаем о частотном диапазоне $\alpha$-ритма, то следует предположить, что реальный период колебаний находится где-то между $T = 3$ и $T = 4$. В данном

*Таблица 47.6.*

| Пробный период | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 22,6 | 21,6 | 19,1 | 20,3 | 19,9 | 20,8 |
| 22,0 | 19,7 | 21,4 | 21,0 | 20,0 | 21,5 |
| | 22,8 | 22,6 | 21,1 | 21,5 | 20,6 |
| | | 21,0 | 20,8 | 20,8 | 19,9 |
| | | | 20,8 | 21,3 | 20,9 |
| | | | | 20,8 | 21,5 |
| | | | | | 20,7 |

случае он не выявлен ввиду того, что интервал отсчета исходных данных не позволяет этого сделать. Экспериментальные данные включают в себя гармонику с частотой 10,1 Гц ($T = 3$), и 7,6 Гц ($T = 4$), а истинный максимум имеет, очевидно, частоту около 9 Гц.

Уже в этом простом примере мы сталкиваемся с некоторыми проблемами, характерными для анализа колебательных составляющих динамических рядов. Во-первых, это выбор шага квантования исходных данных, определяющий, какие частоты могут быть выделены. И, во-вторых, разрешающая способность того или иного метода выявления скрытых периодичностей, которая определяет минимальное расстояние между двумя пиками, на которое они могут быть отделены друг от друга.

Наконец, очень серьезную проблему представляет интерпретация выявляемых периодов, т. е. наличие гармоник с определенной частотой. Дело в том, что, как показал известный русский статистик Е. Е. Слуцкий, в некоторых случаях сложение достаточно большого числа случайных величин может привести к появлению в результирующем ряду почти гармонических составляющих, которые могут быть восприняты как колебания, имеющие в качестве первоосновы какой-то реально существующий фактор.

Для иллюстрации этого рассмотрим следующий пример.

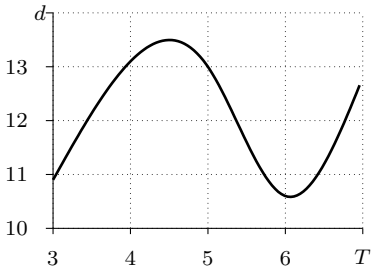


*Рис. 47.7.*

*ПРИМЕР 47.3.* Пусть имеется набор случайных величин, взятых из таблицы случайных чисел. Будем рассматривать его как динамический ряд и с помощью процедуры Бюй-Балло построим периодограмму для $T = 3, 4, 5, 6, 7$. Исходные данные и периодограмма представлены в табл. 47.7 и рис. 47.7.

Как получаются значения для периодограммы, покажем для пробного периода $T = 4$. Выберем общее число пробных периодов $r = 15$. В качестве нулевого периода возьмем значения с номерами 49, 50, 51 и 52. Таким образом, для определения преобразованных значений будем суммировать каждое из этих значений с семью другими, отстоящими друг от друга на $T = 4$ и расположенными выше и ниже от выбранного значения.

Имеем

$$x_{t=1}^{(4)} = \frac{1}{15}(87 + 75 + 46 + 37 + 36 + 24 + 15 + 48 + 45 + 46 + 72 + 17 + 28 + 8 + 66) = 43{,}3;$$

$$x_{t=2}^{(4)} = \frac{1}{15}(18 + 15 + 43 + 69 + 55 + 55 + 81 + 8 + 96 + 41 + 46 + 6 + 73 + 48 + 63) = 47{,}8;$$

$$x_{t=3}^{(4)} = \frac{1}{15}(12 + 56 + 22 + 67 + 20 + 67 + 77 + 60 + 9 + 72 + 67 + 59 + 12 + 52 + 53) = 47{,}0;$$

$$x_{t=4}^{(4)} = \frac{1}{15}(25 + 32 + 72 + 93 + 22 + 14 + 14 + 21 + 5 + 64 + 12 + 2 + 49 + 23 + 58) = 34{,}7.$$

Разность между максимальным и минимальным значениями $\Delta_4 = 47{,}8 - 34{,}7 = 13{,}1$ использована для построения периодограммы (рис. 47.7). Другие значения равны $\Delta_3 = 10{,}9$, $\Delta_5 = 13{,}0$, $\Delta_6 = 10{,}8$, $\Delta_7 = 12{,}6$. Как и следовало ожидать, резко выделяющихся пиков в периодограмме нет, и поэтому нет оснований предполагать существование какой-то скрытой периодичности.

*Таблица 47.7.*

| $i$ | $x_i$ | Скользящее среднее | $i$ | $x_i$ | Скользящее среднее | $i$ | $x_i$ | Скользящее среднее |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | | 35 | 55 | 45,0 | 69 | 49 | 34,9 |
| 2 | 62 | | 36 | 36 | 51,7 | 70 | 12 | 29,7 |
| 3 | 38 | | 37 | 93 | 53,9 | 71 | 73 | 29,4 |
| 4 | 72 | 51,1 | 38 | 67 | 61,3 | 72 | 28 | 40,7 |
| 5 | 92 | 50,3 | 39 | 69 | 56,6 | 73 | 23 | 34,9 |
| 6 | 3 | 45,7 | 40 | 37 | 57,6 | 74 | 52 | 41,4 |
| 7 | 76 | 51,0 | 41 | 72 | 50,9 | 75 | 48 | 38,1 |
| 8 | 9 | 51,7 | 42 | 22 | 45,9 | 76 | 8 | 43,6 |
| 9 | 30 | 50,0 | 43 | 43 | 44,0 | 77 | 58 | 49,7 |
| 10 | 75 | 50,1 | 44 | 46 | 40,9 | 78 | 53 | 44,1 |
| 11 | 77 | 42,3 | 45 | 32 | 41,3 | 79 | 63 | 38,3 |
| 12 | 80 | 49,1 | 46 | 56 | 41,7 | 80 | 66 | 37,7 |
| 13 | 4 | 54,0 | 47 | 15 | 37,3 | 81 | 13 | 36,3 |
| 14 | 24 | 55,1 | 48 | 75 | 33,3 | 82 | 7 | 38,9 |
| 15 | 54 | 42,7 | 49 | 25 | 41,1 | 83 | 4 | 35,4 |
| 16 | 67 | 42,6 | 50 | 12 | 33,9 | 84 | 48 | 27,0 |
| 17 | 60 | 45,7 | 51 | 18 | 33,0 | 85 | 71 | 31,7 |
| 18 | 10 | 45,3 | 52 | 87 | 36,0 | 86 | 39 | 44,4 |
| 19 | 79 | 46,1 | 53 | 5 | 38,9 | 87 | 7 | 43,9 |
| 20 | 26 | 37,7 | 54 | 9 | 46,3 | 88 | 46 | 45,6 |
| 21 | 21 | 36,0 | 55 | 96 | 54,0 | 89 | 96 | 47,7 |
| 22 | 60 | 36,6 | 56 | 45 | 47,4 | 90 | 40 | 53,4 |
| 23 | 8 | 36,3 | 57 | 64 | 53,3 | 91 | 20 | 54,0 |
| 24 | 48 | 44,1 | 58 | 72 | 53,7 | 92 | 86 | 59,0 |
| 25 | 14 | 43,3 | 59 | 41 | 49,6 | 93 | 79 | 55,9 |
| 26 | 77 | 36,7 | 60 | 46 | 49,7 | 94 | 11 | 51,7 |
| 27 | 81 | 45,1 | 61 | 12 | 50,9 | 95 | 81 | 48,9 |
| 28 | 15 | 46,1 | 62 | 67 | 40,9 | 96 | 74 | 39,1 |
| 29 | 14 | 47,7 | 63 | 46 | 43,4 | 97 | 11 | 33,1 |
| 30 | 67 | 39,7 | 64 | 72 | 37,7 | 98 | 15 | 33,9 |
| 31 | 55 | 31,0 | 65 | 2 | 38,4 | 99 | 23 | |
| 32 | 24 | 36,7 | 66 | 59 | 35,9 | 100 | 17 | |
| 33 | 22 | 39,9 | 67 | 6 | 31,0 | 101 | 16 | |
| 34 | 20 | 43,6 | 68 | 17 | 31,1 | | | |

Используем теперь прием, о котором уже упоминалось при обсуждении методов обнаружения и исключения тренда, а именно — скользящее усреднение. При этом выбирается число точек усреднения (в нашем случае мы выбрали 7), все значения в этих точках складываются и находится среднее арифметическое значение, которое приписывается срединной точке. Затем передвигаются на одну точку, и вся процедура повторяется. Показано, что такое сглаживание позволяет достаточно эффективно вычленить из анализируемого ряда тренд, причем используется скользящее среднее, длиной от 3 до 21 точки, как простое, так и взвешенное, когда отдельным значениям при усреднении по определенным правилам приписываются определенные веса.

Однако нас в этой процедуре будет интересовать другое. Так как исходный ряд представляет собой выборку из таблицы случайных чисел, то нахождение скользящего среднего, длиной 7, равносильно сложению семи случайных величин. Значения скользящих средних приведены в табл. 47.7.

Если теперь для этого нового ряда применить процедуру Бюй-Балло, то периодограмма будет иметь вид, представленный на рис. 47.8.

Здесь явно видны два пика для $T = 4$ и $T = 7$, и если не знать, каким образом был получен анализируемый ряд, то можно было бы сделать ложный

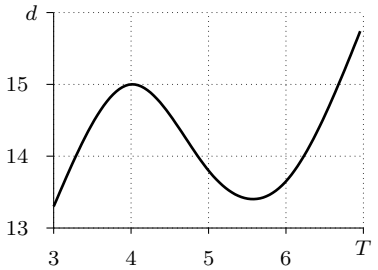



*Рис. 47.8.*

вывод о существовании каких-то факторов, приводящих к появлению колебаний с указанным периодом.

Отсюда следует, что гипотезы о существовании некоторых причин, вызывающих появление в динамическом ряду колебаний с определенным периодом, должны базироваться не только на формальных результатах анализа периодограмм, но и обязательно включать априорную информацию нестатистического характера.

## § 47.3. ДРУГИЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ

Достаточно часто данные экспериментов или наблюдений, представленные в виде динамических рядов, должны быть охарактеризованы с помощью обычных статистик — средним, стандартным отклонением и т. д. Если анализируется пара рядов, может понадобиться вычислить коэффициент корреляции между ними. В дальнейшем к этим статистикам могут быть применены обычные процедуры: построение доверительных интервалов, оценка значимости и т. д. Однако все эти приемы предполагают, что исходные значения являются независимыми случайными величинами, но в случае динамических рядов это условие не выполняется. Поэтому оказывается, что если стандартные методы применять к значениям, составляющим динамические ряды, то вероятно возникновение ошибок, порой значительных, и окончательные выводы могут оказаться несостоятельными.

Например, если в нашем распоряжении имеется ряд значений, корреляция между которыми плавно уменьшается и равна нулю, если значения отстоят друг от друга на $s$ отсчетов, то, как показал Е. Е. Слуцкий, стандартная ошибка среднего в этом случае будет в $\sqrt{s}$ раз больше, чем стандартная ошибка некоррелированного ряда такой же длины и имеющего одинаковое с данным рядом среднее и дисперсию. Совершенно очевидно, что в случае коррелированных значений доверительный интервал для среднего существенно увеличится, и чтобы получить одно и то же значение для этого интервала в случае связанных и несвязанных рядов, число членов в связанном ряду должно быть в $s$ раз больше.

Сложность оценки различных статистик для динамических рядов состоит в том, что их стандартные ошибки зависят от характера корреляции между значениями отдельных последовательных отсчетов. Как же поступать в тех случаях, когда необходимо найти некоторые описательные статистики и построить для них доверительные интервалы, не имея аналитического описания взаимосвязи между значениями динамического ряда?

Здесь можно воспользоваться следствием так называемой теоремы отсчетов, доказанной академиком В. А. Котельниковым. Не приводя формулировку и доказательство этой теоремы, ограничимся следующим выводом из нее. Если известно, что для анализируемого динамического ряда максимальной частотой является $f_{\max}$, то беря отсчеты с интервалом $\tau = \frac{1}{2} f_{\max}$, получим ряд некоррелированных значений, для анализа которых можно использовать обычные статистические приемы.

В тех случаях, когда неизвестна максимальная граничная частота или в силу специфики экспериментов не удается выполнить требование об интервале между отсчетами, можно рекомендовать следующий прием.

Для исходного динамического ряда, заданного дискретным числом отсчетов, находится определенное число серийных коэффициентов корреляции. Делается это следующим образом. Из исходного ряда сдвигом всех его значений относительно самих себя на $1, 2, 3, \ldots, k$ получают соответствующие пары рядов. Для каждой такой пары

вычисляют обычный коэффициент корреляции. Общее число сдвигов не должно, как правило, превышать $15-20\%$ от числа отсчетов в анализируемом ряду. График таких серийных коэффициентов корреляции носит название автокоррелограммы. Если одним из стандартных численных методов найти площадь под коррелограммой, то значение $k$, до которого площадь под коррелограммой составляет половину всей вычисленной площади, будет определять интервал корреляции. Эта информация и должна быть использована в дальнейшем при нахождении описательных статистик и построения для них доверительных интервалов.

Мы описали в содержательных понятиях порядок построения коррелограммы, но в практике статистического анализа экспериментальных данных никто, естественно, эти вычисления вручную не проводит. Для этих целей существуют специально разработанные программы для вычислительных машин, с помощью которых осуществляются необходимые расчеты и строятся соответствующие графики.

## Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте в содержательных понятиях задачи из области специализации, связанные с анализом динамических рядов.
2. На какие компоненты могут быть разложены динамические ряды и какую информацию об исследуемом процессе или явлении несут эти компоненты?
3. Какие методы используются при анализе отдельных компонент динамических рядов?
4. Как можно оценить случайный характер наблюдаемого динамического ряда?
5. Как можно определить, какое из регрессионных уравнений наилучшим образом описывает тренд динамического ряда?
6. Из каких соображений выбирается шаг квантования динамического ряда и алгоритм выявления периодических составляющих?
7. Что такое и как строится автокоррелограмма динамического ряда?
8. С помощью какого приема оценивается качество элиминации тренда из динамического ряда?

## Упражнения и задачи

1. Временной ряд, представляющий собой годовое количество осадков (в дюймах) в Лондоне за сто лет (табл. 47.8), является хрестоматийным (как, впрочем, и остальные ряды, приводимые в этом разделе), так как переходит из одного учебника в другой. Необходимо:
   а) построить график; б) оценить наличие тренда в данных; в) определить период наиболее выраженных колебательных составляющих; г) выяснить, как соотносятся полученные результаты с визуальным анализом данных?
2. Из случайного ряда ($n = 100$) получен другой случайный ряд с использованием формулы сглаживания

$$y_0 = \frac{1}{21}(-2x_{-3} + 3x_{-2} + 6x_{-1} + 7x_0 + 6x_1 + 3x_2 - 2x_3).$$

   Найти корреляцию между членами сглаженного ряда, отделенного друг от друга 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 членами. (В качестве случайного ряда могут использоваться последние цифры номеров из телефонной книги.)

*Таблица 47.8.*

| $x_1$ Год | $y_1$ Осадки | $x_2$ Год | $y_2$ Осадки | $x_1$ Год | $y_1$ Осадки | $x_2$ Год | $y_2$ Осадки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1813 | 23,56 | 1838 | 21,63 | 1863 | 21,59 | 1888 | 27,74 |
| 14 | 26,07 | 39 | 27,49 | 64 | 16,93 | 89 | 23,86 |
| 15 | 21,85 | 40 | 19,43 | 65 | 29,48 | 90 | 21,23 |
| 16 | 31,24 | 41 | 31,13 | 66 | 31,60 | 91 | 28,15 |
| 17 | 23,65 | 42 | 23,09 | 67 | 26,25 | 92 | 22,61 |
| 18 | 23,88 | 43 | 25,85 | 68 | 23,40 | 93 | 19,80 |
| 19 | 26,41 | 44 | 22,65 | 69 | 25,42 | 94 | 27,94 |
| 20 | 22,67 | 45 | 22,75 | 70 | 21,32 | 95 | 21,47 |
| 21 | 31,69 | 46 | 26,36 | 71 | 25,02 | 96 | 23,52 |
| 22 | 23,86 | 47 | 17,70 | 72 | 33,86 | 97 | 22,86 |
| 23 | 24,11 | 48 | 29,81 | 73 | 22,67 | 98 | 17,69 |
| 24 | 32,43 | 49 | 22,93 | 74 | 18,82 | 99 | 22,54 |
| 25 | 23,26 | 50 | 19,22 | 75 | 28,44 | 1900 | 23,28 |
| 26 | 22,57 | 51 | 20,63 | 76 | 26,16 | 01 | 22,17 |
| 27 | 23,00 | 52 | 35,34 | 77 | 28,17 | 02 | 20,84 |
| 28 | 27,88 | 53 | 25,89 | 78 | 34,08 | 03 | 38,10 |
| 29 | 25,32 | 54 | 18,65 | 79 | 33,82 | 04 | 20,65 |
| 30 | 25,08 | 55 | 23,06 | 80 | 30,28 | 05 | 22,97 |
| 31 | 27,76 | 56 | 22,21 | 81 | 27,92 | 06 | 24,26 |
| 32 | 19,82 | 57 | 22,18 | 82 | 27,14 | 07 | 23,01 |
| 33 | 24,78 | 58 | 18,77 | 83 | 24,40 | 08 | 23,67 |
| 34 | 20,12 | 59 | 28,21 | 84 | 20,35 | 09 | 26,75 |
| 35 | 24,34 | 60 | 32,24 | 85 | 26,64 | 10 | 25,36 |
| 36 | 27,42 | 61 | 22,27 | 86 | 27,01 | 11 | 24,79 |
| 37 | 19,44 | 62 | 27,57 | 87 | 19,21 | 12 | 27,88 |

3. Построить 10 членов ряда, общий член которого в момент $t$ есть $t^2 - 2t + 5$ для $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ 9$. Доказать, что значения тренда

$$y_k = \frac{1}{35}(-13x_{k-2} + 12x_{k-1} + 17x_k + 12x_{k+1} - 13x_{k+2})$$

дают точный подбор к этому ряду.

4. Для временного ряда поголовья овец в Англии (табл. 47.9, в млн. голов)

*Таблица 47.9.*

| Год | Поголовье | Год | Поголовье | Год | Поголовье | Год | Поголовье |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1867 | 22,03 | 1886 | 18,92 | 1905 | 18,23 | 1924 | 14,84 |
| 68 | 23,60 | 87 | 19,19 | 06 | 18,43 | 25 | 15,97 |
| 69 | 22,54 | 88 | 18,53 | 07 | 18,80 | 26 | 16,86 |
| 70 | 21,65 | 89 | 18,68 | 08 | 19,68 | 27 | 17,07 |
| 71 | 20,24 | 90 | 19,91 | 09 | 20,29 | 28 | 16,40 |
| 72 | 20,78 | 91 | 21,11 | 10 | 19,96 | 29 | 16,11 |
| 73 | 22,14 | 92 | 21,19 | 11 | 19,33 | 30 | 16,32 |
| 74 | 22,92 | 93 | 19,91 | 12 | 18,05 | 31 | 17,75 |
| 75 | 22,07 | 94 | 18,59 | 13 | 17,13 | 32 | 18,50 |
| 76 | 21,19 | 95 | 18,56 | 14 | 17,26 | 33 | 18,09 |
| 77 | 21,19 | 96 | 19,24 | 15 | 17,52 | 34 | 16,53 |
| 78 | 21,37 | 97 | 18,92 | 16 | 17,95 | 35 | 16,48 |
| 79 | 21,32 | 98 | 19,16 | 17 | 17,17 | 36 | 16,65 |
| 80 | 19,55 | 99 | 19,68 | 18 | 16,48 | 37 | 16,27 |
| 81 | 17,85 | 1900 | 19,28 | 19 | 15,12 | 38 | 17,91 |
| 82 | 17,47 | 01 | 18,98 | 20 | 13,38 | 39 | 17,97 |
| 83 | 18,18 | 02 | 18,50 | 21 | 13,83 | | |
| 84 | 19,09 | 03 | 18,41 | 22 | 13,44 | | |
| 85 | 19,58 | 04 | 18,24 | 23 | 13,84 | | |

а) нанести значения на график; б) построить уравнение тренда; в) проверить коррелированность остатков после элиминации тренда.

5. Выравнять кубическим полиномом последние семь значений ряда из таблицы, приведенной в задаче 4 (поголовье овец), и показать, что тренд для последних четырех значений равен 16,39; 16,87; 17,50; 18,07.

6. Значения ряда, заданные во временных точках $-m, \ldots, m$ (всего $2m+1$ значений), выравниваются прямой. Показать, что для этой прямой

$$a_0 = \frac{1}{2m+1} \sim x_t, \quad a_1 = \frac{1}{m(m+1)(2m+1)} \sum t x_t.$$

7. По данным о среднем числе яиц на несушку за каждый месяц по США в течение 1938–1940 гг.
   а) построить график;
   б) проверить с уровнем значимости 0,05, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена, случайность этого ряда;
   в) определить наиболее характерный для данного ряда период колебаний.

| **Месяц** | **1938** | **1939** | **1940** |
|---|---|---|---|
| январь | 7,9 | 8,0 | 7,2 |
| февраль | 9,9 | 9,7 | 9,0 |
| март | 15,4 | 14,9 | 14,4 |
| апрель | 17,5 | 17,0 | 16,5 |
| май | 17,3 | 17,0 | 17,0 |
| июнь | 14,9 | 14,6 | 14,8 |
| июль | 13,6 | 13,2 | 13,4 |
| август | 11,8 | 11,7 | 11,8 |
| сентябрь | 9,4 | 9,3 | 9,7 |
| октябрь | 7,5 | 7,4 | 7,9 |
| ноябрь | 5,9 | 6,0 | 6,2 |
| декабрь | 6,4 | 6,8 | 6,8 |

# XLVIII

# ОСНОВНЫЕ ИДЕИ, МЕТОДЫ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В любой области знания важнейшими этапами научного исследования являются классификация опытных данных, а также установление связей и соотношений между изучаемыми признаками.

Большинство естественных и искусственных объектов, с которыми приходится иметь дело на практике, представляют собой очень сложные системы, поэтому адекватное описание процессов, протекающих в них, требует одновременного учета целого ряда признаков. При этом для решения задач классификации и установления связей используется специальный математический аппарат, получивший развитие в рамках многомерного статистического анализа. Фактически в область многомерного статистического анализа мы вступаем, уже анализируя взаимодействие двух наборов случайных величин. Таким образом, изучение корреляции, и особенно частной и множественной, было своеобразным введением в многомерный статистический анализ.

Методы многомерной статистики, являясь в определенном смысле обобщением одномерного статистического анализа, дают исследователю новые возможности при изучении многопризнаковых ситуаций, позволяют глубже понять сущность исследуемых объектов и процессов.

Необходимость и важность одновременного учета большого числа признаков была осознана уже давно, однако очень серьезные вычислительные трудности препятствовали до последнего времени широкому внедрению методов многомерного статистического анализа в практику научных исследований и разработок. С наступлением эпохи компьютеризации ситуация в корне изменилась.

Действительно, пусть мы имеем дело с линейной регрессионной зависимостью, подобной тем, что были рассмотрены в главе 43, только с тем отличием, что независимая переменная будет зависеть не от одной, а например, от десяти переменных. Используя метод наименьших квадратов, необходимо будет решить систему из 11 алгебраических уравнений, что, естественно, требует использования современных средств вычислительной техники. Однако использование ЭВМ само по себе не решает проблему анализа системы по большому числу признаков. И вот почему. Для получения с помощью ЭВМ уравнения связи даже с сотней признаков нет никаких принципиальных трудностей. Дело в другом. Специалиста интересует не само по себе уравнение, а существо происходящих явлений, которое находит свое отражение во взаимосвязи изучаемых признаков между собой. И если он оперирует не сотней, а только двадцатью признаками, то и в этом случае общее число, например, обычных коэффициентов корреляции между всеми переменными достигает 190 и ситуация, естественно, не поддается никакой разумной интерпретации.

Как поступать в таких случаях? Можно, конечно, и так поступают довольно часто, отсечь большинство признаков и перейти к одно- или двумерному анализу, используя весь арсенал методов, обсуждавшихся ранее.

Но есть и другой путь. Он связан с объединением ряда признаков в один, искусственно построенный на их основе. Так возникает новый подход к изучению сложных систем, получивший название многомерного анализа.

Многомерный статистический анализ состоит в настоящее время из целого ряда взаимосвязанных разделов, таких как дискриминантный, факторный, регрессионный, кластерный и некоторые другие виды анализа.

Обсудив некоторые общие положения, перейдем теперь к рассмотрению некоторых частных вопросов многомерного статистического анализа.

## § 48.1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

Для того чтобы ввести необходимые обозначения, используемые в дальнейшем, продемонстрировать, как методы одномерной статистики обобщаются на многомерный случай и наглядно показать, какие вычислительные проблемы при этом возникают, рассмотрим проверку равенства средних двух многомерных выборок.

Если в одномерном случае каждое выборочное значение характеризуется одним числом, то в многомерном случае выборочное значение характеризуется вектором $x^T = (x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(p)})$, где $p$ — это размерность пространства, которому данный вектор принадлежит, $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots,$ $x^{(p)}$ — значения измеряемых признаков. Например, в сельскохозяйственной практике интерес могут представлять высота растения $x^{(1)}$, число стеблевых листьев $x^{(2)}$ и длина максимального стеблевого листа $x^{(3)}$. Таким образом, вектор измерений для каждого растения состоит из трех компонент. Матрицы общего вида будем обозначать, как принято, заглавной буквой, например $X$, а вектор — строчной. В транспонированной по отношению к матрице $X$ матрице $X^T$ столбцами служат строки $X$, и наоборот. Будем считать, что вектор наблюдений $x$ — это столбец. Соответствующую ему вектор-строку будем обозначать через $x^T$. Все остальные необходимые сведения из теории матриц приведены в IV главе.

По аналогии с одномерным случаем наиболее употребимым показателем центральной тенденции в многомерном случае является вектор средних значений $\overline{x}$, отдельные компоненты которого равны средним измеряемых признаков. Кроме того, в многомерном случае для оценки рассеяния используется ковариационная матрица $S = \sum_{i=1}^{N}(x - \overline{x})(x - \overline{x})^T$, по диагонали которой стоят дисперсии измеряемых признаков. Отсюда видно, что даже в том случае, когда для описания многомерного распределения случайных величин будут использоваться только показатели центральной тенденции и вариации, число оцениваемых параметров будет очень велико. В самом деле, для размерности $p$ имеем $p$ средних, $p$ дисперсий и $p(p-1)/2$ ковариаций. Уже для $p = 5$ число параметров равно 20, а для $p = 10$ — становится равным 65. Из этого видно, как существенно растет объем вычислений.

Предположим, имеется две многомерные выборки из нормальных генеральных совокупностей, и необходимо проверить гипотезу о равенстве их средних значений. В одномерном случае для решения этой задачи используется критерий Стьюдента. Существует аналог этого критерия для многомерного случая. Теоретически Г. Хотеллингом было показано, что величина

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)})^T S^{-1}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}) \qquad (48.1)$$

имеет специальное распределение такое, что критическая область для нее на выбранном уровне значимости $\alpha$ определяется неравенством

$$T^2 \geqslant \frac{(n_1+n_2-2)p}{n_1+n_2-p-1} F_{p,n_1+n_2-p-1}(\alpha). \tag{48.2}$$

В этих формулах $n_1$ и $n_2$ — число значений в первой и второй выборке соответственно; $p$ — размерность вектора измерений; $F_{p,n_1+n_2-p-1}(\alpha)$ — численное значение распределения Фишера с уровнем значимости $\alpha$ и числом степеней свободы $p$ и $n_1+n_2-p-1$ (это то же распределение, которое используется в одномерном случае); $S^{-1}$ — матрица, обратная к ковариационной матрице $S$, определяемой соотношением

$$S = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i^{(1)}-\overline{x}^{(1)})(x_i^{(1)}-\overline{x}^{(1)})^T + \sum_{i=1}^{n_2}(x_i^{(2)}-\overline{x}^{(2)})(x_i^{(2)}-\overline{x}^{(2)})^T\right],$$

где $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — векторы наблюдаемых значений соответственно для первой и второй выборки.

*ПРИМЕР 48.1 (ставший уже классическим).* Р. Фишер провел измерения над 50 цветками для каждой из трех разновидностей ириса: щетинистого, разноцветного и вирджиника. Измерялись величины $x_1$ — длина чашелистика, $x_2$ — ширина чашелистика, $x_3$ — длина лепестка, $x_4$ — ширина лепестка. Исходные данные приведены в табл. 48.1 (размеры даны в см). Данные в столбце I относятся к ирису щетинистому, в столбце II к ирису разноцветному, в столбце III к ирису вирджиника.

Пусть нас интересует, равны ли векторы средних, например, для ириса разноцветного (1) и ириса щетинистого (2).

Имеем (промежуточные вычисления предлагаются в качестве упражнения для самостоятельной работы)

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 5{,}936 \\ 2{,}770 \\ 4{,}260 \\ 1{,}326 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5{,}006 \\ 3{,}428 \\ 1{,}462 \\ 0{,}246 \end{pmatrix}.$$

По формуле для $S$ получаем

$$S = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 19{,}1434 & 9{,}0356 & 9{,}7634 & 3{,}2394 \\ 9{,}0356 & 11{,}8658 & 4{,}6232 & 2{,}4746 \\ 9{,}7634 & 4{,}6232 & 12{,}2978 & 3{,}8704 \\ 3{,}2394 & 2{,}4746 & 3{,}8794 & 2{,}4604 \end{pmatrix}.$$

(Обратите внимание, что матрица $S$ симметрична относительно диагонали, поэтому вычислять нужно не 12, а только 6 ковариаций.)

Используя алгоритм, приведенный в главе IV, несложно получить матрицу $S^{-1}$.

Подставляя полученные значения $\overline{x}^{(1)}$, $\overline{x}^{(2)}$ и $S^{-1}$ в (48.1), получаем, что $T^2 = 2580{,}7$. Критическая область с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ в соответствии с (48.2)

$$T^2 \geqslant \frac{98\cdot 4}{95}\cdot 3{,}51 = 14{,}5.$$

*Таблица 48.1.*

| № п/п | Чашелистик | | | | | | Лепесток | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | длина | | | ширина | | | длина | | | ширина | | |
| | I | II | III | I | II | III | I | II | III | I | II | III |
| 1 | 5,1 | 7,0 | 6,3 | 3,5 | 3,2 | 3,3 | 1,4 | 4,7 | 6,0 | 0,2 | 1,4 | 2,5 |
| 2 | 4,9 | 6,4 | 5,8 | 3,0 | 3,2 | 2,7 | 1,4 | 4,5 | 5,1 | 0,2 | 1,2 | 1,9 |
| 3 | 4,7 | 6,9 | 7,1 | 3,2 | 3,1 | 3,0 | 1,3 | 4,9 | 5,9 | 0,2 | 1,5 | 2,1 |
| 4 | 4,6 | 5,5 | 6,3 | 3,1 | 2,3 | 2,7 | 1,5 | 4,0 | 5,6 | 0,2 | 1,3 | 1,8 |
| 5 | 5,0 | 6,5 | 6,5 | 3,6 | 2,8 | 3,0 | 1,4 | 4,6 | 5,8 | 0,2 | 1,5 | 2,2 |
| 6 | 5,4 | 5,8 | 7,6 | 3,9 | 2,8 | 3,0 | 1,7 | 4,5 | 6,6 | 0,4 | 1,3 | 2,1 |
| 7 | 4,6 | 6,3 | 5,9 | 3,4 | 3,3 | 2,5 | 1,4 | 4,7 | 4,5 | 0,3 | 1,6 | 1,7 |
| 8 | 5,0 | 4,9 | 7,3 | 3,4 | 2,4 | 2,9 | 1,5 | 3,3 | 6,3 | 0,2 | 1,0 | 1,8 |
| 9 | 4,4 | 6,6 | 6,7 | 2,9 | 2,9 | 2,5 | 1,4 | 4,6 | 5,8 | 0,2 | 1,3 | 1,8 |
| 10 | 4,9 | 5,2 | 7,2 | 3,1 | 2,7 | 3,6 | 1,5 | 3,9 | 6,1 | 0,1 | 1,4 | 2,5 |
| 11 | 5,4 | 5,0 | 6,5 | 3,7 | 2,0 | 3,2 | 1,5 | 3,5 | 5,1 | 0,2 | 1,0 | 2,0 |
| 12 | 4,8 | 5,9 | 6,4 | 3,4 | 3,0 | 2,7 | 1,6 | 4,2 | 5,3 | 0,2 | 1,5 | 1,9 |
| 13 | 4,8 | 6,0 | 6,8 | 3,0 | 2,2 | 3,0 | 1,4 | 4,0 | 5,5 | 0,1 | 1,0 | 2,1 |
| 14 | 4,3 | 6,1 | 5,7 | 3,0 | 2,9 | 2,5 | 1,1 | 4,7 | 5,0 | 0,1 | 1,4 | 2,0 |
| 15 | 5,8 | 5,6 | 5,8 | 4,0 | 2,9 | 2,8 | 1,2 | 3,6 | 5,1 | 0,2 | 1,3 | 2,4 |
| 16 | 5,7 | 6,7 | 6,4 | 4,4 | 3,1 | 3,2 | 1,5 | 4,4 | 5,3 | 0,4 | 1,4 | 2,3 |
| 17 | 5,4 | 5,6 | 6,5 | 3,9 | 3,0 | 3,0 | 1,3 | 4,5 | 5,5 | 0,4 | 1,5 | 1,8 |
| 18 | 5,1 | 5,8 | 7,7 | 3,5 | 2,7 | 3,8 | 1,4 | 4,1 | 6,7 | 0,3 | 1,0 | 2,2 |
| 19 | 5,7 | 6,2 | 7,7 | 3,8 | 2,2 | 2,6 | 1,7 | 4,5 | 6,9 | 0,3 | 1,5 | 2,3 |
| 20 | 5,1 | 5,6 | 6,0 | 3,8 | 2,5 | 2,2 | 1,5 | 3,9 | 5,0 | 0,3 | 1,1 | 1,5 |
| 21 | 5,4 | 5,9 | 6,9 | 3,4 | 3,2 | 3,2 | 1,7 | 4,8 | 5,7 | 0,2 | 1,8 | 2,3 |
| 22 | 5,1 | 6,1 | 5,6 | 3,7 | 2,8 | 2,8 | 1,5 | 4,0 | 4,9 | 0,4 | 1,3 | 2,0 |
| 23 | 4,6 | 6,3 | 7,7 | 3,6 | 2,5 | 2,8 | 1,0 | 4,9 | 6,7 | 0,2 | 1,5 | 2,0 |
| 24 | 5,1 | 6,1 | 6,3 | 3,3 | 2,8 | 2,7 | 1,7 | 4,7 | 4,9 | 0,5 | 1,2 | 1,8 |
| 25 | 4,8 | 6,4 | 6,7 | 3,4 | 2,9 | 3,3 | 1,9 | 4,3 | 5,7 | 0,2 | 1,3 | 2,1 |
| 26 | 5,0 | 6,6 | 7,2 | 3,0 | 3,0 | 3,2 | 1,6 | 4,4 | 6,0 | 0,2 | 1,4 | 1,8 |
| 27 | 5,0 | 6,8 | 6,2 | 3,4 | 2,8 | 2,8 | 1,6 | 4,8 | 4,8 | 0,4 | 1,4 | 1,8 |
| 28 | 5,2 | 6,7 | 6,1 | 3,5 | 3,0 | 3,0 | 1,5 | 5,0 | 4,9 | 0,2 | 1,7 | 1,8 |
| 29 | 5,2 | 6,0 | 6,4 | 3,4 | 2,9 | 2,8 | 1,4 | 4,5 | 5,6 | 0,2 | 1,5 | 2,1 |
| 30 | 4,7 | 5,7 | 7,2 | 3,2 | 2,6 | 3,0 | 1,6 | 3,5 | 5,8 | 0,2 | 1,0 | 1,6 |
| 31 | 4,8 | 5,5 | 7,4 | 3,1 | 2,4 | 2,8 | 1,6 | 3,8 | 6,1 | 0,2 | 1,1 | 1,9 |
| 32 | 5,4 | 5,5 | 7,9 | 3,4 | 2,4 | 3,8 | 1,5 | 3,7 | 6,4 | 0,4 | 1,0 | 2,0 |
| 33 | 5,2 | 5,8 | 6,4 | 4,1 | 2,7 | 2,8 | 1,5 | 3,9 | 5,6 | 0,1 | 1,2 | 2,2 |
| 34 | 5,5 | 6,0 | 6,3 | 4,2 | 2,7 | 2,8 | 1,4 | 5,1 | 5,1 | 0,2 | 1,6 | 1,5 |
| 35 | 4,9 | 5,4 | 6,1 | 3,1 | 3,0 | 2,6 | 1,5 | 4,5 | 5,6 | 0,2 | 1,5 | 1,4 |
| 36 | 5,0 | 6,0 | 7,7 | 3,2 | 3,4 | 3,0 | 1,2 | 4,5 | 6,1 | 0,2 | 1,6 | 2,3 |
| 37 | 5,5 | 6,7 | 6,3 | 3,5 | 3,1 | 3,4 | 1,3 | 4,7 | 5,6 | 0,2 | 1,5 | 2,4 |
| 38 | 4,9 | 6,3 | 6,4 | 3,6 | 2,3 | 3,1 | 1,4 | 4,4 | 5,5 | 0,1 | 1,3 | 1,8 |
| 39 | 4,4 | 5,6 | 6,0 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 1,3 | 4,1 | 4,8 | 0,2 | 1,3 | 1,8 |
| 40 | 5,1 | 5,5 | 6,9 | 3,4 | 2,5 | 3,1 | 1,5 | 4,0 | 5,4 | 0,2 | 1,3 | 2,1 |
| 41 | 5,0 | 5,5 | 6,7 | 3,5 | 2,6 | 3,1 | 1,3 | 4,4 | 5,6 | 0,3 | 1,2 | 2,4 |
| 42 | 4,5 | 6,1 | 6,9 | 3,2 | 3,0 | 3,1 | 1,3 | 4,6 | 5,1 | 0,3 | 1,4 | 2,3 |
| 43 | 4,4 | 5,8 | 5,8 | 3,2 | 2,6 | 2,7 | 1,3 | 4,0 | 5,1 | 0,2 | 1,2 | 1,9 |
| 44 | 5,0 | 6,0 | 6,8 | 3,5 | 2,3 | 3,2 | 1,6 | 3,3 | 5,9 | 0,6 | 1,0 | 2,3 |
| 45 | 5,1 | 5,6 | 6,7 | 3,8 | 2,7 | 3,3 | 1,9 | 4,2 | 5,7 | 0,4 | 1,3 | 2,5 |
| 46 | 4,8 | 5,7 | 6,7 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 1,4 | 4,2 | 5,2 | 0,3 | 1,2 | 2,3 |
| 47 | 5,1 | 5,7 | 6,3 | 3,8 | 2,9 | 2,5 | 1,6 | 4,2 | 5,0 | 0,2 | 1,3 | 1,9 |
| 48 | 4,6 | 6,2 | 6,5 | 3,2 | 2,9 | 3,0 | 1,4 | 4,3 | 5,2 | 0,2 | 1,3 | 2,0 |
| 49 | 5,3 | 5,1 | 6,2 | 3,7 | 2,5 | 3,4 | 1,5 | 3,0 | 5,4 | 0,2 | 1,1 | 2,3 |
| 50 | 5,0 | 5,7 | 5,9 | 3,3 | 2,8 | 3,0 | 1,4 | 4,1 | 5,1 | 0,2 | 1,3 | 1,8 |

Совершенно очевидно, что нулевая гипотеза (равенство векторов средних) отвергается. Таким образом, эти две разновидности ирисов существенно отличаются друг от друга по векторам средних значений морфологических характеристик их цветков.

## § 48.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НЕЗАВИСИМОСТИ

Во многих экспериментальных исследованиях возникает необходимость в решении следующей задачи. Пусть объект исследования последовательно подвергается действию некоторого числа $p$ внешних факторов и при этом измеряется интересующая нас характеристика. Таким образом, каждый объект будет описываться $p$-мерным вектором измерений. Ставится вопрос о взаимной независимости всех $p$ величин, с тем чтобы выяснить, оказывает ли последовательность действия внешних факторов существенное (статистически значимое) влияние на интересующий нас признак.

*ПРИМЕР 48.2 (искусственный).* Пусть при изучении зрительной системы какого-то животного используется определенная последовательность стимулов и при этом регистрируется импульсная электрическая активность отдельных нервных клеток затылочной области мозга (именно в эту область приходит в первую очередь зрительная информация). Кратковременное предъявление зрительного стимула вызывает реакцию нервной клетки, которая по истечении некоторого времени затухает, и характер электрической активности возвращается к исходному (восстанавливается средняя частота импульсации). Интерес может представлять вопрос, влияет ли на длительность следовых процессов последовательность предъявления стимулов. Оцениваемой при этом величиной является время от подачи стимула до момента восстановления частоты импульсной активности нервной клетки до уровня, предшествующего подаче внешнего раздражителя. Переформулировка при необходимости задачи в терминах другой экспериментальной ситуации представляется очевидной.

Пусть была изучена последовательность предъявления 6 зрительных стимулов и была зарегистрирована активность от 76 нервных клеток ($p = 6,\ n = 76$). Данные о длительности последействия были обработаны, и получен выборочный вектор среднего и ковариационная матрица

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 9{,}47 \\ 25{,}56 \\ 13{,}25 \\ 31{,}44 \\ 27{,}29 \\ 8{,}80 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 2{,}57 & 0{,}85 & 1{,}56 & 1{,}79 & 1{,}33 & 0{,}42 \\ 0{,}85 & 37{,}00 & 3{,}34 & 13{,}47 & 7{,}59 & 0{,}52 \\ 1{,}56 & 3{,}34 & 8{,}44 & 5{,}77 & 2{,}00 & 0{,}50 \\ 1{,}79 & 13{,}47 & 5{,}77 & 34{,}01 & 10{,}50 & 1{,}77 \\ 1{,}33 & 7{,}59 & 2{,}00 & 10{,}50 & 32{,}01 & 3{,}43 \\ 0{,}42 & 0{,}52 & 0{,}50 & 1{,}77 & 3{,}43 & 4{,}59 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, были рассчитаны выборочные стандартные отклонения, которые оказались равными: 1,604; 6,041; 2,903; 5,832; 4,798; 2,141. (Эти числа получены извлечением квадратного корня из диагональных членов ковариационной матрицы, которые, как уже упоминалось ранее, представляют собой дисперсии отдельных компонент.)

Для оценки независимости нам потребуется корреляционная матрица исходных данных. Такая матрица включает в себя все парные коэффициенты корреляции и может быть вычислена непосредственно с использованием экспериментальных значений. Если же предварительно была получена ковариационная матрица, то корреляционная матрица получается из нее следующим образом. Вспомним, что парный коэффициент корреляции можно найти по формуле

$$r_{x_1x_2} = \frac{s_{x_1x_2}}{s_{x_1}s_{x_2}},$$

где $s_{x_1x_2}$ — ковариация, а $s_{x_1}$ и $s_{x_2}$ — стандартные отклонения переменных $x_1$ и $x_2$.

В качестве примера найдем $r_{x_1x_4}$ и $r_{x_5x_2}$ — коэффициенты корреляции, занимающие соответственно места в корреляционной матрице в первой строке и четвертом столбце и в пятой строке и втором столбце.

Имеем:

$$s_{x_1x_4} = 1{,}79; \quad s_{x_1} = 1{,}604; \quad s_{x_4} = 5{,}832$$
$$s_{x_5x_2} = 7{,}59; \quad s_{x_5} = 4{,}798; \quad s_{x_2} = 6{,}041.$$

Откуда

$$r_{x_1x_4} = \frac{1{,}79}{1{,}604 \cdot 5{,}832} = 0{,}191; \quad r_{x_5x_2} = \frac{7{,}59}{4{,}798 \cdot 6{,}041} = 0{,}262.$$

Полученная таким образом корреляционная матрица имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0{,}088 & 0{,}334 & 0{,}191 & 0{,}173 & 0{,}123 \\ 0{,}088 & 1{,}000 & 0{,}186 & 0{,}384 & 0{,}262 & 0{,}040 \\ 0{,}334 & 0{,}186 & 1{,}000 & 0{,}343 & 0{,}144 & 0{,}080 \\ 0{,}191 & 0{,}384 & 0{,}343 & 1{,}000 & 0{,}375 & 0{,}142 \\ 0{,}173 & 0{,}262 & 0{,}144 & 0{,}375 & 1{,}000 & 0{,}334 \\ 0{,}123 & 0{,}040 & 0{,}080 & 0{,}142 & 0{,}334 & 1{,}000 \end{pmatrix}.$$

Матрица $R$, как и матрица $S$, симметрична, на главной диагонали стоят единицы, так как $r_{x_ix_i} = 1$. Теоретически было показано, что величина $m \ln(\det R)$ при достаточно больших $n$ распределена как $\chi^2$ с $f$ степенями свободы и может быть использована для проверки гипотезы о независимости многомерных множеств случайных величин. Здесь $\det R$ — детерминант корреляционной матрицы, а $m$ и $f$ находятся по следующим формулам:

$$m = \frac{2p + 11}{6} - n, \quad f = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Для наших данных $\det R = 0{,}482$, $m = 433/6$, $f = 15$ и $m \ln(\det R) = 54{,}1$. Если выбрать уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, то для данного числа степеней свободы $\chi^2 = 30{,}6$. Таким образом, нулевая гипотеза, предполагавшая независимость длительностей следовых процессов от порядка предъявления стимулов, отвергается.

Рассмотренные в данном и предыдущем параграфе задачи многомерного анализа иллюстрировали пути решения тех же проблем, которые возникают при обработке экспериментальных данных в одномерном случае.

Однако значительно больший интерес представляют методы и приемы, специфические для многомерного статистического анализа, к рассмотрению которых мы и переходим.

## § 48.3. ДИСКРИМИНАНТНЫЙ АНАЛИЗ

В данном параграфе особое внимание нужно обратить на содержательную сторону обсуждаемых вопросов, имея в виду, что для конкретных вычислительных процедур существуют стандартные программы расчетов на ЭВМ.

Сначала рассмотрим несколько примеров. Пусть в нашем распоряжении имеется информация о характерных признаках двух или более наборов проб почв из различных районов или симптомов нескольких схожих между собой болезней. Каждый очередной объект, становящийся предметом исследований, в первом случае должен быть отнесен к тому или иному набору, во втором случае для каждого пациента должен быть поставлен соответствующий диагноз.

Другой пример: изучены психофизиологические характеристики группы людей и необходимо выяснить, возможно ли разбиение на подгруппы такое, что индивиды одной подгруппы сходны между собой по психофизиологическому портрету, но сильно отличаются от индивидов других подгрупп.

Первый пример представляет собой задачу дискриминации, второй — классификации. Отличительные особенности этих двух классов задач, приводящие к необходимости использования различных методов при их решении, состоит в том, что при дискриминации число групп дано, а при классификации выявление этих групп и составляет основную задачу.

При построении процедуры дискриминации желательно, чтобы вероятность неправильного вывода в среднем была минимальна. Поясним это требование на примере двух множеств данных.

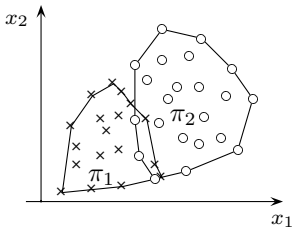



*Рис. 48.1.*

Предположим, что изучаемый объект может относиться к одной из двух генеральных совокупностей $\pi_1$ и $\pi_2$, причем отнесение его к той или другой зависит от вектора результатов измерений $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Задача состоит в том, чтобы разделить все множество результатов экспериментов на две области $R_1$ и $R_2$ так, что если вектор $x^T$ попадает в $R_1$, мы относим его к совокупности $\pi_1$, а если в $R_2$, то к $\pi_2$. Иллюстрация такой ситуации для двумерного случая приведена на рис. 48.1.

Совокупности $\pi_1$ и $\pi_2$ разделены, но в то же время имеют и пересечения, иначе не было бы проблемы дискриминации. Выбранный способ дискриминации приводит к появлению ошибок двух родов: отнесение объекта к $\pi_1$, когда на самом деле он относится к $\pi_2$, и наоборот. При этом «цена» каждой из этих ошибок может быть измерена в любых единицах. Поэтому необходимо иметь метод, который минимизирует цену ошибочной дискриминации.

Пусть генеральные совокупности $\pi_1$ и $\pi_2$ описываются многомерными распределениями с равными ковариационными матрицами и плотностями вероятностей соответственно $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Вероятности того, что объект принадлежит $\pi_1$ и $\pi_2$, обозначим соответственно через $q_1$ и $q_2$. Тогда условная вероятность того, что объект принадлежит к генеральной совокупности $\pi_1$ при условии, что в результате измерений получен вектор $x$, равна

$$\frac{q_1 p_1(x)}{q_1 p_1(x) + q_2 p_2(x)},$$

и естественно потребовать, чтобы

$$\frac{q_1 p_1(x)}{q_1 p_1(x) + q_2 p_2(x)} \geqslant \frac{q_2 p_2(x)}{q_1 p_1(x) + q_2 p_2(x)}. \tag{48.3}$$

Это означает, что данный вектор измерений $x$ был извлечен из генеральной совокупности $\pi_1$. При этом достигается минимум вероятности неправильной дискриминации.

Таким образом, правило отнесения результата наблюдения $x$ к $R_1$ или $R_2$ состоит в следующем:

$$R_1 : q_1 p_1(x) \geqslant q_2 p_2(x), \quad R_2 : q_1 p_1(x) < q_2 p_2(x)$$

или

$$R_1 : \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \geqslant \frac{q_2}{q_1}, \quad R_2 : \frac{p_1(x)}{p_2(x)} < \frac{q_2}{q_1}. \tag{48.4}$$

Это правило в том виде, в каком оно записано, справедливо при условии, что «цены» ошибочных решений одинаковы.

Подставим вместо $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответствующие плотности многомерных нормальных распределений, прологарифмируем обе части неравенств в (48.4) и положив $q_1 = q_2$ (это означает, что вероятности отнесения нового объекта к любой из двух генеральных совокупностей одинаковы), мы получим

$$R_1 : x^T S^{-1}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}) - \frac{1}{2}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)})^T S^{-1}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}) \geqslant 0,$$
$$R_2 : x^T S^{-1}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}) - \frac{1}{2}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)})^T S^{-1}(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(2)}) < 0, \qquad (48.5)$$

где $S$ — ковариационная матрица.

$$(n_1 + n_2 - 2)S = \sum_{i=1}^{n_1}(\overline{x}_i^{(1)} - \overline{x}^{(1)})(\overline{x}_i^{(1)} - \overline{x}^{(1)})^T + \sum_{i=1}^{n_2}(\overline{x}_i^{(2)} - \overline{x}^{(2)})(\overline{x}_i^{(2)} - \overline{x}^{(2)})^T.$$

Первый член в левых частях неравенств (48.5) представляет собой дискриминантную функцию, введенную в статистическую практику Р. Фишером.

По данным табл. 48.1 для двух разновидностей ириса — разноцветного и щетинистого — была найдена дискриминантная функция, которая имеет следующий вид:

$$y = -3{,}115x_1 - 18{,}391x_2 + 22{,}210x_3 + 31{,}474x_4. \qquad (48.6)$$

Подставив в эту формулу значения компонент векторов средних для обеих разновидностей и определив среднее для полученных величин, получаем, что если для какого-то цветка значение дискриминантной функции будет больше, чем 14,25, то он будет отнесен к ирисам разноцветным, в противном случае — к ирисам щетинистым.

После вычисления коэффициентов дискриминантной функции важнейшими этапами дальнейшего анализа является определение их стандартных отклонений и вычисление вероятности ложной дискриминации.

Как показал английский статистик М. Кендалл,

$$s(l_k) = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)(S^{-1})_{kk} + \frac{l_k^2}{n_1 + n_2} + \frac{1}{n_1 + n_2}(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)(S^{-1})_{kk}},$$

где $l_k$ — коэффициент дискриминантной функции; $s(l_k)$ — стандартное отклонение этого коэффициента; $n_1$, $n_2$ — численности первой и второй выборок, по которым строится дискриминантная функция; $(S^{-1})_{kk}$ — число, стоящее на соответствующем месте главной диагонали матрицы $S^{-1}$; $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ — значения дискриминантной функции $y$ при подстановке в нее компонент векторов средних для первой и второй выборок соответственно.

Найдем стандартное отклонение для первого коэффициента дискриминантной функции, найденной в предыдущем примере.

Имеем: $n_1$, $n_2 = 50$, $l_1 = -3{,}115$, $\overline{y}_1 - \overline{y}_2 = 105{,}34$, $(S^{-1})_{kk} = 3{,}62$.

Подставив эти значения в формулу для стандартной ошибки, получим

$$s(l_1) = \sqrt{\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right) \cdot 11{,}871 + \frac{(-3{,}115)^2}{50 + 50} + \frac{105{,}34}{50 + 50} \cdot 11{,}871} = 3{,}62.$$

Рассчитанные стандартные отклонения для других коэффициентов дискриминантной функции равны 3,57; 4,40 и 9,45 соответственно. (Проверьте это самостоятельно.)

Для первого коэффициента стандартная ошибка оказалась больше, чем абсолютное значение самого коэффициента, поэтому напрашивается вывод о том, что первая компонента, т. е. длина чашелистика, может быть в этом случае отброшена без существенной потери разрешающей способности дискриминантной функции.

Тот же М. Кендалл показал, что вероятность ложной дискриминации приближенно равна вероятности отклонения за уровень $(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)/2$ нормальной случайной величины с нулевым средним и дисперсией, равной $(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)$. Для нашего примера имеем: $\overline{y}_1 = 66{,}92$, $\overline{y}_2 = -38{,}42$. Отсюда $s_y^2 = 66{,}92 + 38{,}42 = 105{,}34$; $s_y = 10{,}26$. Таким образом, вероятность ложной классификации чрезвычайно мала. Она равна вероятности появления величины 52,67 в нормальном распределении со средним 0 и стандартным отклонением 10,26, т. е. эта величина расположена на расстоянии, превышающем 5 стандартных отклонений.

В случае, если рассматривается задача о дискриминации между многими совокупностями, необходимо иметь набор дискриминантных функций. Способы их построения можно найти в рекомендованной литературе.

## § 48.4. КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ

При анализе многомерных данных часто возникает задача, состоящая в том, что все множество данных нужно разбить на некоторые подмножества так, чтобы, с одной стороны, каждый объект наблюдения принадлежал только к одному подмножеству, и с другой — объекты, входящие в одно подмножество, были максимально сходными, а в разные подмножества — были существенно различными. Такие подмножества называют кластерами.

Такая задача классификации решается в рамках кластерного (от английского слова cluster — гроздь) анализа. Суть этого метода многомерного анализа состоит в том, что вводится некоторая единая мера, охватывающая все измеряемые показатели, а затем предлагается алгоритм для чисто количественного решения вопроса о разбиении на подмножества. Задача считается решенной, если удовлетворяется некоторый критерий оптимальности, часто называемый целевой функцией. Например, в качестве целевой функции часто используется сумма квадратов отклонений внутри подмножества.

Пусть в нашем распоряжении есть 9 объектов. Для простоты будем считать, что у них измеряется одна характеристика, так что фактически имеет место одномерный случай. Результаты измерений: 8, 4, 2, 2, 4, 8, 2, 6, 4, 8, 2. Сумма квадратов отклонений $W = \sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 64{,}27$.

Если теперь все множество экспериментальных данных разбить на 4 подмножества: $A_1 = \{8, 8, 8\}$, $A_2 = \{4, 4, 4\}$, $A_3 = \{2, 2, 2, 2\}$, $A_4 = \{6\}$, то все внутриподмножественные суммы квадратов отклонений будут равны 0. Разбиение всего множества на подмножества в этом случае было очевидным и естественным. В общем же случае при решении задач классификации необходимо вводить некоторые количественные определения сходства и различия между объектами по измеряемым показателям с тем, чтобы можно было задать строгую процедуру объединения разбиения на подмножества.

Пусть каждый $k$-й объект характеризуется вектором измерений $x^{(k)}$, имеющим длину $p$. Тогда его можно представить как точку в $p$-мерном пространстве. Пара объектов $O_k$ и $O_l$ будут попадать в один и тот же кластер, если расстояние между ними будет мало. Критерии определения понятия «мало» для данного случая будут

рассмотрены ниже, а сейчас введем понятие расстояния между точками в $p$-мерном пространстве.

В кластерном анализе используются различные способы задания расстояния, но наиболее употребительными являются два: евклидово расстояние и расстояние Махаланобиса (названное по имени индийского ученого, впервые предложившего эту функцию).

Евклидово расстояние между точками в $R_p$ вычисляется по формуле

$$d(x_l, x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_{l_i} - x_{k_i})^2}, \tag{48.7}$$

где $x_{l_i}$ и $x_{k_i}$ $i$-е координаты векторов $x_l$ и $x_k$ соответственно, $p$ — размерность пространства измерений.

Расстояние Махаланобиса определяется по формуле

$$D^2(x_l, x_k) = (x_l - x_k)^T W^{-1}(x_l - x_k), \tag{48.8}$$

где $W^{-1}$ — матрица, обратная матрице полной суммы квадратов и произведений (матрица рассеяния).

Понятием, противоположным расстоянию, является понятие сходства. Некоторые меры сходства, не употребляя этого термина, мы рассматривали в главе о корреляции. Фактически все меры корреляции являются мерами сходства: обычный и ранговый коэффициенты корреляции, показатели взаимной сопряженности и т. д.

В кластерном анализе, как уже упоминалось выше, для объединения элементов в подмножества используются различные целевые функции, но наиболее распространенной является внутригрупповая сумма квадратов. При использовании такой целевой функции один из возможных алгоритмов объединения объектов в подмножества выглядит так. Пусть имеется $N$ объектов и матрица рассеяния между ними. Вначале будем считать, что каждый объект представляет одноточечный кластер. На каждом шаге, начиная с первого, объединяются такие два кластера, которые приводят к минимальному увеличению целевой функции

$$D_y = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\overline{x} - \overline{y})^T(\overline{x} - \overline{y}), \tag{48.9}$$

где $n_1$ и $n_2$ — число объектов в кластерах $i$ и $j$ соответственно, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — векторы средних по кластерам $i$ и $j$.

Уже при таком беглом рассмотрении одной из возможных процедур классификации возникает ряд вопросов, имеющих принципиальное значение. Во-первых, чему равно необходимое число кластеров? В некоторых случаях оно может быть выбрано априорно, но в общем случае оно должно определяется в процессе разбиения исходного множества объектов на кластеры.

Существует ряд критериев, позволяющих, однако, дать ответ на этот вопрос только при выполнении определенных, достаточно жестких условий. Поэтому примеры наиболее успешного применения кластерного анализа относятся к тем случаям, когда имеющаяся в наличии у экспериментаторов предварительная информация позволяла заранее определить число кластеров.

В табл. 48.2 приведено число элементов, принадлежащих кластерам, полученным в результате анализа данных о трех разновидностях ириса (табл. 48.1). В качестве меры расстояния использовалось расстояние Махаланобиса.

*Таблица 48.2.*

| Разновидность ириса | Кластер | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Щетинистый | 49 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Разноцветный | 0 | 14 | 13 | 17 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| Вирджиника | 0 | 7 | 5 | 6 | 18 | 0 | 3 | 5 | 6 |

Этот пример был просчитан, чтобы показать достоинства и недостатки кластерного анализа. Несмотря на то что в данном случае число кластеров могло быть задано, это не было сделано, и мы не смогли выяснить, когда процедура кластеризации закончится в соответствии с выбранным критерием. Из табл. 48.2 видно, что ирис щетинистый попадает практически полностью в кластер 1, кластеры 2, 3, 4 и 6 можно отнести к ирису разноцветному и, наконец, кластеры 5, 7, 8, 9 — к ирису вирджиника. Видно, что в одни и те же кластеры попадают цветки разных разновидностей, т. е. такая процедура не обеспечивает четкого разделения на три кластера, какое хотелось бы получить. С чем это может быть связано? Вернемся к обсуждению возможных причин получения таких результатов после рассмотрения двух других вопросов, возникающих при проведении кластерного анализа. Эти два вопроса состоят в следующем. При решении задач кластерного анализа, как и при использовании других приемов дискриминации и классификации, молчаливо допускается, что измеряемые характеристики объектов позволяют провести желательное разбиение. На самом деле выбор свойств или характеристик объектов сам по себе представляет фундаментальную проблему, достаточно удовлетворительного решения которой в настоящее время для сколько-нибудь сложных объектов, к сожалению, не существует. Таким образом, при решении вопроса о выборе информативных характеристик очень важна разработка методов объективной оценки информативности тех признаков, которые используются при изучении тех или иных объектов или процессов.

Еще один вопрос, возникающий при подготовке данных к процедуре кластеризации, это выбор масштабов, так как результаты разбиения на группы существенно зависят от масштаба. Иногда эту проблему решают стандартизацией данных (из всех значений вычитают среднее, а полученные разности делят на стандартное отклонение). Но при этом уравниваются дисперсии, что вряд ли является допустимым.

Теперь вернемся к результатам, приведенным в табл. 48.2. Что может означать получение девяти кластеров, хотя нам заведомо известно, что данные принадлежат трем совокупностям? Только ли в несовершенстве использованных критериев дело? Конечно, этого нельзя исключить. Но возможны и другие объяснения. Во-первых, если провести дискриминантный анализ по методике, описанной в предыдущем параграфе, то окажется, что не удается однозначно отнести к разновидности разноцветных или вирджиника 13 цветков из 100. С другой стороны, и без количественного анализа специалист может различить эти разновидности. Очевидно, что при этом он использует не только морфологические характеристики цветков, но и какие-то другие признаки, которые при количественном анализе не были учтены. Во-вторых, возможно, и морфологических характеристик цветков достаточно, но числовые оценки этих характеристик должны использоваться не сами по себе, а в какой-то комбинации с разными весами, возможно и в нелинейной форме. Таким образом, мы сталкиваемся здесь с проблемой выбора информативных признаков.

Наконец, почему кластеров девять? Каждый из них характеризуется своим вектором средних и матрицей рассеяния. Возможно, серьезный профессиональный анализ помог бы выяснить, какие специфические особенности морфологии цветков заключены в характеристиках полученных кластеров.

Предположений можно выдвинуть много, но чисто формальный подход вряд ли может помочь. Такой подход при изучении сложных естественных объектов или процессов выдвигает больше вопросов, чем дает ответов, но таких вопросов, которые требуют напряженной работы мысли, привлечения большого количества разнообразной информации для ответа на них, вопросов, которые иногда приводят к пересмотру существующих представлений, но всегда гарантируют увлекательнейшее научное исследование.

## § 48.5. МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

Достаточно часто при проведении исследований число принимаемых во внимание признаков слишком велико. В результате проводимых измерений в распоряжении исследователя оказывается матрица очень большой размерности. Если число признаков (размерность вектора измерений) равно $p$, а всего исследовано, например, $n$ объектов, то матрица данных имеет размерность $p \times n$. С такими матрицами мы уже сталкивались: табл. 48.1 представляет три такие матрицы размерностью $4 \times 50$.

Во многих случаях кажется естественным предположить, что наблюдаемые данные могут быть объяснены некоторым небольшим числом новых переменных, которые непосредственно не измеряются. Такое предположение позволяет понизить размерность пространства наблюдений, и иногда эти новые переменные способствуют выдвижению новых, поддающихся содержательной интерпретации и осмысливанию гипотез.

Очевидно, что вся имеющаяся в распоряжении экспериментатора информация заключена в структуре матрицы данных. Статистические свойства этой матрицы задаются вектором средних и ковариационной матрицей. Переход к новым величинам — главным компонентам — заключается в выборе нормированных линейных комбинаций исходных признаков, обладающих особыми свойствами. Например, первой главной компонентой называется такая нормированная (сумма квадратов коэффициентов равна единице) линейная комбинация, которая «выбирает» из исходных данных максимум дисперсии. Вторая главная компонента, которая должна быть ортогональна к первой, извлекает из оставшейся дисперсии максимально возможную часть и т. д. Число главных компонент равно числу строк ковариационной матрицы. По существу, переход от исходных векторов измерений к векторам главных компонент сводится к повороту координатных осей для получения новой системы координат с характерными статистическими свойствами. Блок-схема алгоритма и простой численный пример процесса выделения главных компонент приведены на рис. 48.2.

Кратко поясним отдельные процедуры, представленные на блок-схеме. На первом этапе устраняется дисперсия, не подлежащая анализу, т. е. дисперсия между строками матрицы данных, что достигается центрированием строк — вычитанием среднего по каждой строке из всех ее значений. На втором этапе вычисляется ковариационная матрица. Она получается умножением преобразованной матрицы $T$ размерности $p \times n$ на соответствующую транспонированную матрицу и делением на соответствующее число $(n-1)$ степеней свободы. Эта новая матрица имеет размерность $p \times p$. На третьем этапе находятся собственные числа и собственные векторы матрицы, причем векторы надо нормировать так, чтобы они имели единичную длину в евклидовой метрике. На последнем, четвертом этапе умножением

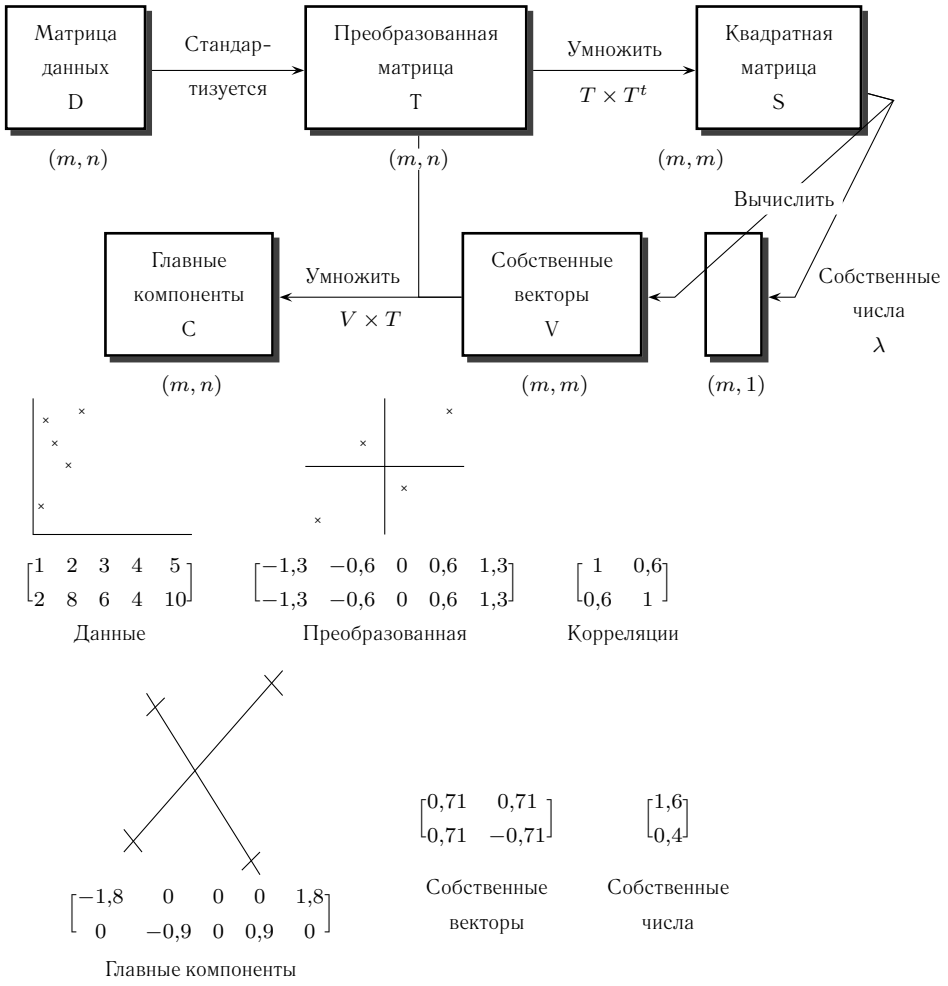



*Рис. 48.2.*

преобразованной матрицы на матрицу собственных векторов получаются главные компоненты.

Графически первый этап сводится к перемещению начала координат в центр «облака» данных. Третий и четвертый этапы заключаются в повороте осей координат таким образом, чтобы одна из осей проходила по направлению максимальной дисперсии множества данных. Координатные оси должны быть взаимно ортогональны (сумма квадратов попарных произведений соответствующих составляющих векторов, определяющих эти оси, должна быть равна нулю). Основной смысл для экспериментатора в выделении главных компонент состоит в том, что с их помощью удается сократить число переменных, которыми надо оперировать, так как главными компонентами, которые извлекают очень небольшую часть от общей дисперсии матрицы данных, можно пренебречь.

Покажем это на примере анализа главных компонент по выборке данных для ириса разноцветного.

*ПРИМЕР 48.3.* По исходным данным вычисляем ковариационную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}2664 & 0{,}0852 & 0{,}1829 & 0{,}0558 \\ & 0{,}0985 & 0{,}0826 & 0{,}0412 \\ & & 0{,}2208 & 0{,}0731 \\ & & & 0{,}0391 \end{pmatrix}.$$

(Так как ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали, то заполнена только верхняя часть.)

Используя стандартные вычислительные процедуры, находим вектор собственных значений

$$\lambda = (0{,}4879, 0{,}0724, 0{,}0548, 0{,}0098)$$

и матрицу собственных векторов

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}6867 & -0{,}6690 & -0{,}2651 & 0{,}1023 \\ 0{,}3053 & 0{,}5675 & -0{,}7296 & -0{,}2289 \\ 0{,}6237 & 0{,}3433 & 0{,}6272 & -0{,}3160 \\ 0{,}2150 & 0{,}3353 & 0{,}0637 & 0{,}9150 \end{pmatrix}.$$

Так как собственные значений равны дисперсиям главных компонент, то можно определить, какую часть общей дисперсии извлекает каждая из главных компонент. Для первой главной компоненты имеем $0{,}4879/(0{,}4879 + 0{,}0724 + 0{,}0548 + + 0{,}0098) = 0{,}78$ или $78\%$, для второй — $12\%$, для третьей — $8{,}4\%$ и для четвертой — $1{,}6\%$. Таким образом, в дальнейших исследованиях можно использовать вместо четырех компонент векторов измерений одну их линейную комбинацию: $0{,}7x_1 + + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 + 0{,}2x_4$. (Коэффициенты у каждой из компонент представляют собой округленные значения первого столбца матрицы $B$.) Кроме того, если удается в содержательных понятиях объяснить эту первую главную компоненту, то в дальнейшем все расчеты существенно упрощаются (в данном случае от четырехмерного пространства мы перешли к одномерному) и, самое главное, становится легче выдвигать и проверять гипотезы, так как число этих новых переменных и связей между ними теперь уже вполне обозримо.

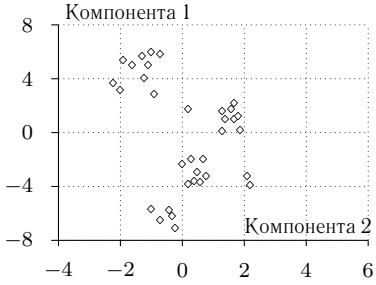


*Рис. 48.3.*

На рис. 48.3 представлены результаты классификации, полученные в одном из исследований морфофизиологических особенностей летающих тлей.

Всего измерялось 19 различных признаков. Метод главных компонент показал, что можно ограничиться двумя первыми компонентами, которые извлекают свыше $85\%$ из общей дисперсии. Первая компонента оказалась связанной в основном с различиями в размерах насекомых, вторая — с размером яйцекладок. Из рисунка видно, что на плоскости, задаваемой этими двумя компонентами, изучаемый вид тлей разбивается на четыре подгруппы по варьируемости их морфофизиологических признаков.

При использовании метода главных компонент часто возникают те же проблемы, что и при кластерном анализе, связанные с выбором масштабов и содержательным объяснением выявляемых главных компонент. Поэтому наиболее эффективным является использование этого метода в тех случаях, когда измерения однородны, т. е. все компоненты вектора измерений заданы в одних и тех же единицах.

## § 48.6. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Мы уже несколько раз отмечали, что изучение сложных объектов с необходимостью требует учета большого числа показателей. При этом многие из них взаимосвязаны между собой и часто в определенной мере дублируют друг друга. С другой стороны, желание понять внутренние механизмы, формирующие множества наблюдаемых показателей, делает необходимым предположение о том, что реально имеется некоторое сравнительно небольшое число ненаблюдаемых переменных — факторов, которые отражают наиболее существенные свойства изучаемого объекта или явления. Нахождение и оценка этих косвенных глубинных переменных и является основной задачей факторного анализа.

Соотношения между факторами и набором исходных измеряемых показателей могут быть найдены в виде матрицы факторных нагрузок $F$, имеющей размерность $p \times m$, где $p$ — число показателей, $m$ — число факторов. Основой для построения матрицы $F$ служит матрица парных коэффициентов корреляции $R$ размерностью $p \times p$. Факторная матрица характеризует степень связи между $m$ факторами и каждым из $p$ измеряемых показателей. При этом число факторов выбирается исходя из двух требований: оно должно быть много меньше числа показателей, а потери информации при этом должны быть минимально возможными.

Таким образом, в результате факторного анализа выявляется группа показателей, наиболее тесно связанных с каждым из факторов. Следовательно, появляется возможность сравнивать между собой отдельные факторы, давать им содержательную интерпретацию и наименование.

Факторный анализ зародился и наиболее интенсивно до последнего времени использовался в психологии. Первоначальной его целью было построение математических моделей способностей и поведения человека. Однако широкие возможности, которые этот метод предоставляет в распоряжение исследователей для описания взаимосвязей в многопризнаковых ситуациях, привели к тому, что в настоящее время помимо широкого традиционного использования в психологии факторный анализ применяется и показывает свою высокую эффективность в самых разных областях науки и техники: от метеорологии и техники связи до социологии и международных отношений.

Основная модель факторного анализа записывается в следующем виде:

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} l_{ik} f_k + d_i u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \; m \ll p. \tag{48.10}$$

Здесь $f_k$ — $k$-й общий фактор; $m$ — заданное число общих факторов; $l_{ik}$ — нагрузка $i$-го показателя на $k$-й общий фактор; $u_i$ — характерный фактор; $d_i$ — нагрузка на $i$-й характерный фактор.

Общие факторы учитывают корреляцию между измеряемыми показателями, характерный фактор учитывает оставшуюся дисперсию.

Без потери общности можно считать, что факторы (имеются в виду общие факторы) имеют нулевые средние и единичные дисперсии, т. е. являются набором стандартизованных величин.

Используя (48.10), несложно показать, что дисперсия измеряемого показателя может быть выражена через нагрузки следующим образом:

$$s_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \cdots + l_{im}^2 + d_i^2 = 1. \tag{48.11}$$

Отсюда следует, что квадраты факторных нагрузок показывают доли дисперсии измеряемого показателя, приходящиеся на соответствующие факторы.

Рассмотрим теперь содержание фундаментальной факторной теоремы.

**ТЕОРЕМА 48.1**

Если измеряемые показатели $x_1$ и $x_2$ в основе своей имеют один общий фактор, то можно показать, что $r_{x_1x_2} = l_{11}l_{21}$. Или в общем случае для $m$ факторов

$$r_{x_1x_2} = l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} + \cdots + l_{1m}l_{2m}. \tag{48.12}$$

Если измеряемых показателей $p$, то можно построить матрицу факторных нагрузок $F$, имеющую размерность $p \times m$. Тогда фундаментальная теорема факторного анализа записывается в матричной форме так:

$$R = FF^T, \tag{48.13}$$

где $R$ — матрица коэффициентов корреляции измеряемых показателей.

Таким образом, задача факторного анализа состоит в объяснении матрицы коэффициентов корреляции между реально наблюдаемыми показателями и набором новых гипотетических переменных — общих факторов. При заданном наборе наблюдаемых показателей $p$ максимально возможное число факторов $m$ определяется соотношением $(p + m) < (p - m)^2$, которое должно выполняться, чтобы задача не вырождалась в тривиальную.

Так как $m < p$, то в системе уравнений типа (48.10) строк больше, чем неизвестных. Поэтому может быть найдено бесконечно большое число факторных нагрузок, которые удовлетворяют (48.13).

В этой связи после нахождения какого-либо решения, удовлетворяющего в статистическом смысле модели факторного анализа, система факторов подвергается такому «вращению», чтобы полученная в итоге система факторов (столь же хорошо описывающая выборочные данные, что и исходная) была наиболее удобна с точки зрения содержательной интерпретации.

Именно эта неоднозначность факторных решений служит основной мишенью критики этого метода, так как понятие удобства для интерпретации разными специалистами может трактоваться различно.

Существует большое число вычислительных алгоритмов для решения уравнения (48.13), которые предназначены для использования в тех или иных случаях и имеют каждый свои достоинства и недостатки. Подробно с этими алгоритмами при необходимости можно ознакомиться в рекомендуемой литературе, а в почти каждом пакете для статистических вычислений содержатся соответствующие программы. Здесь же мы рассмотрим один пример, иллюстрирующий возможности факторного анализа.

*ПРИМЕР 48.4.* Таблица 48.3 представляет собой матрицу коэффициентов корреляции между восемью морфологическими признаками, вычисленными по выборке, состоявшей из 305 девушек (данные Г. Хармана).

*Таблица 48.3.*

| Измеряемый показатель | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост | 1,000 | | | | | | | |
| Размах рук | 0,846 | 1,000 | | | | | | |
| Длина предплечья | 0,805 | 0,881 | 1,000 | | | | | |
| Длина ноги | 0,859 | 0,826 | 0,801 | 1,000 | | | | |
| Вес | 0,473 | 0,376 | 0,380 | 0,436 | 1,000 | | | |
| Окружность бедер | 0,398 | 0,326 | 0,319 | 0,329 | 0,762 | 1,000 | | |
| Окружность груди | 0,301 | 0,277 | 0,237 | 0,327 | 0,730 | 0,583 | 1,000 | |
| Ширина груди | 0,382 | 0,415 | 0,345 | 0,365 | 0,629 | 0,577 | 0,539 | 1,000 |

Так как корреляционная матрица симметрична, то заполнена только одна ее половина. Затем с помощью так называемого центроидного метода были найдены нагрузки факторов на отдельные измеряемые показатели. При этом следует отметить, что, приступая к факторному анализу, как правило, исследователь не знает, какое число факторов окажется необходимым для описания множества экспериментальных данных. Поэтому процедуры факторного анализа предусматривают определение минимально необходимого числа факторов, обеспечивающих статистически значимое соответствие получаемых результатов с исходным для анализа материалом. В данном случае таких факторов оказалось два.

В связи с необходимостью придать полученному решению вид, удобный для содержательной интерпретации, было проведено «вращение» факторов. Полученные результаты представлены в табл. 48.4.

*Таблица 48.4.*

| Измеряемый показатель | Исходное решение Факторные нагрузки | | Финальное решение Факторные нагрузки | |
|---|---|---|---|---|
| | Фактор A | Фактор B | Фактор A | Фактор B |
| Рост | 0,830 | −0,396 | 0,879 | 0,272 |
| Размах рук | 0,818 | −0,469 | 0,919 | 0,210 |
| Длина предплечья | 0,777 | −0,470 | 0,890 | 0,182 |
| Длина ноги | 0,798 | −0,401 | 0,858 | 0,246 |
| Вес | 0,786 | 0,500 | 0,238 | 0,900 |
| Окружность бедер | 0,672 | 0,458 | 0,183 | 0,792 |
| Окружность груди | 0,594 | 0,444 | 0,135 | 0,729 |
| Ширина груди | 0,647 | 0,333 | 0,250 | 0,684 |

Анализ этой таблицы показывает, что уже исходное решение позволяет сделать предположение, что фактор B, имеющий в двух подгруппах измеряемых показателей нагрузки с разными знаками, вероятно, может быть интерпретирован как «полнота». Относительно фактора A сделать какие-то выводы по исходному решению трудно. Поэтому используется поворот осей в плоскости полученных двух факторов такой, чтобы нагрузка на измеряемые переменные для каждого фактора приближалась к 0 или 1. В результате такой процедуры получаем финальное решение, которое убеждает нас в правильности предварительного вывода о том, что фактор B может быть интерпретирован как «полнота». Кроме того, фактор A может получить наименование «стройность», так как максимальные факторные нагрузки приходятся на первые четыре показателя, имеющих прямое отношение к комплексной оценке стройности.

Уже на этом простом примере видно, какие трудности возникают при попытке дать содержательную интерпретацию и наименование факторам, выявляемым в процессе анализа.

Помимо основной задачи факторного анализа — выражения набора измеряемых показателей через линейные комбинации гипотетических факторов — есть и еще одна, которая решается в его рамках. Она является обратной к первой и связана с описанием факторов в терминах наблюдаемых показателей. Решение этой задачи позволяет оценить вклады каждого из показателей в полученные факторы, что может представлять специальный интерес, так как позволяет проранжировать измеряемые показатели по их важности при оценке фактора.

В частности, проведенные расчеты по данным о восьми морфологических признаках показали, например, что важнейшим из них по вкладу в фактор «стройность» является размах рук, и только после него идут рост, длина предплечья и, наконец, длина ноги.

В заключение хотелось бы вновь обратить внимание на некоторые проблемы, возникающие при статистическом анализе экспериментальных данных и использовании многомерных методов.

Большие возможности, которые современная вычислительная техника предоставляет исследователю, зачастую приводят к тому, что существо изучаемого объекта или процесса оказывается погребенным под огромным числом всевозможных показателей, которые не поддаются никакому разумному истолкованию. Такое бездумное использование новейших методов и средств противоречит основополагающему методологическому принципу статистики, каким является примат качества объекта, его специфическая логика. Зачастую, только получив результаты обработки экспериментальных данных, исследователь начинает выдвигать какие-то гипотезы о том, что могли бы значить эти результаты. Таким образом, то, что должно было быть в начале, появляется в конце. Естественно, что такой «голый» эмпиризм не может привести к существенным научным результатам и дает повод для критики тем, кто отрицательно относится к использованию строгих количественных методов в экспериментальных науках вообще.

Поэтому любой статистической обработке и постановке экспериментов должен предшествовать очень тщательный профессиональный анализ изучаемого объекта или явления. А применение статистических и других строгих количественных методов разумно и целесообразно только тогда, когда их результаты могут получать содержательную интерпретацию и быть полезны для понимания сути изучаемых явлений.

Есть огромное количество примеров, когда результаты статистического анализа сыграли существеннейшую роль при решении целого ряда задач в разных отраслях науки и техники, имеющих принципиальную значимость. Таким образом, и цифры очень важны. Но здесь исследователя подстерегает другая опасность. Числовые значения могут не отражать реального положения вещей, если предпосылки методов, в результате использования которых они были получены, не выполняются. В частности, рассмотренные выше методы многомерного анализа базируются на представлении о том, что экспериментальные данные представляют собой выборку из многомерного нормального распределения, что между измеряемыми показателями существуют линейные соотношения и т. д. Некоторые из этих требований являются более жесткими, другие — менее, но как бы то ни было, только при выполнении всех тех требований, которые оговариваются в качестве необходимых и достаточных при разработке того или

иного метода анализа, можно рассчитывать на достоверность получаемых результатов. Еще раз повторим, что рецептов на все возможные случаи, возникающие в практике статистического анализа, дать нельзя. Умение корректно использовать математические методы может появиться только при учете требований теории и практическом решении большого числа самых разных задач.

## Вопросы для самопроверки

1. В чем основное различие между факторным и компонентным анализом?
2. Какую пользу может принести метод анализа, цель которого состоит лишь в формировании новых переменных?
3. Полезны ли методы многомерного статистического анализа для предварительного исследования совокупностей данных?
4. Покажите, каким образом статистика $T^2$ может быть использована при построении доверительной области для математических ожиданий наборов многомерных нормально распределенных случайных величин в случае, когда имеется случайная выборка объема $n$.
5. Что такое линейная дискриминантная функция?
6. По каким показателям осуществляется объединение объектов в кластеры?
7. Сформулируйте в содержательных понятиях задачу из области специализации, при решении которой целесообразно провести кластерный, факторный и дискриминантный анализ.

## Упражнения и задачи

1. На десяти пациентах проверялось увеличение времени сна ($x_1$ и $x_2$) при приеме двух разных лекарств. Результаты приведены ниже:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1,9 | 0,8 | 1,1 | 0,1 | -0,1 | 4,4 | 5,5 | 1,6 | 4,6 | 3,4 |
| $x_2$ | 0,7 | -1,6 | -0,2 | -1,2 | -0,1 | 3,4 | 3,7 | 0,8 | 0,0 | 2,0 |

   Найти вектор средних, ковариационную матрицу и коэффициент корреляции.
2. Ниже приведены результаты промежуточных расчетов для веса тела в кг ($x_1$) и веса сердца в г ($x_2$) для выборок в 47 кошек и 97 котов:

$$n = 47; \quad \sum x_\alpha = \begin{pmatrix} 110{,}9 \\ 432{,}5 \end{pmatrix}; \quad \sum x_\alpha x_\alpha^T = \begin{pmatrix} 265{,}13 & 1029{,}62 \\ 1029{,}62 & 4064{,}71 \end{pmatrix}$$

$$n = 97; \quad \sum x_\alpha = \begin{pmatrix} 281{,}3 \\ 1098{,}3 \end{pmatrix}; \quad \sum x_\alpha x_\alpha^T = \begin{pmatrix} 836{,}75 & 3275{,}55 \\ 3275{,}55 & 13056{,}17 \end{pmatrix}.$$

   Определить векторы средних, ковариационные матрицы и коэффициенты корреляции. Какие содержательные выводы можно сделать из полученных результатов?
3. Операция глажения на швейной фабрике включает шесть следующих элементов:
   $x_1$ — одежда размещается на гладильной доске;
   $x_2$ — разглаживаются короткие швы;
   $x_3$ — одежда перекладывается на гладильной доске;
   $x_4$ — разглаживаются длинные швы на три четверти;
   $x_5$ — разглаживаются остатки длинных швов;
   $x_6$ — одежду вешают на вешалку.

По результатам хронометрирования этих операций у 76 работающих рассчитаны вектор выборочных средних значений и выборочная ковариационная матрица, приведенные ниже:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 9{,}47 \\ 25{,}56 \\ 13{,}25 \\ 31{,}44 \\ 27{,}29 \\ 8{,}80 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 2{,}57 & 0{,}85 & 1{,}56 & 1{,}79 & 1{,}33 & 0{,}42 \\ 0{,}85 & 37{,}00 & 3{,}34 & 13{,}47 & 7{,}59 & 0{,}52 \\ 1{,}56 & 3{,}34 & 8{,}44 & 5{,}77 & 2{,}00 & 0{,}50 \\ 1{,}79 & 13{,}47 & 5{,}77 & 34{,}01 & 10{,}50 & 1{,}77 \\ 1{,}33 & 7{,}59 & 2{,}00 & 10{,}50 & 23{,}01 & 3{,}43 \\ 0{,}42 & 0{,}52 & 0{,}50 & 1{,}77 & 3{,}43 & 4{,}59 \end{pmatrix}.$$

Необходимо:

а) найти главные компоненты;

б) определить доли первых трех компонент в общей дисперсии;

в) объяснить, изменение каких условий может привести к значительным изменениям первой главной компоненты.

4. По данным задачи 2 проверить нулевую гипотезу при уровне значимости 0,01 об отсутствии различий векторов средних значений веса тела и веса сердца у котов и кошек.

5. В 25 семьях (см. табл. 48.5) были проведены измерения длины и ширины головы первого и второго сына (соответственно $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$). Проверить нулевую гипотезу с уровнем значимости 0,05 об отсутствии различий векторов выборочных значений измеренных показателей у старших и младших сыновей в семье.

*Таблица 48.5.*

| $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 191 | 155 | 179 | 154 | 190 | 159 | 195 | 157 |
| 195 | 149 | 201 | 152 | 188 | 151 | 187 | 158 |
| 181 | 148 | 185 | 149 | 163 | 137 | 161 | 130 |
| 183 | 153 | 188 | 149 | 195 | 155 | 183 | 158 |
| 176 | 144 | 171 | 142 | 186 | 153 | 173 | 148 |
| 208 | 157 | 192 | 152 | 181 | 145 | 182 | 146 |
| 189 | 150 | 190 | 149 | 175 | 140 | 165 | 137 |
| 197 | 159 | 189 | 152 | 192 | 154 | 185 | 152 |
| 188 | 152 | 197 | 159 | 174 | 143 | 178 | 147 |
| 192 | 150 | 187 | 151 | 176 | 139 | 176 | 143 |
| 179 | 158 | 186 | 148 | 197 | 167 | 200 | 158 |
| 183 | 147 | 174 | 147 | 190 | 163 | 187 | 150 |
| 174 | 150 | 185 | 152 | | | | |

6. Приводимые в таблице 48.6 данные представляют собой характеристики семи переменных для 25 образцов почв, взятых в одном из национальных парков и использованных при исследовании реакции березы на содержание питательных веществ в почве.

$x_1$ — потери при прокаливании в % сухого веса;

$x_2$ — количество фосфора, принявшего участие в изотопном обмене на 1 г сухого веса;

$x_3$ — фосфатазная активность;

$x_4$ — количество экстрагируемого железа в мг на 100 г сухого веса;

$x_5$ — общее количество фосфора в % сухого веса;

$x_6$ — общее количество азота в % сухого веса;

$x_7$ — pH почвы.

*Таблица 48.6.*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15,2 | 71 | 467 | 1400 | 0,12 | 0,63 | 4,5 |
| 33,3 | 68 | 1060 | 460 | 0,15 | 1,19 | 4,9 |
| 68,1 | 1700 | 3310 | 1200 | 0,36 | 2,30 | 4,8 |
| 32,9 | 168 | 1392 | 2100 | 0,17 | 1,29 | 4,8 |
| 19,9 | 103 | 71 | 920 | 0,14 | 0,73 | 7,9 |
| 16,5 | 33 | 367 | 1100 | 0,06 | 0,52 | 3,8 |
| 10,6 | 193 | 352 | 1000 | 0,10 | 0,33 | 4,6 |
| 15,6 | 118 | 300 | 1900 | 0,11 | 0,61 | 4,2 |
| 11,1 | 101 | 308 | 1300 | 0,11 | 0,47 | 5,1 |
| 16,3 | 232 | 306 | 1600 | 0,12 | 0,66 | 4,4 |
| 10,0 | 51 | 212 | 1800 | 0,10 | 0,37 | 4,7 |
| 70,6 | 150 | 627 | 590 | 0,15 | 1,81 | 3,6 |
| 9,0 | 10 | 130 | 100 | 0,01 | 0,21 | 3,6 |
| 19,7 | 298 | 468 | 2200 | 0,08 | 0,63 | 4,0 |
| 26,0 | 84 | 618 | 2800 | 0,08 | 0,88 | 3,9 |
| 11,8 | 169 | 376 | 750 | 0,07 | 0,45 | 5,9 |
| 10,7 | 127 | 330 | 900 | 0,13 | 0,43 | 4,6 |
| 8,3 | 107 | 241 | 880 | 0,08 | 0,31 | 4,7 |
| 12,7 | 189 | 516 | 1300 | 0,05 | 0,33 | 4,4 |
| 15,9 | 204 | 337 | 1500 | 0,08 | 0,52 | 4,1 |
| 12,9 | 171 | 320 | 1600 | 0,06 | 0,44 | 4,1 |
| 7,5 | 54 | 316 | 890 | 0,05 | 0,28 | 4,7 |
| 22,0 | 104 | 579 | 1900 | 0,12 | 0,81 | 4,1 |
| 88,8 | 108 | 1157 | 290 | 0,06 | 0,99 | 3,2 |
| 72,2 | 175 | 1061 | 690 | 0,14 | 2,32 | 3,9 |

Необходимо провести кластерный анализ, используя разные пороговые расстояния (обратите особое внимание на почвы под номерами 3 и 5).

# V

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

•

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

•

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

# XLIX

# ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ: ВВЕДЕНИЕ, ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА, ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Этот раздел нашего курса посвящен графам — математическим объектам, интересным во всех отношениях. Приведем обширную цитату из введения к книге Ф. Харари «Теория графов» (русск. перевод, М.: Мир, 1973): «Существует несколько причин нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование ЭВМ, электротехника, машиностроние, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ.

Графы действуют притягательно и обладают эстетической привлекательностью... Хотя в теории графов много результатов, элементарных по своей природе, в ней также громадное изобилие весьма тонких комбинаторных проблем, достойных внимания самых искушенных математиков».

Теория графов — та редкая часть математики, история которой хорошо известна. Родилась она на берегах Невы, в Санкт-Петербурге, ее отцом (так же, как и алгебраической топологии) является Леонард Эйлер, опубликовавший в 1736 г. решение задачи о кенигсбергских мостах. Следующие шаги в развитии теории графов принадлежат Г. Кирхгофу, применившему ее в 1847 г. к теории электрических цепей (законы Кирхгофа) и А. Кэли, разработавшему в 1857 г. теорию деревьев и ее приложения к теории химических изомеров.

Родившись при решении головоломок и занимательных задач, в XX веке теория графов стала мощным средством решения проблем многих наук, ее широкая приложимость стала дополнительным стимулом бурного развития. Сам термин граф ровно на 200 лет моложе, он введен в употребление в 1936 г. выдающимся венгерским математиком Д. Кенигом.

## § 49.1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА. ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Графы бывают двух типов — неориентированные и ориентированные. В нашем курсе мы будем в основном заниматься ориентированными графами, поскольку они чаще встречаются в приложениях.

**Определение 49.1.** *Ориентированным графом ($\Leftrightarrow$ орграфом $\Leftrightarrow$ графом) будем называть тройку $G(X,U,f)$, где $X$ $(\neq \varnothing)$ — множество, называемое множеством вершин графа, $U$ (возможно и пустое) — множество, называемое множеством дуг, $f$ — отображение, действующее из $U$ в $X \times X$, называемое отображением инцидентности.*

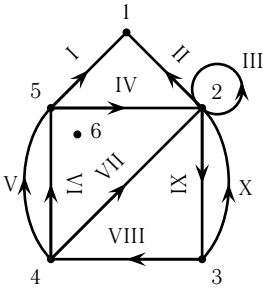



*Рис. 49.1.*

● *ПРИМЕР 49.1.* На рис. 49.1 изображен граф $G(X,U,f)$:

$$X=\{1;2;3;4;5;6\}$$
$$U=\{\mathrm{I};\mathrm{II};\ldots;\mathrm{X}\}$$
$$f(\mathrm{I})=(5;1);\quad f(\mathrm{II})=(2;1),$$
$$f(\mathrm{III})=(2;2);\quad f(\mathrm{IV})=(5;2),$$
$$f(\mathrm{V})=(4;5);\quad f(\mathrm{VI})=(4;5),$$
$$f(\mathrm{VII})=(4;2);\quad f(\mathrm{VIII})=(3;4),$$
$$f(\mathrm{IX})=(2;3);\quad f(\mathrm{X})=(3;2).$$

Введем в рассмотрение стандартные отображения

$$p_1: X\times X\ \to\ X\quad\text{и}\quad p_2: X\times X\ \to\ X$$

следующим правилом:

$$p_1\big((x;y)\big)=x;\qquad p_2\big((x;y)\big)=y.$$

Пусть $G(X,U,f)$ — граф, $u\ (\in U)$ — дуга. Назовем вершину $(p_1\circ f)(u)$ началом дуги $u$, вершину $(p_2\circ f)(u)$ — концом дуги $u$.

Дуги $u\ (\in U)$ и $v\ (\in U)$ называются параллельными (кратными), если $f(u)=f(v)$.

Дуги $u\ (\in U)$ и $w\ (\in U)$ называются противоположными, если

$$f(u)=\big((p_2\circ f)(w);(p_1\circ f)(w)\big).$$

Дуга $t\ (\in U)$ называется петлей в вершине $x$, если $f(t)=(x;x)$. Если $f(u)=(x;y)$, то говорят, что дуга $u$ инцидентна вершинам $x$ и $y$. Вершина $x\ \ (x\in X)$ называется изолированной, если

$$f^{-1}\big((X\setminus\{x\})\times\{x\}\big)=f^{-1}\big(\{x\}\times(X\setminus\{x\})\big)=\varnothing.$$

Для графа на рис. 49.1 дуги V и VI параллельны, IX и X — противоположны, III — петля в вершине 2, вершина 6 — изолированная вершина. Вершина 2 инцидентна дугам II, III, IV, X, IX и VII.

● *ПРИМЕР 49.2 (Граф шахматной игры).* Множество вершин этого графа — множество позиций шахматной игры (позиция — диаграмма расположения фигур и указание «чей предстоит ход»). Дуги графа шахматной игры — такие упорядоченные пары позиций, в которых вторая может быть получена из первой по правилам шахматной игры за один ход. Отображение инцидентности — это отображение вложения множества дуг в декартово произведение вершин.

Сама шахматная игра может рассматриваться как игра двух лиц на графе шахматной игры. «Белые» находятся в вершине, отвечающей началу игры (исходная расстановка, ход белых), и совершают ход, т. е. выбирают одну из дуг, выходящих из этой вершины. «Черные» получают ход в вершине, соответствующей концу этой дуги, и т. д. Цель игры — «загнать» противника в такую вершину $x$, что $f^{-1}(\{x\}\times X)=\varnothing$, т. е. в безвыходное положение.

### 49.1.1. ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФА

**Определение 49.2.** *Граф* $G(X,U,f)$ *называют конечным, если* $|X|<\infty$, $|U|<\infty$.

*В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные графы (не оговаривая это дополнительно). Пусть* $x$ $(\in X)$ *— вершина графа* $G(X,U,f)$, *поставим ей в соответствие три числа:* $\deg_+ x$, $\deg_- x$, $\deg x$:

$$\begin{aligned}\deg_+ x &= \left|f^{-1}(X\times\{x\})\right| \text{ — число входящих в вершину } x \text{ дуг},\\ \deg_- x &= \left|f^{-1}(\{x\}\times X)\right| \text{ — число выходящих из вершины } x \text{ дуг},\\ \deg x &= \deg_+ x + \deg_- x.\end{aligned}$$

$\deg_+ x$ *называют полустепенью захода в вершину* $x$, $\deg_- x$ *— полустепенью исхода из вершины* $x$, $\deg x$ *называют степенью вершины* $x$.

Очевидно, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 49.1 (Теорема Эйлера)**
Для любого графа $G(X,U,f)$ имеют место соотношения

$$\sum_{x\in X}\deg_+ x = \sum_{x\in X}\deg_- x = |U|, \tag{49.1}$$

$$\sum_{x\in X}\deg x = 2|U|. \tag{49.2}$$

$$|U| = \left|f^{-1}(X\times X)\right| = \left|f^{-1}\left(\bigcup_{x\in X}(X\times\{x\})\right)\right| = \left|\bigcup_{x\in X} f^{-1}\big(X\times\{x\}\big)\right| =$$
$$= \sum_{x\in X}\left|f^{-1}(X\times\{x\})\right| = \sum_{x\in X}\deg_+ x = \text{аналогично} = \sum_{x\in X}\deg_- x.$$

Соотношение (49.2) — это следствие соотношения (49.1).

*Замечание 49.1.* Множества $f^{-1}(X\times\{x\})$ попарно не пересекаются.

**ТЕОРЕМА 49.2 (Теорема Эйлера о рукопожатиях)**
В любом конечном графе $G(X,U,f)$ число вершин нечетной степени четно или равно нулю.

Представим множество вершин $X$ в виде $X = X_{\text{чет}}\cup X_{\text{неч}}$, отнеся к $X_{\text{чет}}$ такие вершины $x$, у которых $\deg x = 2\cdot k_x$, $k_x\in\mathbb{Z}_+$; а к $X_{\text{неч}}$ такие вершины $x$, у которых $\deg x = 2\cdot k_x+1$, $k_x\in\mathbb{Z}_+$.

Тогда, воспользовавшись соотношением (49.2), получаем

$$2\cdot|U| = \sum_{x\in X}\deg x = \sum_{x\in X_{\text{чет}}}\deg x + \sum_{x\in X_{\text{неч}}}\deg x = 2\cdot\sum_{x\in X_{\text{чет}}}k_x + 2\cdot\sum_{x\in X_{\text{неч}}}k_x +$$
$$+\sum_{x\in X_{\text{неч}}}1 = 2\cdot\sum_{x\in X}k_x + |X_{\text{неч}}| \Longrightarrow |X_{\text{неч}}| = 2|U| - 2\sum_{x\in X}k_x = 2\left(|U| - \sum_{x\in X}k_x\right).$$

Правая часть кратна 2 или равна нулю, значит $|X_{\text{неч}}|$ кратно 2 или равно нулю.

Возможная интерпретация данной теоремы такова: на любом мероприятии (приеме, банкете и т. п.) число лиц, совершивших нечетное число рукопожатий, четно или таких лиц нет вовсе.

Графы принято интерпретировать (изображать) рисунками, на которых вершинам соответствуют помеченные точки, а дугам — линии со стрелками, соединяющие вершины (см. рис. 49.1). Само название «граф» происходит от их графической интерпретации.

### Вопросы в конце параграфа

1. Сравните между собой условия теорем 49.1 и 49.2. Почему условия теоремы 49.1 слабее?
2. Оцените сверху количество дуг графа с $n$ вершинами без петель, противоположных и параллельных дуг.
3. Какому условию должен удовлетворять граф с бесконечным множеством вершин, чтобы для него была справедлива теорема 49.1?

## § 49.2. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ. ПЛОСКИЕ И НЕПЛОСКИЕ ГРАФЫ. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ В $\mathbb{R}_3$. ПУТИ, ЦЕПИ, КОНТУРЫ, ЦИКЛЫ

### 49.2.1. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Похожесть и непохожесть однотипных объектов в математике определяется понятием «изоморфизм».

**Определение 49.3.** *Графы $G_1(X_1, U_1, f_1)$ и $G_2(X_2, U_2, f_2)$ называются изоморфными (пишут $G_1 \simeq G_2$), если существуют биективные отображения $\varphi\colon X_1 \to X_2$ и $\psi\colon U_1 \to U_2$ такие, что*

$$(p_i \circ f_1 \circ \psi)(u) = (\varphi \circ p_i \circ f_1)(u), \quad \forall u \in U,\ i = 1, 2.$$

*(Иначе $p_1 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_1 \circ f_1$ и $p_2 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ p_2 \circ f_1$).*

*ПРИМЕР 49.3.* Рассмотрим графы, изображенные на рис. 49.2:

Очевидно, $G_1 \simeq G_2$, $G_1 \not\simeq G_3$, $G_3 \not\simeq G_4$.

Изоморфизм $G_1 \simeq G_2$ реализуют отображения $\varphi$ и $\psi$, заданные следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = 4, \quad \varphi(3) = 1, \quad \varphi(4) = 3.\\ \psi(\mathrm{I}) = \mathrm{II}, \quad \psi(\mathrm{II}) = \mathrm{VI}, \ \psi(\mathrm{III}) = \mathrm{V}, \ \ \psi(\mathrm{IV}) = \mathrm{IV},\\ \psi(\mathrm{V}) = \mathrm{III} \ \ \psi(\mathrm{VI}) = \mathrm{I}.\end{gathered}$$

**ТЕОРЕМА 49.3**

Изоморфизм — отношение эквивалентности на множестве графов $\mathcal{G}$, т. е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно:

1. $\forall G\ (\in \mathcal{G}) \quad G \simeq G$;
2. $\forall G_1\ \forall G_2 \quad (G_1 \simeq G_2 \implies G_2 \simeq G_1)$;
3. $\forall G_1\ \forall G_2\ \forall G_3 \quad \big((G_1 \simeq G_2) \cdot (G_2 \simeq G_3) \implies (G_1 \simeq G_3)\big)$.

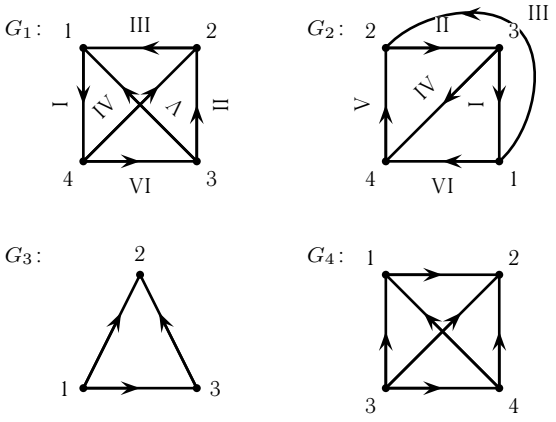



*Рис. 49.2.*

Доказательство теоремы основано на том, что

а) тождественное отображение биективно;

б) биективные отображения обратимы и обратные к ним биективны;

в) композиция биективных отображений биективна.

### 49.2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРАФЫ. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ГРАФОВ

**Определение 49.4.** *Геометрическим графом называется граф, у которого множество вершин — множество отмеченных точек в $\mathbb{R}_2$ или $\mathbb{R}_3$, множество дуг — множество параметризованных отрезков непрерывных кривых в $\mathbb{R}_2$ или в $\mathbb{R}_3$, концами которых являются соответствующие им вершины графа.*

Все графы, приведенные раньше на рисунках, можно считать геометрическими.

**ТЕОРЕМА 49.4**

Для любого графа существует изоморфный ему геометрический граф (и в $\mathbb{R}_2$, и в $\mathbb{R}_3$), называемый его геометрической реализацией.

Вершинам графа поставим в соответствие помеченные точки плоскости или пространства, а дуги изобразим параметризованными отрезками прямых или дуг окружностей.

**Определение 49.5.** *Геометрический граф называется правильно реализованным (или правильным), если его дуги не имеют общих точек, отличных от вершин графа.*

*ПРИМЕР 49.4.* Рассмотрим графы, изображенные на рис. 49.3:

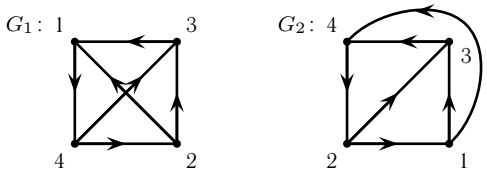



*Рис. 49.3.*

Граф $G_1$ на рис. 49.3 не является правильно реализованным, граф $G_2$ на этом же рисунке — правильный. (Заметим, что $G_1 \simeq G_2$, т. е. $G_2$ — правильная реализация $G_1$).

**ТЕОРЕМА 49.5**
Для любого графа существует его правильная реализация в $\mathbb{R}_3$.

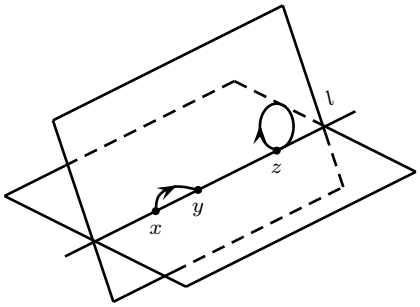



*Рис. 49.4.*

● Опишем конструкцию, позволяющую построить правильную реализацию. Возьмем в $\mathbb{R}_3$ произвольную прямую $l$, вершинам графа $G(X, U, f)$ поставим в соответствие отмеченные точки на этой прямой (точки будем обозначать теми же буквами, что и вершины графа $G$).

Каждой дуге графа $G$ будет соответствовать своя плоскость, проходящая через $l$. Если дуга $u \in U$ такова, что $f(u) = (x; y)$, $x \neq y$, то в соответствующей плоскости построим на отрезке $[x; y]$ как на диаметре полуокружность, параметризованную от $x$ к $y$; если $w \in U$ и $f(w) = (z; z)$, то в соответствующей плоскости изобразим единичную окружность, касательную к $l$ в точке $z$, параметризованную произвольно (см. рис. 49.4). ●

**Определение 49.6.** *Граф называется плоским ($\Leftrightarrow$ планарным), если у него существует правильная реализация в $\mathbb{R}_2$.*

**Определение 49.7.** *Полным графом $K_n$ ($n \in \mathbb{N}$) называется граф с $n$ вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого любые две вершины соединены дугой (см. рис. 49.5).*

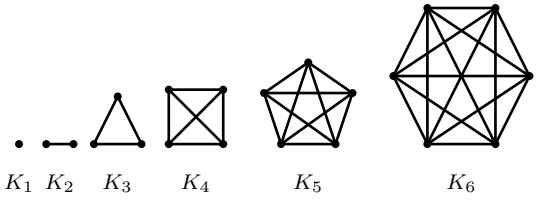



*Рис. 49.5.*

**Определение 49.8.** *Полным двудольным графом $K_{n,m}$, $n \leqslant m$ называется граф с $n + m$ вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества с $n$ и $m$ вершинами так, что любые две вершины различных подмножеств соединены дугой и никакие две вершины одного подмножества не соединены дугой.*

● *ПРИМЕР 49.5.* На рисунке 49.6 изображены полные двудольные графы $K_{1,1}$; $K_{1,2}$; $K_{2,3}$; $K_{3,3}$.

*Рис. 49.6.*

Оказывается (и это доказали почти одновременно и независимо российский математик Л. С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский), не являются плоскими графы $K_5$ и $K_{3,3}$ и графы, части которых устроены «подобно» $K_5$ и $K_{3,3}$. (Подробно и точно о критерии планарности Понтрягина–Куратовского см. в книге Ф. Харари «Теория графов». М.: Мир, 1973). Смысл и значение этого факта и теоремы 49.5 о правильной реализуемости в $\mathbb{R}_3$ для микроэлектроники трудно переоценить. Фактически, из-за графов $K_5$ и $K_{3,3}$ пришлось создавать технологию многослойных печатных плат или микросхем в виде сэндвичей. С графом $K_{3,3}$ связана и головоломка о трех домах и трех колодцах (см. Л. Кэрролл, «Алиса в стране чудес»).

### 49.2.3. ПУТИ, ЦЕПИ, КОНТУРЫ, ЦИКЛЫ

**Определение 49.9.** *Путем длины $n$, $n \in \mathbb{N}$ на графе $G(X, U, f)$ называется отображение $\mu\colon [1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ такое, что*

$$(p_2 \circ f \circ \mu)(i-1) = (p_1 \circ f \circ \mu)(i), \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

*Вершина $(p_1 \circ f \circ \mu)(1)$ называется началом пути $\mu$, вершина $(p_2 \circ f \circ \mu)(n)$ — концом пути $\mu$.*

*Если $(p_1 \circ f \circ \mu)(1) = (p_2 \circ f \circ \mu)(n)$, то путь называется контуром.*

*Если отображение $\mu$ инъективно, то путь (контур) называется простым.*

Таким образом, путь длины $n$ — это такая последовательность $n$ дуг, в которой каждая последующая дуга начинается в вершине, в которой заканчивается предыдущая.

**Определение 49.10.** *Цепью длины $n$, $n \in \mathbb{N}$ на графе $G(X, U, f)$ называется отображение $\eta\colon [1; n]_{\mathbb{N}} \to U$ такое, что у любой дуги $\eta(i)$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ одна инцидентная вершина — общая с дугой $\eta(i-1)$, а другая — общая с дугой $\eta(i+1)$.*

*Вершина дуги $\eta(1)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(2)$, называется началом цепи, вершина дуги $\eta(n)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(n-1)$, называется концом цепи.*

*Если начало цепи совпадает с ее концом, цепь называется циклом.*

*Если отображение $\eta$ инъективно, то цепь (цикл) называется простым.*

Иными словами, цепь длины $n$ — это такая последовательность дуг, в которой каждая дуга имеет одну инцидентную вершину, общую с предыдущей дугой, а вторую — с последующей.

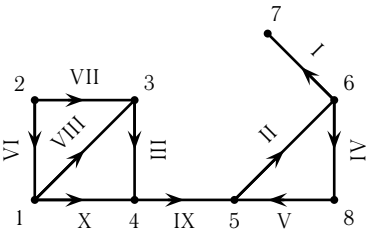


*Рис. 49.7.*

*ПРИМЕР 49.6.* Рассмотрим на графе $G$ (рис. 49.7):

$\mu(1) = \text{VI}$; $\mu(2) = \text{VIII}$; $\mu(3) = \text{III}$;
$\mu(4) = \text{IX}$; $\mu(5) = \text{II}$; $\mu(6) = \text{IV}$;
$\mu(7) = \text{V}$; $\mu(8) = \text{II}$; $\mu(9) = \text{I}$

— путь длины 9 из 2-й вершины в 7-ю вершину.

$$\eta(1) = \text{VII}; \quad \eta(2) = \text{III}; \quad \eta(3) = \text{IX}; \quad \eta(4) = \text{V}$$

— цепь длины 4 из 2-й в 8-ю вершину.

$$\mu_1(1) = \text{VI}; \quad \mu_1(2) = \text{VII}; \quad \mu_1(3) = \text{VIII}$$

— контур длины 3.

$$\eta_1(1) = \text{VI}; \quad \eta_1(2) = \text{X}; \quad \eta_1(3) = \text{III}; \quad \eta_1(4) = \text{VII}$$

— цикл длины 4.

**Лемма 49.1 (Лемма о простом пути)** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $x; y\ (\in X)$ — такие вершины, что существует путь $\mu_{xy}$ длины $n_{xy}$ с началом в вершине $x$ и концом в вершине $y$, тогда существует простой путь $\mu'_{xy}$ длины $n'_{xy}$ с началом в вершине $x$ и концом в вершине $y$, причем*

$$n'_{xy} \leqslant n_{xy}.$$

● Возможны два случая:

а) отображение $\mu_{xy}$ — инъективно, тогда $\mu'_{xy} = \mu_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы доказано (тривиально).

б) отображение $\mu_{xy}$ не является инъективным, значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\mu_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

Упорядочим элементы множества $\mu_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$$\mu_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n_{xy}.$$

Образуем путь $\mu_{1\,xy}$ длины $n_{1\,xy} = n_{xy} - (i_k - i_1)$, соединяющий $x$ с $y$, положив

$$\mu_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \mu_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant i_1; \\ \mu_{xy}\left(i + (i_k - i_1)\right), & \text{если } i_1 < i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1). \end{cases}$$

При этом

$$\left|\mu_1^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| = 1; \quad \mu_{1\,xy}^{-1}(\{u\}) \subset \mu_{xy}^{-1}(\{u\})$$

для любой дуги $u$, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\mu_{1\,xy}$ — инъективно, полагаем $\mu'_{xy} = \mu_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\mu_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим путь $\mu_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется, и требуемый простой путь будет построен. ●

**Лемма 49.2 (Лемма о простой цепи)** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $x, y\ (\in X)$ — такие вершины, что существует цепь $\eta_{xy}$ длины $n_{xy}$, соединяющая $x$ с $y$. Тогда существует простая цепь $\eta'_{xy}$ длины $n'_{xy}$, соединяющая $x$ с $y$, причем*

$$n'_{xy} \leqslant n_{xy}.$$

● Возможны два случая:

а) отображение $\eta_{xy}: [1; n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ — инъективно, тогда $\eta'_{xy} = \eta_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы тривиально доказано.

б) отображение $\eta_{xy}: [1; n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$ не является инъективным. Значит, существует такая дуга $\overline{u} \in U$, что

$$\left|\eta_{xy}^{-1}\left(\{\overline{u}\}\right)\right| \geqslant 2.$$

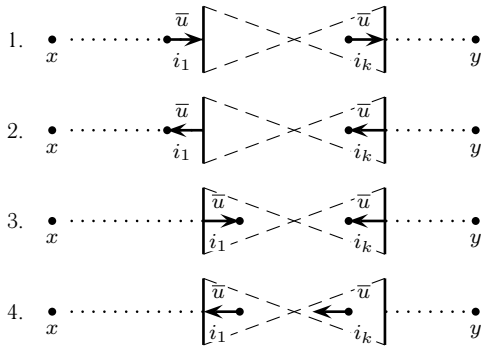



*Рис. 49.8.*

Упорядочим элементы множества $\eta_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\})$ в порядке возрастания, т. е.

$$\eta_{xy}^{-1}(\{\overline{u}\}) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n_{xy}.$$

Для трассы цепи $\eta_{xy}$ возможны четыре случая (см. рис. 49.8):

Построим цепь $\eta_{1\,xy}$, соединяющую $x$ с $y$, в случаях 1 и 2 по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant i_1; \\ \eta_{xy}(i + (i_k - i_1)), & \text{если } i_1 < i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1), \end{cases}$$

а в случаях 3 и 4 — по правилу

$$\eta_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \eta_{xy}(i), & \text{если } 1 \leqslant i < i_1; \\ \eta_{xy}(i + (i_k - i_1) + 1), & \text{если } i_1 \leqslant i \leqslant n_{xy} - (i_k - i_1) - 1, \end{cases}$$

При этом в случаях 1 и 2

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}(\{\overline{u}\})\right| = 1, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}(\{u\}) \subset \eta_{xy}^{-1}(\{u\})$$

для любой дуги $u$, отличной от $\overline{u}$, а в случаях 3 и 4

$$\left|\eta_{1\,xy}^{-1}(\{\overline{u}\})\right| = \varnothing, \quad \eta_{1\,xy}^{-1}(\{u\}) \subset \eta_{xy}^{-1}(\{u\})$$

для любой дуги $u$, отличной от $\overline{u}$. Тогда, если $\eta_{1\,xy}$ инъективно, полагаем $\eta'_{xy} = \eta_{1\,xy}$; $n'_{xy} = n_{1\,xy}$, а если $\eta_{1\,xy}$ не является инъективным отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим цепь $\eta_{2\,xy}$ длины $n_{2\,xy} < n_{1\,xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется, и искомая простая цепь $\eta'_{xy}$ будет построена. ●

**Лемма 49.3 (Лемма об инвертировании цепи)** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф; $x, y$ $(\in X)$ — вершины, такие, что существует цепь $\eta_{xy}$ длины $n_{xy}$, соединяющая $x$ с $y$, тогда существует цепь $\eta_{xy}^{-}$ длины $n_{xy}$, ведущая из $y$ в $x$.*

● Очевидно, отображение $\eta_{xy}^{-}: [1; n_{xy}]_{\mathbb{N}} \to U$, заданное равенством

$$\eta_{xy}^{-}(i) = \eta_{xy}(n_{xy} - i + 1),$$

является искомой цепью из $y$ в $x$. Говорят, что цепь $\eta_{xy}^{-}$ получена инвертированием цепи $\eta_{xy}$. ●

### Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Очевидно, что всякий путь является цепью и не всякая цепь является путем.
2. Докажите, что если $G_1(X_1, U_1, f_1) \simeq G_2(X_2, U_2, f_2)$ и $\varphi$, $\psi$ — пара биективных отображений, реализующих этот изоморфизм, то для любой вершины $x \in X_1$ справедливо:
$$\deg_+ x = \deg_+ \varphi(x);$$
$$\deg_- x = \deg_- \varphi(x);$$
$$\deg x = \deg \varphi(x).$$
(Характеристики $\deg_+$, $\deg_-$, $\deg$ в левой части равенств вычисляются для графа $G_1$, а в правой части — для $G_2$).
3. Проверьте, что $\eta^-_{xy}$ в лемме 49.3 действительно является цепью.

## § 49.3. ЧАСТИ ГРАФА: ПОДГРАФ, ЧАСТИЧНЫЙ ГРАФ. СВЯЗНОСТЬ И СИЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ, КОМПОНЕНТЫ. МОСТЫ ГРАФА. ЭЙЛЕРОВОСТЬ ГРАФА

### 49.3.1. ЧАСТИ ГРАФА

В задачах теории графов иногда приходится изучать не весь граф в целом, а какие-то его части.

**Определение 49.11.** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $U' \subset U$. Частичным графом графа $G$, порожденным $U'$, называется граф $G(X, U', f\big|_{U'})$. Здесь $f\big|_{U'}$ — ограничение отображения $f : U \to X \times X$ на множество $U'$, т. е. $f\big|_{U'} : U' \to X \times X$ по правилу*
$$\left(f\Big|_{U'}\right)(u) = f(u) \quad \forall u \in U'.$$

*ПРИМЕР 49.7.* Пусть $G$ — схема дорог Ростовской области. Схема дорог Ростовской области с асфальтовым покрытием — частичный граф графа $G$.

**Определение 49.12.** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф, $X'$ $(\neq \varnothing) \subset X$. Подграфом графа $G$, порожденным множеством $X'$, называется граф $G(X', U_{X'}, f\big|_{U_{X'}})$, где*
$$U_{X'} = f^{-1}(X' \times X').$$

*ПРИМЕР 49.8.* Схема дорог Багаевского района Ростовской области — подграф схемы дорог Ростовской области.

Сам граф $G$ по отношению к своим подграфам и частичным графам называется надграфом (суграфом или суперграфом).

### 49.3.2. КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ И СИЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

**Определение 49.13.** *Пусть $x$ — вершина графа $G(X, U, f)$, свяжем с ней множество $C_x$, определенное следующим образом:*
$$y \in C_x \iff (y = x) \vee (\text{существует цепь, ведущая из } x \text{ в } y).$$

**ТЕОРЕМА 49.6 (Свойства множеств $C_x$)**
Множества $C_x$ обладают следующими свойствами:
$1^{\circ}$ . $\forall x\ (\in X)\quad C_x \neq \varnothing$;
$2^{\circ}$ . $\forall x\ \forall y\quad (C_x \cap C_y \neq \varnothing \implies C_x = C_y)$;
$3^{\circ}$ . $\bigcup_{x\in X} C_x = X$.

● ●$_1$ Из определения множества $C_x$ следует, что $x \in C_x$ и значит $C_x \neq \varnothing$.

●$_3$ Так как $x \in C_x$, то $\{x\} \subset C_x$, тогда $X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subset \bigcup_{x\in X} C_x \subset X$. Так как слева и справа в последней цепочке одно и то же множество $X$, то всюду в этой цепочке стоят знаки равенства.

●$_2$ Пусть $C_x \cap C_y \neq \varnothing$. Значит существует вершина $z \in C_x \cap C_y$. Так как $z \in C_x$, то существует цепь $\eta_{xz}$ длины $n_{xz}$, ведущая их $x$ в $z$. Так как $z \in C_y$, то существует цепь $\eta_{yz}$ длины $n_{yz}$, ведущая из $y$ в $z$. Пусть $t$ — произвольная вершина из $C_y$, тогда существует цепь $\eta_{yt}$ длины $n_{yt}$, ведущая из $y$ в $t$. Рассмотрим цепь $\eta_{xt}$ длины $n_{xz} + n_{yz} + n_{yt}$, заданную правилом:

$$\eta_{xt}(i) = \begin{cases} \eta_{xz}(i), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n_{xz}, \\ \eta_{yz}^{-}(i - n_{xz}), & \text{если } n_{xz} < 1 \leqslant n_{xz} + n_{yz}, \\ \eta_{yt}(i - n_{xz} - n_{yz}), & \text{если } n_{xz} + n_{yz} < i \leqslant n_{xz} + n_{yz} + n_{yt}. \end{cases}$$

Она начинается в вершине $x$ и заканчивается в вершине $t$, значит $t \in C_x$, а так как $t$ — произвольная вершина из $C_y$, то

$$C_y \subset C_x.$$

Совершенно аналогично показывается, что если $C_z \cap C_y \neq \varnothing$, то

$$C_x \subset C_y.$$

Значит, $C_x = C_y$. ●

**Определение 49.14.** *Компонентой связности вершины $x$ графа $G(X, U, f)$ называется подграф, порожденный $C_x$.*

**Определение 49.15.** *Числом связности графа $G(X, U, f)$ называется число его различных компонент связности. Число связности обозначается $c(G)$.*

● *ПРИМЕР 49.9.* Рассмотрим граф $G$, изображенный на рис. 49.9.

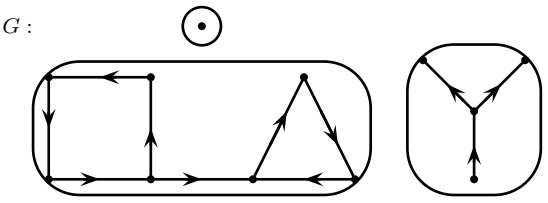



*Рис. 49.9.*

Для этого графа $c(G) = 3$. На рисунке обведены три различных компоненты связности графа $G$.

**Определение 49.16.** *Граф $G$ называется связным, если $c(G) = 1$, и несвязным, если $c(G) > 1$.*

**Определение 49.17.** *Пусть $x$ — вершина графа $G(X,U,f)$, свяжем с ней множество ${}_sC_x$, определенное следующим:*

$$y \in {}_sC_x \iff (y = x) \vee (\text{(существует путь, ведущий из } x \text{ в } y) \wedge (\text{существует путь, ведущий из } y \text{ в } x)).$$

**ТЕОРЕМА 49.7 (Свойства множеств ${}_sC_x$)**
Множества ${}_sC_x$ обладают следующими свойствами:
$1^\circ$ . $\forall x\,(\in X) \quad {}_sC_x \neq \varnothing$;
$2^\circ$ . $\forall x\,\forall y \quad ({}_sC_x \cap {}_sC_y \neq \varnothing \implies {}_sC_x = {}_sC_y)$;
$3^\circ$ . $\bigcup_{x\in X} {}_sC_x = X$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 49.6.

**Определение 49.18.** *Компонентой сильной связности вершины $x$ графа $G(X,U,f)$ называется подграф, порожденный множеством ${}_sC_x$ — $G\big({}_sC_x, U_{{}_sC_x}, f\big|_{U_{{}_sC_x}}\big)$.*

**Определение 49.19.** *Числом сильной связности графа $G$ называется число его различных компонент сильной связности. Число сильной связности графа $G$ обозначается $sc(G)$.*

*ПРИМЕР 49.10.* Рассмотрим граф $G$, изображенный на рис. 49.10.

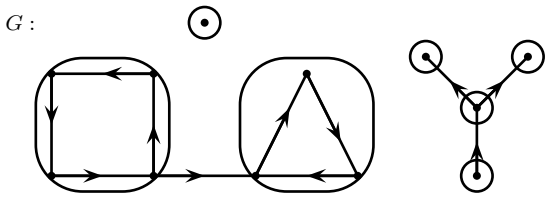



*Рис. 49.10.*

$sc(G) = 7$. Обведены различные компоненты сильной связности графа $G$.

**ТЕОРЕМА 49.8**
Для любой вершины $x$ графа $G(X,U,f)$ имеет место

$${}_sC_x \subset C_x.$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что всякий путь является цепью.

*Следствие 49.1.* Для любого конечного графа $G(X,U,f)$ имеет место:

$$1 \leqslant c(G) \leqslant sc(G) \leqslant |X|\,. \tag{49.3}$$

Крайние оценки очевидны, а внутренняя следует из теоремы 49.8.

### 49.3.3. МОСТЫ ГРАФА

**Определение 49.20.** *Дуга и графа $G(X,U,f)$ называется мостом, если*

$$c(G) < c(G'_u), \quad \text{где } G'_u = G\Big(X, U \setminus \{u\}, f\Big|_{U\setminus\{u\}}\Big).$$

*ПРИМЕР 49.11.* Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 49.11. Ясно, что дуга, помеченная надписью «мост», является мостом, а дуга, помеченная надписью «не является мостом», не является мостом.

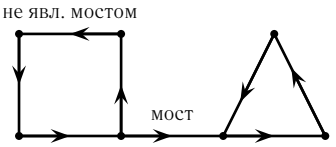



*Рис. 49.11.*

**ТЕОРЕМА 49.9 (Теорема о мостах)**
Если $u_0$ — мост графа $G(X,U,f)$, то

$$C(G) + 1 = c\left(G'_{u_0}\right). \tag{49.4}$$

Так как каждая дуга графа находится внутри компоненты связности, то при удалении моста «разваливается» только та компонента связности, которой он принадлежал. Значит, достаточно показать, что при удалении моста из компоненты, которой он принадлежал, получается ровно два осколка, т. е. нужно доказать следующую теорему:
**Теорема 25.9′** *Если $u_0$ — мост графа $G(X,U,f)$ и $c(G) = 1$, то $c\left(G'_{u_0}\right) = 2$.*

Предположим противное, т. е. что существует такой граф $G$ и мост $u_0$ на нем, что

$$c(G) = 1, \qquad \text{а} \quad c\left(G'_{u_0}\right) \geqslant 3.$$

Последнее означает, что в графе $G'_{u_0}$ существуют вершины $x$, $y$, $z$, лежащие в разных компонентах связности. Исходный граф был связен, значит, на нем существовала цепь $\eta_{xy}$, ведущая из $x$ в $y$, и цепь $\eta_{xz}$, ведущая из $x$ в $z$. Можно считать (по лемме 49.2), что эти цепи простые. На графе $G'_{u_0}$ вершины $x$, $y$, $z$ лежат в разных компонентах связности, значит, на нем нет цепей, соединяющих $x$ с $y$ и $x$ с $z$, следовательно, цепи $\eta_{xy}$ и $\eta_{xz}$ «разорвались», а так как переход от $G$ к $G'_{u_0}$ осуществлен удалением дуги $u_0$, то эти цепи проходили через дугу $u_0$. Возможные комбинации трасс цепей таковы (см. рис. 49.12).

«Куски» цепей, спрятанные за ..., не содержат дуги $u_0$ (так как цепи простые) и значит не пострадают при удалении дуги $u_0$. Тогда из инвертированного фрагмента

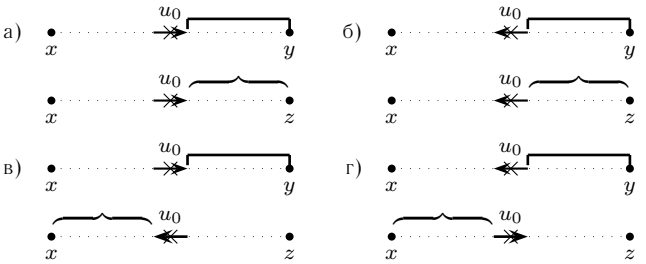



*Рис. 49.12.*

«$\overline{\qquad}$» на цепи $\eta_{xy}$ и фрагмента «$\overbrace{\qquad}$» на цепи $\eta_{xz}$ в случаях а), б) склеивается цепь, соединяющая вершину $y$ с вершиной $z$. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах связности графа $G'_{u_0}$. В случаях в), г) из фрагментов «$\overbrace{\qquad}$» и «$\overline{\qquad}$» склеивается цепь, соединяющая вершину $x$ с вершиной $y$. Это противоречит тому, что эти вершины лежат в разных компонентах графа $G'_{u_0}$. Полученные противоречия доказывают теорему 49.9′ и 49.9. ●

### Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Почему в определениях 49.15 и 49.19 слово «различных» подчеркнуто?
2. Докажите, что каждая дуга графа лежит внутри какой-то компоненты связности (т. е. ее начальная и конечная вершины находятся в одной компоненте связности).
3. Постройте граф $G(X, U, f)$ такой, что
$$|X| = 10, \quad c(G) = 3, \quad sc(G) = 5.$$
4. Докажите, что
$$sc(G) = c(G) \iff \forall x\ (\in X)\ C_x = {}_sC_x.$$

## § 49.4. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ, КРИТЕРИЙ ЭЙЛЕРОВОСТИ

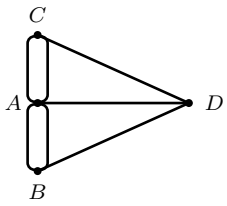



*Рис. 49.13.*

В этом параграфе мы возвращаемся к истокам теории графов и задачам, которыми занимался великий Леонард Эйлер. Отправной точкой для него послужила знаменитая задача о кенигсбергских мостах, которая теперь стала неотъемлемой принадлежностью любого учебника по теории графов. Семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининград) расположены на реке Прегель так, как изображено на рис. 49.14, соединяя между собой его (города) части $A$, $B$, $C$, $D$. Задача состоит в следующем: «Найти такую точку города, выйдя из которой, можно пройти по всем мостам города по одному разу и вернуться в нее обратно». Эйлер показал, что эта задача не имеет решения. На каждом куске суши Эйлер отметил по одной точке, а мосты города изобразил линиями, соединяющими соответствующие точки. В результате получился граф, изображенный на рис. 49.13 (ориентация дуг неважна).

**Определение 49.21.** *Связный граф называется эйлеровым, если на нем существует простой цикл, проходящий через все дуги графа (простой, проходящий через все дуги, т. е. проходящий по одному разу через каждую дугу).*

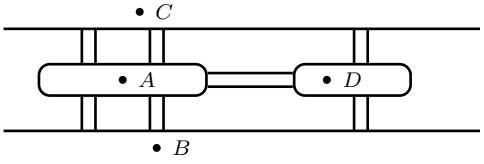



*Рис. 49.14.*

**Лемма 49.4.** *Если степень каждой вершины конечного графа четна, то на графе существует хотя бы один простой цикл.*

● Наличие хотя бы одной петли делает лемму тривиальной. Рассмотрим случай графа без петель. Возьмем произвольную вершину графа. Так как ее степень четна, то существует по крайней мере две дуги, для которых она является граничной, выйдем по одной из этих дуг из этой вершины (не обязательно по ее ориентации). Вершина, в которую мы придем, также имеет четную степень, и значит, кроме дуги, по которой мы пришли, есть еще хотя бы одна, по которой можно из этой вершины уйти. «Уничтожим» после прохождения через вершину дуги «прихода» и «ухода». При этом степень пройденной вершины уменьшилась на 2, а значит, осталась четной. Таким образом, мы показали, что условие четности степеней вершин — это условие «незастревания» в них, и это условие наследуется при уничтожении пройденных дуг. Двигаясь таким образом по конечному графу, не застревая в его вершинах, мы не можем все время оказываться в вершинах, в которых мы не побывали ранее (так как в конечном графе конечное число вершин). Тогда на каком-то из шагов такого «путешествия» мы окажемся в вершине графа, в которой мы уже были до этого. Отрезок простой цепи, заключенный между первым и вторым прохождением через такую вершину, является простым циклом на исходном графе. ●

**ТЕОРЕМА 49.10 (Критерий эйлеровости графа)**
Чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами.

● ●Необходимость. Она очевидна, так как, двигаясь по эйлеровому циклу, войдя в вершину по одной дуге, мы выходим из нее по другой дуге, т. е. каждой «дуге входа» соответствует «дуга выхода». Каждая такая пара дуг дает вклад, равный 2, в степень вершины, а поскольку эйлеров цикл содержит все дуги, то степень каждой вершины представлена суммой двоек и, значит, четна.

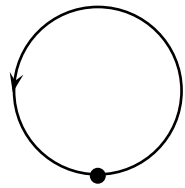


*Рис. 49.15.*

●Достаточность. Достаточность будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции число дуг графа.

**Шаг 1.** $|U| = 1$. Единственный граф, удовлетворяющий условиям теоремы приведен на рис. 49.15. Очевидно, его единственная дуга и образует эйлеров цикл.

**Индуктивный переход.** Предположим, что утверждение теоремы (ее достаточной части) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant n_0$, докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = n_0 + 1$. Так как степени всех его вершин четны, то по лемме 49.4 на этом графе существует простой цикл $\eta$. Если этот цикл проходит через все дуги графа $G$, то он и есть искомый эйлеров цикл, и индуктивный переход доказан.

В противном случае рассмотрим граф $G'_\eta$, полученный из $G$ удалением дуг цикла $\eta$. Каждая его компонента связности — конечный связный граф с четными степенями вершин и числом дуг, меньшим либо равным $n_0$. Тогда, по предположению индукции, на каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. Обозначим эйлеровы циклы компонент $\eta_1$, $\eta_2$, …, $\eta_k$ соответственно. Поскольку исходный граф связен, то цикл $\eta$ имеет хотя бы по одной общей вершине с компонентами графа $G'_\eta$. Выберем по одной общей с циклом вершине на каждой компоненте — $x_1$, $x_2$, …, $x_k$.

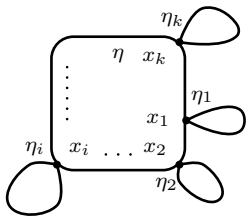


*Рис. 49.16.*

Искомый эйлеров цикл на графе $G$ построим следующим образом (см. рис. 49.16): отправившись по циклу $\eta$ из произвольной его вершины, движемся по нему до тех пор, пока не встретим вершину $x_i$ из множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, тогда от вершины $x_i$ пройдем по эйлерову циклу $\eta_i$ на соответствующей компоненте графа $G'_\eta$, после чего продолжим движение по циклу $\eta$ до тех пор, пока не встретим вершину $x_j \in \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, опять прервем движение по $\eta$ и пройдем по эйлерову циклу $\eta_j$ соответствующей компоненты и т. д. В результате движения по циклу $\eta$ мы побываем во всех вершинах множества $\{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$, а значит, пройдем по всем циклам $\eta_1$; $\eta_2$; $\ldots$; $\eta_k$.

(Процесс склейки эйлерова цикла из цикла $\eta$ и циклов $\eta_1$, $\eta_2$, $\ldots$, $\eta_k$ похож на сборку ожерелья с подвесками.)

Индуктивный переход доказан. ●

**Определение 49.22.** *Связный граф называется квазиэйлеровым, если на нем существует простая цепь, проходящая через все дуги графа.*

**ТЕОРЕМА 49.11 (Критерий квазиэйлеровости)**
Для того чтобы конечный связный граф был квазиэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами или степени всех его вершин, за исключением ровно двух, были четными числами, причем в первом случае эйлерова цепь является эйлеровым циклом, а во втором случае эйлерова цепь начинается в одной из вершин нечетной степени, а заканчивается в другой вершине нечетной степени.

● Ясно, что теорема 49.11 является следствием теоремы 49.10. Случай двух вершин нечетной степени и построение эйлеровой цепи можно свести к эйлерову циклу на графе, полученном из $G$ добавлением дуги, соединяющей две вершины нечетной степени. ●

## Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Можно ли нарисовать фигуру, называемую саблями Магомеда (см. рис. 49.17), не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по отрезкам линий дважды (за исключением помеченных точек).
2. Можно ли нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги и не проходя ни по какому отрезку дважды, домик с крышей вида а), б), в), г), д) (см. рис. 49.18)?
3. Какие из графов, приведенных на рисунке 49.19, являются эйлеровыми, квазиэйлеровыми?

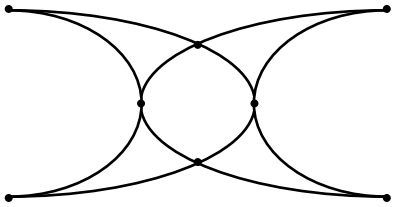


*Рис. 49.17.*

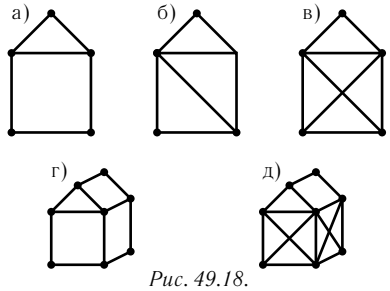


*Рис. 49.18.*

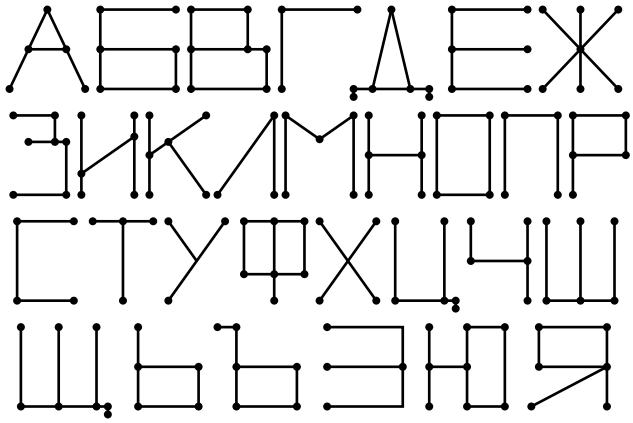


*Рис. 49.19.*

## § 49.5. ДЕРЕВЬЯ И ЛЕСА

В этом параграфе мы изучим простой и очень важный своими приложениями класс графов — деревья. О широком применении говорят такие термины: «дерево поиска», «древовидные структуры», «ветвление» и др.

**Лемма 49.5.** *Для любого конечного графа $G(X, U, f)$ справедливо*

$$|X| - c(G) \leqslant |U|. \tag{49.5}$$

● Проведем доказательство индукцией по параметру $m = |U|$.

*1-й шаг.* $m = 0$. Любой граф, у которого $|U| = 0$ $(\Leftrightarrow U = \varnothing)$, имеет вид, изображенный на рис. 49.20. Тогда $c(G) = |X|$. Значит,

$$|X| - c(G) = |X| - |X| = 0 \leqslant 0 = |U|.$$

*Рис. 49.20.*

Соотношение (49.5) выполнено.

*Индуктивный переход.* Предположим, что соотношение (49.5) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leqslant m_0$, докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| = m_0 + 1$. Для такого графа возможны два случая: 1) на нем нет мостов; 2) на нем есть хотя бы один мост.

В первом случае удалим произвольную дугу $u$ графа $G$, т. е. перейдем к графу $G'_u$. Для него соотношение (49.5) выполнено (по предположению), значит,

$$|X| - c\,(G'_u) \leqslant |U \setminus \{u\}|\,,$$

но $c\,(G'_u) = c(G)$, тогда

$$|X| - c(G) \leqslant |U - \{u\}| = |U| - 1 < |U|.$$

Соотношение (49.5) доказано.

Во втором случае обозначим через $u_0$ — мост графа $G$ и выпишем соотношение (49.5) для графа $G'_{u_0}$:

$$|X| - c\left(G'_{u_0}\right) \leqslant |U \setminus \{u_0\}|\,,$$

по теореме о мостах (теорема 49.9) $c\left(G'_{u_0}\right) = c(G) + 1$, тогда

$$|X| - c(G) - 1 \leqslant |U \setminus \{u_0\}| = |U| - 1.$$

Соотношение (49.5) выполнено и в этом случае. Индуктивный переход доказан. ●

**Лемма 49.6.** *Конечный граф $G(X,U,f)$, у которого*

$$|U| \leqslant |X| - 2, \tag{49.6}$$

*не является связным.*

● Предположим противное, т. е. что существует конечный связный граф $G_0(X_0,U_0,f_0)$, у которого $|U_0| \leqslant |X_0| - 2$. По предыдущей лемме для него выполнено

$$|X_0| - 1 \leqslant |U_0|. \tag{49.7}$$

Из (49.6) и (49.7) получим

$$|X_0| - 1 \leqslant |X_0| - 2 \quad \text{или} \quad -1 \leqslant -2.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму. ●

**Определение 49.23.** *Деревом называется конечный связный граф без циклов.*

**Определение 49.24.** *Лесом из $k$ деревьев называется граф $G$ без циклов, у которого $c(G) = k$, $k > 1$.*

● *ПРИМЕР 49.12.* На рис. 49.21 изображены деревья и лес.

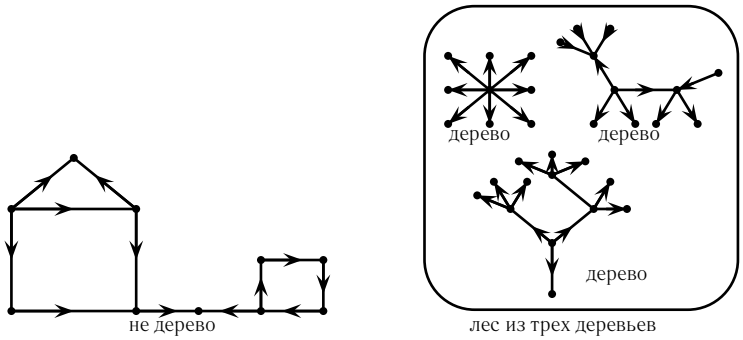



*Рис. 49.21.*

**ТЕОРЕМА 49.12 (Основная теорема о деревьях)**
Для конечного графа $G(X,U,f)$ следующие 6 утверждений эквивалентны:

1. $G$ — дерево, т. е. связный граф без циклов.
2. $G$ — не содержит циклов и $|U| = |X| - 1$.
3. $G$ — связен, и $|U| = X - 1$.
4. $G$ — связен, и каждая его дуга является мостом.
5. Любые две вершины можно соединить, и причем единственной простой цепью.
6. $G$ — не содержит циклов, добавление к нему любой дуги приводит к образованию единственного простого цикла.

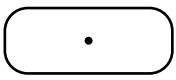


*Рис. 49.22.*

● Докажем, что из 1 следует 4. Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что существует такое дерево $G$, на котором есть дуга $u_0$, не являющаяся мостом. Обозначим через $x_0$ ее конец, через $y_0$ — ее начало. Образуем граф $G'_{u_0}$. Так как он по нашему предположению связен, то на нем существует простая цепь $\eta_{x_0y_0}$, ведущая из $x_0$ в $y_0$, тогда $\eta_{x_0y_0} \cup \{u_0\}$ — простой цикл на $G$, что противоречит тому, что $G$ — дерево.

Докажем, что из 1 следует 2. Так как то, что из 1 следует 4, уже доказано, то можно доказывать, что из 1 и 4 следует 2. На самом деле достаточно доказать, что из 1 и 4 следует, что $|U| = |X|-1$. Докажем это по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

*1-й шаг.* $m = 0$. Единственное дерево имеет вид, приведенный на рис. 49.22. Ясно, что для него $|X| = 1$, $|U| = 0$ и, значит, $|U| = |X| - 1$.

*Индуктивный переход.* Предположим, что соотношение $|U| = |X| - 1$ справедливо для любого дерева, у которого $|U| \leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m_0 + 1$. Удалим произвольную дугу $u$ дерева, т. е. перейдем к графу $G'_u$. Так как 4 для $G$ выполнено, то $u$ — мост и $G'_u$ состоит из 2 компонент связности (теорема 49.9′), каждая из которых — дерево с числом дуг, меньшим либо равным $m_0$. Тогда для каждой компоненты связности выполнено предположение индукции

$$|U_1| = |X_1| - 1, \qquad |U_2| = |X_2| - 1.$$

Складывая последние равенства, получаем

$$\underbrace{|U_1| + |U_2|}_{=|U|-1} = \underbrace{|X_1| + |X_2|}_{=|X|} - 2;$$
$$|U| - 1 = |X| - 2;$$
$$|U| = |X| - 1.$$

Индуктивный переход доказан.

Докажем теперь, что из 2 следует 3. На самом деле, достаточно доказать, что из 2 следует «$G$ — связен». Доказывать это будем от противного, т. е. предположим, что существует граф $G$, который не содержит циклов и у которого $|U| = |X| - 1$, но $G$ не является связным. Тогда он состоит из $k$, $k \geqslant 2$ компонент связности, каждая из которых не содержит циклов и, значит, является деревом. Переход $1 \Longrightarrow 2$ уже доказан, значит, для каждой компоненты

$$|U_i| = |X_i| - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Суммируя по $i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} |U_i| = \sum_{i=1}^{k} (|x_i| - 1) \quad \text{или} \quad |U| = |X| - k.$$

Это противоречит тому, что $|U| = |X| - 1$.

Докажем, что из 3 следует 4. Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует граф $G$, который связен и у которого $|U| = |X| - 1$, но 4) для него не выполнено, т. е. не каждая дуга является мостом. Пусть $u_0 \in U$ не является мостом, тогда $G'_{u_0}$ — связный граф, у которого число дуг равно $|X|-2$, а это противоречит лемме 49.6.

Докажем, что из 4 следует 5. Доказывать будем от противного, т. е. предположим, что существует такой связный граф, у которого каждая дуга является мостом, но для которого 5 не выполнено. Так как на графе $G$ условие 5 не выполнено, то на нем есть такие две вершины, которые можно соединить двумя простыми цепями — $\eta_1$ и $\eta_2$. Ясно, что $\eta_1 \cup \eta_2$ является либо простым циклом, либо содержит простой цикл. А дуги простого цикла не являются мостами. Получено противоречие с 4.

Докажем, что из 5 следует 6. Добавим к графу $G$ дугу $w$, соединяющую $y$ с $x$. На исходном графе по условию существует простая цепь $\eta_{xy}$, соединяющая $x$ с $y$, тогда $\eta_{xy} \cup \{w\}$ — простой цикл. Докажем единственность образовавшегося простого цикла. Доказывать единственность будем от противного. Предположим, что существуют такие

вершины $x_0$ и $y_0$ и добавленная дуга $w_0$, соединяющая $y_0$ с $x_0$, что на графе $G \cup \{w_0\}$ существует два простых цикла, проходящих через $w_0$: $\eta_1$ и $\eta_2$. Но тогда $\eta_1 \setminus \{w_0\}$ и $\eta_2 \setminus \{w_0\}$ — две простые цепи, соединяющие $x_0$ с $y_0$ на $G$, а это противоречит 5.

Докажем, что из 6 следует 1. Докажем отдельно, что:

а) из 6 следует — «$G$ связен»;

б) из 6 следует — «$G$ без циклов».

Докажем а) от противного, т. е. предположим, что существует несвязный граф, для которого выполнено 6. Возьмем на этом графе две вершины $x_0$ и $y_0$, лежащие в разных компонентах связности, и добавим к графу дугу $w_0$, их соединяющую. Ясно, что при этом не образуется простой цикл, а это противоречит 6.

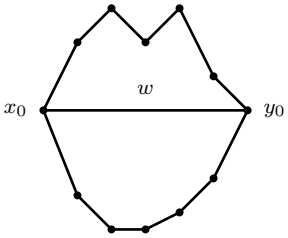



*Рис. 49.23.*

Докажем б) тоже от противного, т. е. предположим, что существует граф, содержащий цикл, для которого выполнено 6 — добавление любой дуги приводит к образованию единственного простого цикла. Существование на графе цикла означает и существование на нем простого, проходящего через все свои вершины (кроме начала и конца) по одному разу ($\Leftrightarrow$ элементарного) цикла. Зафиксируем на нем две вершины $x_0$ и $y_0$ (см. рис. 49.23) и добавим к графу дугу $w$, их соединяющую. Ясно, что при этом образуется два простых цикла. Получено противоречие с 6. ●

*Следствие 49.2.* Если $G(X, U, f)$ — лес из $k$ деревьев, то

$$|U| = |X| - k.$$

● ●

**Определение 49.25.** *Вершина $x$ графа $G(X, U, f)$ называется висячей, если* $\deg x = 1$.

*Следствие 49.3.* Если $G(X, U, f)$ — дерево и $|X| \geqslant 2$, то на нем есть по крайней мере две висячие вершины.

● Допустим противное, т. е. что существует дерево $G(X, U, f)$, у которого $|X| \geqslant 2$ и не более одной висячей вершины.

Представим $X$ в виде $X = (X \setminus X_{\text{в}}) \cup X_{\text{в}}$, где $X_{\text{в}}$ — множество висячих вершин. Обозначим

$$\delta = |X_{\text{в}}| \leqslant 1.$$

По теореме Эйлера (теорема 49.1) имеем

$$2\,|U| = \sum_{x \in X} \deg x = \sum_{x \in X \setminus X_{\text{в}}} \deg x + \sum_{x \in X_{\text{в}}} \deg x =$$

$$= \sum_{x \in X \setminus X_{\text{в}}} \deg x + \delta \geqslant \sum_{x \in X \setminus X_{\text{в}}} 2 + \delta = 2\,(|X| - \delta) + \delta = 2\,|X| - \delta.$$

Учтем, что $|U| = |X| - 1$, тогда

$$2\,(|X| - 1) \geqslant 2\,|X| - \delta \quad \text{или} \quad -2 \geqslant -\delta.$$

Последнее дает противоречие и при $\delta = 0$, и при $\delta = 1$. ●

## Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Докажите самостоятельно следствие 49.2 к теореме о деревьях.
2. Диаметром связного графа называется самая длинная простая цепь. Докажите, что любые два диаметра графа имеют общую вершину.

# § 49.6. ПОМЕЧЕННЫЕ ГРАФЫ. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ДЕРЕВЬЕВ

## 49.6.1. ПОМЕЧЕННЫЕ ГРАФЫ

**Определение 49.26.** *Граф с $n$ вершинами называется помеченным, если его множество вершин $X = [1; n]_{\mathbb{N}}$.*

**Определение 49.27.** *Помеченные графы $G_1$ и $G_2$ с $n$ вершинами называются изоморфными, если существует биективное отображение $\psi\colon U_1 \to U_2$ такое, что*

$$(p_i \circ f_2 \circ \psi)(u) = (p_i \circ f_1)(u) \quad \forall u \in U_1, \quad i = 1, 2.$$

Это определение похоже на определение изоморфизма графов (определение 49.3), отличие состоит в том, что изоморфизм графов реализуется парой биективных отображений $\varphi\colon X_1 \to X_2$, $\psi\colon U_1 \to U_2$, а здесь $\varphi$ — тождественное отображение.

*ПРИМЕР 49.13.* Рассмотрим графы, изображенные на рис. 49.24.

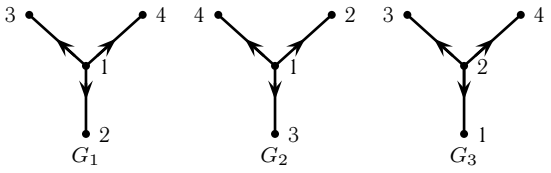



*Рис. 49.24.*

$G_1$ изоморфен как помеченный графу $G_2$ и не изоморфен как помеченный графу $G_3$. Ясно, что в обычном смысле $G_1$, $G_2$, $G_3$ изоморфны.

Перейдем теперь к решению одной комбинаторной задачи: «Сколько существует неизоморфных между собой неориентированных помеченных деревьев с $n$ вершинами?»

Обозначим их число через $T(n)$. Ясно, что

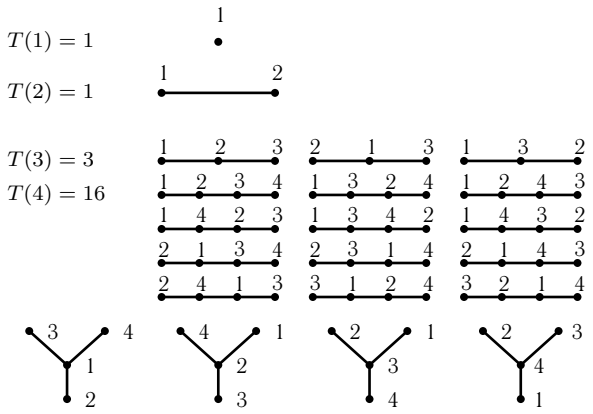



*Рис. 49.25.*

На рис. 49.25 изображены все неизоморфные помеченные деревья с 1-ой, 2-мя, 3-мя и 4-мя вершинами.

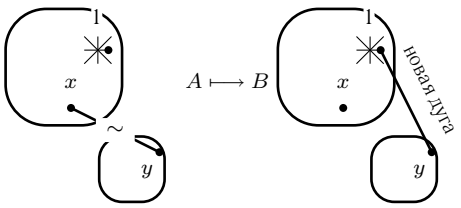



*Рис. 49.26.*

**ТЕОРЕМА 49.13 (Теорема Кэлли[1])**
Имеет место формула:

$$T(n) = n^{n-2}. \tag{49.8}$$

● Обозначим через $T(n,k)$ число неизоморфных помеченных деревьев с $n$ вершинами, у которых $\deg 1 = k$. Тогда

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k). \tag{49.9}$$

Выведем формулу для нахождения $T(n,k)$. Для этого найдем соотношение, связывающее $T(n,k)$ и $T(n,k+1)$. Возьмем произвольное помеченное дерево $A$ такое, что $\deg 1 = k$. Перестроим его в дерево $B$ такое, у которого $\deg 1 = k+1$. Для этого удалим из $A$ любую из $n-1-k$ дуг, не инцидентных вершине «1». Обозначим граничные вершины этой дуги $x$ и $y$. При удалении дуги дерево $A$ разваливается на два куска: один из них содержит вершину «1» и одну из $\{x;y\}$; а второй — оставшуюся из $\{x;y\}$ (см. рис. 49.26, левая часть).

Переход от дерева $A$ к дереву $B$ показан на правой части рис. 49.26, т. е. мы «пришиваем» отвалившуюся часть новой дугой, соединяющей «1» и «$y$». Пару полученных графов $(A;B)$ назовем связкой. Ясно, что одно дерево $A$ порождает $n-1-k$ связок, тогда количество связок $(A;B)$ равно

$$(n-1-k)\cdot T(n,k). \tag{49.10}$$

Возьмем теперь произвольное дерево $B$, у которого $\deg 1 = k+1$. Подсчитаем, сколько связок $(A;B)$ порождает дерево $B$.

Удаление любой дуги $u_i$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ инцидентной вершине «1» разваливает дерево $B$ на две части, одна из которых содержит вершину «1», а другая — вторую инцидентную удаленной дуге вершину (обозначим ее $x_i$). «Отпавший лепесток» можно приклеить, соединив дугой вершину $x_i$ с любой вершиной другого лепестка (см. рис. 49.27, правую часть).

Одна дуга $u_i$ дает нам $n-1-n_i$ возможностей ($n_i$ — число вершин на $i$-ом лепестке). Тогда, всего деревьев $A$, порождаемых $B$, будет

$$\sum_{i=1}^{k+1}(n-1-n_i) = (n-1)(k+1) - \sum_{i=1}^{k+1} n_i = (n-1)(k+1) - (n-1) = (n-1)k.$$

[1] Кэлли А. (1821–1895) — английский математик. Детство и юность провел в Петербурге. Окончил Кембриджский университет, около 20 лет был адвокатом, в это же время появились почти все его математические работы. С 1863 г. — профессор в Кембриджском университете. Кэлли — автор работ по алгебре, дифференциальным уравнениям, эллиптическим функциям и др.

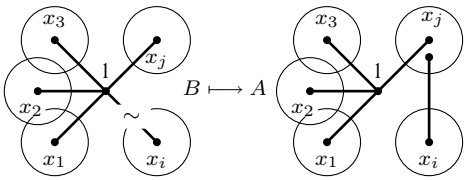



*Рис. 49.27.*

Таким образом, одно дерево $B$ порождает $(n-1)k$ связок $(A;B)$. Тогда количество связок $(A;B)$ равно

$$(n-1)\cdot k\cdot T(n,k+1). \tag{49.11}$$

Приравнивая между собой дважды вычисленное количество связок $(A;B)$ (формулы (49.10) и (49.11)), получаем

$$(n-1-k)T(n,k)=(n-1)kT(n,k+1). \tag{49.12}$$

Выпишем теперь серию соотношений типа (49.12):

$$\begin{aligned}(n-1-k)T(n,k) &= (n-1)kT(n,k+1)\\ (n-1-k-1)T(n,k+1) &= (n-1)(k+1)T(n,k+2)\\ \dots\dots\dots\

# L

# МАТРИЦЫ ГРАФА. АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ГРАФОВ

В этой главе мы будем заниматься только конечными графами, способами их задания и алгоритмами их анализа. Алгоритмы, которые будут описаны, не всегда являются лучшими, но в этой книге мы отдаем предпочтение простоте описания и реализации. Последнее время появилось много книг, посвященных алгоритмам на графах, в том числе и алгоритмам анализа графов.

## § 50.1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ. МАТРИЦЫ ГРАФОВ

В этом параграфе мы опишем основные способы задания ориентированных графов: список дуг и матричные способы задания графов: матрицу смежности вершин графа и матрицу инцидентности графа. Кроме этого, познакомимся с понятием «разрез» и изучим матрицу разрезов и матрицу циклов графа (цикломатическую матрицу). Эти матрицы достаточно хорошо описывают некоторые свойства графов и сами обладают рядом интересных свойств.

### 50.1.1. СПИСОК ДУГ

Самым простым и удобным способом задания описания конечного графа $G(X, U, f)$, где $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$, $U = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m\}$, является список дуг. Именно в виде списка дуг информацию о графе вводят в компьютер.

**Определение 50.1.** *Задание графа в виде списка — это:*

1) *указание $n$ — числа вершин графа;*
2) *указание $m$ — количества дуг графа;*
3) *задание массива $U$, состоящего из $m$ пар вершин вида (начало дуги $u_i$; конец дуги $u_i$).*

*ПРИМЕР 50.1.* Задание графа $G$ примера 50.1 в виде списка дуг таково:

1) $n = 5$;
2) $m = 8$;
3) $U = \{(1;5), (1;2), (5;2), (5;4), (2;4), (2;3), (4;3), (4;5)\}$.

Ясно, что при задании графа списком дуг нам не важен порядок расположения дуг в списке.

*Замечание 50.1.* Список дуг — удобный способ организации (записи) информации о графе для компьютера, но не для человека.

● *ПРИМЕР 50.2.* С помощью списка дуг для графа $G$ примера 50.1 найти его локальные характеристики $\deg_+$, $\deg_-$, $\deg$.

● Ясно, что $\deg_+ x_i$ — это количество пар вида $(x, x_i)$ в списке дуг графа, $\deg_- x_i$ — количество пар вида $(x_i, x)$ в списке дуг. Тогда

$$\begin{aligned}
&\deg_+ 1 = |\varnothing| = 0,\\
&\deg_- 1 = |\{I, II\}| = 2, \quad \deg 1 = 0 + 2 = 2,\\
&\deg_+ 2 = |\{II, III\}| = 2,\\
&\deg_- 2 = |\{V, VI\}| = 2, \quad \deg 2 = 2 + 2 = 4,\\
&\deg_+ 3 = |\{VI, VII\}| = 2,\\
&\deg_- 3 = |\varnothing| = 0, \quad \deg 3 = 2 + 0 = 2,\\
&\deg_+ 4 = |\{IV, V\}| = 2,\\
&\deg_- 4 = |\{VII, XVIII\}| = 2, \quad \deg 4 = 2 + 2 = 4,\\
&\deg_+ 5 = |\{I, VIII\}| = 2,\\
&\deg_- 5 = |\{III, IV\}| = 2, \quad \deg 5 = 2 + 2 = 4.
\end{aligned}$$

### 50.1.2. МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

**Определение 50.2.** *Пусть $G(X, U, f)$ — конечный помеченный ориентированный граф без петель. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Матрицей инцидентности графа $G$ называется матрица $B(G)$ размера $n \times m$, определяемая следующим*

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (p_2 \circ f)(u_j) = x_i;\\ -1, & \text{если } (p_1 \circ f)(u_j) = x_i;\\ 0, & \text{если } x_i \notin \{(p_1 \circ f)(u_j), (p_2 \circ f)(u_j)\}. \end{cases}$$

*Если $G$ — неориентированный граф, то*

$$(B(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ инцидентна } u_j,\\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

● *ПРИМЕР 50.3.* Рассмотрим графы $G_1$ (рис. 50.1) и $G_2$ (рис. 50.2) и выпишем их матрицы инцидентности:

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

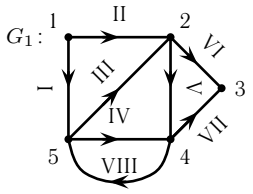



*Рис. 50.1.*

$$B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

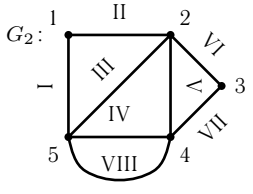



*Рис. 50.2.*

Из определения $B(G)$ следует, что в каждом из ее столбцов два ненулевых элемента: $-1$ и $+1$, остальные равны 0. Значит, сумма всех строк матрицы $B(G)$ равна $\overline{0}$, т. е. строки матрицы $B(G)$ линейно зависимы. Любая строка матрицы $B(G)$ однозначно определяется остальными $(n-1)$-й строками. Пусть $x_i \in X$. Обозначим $B_i'(G)$ матрицу, полученную из $B$ вычеркиванием $i$-й строки. Матрица $B_i'(G)$ называется усеченной матрицей инцидентности по вершине $x_i$.

Очевидно

$$\operatorname{rang} B(G) = \operatorname{rang} B_i'(G) \leqslant n-1. \tag{50.1}$$

**ТЕОРЕМА 50.1**
Определитель любой усеченной матрицы инцидентности дерева равен $\pm 1$.

● Теорему будем доказывать индукцией по числу вершин дерева. Матрица $B(T)$ дерева $T$ с двумя вершинами имеет вид

$$B(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ее усеченные матрицы это $(1 \times 1)$-матрицы: $(1)$ и $(-1)$, $\det(1) = 1$, $\det(-1) = -1$. Значит, теорема верна для дерева из двух вершин.

Предположим, что теорема верна для любого дерева с $n$ вершинами, докажем, что тогда она верна и для любого дерева $T$ с $n+1$ вершиной. По следствию из теоремы о деревьях (теорема 49.12) на этом дереве существует по крайней мере две висячих вершины, поэтому в матрице $B_i'(T)$ существует хотя бы одна строка, соответствующая висячей вершине. Допустим, это $k$-я строка и пусть эта вершина инцидентна $l$-й дуге. Тогда в этой строке только один элемент отличен от нуля, он равен $\pm 1$. Разлагая определитель по этой строке, получим

$$\det B_i'(T) = (\pm 1) \cdot (-1)^{k'+l} M_{k'l}\left(B_i'\left(T \setminus \{x_k\}\right)\right),$$

где

$$k' = \begin{cases} k, & \text{если } k < i, \\ k-1, & \text{если } k > i. \end{cases}$$

Матрица $B_{x_i}'(T \setminus \{x_k\})$ — усеченная матрица инцидентности дерева, полученного из дерева $T$ удалением висячей вершины $x_k$. Тогда по предположению индукции имеем

$$\left|M_{k'l}\left(B_i'\left(T \setminus \{x_k\}\right)\right)\right| = 1.$$

Значит,

$$\det B_i'(T) = \pm 1. \quad ●$$

**ТЕОРЕМА 50.2**
Ранг матрицы инцидентности графа, состоящего из $p$ компонент связности, равен $n-p$.

● Поскольку при соответствующей нумерации вершин и дуг графа матрица инцидентности блочно-диагональная и каждый ее блок соответствует компоненте связности, нужно доказать, что ранг матрицы $B(G)$ связного графа с $n$ вершинами

равен $n-1$. Действительно, на связном графе можно выделить покрывающее дерево $T(G)$ (остов) — частичный граф, являющийся деревом, ему соответствует подматрица матрицы $B(G)$, тогда

$$\operatorname{rang} B(T(G)) \leqslant \operatorname{rang} B(G). \tag{50.2}$$

По доказанной теореме 50.1

$$\operatorname{rang} B(T(G)) = n-1,$$

тогда из (50.1) и (50.2) следует, что $\operatorname{rang} B(G) = n-1$. ●

Пусть $G(X, U, f)$ — связный ориентированный граф. Выделим в $X$ непустое подмножество вершин $X' \neq X$.

**Определение 50.3.** *Разрезом графа $G$, порожденным множеством $X'$, называется множество дуг $\langle X', X \setminus X' \rangle$, определяемое следующим*

$$u \in \langle X', X \setminus X' \rangle \;\Leftrightarrow\; \big(f(u) = (x, y)\big)$$
$$\big((x \in X')(y \in X \setminus X') \vee (y \in X')(x \in X')(y \in X \setminus X') \vee (y \in X')(x \in X \setminus X')\big).$$

Занумеруем дуги графа, т. е. представим $U$ в виде $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Поставим в соответствие разрезу $\langle X', X \setminus X' \rangle$ вектор $\overline{\langle X', X \setminus X' \rangle}$ в пространстве $\mathbb{Z}_m$, определенный следующим

$$\Big(\overline{\langle X', X \setminus X' \rangle}\Big)_i = \begin{cases} -1, & \text{если } u_i \in \langle X', X \setminus X' \rangle \& (p_1 \circ f)(u_i) \in X', \\ +1, & \text{если } u_i \in \langle X', X \setminus X' \rangle \& (p_2 \circ f)(u_i) \in X', \\ 0, & \text{если } u_i \notin \langle X', X \setminus X' \rangle. \end{cases}$$

Этот вектор называется вектором-разрезом.

Очевидно, имеет место соотношение:

$$\overline{\langle X', X \setminus X' \rangle} = -\overline{\langle X \setminus X', X' \rangle}. \tag{50.3}$$

*Замечание 50.2.* Векторы-разрезы $\overline{\langle X', X \setminus X' \rangle}$ и $\overline{\langle X \setminus X', X' \rangle}$ мы не будем различать.

**Определение 50.4.** *Матрица разрезов $R(G)$ графа $G$ — это матрица, строками которой являются векторы-разрезы.*

● *ПРИМЕР 50.4.* Перечислим разрезы графа, изображенного на рис. 50.3:

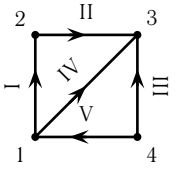


*Рис. 50.3.*

$$\langle \{x_1\}; \{x_2, x_3, x_4\} \rangle = \{\mathrm{I}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}\};$$
$$\overline{\langle \{x_1\}; \{x_2, x_3, x_4\} \rangle} = (-1, 0, 0, -1, -1).$$

$$\langle \{x_2\}; \{x_1, x_3, x_4\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_2\}; \{x_1, x_3, x_4\} \rangle} = (1, -1, 0, 0, 0);$$
$$\langle \{x_3\}; \{x_1, x_2, x_4\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_3\}; \{x_1, x_2, x_4\} \rangle} = (0, 1, 1, 1, 0);$$
$$\langle \{x_4\}; \{x_1, x_2, x_3\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_4\}; \{x_1, x_2, x_3\} \rangle} = (0, 0, -1, 0, -1);$$
$$\langle \{x_1, x_2\}; \{x_3, x_4\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_1, x_2\}; \{x_3, x_4\} \rangle} = (0, -1, 0, -1, 1);$$
$$\langle \{x_1, x_3\}; \{x_2, x_4\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_1, x_3\}; \{x_2, x_4\} \rangle} = (-1, 1, 1, 0, 1);$$
$$\langle \{x_1, x_4\}; \{x_2, x_3\} \rangle; \quad \overline{\langle \{x_1, x_4\}; \{x_2, x_3\} \rangle} = (-1, 0, -1, -1, 0).$$

Матрица $R(G)$ имеет вид:

$$R(G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Замечание.* Матрица $R(G)$ определена до порядка следования строк.

**ТЕОРЕМА 50.3**
Матрица разрезов графа $G$ содержит в качестве подматрицы матрицу инцидентности графа $G$, т. е.

$$B(G) \subset R(G). \tag{50.4}$$

● Действительно, $i$-я строка матрицы $B(G)$ соответствует разрезу $\langle \{x_i\}; X \setminus \{x_i\} \rangle$ (см. пример 50.4). ●

**ТЕОРЕМА 50.4**
Любая строка матрицы разрезов $R(G)$ является линейной комбинацией строк матрицы инцидентности $B(G)$.

● Пусть $\langle X', X \setminus X' \rangle$ — разрез и

$$X' = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}, \quad X \setminus X' = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}\},$$

тогда имеют место равенства:

$$\overline{\langle X', X \setminus X' \rangle} = \overline{\langle \{x_{i_1}\}, X \setminus \{x_{i_1}\} \rangle} + \overline{\langle \{x_{i_2}\}, X \setminus \{x_{i_2}\} \rangle} + \cdots + \overline{\langle \{x_{i_k}\}, X \setminus \{x_{i_k}\} \rangle} =$$
$$= (-1)\overline{\langle \{x_{j_1}\}, X \setminus \{x_{j_1}\} \rangle} + (-1)\overline{\langle \{x_{j_2}\}, X \setminus \{x_{j_2}\} \rangle} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)\overline{\langle \{x_{j_r}\}, X \setminus \{x_{j_r}\} \rangle}.$$

По предыдущей теореме векторы $\overline{\langle \{x_i\}, X \setminus \{x_i\} \rangle}$ являются строками матрицы $B(G)$. ●

*Следствие 50.1 (Из теорем 50.3 и 50.4).* Ранги матриц $B(G)$ и $R(G)$ совпадают.

Как найти базис пространства разрезов графа? Опишем построение базисного множества разрезов связного графа, использующее покрывающее дерево $T(G)$ (остов) графа $G$.

Найдем $T(G)$ — остов графа, обозначим через $U_T$ множество дуг остова. На графе $G$ выберем такую нумерацию дуг, при которой $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in U_T$; $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m \notin U_T$. Так как каждая дуга дерева является мостом, граф $T(G) \setminus \{u_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, состоит из двух компонент связности. Обозначим через $X_i$ множество вершин той компоненты, в которую ведет дуга. Покажем, что векторы-разрезы $\overline{\langle X \setminus X_i, X_i \rangle}$ образуют базис пространства разрезов.

Действительно, подматрица матрицы разрезов, образованная векторами $\overline{\langle X \setminus X_i, X_i \rangle}$, имеет вид

$$(E_{n-1} R'), \tag{50.5}$$

где $E_{n-1}$ — единичная матрица порядка $n-1$.

### 50.1.3. ЦИКЛОМАТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА

С каждым циклом $\eta$ графа $G(X,U,f)$ (см. определение 49.10) свяжем вектор $\overline{\eta}$ длины $m=|U|$, $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$, определенный следующим:

$(\overline{\eta})_i$ = «число проходов цикла $\eta$ через $u_i$ в направлении ее ориентации» — «число проходов цикла $\eta$ через дугу $u_i$ в направлении, противоположном ее ориентации».

● *ПРИМЕР 50.5.* Рассмотрим граф $G$, заданный рисунком 50.4.

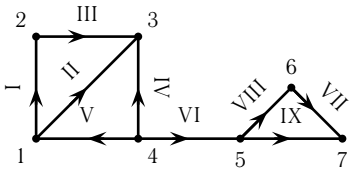


*Рис. 50.4.*

Пусть $\eta$ — цикл, заданный равенствами:

$$\eta(1)=\text{II},\quad \eta(2)=\text{IV},\quad \eta(3)=\text{VI},$$
$$\eta(4)=\text{VIII},\quad \eta(5)=\text{VII},\quad \eta(6)=\text{IX},$$
$$\eta(7)=\text{VI},\quad \eta(8)=\text{V},$$

тогда $\overline{\eta}=(0,1,0,-1,1,0,1,1,-1)$.

*Замечание 50.3.* Если по циклу $\eta$ пройти $k$ раз ($k\in\mathbb{N}$), то

$$\overline{k\eta}=k\overline{\eta}.$$

Если цикл $\eta$ обойти в противоположном направлении, то

$$\overline{\eta^-}=-1\cdot\overline{\eta}.$$

Циклы $\eta$ и $k\eta$, где $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ мы не будем различать.

**Определение 50.5.** *Цикломатрическая матрица $C(G)$ конечного помеченного графа $G(X,U,f)$ — это матрица, строками которой являются векторы циклов графа $G$.*

**ТЕОРЕМА 50.5**

Имеет место равенство

$$\operatorname{rang} C(G)=m-n+p, \tag{50.6}$$

где $n=|X|$, $m=|U|$, $p=c(G)$ — число компонент связности графа $G$.

● ●

Как найти базис пространства вектор-циклов графа? Рассмотрим случай связного графа (в случае несвязного графа нужно действовать покомпонентно).

Преобразуем выражение для ранга матрицы $C(G)$, учитывая, что $p=1$:

$$\operatorname{rang} C(G)=m-n+1=m-(n-1).$$

Выражение, стоящее в скобках, — число дуг в покрывающем дереве графа (остове) (см. теорему 49.12), тогда $m-(n-1)$ — число дуг графа, не вошедших в его остов. На этом простом наблюдении и основан алгоритм нахождения базиса пространства вектор-циклов графа.

Определим $T(G)$ — остов графа $G$, занумеруем дуги графа $G$ так, что

$$\{u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}\}=U_{T(G)},\quad \{u_n,u_{n+1},\ldots,u_m\}\notin U_{T(G)}.$$

По основной теореме о деревьях (теорема 49.12) графы $T(G)\cup\{u_i\}$, $i=n,\ n+1,\ldots,\ m$ содержат по одному простому циклу $\eta_i$. Зафиксируем такую ориентацию каждого из

этих циклов, при которой $(\overline{\eta}_i)_i = 1$, тогда подматрица $C(G)$, образованная векторами $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$, ..., $\overline{\eta}_{m-n+1}$, имеет вид $(C' E_{m-n+1})$,

и значит, она является базисной.

**ТЕОРЕМА 50.6**

Любой разрез $\langle X', X \setminus X' \rangle$ и цикл $\eta$ ориентированного графа $G$ либо не имеют общих, либо имеют $2k$ общих дуг, и в этом случае половина из $2k$ общих дуг ориентирована в цикле и разрезе одинаково (по циклу и по разрезу или противоположно циклу и разрезу), а вторая половина имеет противоположные ориентации по циклу и разрезу (т. е. если дуга ориентирована по разрезу, то она проходится в цикле против ориентации и наоборот).

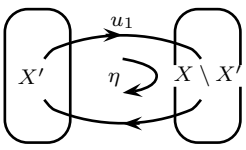


*Рис. 50.5.*

● Рассмотрим разрез $\langle X', X \setminus X' \rangle$ и цикл $\eta$ ориентированного графа и начнем обход цикла $\eta$ от вершины, находящейся в $X'$. Обозначим через $u_1$ первую на цикле $\eta$ дугу, принадлежащую разрезу, и допустим, что она ориентирована по разрезу (и автоматически по циклу), через $u_2$ обозначим следующую дугу цикла $\eta$, принадлежащую разрезу: если она ориентирована по циклу, то ее направление противоположно разрезу (как на рисунке), а если она ориентирована против цикла, то она ориентирована по разрезу (см. рис. 50.5). Если прохождение цикла завершено, то теорема доказана, иначе возникает еще одна пара дуг, удовлетворяющая условиям теоремы и т. д. ●

Непосредственно из этой теоремы следует

**ТЕОРЕМА 50.7 (Соотношение ортогональности)**

$$C(G) \cdot R^t(G) = 0. \tag{50.7}$$

● По доказанной выше теореме 50.5 строки $C(G)$ и столбцы $R^t(G)$ могут иметь только четное число $(2k)$ общих ненулевых элементов и половина из них равна «$+1$», а половина «$-1$». ●

*Замечание 50.4.* Все утверждения остаются в силе и для неориентированных графов в арифметике по $\bmod 2 (0 \overset{\bmod 2}{+} 0 = 0,\ 0 \overset{\bmod 2}{+} 1 = 1,\ 1 \overset{\bmod 2}{+} 1 = 0)$.

### 50.1.4. МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ

**Определение 50.6.** *Пусть $G(X, U, f)$ — граф с $n$ вершинами. Поставим ему в соответствие квадратную матрицу $A(G)$ порядка $n$, называемую матрицей смежности (матрицей смежности вершин), определяемую следующим:*

$$A(G)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует } u \in U \mid f(u) = (x_i, x_j) \\ & \text{(иногда кол-во дуг } u \in U \mid f(u) = (x_i, x_j)), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

*ПРИМЕР 50.6.* Рассмотрим граф, заданный рисунком 50.6:

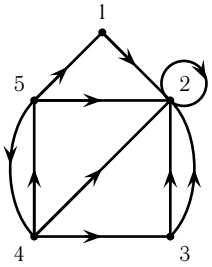



*Рис. 50.6.*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Иногда $A(G)_{32} = 2$.)

*Замечание 50.5.* В случае неориентированного графа матрица $A(G)$ симметрична, т. е. $A(G) = A^t(G)$.

## § 50.2. АЛГОРИТМЫ НАХОЖДЕНИЯ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ И СИЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ И ДРУГИЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ГРАФОВ

С помощью матрицы инцидентности можно находить компоненты связности и сильной связности.

Опишем алгоритм нахождения компонент сильной связности графа. В алгоритме используется операция булева умножения булевых («$0-1$») матриц.

**Определение 50.7.** *Пусть $A$ — $n \times p$ булева матрица, $B$ — $p \times m$ булева матрица. Булевым произведением матрицы $A$ на матрицу $B$ называется матрица $A \boxtimes B$ размера $n \times m$, определяемая следующим:*

$$(A \boxtimes B)_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} \big((A)_{ik} \cdot (B)_{kj}\big). \tag{50.8}$$

*ПРИМЕР 50.7.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A \boxtimes B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 50.2.1. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КОМПОНЕНТ СИЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ ГРАФА

1. Образовать матрицу $A'(G) = E \vee A(G)$.
2. Последовательно найти

$$(A'(G))^{\boxed{2}} = A'(G) \boxtimes A'(G),$$
$$(A'(G))^{\boxed{4}} = (A'(G))^{\boxed{2}} \boxtimes (A'(G))^{\boxed{2}}, \quad \ldots,$$
$$(A'(G))^{\boxed{2^l}} = \mathcal{D}(G), \quad 2^l \geqslant n-1.$$

3. Присвоить $i$ значение, равное 1.
4. Определить множества $\mathcal{D}_+(x_i)$ и $\mathcal{D}_-(x_i)$:

$$\mathcal{D}_+(x_i) = \{x_j \in X \mid (\mathcal{D}(G))_{ij} = 1\},$$
$$\mathcal{D}_-(x_i) = \{x_j \in X \mid (\mathcal{D}(G))_{ji} = 1\}.$$

5. Определить состав вершин компоненты сильной связности, содержащей вершину $x_i$, положив
$$K(x_i) = \mathcal{D}_+(x_i) \cap \mathcal{D}_-(x_i).$$
6. «Обнулить» строки и столбцы матрицы $\mathcal{D}(G)$, отвечающие вершинам множества $K(x_i)$.
7. Если $\mathcal{D}(G) = 0$, то конец алгоритма.
8. Присвоить $i$ значение, равное номеру первой ненулевой строки в $\mathcal{D}(G)$, и перейти к 4.

Обоснование алгоритма основано на «графической» интерпретации матриц $A'(G)$, $(A'(G))^{\boxed{2}}$, ..., $\mathcal{D}(G)$.

Ясно, что единицы матрицы $A'(G)$ информируют о возможности попасть из вершины в вершину путем длины, не большем 1 (дуга — путь длины 1, диагональная единица соответствует петле (путь длины 1) или, если нет петли, то пути длины 0 из вершины в нее саму). Единицы матрицы $(A'(G))^{\boxed{2}}$ информируют о возможности попасть из вершины в вершину путем длины, не превосходящем 2 (таков графовый смысл булева умножения матриц), $(A'(G))^{\boxed{3}}$ дает сведения о путях длины, не большей 3, и т. д. Тогда

$$(A'(G))^{\boxed{n-1}} = (A'(G))^{\boxed{n}} = \ldots \tag{50.9}$$

Соотношение (50.9) следует из того, что если две вершины графа можно соединить путем, то их можно соединить и простым путем (лемма 49.1), а длина любого простого пути на графе, имеющего $n$ вершин, не превосходит $n-1$.

**Определение 50.8.** *Матрица* $\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} (A'(G))^{\boxed{n-1}}$ *называется матрицей достижимости графа* $G$.

Если применить алгоритм нахождения компонент сильной связности к симметризованной матрице $A'_S(G) = A'(G) \vee (A'(G))^t$, то он позволит найти компоненты связности графа.

Матрица смежности $A(G)$ позволяет решать и некоторые комбинаторные задачи на графе.

**ТЕОРЕМА 50.8**
Элемент $\left(A^k(G)\right)_{ij}$ равен числу путей длины $k$, ведущих из вершины $x_i$ в вершину $x_j$. (Умножение матриц и степени здесь обычные, а в верхней строке соотношения, определяющего $A(G)$, используется выражение, записанное в скобках определения 50.6.)

● Следует из определения матрицы $A(G)$ и правила умножения матриц. ●

### 50.2.2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ «УЯЗВИМЫХ» МЕСТ ГРАФА

В §49.3 мы ввели понятие моста (определение 49.20) — такой дуги графа, удаление которой превращает связный граф в несвязный. В смысле практических приложений теории графов мосты можно рассматривать как наиболее «уязвимые» дуги графа. Дадим теперь определение точки сочленения как наиболее «уязвимой» вершины графа.

**Определение 50.9.** *Вершина $x \in X$ называется точкой сочленения графа $G(X, U, f)$, $|X| \geqslant 2$, если*

$$c(G) < c(G'_x), \tag{50.10}$$

*где $G'_x$ — частичный граф, полученный из графа $G$ удалением вершины $x$.*

● *ПРИМЕР 50.8.* Рассмотрим граф $G(X, U, f)$, заданный рисунком 50.7. Ясно, что вершины $a$, $b$, $c$, $d$ являются его точками сочленения, других вершин, являющихся точками сочленения, на этом графе нет.

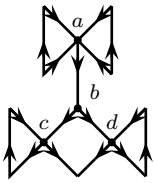


*Рис. 50.7.*

Следующее определение — дополнительное к понятию «точка сочленения», оно содержит в себе интуитивное представление о наиболее неуязвимой части графа.

**Определение 50.10.** *Блоком графа $G$ называется связный максимальный по вложению частичный граф графа $G$, не содержащий точек сочленения.*

● *ПРИМЕР 50.9.* На рис. 50.8 обведены блоки графа $G$.

Таким образом, этот граф содержит 6 блоков: $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$.

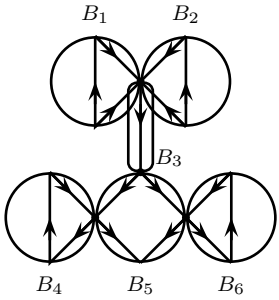


*Рис. 50.8.*

Заметим, что понятия «мост», «точка сочленения», «блок» не зависят от ориентации дуг, т. е. являются фактически понятиями теории неориентированных графов.

Как находить точки сочленения и мосты конечного графа? Для этого можно воспользоваться теоремой о двоичном ранге матрицы инцидентности неориентированного графа (аналог теоремы 50.2):

**ТЕОРЕМА 50.9**

Двоичный ранг матрицы инцидентности неориентированного графа $G$ с $n$ вершинами равен $n - c(G)$, т. е.

$$\operatorname{drang} B(G) = n - c(G). \tag{50.11}$$

● Аналогично теореме 50.2. ●

$\operatorname{drang} B(G)$ — двоичный ранг матрицы $B(G)$, т. е. ранг в арифметике по модулю 2.

● *ПРИМЕР 50.10.* С помощью теоремы 50.8 выяснить, являются ли точками сочленения вершины 1 и 2 и являются ли мостами дуги I и II на графе $G$ (рис. 50.9).

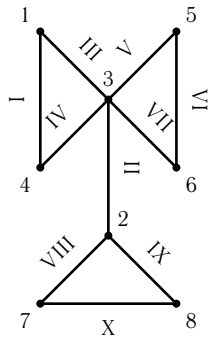


*Рис. 50.9.*

● С помощью теоремы 50.8 найдем число $c(G)$ графа $G$:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\operatorname{drang} B(G)$ приведением $B(G)$ к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_4:=c_4\overset{\text{mod2}}{+}c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_3:=c_3\overset{\text{mod2}}{+}c_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_4:=c_4\overset{\text{mod2}}{+}c_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_5:=c_5\overset{\text{mod2}}{+}c_4}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_6:=c_6\overset{\text{mod2}}{+}c_5}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_7:=c_7\overset{\text{mod2}}{+}c_6}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{drang} B(G) = 7 \quad \overset{(50.11)}{\Longrightarrow} \quad c(G) = 8 - 7 = 1.$$

Выпишем матрицу $B(G'_{«1»})$:

$$B\left(G'_{«1»}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{drang} B\left(G'_{«1»}\right) = 6 \quad \overset{(50.11)}{\Longrightarrow} \quad c\left(G'_{«1»}\right) = 7 - 6 = 1,$$

значит 1 не является точкой сочленения. Выпишем матрицу $B\left(G'_{«2»}\right)$:

$$B\left(G'_{«2»}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{drang} B\left(G'_{«2»}\right) = 5 \quad \overset{(50.11)}{\Longrightarrow} \quad c\left(G'_{«2»}\right) = 7 - 5 = 2,$$

значит, вершина 2 является точкой сочленения. Выпишем матрицу $B\left(G'_{«\mathrm{I}»}\right)$:

$$B\left(G'_{«\mathrm{I}»}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{drang}\left(B\left(G'_{«\mathrm{I}»}\right) = 7; \quad c\left(G'_{«\mathrm{I}»}\right) = 8 - 7 = 1.\right.$$

Значит, дуга I не является мостом. Выпишем матрицу $B\left(G'_{\mathrm{IV}}\right)$:

$$B\left(G'_{\mathrm{IV}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{drang}\left(B\left(G'_{\mathrm{IV}}\right) = 6; \quad c\left(G'_{\mathrm{IV}}\right) = 8 - 6 = 2.\right.$$

Значит, дуга IV — мост. ●

### 50.2.3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ

Эта часть главы посвящена самому «молодому» разделу теории графов — экстремальным (или оптимизационным) задачам на графах и алгоритмам их решения.

Экстремальные задачи могут рассматриваться на обычных графах, но, как правило, дугам и вершинам графа (или только дугам, или только вершинам) поставлены в соответствие числа, называемые весами.

Веса в зависимости от задач могут иметь различный смысл: длина дуги, стоимость строительства дороги, пропускная способность, эксплуатационные расходы и т. п. Различной может быть и формулировка оптимизационной задачи: найти кратчайший путь из вершины в вершину, определить оптимальное размещение элеваторов на транспортной схеме, при котором будет обеспечена наиболее экономичная доставка зерна с полей и т. п.

Поскольку графы, возникающие в прикладных задачах, конечные, то экстремальная задача может быть решена и перебором всех вариантов, однако такой перебор уже для графов со сравнительно небольшим числом вершин и дуг оказывается невозможным даже на самых современных компьютерах.

Разработка эффективных алгоритмов решения экстремальных задач на графах — бурно развивающееся направление прикладной математики.

## § 50.3. ЗАДАЧА О СОЕДИНЕНИИ ГОРОДОВ

В этом параграфе в качестве примера оптимизационной задачи на графе рассмотрим задачу о соединении городов.

Известны точки, в которых предполагается разместить населенные пункты (города), и известны трассы дорог, которые можно построить, а также стоимость их строительства.

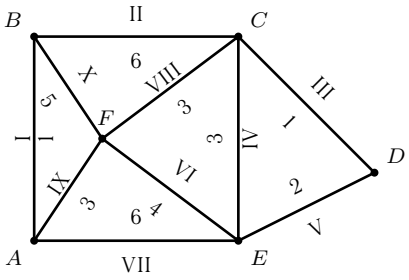



*Рис. 50.10.*

На рис. 50.10 указаны населенные пункты $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$; арабские цифры около проектируемых участков дорог — стоимость их строительства (в условных единицах), римские цифры — номера дуг. Требуется определить, какие из дорог следует построить, так, чтобы: полученная схема дорог позволяла попасть из любого города в любой; из всех возможных схем имела наименьшую стоимость строительства.

Ясно, что сформулированная задача может быть формализована с помощью теории графов.

**Определение 50.11.** *Взвешенным графом (графом с весами на дугах) будем называть четверку $G(X, U, f, \rho)$, где $G(X, U, f)$ — граф, $\rho : U \to (0, +\infty)$.*

*Отображение $\rho$ называется весовым отображением. Если $u \in U$, то $\rho(u)$ называют весом дуги $u$. Если $\{u_i\}_{i=1}^n$ — путь или цепь на графе $G$, то ее весом называют величину*

$$\rho\left(\{u_i\}_{i=1}^n\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i). \tag{50.12}$$

*Весом графа $G(X, U, f, \rho)$ называют величину*

$$\rho(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u \in U} \rho(u). \tag{50.13}$$

Аналогично определяется вес подграфа и частичного графа.

Сформулируем задачу о соединении городов на языке теории графов.

Дан конечный связный взвешенный граф $G(X, U, f, \rho)$. Требуется найти связный частичный граф минимального веса.

**Определение 50.12.** *Покрывающим деревом связного графа называется его частичный граф, который является деревом. Если $G$ не является связным графом, то говорят о покрывающем лесе, т. е. о деревьях, покрывающих его компоненты связности.*

**Лемма 50.1.** *Решение задачи о соединении городов — покрывающее дерево.*

● Предположим противное, т. е. что решение задачи $G\,(X, U', f|_{U'})$ не является деревом, тогда на нем по основной теореме о деревьях существует хотя бы одна дуга, которая не является мостом. Обозначим ее $u_0$. Рассмотрим граф $G\left(X, U \setminus \{u_0\}, f|_{U'\setminus\{u_0\}}\right)$. Очевидно, он связен и

$$\rho\big(G(X, U' \setminus \{u_0\}, f\big|_{U'\setminus\{u_0\}})\big) = \rho\big(G(X, U', f\big|_{U'})\big) - \rho(u_0) < \rho\big(G(X, U', f\big|_{U'})\big).$$

Последнее противоречит тому, что $G(X, U', f\big|_{U'})$ является решением задачи о соединении городов. ●

**ТЕОРЕМА 50.10 (алгоритм Краскала)**

Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ дуг покрывающего дерева минимального веса может быть найдена с помощью следующего алгоритма:

1) $u_1$ — дуга минимального веса из множества $U$, не являющаяся петлей.
2) Если уже определен начальный отрезок последовательности $u_1$, $u_2$, …, $u_{k-1}$, то дуга $u_k$ выбирается из множества $U \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ так, что выполнено два условия:

а) добавление дуги $u_k$ к $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ не приводит к образованию циклов;

б) из дуг, удовлетворяющих условию а), дуга $u_k$ обладает наименьшим весом.

● Ясно, что последовательность, построенная по алгоритму, определяет покрывающее дерево. Очевидно, что $\rho(u_1) \leqslant \rho(u_2) \leqslant \cdots \leqslant \rho(u_{|X|-1})$. Это дерево обозначим $T_{K_p}$. Покажем, что $T_{K_p}$ является решением задачи о соединении городов. Предположим противное, т. е. что существует другое покрывающее дерево $T = G\left(X, V, f\big|_V, \rho\big|_V\right)$, при этом

$$\rho(T) < \rho\left(T_{K_p}\right). \tag{50.14}$$

Упорядочим последовательность дуг дерева $T$ так, что $V = \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$ и $\rho(v_1) \leqslant \rho(v_2) \leqslant \cdots \leqslant \rho(v_{|X|-1})$. Ясно, что $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \neq \{v_i\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через $k$ такой индекс, что $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, …, $u_{k-1} = v_{k-1}$, $u_k \neq v_k$. Тогда $\rho(u_k) \leqslant \rho(v_k)$, так как $v_k$ по отношению к $\{u_i\}_{i=1}^{k-1}$ удовлетворяет подпункту а) пункта 2) алгоритма Краскала, а $u_k$ удовлетворяет всему пункту 2) алгоритма Краскала. Добавим к дереву $T$ дугу $u_k$. По основной теореме о деревьях (теорема 49.12) это привело к образованию единственного простого цикла, содержащего дугу $u_k$. Очевидно, этот простой цикл содержит хотя бы одну дугу $v_j$, $j > k$. Мы имеем $\rho(u_k) \leqslant \rho(v_k) \leqslant \rho(v_j)$. Разорвем этот цикл, удалив дугу $v_j$. Полученное дерево обозначим $T_1$. Занумеруем его последовательность дуг $\{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$ так, что $\rho(v_1^1) \leqslant \rho(v_2^1) \leqslant \cdots \leqslant \rho(v_{|X|-1}^1)$. Ясно, что

$$\rho(T_1) \leqslant \rho(T). \tag{50.15}$$

Возможны два случая:

1. $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} = \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Тогда $T_1 = T_{K_p}$, и мы имеем

$$\rho\left(T_{K_p}\right) \leqslant \rho(T). \tag{50.16}$$

Последнее противоречит (50.14).

2. $\{u_i\}_{i=1}^{|X|-1} \neq \{v_i^1\}_{i=1}^{|X|-1}$. Обозначим через $k_1$ такой индекс, для которого

$$u_1 = v_1^1, \quad u_2 = v_2^1, \quad , \ldots , \quad u_{k_1-1} = v_{k_1-1}^1, \quad u_{k_1} \neq v_{k_1}^1.$$

Из построения $T_1$ следует, что $k_1 > k$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные для пары $T_{K_p}$, $T$, к паре $T_{K_p}$, $T_1$, мы получим граф $T_2$, $k_2 > k_1$, для которого опять возможны два случая: 1, 2. Но случай 1 приводит к противоречию, а случай 2 приведет к графу $T_3$ и $k_3 > k_2$.

Ясно, что мы можем лишь конечное число раз выходить на случай 2, так как $k_1 < k_2 < \cdots < |X| - 1$, а выход на случай 1 приводит к тому, что

$$\rho\left(T_{K_p}\right) \leqslant \rho(T_1) \leqslant \rho(T_2) \leqslant \cdots \leqslant \rho(T),$$

а это противоречит (50.14). ●

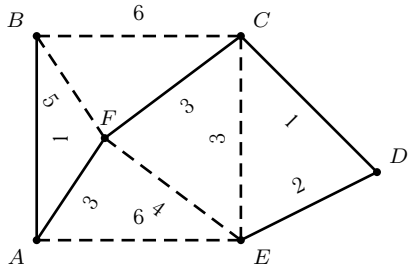



*Рис. 50.11.*

● *ПРИМЕР 50.11.* Применим алгоритм Краскала к графу, приведенному на рисунке в начале этого пункта, — схеме дорог. На первом шаге выбирается дуга $u_1 = \text{III}$, затем $u_2 = \text{I}$, $u_3 = \text{V}$ (далее отпадает возможность выбора дуги IV), $u_4 = \text{VIII}$ (далее отпадает возможность выбора дуги VI), $u_5 = \text{IX}$ (далее отпадает возможность выбора дуг II, X, VII). Процесс выбора дуг автоматически оборвался. Покрывающее дерево минимального веса приведено на рис. 50.11.

Пунктиром обозначены дуги, не вошедшие в это дерево. $\rho(T_{K_p}) = 11$.

## Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Если граф не связен, то алгоритм Краскала дает минимальный покрывающий лес.
2. Если граф не взвешен, то, присваивая всем дугам весá, равные 1, мы можем применить алгоритм Краскала для нахождения покрывающего дерева (леса).
3. Теорема 50.8 о двоичном ранге матрицы $B(G)$ конечного ориентированного графа позволяет предложить матричный вариант реализации алгоритма Краскала, состоящий в следующем: на каждом шаге гауссова приведения матрицы к треугольному виду проводить исключение, выбирая ведущий элемент в столбце, соответствующем дуге наименьшего веса. Тогда номера столбцов, в которых были выбраны ведущие элементы, и образуют набор дуг покрывающего дерева наименьшего веса.

## § 50.4. КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ НА ГРАФЕ

Задача, рассмотренная в этом параграфе, имеет широкие приложения, алгоритм нахождения кратчайшего пути используется сейчас даже в бортовых компьютерах автомобилей и позволяет находить оптимальный путь на сложной схеме автомобильных дорог таких городов, как Нью-Йорк, Мехико, Токио.

### 50.4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дан взвешенный граф $G(X, U, f, l)$, $l : U \to \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. $l(u)$ трактуется как длина дуги $u$.

Пусть $\mu$: $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ последовательность дуг пути $\mu$ на графе $G$. Длиной пути $\mu$ называется величина $l(\mu)$, определяемая равенством

$$l(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} l(u_i).$$

Для произвольной пары $x$ и $y$ вершин графа требуется определить длину кратчайшего пути из $x$ в $y$ и найти последовательность вершин, через которые он проходит.

Ясно, что в этой задаче граф можно считать простым, т. е. не содержащим кратных дуг, в противном случае из каждого набора кратных дуг следует оставить кратчайшую дугу.

Дугу, соединяющую вершину $x_i$ с вершиной $x_j$, будем обозначать $\{x_i, x_j\}$, а ее длину — $l(\{x_i, x_j\})$.

Алгоритм решения задачи основан на следующей теореме, называемой экстремальным свойством кратчайшего пути.

**ТЕОРЕМА 50.11**
Если $\mu_{xy} : x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$ — последовательность вершин кратчайшего пути из вершины $x$ в вершину $y$, то $x = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ — последовательность вершин кратчайшего пути из $x_0$ в $x_{k-1}$, а $x_1, \ldots, x_k = y$ последовательность вершин кратчайшего пути из $x_1$ в $y$, более того — $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r$ — последовательность вершин кратчайшего пути из $x_i$ в $x_r$.

● Предположим, что $x = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ не является кратчайшим путем из вершины $x$ в вершину $x_{k-1}$, тогда существует более короткий путь $\mu'_{x\,x_{k-1}}$, ведущий из $x$ в $x_{k-1}$, т. е.

$$l\left(\mu'_{x\,x_{k-1}}\right) < l\left(\mu_{x\,x_{k-1}} = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}\right). \tag{50.17}$$

Рассмотрим путь, ведущий из $x$ в $y$:

$$\mu'_{xy} = \mu_{x\,x_{k-1}} \bigcup \{x_{k-1}, x_k = y\}. \tag{50.17'}$$

Ясно, что

$$l\left(\mu'_{xy}\right) = l\left(\mu_x\, x_{k-1}\right) + l\left(\{x_{k-1}, x_k = y\}\right) < \\ < l\left(\mu'_{x\,x_{k-1}}\right) + l\left(\{x_k, x_k = y\}\right) < l\left(\mu_{xy}\right). \tag{50.18}$$

Последнее противоречит тому, что $\mu_{xy}$ — кратчайший путь из вершины $x$ в вершину $y$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. ●

Опишем теперь алгоритм нахождения длин кратчайших путей, ведущих из произвольной вершины графа во все остальные его вершины (в которые есть пути из вершины $x$), предложенный Р. Примом [95]

Алгоритм состоит в присвоении вершинам пометок, признаком окончания алгоритма является остановка процесса изменения пометок.

1. Присвоить вершине $x$ пометку $m_x = 0$, остальным вершинам — пометку $m_y = +\infty$. Занести вершину $x$ в массив $L$;
2. Для каждой вершины $y$, смежной с вершиной $z$ из $L$, найти $m_z + l(z, y)$ и сравнить
$$m_z + l(z, y) < m_y, \tag{50.19}$$
если (50.19) выполнено, то
$$m_y := m_z + l(z, y), \tag{50.20}$$
и вершину $y$ занести в массив $L_1$;
3. Проверить $L_1 \neq \varnothing$, $L := L_1$ и вернуться к пункту 1;
4. Конец алгоритма нахождения длин кратчайших путей.

### 50.4.2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕРШИН КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Требуется найти последовательность вершин кратчайшего пути из $x$ в $y$, если известны длины дуг графа и итоговая расстановка меток от вершины $x$ (см. предыдущий алгоритм).

Введем понятие предка вершины:

$$\operatorname{pred} x = \{\, y \in X \mid m_y + l\,(\{y, x\}) = m_x \,\}, \tag{50.21}$$

т. е. предок вершины $x$ — это такая вершина $y$, через которую по правилу (50.20) была пересчитана окончательная метка вершины $x$.

Последовательность вершин кратчайшего пути из $x$ в $y$ определяется рекурсивно в направлении от $y$ к $x$ по правилу

$$y, \quad \operatorname{pred}(y), \quad \operatorname{pred}(\operatorname{pred}(y)), \quad \operatorname{pred}(\operatorname{pred}(\operatorname{pred}(y))), \quad \ldots, \quad \operatorname{pred}(\operatorname{pred}\ldots(\operatorname{pred}(y))\ldots) = x.$$

● *ПРИМЕР 50.12.* Для графа, изображенного на рис. 50.12, найти длины кратчайших путей из вершины $x_1$ и последовательность вершин кратчайшего пути из $x_1$ в $x_2$.

Длины дуг выписаны в кружках около соответствующих дуг.

● Результаты работы алгоритма по шагам вычислений сведем в таблицу (табл. 50.1).

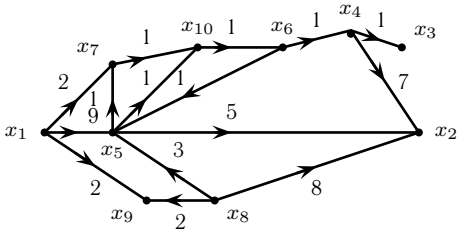



*Рис. 50.12.*

*Таблица 50.1.*

| № шага вычислений | Массив $L$ | Метки вершин | | | | | | | | | | Массив $L_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | |
| 0 | $\varnothing$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $x_1$ |
| 1 | $x_1$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 9 | $\infty$ | 2 | $\infty$ | 2 | $\infty$ | $x_5, x_7, x_9$ |
| 2 | $x_5, x_7, x_9$ | 0 | 14 | $\infty$ | $\infty$ | 9 | $\infty$ | 2 | $\infty$ | 2 | 3 | $x_{10}, x_2$ |
| 3 | $x_{10}, x_2$ | 0 | 14 | $\infty$ | $\infty$ | 9 | 4 | 2 | $\infty$ | 2 | 3 | $x_6$ |
| 4 | $x_6$ | 0 | 14 | $\infty$ | 5 | 5 | 4 | 2 | $\infty$ | 2 | 3 | $x_4, x_5$ |
| 5 | $x_4, x_5$ | 0 | 10 | 6 | 5 | 5 | 4 | 2 | $\infty$ | 2 | 3 | $x_2, x_3$ |
| 6 | $x_2, x_3$ | 0 | 10 | 6 | 5 | 5 | 4 | 2 | $\infty$ | 2 | 3 | $\varnothing$ |

Восстановим кратчайший путь из вершины $x_1$ в вершину $x_2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{pred} x_2 &= x_5; & m_{x_5} &= 5; \\ \operatorname{pred} x_5 &= x_6; & m_{x_6} &= 4; \\ \operatorname{pred} x_6 &= x_{10}; & m_{x_{10}} &= 3; \\ \operatorname{pred} x_{10} &= x_7; & m_{x_7} &= 2; \\ \operatorname{pred} x_7 &= x_1; & m_{x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Трасса кратчайшего пути из $x_1$ в $x_2$ (рис. 50.12):

$$x_1 \xrightarrow{2} x_7 \xrightarrow{1} x_{10} \xrightarrow{1} x_6 \xrightarrow{1} x_5 \xrightarrow{5} x_2. \qquad \bullet$$

*Замечание.*

1. Приведенный алгоритм можно применять и на неориентированных графах для нахождения кратчайших цепей.
2. Приведенный алгоритм можно применять и для графов без весов на дугах, положив веса всех дуг равными единице. В этом случае его можно применять для нахождения компонент связности и сильной связности графа.

### Вопросы в конце параграфа

1. Почему в примере 50.12 окончательная метка вершины $x_8$ равна $+\infty$?
2. Если допустить возможность дугам графа иметь отрицательные веса, при каком условии указанный алгоритм применим, а при каком условии его нельзя применять?
3. Как находить самые длинные пути на графе?

## § 50.5. МАТРИЦА РАССТОЯНИЙ

Приведем матричный алгоритм нахождения длин кратчайших путей между любыми двумя вершинами на простом взвешенном конечном графе с положительными весами дуг.

Пусть $G(X, U, f, l)$ — простой конечный взвешенный граф. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $l : U \to \mathbb{R}_+$. Рассмотрим матрицу весов дуг графа $W(G)$, определенную следующим:

$$\big(W(G)\big)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ l\big(\{x_i, x_j\}\big), & \text{если } \{x_i, x_j\} \in U, \\ \infty, & \text{если } \{x_i, x_j\} \notin U. \end{cases}$$

Введем бинарную операцию $\odot$ во множестве квадратных матриц порядка $n$, положив

$$(A \odot B)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \min_k \left(A_{ik} + B_{kj}\right). \tag{50.22}$$

Степени матрицы по операции $\odot$ вводятся правилом:

$$A^{\boxed{1}} \stackrel{\text{def}}{=} A, \quad A^{\boxed{2}} \stackrel{\text{def}}{=} A \odot A, \quad A^{\boxed{3}} \stackrel{\text{def}}{=} A^{\boxed{2}} \odot A, \quad \ldots, \quad A^{\boxed{k}} \stackrel{\text{def}}{=} A^{\boxed{k\text{-}1}} \odot A, \quad \ldots$$

Для матрицы $W(G)$ найдем последовательно

$$\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2}},\ \bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{4}},\ \bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{8}},\ \ldots,\ \bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2^{k_0}}},$$

где $2^{k_0} \leqslant n-1$.

Матрица $\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2^{k_0}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{DIST}(G)$ называется матрицей расстояний на графе, ее элементы имеют следующее истолкование:

$$\bigl(\mathrm{DIST}(G)\bigr)_{ij} = \begin{cases} +\infty, & \text{если не существует пути из } x_i \text{ в } x_j, \\ \text{длине кратчайшего пути из } x_i \text{ в } x_j. \end{cases}$$

Обоснованием этого факта является теорема 50.11 и то, что операция $\odot$ является матричным вариантом пересчета меток в алгоритме Прима (см. §50.4).

● *ПРИМЕР 50.13.* Найти матрицу расстояний для графа примера 50.12.

● Выпишем матрицу $W(G)$:

$$W(G) = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2}}$, $\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{4}}$, $\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{8}}$, $\mathrm{DIST}(G) = \bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2^{k_0}}}$:

$$\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & 4 & 0 & 2 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bigl(W(G)\bigr)^{\boxed{4}} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & \infty & 5 & 5 & 4 & 2 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 8 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 10 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & \infty & \infty & 10 \\ \infty & 8 & 7 & 6 & 3 & 5 & 4 & 0 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 7 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\big(W(G)\big)^{\boxed{8}} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 & 5 & 5 & 4 & 2 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 8 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 8 & 7 & 6 & 3 & 5 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 7 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DIST}(G) = \big(W(G)\big)^{\boxed{16}} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 6 & 5 & 5 & 4 & 2 & \infty & 2 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 8 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 8 & 7 & 6 & 3 & 5 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 7 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что верхняя строка матрицы $\mathrm{DIST}(G)$ совпадает с финальной строкой меток в примере 50.12, таким образом, первая строка матрицы $\mathrm{DIST}(G)$ — это строка меток, подсчитанных от первой вершины, вторая строка матрицы $\mathrm{DIST}(G)$ — строка меток, подсчитанных от второй вершины, и т. д.

Это позволяет производить восстановление последовательности вершин любого кратчайшего пути (см. § 50.4).

### Вопросы в конце параграфа

1. Какова структура матрицы $\mathrm{DIST}(G)$ неориентированного графа, состоящего из $k$ компонент связности, если ввести покомпонентную нумерацию вершин графа?
2. Часто равенство $\big(W(G)\big)^{\boxed{r}} = \mathrm{DIST}(G)$ достигается для показателя $r \leqslant |X| - 1$. Как модифицировать алгоритм нахождения матрицы $\mathrm{DIST}(G)$, чтобы он выполнял только необходимое для конкретного графа число шагов?

## § 50.6. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Деятельность общества, а также многие физические, биологические, химические процессы и прочее хорошо интерпретируются сетями, термин «сеть» стал широко употребимым: компьютерные сети, транспортные сети, телекоммуникационные сети, нейронные сети и т. п.

Что представляет собой сеть как математическое понятие и как модель тех конкретных сетей, о которых было сказано выше?

Приведем серию определений, описывающих этот математический объект.

**Определение 50.13.** *Вершина $x$ орграфа $G(X, U, f)$ называется источником, если $\deg_+ x = 0$ и $\deg_- x > 0$, т. е. источник — это вершина, в которую нет входящих дуг и из которой есть выходящие дуги.*

**Определение 50.14.** *Вершина $x$ орграфа $G(X,U,f)$ называется стоком, если $\deg_+ x > 0$ и $\deg_- x = 0$, т. е. сток — это вершина, из которой нет выходящих дуг и есть входящие дуги.*

**Определение 50.15.** *Сетью называют конечный связный ориентированный граф с непустым множеством источников и непустым множеством стоков.*

На рис. 50.13 а),б),в) приведены примеры сетей.

Как правило, рассматривают сети с одним источником и одним стоком. Общий случай сводят к нему, вводя новый (фиктивный) источник, направляя исходящие из него дуги в источники сети, и новый (фиктивный) сток, направляя в него дуги из стоков сети (см. переход от сети рис. 50.13, б) к сети рис. 50.13, в)).

Далее будем рассматривать только сети с одним источником и одним стоком.

Пусть на дугах сети $G(X,U,f)$ с источником $a$ и стоком $b$ заданы положительные веса, т. е. задано отображение $w : U \to \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$. Веса дуг будем называть их пропускными способностями.

**Определение 50.16.** *Допустимым потоком в сети $G(X,U,f,w)$ называют отображение $\varphi : U \to [0,+\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

*1)* $\forall u \in U \ (\varphi(u) \leqslant w(u))$;

*2)* $\forall x \in X \setminus (\{a\} \cup \{b\})$

$$\left(\varphi_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u\in U|(p_2\circ f)(u)=x} \varphi(x) = \sum_{v\in U|(p_1\circ f)(v)=x} \varphi(v) = \varphi_-(x)\right).$$

Условие 2) означает, что допустимый поток во всех промежуточных вершинах сети (т. е. отличных от источника и стока) не возникает и не поглощается.

Выражение $\varphi_+(x)$ из определения 50.16 называют потоком, входящим в вершину $x$. Выражение $\varphi_-(x)$ из определения 50.16 называют потоком, исходящим из вершины $x$.

Очевидно, имеют место следующие очевидные утверждения:

**ТЕОРЕМА 50.12**

Нулевой поток всегда является допустимым.

**ТЕОРЕМА 50.13**

Для любого допустимого потока $\varphi$ на сети $G(X,U,f,w)$ с одним источником $a$ и одним стоком $b$ имеет место равенство:

$$\varphi_-(a) = \varphi_+(b) \tag{50.23}$$

и имеют место оценки:

$$\varphi_+(b) = \varphi_-(a) \leqslant \min\left(\sum_{u\in U|(p_1\circ f)(u)=a} w(u), \sum_{v\in U|(p_2\circ f)(v)=b} w(v)\right) \tag{50.24}$$

$$\varphi_+(x) = \varphi_-(x) \leqslant \min\left(\sum_{u\in U|(p_1\circ f)(u)=a} w(u), \sum_{v\in U|(p_2\circ f)(v)=b} w(v)\right) \tag{50.25}$$

$$\varphi_+(x) = \varphi_-(x) \leqslant \min\left(\sum_{u\in U|(p_1\circ f)(u)=a} w(u), \sum_{v\in U|(p_2\circ f)(v)=b} w(v)\right) \tag{50.26}$$

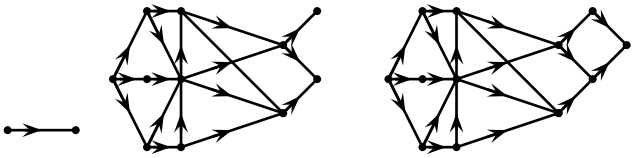



*Рис. 50.13.*

● Доказательство равенства (50.23) аналогично доказательству теоремы Эйлера о степенях и полустепенях вершин (теорема 49.1). Оценки (50.24), (50.25), (50.26) следуют из условия 1) определения 50.16. ●

**Определение 50.17.** *Величиной допустимого истока $\varphi$ на сети $G(X, U, f, w, a, b)$ называют величину*

$$I(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_-(a) = \varphi_+(b). \tag{50.27}$$

● *ПРИМЕР 50.14.* Рассмотрим сеть, заданную рисунком 50.14. Цифрами около дуг обозначены значения допустимого потока $\varphi$. Цифры в скобках около дуг — их пропускные способности.

Ясно, что $I(\varphi) = 6$.

**Определение 50.18.** *Максимальным потоком в сети $G(X, U, f, w, a, b)$ называется допустимый поток максимальной величины. Его величина называется пропускной способностью сети $G$ и обозначается $I(G)$.*

Как находить пропускную способность сети и максимальный поток?

Основные результаты о пропускной способности цепи и методы нахождения максимального потока были получены в 1955 г. Фордом и Фалкерсоном. Формулировка основной теоремы о пропускной способности сети требует уточнения понятия «разрез», а именно — орразрез в сети $G(X, U, f, w, a, b)$.

**Определение 50.19.** *Разобьем множество вершин сети $G(X, U, f, w, a, b)$ на два множества $X_a$ и $X_b$ так, что*

*1)* $a \in X_a,\ b \in X_b$;

*2)* $X_a \cap X_b = \varnothing$;

*3)* $X_a \cup X_b = X$.

*Подмножество $\langle X_a, X_b\rangle$ дуг сети $G$, определенное условием*

$$u \in \langle X_a, X_b\rangle \iff \big((p_1 \circ f)(u) \in X_a\big)\&\big((p_2 \circ f)(u) \in X_b\big),$$

*называется ориентированным разрезом (орразрезом) сети $G$.*

*Если $\langle X_a, X_b\rangle$ — орразрез сети и дуга $v$ такова, что $((p_2 \circ f)(v) \in X_a)\&(p_1 \circ f)(v) \in X_b)$, то она называется дугой, противоположной орразрезу.*

*Пропускной способностью разреза называется величина $w(\langle X_a, X_b\rangle)$, определяемая следующим равенством:*

$$w\big(\langle X_a, X_b\rangle\big) = \sum_{u \in \langle X_a, X_b\rangle} w(u). \tag{50.28}$$

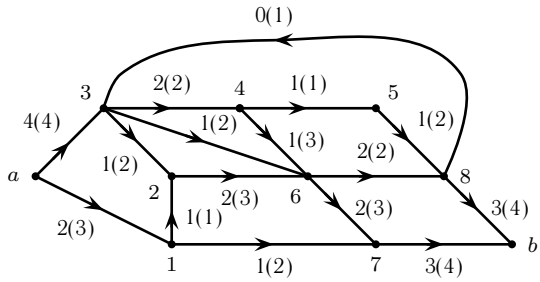



*Рис. 50.14.*

*ПРИМЕР 50.15.* Рассмотрим разрез $\langle\{a,1,2,3\},\{4,5,6,7,8,b\}\rangle$ на сети примера 50.14. Найдем пропускную способность этого разреза:

$$w\big(\langle\{a,1,2,3\},\{4,5,6,7,8,b\}\rangle\big)=2+2+3+2=9.$$

**Определение 50.20.** *Пусть $\varphi$ — допустимый поток на сети $G(X,U,f,w,a,b)$, $\langle X_a,X_b\rangle$ — орразрез сети. Величина $\varphi(\langle X_a,X_b\rangle)$, определяемая равенством*

$$\varphi\big(\langle X_a,X_b\rangle\big)=\sum_{u\in\langle X_a,X_b\rangle}\varphi(u), \tag{50.29}$$

*называется величиной потока $\varphi$ через орразрез $\langle X_a,X_b\rangle$.*

Из определений допустимого потока (определение 50.16), величины потока (определение 50.17) и величины потока через разрез следует

**ТЕОРЕМА 50.14 (Первая теорема Форда–Фалкерсона)**
Для любого орразреза $\langle X_a,X_b\rangle$ на сети $G(X,U,f,w,a,b)$ и любого допустимого потока $\varphi$ имеет место

$$I(\varphi)=\varphi\left(\langle X_a,X_b\rangle\right)\leqslant w\left(\langle X_a,X_b\rangle\right). \tag{50.30}$$

Следствием этой теоремы является вторая теорема Форда–Фалкерсона:

**ТЕОРЕМА 50.15 (Вторая теорема Форда–Фалкерсона)**
Для любой сети $G(X,U,f,w,a,b)$ справедливо

$$I(G)=\varphi\left(\varphi_{\max}\right)\leqslant\min_{\langle X_a,X_b\rangle}w\left(\langle X_a,X_b\rangle\right). \tag{50.31}$$

Минимум в правой части берется по всевозможным орразрезам сети $G$.

*Замечание.* Орразрез, на котором достигается минимум в правой части (50.31), называется минимальным орразрезом.

Оказывается, и это нам предстоит доказать, что справедливо более сильное утверждение, которое называется основной теоремой Форда–Фалкерсона о потоках в сетях.

**ТЕОРЕМА 50.16 (Основная теорема Форда–Фалкерсона)**
Пропускная способность сети $G(X, U, f, w, a, b)$, равная величине максимального потока, совпадает с пропускной способностью ее минимального орразреза, т. е.

$$I(G) = I(\varphi_{\max}) = \min_{\langle X_a, X_b\rangle} w\big(\langle X_a, X_b\rangle\big), \tag{50.32}$$

где минимум в правой части берется по всем орразрезам сети $G$.

● Рассмотрим случай сети, на которой пропускные способности всех дуг являются натуральными числами. Перейдем от исходной сети к сети $G'(X, U', f', w_e, a, b)$, заменив каждую дугу $u$ на $w(u)$ штук дуг $u'$, так, что $f'(u') = f(u)$. Пропускную способность всех дуг на сети $G'$ положим равной 1, т. е.

$$w_e(u') \equiv 1.$$

Ясно, что имеет место равенство

$$I(G) = I(G'). \tag{50.33}$$

Ясно, что величина максимального потока на сети $G'$ равна максимальному числу простых путей, не имеющих общих дуг, соединяющих $a$ с $b$.

Любой простой путь, соединяющий $a$ с $b$, проходит через любой орразрез сети, значит, величина максимального потока на сети $G'$ не превосходит количества дуг в любом орразрезе сети $G'$, в том числе в минимальном орразрезе. Если мы покажем, что на сети $G'$ всегда существует минимальный разрез, в котором количество дуг равно максимальному числу простых путей, не имеющих общих дуг и соединяющих $a$ с $b$, то это завершит доказательство основной теоремы Форда–Фалкерсона.

Последнее утверждение будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции число дуг сети $G'$.

*Шаг 1.* Сеть $G'$ содержит одну дугу. Тогда она имеет вид, приведенный на рис. 50.15.

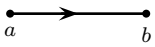


*Рис. 50.15.*

В этом случае существует только один простой путь, соединяющий $a$ с $b$, и только один орразрез $\langle\{a\}, \{b\}\rangle$, состоящий из единственной дуги графа, и утверждение, которое мы доказываем, выполнено тривиально.

*Индуктивный переход.* Предположим, что доказываемое утверждение справедливо для любой сети с количеством дуг $\leqslant m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для любой сети, у которой количество дуг равно $m_0 + 1$.

Возможны два случая:

а) на сети $G'$ существует минимальный орразрез, все дуги которого начинаются в $a$, или такой минимальный орразрез, все дуги которого заканчиваются в $b$. Ясно, что для такого разреза имеет место доказываемое утверждение;

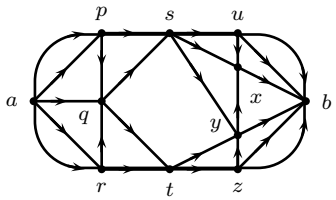



*Рис. 50.16.*

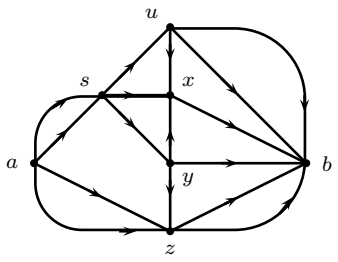



*Рис. 50.17.*

б) на сети $G'$ не существует минимального орразреза, удовлетворяющего а) (см. рис. 50.16, на этой сети таким орразрезом является орразрез, состоящий из дуг $(p;s)$, $(q;s)$, $(t;y)$, $(t,z)$). После удаления из сети дуг минимального разреза сеть распадается на два орграфа — $G_a$, содержащий источник, и $G_b$, содержащий сток.

Преобразуем исходную сеть с помощью графов $G_a$ и $G_b$ в графы $G_1$ и $G_2$ соответственно. $G_1$ получается стягиванием всех вершин и дуг $G_a$ в точку $a$, а $G_2$ получается из исходной сети стягиванием всех вершин и дуг в точку $b$. (На рис. 50.17 и 50.18 изображены графы $G_1$ и $G_2$ для сети рисунка 50.16). На каждом из этих графов дуги исходного минимального орразреза превратились в дуги минимального орразреза, прилежащего к $a$ и $b$ соответственно. Графы $G_1$ и $G_2$ являются сетями с числом дуг, меньшим либо равным $m_0$, и значит, для них справедливо предположение индукции, а именно: максимальное число путей, ведущих из $a$ в $b$ и не имеющих общих дуг, равно количеству дуг минимального разреза.

Порядок склейки этих наборов путей на $G_1$ и $G_2$ в наборы простых путей из $a$ в $b$ на исходной сети, не имеющих общих дуг, очевиден. Индуктивный переход доказан. ●

Как быть в том случае, когда пропускные способности дуг не являются целыми числами? В случае, когда они рациональны, сведение к рассмотренной ситуации осуществляется приведением всех весов к общему знаменателю, затем рассматривается сеть $G'(X,U,f,w')$, где $w'$ — веса отвечающие числителям исходных весов. Ясно, что максимальный поток $\varphi_{\max}$ на $G$ и максимальный поток $\varphi'_{\max}$ на $G'$ связаны соотношением

$$\varphi_{\max} = \frac{\varphi'_{\max}}{d}, \tag{50.34}$$

где $d$ — найденный ранее общий знаменатель.

Случай иррациональных пропускных способностей можно свести к рассмотренному заменой точных значений на приближенные.

В заключение приведем один алгоритм нахождения максимального потока в сети с целочисленными пропускными способностями.

*Шаг 1.* Подобрать произвольный допустимый поток $\varphi$ (если таковой существует) на $G$. Заметим, что чем больше исходный поток, тем быстрее завершается работа алгоритма.

*Шаг 2.* Исходя из найденного потока $\varphi$ перестроить сеть в орграф $G'(X,U',f',w')$ по следующему правилу:

а) любая дуга $u$ такая, что $\varphi(u)=0$, остается на $G'$ со своей исходной пропускной способностью, т. е. $w'(u)=w(u)$;

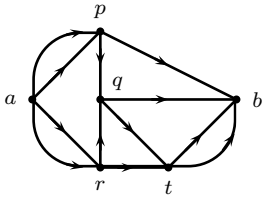



*Рис. 50.18.*

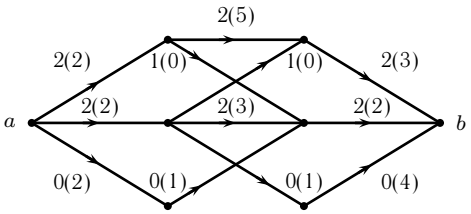



*Рис. 50.19.*

б) любая дуга $u$, для которой $\varphi(u) \neq 0$, меняет пропускную способность $w(u)$ на

$$w'(u) = w(u) - \varphi(u),$$

и на исходную сеть добавляется дуга $u'$, противоположная дуге $u$ с пропускной способностью $w'(u') = \varphi(u)$.

Заметим, что вершины $a$ и $b$ на $G'$ перестают быть источником и стоком.

*Шаг 3.* Если на $G'$ существует ненулевой допустимый поток $\varphi'$ из $a$ в $b$, то рассмотрим на $G$ поток $\varphi_1 = \varphi + \varphi'$ и повторим для $G$ с потоком $\varphi_1$ шаги 2 и 3.

Если с помощью шага 3 нельзя найти ненулевой допустимый поток из $a$ в $b$, то найденный до этого поток на $G$ максимален.

● *ПРИМЕР 50.16.* Рассмотрим сеть, приведенную на рис. 50.19. В скобках указаны пропускные способности дуг, без скобок — выбранный исходный допустимый поток.

На рис. 50.20 изображен граф $G'$ после выполнения шага 2. В скобках указаны пропускные способности, без скобок — значения потока $\varphi'$.

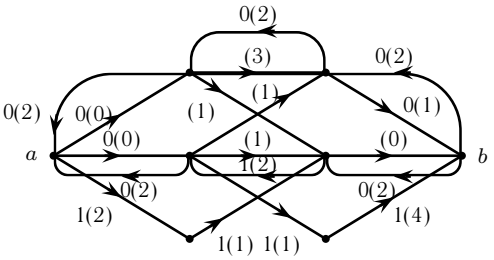



*Рис. 50.20.*

На рис. 50.21 представлена исходная сеть с потоком $\varphi_1 = \varphi + \varphi'$

На рис. 50.22 представлен граф $G'$ построенный по потоку $\varphi_1$.

Ясно, что на последнем графе не существует ненулевого допустимого потока из $a$ в $b$. Таким образом, поток $\varphi_1$ максимален.

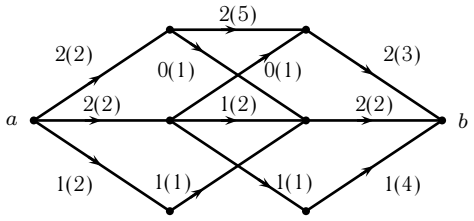



*Рис. 50.21.*

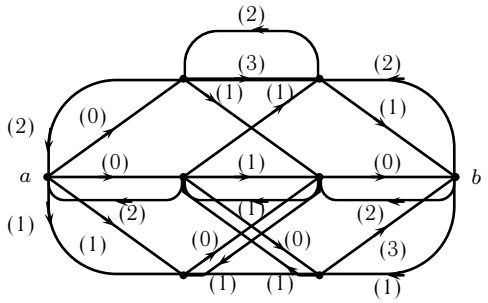



*Рис. 50.22.*

## Замечания и вопросы в конце параграфа

1. Шаг 1 — поиск допустимого потока в приведенном выше алгоритме не описан. Попробуйте предложить свой алгоритм поиска допустимого потока.
2. Разговор об иррациональных пропускных способностях для конкретных прикладных задач вообще лишен смысла, так как данные измерений — в принципе рациональные числа, а если данные получены косвенно, что привело к иррациональным числам, то, вводя их в компьютер, мы переходим к их приближенным рациональным значениям.
3. Покажите, что в примере 50.16 существуют другие максимальные потоки.

## Задачи и упражнения по теории графов

1. Для графов, приведенных на рисунках 50.23а)–50.23в), найти матрицы $A(G)$ и $B(G)$; составить списки дуг.
2. Изобразить графы, заданные матрицами $A(G)$ или $B(G)$:

а)
$$A(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

б)
$$B(G)=\begin{pmatrix}0&0&1&-1&0&-1&-1&0\\-1&0&0&0&-1&1&0&-1\\1&-1&0&0&0&0&1&0\\0&1&-1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

в)
$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

г)
$$B(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&-1&1&-1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&1&-1&0\end{pmatrix}$$

3. Дана матрица $A(G)$ или $B(G)$. Найти матрицу $B(G)$ или $A(G)$ и список дуг:

а)
$$A(G)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

б)
$$B(G)=\begin{pmatrix}-1&1&0&-1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&-1\\1&-1&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

в)
$$A(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

г)
$$B(G)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

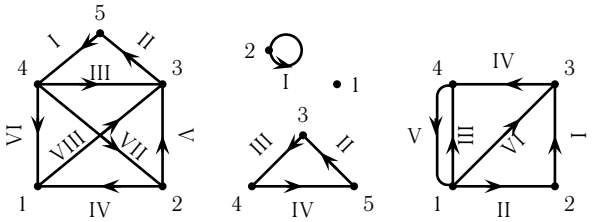



*Рис. 50.23.*

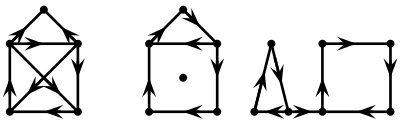



*Рис. 50.24.*

4. Найти число компонент связности и сильной связности графов, изображенных на рисунках 50.24–50.25.
5. Найти число компонент связности и сильной связности графов, заданных матрицами $A(G)$ и $B(G)$:

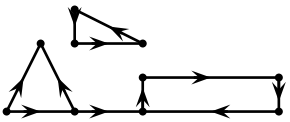


*Рис. 50.25.*

а)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

г)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

д)

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

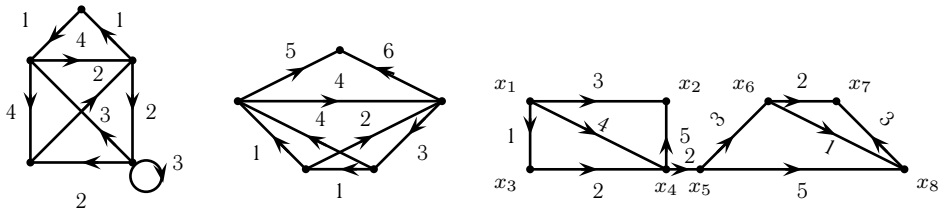



*Рис. 50.26.*

6. Для графов примеров 4, 5 найти матрицы достижимости и сильной достижимости вершин и компоненты связности и сильной связности.
7. Для графов примеров 2, 3, 5 найти $\deg_+ x$, $\deg_- x$; $x \in X$.
8. Для графов примеров 4, 5 найти конденсацию, т. е. граф, вершины которого — компоненты сильной связности исходного графа, а дуги — дуги исходного графа, ведущие из одной его сильной компоненты в другую.
9. Найти мосты, блоки и точки сочленения графов примеров 2, 4, 5.
10. Пользуясь алгоритмом Краскала, найти легчайшее покрывающее дерево (рис. 50.26).
11. Доказать, что любые два диаметра (простая цепь максимальной длины) связного графа имеют хотя бы одну общую вершину.
12. Каково максимальное количество висячих вершин дерева с $n$ вершинами?
13. Нарисуйте все неизоморфные между собой деревья с 3, 4 вершинами.
14. Найдите матрицы циклов графов примеров 4, 5.
15. Для графов примера 10 найдите матрицу длин кратчайших путей.
16. Для графа примера 10, в) найдите длину и трассу кратчайшего пути из $x_1$ в $x_8$; из $x_3$ в $x_7$; из $x_1$ в $x_7$.

# LI

# КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

На протяжении веков людей интересовали решения различных экстремальных задач. Еще Эвклид упоминает задачу о нахождении наибольшей и наименьшей длин отрезка прямой, проведенной из точки к окружности. Дошла до нас и знаменитая задача Дидоны — среди плоских фигур с заданным периметром найти ту, которая имеет наибольшую площадь. По преданию, финикийская царица Дидона, высадившись на берег северной Африки, попросила у местных вождей немного земли — столько, сколько можно охватить одной воловьей шкурой. Получив разрешение, она велела разрезать шкуру на тончайшие полоски и связать их между собой. Этой длинной полоской она отгородила круг, который и оказался искомой фигурой. Впоследствии здесь возник город Карфаген.

В наши дни, когда жизнь общества существенно усложнилась и его волнуют новые, доселе не встречавшиеся вопросы: Как лучше всего управлять производством? Как минимизировать потери при раскрое листов металла? Как управлять ракетой, чтобы она достигла цели в кратчайшее время? Как лучше всего организовать поиск месторождения нефти? И многое, многое другое. Роль экстремальных задач резко возросла.

Однако, прежде чем знакомиться с новыми направлениями в этой области, остановимся на классических методах оптимизации. Для понимания последующего материала они играют существенную роль.

В этой главе мы будем заниматься функциями многих переменных, определенных на $\mathbb{R}_n$ или замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$. Обозначения, используемые здесь, будут несколько отличаться от использованных в главе 22, а именно, точки $\mathbb{R}_n$ мы будем обозначать не большими буквами латинского алфавита, как в главе 22, а малыми, подчеркнутыми вверху, т. е.

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n,$$

в обозначении значения функции $f$ в точке $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ одинаково допустимыми будут записи $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $f(\overline{x})$.

Начнем с нескольких определений.

**Определение 51.1.** *Будем говорить, что функция $f$, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R}_n$, достигает глобального максимума (минимума) в точке $\overline{x}_0 \in X$, если для любой точки $\overline{x} \in X$ выполняется неравенство*

$$f(\overline{x}_0) \geqslant f(\overline{x}) \qquad (f(\overline{x}_0) \leqslant f(\overline{x}))\,.$$

**Определение 51.2.** ***(Уточнение терминологии определения 22.19)*** *Будем говорить, что функция $f$, определенная на $X$-области в $\mathbb{R}_n$, имеет в точке $\overline{x}' \in X$ локальный максимум (минимум), если существует такая $\delta$-окрестность $s(\overline{x}', \delta) \subset X$, что для всех точек $\overline{x} \in s(\overline{x}', \delta)$ выполнено неравенство*

$$f(\overline{x}') \geqslant f(\overline{x}) \qquad \big(f(\overline{x}') \leqslant f(\overline{x})\big).$$

*Точки локальных максимума и минимума называют точками экстремума функции.*

*Замечание.* Ясно, что точка глобального максимума (минимума) функции одновременно является и точкой локального максимума (минимума) функции.

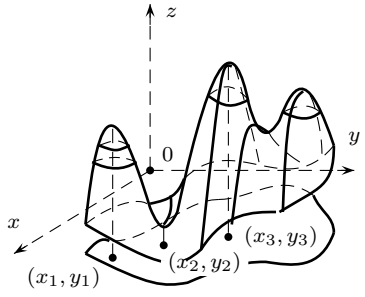



*Рис. 51.1.*

Задача поиска экстремума функции обычно называется экстремальной или оптимизационной задачей. («Оптимальный» означает «наилучший». В точно определенном смысле (в каком — будет ясно из дальнейшего) точки экстремума являются наилучшими.)

На рис. 51.1 приведены примеры экстремальных точек. Здесь $(x_1, y_1)$ — точка локального максимума; $(x_2, y_2)$ — точка локального минимума; $(x_3, y_3)$ — точка глобального максимума.

## § 51.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

В § 22.7 главы 22 мы получили необходимые условия экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных (теорема 22.6), которые состоят в обращении в ноль в точке экстремума частных производных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по всем ее переменным, т. е. если $\overline{x}$ точка экстремума, то

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{51.1}$$

Компактно систему (51.1) будем записывать в виде

$$\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{51.2}$$

Итак, для того чтобы найти точки экстремума функции $f$, дифференцируемой на $\mathbb{R}_n$, нужно решить систему $n$ уравнений (51.2).

Все решения системы (51.2) называются стационарными точками функции $f$. Именно среди них находятся точки экстремума. Заметим, что могут существовать стационарные точки, не являющиеся точками экстремума, так как условия теоремы 22.6 являются лишь необходимыми, а не достаточными.

К сожалению, решить систему (51.2) не так просто. В особенности, если функция $f$ имеет достаточно сложный вид и зависит от большого числа переменных.

Еще более сложная задача возникает, если мы хотим найти экстремумы не в $\mathbb{R}_n$, а, скажем, в неотрицательном октанте $\mathbb{R}_n$. В этом случае, если экстремум достигается в точке $\overline{x}$, совсем не обязательно, чтобы $\overline{x}$ была стационарной точкой, так как, возможно,

она лежит на границе октанта. А это означает, что одна или несколько координат точки $\overline{x}$ равны нулю. На этот раз процедура поиска экстремумов существенно усложняется, задача делается зачастую практически неразрешимой.

Таким образом, резюмируя, можно сказать, что описанный путь, связанный с решением системы уравнений (51.2), для решения практически важных задач (большая размерность, иногда сложный вид функции) мало пригоден. В рамках классического подхода эти задачи можно смело отнести к практически неразрешимым. Однако современные методы оптимизации, с которыми мы познакомимся дальше, принципиально меняют дело. Задачи с сотнями и тысячами переменных уже в ряде случаев не являются непреодолимыми.

## § 51.2. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Обратимся теперь к задачам на условный экстремум. Так называются задачи, с которых независимые переменные связаны некоторыми условиями. Начнем с функции двух переменных, чтобы на простом примере более отчетливо были видны идеи решения задачи.

Пусть задача состоит в отыскании локального максимума функции $z = f(x, y)$ при условии, что $x$ и $y$ связаны соотношением

$$F(x, y) = C. \qquad (51.3)$$

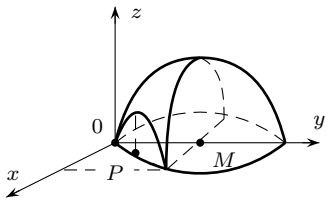



*Рис. 51.2.*

Геометрически это означает, что мы сравниваем между собой значения функции $z$ не во всех точках области определения функции, а лишь в тех, которые лежат на кривой $\mathcal{L}$, определяемой уравнением (51.3).

На рис. 51.2 изображен график функции

$$z = \sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}, \qquad (51.3')$$

а в качестве $\mathcal{L}$ взята прямая, заданная общим (неявным) уравнением:

$$x - y = 0. \qquad (51.4)$$

Из рисунка видно, что наибольшее значение на прямой $\mathcal{L}$ функция $\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}$ достигает в точке $P(1, 1)$. Оно равно $\sqrt{2}$. Глобальный максимум этой функции достигается в точке $M(0, 2)$ и значение функции в этой точке равно 2.

Из рисунка видно, что задачу можно решать в этом случае следующим образом.

Разрешим уравнение (51.4) относительно $y$:

$$y = x. \qquad (51.5)$$

Подставив правую часть (51.5) вместо $y$ в (51.3′), получим функцию $g$ переменной $x$:

$$g(x) = \sqrt{-2x^2 + 4x}; \qquad x \in [0, 2]. \qquad (51.6)$$

Обозначим через $r(x)$ подкоренное выражение в (51.6) и найдем наибольшее значение $r(x)$ на $[0, 2]$:

$$r'(x) = -4x + 4, \qquad x_{\text{кр}} = 1.$$
$$r_{\max} = r(1) = 2.$$

Для функции $z=\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}$ это и означает, что ее наибольшее значение на $\mathcal{L}$: $x-y=0$ достигается в точке $P(1,1)$, и оно равно $\sqrt{2}$.

Как же найти координаты точки $P$ в общем случае? Будем рассуждать так. Уравнение (51.3) определяет некоторую функцию $y=y(x)$, заданную неявно. Подставив ее в выражение для $z=f(x,y)$, мы имеем возможность вычислить производную от функции $z$ по $x$:

$$\frac{dz}{dx}=f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}. \tag{51.7}$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\frac{dz}{dx}=f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}=0. \tag{51.8}$$

Продифференцируем уравнение связи (51.3) по $x$:

$$F'_x+F'_y\,\frac{dy}{dx}=0. \tag{51.9}$$

Из (51.9) находим величину $\frac{dy}{dx}$ и, если $F'_y\neq 0$, подставляем в уравнение (51.8)

$$f'_x-\frac{F'_x}{F'_y}\,f'_y=0,$$

т. е.

$$\frac{f'_x}{F'_x}=\frac{f'_y}{F'_y}. \tag{51.10}$$

Обозначив величину последнего отношения через $-\lambda$ (знак $-$ взят только для удобства), получаем, что в точке экстремума должны выполняться условия:

$$f'_x+\lambda F'_x=0 \qquad \text{и} \qquad f'_y+\lambda F'_y=0. \tag{51.11}$$

Величина $\lambda$ (пока это неизвестный параметр) носит название множителя Лагранжа.

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа по следующему правилу:

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y). \tag{51.12}$$

Тогда уравнения (51.11) можно переписать так:

$$\Phi'_x=0 \qquad \text{и} \qquad \Phi'_y=0. \tag{51.13}$$

А это необходимые условия безусловного экстремума функции $\Phi(x,y,\lambda)$. Таким образом, можно сказать, что исходная задача на условный экстремум может быть заменена эквивалентной задачей на безусловный экстремум для функции Лагранжа исходной задачи. Уравнения (51.13) вместе с уравнениями связи (51.3) дают три уравнения для нахождения неизвестных величин $x$, $y$ и $\lambda$.

Что касается параметра $\lambda$, то он имеет глубокий смысл.

Обозначим координаты точки условного экстремума и само значение функции $z$ в этой точке соответственно через $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$. Представим себе, что $C$ не фиксировано, а

изменяется. Тогда величины $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$ зависят от $C$, изменяются вместе с ним. Имея в виду, что $\overline{z}(C) = f(\overline{x}(C), \overline{y}(C))$, вычислим

$$\frac{d\overline{z}}{dC} = f'_x \frac{d\overline{x}}{dC} + f'_y \frac{d\overline{y}}{dC}.$$

Дифференцируя (51.3) по $C$, получаем

$$F'_x \frac{d\overline{x}}{dC} + F'_y \frac{d\overline{y}}{dC} = 1.$$

Подставляя (51.11) в полученные выражения, имеем

$$\frac{d\overline{z}}{dC} = (-\lambda F'_x)\frac{d\overline{x}}{dC} + (-\lambda F'_y)\frac{d\overline{y}}{dC} = -\lambda\left(F'_x \frac{d\overline{x}}{dC} + F'_y \frac{d\overline{y}}{dC}\right) = -\lambda. \tag{51.14}$$

Таким образом, множитель Лагранжа характеризует (с точностью до знака) скорость изменения экстремального значения в зависимости от изменения $C$. Можно сказать и так: множитель Лагранжа показывает, на сколько возрастет экстремальное значение, если ограничение уменьшить на единицу.

Перейдем теперь к общему случаю. Будем искать локальный максимум функции

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{51.15}$$

при условиях

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{51.16}$$

Обозначим искомую точку максимума через $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Рассуждая так же, как в случае функции двух переменных, можно получить необходимые условия, которым должны удовлетворять координаты точки $\overline{x}$.

Построим функцию Лагранжа для рассматриваемой задачи:

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(b_i - g_i(x)\big). \tag{51.17}$$

Эта функция зависит от $n + m$ переменных ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$). В точке экстремума все ее частные производные должны равняться нулю. Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{51.18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{51.19}$$

Соотношения (51.18) и (51.19) можно считать системой из $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными. При выполнении определенных условий эта система уравнений имеет решения. Однако при больших $n$ и $m$ или (и) сложном виде функций $f$ и $g$ мы при решении системы (51.18)–(51.19) можем натолкнуться на непреодолимые трудности.

Однако еще большие трудности возникают, если мы хотим найти экстремум при наличии ограничений в форме неравенств (например, в случае неотрицательных

переменных). Здесь полностью применимы слова, сказанные в конце предыдущего параграфа.

Прежде чем проиллюстрировать сказанное примером, уместно сделать несколько замечаний.

*Замечание 51.1.* Мы получили необходимые условия для точек максимумов — локальных и условных. Эти же условия являются необходимыми для точек минимумов.

*Замечание 51.2.* Для поиска глобального максимума (минимума) нужно найти все локальные максимумы (минимумы) и выбрать из них наибольший (наименьший).

● *ПРИМЕР 51.1.* Найти экстремумы функции

$$z(x,y) = 10x + 20y + xy - 2x^2 - 2y^2,$$

определенной на $\mathbb{R}_2$.

● Выпишем необходимые и достаточные условия экстремума:

$$\begin{aligned} z'_x &= 10 + y - 4x = 0; \\ z'_y &= 20 + x - 4y = 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение: $x = 4,\ y = 6$.

Экстремальное (максимальное) значение функции $z(x,y)$ равно 80. Оно достигается в точке $(4,6)$. ●

● *ПРИМЕР 51.2.* Найти максимум функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Эта задача имеет и вполне реальный смысл. Содержательно она формулируется так. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема с гранями, параллельными координатными плоскостями, вписанного в эллипсоид $g(x,y,z) = 0$.

● Построим функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y,z) = xyz + \lambda\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right].$$

Вычислим ее частные производные по $x$, $y$, $z$, $\lambda$ и приравняем их нулю. Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy - \frac{2\lambda z}{c^2} = 0; \tag{51.20}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{51.21}$$

Из первых трех уравнений находим имеем:

$$\frac{a^2yz}{2x} = \lambda; \qquad \frac{b^2xz}{2y} = \lambda; \qquad \frac{c^2xy}{2z} = \lambda.$$

Поскольку равны правые части равенств, то равны и левые. Отсюда следует

$$\frac{a^2yz}{2x} = \frac{b^2xz}{2y} \qquad \text{и} \qquad \frac{a^2yz}{2x} = \frac{c^2xy}{2z}.$$

Итак, для определения величин $x$, $y$ и $z$ имеем три уравнения:

$$\begin{gathered} a^2y^2 = b^2x^2, \\ a^2z^2 = c^2x^2, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{gathered}$$

Последовательно исключая $x^2$ и $z^2$, находим:

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}}; \qquad z = \frac{c}{\sqrt{3}}; \qquad x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

В этой точке функция $f(x, y, z) = xyz$ достигает максимума. Величина максимума $M$, определяется так:

$$M = \frac{abc}{3\sqrt{3}}. \quad \bullet$$

● *ПРИМЕР 51.3.* Найти условный экстремум функции

$$u(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x$$

при условии

$$x + 2y - z = 3.$$

● Построим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = x^2 - y^2 + z^2 - 2x + \lambda\{3 - x - 2y + z\}.$$

Вычислим ее частные производные по $x$, $y$, $z$, $\lambda$ и приравняем их нулю. Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x - 2 - \lambda = 0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \lambda = 0; \tag{51.22}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2y - 2\lambda = 0; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 3 - x - 2y + z = 0. \tag{51.23}$$

Из первых трех уравнений исключаем $\lambda$:

$$2x - 2 = -y \qquad \text{и} \qquad y = 2z.$$

Из четвертого уравнения исключаем $x$ и $y$:

$$3 - 1 + z - 4z + z = 0.$$

Отсюда следует, что $z = 1$; $y = 2$; $x = 0$.

Экстремальное значение функции $u(x, y, z)$ равно

$$u(0, 2, 1) = -3. \quad \bullet$$

## § 51.3. ПРОЦЕДУРЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА

Классический подход к проблеме поиска экстремумов привел к формулировке необходимых условий, которым должны удовлетворять координаты точек экстремумов. Однако в рамках этого подхода возникла и другая идея — поиск точки экстремума путем вычисления значений функции в нескольких точках и последующего сравнения этих значений. Хотя эта идея была применена первоначально лишь к функциям одного переменного, впоследствии она весьма плодотворно использовалась в численных методах современного математического программирования. Познакомимся с несколькими схемами реализации этой общей идеи. Прежде, однако, введем определение унимодальной функции.

**Определение 51.3.** *Функция $f$ унимодальна и имеет на промежутке $[a,b]$ единственный максимум, если существует $x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, такое, что $f$ или строго возрастает при $x \leqslant x_0$ и строго убывает при $x > x_0$, или строго возрастает при $x < x_0$ и строго убывает при $x \geqslant x_0$.*

**Определение 51.4.** *Функция $f$ унимодальна и имеет на промежутке $[a,b]$ единственный минимум, если существует $x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, такое, что $f$ или строго убывает при $x \leqslant x_0$ и строго возрастает при $x > x_0$, или строго убывает при $x < x_0$ и строго возрастает при $x \geqslant x_0$.*

Свойство унимодальности позволяет сколь угодно точно определять положение точки экстремума.

### 51.3.1. ПРОЦЕДУРА ПОИСКА «ФИБОНАЧЧИ»

Предположим, что функция $f$ унимодальна и имеет единственный минимум на промежутке $[a,b]$ в точке $x_0$. Эта точка не известна. Задача состоит в том, чтобы с помощью вычисления функции в $n$ точках и последующего сравнения этих значений определить положение точки $x_0$ как можно более точно. Что значит наиболее точно? Это значит максимально сократить тот интервал, в котором заведомо находится точка $x_0$. Отметим, что до начала вычислений этот интервал совпадает с $[a,b]$. См. рис. 51.3.

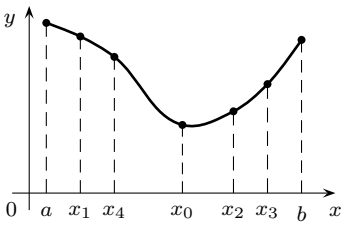



*Рис. 51.3.*

Проследим, как промежуток $[a,b]$ сокращается в результате нескольких вычислений. Если известны значения функции в точках $x_1, x_2, x_3$ таких, что $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ и $f(x_2) < f(x_1)$ и $f(x_2) < f(x_3)$, то можно гарантировать что $x_1 < x_0 < x_3$. Из свойства унимодальности следует, что $x_0$ не может попасть ни в промежуток $[a, x_1]$, ни в промежуток $[x_3, b]$.

Итак, возникшая после трех вычислений ситуация такова: имеется промежуток неопределенности $[x_1, x_3]$, в котором находится точка $x_2$, в которой мы уже вычислили значение функции $f(x_2)$ внутри этого промежутка. Если есть возможность провести еще одно вычисление, то естественен вопрос — в какой точке $x_4$ сделать это вычисление, чтобы промежуток неопределенности максимально сократился?

Введем обозначения $x_2 - x_1 = c$ и $x_3 - x_2 = d$. Поскольку $x_1, x_2$ и $x_3$ известны, известны также величины $c$ и $d$. Пусть для определенности $c > d$. Поместим точку $x_4$ в промежуток $[x_1, x_2]$. При этом могут представиться две возможности:

1. Если $f(x_4) < f(x_2)$, то новый промежуток неопределенности $[x_1, x_2]$ длиной $c$;
2. Если $f(x_4) > f(x_2)$, то новый промежуток неопределенности $[x_4, x_3]$ длиной в $x_3 - x_4$.

Так как заранее неизвестно, какая из возможностей реализуется, то следует, выбирая $x_4$, постараться минимизировать наибольший из промежутков неопределенности. Этого можно добиться, сделав равными длины $x_3 - x_4$ и $x_2 - x_1$. Геометрически это означает, что точка $x_4$ выбирается внутри промежутка неопределенности $[x_1, x_3]$ симметрично уже имеющейся в нем точке $x_2$. Аналогично процесс продолжается и дальше.

Пусть процесс вычисления функции (и, соответственно, сокращения промежутка неопределенности) повторяется $n$ раз. Обозначим длину этого промежутка после $n$-го вычисления и сравнения через $L_n$. Между величинами $L_n$ можно установить рекуррентные соотношения.

Если считать, что точки $x_n$ и $x_{n-1}$ отстоят друг от друга на $\varepsilon$, то справедливо равенство

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon. \tag{51.24}$$

На предыдущем шаге точки $x_{n-1}$ и $x_{n-2}$ помещались симметрично в промежутке длины $L_{n-2}$ на расстоянии $L_{n-1}$ от его концов. Отсюда следует, что

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n. \tag{51.25}$$

Продолжая аналогично,

$$L_{i-1} = L_i + L_{i+1}, \qquad 1 < i < n. \tag{51.26}$$

Используя формулы (51.24)–(51.26), выразим все величины $L_i$ через $L_n$ и $\varepsilon$. Имеем

$$\begin{array}{lll} L_{n-1} = & & = 2L_n - \varepsilon \\ L_{n-2} = & L_{n-1} + L_n & = 3L_n - \varepsilon \\ L_{n-3} = & L_{n-2} + L_{n-1} & = 5L_n - 2\varepsilon \\ L_{n-4} = & L_{n-3} + L_{n-2} & = 8L_n - 3\varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array} \tag{51.27}$$

И вот тут обнаруживается удивительная вещь. В начале XIII в. ($\approx$ 1220 г.) итальянский математик Фибоначчи[1] рассматривал задачу о численности потомков одной пары кроликов. Предполагалось, что кролики не умирают. В его работе появились впервые числа $F_k$, определенные следующими соотношениями: $F_0 = 1$; $F_1 = 1$; $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k = 2, 3, \ldots$. В дальнейшем эти числа стали называться числами Фибоначчи. Так вот, обратившись к формуле (51.27), можно заметить, что

$$L_{n-i} = F_{i+1}L_n - F_{i-1}\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{51.28}$$

Полагая $i = n - 1$, находим

$$L_1 = F_n L_n - \varepsilon F_{n-2} \qquad \text{или}$$

[1] Фибоначчи (Леонардо Пизанский) ($\approx$ 1170 – $\gtrsim$ 1228) — итальянский математик, родился в Пизе. Начальное образование получил в Алжире, где познакомился с арифметикой и алгеброй арабов. Положил начало изучению рекуррентных последовательностей.

$$L_n = \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon\frac{F_{n-2}}{F_n}. \tag{51.29}$$

Отсюда следует, что с помощью $n$ вычислений функции и последующих сравнений можно длину первоначального промежутка неопределенности $L_1$ уменьшить в $F_n$ раз. Этот результат не может быть улучшен!

Для практического применения описанной процедуры осталось ответить на один вопрос — в какой первой точке производить вычисление функции, если известно, что всего таких вычислений $n$. Эта точка должна быть расположена на расстоянии $L_2$ от любого из концов начального промежутка неопределенности.

Из (51.28) и (51.29) следует

$$\begin{aligned} L_2 = F_{n-1}L_n - \varepsilon F_{n-3} = \\ = F_{n-1}\cdot\frac{L_1}{F_n} + \varepsilon\frac{(F_{n-1}\cdot F_{n-2} - F_n\cdot F_{n-3})}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}L_1 + \frac{(-1)^n\cdot\varepsilon}{F_n}. \end{aligned} \tag{51.30}$$

### 51.3.2. ПРОЦЕДУРА ПОИСКА «ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ»

Для того, чтобы начать описанную выше процедуру «Фибоначчи», необходимо знать, сколько всего вычислений функции будет произведено. Это знание необходимо для определения величины $L_2$ из формулы (51.30). А как быть, если число вычислений заранее неизвестно? Оказывается, небольшая модификация процедуры «Фибоначчи» позволяет получить почти столь же эффективную процедуру поиска, не требующую для своей реализации знания о планируемом числе итераций.

Будем предполагать, что отношение длин двух последующих промежутков неопределенности постоянно, т. е.

$$\frac{L_{i-1}}{L_i} = \frac{L_i}{L_{i+1}} = \frac{L_{i+1}}{L_{i+2}} = \cdots = \alpha. \tag{51.31}$$

Обе части равенства (51.26) разделим на $L_i$:

$$\frac{L_{i-1}}{L_i} = 1 + \frac{L_{i+1}}{L_i}. \tag{51.32}$$

Из равенства (51.32), имея в виду выполнение условия (51.31), следует

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \qquad \text{или} \qquad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{51.33}$$

Из квадратного уравнения (51.33) находим $\alpha$:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034.$$

Используя равенства (51.33) и (51.34), легко получить

$$\frac{L_{i-1}}{L_{i+1}} = \alpha + 1 = \alpha^2 \qquad \frac{L_{i-2}}{L_{i+1}} = \alpha^3; \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует,

$$\frac{L_1}{L_n} = \alpha^{n-1}; \qquad \text{т. е.} \qquad L_n = \frac{L_1}{\alpha^{n-1}}. \tag{51.34}$$

Итак, если процедура «Золотое сечение» применяется $n$ раз, то начальный промежуток неопределенности $L_1$ сократится в $\alpha^{n-1}$ раз.

Из условия (51.31) следует правило выбора точек, в которых вычисляется функция. Промежуток неопределенности всякий раз делится на две части так, чтобы длина всего промежутка относилась к длине большей части так же, как длина большей части относится к длине меньшей части.

Именно такая пропорция еще в архитектуре Древней Греции считалась наиболее приятной для глаза. Отсюда и возникло название «Золотое сечение», впоследствии, через много столетий, присвоенное итерационной процедуре одномерного поиска.

*ПРИМЕР 51.4.* Самостоятельно примените процедуру «Золотое сечение» для приближенного нахождения точки минимума функции $y = x^2 - 2x + 1$ на промежутке $[0, 2]$ с точностью до 0,001.

## Контрольные вопросы

1. Что такое локальный экстремум?
2. Что такое глобальный экстремум?
3. Каковы необходимые условия локального максимума?
4. Что такое условный экстремум?
5. Каковы необходимые условия условного экстремума?
6. Опишите процедуру одномерного поиска «Золотое сечение».
7. Опишите процедуру одномерного поиска «Фибоначчи».

# LII

# ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Человеческая деятельность, как правило, носит целенаправленный характер. Поэтому неудивительно, что математические модели, ее описывающие, зачастую приводят к экстремальным задачам. В особенности это характерно для экономической деятельности. Ситуации, связанные с получением максимальной прибыли предприятия или минимизацией потерь производства, так и «просятся» быть описанными в терминах экстремальных задач. И таких ситуаций в экономике множество.

Однако оказалось, что возникающие при описании экономических ситуаций математические модели принципиально отличаются от рассмотренных выше классических экстремальных задач. Основных отличий два. Во-первых, большое число переменных, которые необходимы для адекватного описания той или иной проблемы. И, во-вторых, возникающие задачи на условный экстремум содержат условия в виде неравенств (напомним, что в классической постановке условия задавались в виде равенств). Именно в силу этих отличий классические методы оптимизации оказались бессильными при решении подобных задач.

В 1938 году молодой ленинградский математик Л. В. Канторович (впоследствии академик АН СССР, лауреат Государственной, Ленинской и Нобелевской премий) опубликовал небольшую работу, в которой содержалась постановка и метод решения задачи о выборе наилучшей производственной программы.

Работа эта не вызвала большого интереса ни со стороны математиков, ни со стороны экономистов. Первые считали экономику мало интересным объектом для математических исследований, вторые просто не могли понять суть, высказанную на «математическом» языке. Однако именно с этой работы началось линейное программирование, именно в ней были заложены его основы.

Совершенно независимо линейное программирование начало развиваться и в США в 40-х годах нашего века. Здесь пионерами выступили Дж. Данциг (симплекс-метод) и Т. Купманс (транспортная задача), впоследствии также ставшие лауреатами Нобелевской премии.

Хотя линейное программирование и обязано своим появлением решению экономических задач, в настоящее время все достижения в этой области могут быть изложены на чисто математическом языке, без какого-либо упоминания об экономических проблемах. Тем не менее авторы решили пойти другим путем. С нашей точки зрения, при этом достигаются такие цели:

1. Имеется возможность увидеть тот круг вопросов, те рассуждения, которые в свое время привели к открытию. Мало того, эти рассуждения позволяют студенту как бы сделать свое «микрооткрытие»;
2. Имеется возможность увидеть, что за абстрактными математическими рассуждениями скрываются отнюдь не абстрактные отношения реального мира.

В современной математической литературе эти отношения принято тщательно скрывать, мы же хотим напомнить ранее существовавшие традиции, которые только приветствовали такую «открытость».

## § 52.1. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ — ЗАДАЧА О РАСКРОЕ

Знакомство с новым разделом прикладной математики лучше всего начать с описания элементарной экономической задачи. Это позволит разъяснить все необходимые новые понятия и сущность методов линейного программирования.

Как правило, всякой задаче поиска решения в экономике сопоставляется *целевая функция*, позволяющая количественно сравнивать возможные решения, то есть оценивать их. Возникающие естественным образом при поиске оптимального решения задачи, в которых отыскивается максимум или минимум целевой функции при наличии ограничений на переменные, объединяются общим названием — *задачи математического программирования*.

Наряду с термином *решение* в математическом программировании употребляются в том же смысле термины *план, стратегия, управление, поведение*. Всякий набор значений переменных, удовлетворяющий ограничениям задачи носит название *допустимого плана*. Тот же допустимый план, на котором достигается экстремум (максимум или минимум) целевой функции, называется *оптимальным планом*.

Все задачи математического оптимального программирования в зависимости от вида целевой функции и ограничений могут быть разбиты на ряд классов так, что каждый класс характеризуется своими методами решения входящих в него задач. Знакомство с этими классами начнем с наиболее изученного из них — класса, в котором и целевые функции задач, и ограничения линейны. Этот круг задач в совокупности с методами отыскания оптимальных решений в них носит название *линейного программирования*.

Основной идеей модели линейного программирования является рассмотрение производственного плана как составленного из элементарных производственных способов. В этой модели принята гипотеза линейности. Суть ее в том, что каждый производственный процесс предполагается возможным применять с любой кратностью (интенсивностью) и при этом затраты и выход продукции меняются пропорционально; результаты процессов суммируются. В силу такой гипотезы всякий план можно представить в виде набора некоторого числа основных способов, примененных с различными интенсивностями. В ходе решения интенсивности определяются так, чтобы ограничения были удовлетворены, а целевая функция достигала максимума или минимума.

Сделав эти предварительные замечания, перейдем к рассмотрению конкретной *задачи о раскрое*.

Листы материала размером $6\,\text{м} \times 13\,\text{м}$ нужно раскроить так, чтобы получились заготовки двух типов: 800 шт. заготовок типа $A$ $(4 \times 5\,\text{м})$ и 400 шт. типа $B$ $(2 \times 3\,\text{м})$, израсходовав при этом как можно меньше материала. Для решения такой задачи,

конечно, не нужна специальная теория. Но эта задача используется нами как пример, на котором разъясняются методы линейного программирования.

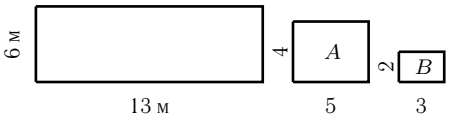



*Рис. 52.1.*

На рис. 52.1 изображены исходные листы материала и выкраиваемые из них заготовки. Каждый лист можно раскраивать различными более или менее удачными способами, получая соответственно больше или меньше различных заготовок.

На рис. 52.2 приведены некоторые из возможных способов раскроя, причем в скобках указано, сколько заготовок получается из каждого листа: первая цифра — тип $A$, вторая — тип $B$, а числа $r_i$ обозначают потери материала при каждом способе. Раскроить подобным образом можно было бы без всякой математики. А вот какие из способов использовать и для какого числа их применить — это вопрос, при решении которого без математики не обойтись. Ведь просмотреть все мыслимые варианты, комбинации способов и выбрать из них наилучший — задача, которая, например, при двадцати типах заготовок не может быть решена и современными ЭВМ.

Переходим к математическому описанию задачи.

Обозначим через $x_i$ число листов материала, раскраиваемых по $i$-му способу. Пусть $a_i$ и $b_i$ обозначают соответственно число заготовок типа $A$ и $B$, получаемых при использовании $i$-й карты раскроя. Например, для первой карты $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, а вся матрица способов имеет вид:

*Таблица 52.1.*

| **Заготовка** | **Способ 1** | **Способ 2** | **Способ 3** | **Способ 4** |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $B$ | 1 | 6 | 9 | 13 |

Используя введенные обозначения, можно дать теперь такую математическую формулировку интересующей нас задачи: найти минимум линейной функции, выражающей число израсходованных листов материала (по всем способам),

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

при условии, что переменные $x_i$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &\geqslant 800, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &\geqslant 400; \end{aligned} \tag{52.1}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0, \\ x_3 &\geqslant 0, \qquad x_4 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{52.2}$$

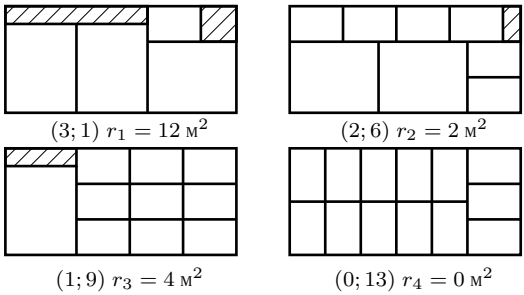



*Рис. 52.2.*

или, подставляя числовые значения (см. табл. 52.1), можно записать:

$$\begin{aligned} 3x_1+ \;\; 2x_2+ \;\; x_3 \qquad\quad &\geqslant 800,\\ x_1+ \;\; 6x_2+ \;\; 9x_3 \;+\; 13x_4 \;\; &\geqslant 400. \end{aligned}$$

Экономический смысл ограничений (52.1): соблюдена комплектность — все необходимые заготовки сделаны в достаточном числе. Смысл же ограничений (52.2) в том, что ни один способ не применяется к отрицательному числу листов материала, так как физически это означало бы, что из заготовок восстанавливаются целые листы.

Это характерные условия задачи линейного программирования: *найти минимум (максимум) линейной формы (функции) при линейных ограничениях.*

Сделаем следующее вспомогательное построение (рис. 52.3). В прямоугольной системе координат $XOY$ каждому возможному раскрою сопоставим точку, у которой координата $x$ равна числу заготовок типа $A$, получаемых при этом раскрое, а координата $y$ — числу заготовок типа $B$. Эти точки обозначены буквой $M$ с индексом, указывающим номер раскроя. Например, первому раскрою соответствует точка $M_1$ с координатами $x_1 = 3,\ y_1 = 1$.

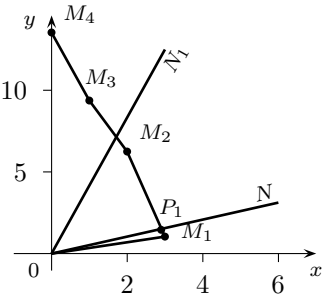


*Рис. 52.3.*

Точки на отрезке $M_1M_2$ указывают своими координатами количество заготовок типа $A$ и типа $B$, приходящихся в среднем на один лист материала в различных планах раскроя, которые представляют собой сочетания раскроев $M_1$ и $M_2$. Можно доказать, что множество всевозможных планов раскроя, являющихся комбинациями $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$, если их характеризовать выходами заготовок, приходящихся на один лист, изображается совокупностью точек выпуклого многоугольника $M_1M_2M_3M_4$, который называется многоугольником осуществимых планов. Обычно для удобства в число вершин многоугольника осуществимых планов включают и начало координат, так что в окончательном виде такой многоугольник имеет вид $OM_1M_2M_4$. Экономически это соответствует тому, что осуществимым считается также план, в котором часть полученных заготовок остается неиспользованной.

Нас интересуют прежде всего те осуществимые планы, для которых выполнено условие комплектности. В них отношение числа заготовок типа $A$ к числу заготовок типа $B$ соответствует заданному, т. е. равняется 2 (800 : 400). На рис. 52.3 эти планы изображаются точками, лежащими на луче $N$. Такие планы называются *ассортиментными.* Ассортиментному выпуску соответствует допустимый план, для которого выполнены все ограничения (52.1) и (52.2). Из ассортиментных планов раскроя выбирается оптимальный план. Ему соответствует точка, принадлежащая одновременно многоугольнику и лучу и имеющая наибольшие координаты, т. е. соответствующая плану, дающему наибольший выход заготовок в данной пропорции на один лист. Такой является точка $P_1$ — точка пересечения луча с границей многоугольника $OM_1M_2M_4$. Так как точка $P_1$ принадлежит отрезку $M_1M_2$, можно сделать заключение, что оптимальный план представляется комбинацией раскроев $M_1$ и $M_2$.

Обозначим через $z$ ту долю материала, которая кроится по раскрою $M_1$; остальная часть $1 - z$ кроится по $M_2$. Из условия комплектности (табл. 52.1) следует, что

$$\frac{3z + 2(1-z)}{1z + 6(1-z)} = 2,$$

откуда $z = \frac{10}{11}$. Этот результат можно было получить и графически, измерив отрезки $M_1M_2$ и $M_2P$ (см. рис. 52.3) и заметив, что

$$\frac{M_2P_1}{M_1M_2} = \frac{10}{11}.$$

Искомое минимальное число листов материала $L$ находится, например, из условия получения нужного числа заготовок $A$.

$$\frac{10}{11} \cdot L \cdot 3 + \frac{1}{11} \cdot L \cdot 2 = 800.$$

Экономический смысл этой формулы таков: первый раскрой применяется к $\frac{10}{11}L$ листов, при этом из каждого листа получается три заготовки типа $A$. Второй раскрой применяется к $\frac{1}{11}L$ листов, при этом из каждого листа получается две заготовки типа $A$. Общее число заготовок типа $A$ должно соответствовать плановому заданию, т. е. равняться 800.

Решая уравнение, получаем, что необходимое (минимальное) число листов материала

$$L = \frac{800 \cdot 11}{32} = 275.$$

Иначе говоря, оптимальный план раскроя состоит в том, что 250 листов кроятся по первому раскрою ($x_1 = 250$), а 25 листов — по второму раскрою ($x_2 = 25$).

Любой другой план раскроя оказался бы неоптимальным. Для примера в табл. 52.2 приведены два плана (первый — с использованием только способа 1, второй — только способа 3), составленных на «глаз», и оптимальный план.

*Таблица 52.2.*

| | **Заготовки типа $A$** | **Заготовки типа $B$** | **Листы материала** | **Потери материала, м$^2$** |
|---|---|---|---|---|
| План 1 | 1200 | 400 | 400 | 4800 |
| План 2 | 800 | 7200 | 800 | 3200 |
| Оптимальный план | 800 | 400 | 275 | 3050 |

Если бы количество заготовок было больше двух, то графический способ решения (рис. 52.3) оказался бы практически трудно реализуемым. Дело в том, что для изображения множества осуществимых планов нужно построить очень сложную геометрическую фигуру — многогранник в многомерном пространстве. Поэтому для решения задачи более рационально использовать аналитические методы и, в частности, эффективный *метод разрешающих множителей* — оценок, особых показателей, характеризующих оптимальный план.

Что же такое оценки? Это некоторые условные цены для единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов (например, в данной задаче продукция — заготовки типов $A$ и $B$, а производственный фактор — листы материала), связанные с оптимальным планом, объективно обусловленные им. Поэтому такие оценки получили название объективно обусловленных, или сокращенно *о. о. оценок*.

С помощью о. о. оценок удается сформулировать признак оптимальности решения задачи линейного программирования, оказывается возможным выяснить, оптимален ли некоторый допустимый план без сравнения его со всеми остальными возможными

планами. Экономический смысл признака оптимальности состоит в следующем: для оптимального плана всегда имеются такие оценки, что вычисленная по ним результирующая эффективность равна нулю для используемых способов и не может быть больше нуля для неиспользуемых. Иначе говоря, все используемые способы оправданы, рентабельны (результаты оправдывают затраты), а во всех отброшенных способах оценка затрат не меньше оценки произведенной продукции, т. е. их применение нерентабельно или во всяком случае не более рентабельно, чем применяемых способов.

Вернемся к нашей задаче и на ней поясним значение о. о. оценок. Покажем, как их находят и как с их помощью можно убедиться, что найденный план (250 листов кроятся по первому способу, а 25 — по второму) действительно оптимален. Введем условные цены — оценки для одного листа раскраиваемого материала и для каждой из заготовок, обозначив их соответственно через $U$, $V$, $W$. Нужно найти такие значения этих величин, при которых используемые способы окажутся рентабельными, а остальные не более рентабельными, чем применяемые. Если это удастся сделать — план оптимален.

В соответствии с изложенным выше смыслом о. о. оценок условия рентабельности запишутся так:

$$\begin{cases} -U + 3V + W = 0, \\ -U + 2V + 6W = 0. \end{cases}$$

Экономическое значение этих условий можно разъяснить на примере первого из них: затраты одного листа материала с оценкой $U$ должны компенсироваться полученными результатами при раскрое по способу $M_1$ — тремя заготовками типа $A$ по оценке $V$ и одной заготовкой типа $B$ по оценке $W$.

Так как два уравнения содержат три неизвестных, то значение одного из них можно выбрать произвольно (важно соотношение оценок, а не их абсолютное значение). Примем $U = 16$. Тогда легко получить $V = 5$, а $W = 1$. Сумма оценок заготовок, получаемых из одного листа материала, в каждом из двух применяемых раскроев одинакова и равна 16. Если же мы возьмем неиспользованные производственные способы 3 и 4 (табл. 52.1), то для них оценка продукции составит 14 и 13, т. е. будет меньше 16, ниже оценки затрат. Следовательно, данный план допустим и имеются согласованные с ним оценки. Это значит, согласно высказанному общему критерию оптимальности плана, что более экономного плана быть не может.

В справедливости последнего утверждения можно убедиться, рассуждая следующим образом. Предположим, имеется какой-то другой план раскроя, дающий те же нужные заготовки. Если просматривать раскроенные листы и записывать по пять единиц за каждую заготовку $A$ и по единице за заготовку $B$, общая сумма составит не меньше $800 \cdot 5 + 400 \cdot 1$, т. е. 4400. С другой стороны, при добавлении каждого листа прирост этой суммы составит не больше 16, так как сумма оценок заготовок не превосходит 16 ни при одном из раскроев. Значит, число листов не может быть меньше 275 ( 4440 : 16 ), т. е. оно не меньше того числа листов, которое расходуется при выбранном плане, являющемся, таким образом, оптимальным. Дальше будет приведено и аналитическое доказательство этого факта в общем случае.

Отметим, что эти оценки имеют и простой геометрический смысл, который позволяет дополнительно пояснить наш критерий. Уравнение прямой $M_1M_2$ на рис. 52.3 может быть записано как

$$5x + y = 16.$$

Коэффициенты этого уравнения совпадают с оценками заготовок, свободный член равен сумме оценок заготовок, получаемых из одного листа в используемых раскроях. Таким образом, для плана, скомпонованного из раскроев $M_1$ и $M_2$, выход заготовок

изображается точкой отрезка $M_1M_2$, а суммарная оценка продукции, приходящейся на один лист, равна 16. Если бы план включал какой-нибудь иной раскрой, то этому плану соответствовала бы точка ниже прямой $M_1M_2$ и оценка продукции, приходящейся на один лист, оказалась бы меньше 16. Это свидетельствует об оптимальности плана, составленного из раскроев $M_1$ и $M_2$.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Так как наклон прямой связан с оценками заготовок, это значит, что при передвижении по отрезку $M_1M_2$ (при переходе от одного оптимального плана к другому) соотношение заготовок изменяется: заготовки $A$ заменяются заготовками $B$ в соответствии с их объективно обусловленными оценками (о. о. оценками) в пропорции $1:5$. При существенно иной пропорции заготовок в задании решение определялось бы крайней точкой многоугольника на другом луче. Оно было бы скомпоновано из других раскроев, и в соответствии с этим мы имели бы опорную прямую с другим наклоном и соответственно другое соотношение оценок для заготовок $A$ и $B$. Например, если заменить задание, потребовав, чтобы заготовок типа $A$ было выпущено 400, а типа $B$ — 1600, то ассортиментные планы геометрически изобразятся лучом $ON_1$ (см. рис. 52.3).

Приведенный критерий, таким образом, обеспечивает возможность проверить «оптимальность» данного плана, не сопоставляя его с другими планами. Достаточно построить для него оценки и по ним сравнить продукцию и затраты в используемых способах. Если окажется, что план не оптимален, будет видно, какие изменения нужно внести, чтобы его улучшить.

Казалось бы, из геометрической интерпретации сразу виден способ решения задач линейного программирования. Достаточно построить многоугольник осуществимых планов и найти крайнюю точку пересечения луча, изображающего множество ассортиментных планов, с этим многоугольником. Однако если число выкраиваемых заготовок равно $n$, каждому раскрою соответствует точка $n$-мерного пространства, а многоугольник осуществимых планов превращается в многогранник в этом $n$-мерном пространстве. Условия ассортиментности определяют луч в том же пространстве и, стало быть, геометрически задача сводится к очень сложному процессу поиска крайней точки пересечения многогранника с лучом. Таким образом, еще раз подтверждается, что кажущаяся при геометрической интерпретации простота решения задач линейного программирования является обманчивой.

Как же решать задачи линейного программирования с большим числом переменных и ограничений? В основе наиболее эффективных методов, которые предназначены для этой цели, лежит использование упоминавшихся уже о. о. оценок и признака оптимальности решения задачи. Общая схема расчетов начинается с того, что ищется какое-нибудь решение задачи, так называемое первое приближение — некоторый допустимый план. Обычно это удается сделать без особого труда, привлекая на помощь лишь здравый смысл.

Например, в задаче о раскрое допустимый план может быть построен так. Возьмем способ раскроя, при котором получается заготовка типа $A$, и применим его к такому числу листов, чтобы иметь нужное число заготовок первого типа. Возможно, при этом будет получено и некоторое число заготовок типа $B$. Если их достаточно, то допустимый план уже найден, если же нет, то увеличим их количество до необходимого с помощью другого (или этого же) способа раскроя. Получившееся количество листов материала и примененные способы раскроя определяют допустимый план. Если бы заготовок было больше, чем две, то, продолжая последовательно удовлетворять требованиям по заготовкам каждого типа, мы также пришли бы в конце концов к допустимому плану.

В соответствии с общей схемой расчетов найденный допустимый план проверяется на оптимальность. Если окажется, что для этого плана выполнен критерий оптимальности (могут быть найдены такие неотрицательные оценки каждого вида продукции и производственных факторов, что для технологических способов, используемых в этом плане, алгебраическая сумма затрат и результатов в этих способах равна нулю, а для способов, не включенных в план, эта же сумма меньше или равна нулю), то этот план оптимален. Если же выясняется, что таких оценок не существует, то план наверняка не оптимален и, значит, надо переходить к «лучшему» допустимому плану. Такой переход может, вообще говоря, осуществляться различными методами. Ниже мы даем описание основной идеи одного из них.

*Метод последовательного улучшения плана* состоит в том, что в план вводится более эффективный не использовавшийся ранее способ, за счет которого достигается увеличение выпуска продукции. Этот способ находят в процессе определения оценок. Последовательно вводя такие способы, улучшают план до тех пор, пока не получат оптимальный план.

Чтобы лучше понять сущность метода последовательного улучшения плана, представьте себе, что из урны, в которой имеется миллион шаров с произвольными номерами, вы хотите извлечь шар с наибольшим номером. Если добиваться этого результата обычным эмпирическим путем, придется чуть ли не 1 000 000 раз вытаскивать шары из урны, не возвращая их назад. Это адская работа, и назначить ее могут только в качестве наказания. Но допустим, что вам помогает. . . ангел-хранитель, и после каждого очередного извлечения шара с каким-то номером он уничтожает в урне все шары с меньшими номерами. Тогда общее число шаров будет быстро убывать (примерно вдвое после каждого вытаскивания), и для того чтобы вытащить шар с наибольшим номером, вам потребуется всего 20–30 извлечений. Так вот, ваш ангел-хранитель — это метод последовательного улучшения плана.

Рассмотрим применение этого метода к нашей задаче о раскрое. Допустим, что в качестве начального выбран план, использующий первый и четвертый способы раскроя (см. табл. 52.1). В нем число листов материала, раскраиваемого каждым из этих способов, составляет (округленно): $x_1 = 267$, а $x_4 = 11$. Прежде всего убедимся в том, что этот план допустимый, т. е. удовлетворяет поставленным ограничениям. Для этого подставим в него числа из табл. 52.1. Получим

$$3 \cdot 267 = 801 > 800;$$
$$1 \cdot 267 + 13 \cdot 11 = 410 > 400.$$

Допустимость плана подтверждена.

Далее приступим к проверке плана на оптимальность. Для этого, как и раньше, введем оценки $U$, $V$, $W$ соответственно для одного листа материала, первой и второй заготовок. Условия рентабельности в соответствии с табл. 52.1 запишутся на этот раз следующим образом:

$$-U + 3V + W = 0, \qquad -U + 13W = 0.$$

Полагая $U = 13$ (так как имеются два уравнения с тремя неизвестными, то одно неизвестное можно задать произвольно), находим оценки заготовок: $V = 4$ и $W = 1$. Пользуясь ими, оценим продукцию, получаемую при каждом способе раскроя:

$$\begin{aligned}
&\text{Способ 1.} \quad 3 \cdot 4 + \ 1 \cdot 1 \ = 13,\\
&\text{Способ 2.} \quad 2 \cdot 4 + \ 6 \cdot 1 \ = 14,\\
&\text{Способ 3.} \quad 1 \cdot 4 + \ 9 \cdot 1 \ = 13,\\
&\text{Способ 4.} \quad 0 \cdot 4 + 13 \cdot 1 \ = 13.
\end{aligned}$$

Теперь уже ясно, что рассматриваемый план не оптимален, так как среди неиспользованных оказался способ 2, более рентабельный, чем используемые. Очевидно также и то, как именно план может быть улучшен. Для этого нужно ввести в него второй, наиболее рентабельный способ, исключив, если нужно, один из имеющихся.

Пусть второй способ применяется с интенсивностью $\Delta x_2$. Использование нового способа приводит к изменению интенсивностей употреблявшихся ранее способов. Обозначая эти изменения через $\Delta x_1$ и $\Delta x_4$, запишем условие того, что плановое задание будет выполнено точно. Имеем

$$3(x_1 + \Delta x_1) + 2(x_2 + \Delta x_2) = 800,$$

или

$$3\Delta x_1 + 2\Delta x_2 = -1 \qquad \text{и}$$
$$1(x_1 + \Delta x_1) + 13(x_4 + \Delta x_4) + 6(x_2 + \Delta x_2) = 400,$$

или

$$\Delta x_1 + 6\Delta x_2 + 13\Delta x_4 = -10.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\Delta x_2,$$
$$\Delta x_4 = -\frac{29}{39} - \frac{16}{39}\Delta x_2.$$

Вновь вводимый способ желательно использовать с наибольшей положительной интенсивностью, но все же такой, чтобы остальные интенсивности остались неотрицательными. При увеличении $\Delta x_2$ первой обращается в нуль интенсивность четвертого способа $x_4 + \Delta x_4 = 0$, т. е. нужно принять $\Delta x_4 = -11$. Иными словами, $\Delta x_2$ находится из условия

$$-\frac{29}{39} - \frac{16}{39}\Delta x_2 = -11.$$

В результате искомые изменения интенсивностей способов равны соответственно

$$\Delta x_1 = -17, \qquad \Delta x_2 = 25 \qquad \text{и} \qquad \Delta x_4 = -11,$$

а новый, улучшенный план имеет вид:

$$x_1 = 250 \qquad \text{и} \qquad x_2 = 25 \qquad (x_4 = 0).$$

Это тот самый план, оптимальность которого уже была доказана ранее.

Конечно, переход от допустимого плана к оптимальному редко удается осуществить за одно приближение (итерацию), но все же после каждой итерации план не ухудшается. Получив новый план, мы прежде всего, определяя оценки, выясняем, не оптимален ли он. Если да, то решение заканчивается. Если же нет, то снова применятся метод последовательного улучшения плана. Доказано, что с помощью этого метода за конечное число улучшений можно прийти от любого допустимого плана к оптимальному. И, что самое главное, не просто за конечное, а за разумное число улучшений! Для его реализации на ЭВМ требуются не миллионы лет, а секунды, минуты или на худой конец часы.

Так как в основе метода последовательного улучшения плана лежит использование о. о. оценок и, кроме того, роль этих оценок чрезвычайно велика как в теоретических

вопросах математического программирования, так и в вопросах его практического использования, целесообразно более подробно остановиться на изучении их свойств.

Существеннейшей особенностью задач линейного программирования является тот факт, что каждой из них соответствует определенная, тесно связанная с ней другая задача линейного программирования, получившая название *двойственной*. Оказывается, что упоминавшиеся выше объективно обусловленные оценки единицы каждого вида продукции и затрачиваемых производственных факторов, которые были получены при решении первоначальной задачи на минимум, сами являются решениями некоторой задачи на максимум. Эта сопряженная с нашей задача называется *двойственной задачей линейного программирования*. Покажем, как естественным образом возникает задача, двойственная к задаче раскроя, и дадим ее экономическую и геометрическую интерпретации.

Чтобы выяснить экономическую суть дела, следует рассмотреть следующую условную ситуацию. Пусть имеется экономическая система, состоящая из двух частей: Завод и Заготовительный цех. Завод для производственных целей заказывает Цеху произвести из листового материала заготовки типов $A$ и $B$ в нужном ассортименте. При этом Завод, естественно, заинтересован, чтобы затраты материала были наименьшими. Выбор способов раскроя, которые обеспечат требуемое количество заготовок при наименьших затратах материала, производится на основе решения задачи линейного программирования, которая уже была рассмотрена выше (будем называть ее *прямой задачей*). При этом отношения между Заводом и Цехом построены на экономических основах, т. е. Завод оплачивает работу Цеха по определенным ценам (на самом деле такое описание экономических отношений чрезвычайно упрощенно, и именно поэтому приведенный пример условен). Какими должны быть эти «цены»? Лучше всего, если они будут обеспечивать наибольшую выгоду обеим сторонам — и Цеху-изготовителю и Заводу-потребителю. Задача отыскания таких «выгодных цен» и есть двойственная задача линейного программирования.

Напомним, что оценки заготовок типов $A$ и $B$ обозначались соответственно через $V$ и $W$, а оценку исходного листа можно считать равной единице (так выбирается масштаб цен). При использовании первой карты раскроя выкраивается $a_1$ заготовок типа $A$ и $b_1$ заготовок типа $B$. Чтобы цены были оправданными, суммарная оценка продукции не должна превышать оценку исходного листа материала, т. е. должно выполняться неравенство

$$a_1V + b_1W \leqslant 1$$

(иначе Заводу было бы невыгодно передавать раскрой Цеху). Аналогичные неравенства должны выполняться для всех остальных способов. Естественным представляется и другое, уже упоминавшееся требование: оценки следует выбирать так, чтобы суммарная оценка всей произведенной продукции имела максимальную величину.

Используя конкретные числовые значения, приходим к следующей задаче. Найти оценки $V$ и $W$ так, чтобы достигался

$$\max\{800V + 400W\},$$

при условиях

$$\begin{array}{rrl} 3V+ & W & \leqslant 1 \\ 2V+ & 6W & \leqslant 1 \\ 1V+ & 9W & \leqslant 1 \\ 0V+ & 13W & \leqslant 1 \end{array} \qquad (52.1')$$

(эти условия означают, что при любом способе раскроя оценка полученных из листа заготовок не превосходят оценки самого листа, т. е. покупать заготовки выгодно);

$$V \geqslant 0, \qquad W \geqslant 0, \tag{52.2'}$$

(эти условия означают, что оценки неотрицательны).

Можно показать, что решениями этой задачи являются величины $V = \frac{5}{16}$ и $W = \frac{1}{16}$, т. е. прежние оценки, отнесенные к оценке листа материала. При таких «ценах» Цеху выгодно кроить листы, а Заводу выгодно покупать заготовки.

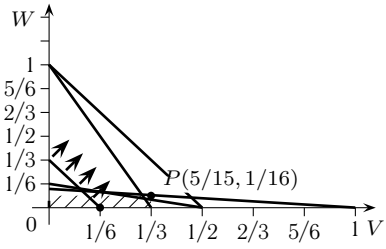



*Рис. 52.4.*

Двойственная задача имеет такую же простую геометрическую интерпретацию, как и прямая задача. Условия (52.1′)–(52.2′) определяют некоторый многоугольник, лежащий в первом квадранте плоскости $VOW$ (рис. 52.4). Он и является многоугольником допустимых планов двойственной задачи. Уравнение $800V + 400W = C$ определяет прямую линию, проведенную на этой же плоскости. Будем перемещать теперь эту прямую параллельно самой себе в направлении, указанном на рис. 52.4. При этом значение целевой функции будет увеличиваться и достигнет максимума в точке $P$. С точки зрения геометрии ясно, что оптимальным решением задачи, как правило, является одна из вершин многоугольника допустимых решений двойственной задачи. Если же окажется две такие вершины, то тогда любая точка соединяющего их отрезка также будет оптимальным решением.

Использование о. о. оценок лежит в основе не только метода последовательного улучшения плана, о котором мы говорили выше, но и многих других методов решения задач линейного программирования.

## § 52.2. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Выше были подробно рассмотрены частные задачи линейного программирования. Теперь настало время познакомиться с общей постановкой этой задачи. Построим математическую модель организации производства. В этом производстве участвуют $m$ различных производственных факторов (ингредиентов) — рабочая сила, сырье, материалы, оборудование, конечные и промежуточные продукты и др. Производство использует $S$ технологических способов, причем для каждого из них заданы объемы производимых ингредиентов, рассчитанные на реализацию этого способа с единичной интенсивностью, т. е. задан вектор $\bar{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$, $k = 1, 2, \ldots, S$, в котором каждая из компонент $a_{ik}$ указывает объем производства соответствующего ($i$-го) ингредиента, если она положительна, и объем его расходования, если она отрицательна (в способе $k$).

Выбор плана означает указание интенсивностей использования различных технологических способов, т. е. план определяется вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_S)$ с неотрицательными компонентами.

Для каждого плана $\bar{x}$ легко посчитать балансы по каждому из ингредиентов. Эти балансы являются компонентами вектора

$$\sum_{k=1}^{S} x_k \bar{a}_k = \left( \sum_{k=1}^{S} a_{1k} x_k, \sum_{k=1}^{S} a_{2k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{S} a_{mk} x_k \right) \tag{52.3}$$

(положительная компонента — объем производства (выпуска) ингредиента, отрицательная компонента — объем затрат ингредиента).

Обычно на количества выпускаемых и затрачиваемых ингредиентов накладываются ограничения: производить нужно не меньше, чем требуется, а затрачивать не больше, чем имеется. Такие ограничения записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{52.4}$$

Если $b_i \geqslant 0$, то неравенство означает, что имеется потребность в ингредиенте в размере $b_i$; если $b_i \leqslant 0$, то неравенство означает, что имеется ресурс данного ингредиента в размере $|b_i|$.

Далее предполагается, что использование каждого способа связано с расходом одного из перечисленных ингредиентов или особо выделенного ингредиента в количестве $C_k$ при единичной интенсивности $k$-го способа. В качестве целевой функции принимается суммарный расход этого ингредиента в плане

$$f(x) = \sum_{k=1}^{S} C_k x_k. \tag{52.5}$$

Теперь общая задача линейного программирования может быть представлена в математической форме.

Для заданных чисел $a_{ik}$, $C_k$ и $b_i$ найти

$$\min \sum_{k=1}^{S} C_k x_k \tag{52.6}$$

при условиях

$$x_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, S, \tag{52.7}$$

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k \geqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{52.8}$$

План, удовлетворяющий условиям (52.7) и (52.8), является допустимым, а если в нем, кроме того, достигается минимум целевой функции, то этот план оптимальный.

Итак, задача состоит в отыскании минимума линейной функции при линейных ограничениях, или, иначе говоря, минимума этой функции на выпуклом многограннике допустимых планов. Признак оптимальности плана формулируется в виде такой теоремы.

**ТЕОРЕМА 52.1**

Для оптимальности допустимого плана $\bar{x}$ необходимо и достаточно существование вектора

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

удовлетворяющего условиям

1) $y_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$
2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i \leqslant C_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ S,$
3) $\sum_{i=1}^{m} a_{ik}y_i = C_k,$ если $x_k > 0,$
4) $y_i = 0,$ если $\sum_{k=1}^{S} a_{ik}x_k > b_i.$

● Пусть вектор $\bar{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_S)$ представляет собой какой-то допустимый план. Посчитаем значение целевой функции для плана $\bar{x}'$; используя условие 2) признака оптимальности, имеем

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x'_k \geqslant \sum_{k=1}^{S} x'_k \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x'_k.$$

Так как план допустим, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x'_k \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Из условия допустимости плана $\bar{x}$ и условий 4) и 3) следует

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{S} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i = \sum_{k=1}^{S} C_k x_k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x'_k \geqslant \sum_{k=1}^{S} C_k x_k,$$

т. е. план $\bar{x}$ оптимален, так как любому допустимому плану соответствует не меньшее значение целевой функции, чем плану $\bar{x}$. Доказательство необходимости условия теоремы, т. е. наличия оценок, согласованных с планом, не приводим. ●

Компоненты вектора $\bar{y}$ можно рассматривать как о. о. оценки для всех видов ингредиентов. На «языке» этих оценок все условия теоремы имеют прозрачный экономический смысл: 1) Оценка каждого ингредиента неотрицательна; 2) Для каждого возможного способа получаемый эффект, который выражается алгебраической суммой оценок произведенных и затраченных ингредиентов, не превосходит $C_k$ — расхода, связанного с применением способа; 3) В оптимальный план могут включаться только такие технологические способы, для которых суммарная алгебраическая оценка получаемой продукции равна расходу $C_k$; 4) Ингредиенты, получаемые в оптимальном плане с избытком, имеют нулевые оценки.

Очень важно отметить, что вектор оценок $\bar{y}$, соответствующий оптимальному плану, сам является решением двойственной задачи линейного программирования, которая формулируется следующим образом.

Для заданных чисел $a_{ik}$, $b_i$, $C_k$ найти

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right\} \tag{52.9}$$

при условиях

$$y_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{52.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \leqslant C_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, S. \tag{52.11}$$

Читатель, внимательно ознакомившийся с объяснением того, как составлялась двойственная задача к задаче раскроя (см. §52.1), без труда сможет установить экономический смысл этих отношений.

Связь между прямой и двойственной задачами линейного программирования характеризуется тем, что если одна из них имеет решение, то разрешима и другая. При этом для оптимальных планов этих двух задач справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{S} C_k x_k = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Это утверждение носит название теоремы двойственности.

## § 52.3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Использование теоремы двойственности и связанного с ней признака оптимальности допустимого плана лежит в основе большинства методов решения задач линейного программирования. В § 52.1 был описан метод последовательного улучшения плана. Близко к нему примыкает *симплекс-метод,* разработанный американским математиком Дж. Данцигом. Приведем краткое описание этого метода.

В постановке задачи линейного программирования каждое неравенство

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k \leqslant b_i$$

может быть заменено на равенство прибавлением к левой части вновь вводимой неотрицательной переменной

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ik} x_k + x_{S+i} = b_i, \quad x_{S+i} \geqslant 0.$$

Полагая, что $n = S + m$ и $C_{S+i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, получаем возможность рассматривать задачу линейного программирования (благодаря увеличению числа переменных) в следующей канонической форме: найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \tag{52.12}$$

при условиях

$$x_i \geqslant 0, \tag{52.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{52.14}$$

Предположим, что уже имеется допустимый план $\bar{x}$, причем такой, что способы, используемые в нем, являются базисными векторами (такой план называется *опорным*). Можно считать, что базис состоит из первых $m$ векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\ldots$, $\bar{a}_m$, так как этого всегда можно добиться изменением нумерации способов. Поскольку всякий вектор $m$-мерного пространства можно разложить по этому базису, найдем разложения всех векторов способов и вектора ограничений. Коэффициенты этих разложений объединены в табл. 52.3 (так называемая *симплексная таблица*).

В частности, для самих базисных векторов записаны их очевидные разложения типа

$$\bar{a}_1 = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \bar{a}_m,$$

*Таблица 52.3.*

| | $\bar{a}_1$ | $\bar{a}_2$ | … | $\bar{a}_m$ | $\bar{a}_{m+1}$ | … | $\bar{a}_n$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_1$ | 1 | 0 | … | 0 | $x_{1\,m+1}$ | … | $x_{1n}$ | $x_1$ |
| $\bar{a}_2$ | 0 | 1 | … | 0 | $x_{2\,m+1}$ | … | $x_{2n}$ | $x_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| | 0 | 0 | … | 0 | | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| $\bar{a}_m$ | 0 | 0 | … | 1 | $x_{m\,m+1}$ | … | $x_{mn}$ | $x_m$ |

для небазисных векторов

$$\bar{a}_{m+1} = x_{1\,m+1}\bar{a}_1 + x_{2\,m+1}\bar{a}_2 + \cdots + x_{k\,m+1}\bar{a}_m,$$

где $x_{k\,m+1}$ — коэффициенты разложения. Наличие разложения $\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_m\bar{a}_m$ для вектора $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ с неотрицательными $x_k$ вытекает из предположения, что план $\bar{x}$ допустимый.

Процедура симплекс-метода состоит из двух этапов:

1) Проверка плана на оптимальность;
2) Включение рентабельных способов и вытеснение из базиса нерентабельных способов.

Базисность допустимого плана означает, что любой способ, не используемый в этом плане, можно выразить через используемые способы. Пусть производственный способ $\bar{a}_S$ не был включен в план. Тогда его можно «синтезировать» из базисных способов, т. е. $\bar{a}_S = \sum_{i=1}^{m} x_{iS}\bar{a}_i$. Расход $\alpha_S$ для этого «синтетического» способа определяется равенством $\alpha_S = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{iS}$. Если «синтетический» способ дороже, чем способ $\bar{a}_S$, то целесообразно заменить его способом $\bar{a}_S$ путем введения последнего в базис. Пусть способ $\bar{a}_S$ вводится в базис с интенсивностью $\theta$. Для того, чтобы не нарушались балансовые соотношения, нужно изменить интенсивность, с которой применяются остальные способы. Из написанного выше разложения $\bar{a}_S$ ясно, что интенсивность $x_i$, с которой применяется способ $\bar{a}_i$, следует уменьшить на величину $\theta x_{iS}$. Так как интенсивности не могут быть отрицательными, нужно обеспечить выполнение неравенств

$$x_i - \theta x_{iS} \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что $\theta \leqslant \frac{x_i}{x_{iS}}$. Ясно, что наибольшее допустимое $\theta$ есть $\theta = \min_i \frac{x_i}{x_{iS}}$. Допустим, что минимум этот достигается при $i = l$, т. е. $\theta = \frac{x_l}{x_{lS}}$. Принимая такую интенсивность для вновь вводимого способа $\bar{a}_S$, получим, что $x_l - \frac{x_l}{x_{lS}}x_{lS} = 0$, т. е. способ $\bar{a}_l$ применяется с нулевой интенсивностью — выводится из базиса. Таким образом, построен новый, лучший план.

Приступим теперь к более формальному описанию симплекс-метода. Для каждого небазисного способа можно сравнить два числа

$$C_k \qquad \text{и} \qquad \alpha_k = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ik}.$$

Из критерия оптимальности ясно, что план $\bar{x}$ оптимален тогда и только тогда, когда $C_k \geqslant \alpha_k$ для всех $k$. Действительно, если для какого-нибудь $k$ выполняется неравенство $\alpha_k > C_k$, то план неоптимален и способ $\bar{a}_k$ целесообразно ввести в

новый базис. Если таких $k$ несколько, то естественно ввести один из них, например, тот, для которого разность $\alpha_k - C_k$ максимальна. Пусть он соответствует $k = S$. Для того чтобы новый допустимый план был опорным, необходимо исключить один из использовавшихся способов, так как $m+1$ векторов в $m$-мерном пространстве всегда линейно зависимы и базиса не образуют. Подсчитаем величину $\theta = \min_i \frac{x_i}{x_{iS}}$, где индекс $i$ соответствует положительным компонентам плана. В силу предположения, сделанного выше, $\theta = \frac{x_l}{x_{lS}}$. Тогда исключить из базиса следует именно способ $\bar{a}_l$, и новому плану будет соответствовать базис $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{l-1}, \bar{a}_{l+1}, \ldots, \bar{a}_m, \bar{a}_S$.

Теперь покажем, как перейти от плана $\bar{x}$ к лучшему допустимому плану $\bar{x}'$. Раскладывая вектор ограничений по новому базису, имеем

$$\bar{b} = x'_1\bar{a}_1 + x'_2\bar{a}_2 + \cdots + x'_{l-1}\bar{a}_{l-1} + x'_{l+1}\bar{a}_{l+1} + \cdots + x'_m\bar{a}_m + x'_S\bar{a}_S.$$

С другой стороны, используя имевшиеся ранее разложения векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}_l$, тот же вектор $\bar{b}$ можно представить в таком виде:

$$\bar{b} = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lS}}x_{1S}\right)\bar{a}_1 + \cdots + \left(x_{l-1} - \frac{x_l}{x_{lS}}x_{l-1\ S}\right)\bar{a}_{l-1} + \cdots \\ \cdots + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lS}}x_{mS}\right)\bar{a}_m + \frac{x_l}{x_{lS}}\bar{a}_S.$$

Отсюда следует, что новый план может быть вычислен по формулам

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lS}}x_{iS}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m;$$
$$x'_S = \frac{x_l}{x_{lS}}.$$

Важно отметить, что $x'_i$ неотрицательны. Это ясно из выбора $\theta$. Совершенно аналогичные формулы можно получить и для преобразования всех элементов симплексной таблицы (табл. 52.3).

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lS}}x_{iS}, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m;$$
$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lS}}.$$

Отысканием нового плана и преобразованной таблицы завершается одна итерация симплекс-метода. Далее этапы проверки и улучшения повторяются снова. Доказано, что если оптимальное решение задачи существует, то оно будет найдено через конечное число шагов (за исключением редко встречающихся случаев *вырождения*, требующих некоторого изменения алгоритма)[1].

*ПРИМЕР 52.1.* В качестве иллюстрации применим симплекс-метод к решению конкретной задачи. Найти

$$\max\{x_1 - 2x_2 + x_3\}$$

[1] Описание метода исходило из предположения, что допустимый план существует. Правильно поставленная задача действительно обычно имеет решение, однако трудности нередко возникают при отыскании допустимого опорного плана. В таких случаях используется *метод искусственного базиса*, связанный с введением в задачу дополнительных способов.

при условиях

$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,\\ &x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,\\ &x_i \geqslant 0; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\bar{a}_1 = (1, 1), \quad \bar{a}_2 = (4, -2), \quad \bar{a}_3 = (1, -1), \quad \bar{b} = (5, -1),\\ &C_1 = 1, \qquad C_2 = -2 \qquad \text{и} \quad C_3 = 1. \end{aligned}$$

*Таблица 52.4.*

| | $\bar{a}_1$ | $\bar{a}_2$ | $\bar{a}_3$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_1$ | 1 | 0 | $-1/3$ | 1 |
| $\bar{a}_2$ | 0 | 1 | $1/3$ | 1 |

Эта задача отличается от рассматривавшейся задачи линейного программирования в канонической форме тем, что в ней требуется отыскать максимум, а не минимум. Понятно, что план $\bar{x}$ такой задачи оптимален тогда и только тогда, когда $C_k \leqslant \alpha_k$ для всех $k$. Начнем с выбора допустимого начального плана. Сразу видно, что допустимым является план $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Этот план опорный, так как векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ линейно независимы — образуют базис.

Построим симплексную таблицу (табл. 52.4), найдя разложения по этому базису векторов $\bar{a}_3$ и $\bar{b}$.

Вычислим величину

$$\alpha_3 = x_{13}C_1 + x_{23}C_2 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}(-2) = -1.$$

Разность $\alpha_3 - C_3 = -1 - 1 = -2 < 0$, следовательно, исходный план неоптимален. Для того чтобы его улучшить, необходимо ввести в базис вектор $\bar{a}_3$. Так как мы хотим, чтобы и новый план был опорным, один из прежних векторов базиса должен быть из него исключен.

Разложение вектора $\bar{a}_3$ по базису содержит лишь одну положительную компоненту. Следовательно,

$$\theta = \frac{x_2}{x_{23}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Пользуясь приведенными выше формулами, определяем новый план. Имеем

$$\begin{aligned} x_1' &= 1 - 3\left(-\tfrac{1}{3}\right) &&= 2,\\ x_2' &= 1 - 3\left(\tfrac{1}{3}\right) &&= 0,\\ x_3' &= &&= 3. \end{aligned}$$

*Таблица 52.5.*

| | $\bar{a}_1$ | $\bar{a}_2$ | $\bar{a}_3$ | $\bar{b}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_1$ | 1 | 1 | 0 | 2 |
| $\bar{a}_2$ | 0 | 3 | 1 | 3 |

Проверим вновь полученный план на оптимальность. Для этого строим новую симплексную таблицу (табл. 52.5), используя соответствующие формулы преобразования.

Величина $\alpha_2 = x_{12}C_1 + x_{32}C_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$, а разность $\alpha_2 - c_2 = 4 + 2 = 6 > 0$. Следовательно, новый план $\bar{x} = (2, 0, 3)$ оптимален. Значение целевой функции в этом плане равно $z_1 = 2 - 2 \cdot 0 + 3 = 5$. Сравните: в первоначальном плане значение целевой функции равнялось $z_0 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$. Задача решена.

Описанный вариант симплекс-метода не является единственным. На практике обычно употребляется более совершенный вариант — модифицированный симплекс-метод, связанный с использованием двойственной задачи (о. о. оценок). Существуют и другие методы решения задач линейного программирования.

## § 52.4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Построим математическую модель, описывающую одну довольно простую, но типичную ситуацию. Речь будет идти о рациональной перевозке некоторого однородного (одного и того же назначения и качества) продукта от производителей к потребителям. В этом случае каждому потребителю безразлично, откуда, из каких пунктов производства будет поступать этот продукт, лишь бы он поступал в нужном объеме. Однако от того, насколько рациональным окажется прикрепление пунктов потребления к пунктам производства, существенно зависит объем транспортной работы. В связи с этим, естественно, возникает вопрос о наиболее рациональном прикреплении производителей к потребителям (и наоборот), о правильном направлении перевозок груза, при котором потребности удовлетворяются, а затраты на транспортировку минимальны.

Пусть имеются пункты производства $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ с объемами производства в единицу времени (месяц, квартал), равными соответственно $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, и пункты потребления $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$ с объемами потребления, равными $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$ соответственно. Будем предполагать, что производство и потребление сбалансированы — сумма объемов производства равна сумме объемов потребления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Предполагаются известными величины $C_{ij}$ — затраты по перевозке единицы продукции из $i$-го пункт производства в $j$-й пункт потребления. Они могут быть выражены в стоимостной (денежной) форме или в натуре (например, в тонно-километрах). Требуется найти такой план перевозок, при котором были бы удовлетворены потребности в пунктах $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$ и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальными.

Обозначая через $x_{ij}$ количество продукта, перевозимое из $i$-го пункта производства в $j$-й пункт потребления, приходим к следующей формулировке задачи.

Найти минимум

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \tag{52.15}$$

(суммарные затраты на транспортировку) при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{52.16}$$

(в каждый пункт потребления завозится требуемое количество продукта);

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{52.17}$$

(из каждого пункта производства полностью вывозится произведенный продукт);

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{52.18}$$

(перевозимый объем продукта не может быть отрицательным).

Всякий набор величин $x_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих условиям (52.16)–(52.18), будем называть допустимым планом перевозок. План, для которого суммарные затраты достигают минимума, называется оптимальным.

Поскольку транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, для нее справедлив приведенный ранее критерий оптимальности плана. Используя терминологию и особенности транспортной задачи, этот критерий можно

сформулировать таким образом: допустимый план перевозок тогда и только тогда является оптимальным, когда каждому пункту производства и потребления можно сопоставить величину, потенциал, характеризующую уровень оценки продукции в нем так, что множество этих потенциалов удовлетворяет следующим условиям: (52.16) — разность потенциалов пунктов потребления и производства, между которыми запланированы перевозки, равна затратам по транспортировке единицы продукции между этими пунктами; (52.17) — аналогичные разности для всех остальных пар пунктов не превосходят затрат по транспортировке.

Если ввести обозначения: $U_i$ — потенциал для $i$-го пункта производства и $V_j$ — потенциал для $j$-го пункта потребления, то эти условия можно представить как

$$V_j - U_i \leqslant C_{ij},$$

причем $V_j - U_i = C_{ij}$, если перевозка из пункта $A_i$ в пункт $B_j$ предусмотрена в плане $(x_{ij} > 0)$.

В транспортной задаче оценки или, как их чаще называют в этом случае, потенциалы имеют особенно прозрачный экономический смысл. Они выступают здесь как локальные (поясные) цены (или наценки к единой цене), создающие заинтересованность в правильном направлении перевозок. При такой интерпретации признак оптимальности плана представляет собой по сути математическое выражение здравого смысла — если какая-то перевозка осуществляется, то цена в пункте потребления равна цене в пункте производства плюс транспортные затраты; в остальных случаях цена $V_j$ не может быть больше, чем $U_i + C_{ij}$, так как продукт в пункте $B_j$ по такой цене можно было бы получить, привезя его с затратами $C_{ij}$ из пункта $A_i$. Следовательно, $V_j \leqslant U_i + C_{ij}$, т. е. в обоих указанных случаях разность цен не превышает затрат по перевозке. С помощью критерия оптимальности, так же как и в задаче о раскрое, можно не только проверить на оптимальность любой план, но и в случае его неоптимальности указать способ улучшения этого плана.

*Таблица 52.6.*

| | $B_1(48)$ | $B_2(54)$ | $B_3(31)$ | $B_4(37)$ | $B_5(30)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(95)$ | 90 | 84 | 72 | 56 | 46 |
| $A_2(55)$ | 39 | 43 | 66 | 40 | 55 |
| $A_3(50)$ | 41 | 54 | 45 | 38 | 36 |

Рассмотрим теперь процесс формирования оптимального плана транспортной задачи. Возьмем конкретный числовой пример и, применив метод последовательного улучшения, детально покажем, как строится такой план.

*ПРИМЕР 52.2.* Пусть заданы объемы производства $a_1 = 95$, $a_2 = 55$, $a_3 = 50$ и объемы потребления $b_1 = 48$, $b_2 = 54$, $b_3 = 31$, $b_4 = 37$ и $b_5 = 30$. Затраты на перевозки записаны в табл. 52.6 в виде матрицы. Например, число 90 означает, что перевозка единицы продукта из пункта $A_i$ в пункт $B_i$ обходится в 90 единиц (скажем, эти числа могут означать расстояния между пунктами; если объем дан в тоннах, затраты выражаются в тонно-километрах).

Решение задачи начнем с построения некоторого допустимого плана. Вообще говоря, это можно сделать разными способами и мы воспользуемся одним из них. В матрице затрат отыскиваем минимальный элемент (в данном примере 36) и включаем в план в максимально возможном объеме самую дешевую перевозку, притом в максимально возможном объеме (в нашем примере это перевозка 30 единиц из пункта $A_3$ в пункт $B_5$). Следующий по величине элемент матрицы затрат (38) определяет включение в план перевозки между пунктами $A_3$ и $B_4$. Объем перевозки равен только 20 единицам, так как этим количеством груза исчерпываются возможности предприятия, расположенного в пункте $A_3$. Продолжая действовать аналогично и дальше, придем

к плану перевозок, показанному в табл. 52.7. Этот план допустим: суммы строк соответствуют объемам производства, а столбцов — объемам потребления. Затраты на его реализацию составляют: $54{\cdot}84+31{\cdot}72+10{\cdot}56+48{\cdot}39+7{\cdot}40+20{\cdot}38+30{\cdot}36 = 11\,320$.

*Таблица 52.7.*

| | $\boldsymbol{B_1(48)}$ | $\boldsymbol{B_2(54)}$ | $\boldsymbol{B_3(31)}$ | $\boldsymbol{B_4(37)}$ | $\boldsymbol{B_5(30)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{A_1(95)}$ | 0 | 54 | 31 | 10 | 0 |
| $\boldsymbol{A_2(55)}$ | 48 | 0 | 0 | 7 | 0 |
| $\boldsymbol{A_3(50)}$ | 0 | 0 | 0 | 20 | 30 |

Для того чтобы проверить полученный план на оптимальность, прежде всего вычисляем систему потенциалов (оценок единицы продукта) в пунктах производства ($U_1$, $U_2$, $U_3$) и пунктах потребления ($V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$). Так как потенциалы определяются с точностью до постоянного слагаемого, какой-нибудь из них можем задать заранее. Пусть, например, $U_1 = 100$ и связи производителей с потребителями в плане осуществляются по направлениям, которые указаны на рис. 52.5. Тогда, зная, что разности потенциалов между пунктами потребления и пунктами производства, связанными в плане, равны соответствующим транспортным затратам, один за другим находим остальные потенциалы:

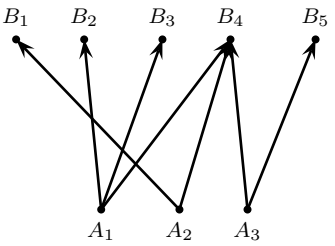



*Рис. 52.5.*

$$\begin{aligned} U_1 &= 100, & U_2 &= 156-40 = 116\\ V_2 &= 100+84 = 184, & U_3 &= 156-38 = 118\\ V_3 &= 100+72 = 172, & V_5 &= 118+36 = 154\\ V_4 &= 100+56 = 156, & V_1 &= 116+39 = 155 \end{aligned}$$

Проверим выполнение признака оптимальности. Для этого, согласно условию (52.17), нужно подсчитать величины $V_j - U_i - C_{ij}$. Если они все меньше или равны нулю, то план оптимален. Несоблюдение этого требования означает, что план может быть улучшен. Находим

$$\begin{aligned} V_1 - U_1 - C_{11} &= 155-100-90 = -35,\\ V_5 - U_1 - C_{15} &= 154-100-46 = 8,\\ V_2 - U_2 - C_{22} &= 184-116-43 = 25,\\ V_3 - U_2 - C_{23} &= 172-116-66 = -10,\\ V_5 - U_2 - C_{25} &= 154-116-55 = -17,\\ V_1 - U_3 - C_{31} &= 155-118-41 = -4,\\ V_2 - U_3 - C_{32} &= 184-118-54 = 12,\\ V_3 - U_3 - C_{33} &= 172-118-45 = 9. \end{aligned}$$

Для пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, эти разности, очевидно, отвечают признаку оптимальности. Но так как некоторые из полученных величин положительны, весь план не оптимален. Чтобы его улучшить, введем в план перевозку в объеме $\theta$ между какими-нибудь пунктами $A_i$ и $B_j$, для которых соответствующая разность положительна. Логичнее всего ввести эту перевозку между пунктами $A_2$ и $B_2$, так как для них величины разности наиболее значительна (25). Введение добавочной перевозки нарушает сбалансированность плана, т. е. объем ввоза (вывоза) в пункт не соответствует потреблению (производству) в нем. Поэтому необходимо одновременно изменить объемы перевозок и между некоторыми другими пунктами. Эти изменения

*Таблица 52.8.*

| | $B_1(48)$ | $B_2(54)$ | $B_3(31)$ | $B_4(37)$ | $B_5(30)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(95)$ | 0 | $54-\theta$ | 31 | $10+\theta$ | 0 |
| $A_2(55)$ | 48 | $\theta$ | 0 | $7-\theta$ | 0 |
| $A_3(50)$ | 0 | 0 | 0 | 20 | 30 |

следует произвести по направлениям $B_2A_1$, $A_1B_4$ и $B_4A_2$, т. е. согласно тем связям, по которым производилось определение потенциалов (см. рис. 52.5). В табл. 52.8 приведен план, в котором осуществлены все необходимые изменения в объемах перевозок.

Нетрудно проверить, что этот план сбалансирован — из каждого пункта вывозится столько, сколько в нем производится, а каждый пункт потребления удовлетворяет всю свою потребность. Легко убедиться, что затраты по реализации этого плана перевозок меньше первоначальных на величину $(V_2-U_2-C_{22})\theta=12\theta$. Следовательно, выгодно выбрать $\theta$ как можно большим. Учитывая, что объемы перевозок не могут быть отрицательными, наибольшее из возможных значений $\theta$ равно 7. Полагая $\theta=7$, находим новый допустимый экономически более выгодный план. Он приведен в табл. 52.9.

*Таблица 52.9.*

| | $B_1(48)$ | $B_2(54)$ | $B_3(31)$ | $B_4(37)$ | $B_5(30)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(95)$ | 0 | 48 | 31 | 17 | 0 |
| $A_2(55)$ | 48 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| $A_3(50)$ | 0 | 0 | 0 | 20 | 30 |

Нахождением нового допустимого плана заканчивается первое приближение (первая итерация). Дальше аналогичные операции проводятся снова, но уже для нового плана. Прежде всего вычисляются потенциалы, проверяются условия оптимальности. Если они выполнены, то решение закончено. Если нет, то снова производится переход к лучшему плану и т. д.

*Таблица 52.10.*

| | $B_1(48)$ | $B_2(54)$ | $B_3(31)$ | $B_4(37)$ | $B_5(30)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1(95)$ | 0 | 0 | 28 | 37 | 30 |
| $A_2(55)$ | 1 | 54 | 0 | 0 | 0 |
| $A_3(50)$ | 47 | 0 | 3 | 0 | 0 |

Для окончательного решения задачи требуется выполнить еще три итерации. Чтобы не увеличивать объема книги, эти итерации здесь не приводятся. Читателю же настоятельно рекомендуется самому проделать все необходимые расчеты и сравнить свой результат с оптимальным планом, приведенным в табл. 52.10.

Чтобы убедиться в оптимальности этого плана, нужно снова вычислить потенциалы пунктов производства и пунктов потребления, а затем удостовериться, что величины $V_j-U_i-C_{ij}\leqslant 0$. Приведем вычисления:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \phantom{100+72} = 100, & V_1-U_1-C_{11} &= 168-100-90 = -22,\\
V_3 &= 100+72 = 172, & V_2-U_1-C_{12} &= 173-100-84 = -12,\\
V_4 &= 100+56 = 156, & V_3-U_2-C_{23} &= 172-129-66 = -23,\\
V_5 &= 100+46 = 146, & V_4-U_2-C_{24} &= 156-129-40 = -13,\\
U_3 &= 172-45 = 127, & V_5-U_2-C_{25} &= 146-129-55 = -38,\\
V_1 &= 127+41 = 168, & V_2-U_3-C_{32} &= 172-127-54 = -9,\\
U_2 &= 168-39 = 129, & V_4-U_3-C_{34} &= 156-127-38 = -9,\\
V_2 &= 129+43 = 172, & V_5-U_3-C_{35} &= 146-127-36 = -17.
\end{aligned}
$$

Все же остальные значения $V_j-U_i-C_{ij}$ равны нулю. Следовательно, в силу критерия оптимальности найденный план — наилучший, оптимальный. Затраты на его реализацию составляют $28\cdot 72+37\cdot 56+30\cdot 46+39\cdot 1+43\cdot 54+47\cdot 41+45\cdot 3=9881$.

По сравнению с первым допустимым планом, который представляется на первый взгляд также весьма разумным, затраты в оптимальном плане уменьшились примерно на 13%.

*Замечание 52.1.* При построении первого допустимого плана нами существенно использовались величины транспортных затрат — сначала реализовывалась перевозка там, где транспортные затраты были наименьшие, далее реализовывалась перевозка там, где транспортные затраты были следующими по величине и т. д.

Существует метод — метод северо-западного угла, который дает возможность найти допустимый план, вообще не принимая в расчет величины транспортных затрат. Покажем его применение на примере рассмотренной задачи.

*ПРИМЕР 52.3.* Составление плана перевозок начинаем с левого верхнего угла таблицы 52.11. Первому потребителю нужно 48 единиц продукта. Направим их с первого предприятия, тогда на нем останется 47 единиц. Ни второе, ни третье предприятия ничего не пошлют первому потребителю, так как его потребности уже удовлетворены. Переходим ко второму потребителю. Из требуемых ему 54 единиц первое предприятие может дать только 47, так как больше у него нет. Назначим эту перевозку. Ни третий, ни четвертый, ни пятый потребитель не смогут ничего получить от первого предприятия, так как оно больше не имеет продукта.

*Таблица 52.11.*

| | | | $b_1(48)$ | $b_2(54)$ **7** | $b_3(31)$ | $b_4(37)$ **20** | $b_5(30)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 47 | $a_1(95)$ | 48 | 47 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 48 | $a_2(55)$ | 0 | 7 | 31 | 17 | 0 |
| | 30 | $a_3(50)$ | 0 | 0 | 0 | 20 | 30 |

Переходим ко второму предприятию. Прежде всего оно удовлетворяет оставшуюся потребность второго потребителя — 7 единиц. Полностью удовлетворяет потребность третьего потребителя — 31 единица. И, наконец, оставшиеся 17 единиц оно направляет четвертому потребителю. Переходим к третьему предприятию. Ему остается добавить 20 единиц четвертому потребителю и все 30 единиц — пятому потребителю. Допустимый план построен. Планы, получаемые по методу северо-западного угла, являются базисными.

*Замечание 52.2.* В рассмотренной нами задаче выполнялось условие $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. В этом случае задача называется замкнутой. Очень часто оказывается, что $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. В этом случае равенство (52.17) заменяется неравенством $\leqslant$, а задача называется открытой. Открытая транспортная задача легко сводится к замкнутой. Для этого нужно ввести еще одного, $(n+1)$-го, фиктивного потребителя с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Транспортные затраты из всех пунктов производства в $(n+1)$-й пункт потребления определяются равенством:

$$c_{i\,n+1} = 0, \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m.$$

## Контрольные вопросы

1. Что такое допустимый план в задаче линейного программирования?
2. Что такое целевая функция в задаче линейного программирования?
3. Что такое оптимальный план в задаче линейного программирования?
4. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.
5. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия для существования оптимального плана в задаче линейного программирования.
7. В чем состоит процедура симплекс-метода?
8. Какова процедура решения транспортной задачи?

# LIII

# ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В самом общем виде задача оптимизации может быть сформулирована так.

*Имеется множество $U$, на котором определен функционал $F$ (функция, ставящая в соответствие каждому $u \in U$ элемент из $\mathbb{R}$). Требуется найти такое $\overline{u}$, что*

1. $\overline{u} \in U$;
2. $F(\overline{u}) \leqslant F(v), \quad \forall v \in U$

*при решении задачи на минимум. Или, при решении задач на максимум, требуется найти такое $\overline{u}$, что*

1′. $\overline{u} \in U$;

2′. $F(\overline{u}) \geqslant F(v), \quad \forall v \in U$.

В зависимости от того, как заданы $U$ и $F$, строится и классификация оптимизационных задач, разрабатываются методы их решения.

## § 53.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Пусть $U \in \mathbb{R}^n$ и задано условиями

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{53.1}$$

*Замечание.* Иногда оказывается целесообразным выделить естественные для многих задач условия

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s \leqslant n. \tag{53.2}$$

**Определение 53.1.** *Всякий вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или всякую точку $n$-мерного пространства будем называть* планом *(синонимы: управление, стратегия, поведение, решение). Если план удовлетворяет условиям* (53.1) *(и* (53.2)*), то он называется* допустимым *планом. В противном случае план называется недопустимым.*

Функционал $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеризует качество плана: чем больше его значение, тем лучше план при решении задач на максимум. (Наоборот, при решении задач на минимум план тем лучше, чем меньше значение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Далее мы будем говорить только о максимуме или только о минимуме, так как принципиальной разницы между этими задачами нет. Легко заметить, что $\max_x f(x) = -\min_x (-f(x))$.

Функционал $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют еще целевой функцией или критерием качества.

Задача математического программирования формулируется следующим образом. Среди всех допустимых планов, т. е. планов, удовлетворяющих условиям (53.1) (и (53.2)), найти такой план $\bar{x}$, что

$$F(\bar{x}) = \max_{x \in U} F(x). \tag{53.3}$$

**Определение 53.2.** *Допустимый план $\bar{x}$, удовлетворяющий условию* (53.3)*, называется оптимальным планом.*

Применяются и другие формы записи задачи математического программирования: *Найти*

$$\max F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

*при условиях* (53.1) *(и* (53.2)*)*.
Или, *найти*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$$

*при условиях* (53.1) *(и* (53.2)*)*.

Понятно, что методы решения задачи математического программирования существенно зависят от вида функций $F$ и $g_i$. Именно вид этих функций определяет классификацию задач математического программирования.

Так, если функции $F$ и $g_i$ линейно зависят от переменных $x_j$, то соответствующая задача называется задачей линейного программирования. В предыдущей главе уже было рассмотрено несколько примеров задач линейного программирования, обсуждались методы решения соответствующих задач.

Если хотя бы одна из функций $F$ и $g_i$ нелинейна, то возникающая задача носит название задачи нелинейного программирования.

Если хотя бы одна из величин $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ не может быть задана детерминированно, то это порождает класс задач стохастического программирования.

Если величины $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ принимают только конечное число значений, то мы имеем дело с задачами дискретного программирования.

Рассмотрим некоторые классы задач математического программирования подробнее.

## § 53.2. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Построим математическую модель следующей ситуации. Пусть в пунктах $A_1$, ..., $A_m$ имеются или могут быть размещены предприятия, производящие некоторый однородный продукт. В пунктах $B_1$, ..., $B_n$ потребности в этом продукте заданы и равны, соответственно, $b_1$, ..., $b_n$. Затраты по производству единицы продукта на $i$-м предприятии зависят от объема производства $x_i$, и равны $f_i(x_i)$. Затраты по транспортировке единицы продукта из $A_i$ в $B_i$ равны $C_{ij}$.

Задача состоит в выборе мест расположения предприятий, объема производства и плана перевозок так, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке всего потребного объема продукта были минимальны.

Приходим к следующей математической задаче.

Найти

$$\min_{\{x_{ij}\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \right\}$$

(минимум суммарных затрат на производство и транспортировку)
при условиях

$$x_{ij} \geqslant 0$$

(перевозятся неотрицательные количества продукта);

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

(произведенные количества продукта полностью доставляются потребителям);

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(каждый пункт потребления получает не меньше заданного в нем объема потребления).

К сожалению, пока не имеется общих методов, подобных методу последовательного улучшения плана или симплекс-методу в линейном программировании, которые позволяли бы решать любые задачи нелинейного программирования. Поэтому здесь будут указаны возможности решения лишь для некоторых, впрочем, весьма важных частных случаев.

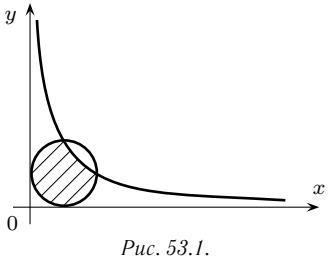


*Рис. 53.1.*

Выясним, в чем выражается «неприятный эффект» нелинейности. Для этого сопоставим задачи линейного и нелинейного программирования. Рассмотрим, как выглядит множество допустимых планов. В задачах линейного программирования оно выпуклое (т. е. содержащее вместе с любыми двумя своими точками отрезок, их соединяющий), с конечным числом крайних точек (напоминаем, что крайней точкой называется всякая точка множества, которая не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего этому множеству). Это становится понятным, если вспомнить, что границами множества служат гиперплоскости. В задачах же нелинейного программирования (в том случае, когда нелинейны ограничения) множество допустимых планов может быть невыпуклым, может иметь бесконечное число крайних точек.

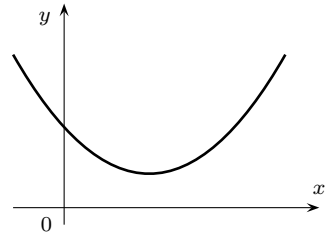
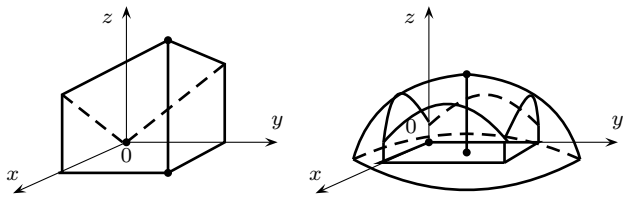


*Рис. 53.2.*

Например, пусть допустимая область на плоскости определяется ограничениями $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$; $xy \leqslant 1$. На рис. 53.1 видно, что эта область невыпуклая (отрезок, соединяющий любые две точки на гиперболе, не принадлежит этой области). Кроме того, все точки, лежащие на ограничивающей эту область дуге окружности, являются крайними, т. е. имеется бесчисленное множество крайних точек.

В том случае, когда нелинейна целевая функция, возникают другие затруднения. В главе 52 было указано, что решение задачи линейного программирования обязательно находится в некоторых (возможно, в нескольких) крайних точках множества допустимых планов. Но при нелинейной целевой функции экстремум может достигаться не только на границе, но и внутри допустимой области (см. рис. 53.2).




$z = x + y; \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

*Рис. 53.3.*

И еще один осложняющий момент, который отличает нелинейные задачи от линейных. Целевая функция в допустимой области может иметь несколько локальных экстремумов, тогда как в линейной задаче локальный максимум или минимум обязательно является и глобальным (см. рис. 53.3).

Перечислив основные отличия нелинейных задач от линейных, укажем некоторые возможные пути их решения.

При решении нелинейной задачи математического программирования представляются возможными два направления. Первое из них — прямые методы нахождения экстремума, связанные с последовательным вычислением значений целевой функции в некоторых точках множества допустимых планов. Другое направление — это нахождение необходимых (или необходимых и достаточных) условий, которым должен удовлетворять оптимальный план.

Указанные направления, однако, не исключают друг друга, совместное использование методов того и другого типа весьма эффективно.

Как мы уже знаем, целевая функция нелинейной задачи математического программирования может иметь несколько минимумов на множестве допустимых планов. Это обстоятельство может сильно осложнить поиск оптимального плана. Поэтому хотелось бы найти условия, гарантирующие наличие единственного минимума.

Введем несколько определений.

**Определение 53.3.** *Функция $f$, заданная на выпуклом множестве $X \subset \mathbb{E}^n$, называется выпуклой, если для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ из $X$ и любого $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется условие*

$$f\big(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\big) \leqslant \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1). \tag{53.4}$$

На рис. 53.2 изображена выпуклая функция одной переменной.

Если в условии (53.4) для любых $x_1$ и $x_2$ из $X$ выполняется строгое неравенство, то функция $f$ называется строго выпуклой.

**Определение 53.4.** *Функция $f$, заданная на выпуклом множестве $X \subset \mathbb{E}^n$, называется вогнутой, если для любых двух точек $x_1$ и $x_2$ из $X$ и любого $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется условие*

$$f\big(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\big) \geqslant \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1). \tag{53.5}$$

На рис. 53.4 изображена вогнутая функция одной переменной.

Если в условии (53.5) для любых $x_1$ и $x_2$ из $X$ выполняется строгое неравенство, то функция $f$ называется строго вогнутой.

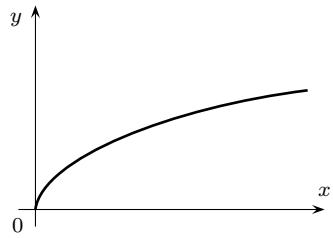



*Рис. 53.4.*

Отметим, что если $f$ — выпуклая функция, то $-f$ — вогнутая функция.

Условия (53.4) и (53.5) имеют ясный геометрический смысл. В частности, функция $f$ строго выпуклая, если отрезок, соединяющий любые две точки $x_1$ и $x_2$ поверхности $y = f(x)$, лежит выше этой поверхности при всех $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1,\ 0 < \lambda < 1$.

Если же отрезок, соединяющий $x_1$ и $x_2$ — любые две точки поверхности $y = f(x)$, лежит ниже этой поверхности при всех $x = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_1,\ 0 < \lambda < 1$, то функция $f$ строго вогнутая.

Выпуклые и вогнутые функции представляют большой интерес в теории нелинейного программирования благодаря следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 53.1**
Пусть $f$ — строго выпуклая функция, заданная на замкнутом выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}_n$. Тогда любой локальный минимум функции $f$ на $X$ является ее глобальным минимумом на $X$.

● Допустим противное. Пусть $x_0 \in X$ является точкой локального минимума, а $\overline{x} \in X$ — точкой глобального минимума. По определению глобального минимума

$$f(\overline{x}) < f(x_0). \tag{53.6}$$

Так как $f$ — строго выпуклая функция, то для нее должно выполняться условие

$$f\left(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)x_0\right) < \lambda f(\overline{x}) + (1-\lambda)f(x_0). \tag{53.7}$$

Используя условие (53.6), получаем

$$f\left(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)x_0\right) < f(x_0). \tag{53.8}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon < |\overline{x} - x_0|$. Если $0 < \lambda < \varepsilon/|\overline{x} - x_0|$, то точка $\lambda\overline{x} + (1-\lambda)x_0$ лежит в $\varepsilon$-окрестности точки $x_0$, и из (53.8) следует, что

$$f(x) < f(x_0).$$

Этот результат противоречит тому, что в точке $x_0$ достигается локальный минимум.

Полученное противоречие и доказывает теорему. ●

Аналогичный результат применительно к вогнутым функциям формулируется так.

**ТЕОРЕМА 53.2**
Пусть $f$ — строго вогнутая функция, заданная на замкнутом выпуклом множестве $X \subset \mathbb{R}_n$. Тогда любой локальный максимум функции $f$ на $X$ является ее глобальным максимумом на $X$.

Итак, теперь мы знаем, сколь полезно наличие свойств выпуклости или вогнутости у оптимизируемой функции. Для того чтобы лучше понять, как применяются прямые методы поиска экстремума, сделаем два сильно упрощающих задачу предположения:

1) Ограничения на переменные отсутствуют.
2) Оптимизируемая функция строго выпукла, т. е. она имеет единственный минимум.

## § 53.3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

Таких методов существует множество. Все эти итеративные методы основаны на простой идее — пошаговом приближении к точке экстремума. Различаются между собой они по способу выбора направления движения, по выбору величины «шага». Здесь мы упомянем всего лишь два метода.

### 53.3.1. ПОКООРДИНАТНЫЙ СПУСК

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $A_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, — произвольную начальную точку, из которой начинается поиск единственного минимума функции $f$. Определим следующую точку $A_1(x_1^1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ на пути к минимуму таким правилом:

$$f(x_1^1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0) = \min_{x_1} f(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0). \tag{53.9}$$

Тогда точка $A_2(x_1^1, x_2^2, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ определяется правилом

$$f(x_1^1, x_2^2, x_3^0, \ldots, x_n^0) = \min_{x_2} f(x_1^1, x_2, x_3^0, \ldots, x_n^0). \tag{53.10}$$

Продолжая последовательно находить экстремумы вдоль направлений координатных осей, получаем последовательность точек $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_k$, $\ldots$, сходящуюся к единственной точке минимума $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

● *ПРИМЕР 53.1.* Найти минимум функции $z = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, взяв в качестве начальной точку $A(3, 5)$.

● Проделайте самостоятельно. ●

Описанный метод, хотя и сходится к точке минимума, сходится очень медленно. Это неудивительно, так как при выборе направлений движения (параллельно координатным осям) никак не учитывается специфика минимизируемой функции. Интуитивно ясно, что, если бы на каждом шаге движение происходило в направлении скорейшего убывания функции, то приближение к экстремальной точке происходило бы быстрее. Постараемся отыскать такое направление.

Введем в рассмотрение вектор $\operatorname{grad} f$, определяемый формулой

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\bar{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\bar{i}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\bar{i}_n. \tag{53.11}$$

Оказывается, что этот вектор характеризует направление скорейшего роста функции $f$ в данной точке (см. § 22.6). Сформулируем это утверждение еще раз в виде следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 53.3**
Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывно дифференцируема в точке $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$. Тогда, если не все $\frac{\partial f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\partial x_i}$ одновременно равны нулю, направление вектора

$$\operatorname{grad} f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\partial x_k}\,\bar{i}_k$$

определяет направление скорейшего роста функции $z$ в этой точке.

*Замечание.* Если вектор $\operatorname{grad} f$ определяет направление скорейшего роста функции, то вектор $-\operatorname{grad} f$ определяет направление скорейшего убывания функции.

### 53.3.2. МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Так же, как и в методе покоординатного спуска, приближение к минимуму начинается с произвольной точки $A^0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Пусть на $i$-м шаге мы находимся в точке $A^i(x_1^i,\ldots,x_n^i)$. Тогда следующая точка находится по правилу

$$\overline{OA^{i+1}}=\overline{OA^i}-\lambda_i\operatorname{grad} f\left(x_1^i,\ldots,x_n^i\right), \tag{53.12}$$

где $\lambda_i$ — это то значение $\lambda$, которое минимизирует функцию

$$\varphi(\lambda)=f\left(x_1^i-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^i,\ldots,x_n^i),x_2^i-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^i,\ldots,x_n^i),\right.$$
$$\left.\ldots,x_n^i-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^i,\ldots,x_n^i)\right). \tag{53.13}$$

Значение $\lambda_i$ может быть найдено с помощью любой описанной ранее процедуры одномерного поиска.

● *ПРИМЕР 53.2.* Рассмотрим очень простую задачу, которая, тем не менее, позволит проиллюстрировать метод и обсудить некоторые его модификации.

Найти минимум функции

$$z=4(x-2)^2+y^2+25 \tag{53.14}$$

при условиях

$$\begin{aligned}&-10\leqslant x\leqslant 10,\\&-10\leqslant y\leqslant 10.\end{aligned} \tag{53.15}$$

● Начнем с геометрического анализа задачи. Уравнение (53.14) определяет поверхность, которая называется эллиптический параболоид (см. рис. 53.5). Легко видеть, что сечения этой поверхности плоскостями $x=\text{const}$ или $y=\text{const}$ представляют собой параболы, расположенные в соответствующих плоскостях. Сечения плоскостями $z=\text{const}$ $(z>25)$ представляют собой эллипсы. Сечение поверхности плоскостью $z=25$ представляет собой точку с координатами $(2,0,25)$.

Сказанное позволяет изобразить поверхность $z$, заданную уравнением (53.14) (см. рис. 53.5).

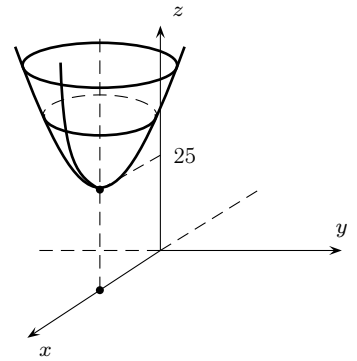



*Рис. 53.5.*

Нас интересует самая «низкая» точка поверхности из тех, которые находятся над квадратом, определяемым условиями (53.15). Очевидно, что такая точка существует и ее координаты $(2, 0, 25)$. Иными словами, при $x = 2$ и $y = 0$ функция $z$ достигает своего значения $z_{\min} = 25$. Поставленная задача решена.

А теперь сделаем вид, что решение нам неизвестно, и пустим в ход метод наискорейшего спуска.

В качестве начальной точки, из которой начнется поиск минимума функции, возьмем произвольную точку на плоскости $xOy$, удовлетворяющую условиям (53.15). Скажем, точку $A_0$ с координатами $x = 5$, $y = 5$ (см. рис. 53.6).

Вычислим $\operatorname{grad} z$ в точке $A_0$. Имеем

$$\operatorname{grad} z\big|_{A_0} = 8(x-2)\big|_{A_0} \cdot \bar{i} + 2y\big|_{A_0} \cdot \bar{j} = 24\bar{i} + 10\bar{j}. \tag{53.16}$$

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $A_0$ и параллельной $\operatorname{grad} z\big|_{A_0}$:

$$y - 5 = \frac{10}{24}(x-5). \tag{53.17}$$

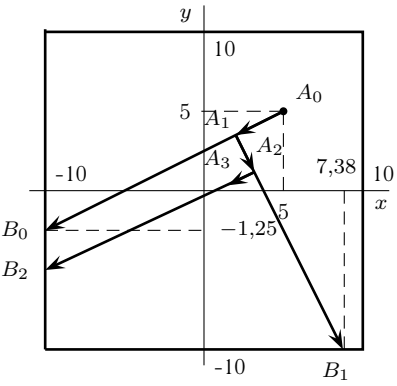



*Рис. 53.6.*

Поскольку нас интересует направление убывания функции, то интерес представляет лишь отрезок прямой от точки $A_0$ до точки $B_0$ (см. рис. 53.6).

Сместившись из точки $A_0$ в направлении к точке $B_0$ на некоторое расстояние, можно найти точку $A_1$, в которой значение функции $z$ будет меньше, чем ее значение в точке $A_0$. Вычислим $z\big|_{A_0}$ и $z\big|_{B_0}$:

$$z\big|_{A_0} = 4(5-2)^2 + 5^2 + 25 = 86;$$
$$z\big|_{B_0} = 4(-10-2)^2 + (-1{,}25)^2 + 25 = 602{,}56.$$

Понятно, что смещаться до точки $B_0$ заведомо не следует, так как $z\big|_{B_0} > z\big|_{A_0}$.

На сколько же следует сместиться? Пусть абсцисса точки $A_1$, $x_1$, равна $5-\lambda$. Так как эта точка лежит на прямой $A_0B_0$, ее ордината, $y_1$, находится из условия (53.17):

$$y_1 - 5 = \frac{10}{24}(5 - \lambda - 5), \tag{53.18}$$

т. е. $y_1 = 5 - \frac{10}{24}\lambda$.

Значение функции $z$ в точке $A_1$ определяется формулой

$$z = 4(5-\lambda-2)^2 + \left(5 - \frac{10}{24}\lambda\right)^2 + 25, \tag{53.19}$$

т. е. $z$ является функцией одного параметра $\lambda$.

Поскольку ни точка $A_0$, ни точка $B_0$ нас уже не интересуют, величина $\lambda$ должна удовлетворять следующему неравенству:

$$0 < \lambda < 15. \tag{53.20}$$

Для того чтобы найти минимум функции $z$, определяемой уравнением (53.19) при условиях (53.20), нужно найти корень уравнения $\frac{dz}{d\lambda} = 0$, удовлетворяющий условиям (53.20). Имеем

$$\frac{dz}{d\lambda} = -8(3-\lambda) - 2\left(5 - \frac{10}{24}\lambda\right)\cdot\frac{10}{24}. \tag{53.21}$$

Легко убедиться в том, что уравнение $\frac{dz}{d\lambda} = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 3{,}38$. Именно при этом значении $\lambda$ функция $z$ имеет наименьшее значение на отрезке $A_0B_0$. Находим координаты точки $A_1$:

$$x_1 = 5 - 3{,}38 = 1{,}62;$$
$$y_1 = 5 - \frac{10}{24}\cdot 3{,}38 = 3{,}59.$$

Вычислим значение функции $z$ в точке $A_1$:

$$z\big|_{A_1} = 4(5-3{,}38-2)^2 + \left(5 - \frac{10}{24}\cdot 3{,}38\right)^2 + 25 = 38{,}46.$$

Найденное значение удовлетворяет условию $z\big|A_1 < z\big|_{A_0}$, т. е. точка $A_1$ «лучше», чем взятая в начале точка $A_0$.

Первая итерация завершена. Приступим к «улучшению» точки $A_1$. Поскольку все последующие итерации однотипны, стиль изложения будет более лаконичным. Имеем,

$$\operatorname{grad} z\big|_{A_1} = -3{,}04\bar{i} + 7{,}18\bar{j}.$$

Уравнение прямой, на которой будем искать следующую «улучшающую» точку $A_2$, имеет вид

$$y - 3{,}59 = -\frac{7{,}18}{3{,}04}(x - 1{,}62)$$

или, упрощая,

$$y = 7{,}42 - 2{,}36x.$$

Точка $B_1$ имеет координаты $x = 7{,}38$ и $y = -10$. Тогда

$$z\big|_{B_1} = 4(7{,}32-2)^2 + (-10)^2 + 25 = 240{,}78,$$

т. е. точка $B_1$ заведомо «хуже» точки $A_1$.

Точка $A_2 \in (A_1, B_1)$. Пусть ее абсцисса $x_2 = 1{,}62 + \lambda$. Тогда $y_2 = 7{,}42 - 2{,}36(1{,}62 + \lambda) = 3{,}60 - 2{,}36\lambda$.

Значение функции $z$ в точке $A_2$ определяется формулой

$$z = 4(1{,}62 + \lambda - 2)^2 + (3{,}60 - 2{,}36\lambda)^2 + 25, \quad \text{где } 0 < \lambda < 5{,}76.$$

Уравнение $\frac{dz}{d\lambda} = 0$ имеет вид

$$-3{,}04 + 8\lambda - 16{,}99 + 11{,}14\lambda = 0.$$

Отсюда $\lambda = 1{,}05$. Точка $A_2$, следовательно, имеет координаты $x_2 = 1{,}62 + 1{,}05 = 2{,}67$ и $y_2 = 3{,}60 - 2{,}36 \cdot 1{,}05 = 1{,}12$.

Вычисляем значение функции $z$ в точке $A_2$:

$$z\big|_{A_2} = 4(2{,}67 - 2)^2 + (1{,}12)^2 + 25 = 28{,}05.$$

В результате имеем следующую цепочку неравенств

$$z\big|_{A_2} < z\big|_{A_1} < z\big|_{A_0}.$$

Вторая итерация закончена.

Третью итерацию опишем еще более лаконично.

$$\operatorname{grad} z\big|_{A_2} = 8(x-2)\big|_{A_2} \cdot \bar{i} + 2y\big|_{A_2} \cdot \bar{j} = 5{,}36\bar{i} + 2{,}24\bar{j}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $A_2$ параллельно $\operatorname{grad} z\big|_{A_2}$, имеет вид $y = 0{,}42x$. Точка $B_2$ имеет координаты $x = -10$ и $y = -4{,}2$. $z\big|_{B_2} = 618{,}64$, т. е. $z\big|_{B_2} > z\big|_{A_2}$.

Будем искать точку $A_3 \in (A_2, B_2)$. Пусть $x_3 = 2{,}67 - \lambda$. Тогда $y_3 = 0{,}42(2{,}67 - \lambda) = 1{,}12 - 0{,}42\lambda$. Значение функции $z$ в точке $A_3$ определяется формулой

$$z = 4(2{,}67 - \lambda - 2)^2 + (1{,}12 - 0{,}42\lambda)^2 + 25, \quad \text{где } 0 < \lambda < 12{,}67.$$

Для отыскания $\lambda$ имеем уравнение

$$\frac{dz}{d\lambda} = -8(0{,}67 - \lambda) - 2(1{,}12 - 0{,}42\lambda)0{,}42 = 0.$$

Отсюда $\lambda = 0{,}71$. Точка $A_3$, следовательно, имеет координаты $x_3 = 1{,}96$ и $y_3 = 0{,}82$. Вычислим значение функции $z$ в этой точке:

$$z\big|_{A_3} = 4(1{,}96 - 2)^2 + (0{,}82)^2 + 25 = 25{,}67.$$

Завершив третью итерацию, пришли к такой цепочке неравенств:

$$z\big|_{A_3} < z\big|_{A_2} < z\big|_{A_1} < z\big|_{A_0}.$$

Проанализируем полученный результат. Так как мы знаем минимальное значение функции, $z_{\min} = 25$, а $z\big|_{A_3} = 25{,}67$, то отсюда следует, что примененный метод позволил довольно быстро (всего 3 итерации) найти минимальное значение с относительной погрешностью 3%. Координаты точки $A_3$ тоже близки к координатам экстремальной точки. Еще несколько итераций позволят подойти к ней еще ближе. Читателю предоставляется возможность выполнить эти итерации самостоятельно. ●

Сделаем теперь несколько замечаний общего характера.

*Замечание 53.1.* Если минимизируемая функция имеет единственный экстремум в рассматриваемой области, то можно доказать, что последовательность точек $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... сходится к точке $\overline{A}$ — той точке, в которой функция достигает минимума. Именно этот случай имеет место в задаче (53.14) при условиях (53.15).

*Замечание 53.2.* Если минимизируемая функция имеет несколько экстремумов в рассматриваемой области, то нельзя гарантировать, что последовательность $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... сходится к точке глобального минимума. В зависимости от выбора точки $A_0$ может иметь место сходимость к той или иной точке локального минимума. В практических задачах такого рода имеет смысл многократно применять метод наискорейшего спуска, отправляясь всякий раз из различных точек $A_0$ области допустимых планов. Из найденных локальных минимумов потом выбирается наименьший.

*Замечание 53.3.* При решении практических задач вместо решения уравнения (53.21) для нахождения оптимального значения $\lambda$ нередко пользуются методом проб — испытывают несколько значений $\lambda$ с заранее выбранным шагом и выбирают то из них, которому соответствует меньшее значение функции. Это позволяет существенно ускорить процесс решения задач.

*Замечание 53.4.* Если для какого-нибудь номера $i$ окажется, что $z\big|_{B_i} < z\big|_{A_i}$, то поиск точки $A_{i+1}$ осложняется. В этом случае обычно рассматривается движение по проекции $\operatorname{grad} z\big|_{B_i}$ на границу области допустимых планов.

*Замечание 53.5.* Изложенный метод поиска минимума совершенно очевидным способом переносится на поиск точек максимума функций.

*Замечание 53.6.* Рассмотренная задача позволяет ввести важное понятие, которое носит общий характер и зачастую бывает полезно. Будем рассматривать проекции на плоскость $xOy$ сечений поверхности $z$, определяемой уравнением (53.14), плоскостями $z = \text{const}$. Пусть $z = 25$. В этом случае проекция состоит из единственной точки: $x = 2$, $y = 0$. Пусть, например, $z = 50$. Тогда уравнение проекции сечения на плоскость $xOy$ имеет вид

$$25 = 4(x-2)^2 + y^2 \qquad \text{или} \qquad 1 = \frac{(x-2)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{5^2}.$$

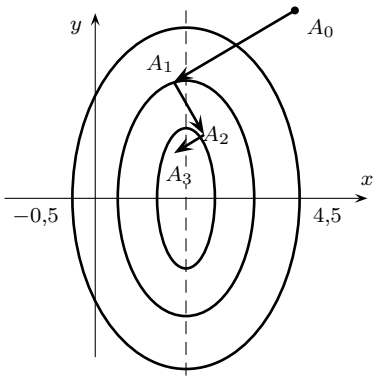



*Рис. 53.7.*

Изменяя значение $z$, получим семейство вложенных друг в друга эллипсов, у которых одна ось симметрии — прямая $x = 2$, а вторая — прямая $y = 0$ (см. рис. 53.7).

Во всех точках, принадлежащих одному и тому же эллипсу, функция $z$ принимает одно значение. Кривые, обладающие таким свойством (в нашем случае — эллипсы), называются линиями уровня.

Точка $A_0$ лежит на линии уровня, соответствующей значению $z = 86$. $\operatorname{grad} z\big|_{A_0}$ направлен перпендикулярно касательной к этой линии в точке $A_0$. Аналогично обстоит дело в точках $A_1$, $A_2$, .... Метод наискорейшего спуска по сути предоставляет возможность наиболее «выгодных» последовательных переходов от одних линий уровня к другим (см. рис. 53.7).

## § 53.4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Введем новое понятие — возможное направление.

**Определение 53.5.** *Пусть точка $\bar{x}$ принадлежит множеству допустимых планов, $\bar{x} \in U$. Направление $\bar{d}$ называется* возможным *в точке $\bar{x}$, если существует $\sigma > 0$ такое, что для любого $\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$, точка $\left(\bar{x} + \tau\bar{d}\right) \in U$. Множество всех возможных направлений в точке $\bar{x}$ обозначим $\mathcal{D}(\bar{x})$.*

Используя это понятие, попытаемся сформулировать необходимые условия, которым должна удовлетворять точка $\bar{x}^*$, являющаяся решением задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{Найти} & \max f(\bar{x}) \\ \text{при условиях} & g_i(\bar{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \tag{53.22}$$

Напомним, что $f$ и $g_i$ осуществляют отображения $\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$.

Интуитивно ясно, что если $\bar{x}^*$ является оптимальным решением задачи (53.22), то это значит, что ни по одному направлению $\bar{d} \in \mathcal{D}(\bar{x}^*)$ нельзя увеличить значение целевой функции, т. е.

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}) \cdot \bar{d} \leqslant 0 \quad \text{для всех } \bar{d} \in \mathcal{D}(\bar{x}^*). \tag{53.23}$$

Иными словами, в точке $\bar{x}^*$ производная целевой функции по направлению показывает, что целевая функция уменьшается по любому направлению $\bar{d} \in \mathcal{D}(\bar{x}^*)$. Можно показать, что это верно и для всех $\bar{d} \in \bar{\mathcal{D}}(\bar{x}^*)$, где $\bar{\mathcal{D}}(\bar{x}^*)$ — есть замыкание множества $\mathcal{D}(\bar{x}^*)$. Постараемся теперь выразить $\bar{\mathcal{D}}(\bar{x}^*)$ явно, используя ограничения задачи (53.22).

Для всякого допустимого плана $\bar{x}$ все ограничения можно разбить на две группы: те, для которых $g_i(\bar{x}) = 0$ (будем называть их активными и обозначать $A(\bar{x})$ — множество индексов активных ограничений), и те, для которых $g_i(\bar{x}) > 0$ (будем называть их неактивными, для них $i \notin A(\bar{x})$). Неактивные ограничения — те, для которых $g_i(\bar{x}) > 0$, никак не влияют на $\bar{\mathcal{D}}(\bar{x})$, так как из точки $\bar{x}$ в силу непрерывности функций $g_i(\bar{x})$ можно переместиться по любому направлению, не нарушая этих ограничений. Иное дело — активные ограничения.

Определим множество

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\bar{x}) = \left\{ \bar{d} / \left( \operatorname{grad} g_i(\bar{x}) \cdot \bar{d} \right) \geqslant 0, \ \forall i \in A(\bar{x}) \right\}. \tag{53.24}$$

Можно показать, что, за исключением некоторых экзотических случаев,

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{x}) = \widetilde{\mathcal{D}}(\bar{x}). \tag{53.25}$$

Условие (53.25) называется условием регулярности.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать необходимые условия, которым должен удовлетворять оптимальный план $\bar{x}^*$ задачи (53.22). Эти условия составляют известную теорему Куна–Таккера, которую мы не будем доказывать, а лишь дадим некоторые пояснения.

**ТЕОРЕМА 53.4 (Теорема Куна–Таккера)**
Пусть $\bar{x}^*$ — оптимальный план (решение) задачи (53.22). Будем предполагать, что выполняется условие регулярности. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Существуют множители $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, такие, что

$$\lambda_i g_i(\bar{x}^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{53.26}$$

2.

$$-\operatorname{grad} f(\bar{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(\bar{x}^*). \tag{53.27}$$

Небольшой комментарий к этой теореме.

Пусть, например, $\bar{x}^*$ находится внутри области допустимых планов, т. е. в точке $\bar{x}^*$ все ограничения неактивны. Тогда из (53.26) следует, что все $\lambda_i = 0$, а из (53.27) следует, что $\operatorname{grad} f(\bar{x}^*) = 0$, т. е. $\frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_i} = 0$ при всех $i$. Этот результат нам уже был известен (см. § 51.1).

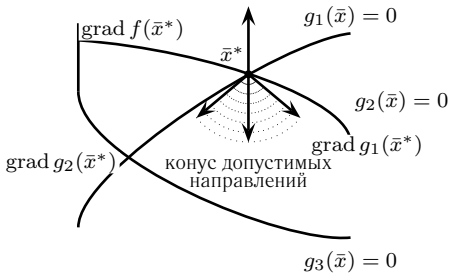



*Рис. 53.8.*

Пусть теперь $\bar{x}^*$ находится на границе множества допустимых планов и, например, ограничения $g_1(\bar{x}) \geqslant 0$ и $g_2(\bar{x}) \geqslant 0$ являются активными (остальные неактивны). Так как $g_1(\bar{x}^*) = 0$ и $g_2(\bar{x}^*) = 0$, то из (53.26) следует, что все $\lambda_i$, кроме $\lambda_1$ и $\lambda_2$, равны нулю. Утверждение (53.27) можно пояснить рисунком 53.8.

Из рисунка видно, что перемещение из оптимальной точки $\bar{x}^*$ в любом допустимом направлении ведет только к уменьшению функции.

## § 53.5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Многошаговые процессы принятия решений начали изучаться в начале 50-х годов. Для этого хотя и не очень широкого, но часто встречающегося класса задач далеко не всегда пригодны методы классического математического анализа, аппарат линейного программирования или вариационное исчисление. Специальные же методы, предназначенные для исследования таких процессов, требовали разработки специальной концепции. Такая концепция, получившая название динамического программирования, была создана американским математиком Р. Беллманом и его школой. Существенный вклад в развитие методов динамического программирования сделан советскими математиками.

Прежде чем дать общее описание сущности этой концепции, как обычно, начнем с очень простой задачи, которая, тем не менее, позволит познакомиться с характерными чертами динамического программирования.

Пусть требуется погрузить в самолет грузоподъемностью $W$ груз, состоящий из предметов $N$ различных типов таким образом, чтобы стоимость всего груза оказалась максимальной.

Введем следующие обозначения: $P_i$ — вес одного предмета $i$-го типа; $V_i$ — стоимость предмета $i$-го типа; $x_i$ — число предметов $i$-го типа, загружаемых в самолет. После чего поставим вопрос о подборе для самолета допустимого груза максимальной ценности. В результате приходим к следующей экстремальной задаче.

Найти

$$\max \sum_{i=1}^{N} x_i V_i \qquad \text{ценность груза}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{N} x_i P_i \leqslant W \tag{53.28}$$

(вес груза не превышает грузоподъемность самолета);

$$x_i = 0, 1, 2, \ldots \tag{53.29}$$

(предметы неделимы).

Если бы не второе условие, поставленная задача решалась бы уже хорошо знакомыми нам методами линейного программирования. Наличие же такого условия делает методы линейного программирования неприменимыми.

Для того чтобы лучше понять схему решения, опишем ее в терминах рассматриваемой задачи, т. е. на языке «загрузки самолета». Вначале загрузим самолет только предметами первого типа. Тогда максимальная стоимость груза (обозначим ее через $f_1(W)$) определится как

$$f_1(W) = \max_{x_1}\{x_1 V_1\}$$

при условиях

$$x_1 P_1 \leqslant W, \tag{53.28′}$$

$$x_1 = 0, 1, 2, \ldots. \tag{53.29′}$$

Так как $x_1 \leqslant W/P_1$, а для нахождения максимума нужно $x_1$ взять возможно большим, то сразу ясно, что $x_1 = [W/P_1]$ и $f_1(W) = [W/P_1]V_1$. График этой функции — ступенчатая линия (пунктирная линия на рис. 53.9)[1].

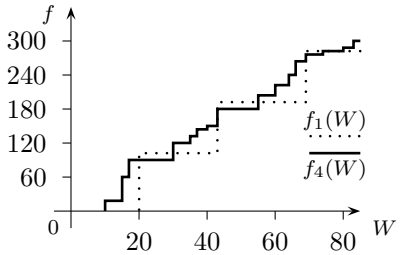



*Рис. 53.9.*

Итак, мы знаем, чему равна максимальная стоимость груза, если вся грузоподъемность $W$ расходуется на груз первого типа, т. е. для этого случая построена решающая функция $f_1(W)$, дающая максимальную стоимость используемой грузоподъемности $W$.

Рассмотрим теперь, что случится, если загрузить самолет предметами первого и второго типов. В этом случае максимальная стоимость загрузки обозначается через $f_2(W)$. Если предметов второго типа взято $x_2$, то самолет может взять предметов первого типа по весу не более чем $W - x_2P_2$. Из сказанного выше следует, что максимальная стоимость их равна $f_1(W - x_2P_2)$, а общая стоимость груза в этом варианте будет $x_2V_2 + f_1(W - x_2P_2)$. Остается определить $x_2$. Ясно, что величина $f_2(W)$ — максимальная стоимость груза, состоящего из предметов первого и второго типов, — определяется как максимум для всех возможных вариантов выбора $x_2$, т. е.

$$f_2(W) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant [\frac{W}{P_2}]} \{x_2V_2 + f_1(W - x_2P_2)\}.$$

Продолжая действовать аналогично, т. е. всякий раз к уже имеющимся добавляя предметы еще одного типа, через $N$ шагов придем к такому соотношению:

$$f_N(W) = \max_{0 \leqslant x_N \leqslant [\frac{W}{P_N}]} \{x_N V_N + f_{N-1}(W - x_N P_N)\}$$

(максимальная стоимость груза, состоящего из предметов $N$ типов) (стоимость взятых предметов $N$-типа) (максимальная стоимость груза, состоящего из предметов $(N-1)$ типов с общим весом не более $W - x_N P_N$)

Из полученных рекуррентных соотношений без большого труда могут быть последовательно найдены функции $f_1(W)$, $f_2(W)$, …, $f_N(W)$, а вместе с ними полное решение поставленной задачи.

[1] Выражение $[W/P_1]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $W/P_1$.

*ПРИМЕР 53.3.* Это решение поясним на числовом примере. Пусть $W = 83$, а веса и стоимости предметов равны соответственно $P_1 = 24$, $P_2 = 22$, $P_3 = 16$, $P_4 = 10$, $V_1 = 96$, $V_2 = 85$, $V_3 = 50$, $V_4 = 20$.

Так как функции $f_k(W)$ потребуются нам для различных значений $W$ (вычисляя $f_k(W)$, нужно знать $f_{k-1}(W - x_k P_k)$, будем вычислять их последовательно одну за другой при различных значениях $W$, фиксируя при построении $f_k(W)$ число предметов $k$-го типа, погружаемых в самолет. Результаты этих вычислений сведены в табл. 53.1–53.4. Они содержат значения $f_1$ (табл. 53.1), $f_2$ (табл. 53.2), $f_3$ (табл. 53.3) и $f_4$ (табл. 53.4). Содержательный смысл этих таблиц легко понять, если иметь в виду, что, например, первая строка табл. 53.1 означает: при грузоподъемности самолета 48–71 единиц груза он загружается двумя предметами первого типа, стоимость которых 192 денежные единицы.

*Таблица 53.1.*

| $W$ | $f_1(W)$ | $x_1$ | $W$ | $f_1(W)$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–23 | 0 | 0 | 48–71 | 192 | 2 |
| 24–47 | 96 | 1 | 72–87 | 288 | 3 |

*Таблица 53.2.*

| $W$ | $f_2(W)$ | $x_2$ | $W$ | $f_2(W)$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–21 | 0 | 0 | 48–69 | 192 | 0 |
| 22–23 | 85 | 1 | 70–71 | 277 | 1 |
| 24–25 | 96 | 0 | 72–87 | 288 | 0 |
| 46–47 | 181 | 1 | | | |

*Таблица 53.3.*

| $W$ | $f_3(W)$ | $x_3$ | $W$ | $f_3(W)$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–15 | 0 | 0 | 46–47 | 181 | 0 |
| 16–21 | 50 | 1 | 48–63 | 192 | 0 |
| 22–23 | 85 | 0 | 64–69 | 242 | 1 |
| 24–37 | 96 | 0 | 70–71 | 277 | 0 |
| 38–39 | 135 | 1 | 72–87 | 288 | 0 |
| 40–45 | 146 | 1 | | | |

На основании данных табл. 53.1–53.4 нетрудно найти оптимальный план загрузки самолета грузоподъемностью $W = 83$. Из табл. 53.4 находим, что максимальная стоимость груза $f_4(83)$ оказывается равной 308, а предметов четвертого типа следует погрузить всего один, так как $x_4 = 1$. Этот один предмет имеет вес 10, и, следовательно, предметов остальных типов можно загрузить лишь в пределах веса $83 - 10 = 73$. Из табл. 53.3 и 53.2 последовательно находим, что для $W = 73$ не следует грузить ни предметов третьего типа, ни предметов второго типа, т. е. $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$. Из табл. 53.1 видно, что при $W = 73$ следует взять три предмета первого типа, т. е. $x_1 = 3$. Окончательно наилучший план загрузки таков: следует взять 3 предмета первого типа и 1 предмет четвертого типа. Их суммарная стоимость составляет 308.

По поводу только что рассмотренного примера надо сделать два замечания. Во-первых, удалось не только решить поставленную задачу (найти план загрузки самолета грузоподъемностью $W = 83$), но и сделать гораздо больше. Из табл. 53.1–53.4 могут быть найдены оптимальные планы загрузки для самолетов любой грузоподъемности в пределах до 87, т. е. вместо одной задачи решен целый набор сходных между собой задач. Это характерная черта метода динамического программирования — расширив

*Таблица 53.4.*

| $W$ | $f_4(W)$ | $x_4$ | $W$ | $f_4(W)$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0–9 | 0 | 0 | 46–47 | 181 | 0 |
| 10–15 | 20 | 1 | 48–57 | 192 | 0 |
| 16–21 | 50 | 0 | 58–63 | 212 | 1 |
| 22–23 | 85 | 0 | 64–69 | 242 | 0 |
| 24–33 | 96 | 0 | 70–71 | 277 | 0 |
| 34–37 | 116 | 1 | 72–81 | 288 | 0 |
| 38–39 | 135 | 0 | 82–87 | 308 | 1 |
| 40–45 | 146 | 0 | | | |

задачу, мы облегчили ее решение! Отметим также, что, поскольку метод носит явно выраженный алгоритмический характер, он легко реализуется на ЭВМ.

Вместе с тем нельзя обойти молчанием одну принципиальную трудность, с которой приходится сталкиваться при решении задач динамического программирования. Дело в том, что для отыскания оптимального решения необходимо хранить в памяти машины обширную информацию обо всех принимаемых решениях вплоть до последнего шага (хранить таблицы типа 53.1–53.4). Если количество этих шагов велико, то необходимая информация может даже не поместиться в памяти машины. Для преодоления отмеченной трудности можно предложить такую идею — часть необходимой информации не запоминать, а перевычислять в тот момент, когда в ней возникает необходимость, иначе говоря, экономить машинную память ценой затраты дополнительного машинного времени.

Задача о загрузке самолета играла чисто иллюстративную роль, поясняя главные принципы динамического программирования. Вообще же имеется очень много практически важных задач, которые ставятся и решаются как задачи динамического программирования. Вот одна из них.

Для производства определенного продукта предполагается построить несколько предприятий. Считаются известными: суммарная производственная мощность этих предприятий, наибольшая и наименьшая производственные мощности каждого предприятия, известна также зависимость себестоимости продукции на каждом предприятии от его производственной мощности. Требуется так выбрать производственные мощности предприятий, чтобы суммарная себестоимость производства продукции была минимальной. В этой задаче в роли ресурса выступает суммарная производственная мощность, а в роли способов его использования — выбор тех или иных производственных мощностей для каждого предприятия.

Перейдем теперь к более общему описанию многошаговых процессов принятия решений. Возьмем задачу распределения ресурсов, состоящую в следующем: имеется некоторое количество ресурса $x$, которое можно использовать $N$ различными способами. Ресурсы и способы могут быть самой различной природы (например, в рассмотренной задаче ресурсом являлась грузоподъемность самолета, а способами использования были загрузки его различными типами предметов).

Если обозначить через $x_i$ количество ресурсов, используемое $i$-м способом, то каждому способу сопоставляется функция полезности $\varphi_i(x_i)$, выражающая доход от этого способа (в рассмотренной задаче эта функция была представлена величиной $V_i[x_i/P_i]$). Предполагается, что все доходы измеряются в одинаковых единицах и общий доход равен сумме доходов, полученных от использования каждого способа.

Теперь можно поставить задачу в математической форме.

Найти

$$\max\{\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\cdots+\varphi_N(x_N)\}$$

(общий доход от использования ресурсов всеми способами) при условиях

$$x_1 \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_N \geqslant 0 \tag{53.30}$$

(выделяемые количества ресурсов неотрицательны);

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = x \tag{53.31}$$

(общее количество ресурсов равно $x$).

Для этой общей задачи могут быть построены рекуррентные соотношения

$$f_1(x) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant x} \{\varphi_1(x_1)\};$$
$$f_k(x) = \max_{0 \leqslant x_k \leqslant x} \{\varphi_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = 2, 3, \ldots, N,$$

с помощью которых находится ее решение.

Здесь $f_k(x)$ обозначает максимальный доход, который можно получить от использования $k$ первыми способами количества ресурса $x$.

При выводе этих рекуррентных соотношений по сути использовался следующий очевидный принцип: оптимальная стратегия обладает тем свойством, что для любого первоначального состояния после некоторого начального этапа решения совокупность последующих решений должна составлять оптимальную стратегию по отношению к состоянию, к которому пришли в результате начального этапа решения. Этот принцип, получивший название *принципа оптимальности,* лежит в основе всей концепции динамического программирования. Именно благодаря ему удается при последующих переходах испытывать не все возможные варианты, а лишь оптимальные переходы. Рекуррентные соотношения позволяют заменить чрезвычайно трудоемкое вычисление максимума по $N$ переменным в исходной задаче решением $N$ задач, в каждой из которых максимум находится лишь по одной переменной. С их помощью могут быть решены задачи, которые иными путями решать не удается.

Все предшествующие рассуждения имели в виду задачу с одним ресурсом. Но та же идея анализа задачи, основанная на принципе оптимальности, может быть использована и в случаях, когда ресурсов несколько. Однако с увеличением размерности объем вычислений быстро растет и требования к памяти ЭВМ столь возрастают, что реально метод динамического программирования непосредственно может быть применен к задачам, включающим не больше 10 видов ресурсов. Это отличает его от линейного программирования, где преодолимы и много бóльшие размерности.

## § 53.6. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В рассматривавшихся до сих пор экстремальных задачах множество допустимых планов $U$ представляло собой некоторую область $n$-мерного пространства. Очень интересный класс задач возникает, если в качестве допустимых планов (решений) взять множество $U$ всех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $u$, удовлетворяющих условиям $u(a) = u_0$ и $u(b) = u_1$. Каждой функции $u \in U$ сопоставим значение функционала $\Phi(u) = \int_a^b f(u, u', x)\, dx$, где $f(u, u', x)$ — дважды дифференцируемая функция своих аргументов.

Изучением задач, связанных с нахождением экстремума этого и подобных функционалов, занимается вариационное исчисление.

**Определение 53.6.** *Та функция $\overline{u}$, которая доставляет экстремум функционалу, называется его экстремалью.*

Вариационное исчисление предлагает методы, позволяющие находить экстремумы функционалов и их экстремали. Возникло оно в 1696 году, когда И. Бернулли опубликовал свою знаменитую задачу о линии скорейшего спуска. Вот она.

Пусть в вертикальной плоскости имеются две точки $A$ и $B$, не лежащие на одной вертикали. Требуется найти такую кривую, соединяющую обе эти точки, чтобы материальная точка, двигаясь по ней под действием силы тяжести из точки $A$ в точку $B$, проделала этот путь за кратчайшее время (рис. 53.10).

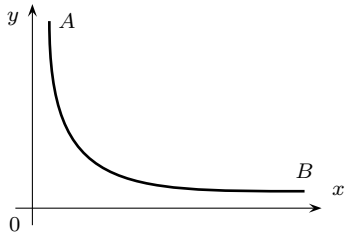


*Рис. 53.10.*

Искомая кривая называется брахистохроной. Ниже мы приведем решение этой задачи. Пока же отметим, что сразу же после публикации задача была успешно решена И. Ньютоном, Г. Лейбницем, Я. Бернулли. С нее начались работы Л. Эйлера, заложившего основы вариационного исчисления. Вариационное исчисление сыграло очень важную роль в развитии физики и механики. Оказалось, что многие законы природы формулируются в виде так называемых вариационных принципов. В вариационных принципах утверждается, что реально происходящие в природе процессы, явления зачастую «устроены» так, что именно они доставляют минимум тем или иным функционалам. Проиллюстрируем это утверждение на примере широко известного принципа наименьшего действия.

Пусть частица массы $m$ движется по оси $OX$ под действием потенциальной силы $F$. Напомним, что сила называется потенциальной, если существует такая функция $U(x)$, что $F = -U'_x$. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\ddot{x} = -U'_x. \tag{53.32}$$

Будем рассматривать движение от момента $t_1$ до момента $t_2$, предполагая, что значения $x(t)$ в эти моменты заданы:

$$x(t_1) = a \qquad \text{и} \qquad x(t_2) = b. \tag{53.33}$$

Оказывается, что единственное решение задачи (53.32) с условиями (53.33) доставляет минимум функционалу

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right) dt. \tag{53.34}$$

Можно сказать, что из всех возможных движений точки, происходящих от $t_1$ до $t_2$ из точки $a$ в точку $b$, Природа «выбирает» (если наделить Природу способностью Человека выбирать) то, которое доставляет минимум функционалу (53.34).

Разумеется, для того, чтобы объяснить, почему же в жизни реализуется именно то движение, которое доставляет минимум функционалу (53.34), нам не потребуется наделять Природу сверхъестественными свойствами. Несколько дальше этот факт будет объяснен с совершенно материалистических позиций.

Здесь же отметим, что подынтегральная функция в (53.34) обычно обозначается

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

и называется функцией Лагранжа. Интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt \tag{53.35}$$

носит название *действия*.

Вариационная задача, состоящая в отыскании минимума (53.35), называется *принципом наименьшего действия*.

Принцип наименьшего действия весьма универсален. Он выполняется для всякой замкнутой системы без диссипации энергии.

Одним из первых вариационных принципов был сформулирован принцип Ферма, утверждавший, что из всех возможных путей, соединяющих две точки, луч света «выбирает» тот, который он проходит за наименьшее время.

Перейдем теперь от общих вариационных принципов к более конкретным вопросам — попытаемся найти те необходимые условия, которым должна удовлетворять экстремаль $\overline{x}(t)$ следующей задачи:

Найти максимум функционала

$$W\big(x(t)\big) = \int_a^b u\left(x(t), x'(t), t\right)\,dt \tag{53.36}$$

при условиях

$$x(a) = x_0 \qquad \text{и} \qquad x(b) = x_1.$$

Пусть функция $\overline{x}(t)$ является экстремалью функционала (53.36). Если сравнить значение функционала на экстремали со значением его на любой из возможных траекторий, то из определения экстремали следует неравенство

$$W\big(\overline{x}(t)\big) - W\big(x(t)\big) \geqslant 0.$$

Выясним, как меняется значение функционала при переходе от экстремальной траектории к другой, достаточно близкой. Прежде всего заметим, что эта близкая траектория может быть получена путем малой «деформации» экстремали, как говорят, с помощью варьирования. Иными словами, всякую соседнюю с экстремалью траекторию можно описать функцией $\overline{x}(t) + \delta_x(t)$, где $\delta_x(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, принимающая малые значения, малы и значения $\big(\delta_x(t)\big)'$, а также выполняются граничные условия

$$\overline{x}(a) + \delta_x(a) = x_0 \quad \text{и} \quad \overline{x}(b) + \delta_x(b) = x_1.$$

Из этих условий сразу следует, что $\delta_x(a) = \delta_x(b) = 0$, т. е. при варьировании экстремали начальная и конечная точки остаются неподвижными.

Приращение функционала $\Delta W$ при переходе от экстремали к соседней траектории определяется равенством

$$\begin{aligned}
\Delta W &= W\big(\overline{x}(t) + \delta_x(t)\big) - W\big(\overline{x}(t)\big) = \\
&= \int_a^b u\big(\overline{x}(t) + \delta_x(t), \overline{x}'(t) + \delta_x(t)', t\big)\,dt - \int_a^b u\big(\overline{x}(t), \overline{x}'(t), t\big)\,dt = \\
&= \int_a^b \Big(u\big(\overline{x}(t) + \delta_x(t), \overline{x}'(t) + (\delta_x(t))', t\big) - u\big(\overline{x}(t), \overline{x}'(t), t\big)\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Пользуясь формулой Тейлора, разложим подынтегральное выражение, выделяя линейную часть разложения.

Имеем

$$\Delta W = \int_a^b \Big( u'_x(\overline{x}, \overline{x}', t)\delta_x(t) + u'_{x'}(\overline{x}, \overline{x}', t)\big(\delta_x(t)\big)' \Big)\, dt + o\big(\delta_x(t)\big), \tag{53.37}$$

где $o\big(\delta_x(t)\big)$ — члены высшего порядка малости по сравнению с $\delta_x(t)$ и $\big(\delta_x(t)\big)'$.

Так как $\Delta W \leqslant 0$, отсюда с необходимостью следует, что линейная часть разложения должна равняться нулю. В противном случае перемена знака у произвольной функции $\delta_x(t)$ привела бы к перемене знака величины $\Delta W$. Это объясняется тем, что знак правой части (53.37) определялся бы знаком первого слагаемого, большего по величине, чем все остальные. Поскольку перемены знака $\Delta W$ быть не может, справедливо равенство

$$\int_a^b \big( u'_x(\overline{x}, \overline{x}', t)\delta_x(t) + u'_{x'}(\overline{x}, \overline{x}', t)\big(\delta_x(t)\big)' \big)\, dt = 0. \tag{53.38}$$

Именно равенство (53.38) является необходимым условием, характеризующим экстремаль «в целом» — функция $\overline{x}(t)$ должна обязательно удовлетворять уравнению (53.38).

Покажем теперь, как преобразовать уравнение (53.38) для того, чтобы им удобнее было пользоваться.

Интегрируя по частям второе слагаемое в (53.38) и используя граничные условия $\delta_x(a) = 0$ и $\delta_x(b) = 0$, получаем

$$0 = \int_a^b u'_x\delta_x(t)\, dt + u'_{x'}\delta_x(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\big(u'_{x'}\big)\delta_x(t)\, dt = \int_a^b \left( u'_x - \frac{d}{dt}\,(u'_{x'}) \right) \delta_x(t)\, dt. \tag{53.39}$$

В силу произвольности функции $\delta_x(t)$ последний интеграл может равняться нулю только в том случае, когда выражение в круглых скобках равно нулю. (Предполагается, что выражение в круглых скобках и функция $\delta_x(t)$ непрерывны.)

Следовательно,

$$u'_x - \frac{d}{dt}\,(u'_{x'}) = 0. \tag{53.40}$$

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка носит название уравнения Эйлера. Решая это уравнение с заданными граничными условиями $x(a) = x_0$ и $x(b) = x_1$, можно найти экстремаль.

В качестве примера применения уравнения Эйлера решим задачу о брахистохроне (см. рис. 53.10). Обозначим уравнение неизвестной пока экстремали через $y = y(x)$. Очевидно, что эта функция должна удовлетворять условиям $y(a) = y_a$ и $y(b) = y_b$.

Найдем явное выражение функционала задачи, т. е. установим соответствие между любой кривой, соединяющей точки $(a, y_a)$ и $(b, y_b)$ и временем движения по этой кривой.

Из физики известна (закон сохранения энергии) связь между скоростью движения точки в любой момент и высотой, с которой она падает:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(y_a - y). \tag{53.41}$$

Отсюда
$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Как известно, $v = \frac{ds}{dt}$, где $ds$ — дифференциал дуги. Следовательно,
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y_a - y)}. \tag{53.42}$$

Из анализа (см. главу 21, 21.4.6) мы знаем, что $ds^2 = dx^2 + dy^2$ или
$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{53.43}$$

Подставляя выражение (53.43) в (53.42) и разделяя переменные, получаем
$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\sqrt{2g(y_a - y)}}. \tag{53.44}$$

Интегрируя выражение (53.44) (когда $t$ меняется от 0 до $T$, $x$ меняется от $a$ до $b$), приходим к такому выражению для функционала:
$$\int_0^T dt = T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\sqrt{2g(y_a - y)}}. \tag{53.45}$$

Таким образом, в качестве функции $u(y, y', x)$ выступает функция
$$u(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_a - y)}}. \tag{53.46}$$

Обратимся теперь к уравнению Эйлера (53.40). При вычислении производной $\frac{d}{dx}$ величина $y$ рассматривается как функция от $x$. Таким образом, это уравнение, следуя правилу дифференцирования сложной функции, можно переписать так:
$$u'_y(x, y, y') - u''_{xy'}(x, y, y') - u''_{yy'}(x, y, y')y' - u''_{y'y'}(x, y, y')y'' = 0. \tag{53.47}$$

Как мы уже знаем, решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Функция $u$ не зависит непосредственно от $x$, следовательно, в уравнении (53.47) второе слагаемое равно нулю. Если уравнение (53.47) умножить с обеих сторон на $y'$, то его можно переписать в виде
$$\left(u - u'_{y'}y'\right)' = 0. \tag{53.48}$$

Отсюда следует
$$u - u'_{y'} \cdot y' = C. \tag{53.49}$$

Подставим сюда выражение для функции $u$:
$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{2g(y_a - y)}} = C_1 \qquad \text{или} \tag{53.50}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1\sqrt{2g(y_a - y)}. \tag{53.51}$$

Введем новый параметр $t$ по формуле

$$y_a - y = \frac{1}{4gC_1^2}(1 - \cos t). \tag{53.52}$$

Выражение (53.51) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}. \tag{53.53}$$

Из последнего выражения можно найти $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Используя (53.52), находим $x$ как функцию от $t$:

$$x = \pm \frac{1}{4gC_1^2}(t - \sin t) + C_2. \tag{53.54}$$

Соотношения (53.52) и (53.54) представляют собой параметрические уравнения циклоиды. Константы $C_1$ и $C_2$ должны быть выбраны из условия прохождения циклоиды через точки с координатами $(a, y_a)$ и $(b, y_b)$. Задача решена.

*Замечание.* Выше мы говорили о том, что нет надобности наделять Природу сверхъестественными свойствами, чтобы объяснить, почему реально происходящее движение доставляет минимум функционалу (53.34). Действительно, легко убедиться (и мы настоятельно рекомендуем это сделать читателю!) в том, что уравнение Эйлера в этом случае совпадает с уравнением движения, полученным из второго закона Ньютона.

## Контрольные вопросы

1. Приведите общую постановку задачи оптимизации.
2. Приведите постановку нелинейной задачи математического программирования. В чем ее отличие от задачи линейного программирования и как может проявляться эффект нелинейности?
3. Какая функция называется выпуклой? вогнутой? Приведите геометрическую интерпретацию.
4. Докажите, что строго выпуклая функция на замкнутом выпуклом множестве имеет единственный минимум.
5. В чем состоит метод покоординатного спуска?
6. Что такое градиент функции нескольких переменных и как он связан с производной по направлению?
7. В чем состоит метод скорейшего спуска?
8. Что такое возможное направление?
9. В чем состоит теорема Куна–Таккера?
10. В чем состоит принцип оптимальности динамического программирования?
11. Приведите постановку задачи вариационного исчисления.
12. Приведите вывод уравнения Эйлера. Как используется это уравнение?

# LIV

# ЧТО ТАКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Имитационное моделирование как эффективный метод помощи лицам, принимающим решения (ЛПР), получило свое признание за несколько последних десятилетий. Сегодня оно превратилось в мощный аппарат исследования, пригодный для решения многих важных прикладных задач.

Почему велика необходимость в создании нового метода моделирования и чем объясняется особая популярность этого метода в таких разных областях науки, как экономика и экология, энергетика и охрана окружающей среды, а также многих, многих других? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к упоминавшейся во Введении схеме модельных исследований (см. рис. 54.1).

В последние годы во многих областях науки сложилась в некотором смысле парадоксальная ситуация. Желание исследовать и управлять все более сложными объектами и явлениями реальной действительности потребовало создания все более сложных моделей, учитывающих влияние большого числа различных факторов. Сложность моделей вступила в противоречие и со степенью изученности этих реальных объектов, что необходимо для параметризации моделей, и возможностью построения хороших алгоритмов для исследования этих моделей. Естественно, никакой пользы от этих моделей не было.

Идея нового метода состояла в том, чтобы реальному объекту сопоставить не слишком сложную его модель и *алгоритм функционирования этого реального объекта*. Тем самым акцент делается на феноменологическом описании объекта.

Схема, приведенная на рис. 54.1, видоизменится при этом следующим образом (см. рис. 54.2).

Нужно сказать, что в немалой степени успех имитационного моделирования был обусловлен и своевременным появлением широкодоступной мощной вычислительной техники.

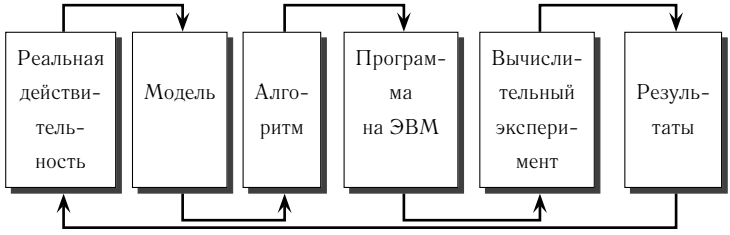



*Рис. 54.1.*
Схема модельных исследований

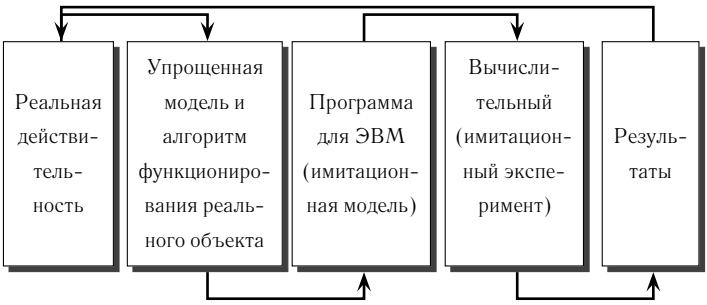



*Рис. 54.2.*
Схема имитационных исследований

Итак, имитационной моделью реального процесса (объекта, явления) мы будем называть программу для ЭВМ, реализующую упрощенную модель этого процесса вместе с алгоритмом, описывающим течение этого процесса. Когда компьютер выполняет эту программу, он «имитирует» течение реального процесса. Меняя различные параметры программы, можно имитировать течение реального процесса в различных условиях. Таким образом, возникает возможность осуществления следующего диалога:

**Вопрос** (его задает исследователь, ЛПР и т. п.): «Что произойдет с объектом (процессом, явлением), если . . . ?»;

**Ответ** (его дает ЭВМ, «проигрывая» заложенную в нее имитационную модель): «В заданных условиях с объектом (процессом, явлением) произойдет следующее . . . ».

Организованный таким образом диалог человека с компьютером позволяет проводить те или иные эксперименты (они называются имитационными, вычислительными или машинными), получая при этом информацию, которая может быть отнесена и к реальному процессу (объекту, явлению). Разумеется, полученная информация будет иметь тем большее отношение к реальности, чем более удачно построена имитационная модель.

Имитационное моделирование обобщило обширный опыт моделирования, накопленный на предшествующих этапах развития науки и явилось логическим продолжением существовавших ранее методов моделирования, учитывающим наличие мощной вычислительной техники, возросшую сложность стоящих перед наукой и практикой задач и др.

С возникновением современного этапа прикладных исследований, характеризующегося математизацией таких наук, как экономика, биология, социология и др., моделирование вступило в ту фазу своего развития, когда приходится иметь дело с явлениями не просто сложными, а комплексными; с явлениями, в основе которых лежат процессы разной природы, для анализа которых требуется использование разнообразных, но связанных между собой моделей. Оказалось, что имитационное моделирование, в отличие от многих других методов, может с успехом обслуживать исследования и самого современного этапа.

Термин «имитационное моделирование» возник как перевод английского выражения «simulation modelling». Если обратиться к русским эквивалентам этих слов, то станет ясно, что перевод был сделан не совсем удачно, так как в нем явно имеется тавтология. Однако, поскольку термин уже получил широкое распространение, менять его едва ли возможно и целесообразно. Важнее хорошо понимать, что за ним стоит. Когда говорят «имитационная модель», обычно понимают, что ей свойственна большая, чем в обычных математических моделях, близость к реальному объекту, возможность модели воспроизвести широкий спектр свойств объекта, использование в модели эмпирического материала, сохраняющаяся всегда возможность дальнейшего уточнения модели и др.

Говоря же об имитационном моделировании, в него включают как процесс создания модели, так и ее исследование (проведение вычислительных экспериментов) с помощью ЭВМ.

Р. Шеннон дает следующее определение: «... имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы».

Как видно из этого определения, имитационное моделирование не очень приспособлено для выяснения причин того или иного явления (оно не дает ответа на вопрос: «Почему?»). Его роль гораздо более прагматична — давать ответ на вопрос: «Что будет, если ... ?».

## § 54.1. КАК ПОСТРОИТЬ ИМИТАЦИОННУЮ МОДЕЛЬ. ПРОСТЕЙШИЙ ПРИМЕР

Процесс построения каждой имитационной модели во многом носит неформальный характер, алгоритмизировать его достаточно сложно. Для того чтобы сделать последующее изложение более ясным, рассмотрим сначала конкретный пример, на котором проследим ход рассуждений исследователя, создающего модель.

Представим себе, что для различных хозяйственных нужд требуется образовать определенный запас пресной воды и управлять этим запасом так, чтобы в течение пяти лет наилучшим образом удовлетворять возникающие потребности в пресной воде. Пусть таким запасом является вода в водохранилище.

Возникает вопрос, что нужно знать для того, чтобы правильно выбрать политику удовлетворения потребностей в пресной воде? Очевидно, для этого нужно знать, каким запасом воды в водохранилище мы располагаем в данный момент и как этот запас будет изменяться в рассматриваемый период, т. е. на протяжении 5 лет, под влиянием различных факторов.

Итак, нас будет интересовать величина $X^t$ — запас воды в водохранилище в момент $t$ и ее изменение с изменением $t$. Попытаемся выделить те факторы, которые оказывают влияние на величину запаса воды $X^t$ (для простоты изложения будем считать, что водохранилище расположено в зоне с положительными средними зимних температур и процессы формирования снежного покрова и снеготаяния можно не учитывать). К ним относятся прежде всего природные факторы:

1) приток по реке, на которой построено водохранилище (обозначим его через $PR^t$);
2) пополнение запаса воды за счет боковой приточности $PB^t$;
3) выпадение осадков на поверхность водохранилища $PO^t$;
4) испарение воды с поверхности водохранилища $RU^t$;
5) фильтрация воды в нижнем створе водохранилища $R\Phi^t$.

Помимо этого есть факторы антропогенного происхождения:

а) вода расходуется на нужды нескольких потребителей (для простоты положим, что их два — сельское хозяйство $Z^t_{\text{с/х}}$ и коммунальное водоснабжение $Z^t_{\text{к/в}}$);
б) часть воды пропускается через плотину дальше по реке $R\Pi^t$.

Предполагается, что запас воды в водохранилище не должен становиться меньше некоторой минимальной величины — $X_{\min}$, а также не должен превышать объема водохранилища $V$. Кроме того, будем считать, что распределение воды между

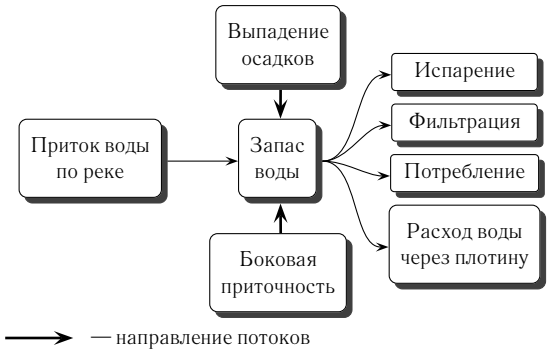



*Рис. 54.3.*

потребителями осуществляется пропорционально их запросам, т. е. пропорционально заданным величинам $S^t_{\text{с/х}}$ и $S^t_{\text{к/в}}$.

Схематично динамику запаса воды в водохранилище можно представить так (рис. 54.3):

Следующий вопрос, который необходимо решить, касается величин этих факторов, их изменений во времени.

Пусть известны ряды наблюдений среднедекадных величин стока (выше водохранилища), т. е. притока воды по реке, осадков в районе водохранилища и боковой приточности за предыдущие 20 лет. Результаты этих наблюдений сведены в таблицу 54.1.

Естественно предположить, что изменения этих величин ($PO^t$, $PR^t$ и $PB^t$ соответственно) в ближайшие 5 лет будут происходить примерно так же, как и в предшествующие 20 лет. Что значит «примерно так же»? Это не такой простой вопрос, как кажется на первый взгляд. Ответы на него могут быть разными.

1. Можно считать, что в каждый момент времени $t$ на протяжении всех 5 лет значения величин $PO^t$, $PR^t$ и $PB^t$ равны среднему значению этих величин за 20 лет в соответствующие моменты времени, т. е.

$$PR^t(T) = \overline{PR}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PR^t(\tau)$$

$$PB^t(T) = \overline{PB}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PB^t(\tau)$$

$$PO^t(T) = \overline{PO}^t = \frac{1}{20}\sum_{\tau=1}^{20} PO^t(\tau)$$

$$T = 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25.$$

Другими словами, можно считать величины $PR^t$, $PB^t$ и $PO^t$ детерминированными и законы их изменения в течение года определить по имеющимся данным за 20 лет.

2. Однако разумнее было бы предположить, что процессы формирования речного стока, боковой приточности и осадков носят случайный характер. Тогда для их исследования необходимо применить стохастические методы. В качестве иллюстрации упомянем два из них.

По известным рядам наблюдений построить функции распределения случайных величин $PR^t$, $PB^t$, $PO^t$, т. е. решить задачу проверки статистических гипотез, а

*Таблица 54.1.*

**I — сумма осадков за декаду (мм);**
**II — суммарный приток по реке за декаду ( км$^3$ );**
**III — суммарный объем боковой приточности за декаду ( км$^3$ ).**

| Год | ... 1982 | | | 1983 ... | | | ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| №№ декады | I | II | III | I | II | III | I | II |
| 1 | 12,4 | 1,3 | 0,30 | 8,3 | 1,2 | 0,20 | — | — |
| 2 | 0,3 | 1,1 | 0,10 | 6,0 | 1,0 | 0,20 | — | — |
| 3 | 0,8 | 1,5 | 0,50 | 3,3 | 1,0 | 0,20 | — | — |
| 4 | 10,5 | 1,2 | 0,20 | 12,6 | 1,3 | 0,30 | — | — |
| 5 | 2,8 | 1,0 | 0,09 | 5,7 | 1,0 | 0,20 | — | — |
| 6 | 8,6 | 1,6 | 0,60 | 8,0 | 1,1 | 0,20 | — | — |
| 7 | 5,4 | 1,6 | 0,60 | 0,9 | 1,0 | 0,20 | — | — |
| 8 | 6,0 | 1,3 | 0,30 | 5,3 | 1,1 | 0,30 | — | — |
| 9 | 10,6 | 1,5 | 0,50 | 5,1 | 1,0 | 0,20 | — | — |
| 10 | 0,0 | 0,8 | 0,10 | 8,1 | 1,1 | 0,50 | — | — |
| 11 | 7,2 | 1,8 | 0,60 | 10,7 | 1,5 | 0,20 | — | — |
| 12 | 2,4 | 1,7 | 0,60 | 4,3 | 0,9 | 0,10 | — | — |
| 13 | 28,5 | 1,6 | 0,50 | 12,9 | 1,4 | 0,50 | — | — |
| 14 | 0,9 | 1,3 | 0,10 | 13,0 | 1,6 | 0,50 | — | — |
| 15 | 0,3 | 1,0 | 0,10 | 0,9 | 0,9 | 0,10 | — | — |
| 16 | 0,4 | 1,0 | 0,10 | 0,5 | 0,8 | 0,09 | — | — |
| 17 | 29,6 | 1,9 | 0,60 | 15,7 | 1,2 | 0,10 | — | — |
| 18 | 13,9 | 0,8 | 0,09 | 30,4 | 2,1 | 0,80 | — | — |
| 19 | 37,0 | 2,7 | 0,80 | 35,9 | 2,4 | 0,80 | — | — |
| 20 | 1,8 | 0,6 | 0,08 | 21,0 | 2,3 | 0,70 | — | — |
| 21 | 4,0 | 0,7 | 0,08 | 1,2 | 0,7 | 0,08 | — | — |
| 22 | 1,8 | 0,7 | 0,08 | 4,9 | 0,3 | 0,05 | — | — |
| 23 | 10,3 | 0,6 | 0,05 | 12,8 | 0,8 | 0,06 | — | — |
| 24 | 51,2 | 2,9 | 0,80 | 10,5 | 1,5 | 0,20 | — | — |
| 25 | 12,7 | 1,1 | 0,20 | 53,3 | 2,9 | 0,90 | — | — |
| 26 | 27,5 | 1,5 | 0,30 | 27,3 | 2,7 | 0,90 | — | — |
| 27 | 23,2 | 1,8 | 0,50 | 17,7 | 2,3 | 0,70 | — | — |
| 28 | 8,4 | 1,9 | 0,50 | 11,9 | 1,8 | 0,60 | — | — |
| 29 | 2,7 | 1,9 | 0,50 | 3,5 | 0,5 | 0,05 | — | — |
| 30 | 18,4 | 2,1 | 0,70 | 5,4 | 0,6 | 0,06 | — | — |
| 31 | 3,8 | 1,1 | 0,30 | 7,1 | 0,9 | 0,09 | — | — |
| 32 | 10,7 | 2,0 | 0,80 | 19,9 | 1,3 | 0,10 | — | — |
| 33 | 28,9 | 2,2 | 0,80 | 14,5 | 2,1 | 0,80 | — | — |
| 34 | 10,9 | 1,9 | 0,70 | 20,3 | 2,5 | 0,90 | — | — |
| 35 | 10,0 | 1,8 | 0,70 | 8,3 | 2,0 | 0,80 | — | — |
| 36 | 6,9 | 0,9 | 0,10 | 3,1 | 1,3 | 0,20 | — | — |

затем по найденным законам распределения в течение 5 лет задавать случайным образом значения соответствующих величин (здесь решается задача генерирования случайных чисел). А можно действовать и иначе — по известным рядам наблюдений построить функции

$$PR^t(T) = f_R^t(T) + U_{Rt},$$
$$PB^t(T) = f_B^t(T) + U_{Bt},$$
$$PO^t(T) = f_O^t(T) + U_{Ot},$$

где $f_R^t(T)$, $f_B^t(T)$, $f_O^t(T)$ — детерминированные или систематические составляющие речного стока, боковой приточности и осадков, зависящие от времени $T$, а $U_{Rt}$, $U_{Bt}$,

$U_{Ot}$ — случайные составляющие, не зависящие от времени $T$. Здесь детерминированные составляющие — это нормы стоков, боковой приточности и климатическая норма осадков, которые можно считать либо средними за 20 лет значениями, либо определять, решая задачу минимизации функционала

$$F = \sum_{\tau=1}^{T} \left( f^t(\tau) - f_\Phi(\tau) \right)^2,$$

где $f_\Phi(\tau)$ — фактическая траектория изменений соответствующей величины за прошедший период времени.

Решение этой оптимизационной задачи $\overline{f}^t(\tau)$ будет задавать последовательность значений детерминированной составляющей в течение года.

В тех случаях, когда, к примеру, с течением времени меняется микроклимат в районе водохранилища (в силу каких-либо причин), целесообразно выявить тенденции в изменении детерминированной составляющей. Для этого делаются предположения о зависимости величин $f^t(T)$ от некоторых параметров и строятся регрессионные функции, которые затем используют для получения прогнозных значений $f^t(T)$.

В рассматриваемой задаче будем для простоты считать, что можно ограничиться постоянными значениями $f^t$.

Случайная составляющая $U_t$ представляет собой случайное отклонение от нормы (нерегулярности в погоде, например). Математическое ожидание $U_t$ равно нулю, а дисперсия постоянна и может быть вычислена по имеющимся данным за 20 лет. Для переменных $PR^t$, $PB^t$ и $PO^t$ можно предположить, что $U_t$ распределена равномерно. Прогнозные значения этой величины, таким образом, будут получаться генерированием равномерно распределенных случайных чисел на заданном отрезке.

Итак, было рассмотрено 2 варианта представления величин $PR^t$, $PB^t$, $PO^t$ и прогнозирования их значений на 5 лет — детерминированный и стохастический. Перейдем к рассмотрению процессов расходования воды. Один из них — испарение.

В отличие от величин $PR^t$, $PB^t$ и $PO^t$, испарение воды с поверхности водохранилища не измеряется и динамику этой величины нельзя определить описанными методами, поскольку отсутствуют ряды наблюдений. Однако известно, что величина испарения воды с зеркала водохранилища $RU^t$ зависит от некоторых факторов: температуры воды и воздуха, дефицита влажности воздуха, скорости ветра и т. п. А для этих факторов имеются 20-летние ряды наблюдений. Очевидно, что для определения величины $RU^t$ достаточно выявить эту зависимость. Для простоты, памятуя о том, что рассматриваемая задача играет чисто иллюстративную роль, выделим один, наиболее существенный фактор — дефицит влажности воздуха $D^t$ и будем считать, что величина $RU^t$ прямо пропорциональна дефициту влажности воздуха, т. е.

$$RU^t = \alpha D^t, \tag{54.1}$$

где $\alpha$ — эмпирический коэффициент пропорциональности. Величину $D^t$, так же как и осадки, можно моделировать с помощью описанных выше методов. Используя соотношение (54.1), по найденным величинам $D^t$ можно вычислить величины $RU^t$.

Величина объема воды, профильтровавшейся в нижнем створе водохранилища в момент времени $t$ — $R\Phi^t$, также не измеряется. Предположим, что величина $R\Phi^t$ пропорциональна объему воды в водохранилище и зависит от типа грунтов, его подстилающих, т. е.

$$R\Phi^t = kX^t,$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности, соответствующий определенному типу грунта.

Расход через плотину $R\Pi^t$ — величина регулируемая, т. е. она задается в каждый момент времени, в зависимости от запаса воды в водохранилище. От нее можно потребовать, чтобы она удовлетворяла условиям

$$R\Pi^t = \begin{cases} 0, & \text{для } X^t \leqslant V, \\ X^t - V, & \text{для } X^t > V. \end{cases}$$

Величины потребления $Z^t_{\text{с/х}}$ и $Z^t_{\text{к/в}}$ также являются управляемыми величинами и формируются в зависимости от объема воды в водохранилище и запросов на воду со стороны потребителей — $S^t_{\text{с/х}}$, $S^t_{\text{к/в}}$.

Итак, рассмотрены все процессы формирования запаса воды в водохранилище, причем известно, что сохраняется баланс, т. е. запас в каждый момент времени увеличивается на величину «прихода» и уменьшается на величину «расхода». Запишем этот закон сохранения массы воды

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Pi^t - Y^t,$$

где

$$\Pi^t = PR^t + PB^t + PO^t,$$
$$Y^t = RU^t + R\Phi^t + R\Pi^t + Z^t,$$
$$Z^t = Z^t_{\text{с/х}} + X^t_{\text{к/в}}.$$

В итоге получено уравнение изменения запаса воды в водохранилище в зависимости от природных условий и стратегии распределения этого запаса между потребителями. Это уравнение называют уравнением водного баланса. Таким образом, задавая условия пополнения и расходования запаса воды и решая уравнение водного баланса, можно получить ответ на поставленную задачу: чему равен запас воды в водохранилище в каждый момент времени $t$. Другими словами, построена имитационная модель, позволяющая прогнозировать величину запаса воды в водохранилище, которая схематично выглядит следующим образом (рис. 54.4).

Итак, мы рассмотрели на примере водохранилища, как можно построить имитационную модель. Теперь читателю будет более понятны некоторые общие моменты построения имитационных моделей. В дальнейшем в случае необходимости в качестве иллюстрации будем использовать построенную модель.

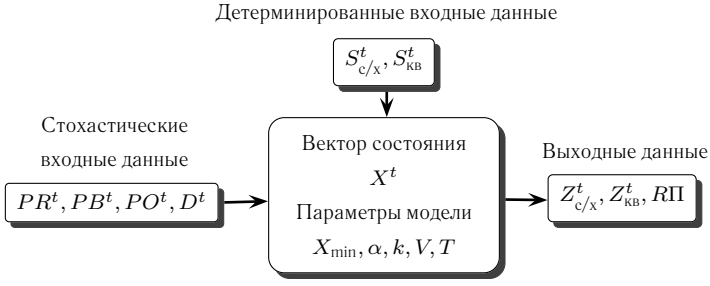



*Рис. 54.4.*

## § 54.2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Процесс имитационного моделирования (создание модели и алгоритма функционирования реального объекта, создание программы и проведение вычислительных экспериментов) является итеративным. При этом системный анализ чередуется и сочетается с составлением модели и алгоритма, вычислительными экспериментами, корректировкой модели и т. п.

Имитационное моделирование состоит из следующих взаимозависимых и, зачастую, пересекающихся во времени этапов:

1. Постановка проблемы, формулировка цели моделирования;
2. Системный анализ моделируемого объекта; построение концептуальной модели;
3. Составление модели и алгоритма функционирования реального объекта; при необходимости — структуризация модели;
4. Программная реализация и вычислительные эксперименты;
5. Анализ результатов экспериментов и коррекция модели, алгоритма, программы;
6. Проведение имитационных экспериментов в целях решения поставленной проблемы.

Охарактеризуем каждый из них.

1. Имитационное моделирование, как и всякое другое, должно начинаться с постановки проблемы, с ясного и четкого понимания целей моделирования. Желательно перечислить те вопросы, ответы на которые должны быть получены в ходе вычислительных экспериментов.

Необходимость построения имитационной модели, как правило, возникает в процессе прикладных исследований конкретного объекта. Поэтому одной из важнейших особенностей этого этапа моделирования является непременное участие в разработках человека (или группы людей), который будет использовать будущую модель для решения поставленной проблемы, т. е. ЛПР. Нужно отметить, что в реальной жизни цели редко бывают четко очерченными. Это существенно затрудняет точную постановку проблемы. Поэтому упомянутый выше список вопросов следует обязательно согласовывать с ЛПР. С ним же следует решать вопрос о масштабах задачи: о ее объеме, границах в пространстве, продолжительности моделируемого отрезка времени (долгосрочные или краткосрочные эффекты интересуют ЛПР) и т. д.

Необходимо также уточнить, для какого объекта исследования нужно ответить на сформулированные вопросы: то ли они относятся к системе в целом, то ли к отдельным ее частям. Лишь после этого целесообразно переходить к последующим этапам.

2. С учетом целей моделирования следует выявить существенные особенности изучаемого объекта, осуществить отбор всевозможных необходимых сведений о нем и построить так называемую концептуальную модель объекта. Эта модель представляет собой неформализованное описание объекта (словесное описание, представление в виде схем, диаграмм и т. п.), являющееся основой для создания имитационной модели. Чем четче построена концептуальная модель, тем более вероятно создание хорошей имитационной модели.

Построение концептуальной модели предполагает:

а) выявление основных процессов, которые должны быть учтены при моделировании;
б) выявление тех основных характеристик объекта, которые необходимо иметь для решения исходной проблемы;
в) определение множества переменных и параметров, которые влияют на динамику этих характеристик;

г) определение множества входных и выходных данных модели;
д) установление границ и законов взаимодействия объекта с окружающей средой (в частности, определение законов случайных воздействий на объект);
е) разработку причинно-следственных связей, временных отношений и гипотез, согласно которым осуществляется взаимоувязка всех перечисленных компонент в единую систему, имитационную модель.

Так, возвращаясь к модели водохранилища, можно сказать, что основной характеристикой здесь является величина запаса воды в каждый момент времени $t$. Границей объекта является естественная граница водохранилища. Взаимодействие с внешней средой характеризуется величинами притока воды по реке, боковой приточностью, осадками, испарением, фильтрацией, водопотреблением и расходом воды через плотину. В зависимости от желания исследователя эти взаимодействия могут учитываться либо как стохастические, либо как детерминированные. В последнем случае используются усредненные характеристики процессов. В качестве входных выступают метеорологические и гидрологические данные, а также величины потребностей в воде. В качестве выходных — величины объемов воды, предназначенной для потребления. Взаимосвязь элементов модели описывается схемами, приведенными на рис. 54.3 и рис. 54.4.

3. Далее осуществляется переход от качественных зависимостей концептуальной модели к точному алгоритмическому описанию. Исходным пунктом при этом является задание вектора состояния модели, компоненты которого — это те характеристики изучаемого объекта, которые выделены при построении концептуальной модели как базовые, несущие в себе необходимую информацию для решения поставленной проблемы —

$$X^t = \left(X_1^t, X_2^t, \ldots, X_n^t\right).$$

Часто бывает полезным сразу выделять «управляемые компоненты» вектора состояния. В общем случае каждая компонента вектора $X^t$ есть функция времени, зависящая также от множества значений параметра $\{A\}$, некоторого подмножества компонент вектора состояния $\widetilde{X}^t \subset X^t$, множества внешних факторов $\eta^t$ и управляющих воздействий $U^t$, т. е.

$$X^t = X^t\left(\widetilde{X}^t, \eta^t, A, U^t, t\right).$$

В модели водохранилища вектор состояния содержит одну компоненту — запас воды в водохранилище в момент времени $t$. Включение других характеристик в вектор состояния излишне, поскольку возможность следить за динамикой одной этой переменной уже достаточна для решения поставленной в самом начале задачи.

В зависимости от цели моделирования, от проблемы, которую необходимо разрешить с помощью модели, вводится так называемое системное время, моделирующее ход времени в реальной системе. Различают два типа шкал модельного времени: равномерная и событийная. Для первого типа характерно введение некоторого постоянного шага $\Delta t$ изменения времени. В этом случае вектор состояния модели рассматривается в моменты $t + k\Delta t$, где $k$ — целое положительное число (разумеется, величина $t + k\Delta t$ не должна превосходить $T$ — величины моделируемого промежутка времени, в случае водохранилища $T = 5$ лет).

Можно сказать, что в этом случае каждому моменту реального времени, $t_i^{\text{р}}$ ставится в соответствие момент модельного времени $t_i^{\text{м}}$, причем

$$t_1^{\text{м}} - t_2^{\text{м}} = A\left(t_1^{\text{р}} - t_2^{\text{р}}\right),$$

где $A$ — масштабный коэффициент пропорциональности.

Если моделируемый объект изменяется лишь при наступлении некоторого события, а в остальные моменты времени остается без изменений, пользоваться равномерной шкалой неудобно, поскольку вектор состояния на отрезке времени между двумя событиями остается постоянным. В этом случае отсчет времени в модели ведется «по событиям», т. е. каждый последующий момент времени в модели наступает только тогда, когда в ней моделируется наступление некоторого события.

Поясним различие между двумя способами моделирования времени простым примером — моделью процесса окрашивания раствора. В случае, если краситель поступает в раствор непрерывно, интенсивность окраски раствора изменяется постоянно и для того, чтобы проследить процесс в динамике, следует ввести равномерную шкалу модельного времени. Напротив, если краситель попадает в раствор отдельными порциями в случайные моменты времени, интенсивность окраски может изменяться только при поступлении очередной порции (система предполагается безынерционной) и нет смысла рассматривать систему в промежуточные моменты времени, т. е. более удобной здесь оказывается событийная шкала времени.

Разумеется, нет и не может быть четких предписаний относительно выбора той или иной временной шкалы — всякий раз этот вопрос должен специально решаться. Тем не менее в практике имитационного моделирования существуют типичные случаи, для которых удобный способ моделирования реального времени ясен. Так, например, для систем массового обслуживания традиционным стал событийный подход, тогда как в экологических системах изменение времени считается равномерным. При моделировании динамики запаса воды в водохранилище также удобно принять равномерную шкалу времени, причем интервал времени можно выбирать различным: 1 сутки, 5 суток, 10 суток, месяц, год и т. д. В конечном счете величина временного шага определяется целью исследования и объемом доступной информации.

После, а иногда и параллельно с заданием вектора состояния системы и выбором временного шага производится декомпозиция модели и выявление ее блочной конструкции (если в этом есть необходимость). С этой целью множество переменных модели делится на непересекающиеся подмножества, в каждое из которых входит группа «однородных» переменных. Понятие «однородности», как правило, определяется самим исследователем в зависимости от цели моделирования, количества и качества исходных данных. Чаще всего однородными, входящими в один блок, считаются переменные, описывающие отдельный процесс, какую-либо подсистему или элемент исходного объекта, группу факторов, имеющих одну и ту же природу (например, климатообусловленные или антропогенные факторы и т. п.). В результате декомпозиции модель представляется в виде комплекса взаимосвязанных подмоделей — блоков, которые взаимодействуют по определенным законам и в итоге позволяют провести имитационное исследование объекта.

Блочный принцип построения модели имеет целый ряд преимуществ, особенно ощутимых при создании сложных имитационных моделей. Прежде всего, если модель достаточно сложна, требует значительного объема памяти и машинного времени, то возможности использования такой модели для имитационного эксперимента оказываются весьма ограниченными. Единственным выходом в этом случае оказывается декомпозиция модели с тем, чтобы программы, реализующие отдельные блоки, работали последовательно и обменивались информацией по тем или иным правилам.

Однако блочная структура сложных имитационных моделей обусловлена не только возможностями вычислительной техники. Создание их требует регулярных контактов разработчика со специалистами по смежным специальностям, имеющим отношение к

данной проблеме. Блочная структура позволяет полнее использовать знания специалистов в узких областях, не затрудняя взаимопонимания частными проблемами, не имеющими отношения к данному блоку. Кроме того, именно блочный принцип дает возможность при построении имитационной модели устанавливать необходимые пропорции между подробностью моделирования и обеспеченностью информацией. Дело в том, что при исследовании объекта часто приходится сталкиваться с тем, что отдельные аспекты оказываются менее изученными по сравнению с остальными. Им соответствует меньшее количество информации, лучшее качество данных и т. д. В этом случае не имеет смысла особенно скрупулезно разрабатывать «благополучный» блок, т. е. тот, в отношении которого мы располагаем обширными и точными знаниями. Ведь при работе объединенной модели точность и подробность результатов такого блока нивелируется за счет грубости расчетов в «неблагополучном» блоке. Поэтому всегда следует соблюдать принцип равноточности блоков в имитационной модели.

Поскольку блоки описывают различные подсистемы, процессы, факторы, системное время для каждого из них может быть различным. Оно определяется, исходя из внутренних потребностей блока. Если, к примеру, в блоке описываются «быстрые» изменения, то время исчисляется мелкими единицами измерения: секундами, часами, сутками (скажем, при моделировании процесса фильтрации воды в почву после дождя, процесса накопления автомобилей перед светофором и т. п.); если изменения объекта во времени происходят достаточно медленно (рост дерева, старение оборудования, глобальные изменения климата земли и т. п.), то время исчисляется месяцами, годами, десятилетиями и даже тысячелетиями. Однако необходимо позаботиться о том, чтобы в итоге все результаты по отдельным блокам были сведены к единому системному времени, принятому для модели в целом.

Возвращаясь к примеру водохранилища, отметим, что она не настолько сложна, чтобы возникла необходимость ее декомпозиции. Тем не менее удобно было бы отдельно моделировать внешние факторы, определяющие интенсивность потоков, формирующих запас воды, поскольку моделирование природных факторов — это достаточно трудоемкая и сложная задача, которая сама по себе представляет интерес и может рассматриваться вне зависимости от проблемы управления запасами воды в водохранилище.

После завершения декомпозиции модели следует приступить к разработке отдельных ее блоков. Для каждого из них: а) уточняются и конкретизируются те гипотезы, которые непосредственно относятся к процессам, аспектам, элементам, «принадлежащим» данному блоку; б) определяется соответствующее подмножество входных и выходных данных, причем эти данные могут принадлежать как ко множеству «Входов» и «Выходов» общей модели, так и ко множеству локальных (или внутренних) входных и выходных данных других блоков; в) формируется множество параметров; г) формализуются основные законы взаимодействия элементов блока. При этом происходит переход от качественных зависимостей концептуальной модели к точным количественным зависимостям и логическим схемам взаимодействия элементов внутри блока.

Что касается последнего, то в практике имитационного моделирования далеко не все связи концептуальной модели удается отразить в виде зависимостей теоретического характера. Часто приходится вводить эмпирические зависимости, полученные на основе данных натурных наблюдений, в результате обобщения опыта моделирования подобных объектов и т. п. Неоценимую роль на этапе формализации играет экспертная оценка полученных эмпирических зависимостей, коэффициентов и т. п.

Существенное влияние на качество разработки отдельных блоков оказывает выбор различных математических средств моделирования — аппарата дифференциальных уравнений, статистического моделирования, методов теории оптимального управления, алгоритмизации логических конструкций и т. п. Важным также является то, в каком сочетании эти средства используются для решения исходной проблемы, как согласуется выбор методов с возможностями ЭВМ. Поэтому на этапе разработки блоков необходимо участие не только математиков и экспертов, но и системного программиста, знакомого с характеристиками вычислительной техники, математическим и техническим обеспечением процесса счета. Это позволит оценить возможности программы, реализующей на ЭВМ создаваемую модель, определить пути возможно нежелательных, но часто так необходимых упрощений.

4. Заключительным в построении модели является объединение блоков в имитационную модель на базе стандартного или специально созданного математического обеспечения. Здесь особую роль играет выбор языка программирования: либо это будут универсальные языки типа Си, Паскаль, Фортран и т. п., либо специализированные языки имитационного моделирования типа ДИНАМО, GPSS, Симула и т. д. Проблема носит принципиальный характер, так как специализированные языки удобны для программирования, отличаются концептуальной направленностью, что позволяет при составлении несложных имитационных моделей опустить этап построения формальной модели. Однако такие языки требуют специальных трансляторов, которые не всегда входят в стандартное математическое обеспечение ЭВМ. В свою очередь, использование универсальных языков, как правило, сильно увеличивает объем программ, делает их громоздкими и «трудночитаемыми» для «пользователя», хотя и допускает проведение имитационных экспериментов практически на любых ЭВМ, что расширяет область практического применения модели.

Составлению машинных программ, реализующих всю модель в целом, предшествуют испытания и отработка различных схем взаимодействия блоков. Здесь удобно бывает рассматривать имитационную модель как коллектив автоматов с памятью и без нее, детерминированных или стохастических, а работу модели — как изучение с помощью ЭВМ коллективного поведения автоматов в случайной или детерминированной среде.

На этом заканчиваются первые четыре этапа построения имитационной модели. Их можно представить себе в виде схемы, приведенной на рис. 54.5.

5. Маловероятно, что построенная имитационная модель сразу же окажется удачной. Скорее всего, в ней обнаружатся ошибки. Для отыскания этих ошибок и используются вычислительные эксперименты как с отдельными блоками, так и с системой в целом. Причем желательно проведение таких экспериментов, результат которых по тем или иным причинам может быть предсказан. Тогда отклонение результата от прогнозируемого служит индикатором наличия ошибок либо в модели, либо в алгоритме, либо в программе, либо сразу в нескольких местах.

Устранение ошибок продолжается до тех пор, пока результаты экспериментов придут в соответствие с прогнозируемыми. После этого можно считать, что имитационная модель создана.

Однако имитационное моделирование состоит не только в построении самой имитационной модели, т. е. инструмента для проведения научных исследований, но и в применении этого инструмента. Необходимо уметь использовать эту модель в исследовательских целях — тех целях, для которых она создавалась. Об этом мы будем говорить дальше.

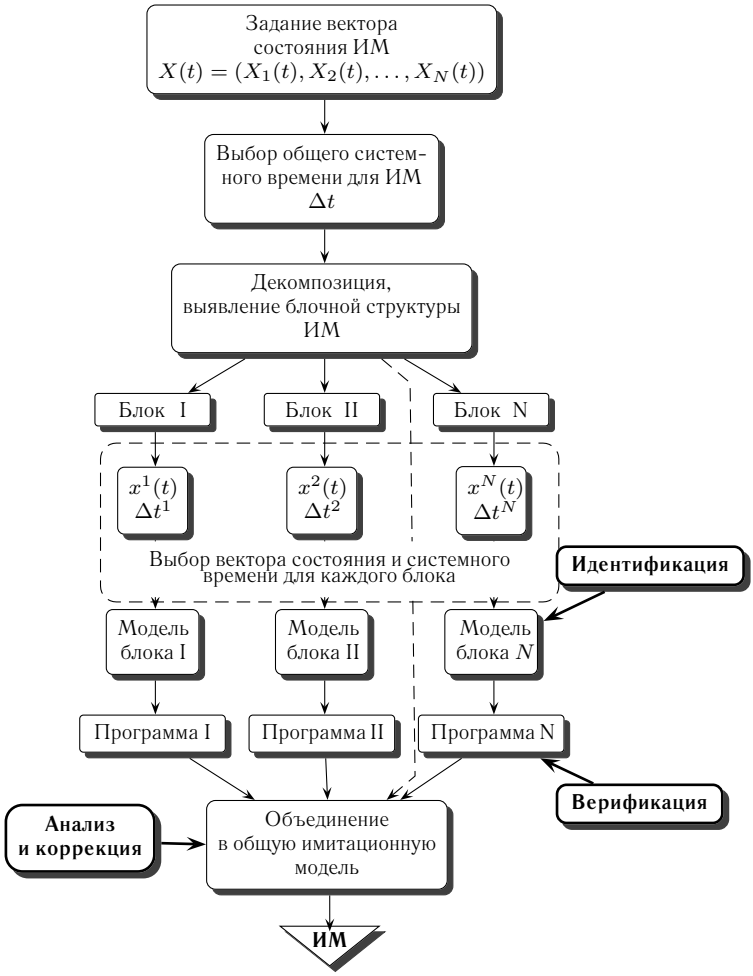



*Рис. 54.5.*

## § 54.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Итак, имитационная модель построена. Однако, прежде чем ее использовать, необходимо решить следующие задачи:

1. Выбрать числовые значения неопределенных пока числовых параметров (идентификация);
2. Убедиться, что при этих значениях параметров модель хорошо соответствует моделируемому объекту, адекватна ему (верификация, проверка адекватности).

Приведем наиболее распространенную постановку задачи идентификации. Пусть $\bar{y} = \bar{y}(t, \bar{\alpha})$ — вектор выходных характеристик имитационной модели, зависящей от набора параметров $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$. Предположим, что имеется ряд известных векторов $\bar{y}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, представляющих собой результаты натурных наблюдений за моделируемым объектом. Разобьем промежуток $[t_1, t_2]$ на две части: $[t_1, \tau]$ — обучающий промежуток и $[\tau, t_2]$ — экзаменующий промежуток.

Задача идентификации состоит в том, чтобы найти такой набор параметров $\bar{\alpha}$, который доставляет минимум функционалу

$$\sum_{t=t_1}^{\tau} \left(\bar{y}(t) - \bar{y}(t, \bar{\alpha})\right)^2.$$

Для решения этой задачи могут быть использованы известные численные методы нахождения экстремума функции многих переменных.

Обозначим найденный в результате решения этой задачи наилучший набор параметров через $\bar{\alpha}^*$. Используя в модели именно эти параметры, получим выходные характеристики в виде $\bar{y} = \bar{y}(t, \bar{\alpha}^*)$. На этом решение задачи идентификации закончено.

Перейдем к задаче верификации, которая, однако, не столь формализована. Прежде всего убедимся, что на экзаменующем промежутке времени $[\tau, t_2]$ расчетная траектория $\bar{y} = \bar{y}(t, \bar{\alpha}^*)$ близка к фактической.

Сравнение этих двух траекторий позволяет судить об адекватности модели. Существуют специальные методы оценки близости траекторий. Один из них состоит в вычислении коэффициента несовпадения

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{y}(t) - \bar{y}^*(t)\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\bar{y}^2(t)} + \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{y}^*\right)^2(t)}}, \quad 0 \leqslant U \leqslant 1.$$

Чем ближе $U$ к нулю, тем ближе модельная траектория к фактической. В случае, когда $U$ равен единице, модель не является адекватной и требует либо перестройки структуры, замены или уточнения гипотез, либо идентификации по более полным и достоверным данным.

Однако даже если близость траекторий имеет место, еще нет гарантии того, что модель адекватна реальному объекту. Естественно потребовать, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Машинная реализация соответствует формальной модели.
2. «Динамика» модели соответствует «динамике» реального объекта.
3. Результаты моделирования правильно интерпретируются.

Проверка адекватности в этом смысле осуществляется на основе экспертного анализа и статистических методов.

Под соответствием машинной и формальной моделей понимается, во-первых, идентичность их алгоритмических структур (сохраняется ли логика построения модели при машинной реализации?) и, во-вторых, совпадение областей варьирования компонент вектора состояния формальной и машинной моделей. Второе требование означает, что численные методы, которые используются для реализации модели на ЭВМ, не должны давать такую погрешность, которая выводит некоторую компоненту из области допустимых значений. Например, если шаг интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с положительно-определенными переменными выбран слишком большим, то можно получить отрицательные значения искомых переменных, что не соответствует их смыслу.

Соответствие имитируемой и реальной динамики частично проверяется уже на стадии верификации модели. Однако известно, что практически любую имитационную модель

можно отладить до нужной степени совпадения моделируемой и фактической траекторий. На рис. 54.6 приведен пример прогнозирования по модели, которая хорошо аппроксимирует фактическую траекторию на ретроспективном периоде, но дает абсолютно неверный прогноз, т. е. неадекватно отражает поведение реального объекта.

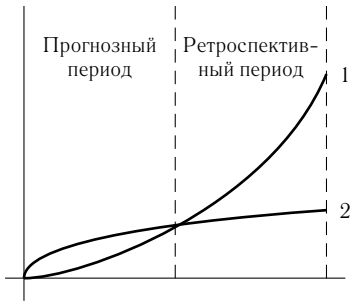



*Рис. 54.6.*
1 — Фактическая траектория;
2 — Расчетная траектория

Следовательно, для того чтобы оценить адекватность модели, необходимо качественно исследовать ее динамические свойства путем проведения серии тестовых расчетов.

Можно выделить два основных типа тестов.

К первому относятся тесты, в которых задаются правдоподобные значения входов и управляющих воздействий. Если в этом случае расчеты по модели не противоречат известным законам поведения реального объекта (не противоречат нашим представлениям об объекте), то это говорит в пользу адекватности модели. В противном случае необходимо найти причины несогласованности и перестроить модель.

Второй тип тестов основан на использовании критических ситуаций, т. е. данных, которые не характерны для исследуемого объекта, но тем не менее могут иметь место. Эти тесты особенно важны для сложных моделей, предназначенных для долгосрочного прогнозирования, поскольку чем лучше модель описывает поведение объекта в критических условиях, тем более можно быть уверенным в правильности расчетов для нормальных условий.

Адекватность модели характеризуется также ее чувствительностью по отношению к изменениям параметров и начальных значений вектора состояния. Если результаты исследований с помощью модели существенно изменяются при малых возмущениях параметров и незначительных отклонениях от начальных данных, другими словами, если модель не является устойчивой, то такую модель нельзя считать адекватной (при условии, конечно, что исследуемый объект обладает устойчивостью в этом смысле). Требование устойчивости тем более важно, чем менее точно могут быть определены параметры модели.

Анализируя адекватность модели, следует помнить о цели исследования, о проблеме, для решения которой разрабатывается модель. Дело в том, что конкретная модель может вполне отвечать одной цели и быть совершенно непригодной для решения других задач. Здесь важен вопрос об области применимости модели. Модель пригодна только тогда, когда она дает возможность реализовать цели исследования.

Основными методами оценки адекватности и пригодности модели являются, безусловно, неформальные методы (метод экспертного оценивания, соблюдение принципа «здравого смысла» и т. п.). Однако в некоторых случаях удается формализовать эту процедуру. В частности, весьма полезными оказываются различные статистические методы, спектральный анализ и др.

Итак, модель идентифицирована, верифицирована, проверена на адекватность. Если все этапы выполнены успешно, то она является готовым инструментом исследования поставленной проблемы и можно переходить к главному этапу имитационного моделирования — проведению имитационного эксперимента, которое сопровождается, с одной стороны, планированием эксперимента, а с другой — обработкой результатов этого эксперимента.

Планирование имитационных экспериментов представляет собой отдельную и довольно сложную задачу, о которой речь пойдет дальше.

Эксперименты делятся по цели исследования на два основных типа: дескриптные и оптимизационные. Эксперименты первого типа проводятся в целях исследования объекта. Другой тип включает эксперименты, направленные на выявление наилучших стратегий управления исходным объектом.

Результаты имитационных экспериментов должны быть обработаны специальными методами и представлены пользователю в удобном для него виде.

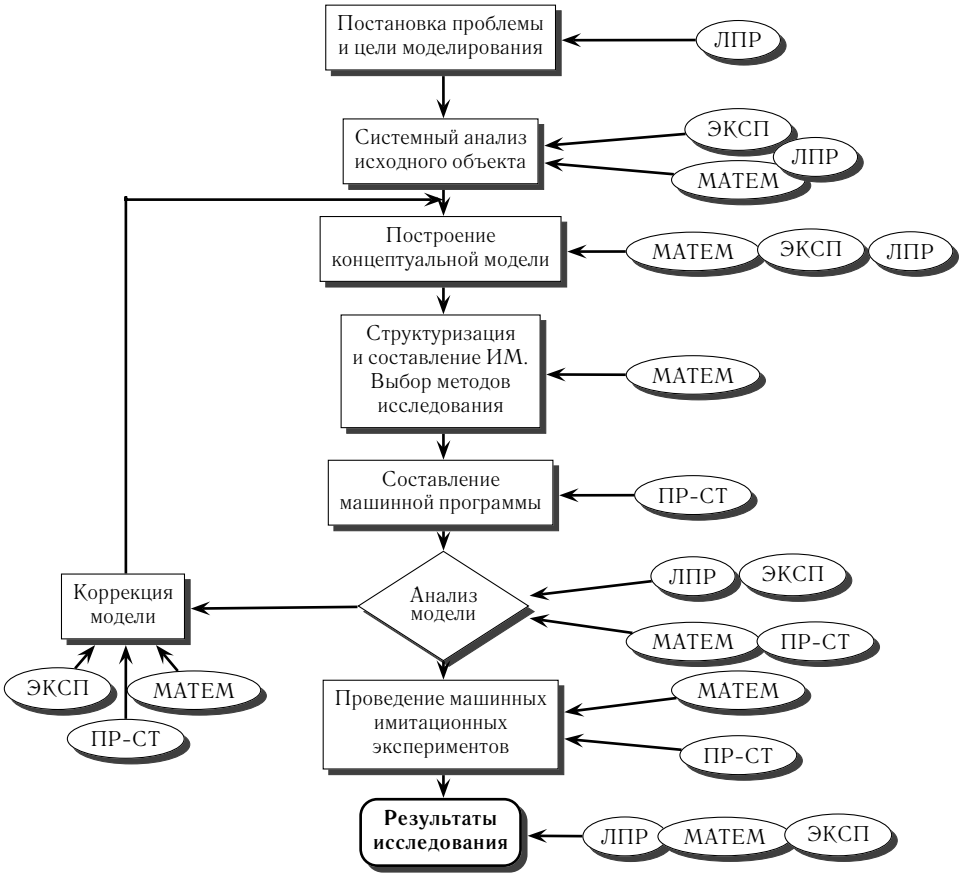



*Рис. 54.7.*

При рассмотрении этапов имитационного моделирования неоднократно подчеркивалась важная роль человека в имитационных исследованиях. Очевидно, что при решении крупных народохозяйственных проблем задача имитационного моделирования становится непосильной для одного человека и к имитационным исследованиям привлекаются целые творческие коллективы, состоящие из людей различных профессий, причем место и функции каждого специалиста четко определены. В заключение этого параграфа приведем общую схему проведения имитационного исследования (рис. 54.7) с указанием типов специалистов, участвующих на разных его стадиях (здесь МАТЕМ — математик, ЭКСП — эксперт (специалист в своей предметной области), ЛПР — лицо, принимающее решение).

# LV

# РАБОТА С ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛЬЮ

## § 55.1. ПЛАНИРОВАНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Будем считать, что идентификация, верификация и все необходимые коррекции модели завершены. Теперь можно приступать к проведению имитационного эксперимента — главного этапа имитационного исследования, включающего, кроме расчетов по модели, планирование эксперимента и обработку результатов эксперимента. Сразу же возникает вопрос о том, при каких внешних воздействиях проводить расчеты, сколько расчетов проводить для того, чтобы быть уверенным в верности полученного решения и т. д. Все эти проблемы могут быть решены в процессе планирования эксперимента. В основном методы планирования экспериментов были разработаны для натурных экспериментов. Имитационный эксперимент сохранил характерные черты натурного эксперимента. Основная разница между ними состоит в том, что эксперимент здесь проводится не с объектом, а с его аналогом — моделью. Поэтому многие результаты теории планирования натурных экспериментов могут быть перенесены в область имитационных исследований. Рассмотрим некоторые аспекты планирования экспериментов.

Итак, цель эксперимента — установить связь между воздействиями на модель и ее откликом на это воздействие, причем то, как формируется этот отклик, при проведении имитационных экспериментов уже не интересует исследователя. Поэтому на этом этапе модель можно представить в виде

$$y = f(x),$$

где $x$ — воздействие на модель или фактор;
$y$ — результат воздействия или реакция;
$f$ — поверхность реакции.

В общем случае $x$ и $y$ есть вектор-функции, зависящие от времени. Любой имитационный эксперимент в этом случае может быть направлен либо на исследование поверхности реакции (задачи прогнозирования, например), либо на поиск максимума или минимума поверхности реакции в некотором пространстве факторов (задачи оптимального управления объектом и т. п.).

Факторы могут быть либо количественными, либо качественными. Здесь мы остановимся только на факторах первого типа.

Пусть для простоты поверхность реакции описывается функцией, зависящей от двух количественных факторов:

$$f = f(x_1, x_2),$$

причем $x_1$ и $x_2$ могут принимать дискретные фиксированные значения из областей $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^2$. Значения фактора назовем уровнем, а совокупность всех возможных пар $(x_1, x_2)$ — полным факторным планом (рис. 55.1).

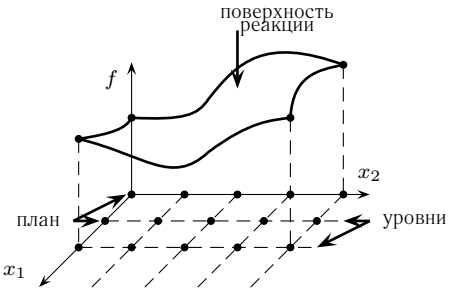



*Рис. 55.1.*

Таким образом, каждая точка плана определяет одно значение поверхности реакции. Чем больше точек плана будет рассмотрено, т. е. чем полнее построен план, тем точнее представления о виде поверхности реакции. Однако, несмотря на это, применение полных факторных планов ограничено и возможно лишь в случае незначительного числа факторов и их уровней. Более часто используются неполные факторные планы, требующие меньшего числа точек плана и не приводящие при этом к ощутимым потерям информации о поверхности реакции. Здесь в основном исследуются несколько главных факторов, а неполные факторные планы применяются для «отсеивания» несущественных факторов. Процедура отсеивания состоит в последовательном построении неполных планов. Снова вернемся к примеру двухфакторной модели

$$f = f(x_1, x_2),$$

где факторы $x_1$, $x_2$ имеют более 3 уровней каждый. Сначала имитационный эксперимент проводится для начальных значений этих факторов $(x_1^0, x_2^0)$, а затем задается некоторое фиксированное изменение каждого уровня: $\delta_1$ и $\delta_2$, где

$$\delta_1 = \frac{x_1}{n_1},$$
$$\delta_2 = \frac{x_2}{n_2},$$

$n_1$, $n_2$ — число уровней $x_1$ и $x_2$ соответственно, и строятся неполные факторные планы, где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ — средние уровни факторов $x_1$ и $x_2$. Реализация этих планов дает четыре точки поверхности реакции $f^1_{+\delta_1}$, $f^1_{-\delta_1}$, $f^2_{+\delta_2}$, $f^2_{-\delta_2}$, по которым можно судить о степени влияния каждого фактора. Так, если

$$\left|f^1_{+\delta_1} - f^1_{-\delta_1}\right| > \left|f^2_{+\delta_2} - f^2_{-\delta_2}\right|,$$

то $x_1$ является более существенным фактором, и наоборот.

Еще одна типичная задача планирования эксперимента состоит в аппроксимации истинной поверхности реакции $f$ некоторой функцией $\varphi_n$, зависящей от тех же факторов. Как правило, удается построить линейную зависимость

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

где $\alpha_i$ — коэффициенты линейного многочлена.

Пусть, например, $n = 2$. Тогда для построения полинома $\varphi_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0$ требуется проведение имитационного эксперимента по полному двухфакторному плану с уровнями

$$x^0_{1,2} \pm \delta_{1,2}.$$

В случае неудовлетворительной аппроксимации есть возможность строить полиномы более высокой степени. Например, полином второй степени

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{12} x_1 x_2.$$

Его коэффициенты находятся за счет дополнительных изменений и на основе новых экспериментов.

Процесс продолжается до тех пор, пока аппроксимация не даст удовлетворительных результатов.

Описанный метод называется методом поверхности реакции.

Более узкой проблемой является проблема поиска экстремумов поверхности реакции, для решения которой используются известные методы оптимизации на заданном множестве значений факторов. Среди них отметим здесь метод наискорейшего спуска (или подъема), который состоит в исследовании поверхности реакции в окрестности некоторой точки с помощью линейных аппроксимирующих поверхностей-гиперплоскостей. Такие гиперплоскости обычно строятся с помощью простых экспериментов, как правило, однофакторных.

По построенной гиперплоскости определяется направление движения к точке оптимума, а затем в этом направлении делается небольшой «шаг». Далее процедура повторяется.

Метод наискорейшего спуска не гарантирует минимума. Если допустить, что поверхность реакции имеет несколько локальных минимумов, то целесообразно несколько раз применять этот метод, отправляясь всякий раз от различных, сильно отличающихся начальных условий.

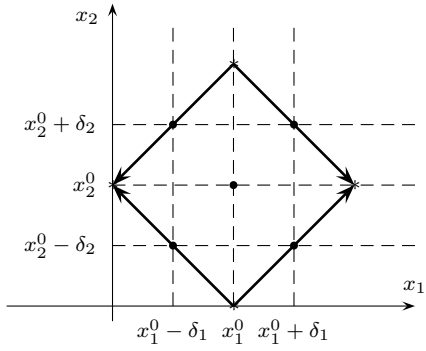



*Рис. 55.2.*
• — начальные изменения;
∗ — дополнительные изменения

Заметим, что линейная аппроксимация вблизи точки оптимума оказывается неэффективной. В окрестности точки оптимума, где поверхность реакции почти стационарна, используется аппроксимация более высокого порядка — хотя бы квадратичным полиномом.

Все перечисленные методы планирования эксперимента относятся к детерминированным моделям. Для стохастических моделей однократная реализация построенного плана не позволяет получить желаемую информацию об изученной поверхности реакции. В этом случае необходимо несколько раз реализовывать один и тот же план с различными начальными состояниями генератора случайных чисел (каждая реализация здесь называется репликой). Определение объема выборки (количества реплик) в имитационном эксперименте представляет собой очень трудную, но важную задачу. С одной стороны, увеличение объема ведет к увеличению затрат машинного времени и, тем самым, денежных средств. С другой стороны, чем больше количество реплик, тем более достоверна информация, полученная с помощью модели, и, тем самым, меньше возможные потери, обусловленные использованием недостоверной информации. Минимизация суммарных потерь всякий раз осуществляется с помощью методов статистического анализа и методов оптимизации.

С появлением современных персональных компьютеров возник еще один способ планирования экспериментов, который носит оперативный характер. Он базируется на диалоговом режиме проведения имитационного эксперимента и предполагает выбор нового набора уровней на основе анализа результатов предыдущего эксперимента.

# VI

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

*Таблица 1.*

**Площадь под кривой нормального распределения (слева от $z$)**

| $z$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3,5 | 0,0002 | | | | | | | | | |
| −3,0 | 0,0013 | | | | | | | | | |
| −2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| −2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0020 | 0,0019 |
| −2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| −2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| −2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| −2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| −2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0086 | 0,0084 |
| −2,2 | 0,0139 | 0,0135 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| −2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| −2,0 | 0,0227 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| −1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0238 | 0,0233 |
| −1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0321 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0300 | 0,0294 |
| −1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0400 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| −1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0515 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0484 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| −1,5 | 0,0688 | 0,0655 | 0,0642 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0570 | 0,0559 |
| −1,4 | 0,0807 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0763 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| −1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0917 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0822 |
| −1,2 | 0,1151 | 0,1134 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| −1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1313 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| −1,0 | 0,1586 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1468 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1378 |
| −0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1710 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| −0,8 | 0,2118 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2004 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1921 | 0,1894 | 0,1867 |
| −0,7 | 0,2420 | 0,2388 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| −0,6 | 0,2742 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| −0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2971 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| −0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3000 | 0,3270 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| −0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| −0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| −0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| −0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5159 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5909 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7356 | 0,7389 | 0,7421 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7793 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8437 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8906 | 0,8925 | 0,8943 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9648 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9707 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9874 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9895 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9903 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9924 | 0,9926 | 0,9928 | 0,9930 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9944 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9958 | 0,9960 | 0,9962 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9986 | | | | | | | | | |
| 3,5 | 0,9998 | | | | | | | | | |

*Таблица 2.*

**Распределение хи-квадрат ( $\chi^2$ -распределение)**

| **Число степеней свободы $f$** | **Уровень значимости $\alpha$** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 2,71 | 3,84 | 6,64 | 10,8 |
| 2 | 0,02 | 0,10 | 0,21 | 4,61 | 5,99 | 9,21 | 13,8 |
| 3 | 0,11 | 0,35 | 0,58 | 6,25 | 7,81 | 11,3 | 16,3 |
| 4 | 0,30 | 0,71 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 13,3 | 18,5 |
| 5 | 0,55 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,1 | 15,1 | 20,5 |
| 6 | 0,87 | 1,64 | 2,20 | 10,6 | 12,6 | 16,8 | 22,5 |
| 7 | 1,24 | 2,17 | 2,83 | 12,0 | 14,1 | 18,5 | 24,3 |
| 8 | 1,65 | 2,73 | 3,49 | 13,4 | 15,5 | 20,1 | 26,1 |
| 9 | 2,09 | 3,33 | 4,17 | 14,7 | 16,9 | 21,7 | 27,9 |
| 10 | 2,56 | 3,94 | 4,87 | 16,0 | 18,3 | 23,2 | 29,6 |
| 11 | 3,05 | 4,57 | 5,58 | 17,3 | 19,7 | 24,7 | 31,3 |
| 12 | 3,57 | 5,27 | 6,30 | 18,5 | 21,0 | 26,2 | 32,9 |
| 13 | 4,11 | 5,89 | 7,04 | 19,8 | 22,4 | 27,7 | 34,5 |
| 14 | 4,66 | 6,57 | 7,79 | 21,1 | 23,7 | 29,7 | 36,1 |
| 15 | 5,23 | 7,26 | 8,55 | 22,3 | 25,0 | 30,6 | 37,7 |
| 16 | 5,81 | 7,96 | 9,31 | 23,5 | 26,3 | 32,0 | 39,3 |
| 17 | 6,41 | 8,67 | 10,1 | 24,8 | 27,6 | 33,4 | 40,8 |
| 18 | 7,01 | 9,39 | 10,9 | 26,0 | 28,9 | 34,8 | 42,3 |
| 19 | 7,63 | 10,1 | 11,7 | 27,2 | 30,1 | 36,2 | 43,8 |
| 20 | 8,26 | 10,9 | 12,4 | 28,4 | 31,4 | 37,6 | 45,3 |
| 21 | 8,90 | 11,6 | 13,2 | 29,9 | 32,7 | 38,9 | 46,8 |
| 22 | 9,54 | 12,3 | 14,0 | 30,8 | 33,9 | 40,3 | 48,3 |
| 23 | 10,2 | 13,1 | 14,8 | 32,0 | 35,2 | 41,6 | 49,7 |
| 24 | 10,9 | 13,8 | 15,7 | 33,2 | 36,4 | 43,0 | 51,2 |
| 25 | 11,5 | 14,6 | 16,5 | 34,4 | 37,7 | 44,3 | 52,6 |
| 26 | 12,2 | 15,4 | 17,3 | 35,6 | 38,9 | 45,6 | 54,1 |
| 27 | 12,9 | 16,2 | 18,1 | 36,7 | 40,1 | 47,0 | 55,5 |
| 28 | 13,6 | 16,9 | 18,9 | 37,9 | 41,3 | 48,3 | 56,9 |
| 29 | 14,3 | 17,7 | 19,8 | 39,1 | 42,6 | 49,6 | 58,3 |
| 30 | 15,0 | 18,5 | 20,6 | 40,3 | 43,8 | 50,9 | 59,7 |

*Таблица 3.*

**$F$ -распределение Фишера ( $\alpha = 0{,}05$ )**

| | **$f_1$ Число степеней свободы большей дисперсии** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$f_2$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 161,0 | 200,0 | 216,0 | 225,0 | 230,0 | 234,0 | 237,0 | 239,0 | 241,0 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19,37 | 19,38 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,88 | 8,84 | 8,81 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,78 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,84 | 2,77 | 2,72 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,65 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,70 | 2,64 | 2,59 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2,55 | 2,50 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,55 | 2,48 | 2,43 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,52 | 2,45 | 2,40 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,34 | 2,27 | 2,21 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,07 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,30 | 2,19 | 2,10 | 2,03 | 1,97 |
| $\infty$ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 2,01 | 1,94 | 1,88 |

*Таблица 4.*

**(продолжение $\alpha = 0{,}05$)**

| $f_2$ | $f_1$ Число степеней свободы большей дисперсии | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 11 | 12 | 16 | 20 | 30 | 50 | 100 | $\infty$ |
| 1 | 242 | 243 | 244 | 246 | 248 | 250 | 252 | 253 | 254 |
| 2 | 19,39 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,44 | 19,46 | 19,47 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 8,78 | 8,76 | 8,74 | 8,69 | 8,66 | 8,62 | 8,58 | 8,56 | 8,53 |
| 4 | 5,96 | 5,93 | 5,91 | 5,84 | 5,80 | 5,74 | 5,70 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 4,74 | 4,70 | 4,68 | 4,60 | 4,56 | 4,50 | 4,44 | 4,40 | 4,36 |
| 6 | 4,06 | 4,03 | 4,00 | 3,92 | 3,87 | 3,81 | 3,75 | 3,71 | 3,67 |
| 7 | 3,63 | 3,60 | 3,57 | 3,49 | 3,44 | 3,38 | 3,32 | 3,28 | 3,23 |
| 8 | 3,34 | 3,31 | 3,28 | 3,20 | 3,15 | 3,08 | 3,03 | 2,98 | 2,93 |
| 9 | 3,13 | 3,10 | 3,07 | 2,98 | 2,93 | 2,86 | 2,80 | 2,76 | 2,71 |
| 10 | 2,97 | 2,94 | 2,91 | 2,82 | 2,77 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| 11 | 2,86 | 2,82 | 2,79 | 2,70 | 2,65 | 2,57 | 2,50 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 2,76 | 2,72 | 2,69 | 2,60 | 2,54 | 2,46 | 2,40 | 2,35 | 2,30 |
| 13 | 2,67 | 2,63 | 2,60 | 2,51 | 2,46 | 2,38 | 2,32 | 2,26 | 2,21 |
| 14 | 2,60 | 2,56 | 2,53 | 2,44 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,13 |
| 15 | 2,55 | 2,51 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,07 |
| 16 | 2,49 | 2,46 | 2,42 | 2,33 | 2,28 | 2,20 | 2,13 | 2,07 | 2,01 |
| 17 | 2,45 | 2,41 | 2,38 | 2,29 | 2,23 | 2,15 | 2,08 | 2,02 | 1,96 |
| 18 | 2,41 | 2,37 | 2,34 | 2,25 | 2,19 | 2,11 | 2,04 | 1,98 | 1,92 |
| 19 | 2,38 | 2,34 | 2,31 | 2,21 | 2,15 | 2,07 | 2,00 | 1,96 | 1,88 |
| 20 | 2,35 | 2,31 | 2,28 | 2,18 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,90 | 1,84 |
| 30 | 2,16 | 2,16 | 2,09 | 1,99 | 1,93 | 1,84 | 1,76 | 1,69 | 1,62 |
| 50 | 2,02 | 1,99 | 1,85 | 1,85 | 1,78 | 1,69 | 1,60 | 1,52 | 1,44 |
| 100 | 1,92 | 1,89 | 1,85 | 1,75 | 1,68 | 1,57 | 1,48 | 1,39 | 1,28 |
| $\infty$ | 1,83 | 1,79 | 1,75 | 1,64 | 1,57 | 1,46 | 1,35 | 1,24 | 1,00 |

*Таблица 5.*

**(продолжение $\alpha = 0{,}01$)**

| $f_2$ | $f_1$ Число степеней свободы большей дисперсии | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 |
| 2 | 98,49 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,34 | 99,36 | 99,38 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,34 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,58 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,45 | 10,27 | 10,15 |
| 6 | 13,74 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 7,00 | 6,84 | 6,71 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,19 | 6,03 | 5,91 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,62 | 5,47 | 5,35 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,21 | 5,06 | 4,95 |
| 11 | 9,65 | 7,20 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,88 | 4,74 | 4,63 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,65 | 4,50 | 4,39 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,20 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 |
| 18 | 8,28 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,85 | 3,71 | 3,60 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,71 | 3,56 | 3,45 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,06 |
| 50 | 7,17 | 5,06 | 4,20 | 3,72 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,88 | 2,78 |
| 100 | 6,90 | 4,82 | 3,98 | 3,51 | 3,20 | 2,99 | 2,82 | 2,69 | 2,59 |
| $\infty$ | 6,64 | 4,60 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,64 | 2,51 | 2,41 |

*Таблица 6.*

**(продолжение $\alpha = 0{,}01$)**

| $f_2$ | $f_1$ Число степеней свободы большей дисперсии | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 11 | 12 | 16 | 20 | 30 | 50 | 100 | $\infty$ |
| 1 | 6056 | 6082 | 6106 | 6169 | 6208 | 6258 | 6302 | 6334 | 6336 |
| 2 | 99,40 | 99,41 | 99,42 | 99,44 | 99,45 | 99,47 | 99,48 | 99,49 | 99,50 |
| 3 | 27,23 | 27,13 | 27,05 | 26,83 | 26,69 | 26,50 | 26,35 | 26,23 | 26,12 |
| 4 | 14,54 | 14,45 | 14,37 | 14,15 | 14,02 | 13,83 | 13,69 | 13,57 | 13,46 |
| 5 | 10,05 | 9,96 | 9,89 | 9,68 | 9,55 | 9,38 | 9,24 | 9,13 | 9,02 |
| 6 | 7,87 | 7,79 | 7,72 | 7,52 | 7,32 | 7,23 | 7,09 | 6,99 | 6,88 |
| 7 | 6,62 | 6,54 | 6,47 | 6,27 | 6,15 | 5,98 | 5,85 | 5,75 | 5,65 |
| 8 | 5,82 | 5,74 | 5,67 | 5,48 | 5,36 | 5,20 | 5,06 | 4,96 | 4,86 |
| 9 | 5,26 | 5,18 | 5,11 | 4,92 | 4,80 | 4,64 | 4,51 | 4,41 | 4,31 |
| 10 | 4,85 | 4,78 | 4,71 | 4,52 | 4,41 | 4,25 | 4,12 | 4,01 | 3,91 |
| 11 | 4,54 | 4,46 | 4,40 | 4,21 | 4,10 | 3,94 | 3,80 | 3,70 | 3,60 |
| 12 | 4,30 | 4,22 | 4,16 | 3,98 | 3,86 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,36 |
| 13 | 4,10 | 4,02 | 3,96 | 3,78 | 3,67 | 3,51 | 3,37 | 3,27 | 3,16 |
| 14 | 3,94 | 3,86 | 3,80 | 3,62 | 3,51 | 3,34 | 3,21 | 3,11 | 3,00 |
| 15 | 3,80 | 3,73 | 3,67 | 3,48 | 3,36 | 3,20 | 3,07 | 2,97 | 2,87 |
| 16 | 3,69 | 3,61 | 3,55 | 3,37 | 3,25 | 3,10 | 2,96 | 2,86 | 2,75 |
| 17 | 3,59 | 3,52 | 3,45 | 3,27 | 3,16 | 3,00 | 2,86 | 2,76 | 2,65 |
| 18 | 3,51 | 3,44 | 3,37 | 3,19 | 3,07 | 2,91 | 2,78 | 2,68 | 2,57 |
| 19 | 3,43 | 3,36 | 3,30 | 3,12 | 3,00 | 2,84 | 2,70 | 2,60 | 2,49 |
| 20 | 3,37 | 3,30 | 3,23 | 3,05 | 2,94 | 2,77 | 2,63 | 2,53 | 2,42 |
| 30 | 2,98 | 2,90 | 2,84 | 2,66 | 2,55 | 2,38 | 2,24 | 2,13 | 2,01 |
| 50 | 2,70 | 2,62 | 2,56 | 2,39 | 2,26 | 2,10 | 1,94 | 1,82 | 1,68 |
| 100 | 2,51 | 2,43 | 2,36 | 2,19 | 2,06 | 1,89 | 1,73 | 1,59 | 1,43 |
| $\infty$ | 2,32 | 2,24 | 2,18 | 1,99 | 1,87 | 1,69 | 1,52 | 1,36 | 1,00 |

*Таблица 7.*

**Распределение Стьюдента ($t$-распределение)**

| Число степеней свободы $f$ | Уровень значимости $\alpha$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 6,31 | 12,7 | | |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 9,92 | 31,6 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 5,84 | 12,9 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 4,60 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 4,03 | 6,86 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,71 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 3,50 | 5,40 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 3,36 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 3,25 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 3,17 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 3,11 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 3,05 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 3,01 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,98 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,95 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,92 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,90 | 3,96 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,88 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,86 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,85 | 3,85 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,82 | 3,79 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,80 | 3,74 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,75 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,70 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,66 | 3,46 |
| $\infty$ | 1,64 | 1,96 | 2,58 | 3,29 |

*Таблица 8.*

**$z$-преобразование Фишера для коэффициента корреляции**

| $z$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0200 | 0,0300 | 0,0400 | 0,0500 | 0,0599 | 0,0699 | 0,0798 | 0,0898 |
| 0,1 | 0,0997 | 0,1096 | 0,1194 | 0,1293 | 0,1391 | 0,1489 | 0,1586 | 0,1684 | 0,1781 | 0,1877 |
| 0,2 | 0,1974 | 0,2070 | 0,2165 | 0,2260 | 0,2355 | 0,2449 | 0,2543 | 0,2636 | 0,2729 | 0,2821 |
| 0,3 | 0,2913 | 0,3004 | 0,3095 | 0,3185 | 0,3275 | 0,3364 | 0,3452 | 0,3540 | 0,3627 | 0,3714 |
| 0,4 | 0,3800 | 0,3885 | 0,3969 | 0,4053 | 0,4136 | 0,4219 | 0,4301 | 0,4382 | 0,4462 | 0,4542 |
| 0,5 | 0,4621 | 0,4699 | 0,4777 | 0,4854 | 0,4930 | 0,5005 | 0,5080 | 0,5154 | 0,5227 | 0,5299 |
| 0,6 | 0,5370 | 0,5441 | 0,5511 | 0,5580 | 0,5649 | 0,5717 | 0,5784 | 0,5850 | 0,5915 | 0,5980 |
| 0,7 | 0,6044 | 0,6107 | 0,6169 | 0,6231 | 0,6291 | 0,6351 | 0,6411 | 0,6469 | 0,6527 | 0,6584 |
| 0,8 | 0,6640 | 0,6696 | 0,6751 | 0,6805 | 0,6858 | 0,6911 | 0,6963 | 0,7014 | 0,7064 | 0,7114 |
| 0,9 | 0,7163 | 0,7211 | 0,7259 | 0,7306 | 0,7352 | 0,7398 | 0,7443 | 0,7447 | 0,7531 | 0,7574 |
| 1,0 | 0,7616 | 0,7658 | 0,7699 | 0,7739 | 0,7779 | 0,7818 | 0,7857 | 0,7895 | 0,7932 | 0,7969 |
| 1,1 | 0,8005 | 0,8041 | 0,8076 | 0,8110 | 0,8144 | 0,8178 | 0,8210 | 0,8243 | 0,8275 | 0,8306 |
| 1,2 | 0,8337 | 0,8367 | 0,8397 | 0,8426 | 0,8455 | 0,8483 | 0,8511 | 0,8538 | 0,8565 | 0,8591 |
| 1,3 | 0,8617 | 0,8643 | 0,8668 | 0,8692 | 0,8717 | 0,8741 | 0,8764 | 0,8787 | 0,8810 | 0,832 |
| 1,4 | 0,8854 | 0,8875 | 0,8896 | 0,8917 | 0,8937 | 0,8957 | 0,8977 | 0,8996 | 0,9015 | 0,9033 |
| 1,5 | 0,9051 | 0,9069 | 0,9087 | 0,9104 | 0,9121 | 0,9138 | 0,9154 | 0,9170 | 0,9186 | 0,9201 |
| 1,6 | 0,9217 | 0,9232 | 0,9246 | 0,9261 | 0,9275 | 0,9289 | 0,9302 | 0,9316 | 0,9329 | 0,9341 |
| 1,7 | 0,9354 | 0,9366 | 0,9379 | 0,9391 | 0,9402 | 0,9414 | 0,9425 | 0,9436 | 0,9447 | 0,9458 |
| 1,8 | 0,9468 | 0,9478 | 0,9488 | 0,9498 | 0,9508 | 0,9517 | 0,9527 | 0,9536 | 0,9545 | 0,9554 |
| 1,9 | 0,9562 | 0,9571 | 0,9579 | 0,9587 | 0,9595 | 0,9603 | 0,9611 | 0,9618 | 0,9626 | 0,9633 |
| 2,0 | 0,9640 | 0,9647 | 0,9654 | 0,9601 | 0,9667 | 0,9674 | 0,9680 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 |
| 2,1 | 0,9705 | 0,9710 | 0,9716 | 0,9721 | 0,9727 | 0,9732 | 0,9737 | 0,9743 | 0,9748 | 0,9753 |
| 2,2 | 0,9757 | 0,9762 | 0,9767 | 0,9771 | 0,9776 | 0,9780 | 0,9785 | 0,9789 | 0,9793 | 0,9797 |
| 2,3 | 0,9801 | 0,9805 | 0,9809 | 0,9812 | 0,9816 | 0,9820 | 0,9823 | 0,9827 | 0,9830 | 0,9833 |
| 2,4 | 0,9837 | 0,9840 | 0,9843 | 0,9846 | 0,9849 | 0,9852 | 0,9855 | 0,9858 | 0,9861 | 0,9863 |
| 2,5 | 0,9866 | 0,9869 | 0,9871 | 0,9874 | 0,9876 | 0,9879 | 0,9881 | 0,9883 | 0,9886 | 0,9888 |
| 2,6 | 0,9890 | 0,9892 | 0,9894 | 0,9897 | 0,9899 | 0,9901 | 0,9903 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9908 |
| 2,7 | 0,9910 | 0,9912 | 0,9914 | 0,9915 | 0,9917 | 0,9919 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9923 | 0,9925 |
| 2,8 | 0,9926 | 0,9928 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9933 | 0,9935 | 0,9936 | 0,9937 | 0,9938 |
| 2,9 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9942 | 0,9943 | 0,9944 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9947 | 0,9948 | 0,9949 |
| 3,0 | 0,9951 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 3,5 | 0,9982 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

*Таблица 9.*

**Критические значения для коэффициента корреляции**

| Число степеней свободы $f$ | Уровень значимости $\alpha$ | | Число степеней свободы $f$ | Уровень значимости $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 | | 0,05 | 0,01 |
| 1 | 0,997 | | 20 | 0,423 | 0,536 |
| 2 | 0,950 | 0,990 | 21 | 0,413 | 0,526 |
| 3 | 0,878 | 0,959 | 22 | 0,404 | 0,515 |
| 4 | 0,811 | 0,917 | 23 | 0,396 | 0,505 |
| 5 | 0,745 | 0,875 | 24 | 0,388 | 0,496 |
| 6 | 0,707 | 0,834 | 25 | 0,381 | 0,487 |
| 7 | 0,666 | 0,798 | 26 | 0,374 | 0,479 |
| 8 | 0,632 | 0,765 | 27 | 0,367 | 0,471 |
| 9 | 0,602 | 0,735 | 28 | 0,361 | 0,463 |
| 10 | 0,576 | 0,708 | 29 | 0,355 | 0,456 |
| 11 | 0,553 | 0,684 | 30 | 0,349 | 0,449 |
| 12 | 0,532 | 0,661 | 50 | 0,273 | 0,354 |
| 13 | 0,514 | 0,641 | 100 | 0,195 | 0,254 |
| 14 | 0,497 | 0,623 | 200 | 0,138 | 0,181 |
| 15 | 0,482 | 0,606 | 500 | 0,088 | 0,115 |
| 16 | 0,468 | 0,590 | 1000 | 0,062 | 0,081 |
| 17 | 0,456 | 0,575 | | | |
| 18 | 0,444 | 0,561 | | | |
| 19 | 0,433 | 0,549 | | | |

*Таблица 10.*

**Распределение стьюдентизированного размаха ( $\alpha = 0{,}05$ )**

| **Число степеней свободы, $f$** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 | 18,0 |
| 2 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 | 6,08 |
| 3 | 4,50 | 4,52 | 4,52 | 4,52 | 4,52 | 4,52 | 4,52 | 4,52 | 4,52 |
| 4 | 3,93 | 4,01 | 4,03 | 4,03 | 4,03 | 4,03 | 4,03 | 4,03 | 4,03 |
| 5 | 3,63 | 3,75 | 3,80 | 3,81 | 3,81 | 3,81 | 3,81 | 3,81 | 3,81 |
| 6 | 3,46 | 3,59 | 3,65 | 3,68 | 3,69 | 3,70 | 3,70 | 3,70 | 3,70 |
| 7 | 3,34 | 3,48 | 3,55 | 3,59 | 3,61 | 3,62 | 3,63 | 3,63 | 3,63 |
| 8 | 3,26 | 3,40 | 3,47 | 3,52 | 3,55 | 3,57 | 3,58 | 3,58 | 3,58 |
| 9 | 3,20 | 3,34 | 3,42 | 3,47 | 3,50 | 3,52 | 3,54 | 3,54 | 3,55 |
| 10 | 3,15 | 3,29 | 3,38 | 3,43 | 3,46 | 3,49 | 3,51 | 3,52 | 3,52 |
| 11 | 3,11 | 3,26 | 3,34 | 3,40 | 3,43 | 3,46 | 3,48 | 3,49 | 3,50 |
| 12 | 3,08 | 3,22 | 3,31 | 3,37 | 3,41 | 3,44 | 3,45 | 3,47 | 3,48 |
| 13 | 3,06 | 3,20 | 3,29 | 3,35 | 3,39 | 3,42 | 3,44 | 3,46 | 3,47 |
| 14 | 3,03 | 3,18 | 3,27 | 3,33 | 3,37 | 3,40 | 3,43 | 3,44 | 3,46 |
| 15 | 3,01 | 3,16 | 3,25 | 3,31 | 3,36 | 3,39 | 3,41 | 3,43 | 3,45 |
| 16 | 3,00 | 3,14 | 3,23 | 3,30 | 3,34 | 3,38 | 3,40 | 3,42 | 3,44 |
| 17 | 2,98 | 3,13 | 3,22 | 3,28 | 3,33 | 3,37 | 3,39 | 3,41 | 3,43 |
| 18 | 2,97 | 3,12 | 3,21 | 3,27 | 3,32 | 3,36 | 3,38 | 3,40 | 3,42 |
| 19 | 2,96 | 3,11 | 3,20 | 3,26 | 3,31 | 3,35 | 3,37 | 3,40 | 3,41 |
| 20 | 2,95 | 3,10 | 3,19 | 3,25 | 3,30 | 3,34 | 3,37 | 3,39 | 3,41 |
| 30 | 2,89 | 3,03 | 3,13 | 3,20 | 3,25 | 3,29 | 3,32 | 3,35 | 3,37 |
| 40 | 2,86 | 3,01 | 3,10 | 3,17 | 3,22 | 3,27 | 3,30 | 3,33 | 3,35 |
| 60 | 2,83 | 2,98 | 3,07 | 3,14 | 3,20 | 3,24 | 3,28 | 3,31 | 3,33 |
| 100 | 2,80 | 2,95 | 3,04 | 3,12 | 3,17 | 3,22 | 3,25 | 3,29 | 3,31 |
| $\infty$ | 2,77 | 2,92 | 3,02 | 3,09 | 3,15 | 3,19 | 3,23 | 3,26 | 3,29 |

*Таблица 11.*

**(продолжение $\alpha = 0{,}01$ )**

| **Число степеней свободы, $f$** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 | 90,0 |
| 2 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 | 14,0 |
| 3 | 8,26 | 8,32 | 8,32 | 8,32 | 8,32 | 8,32 | 8,32 | 8,32 | 8,32 |
| 4 | 6,51 | 6,68 | 6,74 | 6,76 | 6,76 | 6,76 | 6,76 | 6,76 | 6,76 |
| 5 | 5,70 | 5,89 | 5,99 | 6,04 | 6,06 | 6,07 | 6,07 | 6,07 | 6,07 |
| 6 | 5,34 | 5,44 | 5,55 | 5,61 | 5,65 | 5,68 | 5,69 | 5,70 | 5,70 |
| 7 | 4,95 | 5,14 | 5,26 | 5,33 | 5,38 | 5,42 | 5,44 | 5,45 | 5,46 |
| 8 | 4,75 | 4,94 | 5,06 | 5,13 | 5,29 | 5,23 | 5,26 | 5,28 | 5,29 |
| 9 | 4,60 | 4,79 | 4,91 | 4,99 | 5,04 | 5,09 | 5,12 | 5,14 | 5,16 |
| 10 | 4,48 | 4,67 | 4,79 | 4,87 | 4,93 | 4,97 | 5,01 | 5,04 | 5,06 |
| 11 | 4,39 | 4,58 | 4,70 | 4,78 | 4,84 | 4,89 | 4,92 | 4,95 | 4,97 |
| 12 | 4,32 | 4,50 | 4,62 | 4,71 | 4,77 | 4,81 | 4,85 | 4,88 | 4,91 |
| 13 | 4,26 | 4,44 | 4,56 | 4,64 | 4,71 | 4,75 | 4,79 | 4,82 | 4,85 |
| 14 | 4,21 | 4,39 | 4,51 | 4,59 | 4,65 | 4,70 | 4,74 | 4,77 | 4,80 |
| 15 | 4,17 | 4,35 | 4,46 | 4,55 | 4,61 | 4,66 | 4,70 | 4,73 | 4,76 |
| 16 | 4,13 | 4,31 | 4,42 | 4,51 | 4,57 | 4,62 | 4,66 | 4,70 | 4,72 |
| 17 | 4,10 | 4,27 | 4,39 | 4,47 | 4,54 | 4,59 | 4,63 | 4,66 | 4,69 |
| 18 | 4,07 | 4,25 | 4,36 | 4,44 | 4,51 | 4,56 | 4,69 | 4,63 | 4,66 |
| 19 | 4,05 | 4,22 | 4,33 | 4,42 | 4,48 | 4,52 | 4,57 | 4,61 | 4,64 |
| 20 | 4,02 | 4,20 | 4,31 | 4,39 | 4,46 | 4,51 | 4,55 | 4,59 | 4,62 |
| 30 | 3,89 | 4,06 | 4,17 | 4,25 | 4,31 | 4,37 | 4,41 | 4,44 | 4,48 |
| 40 | 3,82 | 3,99 | 4,10 | 4,18 | 4,24 | 4,30 | 4,34 | 4,38 | 4,41 |
| 60 | 3,76 | 3,92 | 4,03 | 4,11 | 4,17 | 4,23 | 4,27 | 4,31 | 4,34 |
| 100 | 3,70 | 3,86 | 3,96 | 4,04 | 4,11 | 4,16 | 4,20 | 4,24 | 4,27 |
| $\infty$ | 3,64 | 3,80 | 3,90 | 3,98 | 4,04 | 4,09 | 4,13 | 4,17 | 4,20 |

*Таблица 12.*

**Критерий Дарбина–Уотсона ( $\alpha = 0{,}05$ )**

| $n$ | $K=1$ | | $K=2$ | | $K=3$ | | $K=4$ | | $K=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $D_l$ | $D_u$ | $D_l$ | $D_u$ | $D_l$ | $D_u$ | $D_l$ | $D_u$ | $D_l$ | $D_u$ |
| 15 | 0,95 | 1,23 | 0,83 | 1,40 | 0,71 | 1,61 | 0,59 | 1,84 | 0,48 | 2,09 |
| 16 | 0,98 | 1,24 | 0,86 | 1,40 | 0,75 | 1,59 | 0,64 | 1,80 | 0,53 | 2,03 |
| 17 | 1,01 | 1,25 | 0,90 | 1,40 | 0,79 | 1,58 | 0,68 | 1,77 | 0,57 | 1,98 |
| 18 | 1,03 | 1,26 | 0,93 | 1,40 | 0,82 | 1,56 | 0,72 | 1,74 | 0,62 | 1,93 |
| 19 | 1,06 | 1,28 | 0,96 | 1,41 | 0,86 | 1,55 | 0,76 | 1,72 | 0,66 | 1,90 |
| 20 | 1,08 | 1,28 | 0,99 | 1,41 | 0,89 | 1,55 | 0,79 | 1,70 | 0,70 | 1,87 |
| 21 | 1,10 | 1,30 | 1,01 | 1,41 | 0,92 | 1,54 | 0,83 | 1,69 | 0,73 | 1,84 |
| 22 | 1,12 | 1,31 | 1,04 | 1,42 | 0,95 | 1,54 | 0,86 | 1,68 | 0,77 | 1,82 |
| 23 | 1,14 | 1,32 | 1,06 | 1,42 | 0,97 | 1,54 | 0,89 | 1,67 | 0,80 | 1,80 |
| 24 | 1,16 | 1,33 | 1,08 | 1,43 | 1,00 | 1,54 | 0,91 | 1,66 | 0,83 | 1,79 |
| 25 | 1,18 | 1,34 | 1,10 | 1,43 | 1,02 | 1,54 | 0,94 | 1,65 | 0,86 | 1,77 |
| 26 | 1,19 | 1,35 | 1,12 | 1,44 | 1,04 | 1,54 | 0,96 | 1,65 | 0,88 | 1,76 |
| 27 | 1,21 | 1,36 | 1,13 | 1,44 | 1,06 | 1,54 | 0,99 | 1,64 | 0,91 | 1,75 |
| 28 | 1,22 | 1,37 | 1,15 | 1,45 | 1,08 | 1,54 | 1,01 | 1,64 | 0,93 | 1,74 |
| 29 | 1,24 | 1,38 | 1,17 | 1,45 | 1,10 | 1,54 | 1,03 | 1,63 | 0,96 | 1,73 |
| 30 | 1,25 | 1,38 | 1,18 | 1,46 | 1,12 | 1,54 | 1,05 | 1,63 | 0,98 | 1,73 |
| 31 | 1,26 | 1,39 | 1,20 | 1,47 | 1,13 | 1,55 | 1,07 | 1,63 | 1,00 | 1,72 |
| 32 | 1,27 | 1,40 | 1,21 | 1,47 | 1,15 | 1,55 | 1,08 | 1,63 | 1,02 | 1,71 |
| 33 | 1,28 | 1,41 | 1,22 | 1,48 | 1,16 | 1,55 | 1,10 | 1,63 | 1,04 | 1,71 |
| 34 | 1,29 | 1,41 | 1,24 | 1,48 | 1,17 | 1,55 | 1,12 | 1,63 | 1,06 | 1,70 |
| 35 | 1,30 | 1,42 | 1,25 | 1,48 | 1,19 | 1,55 | 1,13 | 1,63 | 1,07 | 1,70 |
| 36 | 1,31 | 1,43 | 1,26 | 1,49 | 1,20 | 1,56 | 1,15 | 1,63 | 1,09 | 1,70 |
| 37 | 1,32 | 1,43 | 1,27 | 1,49 | 1,21 | 1,56 | 1,16 | 1,63 | 1,10 | 1,70 |
| 38 | 1,33 | 1,44 | 1,28 | 1,50 | 1,23 | 1,56 | 1,17 | 1,63 | 1,12 | 1,70 |
| 39 | 1,34 | 1,44 | 1,29 | 1,50 | 1,24 | 1,56 | 1,19 | 1,63 | 1,13 | 1,69 |
| 40 | 1,35 | 1,45 | 1,30 | 1,51 | 1,25 | 1,57 | 1,20 | 1,63 | 1,15 | 1,69 |
| 45 | 1,39 | 1,48 | 1,34 | 1,53 | 1,30 | 1,58 | 1,25 | 1,63 | 1,21 | 1,69 |
| 50 | 1,42 | 1,50 | 1,38 | 1,54 | 1,34 | 1,59 | 1,30 | 1,64 | 1,26 | 1,69 |
| 55 | 1,45 | 1,52 | 1,41 | 1,56 | 1,37 | 1,60 | 1,33 | 1,64 | 1,30 | 1,69 |
| 60 | 1,47 | 1,54 | 1,44 | 1,57 | 1,40 | 1,61 | 1,37 | 1,65 | 1,33 | 1,69 |
| 65 | 1,49 | 1,55 | 1,46 | 1,59 | 1,43 | 1,62 | 1,40 | 1,66 | 1,36 | 1,69 |
| 70 | 1,51 | 1,57 | 1,48 | 1,60 | 1,45 | 1,63 | 1,2 | 1,66 | 1,39 | 1,70 |
| 75 | 1,53 | 1,58 | 1,50 | 1,61 | 1,47 | 1,64 | 1,45 | 1,67 | 1,42 | 1,70 |
| 80 | 1,54 | 1,59 | 1,52 | 1,62 | 1,49 | 1,65 | 1,47 | 1,67 | 1,44 | 1,70 |
| 85 | 1,56 | 1,60 | 1,53 | 1,63 | 1,51 | 1,65 | 1,49 | 1,68 | 1,46 | 1,71 |
| 90 | 1,57 | 1,61 | 1,55 | 1,64 | 1,53 | 1,66 | 1,50 | 1,69 | 1,48 | 1,71 |
| 95 | 1,58 | 1,62 | 1,65 | 1,65 | 1,54 | 1,67 | 1,52 | 1,69 | 1,50 | 1,71 |
| 100 | 1,59 | 1,63 | 1,67 | 1,65 | 1,55 | 1,67 | 1,53 | 1,70 | 1,51 | 1,72 |

# ЛИТЕРАТУРА

## ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ


1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1987.
2. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. М., Наука, 1971.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М., Наука, 1984.
4. *Он же,* Аналитическая геометрия. М., Наука, 1988.
5. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1986.
6. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М., Наука, 1977.
7. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.
8. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1969.
9. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М., Наука, 1984.
10. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Наука, 1964.


## ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ


11. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1984.
12. *Демидович Б. П.* Сборник задач по математическому анализу. М., Наука, 1979.
13. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М., Наука, 1979.
14. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., Наука, 1979.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., Наука, 1981.
16. *Он же,* Курс математического анализа. М.., Высшая школа, 1988.
17. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., Наука, 1983.
18. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1974.
19. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Наука, 1969-1970.


## ПО ВВЕДЕНИЮ В АНАЛИЗ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ


20. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М., Наука, 1974, 366 с.
21. *Биркгоф Г., Барти Т.* Современная прикладная алгебра. М., Мир, 1976.
22. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. М., Наука, 1977.
23. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. М., Высшая школа, 1986.
24. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. А., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М., Наука, 1990.
25. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М., Наука, 1987.
26. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика. М., Наука, 1990.
27. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженеров. М., Энергоатомиздат, 1988.
28. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., Наука, 1975.
29. *Нефедов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики. М., Изд-во МАИ, 1992, 264 с.
30. *Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., Мир, 1980, 476 с.

31. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М., Мир, 1977.
32. *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973.
33. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М., Наука, 1979.

## ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

34. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1971, 240 с.
35. *Есипов А. А., Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Руководство к решению задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ростов-на-Дону., Изд-во РГУ, 1989, 336 с.
36. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Высшая школа, 1978, 288 с.
37. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Высшая школа, 1963, 548 с.
38. *Пантелеев А. В., Якимова А. С., Босов А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу динамических систем. М., Изд-во МАИ, 1997, 188 с.
39. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1970, 280 с.
40. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. СПб., Мифрил, 1996, 416 с.
41. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1982, 331 с.
42. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959, 468 с.
43. *Тихонов А. Н., Васильев А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1985, 231 с.
44. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1979, 128 с.

## ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

45. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1982, 336 с.
46. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука, 1977, 222 с.
47. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М., Наука, 1980, 686 с.
48. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1981, 512 с.
49. *Мартинсон Л. К., Малов Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М., Изд-во МГТУ, 1996, 368 с.
50. *Масленникова В. Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Изд-во РУДН, 1997, 446 с.
51. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Наука, 1983, 424 с.
52. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1977, 735 с.

## ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

53. *Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1975, 318 с.
54. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., Наука, 1968, 461 с.
55. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1979, 736 с.
56. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М., Наука, 1978, 387 с.
57. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Наука, 1984, 432 с.
58. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. М., Наука, 1979, 319 с.
59. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., Наука, 1980, 432 с.

## ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

60. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М., Наука, 1984, 472 с.
61. *Он же,* Теория вероятностей. М., Наука, 1986, 431 с.
62. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М., Наука, 1991, 384 с.
63. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988, 448 с.

64. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. М., Наука, 1989, 320 с.
65. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. М., Высшая школа, 1992, 304 с.
66. *Калинина В. Н.* Математическая статистика в примерах и задачах. М., 1996, 86 с.
67. *Коршунов Д. В., Фосс С. Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. Новосибирск., Изд-во НГУ, 1997, 114 с.
68. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М., Мир, 1975, 648 с.
69. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М., Наука, 1973, 496 с.
70. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1982, 255 с.
71. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. Под ред. *Свешников А. А.*, М., Наука, 1965, 632 с.
72. *Чистяков Г. И.* Курс теории вероятностей. М., Наука, 1987, 240 с.
73. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М., Наука, 1989, 640 с.

## ПО МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

74. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. М., Наука, 1981, 304 с.
75. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1988, 549 с.
76. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М., Наука, 1981, 384 с.
77. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М., Наука, 1986, 285 с.
78. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. М., Наука, 1978, 351 с.
79. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М., Наука, 1986.

## ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

80. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М., Наука, 1985.
81. *Гермейер Ю. Б.* Введение в исследование операций. М., Наука, 1971.
82. *Горстко А. Б.* Познакомьтесь с математическим программированием. М., Знание, 1991, 160 с.
83. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., Мир, 1964.

## ЗАДАЧНИКИ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

84. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. М., Высшая школа, 1997.
85. *Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Том 1. М., Гостехиздат, 1957.
86. *Он же,* Сборник задач по высшей математике. Том 2. М., Физматгиз, 1959.
87. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. М., Высшая школа, 1992.
88. *Шипачев В. С.* Задачи по высшей математике. М., Высшая школа, 1996, 304 с.

## А ТАКЖЕ

89. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970.
90. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука. ФМ., 1971.
91. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., Наука. ФМ, 1977.
92. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
93. *Смолянский М. Л.* Таблицы неопределенных интегралов. М., Наука. ФМ, 1971.
94. *Chow G. G.* Statistical demand functions for automobiles and their use for forecastery. in the demand for durable goods. , University of Chicago Press, 1960.
95. *Prim R. C.* Shortest connection networks and some generalizations. // Bell. Syst. Tech. J. (1957) № 36, 1389–1401.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


**А**нализ *analysis* 13–16, 20, 21
— главных компонент *principal component analysis* 802
— дискриминантный *discriminant analysis* 795–798
— дисперсионный *analysis of variance, ANOVA* 765–774, 778
— — однофакторный *one-way ANOVA* 768–770
— факторный *factor analysis* 804–808
аргумент комплексного числа *argument of a complex number* **96**, 97
асимптота *asymptote* **270**, 270–271, 273
— гиперболы *asymptote of the hyperbola* 52, 59

**Б**азис
— линейного пространства *basis of a linear space* **114–115**
— ортогональный *orthogonal basis* **148**
Бернулли испытание *Bernoulli trial* 622, 624, 634
бином Ньютона *Newton binomial* **204–207**, 216, 251, 411
блок графа *block of the graph* 845, 864

**В**ектор *vector* **37**, **110**, 114–117
— геометрический *geometrical vector* **37**, 119–126
— нормали *normal vector* **42**, 125, 337
— собственный *eigenvector* **155–156**, 156–160
величина случайная *random variable* **618**
— стандартизованная *random standardized variable* 677, 679
вероятность *probability* 597–615
— апостериорная *a posteriori probability* 612, 614, 615
— априорная *a priory probability* 612, 614, 615
— условная *conditional probability* 607
вершина *vertex, point* 813–828, 830–834, 836
вид канонический квадратичной формы *canonical form* 166, **166**, 168–171, 173
вид нормальный квадратичной формы *normal form* **170–171**
вогнутость *concavity см.* выпуклость
возрастание функции *increase of the function* 265–267, 336
выборка *sample* 938
выброс *outlier, maverick* 671, 761, 762
выпуклость *convexity* **268–269**, 269
высказывание *proposition* **177–180**
вычет *residue* 468–471

**Г**аусса метод *Gaussian method, Gaussian algorithm* 75–79
генеральная совокупность *universe* 720–724
гипербола *hyperbola* **51**, 52–53, 58
гиперболоид
— двуполостный *hyperboloid of two sheets* **131–132**
— однополостный *hyperboloid of one sheet* **130–131**
гипотеза *hypothesis* 22, 602, 611–615
— нулевая *null hypothesis* 732–734
— проверка *test of hypothesis* 731, 732
гистограмма *histogram* 661–663
— частот *frequency histogram* 662
градиент *gradient* **335**, 336
граф *graph* 813–864
— взвешенный *weighted graph* 848, 849, 851, 853
— геометрический *geometrical graph* 817–819
— двудольный полный *bipartite complete graph* 818
— неориентированный *nonorienteble graph* 837, 842, 843
— плоский *planar graph* 818, 819
— полный *complete graph* 818
— частичный *subgraph* 822, 839
— Эйлеров *Euler's graph* 826–828
график функции *functional graph* **188**
группа *group* 62, 70, 95, 100, 119

**Д**анные *data* 656–685
деление отрезка *division of segment* 29–31
дерево *tree* 829–835, 838–841
диаграмма рассеяния *scattergram* 686, 688
дивергенция *divergence* **374**
дизъюнкция *disjunction* **178**
директриса
— гиперболы *directrix of the hyperbola* 53
— параболы *directrix of the parabola* **53**, 54
— эллипса *directrix of the ellipse* **48**
дисперсия *variance* **631**
дифференциал *differential* 246–252, 274, 276, 278, 279, 327–330, 338, 340
— дуги *differential of the arc* **307–308**
— полный *total differential* **327–330**
— функции многих переменных *differential of the multivariable function* 327–330
дифференцируемость *differentiability* 247, 329, 331
длина
— дуги *length of the arc* 305–307
— направленного отрезка *length of direct line segment* 25, **26**, 27
дополнение
— алгебраическое *cofactor* **87–89**
— ко множеству *complement of the set* **186**
дуга *arc, edge* 305–308
— длина *length of the arc* **305**

**З**ависимость линейная *linear dependence* **113–114**, 114
задача
— Дирихле *Dirichlet's problem* 567, 569
— Коши *Cauchy's problem* **485**
— краевая *boundary value problem* 553
— Неймана *Neyman's problem* 567
— оптимизационная *optimization problem* 866, 899–920
— транспортная *transport problem* 893–898
— Штурма–Лиувилля *Sturm–Liouvill problem* 553–557
закон
— ассоциативный *associative law* **179**, **186**
— двойного отрицания *double negation law* **179**
— де Моргана *de Morgan law* **179**, **183**, **186**
— дистрибутивный *distributive law* 64, **64**, 95, 120, 179, 183, 186
— идемпотентости *idempotent law* **179**, 186
— коммутативный *commutative law* **179**, 186
законы нуля и единицы *domination and identity laws* 179
значение
— наибольшее *maximal value* 230, 273, 323
— наименьшее *minimal value* 230, 252, 268, 323, 324, 342, 907
— собственное *eigenvalue* **155–156**, 156–160
значимость статистическая *statistical significance* 732–734
— уровень *level of statistical significance* 732

**И**зоклина *isocline* 484
изоморфизм линейных пространств *isomorphism of linear spaces* 153
импликация *implication* **179–180**
инверсия *inversion* 81
интеграл
— двойной *double integral* 343–352
— Дирихле *Dirichlet's integral* 475
— дифференциального уравнения *integral of the differential equation* 487
— криволинейный *line integral* **356–368**, 376–378
— неопределенный *indeterminate integral* **275–291**
— несобственный *improper integral* **313–317**
— общий *common integral* 487
— определенный *determinate integral* 292–318
— по поверхности *surface integral* **368–378**
— системы первый *first integral of the system* 522–523
— тройной *triple integral* 353–356, 371, 372
— функции комплексного переменного *integral of the complex variable function* 446–450
интервал
— доверительный *confidence interval* 728–730
— сходимости *convergent interval* **400**, 403–407
интерполяция
— кусочно–линейная *piecewise linear interpolation* **45**
— линейная *linear interpolation* 45-46
исчисление вариационное *calculus of variations* 914

**К**асательная
— к гиперболе *tangent to the hyperbole* **53**
— к кривой *tangent* **49**, 240, 248, 254, 268, 269, 325
— к параболе *tangent to the parabola* **54**
— к эллипсу *tangent to the ellipse* **49**–51
квантор *quantifier* **182**–183
— всеобщности *universal quantifier* **182**
— существования *existential quantifier* **182**
ковариация *covariance* 686
комбинаторика *combinatorial analysis* 192–207
комбинация линейная *linear combination* 87, 89, 90, 112–115, 140, 142, 143
композиция
— подстановок *composition of substitutions* **82**–83
— функций *composition of functions* **189**–191, 226–227, 245–246, 330–334

компонента связности *component of connectivity* 822–827
контур *contour* 819
конус второго порядка *cone of a second order* **134**–135
конъюнкция *conjunction* **178**
координаты
— вектора *coordinate of a vector* **37**, **115**, 117
— декартовы *Cartesian coordinates* **28**–29, 32–34, 44, 136
— полярные *polar coordinates* **31**–32, 96, 303, 348–350
— середины отрезка *coordinates of midpoint of segment* **30**
— сферические *spherical coordinates* **32**, 356
— точки *coordinate of a point* **28**, 135
— цилиндрические *cylindrical coordinates* **32**–33, 355, 356
корень
— из единицы *root of unity* **99**–100, 108
— многочлена *root of a polynomial* 105–109
коэффициент
— асимметрии *coefficient of skewness* 678–680
— взаимной сопряженности *coefficient of association* 695–696
— корреляции *coefficient of correlation* 685–690
— — множественный *multiple coefficient of correlation* 713
— — ранговый *rank coefficient of correlation* 692–693
— — частный *partial coefficient of correlation* 711
кривая второго порядка *conic, quadratic curve* 55–59
критерий
— Коши сходимости последовательности *Cauchy's criterion of convergent sequence* 214, 231
— положительной определенности квадратичной формы *criterion of positive determination quadric form* 172–173
круг сходимости *convergence circle* 441–443, 458

**Л**ес *forest* 829–832, 849, 850

**М**аксимум *maximum* 267, 268, 339–341, 865–867
— локальный *local maximum* **253**, 267, 268, 339, 866, 870
матрица *matrix* **60**–73, 137–143, 152–155, 158, 165, 836–841, 843–845
— графа *graph matrix* 836–864
— диагональная *diagonal matrix* **67**, 525, 838
— единичная *identity matrix* **67**
— инцидентности *incidence matrix* **837**–840
— квадратичной формы *matrix of quadratic form* **165**–166
— квадратная *square matrix* **61**
— ковариационная *covariance matrix* 791, 801
— корреляционная *correlation matrix* 792
— линейного оператора *matrix of a linear operator* **154**
— нулевая *zero matrix* **61**
— обратная *inverse matrix* **69**
— перехода от базиса к базису *transformation matrix* 117
— разрезов *cut matrix* **839**, 840
— расстояний *distinct matrix* **854**
— симметрическая *symmetric matrix* 146
— смежности *adjacency matrix* **842**–844
— транспонированная *transposed matrix* **68**
— цикломатическая *cyclic matrix* **841**–842
медиана выборки *median of sample* 669–672
метод
— вариации произвольных постоянных *variation method* 510, 526–532
— итераций *iteration method* 578–580
— Симпсона *Simpson's method* 311–313
— скорейшего спуска *method of steepest descent* 904–908
— трапеций *trapezium method* 309, 497–498
— Фредгольма *Fredholm's method* 581–586
— Эйлера *Euler's method* 496–497
минимум *minimum* 267, 339–341
— локальный *local minimum* **253**, 267, 268, 866–870
минор *minor* 137, 172, 173
— порядка $k$ *minor of an order* $k$ 137
многочлен *polynomial* 71, **101**–109, 227
— характеристический *characteristic polynomial* **156**
множество *set* 94, 95, 184–189
— бесконечное *infinite set* 184
— конечное *finite set* **193**–203, 206, 207
— пустое *empty set* **185**
— решений СЛУ *solution set of the system linear equations* **73**–75
— степень *the set-degree* **196**–199
— универсальное *universal set* **184**, 185
модуль комплексного числа *modulus of a complex number, absolute value* **96**–98
мост графа *bridge of the graph* **825**–826
мощность критерия *power of test* 733, 734, 740, 759

**Н**аправленный отрезок *direct line segment* **25**
независимость линейная *linear independence* **113**–115
неопределенность *indetermination* 235, 252, 256, 263
непрерывность функции *continuity of the function* **225**–232, 321–324
неравенство Коши–Буняковского *Cauchy–Buniakovsky inequality* 147–148
нумерация *numeration* **192**, 195

**О**бласть *domain* **322**–324
— сходимости *convergent domain* **396**, 397, 440, 441
оболочка линейная *linear span, linear closure* **112**
образ
— линейного оператора *image of a linear operator* **162**–163
— элемента *image of the element* 189
обратимость *invertibility* 90–92, 191
— слева (справа) *left (right) invertibility* 69
объединение множеств *union of the sets* 185, 197
окрестность точки *neighborhood of the point* **208**, **219**, **220**
оператор линейный *linear operator* **152**–164, 506, 507
определитель
— Вандермонда *Vandermondes determinant* **102**
— Вронского *Wronskian* **508**–511
— матрицы *determinant of matrix* **83**–93
оптимизация *optimization* 848, 865–876, 898–919
ортогонализация *orthogonalization* 148–151
остаток ряда *remainder of the series* **394**–397, 407, 409–412
ось *axis* **25**–29
отображение *mapping* **188**–193
— биективное *bijective mapping* **190**–193
— инъективное *injective mapping* **189**–190
— сюръективное *surjective mapping* **189**–190
отрезок направленный, *см.* направленный отрезок
отрицание *negation* 178
оценивание *estimation* 717–736
оценка *estimate* **880**–886
— максимального правдоподобия *maximum-likelihood estimate* 725, 726
— наименьших квадратов *least squares estimate* 703–704
— несмещенная *unbiased estimate* 723, 724
— состоятельная *consistent estimate* 724
— точечная *point estimate* 727
— эффективная *efficient estimate* 724, 725
ошибка
— I рода *type I error* 731–734, 744, 770
— II рода *type II error* 731–734
— среднеквадратическая *mean square error* 735

**П**арабола *parabola* **53**–55, 57–59
— свойство оптическое *the optical property* 54, 59
параболоид
— гиперболический *hyperbolic paraboloid* **133**
— эллиптический *elliptic paraboloid* **132**–133
первообразная *primitive, antiderivative* **274**–277
перенос параллельный *parallel translation* **33**–34
пересечение множеств *intersection of the sets* **185**
перестановка *permutation* **80**–82
плоскость *plane* 28–29, 31–38
плотность распределения *distribution density* 620, 621
поверхность *surface* 35–36
— второго порядка *quadric surface* **128**–129
— уровня *level surface* **334**–339
поворот относительно начала координат *rotation coordinate* 34
подграф *subgraph* **822**–824
подмножество *subset* **187**
подпространство линейное *linear subspace* 137, 157, 161, 162
подстановка *substitution* **82**–83, 278, 286–288, 412
поиск
— «золотое сечение» *"golden section" search* **874**–875
— Фибоначчи *Fibonacci search* **872**–875
показатель островершинности *kurtosis coefficient* 680
поле *field* **95**–96
— векторное *vector field* 360
— скалярное *scalar field* 335–339, 360, 378
полюс *pole* **31**–33, **467**–475
последовательность *sequence* **210**–219
— сходящаяся *convergent sequence* 210
поток
— в сети *flow in the network* 856–862
— векторного поля *flow of the vector field* **371**
правило
— включения-исключения *inclusion-exclusion rule* 194
— Крамера *Cramer's rule* 91
— Лопиталя *L'Hospital's rule* 255–256
— суммы *sum rule* 195, 197, 200, 204, 207
предел
— односторонний *one-sided limit* **220**–223
— последовательности *limit of the sequence* **210**–219
— последовательности комплексных чисел *limit of the sequence of complex number* **425**–426
— функции *limit of the function* **219**–226
предикат *predicate* **181**–186
преобразование декартовых координат общее *translation of Cartesian coordinates* **34**
признак
— Даламбера *d'Alembert's test* 387–388
— Коши *Cauchy's test* 386
— Коши интегральный *integral Cauchy's test* 388–390
— Лейбница *Leibnitz test* 390–391
проверка гипотез *hypothesis verification* 924
программирование
— динамическое *dynamically programming* 910–914
— линейное *linear programming* 876–897

— математическое *mathematical programming* 687, 872, 877, 885, 898–899, 901, 919
— нелинейное *nonlinear programming* 899–903
проекция вектора *projection of a vector* **120**–121
произведение
— векторов
— — векторное *vector product* **123**–124
— — скалярное *scalar (inner) product of vectors* 121–122, 144
— — смешанное *mixed product of vectors* **124**–125
— матриц *product of matrices* **65**
— множеств Декартово *Descartes product of the sets* **195**–199
— скалярное *scalar product* 65, 144–147, 151, 336
производная *derivative* **239**–250
— обратной функции *derivative of inverse function* **243**–245
— по направлению *directional derivative* **335**–339
— функции комплексного переменного *derivative of the complex variable function* **432**–436
— частная *partial derivative* **324**–329
пространство
— евклидово *Euclidean space* **145**–148
— линейное *linear space* **110**–112, 114–118
— решений однородной системы линейных уравнений *solution space of linear equations system* **142**–143
прямая
— в пространстве *straight line in the space* **127**–128
— на плоскости *straight line in the plane* 37–46
— числовая *numerical line* **25**, 27
путь *path* 819, 820, 822
— кратчайший *shortest path* 848, 851–855, 864

**Р**адиус сходимости *convergent radius* **399**–404
размах *range* 672–673
размерность линейного пространства *dimension of a linear space* **114**
размещения *r-permutations* 202
разность множеств *difference of the sets* **186**, 187
разрез графа *cut of the graph* **839**, 840
ранг
— квадратичной формы *rank of a quadratic form* **165**
— матрицы *rank of a matrix* **137**–143, **161**
— — минорный *minor rank* **137**
— — столбцовый *column rank* **137**
— — строчный *row rank* **137**
распределение вероятностей *probability distribution* 619, 621–630
— биномиальное *binomial probability distribution* 622–625
— выборочное *sampling probability distribution* 720–724
— многомерное *multivariate probability distribution* 791
— нормальное *normal probability distribution* 627–633
— пуассоновское *Poisson probability distribution* 624–627
— равномерное *equal probability distribution* 620
— случайной величины *random variable probability distribution* 618–620
— — дискретное *discrete random variable probability distribution* 619
— — непрерывное *continuous random variable probability distribution* 619
— хи-квадрат *chi-square probability distribution* 718–719
расстояние между точками *distance between points* 27, 28, 35, 37
регрессия *regression* 925
решение дифференциального уравнения *solution of the differential equation* **482**, 485–490
ротор *rotor* 375–378
ряд
— Лорана *Laurent series* **462**–466, 469, 470
— Маклорена *MkLoren's series* 405–412
— степенной *power series* 257, **399**–409, 412–413, 441–444, 457–459, 461, 464
— Тейлора *Taylor's series* 405–409, 412, 456–461
— Фурье *Fourier's series* 416–422
— функциональный *functional series* **396**–399
— числовой *numerical series* **379**–396
— — знакоопределенный *numerical series of fixed sign* **384**–390
— — знакоположительный *numerical series of positive terms* 385, 384–385, 388, 389
— — знакочередующийся *alternating numerical series* 390–396
— — расходящийся *divergent numerical series* **381**, 383–390, 392
— — сходящийся *convergent numerical series* 381–382, 384–388, 390–396

**С**войство оптическое *the optical property* 54, 59
связность *connectivity* 822–827, 831
— сильная *biconnectivity* **824**, 843–845
сеть *network* **858**–861
сигнатура подстановки *signature of substitution* **81**
симплекс-метод *simplex-method* 889–892
система
— дифференциальных уравнений *system of the differential equations* 520–531
— — автономная *autonomy system of the differential equations* 521, 533, 537

— линейных уравнений *system of linear equations* **72**–79, 91, 92
— решений фундаментальная *fundamental system of the solutions* **142**–143
смысл
— дифференциала геометрический *geometrical sense of the differential* 248, 338
— неопределенного интеграла геометрический *geometrical sense of the indeterminate integral* 276–277, 345
— определенного интеграла геометрический *geometrical sense of the definite integral* 295–297
— производной
— — геометрический *geometrical sense of the derivative* 239–240, 325, 434–436
— — механический *mechanical sense of the derivative* 239–241
— частной производной геометрический *geometrical sense of partial derivative* 325
события *events* 599–618
— независимые *independent events* 615
сочетания *combinations* **203**, 205–207
среднее арифметическое *mean* 638, 666, 668–670
стандартное отклонение *standard deviation* 629, 631
степень
— вершины *degree of the edge* **815**, 827, 828
— множества Декартова *Descartes degree of the set* **196**
сумма
— векторов *sum of vectors* **119**–120
— интегральная *integral sum* **294**–295, 446
— матриц *sum of matrices* **61**–62
— ряда *sum of the series* **381**–385
сходимость правильная *regularity convergence* **404**

**Т**аблица
— интегралов *table of the integrals* 277
— производных *table of the derivatives* 243
— сопряженности *association table* 695, 696
теорема
— алгебры основная *main theorem of algebra* 106, 459
— Безу *Besuet theorem* 105–107
— Больцано–Коши *Boltzano–Cauchy theorem* 231
— Коши *Cauchy's theorem* 255
— Коши интегральная *integral Cauchy's theorem* 450–456
— Крамера *Cramer's theorem* 91
— Кронекера–Капелли *Kroneker–Capelli theorem* 141
— Куна–Таккера *Kun–Takker theorem* 910
— Кэлли *Cayley's theorem* 834
— Лагранжа *Lagrange's theorem* 254
— Лапласа *Laplasian theorem* 89
— Лиувилля *Liouville's theorem* 450
— о вычетах *theorem of the residue* 469
— Ролля *Roll's theorem* 252–253
— Сохоцкого *Sohotsky theorem* 468
— Стокса *Stocks theorem* 376–377
— Ферма *Fermat's theorem* 253
— Эйлера *Euler's theorem* 815
точка
— особая *singular point* **457**–458
— — изолированная *singular isolated point* **466**–468
— перегиба *points of inflection* **268**–269
— разрыва *discontinuity points* **231**–232
— регулярная *regular point* **457**–459
— сочленения *disjunction point* **845**
— существенно особая *essential singular point* **467**–469
точки
— критические *critical points* **267**
— экстремума функции *extremum points of the function* **253**, 267, 339–342, 866, 868, 869
треугольник Паскаля *Pascal's triangle* 205–207

**У**бывание функции *decrease of the function* **265**–267
умножение
— вектора на число *multiply vector by a number* 119–120
— матрицы на число *multiply matrix by a number* 64
уравнение
— гиперболическое *hyperbolic equation* **550**, 552–558
— дифференциальное *differential equation* **482**–547
— — в частных производных *differential equation in the partial derivatives* **549**–551
— колебаний струны *oscillation equation of the string* 257, **550**, 552–592
— Лапласа *Laplace's equation* 570–572
— линии *equation of a line* **35**–36
— — параметрическое *parameter equation of a line* **35**–36
— матричное *matrix equation* 68, 69
— параболическое *parabolic equation* **550**, 558–568
— плоскости *plane equation* 125–126
— поверхности *equation of a surface* **36**, **128**
— прямой *equation of a straight line* **37**–45, 240
— теплопроводности *heat conductivity equation* **558**–561, 567–569
— характеристическое *characteristic equation* **156**–157, **511**, 525–528, 534–538

— Эйлера *Euler equation* **553**, 917–919
— эллиптическое *elliptic equation* **550**, 569–576
уровень значимости, *см.* значимость/уровень
условия
— Даламбера–Эйлера, *см.* условия/Коши–Римана
— Коши–Римана (Даламбера–Эйлера) *Cauchy–Riemann's (d'Alembert–Euler's) conditions* 434
устойчивость по Ляпунову *Liapunov's stability* 532, 533

**Ф**окус
— гиперболы *focus of the hyperbola* **51**
— эллипса *focus of the ellipse* **47**
форма
— квадратичная *quadratic form* 165–174
— тригонометрическая комплексного числа *trigonometric form of complex number* 96–98
формула
— Гаусса–Остроградского *Gauss–Ostrogradsky formula* 361, 371–373, 375
— Грина–Остроградского *Green–Ostrogradsky formula* 361–366, 377
— Коши *Cauchy's formula* 402
— Муавра *de Moivres formula* 97
— Тейлора *Taylor's formula* 257–264, 409
— Эйлера *Euler's formula* 444
формулы Виета *Viets formules* 108
функционал *functional* **898**, 914–919
функция *function* **188**–191
— аналитическая *analytic function* 147, 254, **436**–437, 442, 452, 454, 456–462
— бесконечно большая *extremely large function* **234**–236
— бесконечно малая *infinitesimal function* **232**–238
— комплексного переменного *complex variable function* **426**, 431–438, 443–481
— Лагранжа *Lagrange function* **868**–871
— логарифмическая *logarithmic function* **227**–229, 445
— многих переменных *multivariable function* 319–342
— непрерывная *continuous function* **225**–232
— неявная *implicit function* **332**–334
— обратимая *invertible function* **191**
— обратная *inverse function* **191**, 243–245
— периодическая *periodical function* **414**–416
— плотности распределения *density function* 620, 621
— — двумерная *2-D density function* 621
— показательная *exponential function* 228
— рациональная *rational function* 106, **227**, 281, 284, 427
— элементарная *elementary function* **229**, 243–245, 261–262, 277, 409–412, 443
функция (отображение), *см.* оображение (функция)

**Ц**ентр масс *center of mass* 30–31, 350–351, 356
цепь *chain* **819**–828
цикл *cycle* **522**, **819**–822
цилиндр второго порядка *cylinder of a second order* **134**

**Ч**исло
— комплексно сопряженное *conjugate complex number* **94**
— комплексное *complex number* **94**–101
— степеней свободы *number of degrees of freedom* 718–720, 738–740
— элементов во множестве *number of elements in the set* **192**–193

**Э**квиваленция *equivalence* **180**
экстремум *extremum* **253**, 267, 273, 339–342, 866–870
— локальный *local extremum* **253**, 267
— условный *conditional extremum* **867**–872
эксцентриситет
— гиперболы *eccentricity of the hyperbola* **53**
— параболы *eccentricity of the parabola* **53**
— эллипса *eccentricity of the ellipse* **48**
эллипс *ellipse* **47**–51
эллипсоид *ellipsoid* **129**–131

**Я**дро линейного оператора *kernel of a linear operator* **160**–162

## *ВЛАДИМИРСКИЙ*

*Борис Михайлович*

*(род.1939)*

Окончил Новочеркасский политехнический институт, доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биофизики и биокибернетики Ростовского госуниверситета, директор НИИ нейрокибернетики им. А. Б. Когана РГУ, область научных интересов — анализ и моделирование информационных процессов в нервной системе животных и человека, автор свыше 100 печатных работ, в том числе трех монографий. Книга «Математические методы в биологии» (1983 г.) допущена Минвузом СССР в качестве учебного пособия для студентов биологических специальностей университетов.

## *ГОРСТКО*

*Александр Борисович*

*(род.1934)*

Окончил Харьковский госуниверситет, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и программирования Ростовского госуниверситета, лауреат Государственной премии СССР (1983), область научных интересов — имитационное моделирование эколого-экономических систем, автор более 140 работ, в том числе 8 монографий, в настоящее время работает в США.

## *ЕРУСАЛИМСКИЙ*

*Яков Михайлович*

*(род. 1947)*

Окончил Ростовский госуниверситет, кандидат физ.-мат. наук, профессор, декан механико-математического факультета Ростовского госуниверситета, Соросовский профессор, область научных интересов — теория графов и ее приложения, автор более 70 работ, в том числе учебного пособия «Дискретная математика: теория, задачи, приложения» (Вузовская книга, М., 2001, изд. 4-е).

*Борис Михайлович ВЛАДИМИРСКИЙ,*
*Александр Борисович ГОРСТКО, Яков Михайлович ЕРУСАЛИМСКИЙ*

**МАТЕМАТИКА. ОБЩИЙ КУРС**

Учебник

Издание четвертое, стереотипное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Редактор *А. С. Федоров*
Корректор *А. К. Райхчин*
Верстальщик в LaTeX *А. С. Сигов*
Выпускающие *О. В. Шилкова, Н. К. Белякова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**
lan@lpbl.spb.ru
www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Подписано в печать 15.09.08.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 80,22. Тираж 3000 экз.

Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14