

COMPLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DES
INGÉNIEURS DE L'ÉLEKTROTECHNIQUE
ET DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

PAR
ANDRÉ ANGOT

PARIS, 1957

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

АНДРЕ АНГО

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭЛЕКТРО- И РАДИОИНЖЕНЕРО

С предисловием
ЛУИ ДЕ БРОЙЛЯ

Перевод с французского
под общей редакцией
К. С. ШИФРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1965

517
А64
УДК 510:621.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 20
Предисловие Луи де Бройля 21

Введение 23

Глава I. **Функции комплексной переменной** 24

1.1. Комплексные величины 24

1.1.1. Определения 24
1.1.2. Сложение 25
1.1.3. Умножение 25
1.1.4. Замена обозначений 26
1.1.5. Сопряженные комплексные числа 27
1.1.6. Степень комплексного числа 27
1.1.7. Корни из комплексного числа 28
1.1.8. Корни из единицы 28
1.1.9. Ряды с комплексными членами 29
1.1.10. Степенные ряды 29
1.1.11. Экспоненциальная функция и логарифм 30
1.1.12. Дифференцирование и интегрирование по аргументу 31
1.1.13. Суммирование тригонометрических функций, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию 31

1.2. Применение комплексных величин при расчете электрических цепей в синусоидальном режиме 31

1.2.1. Введение 31
1.2.2. Графическое изображение синусоидальной функции 32
1.2.3. Представление с помощью комплексных чисел 33
1.2.4. Ограничения метода 34
1.2.5. Понятие комплексного полного сопротивления 35
1.2.6. Комплексное полное сопротивление при последовательном и параллельном соединении 36
1.2.7. Законы Кирхгофа 37
1.2.8. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления . . . 38
1.2.9. Комплексный вектор 41

1.3. Понятие о функции комплексной переменной 42

1.3.1. Непрерывность 42
1.3.2. Однозначные функции 42
1.3.3. Аналитическая функция 43
1.3.4. Голоморфная функция 44
1.3.5. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной . 44
1.3.6. Теорема Коши 45
1.3.7. Формула Коши 46
1.3.8. Ряд Тейлора 47
1.3.9. Особые точки 48
1.3.10. Разложение в ряд Лорана 48

Интегрирование по методу вычетов 50

1.3.11. Теорема о вычетах 50
1.3.12. Вычисление вычетов 50

1.3.13. Вычисление вычетов относительно кратных полюсов с помощью производных . . . 52
1.3.14. Лемма Жордана . . . 53
1.3.15. Применение леммы Жордана к единичной функции . . . 54
1.3.16. Интегрирование при наличии точки разветвления . . . 55
1.3.17. Контур Бромвича . . . 56
1.3.18. Интеграл Бромвича — Вагнера . . . 57
1.3.19. Эквивалентный контур . . . 57
1.3.20. Теорема о числе полюсов и числе нулей . . . 60
Применение теоремы о вычетах к вычислению некоторых определенных интегралов . . . 61
1.3.21. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ . . . 61
1.3.22. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ . . . 62
1.3.23. Интегралы вида $\int_0^{\infty} f(x)\cos mx\, dx$, $\int_0^{\infty} f(x)\sin mx\, dx$ . . . 63
1.3.24. Интегралы вида $\int_0^{\infty} x^a f(x)\, dx$ . . . 64
1.3.25. Применение теоремы о вычетах к суммированию некоторых рядов . . . 65
1.4. Конформные отображения . . . 66
1.4.1. Определение . . . 66
1.4.2. Несколько примеров конформных отображений . . . 71
1.4.3. Последовательные отображения . . . 76
1.4.4. Отображение Шварца . . . 77
1.4.5. Различные применения конформных отображений . . . 83
Литература к главе I . . . 84
Глава II. **Ряд Фурье. Интеграл Фурье** . . . 85
2.1. Ряд Фурье . . . 85
2.1.0. Введение . . . 85
2.1.1. Вычисление коэффициентов . . . 85
2.1.2. Разложение в ряд по ортогональным функциям . . . 86
2.1.3. Частные случаи . . . 87
2.1.4. Интегрирование и дифференцирование . . . 88
2.1.5. Случай, когда разложение в ряд Фурье ограничено первыми n членами . . . 90
2.1.6. Изучение разложения в ряд Фурье вблизи точки разрыва. Явление Гиббса . . . 91
2.1.7. Случай произвольного промежутка . . . 93
2.1.8. Ряды с комплексными членами . . . 94
2.1.9. Графическое представление. Спектр . . . 94
2.1.10. Среднее значение произведения двух функций одного периода, разложимых в ряд Фурье . . . 96
2.1.11. Распространение ряда Фурье на почти периодические функции . . . 97
2.2. Интеграл Фурье . . . 98
2.2.1. Вещественная форма интеграла Фурье . . . 98
2.2.2. Комплексная форма интеграла Фурье . . . 100
2.2.3. Применение к электрическим цепям . . . 102
2.2.4. Случай незатухающей цепи . . . 104
2.2.5. Спектр частот . . . 105
2.2.6. Единичная функция Хевисайда . . . 109

2.2.7. Пары функций 109
2.2.8. Преобразование Фурье 110
2.2.9. Физическая реальность интеграла Фурье 113
2.2.10. Изучение диаграмм направленности 115

Литература к главе II 116

Глава III. **Векторное исчисление** 117

3.1. Скалярные величины. Векторные величины. Определения 117

Скалярные величины 117

3.1.1. Чистые скаляры 117
3.1.2. Псевдоскаляры 117

Векторные величины 117

3.1.3. Ось 117
3.1.4. Направление вращения 118
3.1.5. Прямые и обратные трехгранники 118
3.1.6. Векторы 118
3.1.7. Положительное направление трех векторов a, b, c 120
3.1.8. Угол между двумя векторами a и b 120

Операции над векторами 120

3.1.9. Произведение вектора a на скаляр f 120
3.1.10. Составляющие вектора 120
3.1.11. Сложение векторов 120
3.1.12. Скалярное произведение 121
3.1.13. Векторное произведение 122
3.1.14. Смешанное произведение трех векторов 123
3.1.15. Двойное векторное произведение трех векторов 124

3.2. Дифференциальные операции с векторами 124

Дифференцирование 124

3.2.1. Производная вектора. Производная точки 124
3.2.2. Производная вектора по другому вектору 125
3.2.3. Основные формулы дифференцирования 125
3.2.4. Интеграл от вектора 126

Функции точек 126

3.2.5. Градиент 127
3.2.6. Нормальная производная 127
3.2.7. Поверхности уровня 128
3.2.8. Смысл вектора $\mathrm{grad}\, f$ 128
3.2.9. Силовые линии 128
3.2.10. Градиент сложной скалярной функции 129
3.2.11. Дивергенция и вихрь 129
3.2.12. Оператор Лапласа 130
3.2.13. Символический вектор набла (оператор Гамильтона) 130
3.2.14. Наиболее употребительные формулы 132
3.2.15. Смысл вектора $\mathrm{rot}\, a$ 134
3.2.16. Скалярный потенциал 134
3.2.17. Частный случай: вектор проходит через фиксированную точку . 136
3.2.18. Векторный потенциал 137
3.2.19. Общий случай векторного поля 139

3.3. Векторные интегралы 139

3.3.1. Циркуляция вектора 139
3.3.2. Поток вектора 140

Основные формулы 140

3.3.3. Теорема Остроградского 140
3.3.4. Смысл скаляра $\mathrm{div}\, a$ 142

3.3.5. Формула для градиента 143
3.3.6. Формула для вихря 143
3.3.7. Инвариантность градиента, дивергенции, вихря 144
3.3.8. Формула Грина 144
3.3.9. Формула Стокса 145

Приложение векторного исчисления к теории электромагнитного поля 147

3.3.10. Электростатическое поле 147
3.3.11. Магнитное поле постоянных токов 149
3.3.12. Электромагнитное поле 150
3.3.13. Закон Фарадея 150
3.3.14. Закон Ампера 150
3.3.15. Уравнения Максвелла 151
3.3.16. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током . 151

Системы ортогональных криволинейных координат 153

3.4.1. Определение 153
3.4.2. Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах 157

Важнейшие системы ортогональных криволинейных координат в пространстве 158

3.4.3. Система цилиндрических координат 158
3.4.4. Система сферических координат 159
3.4.5. Система параболических цилиндрических координат 160
3.4.6. Система параболических координат вращения (параболоидальные координаты) 160
3.4.7. Система эллиптических цилиндрических координат 161
3.4.8. Система вытянутых эллипсоидальных координат (вращения) . . . 162
3.4.9. Система сплюснутых эллипсоидальных координат (вращения) . . 163
3.4.10. Система бицилиндрических координат 164
3.4.11. Системы тороидальных и бисферических координат 165
3.4.12. Система софокусных поверхностей второго порядка (система общих эллипсоидальных координат) 167
3.4.13. Приложение к уравнениям Максвелла. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах 168

Литература к главе III 169

V. **Матричное исчисление** 170

Алгебра матриц 170

4.1.1. Плоское преобразование, понятие оператора 170
4.1.2. Сумма двух операторов 171
4.1.3. Произведение двух операторов 171
4.1.4. Представление плоских преобразований с помощью матриц . . . 171
4.1.5. Произведение двух матриц 172
4.1.6. Представление вектора посредством матрицы 173
4.1.7. Обобщение на n-мерное пространство 173
4.1.8. Равенство двух матриц 174
4.1.9. Сложение двух матриц 174
4.1.10. Умножение матрицы на число 174
4.1.11. Умножение матриц 174
4.1.12. Симметричные матрицы 176
4.1.13. Кососимметричные матрицы 176
4.1.14. Диагональные матрицы 177
4.1.15. Единичная матрица. Нулевая матрица 177
4.1.16. Порядок, ранг матрицы 177
4.1.17. Необходимые условия равенства нулю произведения двух матриц 178
4.1.18. Транспонированная матрица 179
4.1.19. Обратная матрица 180
4.1.20. Применение матричного исчисления к решению системы линейных уравнений 183
4.1.21. Преобразование системы координат 185

4.1.22. Ортогональное преобразование 186
4.1.23. Пример ортогональных преобразований. Поворот 187

Обобщение на комплексное пространство 187

4.1.24. Эрмитова матрица 187
4.1.25. Эрмитово-сопряженная матрица 187
4.1.26. Модуль и скалярное произведение в комплексном пространстве 188
4.1.27. Ортогональное преобразование комплексного пространства (унитарное преобразование) 189
4.1.28. Собственные значения, собственные векторы и характеристическое уравнение матрицы 189
4.1.29. Свойства характеристического уравнения 190
4.1.30. Матрица, отнесенная к собственным направлениям 191
4.1.31. Условия коммутативности двух матриц 192
4.1.32. Собственные значения и собственные направления эрмитовой матрицы 192

Функции от матриц 193

4.1.33. Степень матрицы 193
4.1.34. Теорема Кели — Гамильтона 194
4.1.35. Функции от матриц. Теорема Сильвестра 194
4.1.36. Формула Бэкера 196
4.1.37. Высокие степени матрицы 198
4.1.38. Дробная степень матрицы 198
4.1.39. Приближенное вычисление собственных значений матрицы . . . 199
4.1.40. Приближенное вычисление корней уравнения n-й степени . . . 203

Дифференциальные операции над матрицами. Применение к решению дифференциальных уравнений 205

4.1.41. Дифференцирование и интегрирование матрицы 205
4.1.42. Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка 206
4.1.43. Система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами 207
4.1.44. Случай линейного дифференциального уравнения n-го порядка 209

4.2. Применение матричного исчисления. Изучение четырехполюсников . . 210

4.2.1. Определение 210
4.2.2. Соединение четырехполюсников по цепной схеме 212
4.2.3. Параллельное соединение четырехполюсников 213
4.2.4. Последовательное соединение четырехполюсников 213
4.2.5. Последовательно-параллельное и параллельно-последовательное соединение четырехполюсников 214
4.2.6. Сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника 216
4.2.7. Пассивные четырехполюсники 216
4.2.8. Симметричные четырехполюсники 217

Примеры простых четырехполюсников 217

4.2.9. Четырехполюсник с одним последовательным сопротивлением . . 217
4.2.10. Четырехполюсник с одним параллельным сопротивлением 217
4.2.11. Г-образный четырехполюсник 218
4.2.12. Т-образный и П-образный четырехполюсники 218
4.2.13. Х-образный четырехполюсник (решетчатый фильтр) 219
4.2.14. Трансформатор 220
4.2.15. Электронная лампа 221
4.2.16. Повторное сопротивление четырехполюсника 224
4.2.17. Случай пассивного четырехполюсника 225
4.2.18. Цепные фильтры 226
4.2.19. Полоса пропускания четырехполюсника 228
4.2.20. Расчет свободных колебаний цепи 229
4.2.21. Контуры с периодически меняющимися параметрами 232
4.2.22. Матрицы в квантовой механике 235

Литература к главе IV 237

Глава V. Тензорное исчисление. Приложения 238

5.1. Тензорная алгебра 238

Аффинное векторное пространство. Метрическое пространство . . . 238

5.1.1. Определения 238
5.1.2. Преобразование координат 239
5.1.3. Ковариантные и контравариантные векторы 240
5.1.4. Определение тензора 241
5.1.5. Матричная форма формул преобразования координат 242
5.1.6. Немой индекс 245
5.1.7. Симметрия и антисимметрия 245
5.1.8. Псевдоскаляры. Скалярная плотность и скалярная емкость . . . 247
5.1.9. Тензорная плотность и тензорная емкость 248
5.1.10. Антисимметричный тензор второй валентности в трехмерном пространстве 249

Операции над тензорами 250

5.1.11. Сложение двух тензоров 250
5.1.12. Свертывание тензора 250
5.1.13. Умножение тензоров 251
5.1.14. Свертывание произведения 251
5.1.15. Установление типа тензора 251

5.2. Тензоры в криволинейной системе координат 252

5.2.1. Определение криволинейных координат. Криволинейные оси. Координатная поверхность 252
5.2.2. Фундаментальный метрический тензор 254
5.2.3. Преобразование определителя g фундаментального метрического тензора при преобразовании координат 255
5.2.4. Выражение для элемента объема 255
5.2.5. Косоугольная система координат на плоскости 255
5.2.6. Ортогональные криволинейные координаты в трехмерном пространстве 256
5.2.7. Случай произвольных криволинейных координат 257
5.2.8. Контравариантные или ковариантные составляющие компоненты одного и того же вектора 257
5.2.9. Изменение варнантности тензора 258
5.2.10. Смешанный фундаментальный метрический тензор 258
5.2.11. Случай прямолинейной прямоугольной системы координат . . . 258

Геометрическое представление контравариантных и ковариантных компонент вектора 258

5.2.12. Случай прямоугольной косоугольной системы координат . . . 258
5.2.13. Случай криволинейных координат 259
5.2.14. Частный случай ортогональных криволинейных координат . . . 261

5.3. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах 261

5.3.1. Градиент 261
5.3.2. Ротор (вихрь) 262
5.3.3. Дивергенция 262
5.3.4. Лапласиан (оператор Лапласа) 262

Частный случай ортогональных криволинейных координат 263

5.3.5. Градиент 263
5.3.6. Ротор 263
5.3.7. Дивергенция 263
5.3.8. Лапласиан 264
5.3.9. Тензорная форма уравнений Максвелла 264

5.4. Применение тензорного исчисления к исследованию электрических цепей 265

5.4.1. Элементы электрических цепей с сосредоточенными постоянными 265
5.4.2. Метод составления уравнений для цепи наиболее общего вида . 268
5.4.3. Соединение цепей посредством проводников 277

5.4.4. Соединение цепей посредством магнитопроводов 280
5.4.5. Анализ эквивалентных цепей 282
5.4.6. Цепи с внешним питанием 285

5.5. Применение тензорного исчисления к изучению анизотропных сред . . 288

5.5.1. Введение 288
5.5.2. Диэлектрические свойства кристалла 288
5.5.3. Матрицы преобразования для некоторых часто встречающихся систем координат 289

Механические свойства кристалла 291

5.5.4. Напряжение 291
5.5.5. Деформации 292
5.5.6. Тепловое расширение 293
5.5.7. Обобщенный закон Гука 293
5.5.8. Применение шестимерного пространства 295
5.5.9. Модуль Юнга 298

Пьезоэлектричество 298

5.5.10. Электрическая поляризация 298
5.5.11. Закон Кюри 301
5.5.12. Пьезоэлектрические свойства кварца 301
5.5.13. Распространение упругих волн в кристаллах 303
5.5.14. Плоские волны 304

Литература к главе V 305

Глава VI. Методы интегрирования дифференциальных уравнений 306

6.1. **Дифференциальные уравнения первого порядка** 306

6.1.1. Уравнение вида $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)=0$, $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ 306
6.1.2. Уравнения с разделяющимися переменными 307
6.1.3. Однородные уравнения 308
6.1.4. Уравнение в полных дифференциалах 309
6.1.5. Линейное уравнение 310
6.1.6. Уравнение Бернулли 311
6.1.7. Уравнение Риккати 311
6.1.8. Уравнение Лагранжа 311
6.1.9. Уравнение Клеро 311
6.1.10. Общий случай $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ 312

6.2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого 313

Случаи понижения порядка уравнения 313

6.2.1. Уравнение не содержит явно функцию y 313
6.2.2. Уравнение не содержит явно независимой переменной x 313
6.2.3. Уравнение, одиородное относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 313
6.2.4. Уравнение, однородное относительно x и dx 314
6.2.5. Уравнение, однородное относительно $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$. 314
6.2.6. Общий случай однородного уравнения 314

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка 315

6.2.7. Введение 315
6.2.8. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) . 315
6.2.9. Уравнение Эйлера 317
6.2.10. Интегрирование при помощи степенных рядов 317
6.2.11. Некоторые теоремы о свойствах решений линейного дифференциального уравнения второго порядка 322

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 324

6.2.12. Интегрирование однородного дифференциального уравнения . . 325

6.2.13. Случай кратного корня 325
6.2.14. Частный интеграл неоднородного уравнения 326
6.2.15. Случай резонанса 328
6.2.16. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 329

Уравнения с частными пронзводными 330

6.3.1. Линейное уравненяе с постоянными коэффициентами, однородное относительно частных производных 330
6.3.2. Уравнение с правой частью 331
6.3.3. Уравненне колебаний струны 331
6.3.4. Телеграфное уравнение 333
6.3.5. Уравнение Лапласа 333
6.3.6. Прямоугольная система координат 335
6.3.7. Система цилиндрическнх координат 335
6.3.8. Система сферическнх координат 337
6.3.9. Система эллиптических и цилиндрических координнат 338
6.3.10. Система параболических цилиндрическнх координнат 339
6.3.11. Другие системы координат 340
6.3.12. Уравнение Пуассона 342
6.3.13. Решение уравнений Максвелла методом Бромвича 343
6.3.14. Пример. Электромагнитные колебания в прямоугольной полости 347

Литература к главе VI 348

II. **Наиболее употребительные специальные функции** 349

7.01. Аснмптотическое разложение 349

Гнперболнческие функции 352

7.1.1. Определения 352
7.1.2. Обратные гиперболические функции 354
7.1.3. Приложение гиперболических функций к расчету длннных линий. Метод Броуна. Абаки Блонделя — Кеннелн 354
7.1.4. Графики функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ 355
7.1.5. Таблицы показательной и гиперболической функций 356

Интегральный синус и косинус 356

7.2.1. Определение 356
7.2.2. Разложение в степенной ряд 357
7.2.3. Разложение в асимптотический ряд 357
7.2.4. Графики функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ 358
7.2.5. Таблнцы функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ 358
7.2.6. Положение экстремумов функций $\operatorname{Ci} x$ и $\operatorname{Si} x$ 360

Функция вероятности ошибок 360

7.3.1. Определенне 360
7.3.2. Разложение функции $\Phi(x)$ в степенной ряд 361
7.3.3. Разложение в асимптотический ряд функции $1 - \Phi(x)$ 361
7.3.4. Выражение функцнн $1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$ через интеграл Коши 362
7.3.5. Таблица функции $\Phi(x)$ 363
7.3.6. График функцнн $\Phi(x)$ 364
7.3.7. Интегралы Френеля 364

Гамма-функция 365

7.4.1. Определенне 365
7.4.2. Свойства гамма-функции 367
7.4.3. Некоторые значения функции $\Gamma(z)$ 368
7.4.4. Логарифмическая производная гамма-функции 368
7.4.5. Представление гамма-функции через интеграл Коши 369
7.4.6. Связь между эйлеровымн интегралами первого и второго рода 370

7.4.7. График функции $y = \Gamma(x + 1)$ 371
7.4.8. Таблица функции $\Gamma(x + 1)$ 371

7.5. Функции Бесселя 372

Функции Бесселя первого и второго рода 372

7.5.1. Определение функции первого рода 372
7.5.2. Соотношение между $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ 373
7.5.3. Определение бесселевой функции второго рода 374
7.5.4. Рекуррентные соотношения 376
7.5.5. Применение рекуррентных соотношений к вычислению некоторых интегралов 376
7.5.6. Интегралы Ломмеля 378
7.5.7. Соотношение между двумя функциями, индексы которых отличаются на целое число 379
7.5.8. Применение интегралов Ломмеля к разложению в ряд по бесселевым функциям 380
7.5.9. Бесселевы функции первого и второго рода с полуцелым индексом 381
7.5.10. Применение бесселевых функций к вычислению интегралов Френеля 382
7.5.11. Случай, когда индекс равен целому числу $\nu = n$ 383
7.5.12. Представление $J_\nu(z)$ через определенный интеграл 385
7.5.13. Представление $J_\nu(z)$ с помощью интеграла Коши 386
7.5.14. Теорема сложения 386
7.5.15. Бесселевы функции третьего рода или функции Ханкеля. Определение 387
7.5.16. Асимптотические разложения 387
7.5.17. Нахождение численных значений бесселевых функций 388
7.5.18. Асимптотические выражения для бесселевых функций при больших значениях аргумента 388
7.5.19. Корни бесселевых функций 389
7.5.20. Кривые $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, . . ., $J_5(x)$ 390
7.5.21. Поверхность $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$ 390
7.5.22. Кривые $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{3}{2}}(x)$, . . ., $J_{-\frac{9}{2}}(x)$ 393
7.5.23. Кривые $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, $Y_4(x)$ 393
7.5.24. Поверхность $z = f(x, \nu) = Y_\nu(x)$ 393

Модифицированные бесселевы функции первого и второго рода . . . 393

7.5.25. Модифицированная бесселева функция первого рода 393
7.5.26. Модифицированная бесселева функция второго рода 396
7.5.27. Асимптотические разложения 396
7.5.28 Рекуррентные формулы 397
7.5.29. Кривые $I_0(x)$, $I_1(x)$, . . ., $I_{11}(x)$ 398
7.5.30. Кривые $K_0(x)$ и $K_1(x)$ 398

Функции Кельвина 398

7.5.31. Функции Кельвина нулевого порядка 398
7.5.32. Функции Кельвина ν-го порядка 401
7.5.33. Представление функций Кельвина через модуль и аргумент . . 401
7.5.34. Производные функций Кельвина 401
7.5.35. Графики функций $\mathrm{ber}(z)$, $\mathrm{bei}(z)$, $M_0(z)$, $\theta_0(z)$ 403

Дифференциальные уравнения, решение которых может быть выражено через решение дифференциального уравнении Бесселя 403

7.5.36. Основные типы 403

Некоторые примеры применения бесселевых функций 405

7.5.37. Колебание однородной тяжелой нити, подвешеиной за один конец 405
7.5.38. Исследование решения волнового уравнения в цилиндрических координатах 407
7.5.39. Колебаиия равномерно натянутой мембраны 408
7.5.40. Случай круглой мембраны 408

7.5.41. Собственные электромагнитные колебания резонатора, имеющего форму кругового цилиндра 410
7.5.42. Распространение электромагнитной волны внутри бесконечного кругового цилиндра 413
7.5.43. Случай коаксиального проводника 415
7.5.44. Скин-эффект переменных токов, проходящих по цилиндрическому проводнику круглого сечения 416
7.5.45. Спектр волны, модулированной по частоте 418

Таблицы бесселевых функций 422

7.5.46. Функции J_0, J_1, Y_0, Y_1 422
7.5.47. Бесселевы функции J_2, J_3, ..., J_9 425
7.5.48. Бесселевы функции J_{10}, J_{11}, ..., J_{17} 425
7.5.49. Таблицы первых корней функций $J_n(z)$, $J_n'(z)$ 426
7.5.50. Бесселевы функции $J_{\frac{1}{2}}$, $J_{\frac{3}{2}}$, ..., $J_{\frac{13}{2}}$ 427
7.5.51. Бесселевы функцин $J_{-\frac{1}{2}}$, $J_{-\frac{3}{2}}$, ..., $J_{-\frac{13}{2}}$ 428
7.5.52. Функции ber, bei, ker, kei и их производные 428
7.5.53. Функции M_0, θ_0, M_1, θ_1 430

7.6. Функции Лежандра 432

7.6.1. Введение 432
7.6.2. Разложения в степеиные ряды 432
7.6.3. Полиномы Лежандра 434
7.6.4. Производящая функция полиномов Лежандра 434
7.6.5. Примеры полиномов Лежандра 436
7.6.6. Представление полиномов Лежандра через определенный интеграл. Формула Лапласа 436
7.6.7. Рекуррентные формулы 437
7.6.8. Формула Родрига 438
7.6.9. Ортогональность полиномов Лежандра 438
7.6.10. Некоторые значения полиномов Лежандра 440
7.6.11. Корни полиномов Лежандра 440
7.6.12. Интеграл Шлефли 440
7.6.13. Обобщенне полиномов Лежандра. Полиномы Гегенбауера . . . 441
7.6.14. Функции Лежандра первого рода 441
7.6.15. Описание поверхности $y = P_\nu(\cos\theta)$ 443
7.6.16. Корни функций Лежандра первого рода 443
7.6.17. Рекуррентные формулы 445
7.6.18. Определение функции Лежандра первого рода через интеграл Коши 446
7.6.19. Функция Лежандра второго рода. Определения 447
7.6.20. Определение функции Лежандра второго рода через интеграл Коши 449
7.6.21. Присоединенные функции Лежандра 450
7.6.22. Присоединенные функции Лежандра для целых положительных индексов 451
7.6.23. Рекуррентные соотношения 454
7.6.24. Ортогональность присоединенных функций Лежандра 455
7.6.25. Некоторые значения присоединенных функций Лежандра. Приложение присоединенных функций 456
7.6.26. Сферические гармоники 457
7.6.27. Графики функций Лежандра первого рода 458
7.6.28. Графики функций Лежандра второго рода 458
7.6.29. Таблица значений первых семи полиномов Лежандра 459
7.6.30. Графики нормированных присоединенных функций Лежандра первого рода 460
7.6.31. Приложение функций Лежандра. Решение задачи об электромагнитных колебаниях сферического резонатора 460

7.7. Функции Матье 465

7.7.1. Функции Матье первого рода 465
7.7.2. Ортогональность функции Матье первого рода 466

7.7.3. Разложение в ряд Фурье 466
7.7.4. Характеристическое уравнение 468
7.7.5. Поведение функций $ce_m(z, q)$, $se_m(z, q)$ 469
7.7.6. Присоединенные функции Матье первого рода 469
7.7.7. Функции Матье для произвольных a и q 470
7.7.8. Разложение в ряды по бесселевым функциям 471
7.7.9. Функции Матье второго рода 472

7.8. Функции Вебера — Эрмита. Полиномы Эрмита 473

7.8.1. Функции Вебера — Эрмита или функции параболического цилиндра 473
7.8.2. Полиномы Эрмита 475
7.8.3. Производящая функция и ортогональность полиномов Эрмита . 476

7.9. Полиномы Чебышева 478

7.9.1. Определение 478
7.9.2. Графики $T_n(\omega)$ и $U_n(\omega)$ 480
7.9.3. Основные свойства полиномов Чебышева 482
7.9.4. Фундаментальное свойство полиномов Чебышева 485
7.9.5. Приложение 486

Литература к главе VII 488

Глава VIII. Символическое, или операционное, исчисление 490

8.1. Введение 490

8.1.1. Ограничение области применения 490
8.1.2. Расчет установившихся режимов 490
8.1.3. Расчет переходных режимов 491
8.1.4. Единичная ступень 493

8.2. Теория электрических цепей Хевисайда 493

8.2.1. Определение переходной реакции 493
8.2.2. Вычисление переходной реакции 495

8.3. Операционное исчисление 498

8.3.1. Преобразование Лапласа. Преобразование Карсона 498

Правила операционного исчисления 500

8.3.2. Сложение 500
8.3.3. Изменение масштаба 502
8.3.4. Дифференцирование функции $h(t)$ 504
8.3.5. Интегрирование функции $h(t)$ 504
8.3.6. Теорема смещения 505
8.3.7. Теорема запаздывания 505
8.3.8. Дифференцирование функции $F(p)$ 505
8.3.9. Интегрирование функции $F(p)$ 506
8.3.10. Теорема свертывания, или теорема Бореля 506
8.3.11. Различные формулы 507
8.3.12. Теорема разложения Хевисайда 509
8.3.13. Приложение теоремы разложения к электрическим цепям. Случай постоянного напряжения 510
8.3.14. Случай переменного напряжения 511
8.3.15. Случай кратных корней 512

Преобразование некоторых употребительных функций 513

8.3.16. Оригиналы некоторых рациональных функций 513
8.3.17. Изображения бесселевых функций целого порядка 515
8.3.18. Изображение $\ln t$ 517
8.3.19. Изображение интегральных косинуса и синуса 518
8.3.20. Изображение функции ошибок 518
8.3.21. Изображение единичного импульса 519

Применение формулы обращения 521

8.3.22. Теорема Меллина — Фурье 521
8.3.23. Замечания о применении формулы обращения 523
8.3.24. Обобщение теоремы разложения Хевисайда 527

Изображения разрывных функций. Приложения 528

8.3.25. Введение 528
8.3.26. Изображения непериодических разрывных функций 528
8.3.27. Изображение периодических разрывных функций 530

Таблица соответствия 532

8.3.28. Введение 532
8.3.29. Непрерывные функции 533
8.3.30. Разрывные функции. График 538

8.4. Приложения операционного исчисления к электрическим цепям . . . 543

8.4.1. Колебательные контуры 543
8.4.2. Пример применения к системе двух связанных контуров 544
8.4.3. Случай, когда цепь не находится в равновесии в начальный момент времени 547
8.4.4. Электрические фильтры 548
8.4.5. Фильтр нижних частот 549
8.4.6. Фильтр верхних частот 551
8.4.7. Фильтр нижних частот без искажений 552
8.4.8. Усилители. Отрицательная обратная связь. Критерий Найквиста 553
8.4.9. Расчет переходных явлений, вызванных размыканием или замыканием выключателя 554

Распространение электрических возмущений вдоль линий передач . . . 557

8.4.10. Общие соображения 557
8.4.11. Бесконечная или замкнутая на волновое сопротивление линия . 560
8.4.12. Линия без потерь 560
8.4.13. Линия без искажений 561
8.4.14. Подземный кабель 561
8.4.15. Линия с идеальной изоляцией 562
8.4.16. Общий случай. Произвольная линия 563
8.4.17. Линия передачи конечной длины 564
8.4.18. Закороченная с одного конца линия с пренебрежимо малыми проводимостью изоляции и индуктивностью (подземный кабель) 564
8.4.19. Линия конечной длины без потерь, замкнутая на сопротивление 566
8.4.20. Сопротивление, сосредоточенное в начале линии 567
8.4.21. Повреждение на линии 568

8.5. Математические приложения операционного исчисления 568

8.5.1. Применение операционного исчисления к вычислению определенных интегралов 568

Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений 570

8.5.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 570
8.5.3. Линейное дифференциальное уравнение с переменными алгебраическими коэффициентами (метод ван дер Поля) 572

Применение операционного исчисления к решению некоторых интегральных уравнений 574

8.5.4. Линейные интегральные уравнения 574
8.5.5. Нелинейные интегральные уравнения 576
8.5.6. Интегродифференциальные уравнения 576
8.5.7. Применение операционного исчисления к исследованию функций 577
8.5.8. Применение операционного исчисления к разложению в асимптотический ряд 581

8.6. Некоторые замечания 582

8.6.1. Замечания об операционном исчислении Хевисайда 582
8.6.2. Обозначения в операционном исчислении 584

Литература к главе VIII 584

Глава IX. Теория вероятностей. Приложения 585

9.1. Случайная величина 585

9.1.1. Определение вероятности 585
9.1.2. Независимые события. Теорема умножения вероятностей . . . 586
9.1.3. Несовместные события. Теорема сложения вероятностей 586
9.1.4. Формула Стирлинга 587

Законы распределения случайных величин 589

9.1.5. Дискретные случайные величины 589
9.1.6. Непрерывные случайные величины 591
9.1.7. Характеристическая функция 592
9.1.8. Распределение системы двух случайных величин 594
9.1.9. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин 595

Основные законы распределения случайных величин 596

9.1.10. Биномиальный закон распределения 596
9.1.11. Характеристическая функция биномиального закона 597
9.1.12. Формула Лапласа. Нормальный закон распределения (закон Лапласа — Гаусса) 599
9.1.13. Характеристическая функция нормального закона распределения 602
9.1.14. Теорема Бернулли 602
9.1.15. Замечания о переходе от биномиального закона распределения к нормальному 603
9.1.16. Закон распределения Пуассона 604
9.1.17. Характеристическая функция и моменты закона распределения Пуассона 605
9.1.18. Приложение к задачам автоматической телефонии 605
9.1.19. Согласование наблюденных данных с теоретическим законом распределения. Разложение в ряд Грама — Шарлье 612
9.1.20. Частный случай нормального закона распределения 614

Ошибки измерений и способ наименьших квадратов 615

9.1.21. Ошибки измерений и нормальный закон распределения 615
9.1.22. Способ наименьших квадратов 617
9.1.23. Линейная комбинация ошибок 617
9.1.24. Точность группы измерений 618
9.1.25. Наивероятнейшее значение меры точности 619
9.1.26. «Вес» наблюдения 620
9.1.27. Критерий ошибочного наблюдения 621
9.1.28. Срединная (вероятная) ошибка функции 621
9.1.29. Эмпирические формулы 621

9.2. Понятие случайной функции 623

9.2.1. Введение понятия случайной функции на конкретном примере . . 623
9.2.2. Функции распределения 627

Проблема сходимости 631

9.2.3. Введение 631
9.2.4. Сходимость в смысле Бернулли 631
9.2.5. Сходимость по вероятности 632
9.2.6. Сходимость в среднем квадратическом (сходимость с. к.) 633
9.2.7. Почти достоверная сходимость 635

Стационарные случайные функции. Изучение постоянных режимов . . 636

9.2.8. Введение 636
9.2.9. Изучение моментов второго порядка. Определение 638

Общие свойства стационариых случайных функций второго порядка . 640

9.2.10. Корреляционные функции 640
9.2.11. Непрерывность. Дифференцируемость 641
9.2.12. Энергетический спектр 644
9.2.13. Передача энергии стационарной линейной системой 650
9.2.14. Недостаточность рассмотрения моментов второго порядка и корреляционной функции 654

Стационариые случайные функции Лапласа — Гаусса. Применение к чисто дробовому эффекту 656

9.2.15. Общие замечания 656
9.2.16. Связь явлений во времени 660
9.2.17. Флуктуации в нелинейных системах 661
9.2.18. Вычисление корреляционной функции на выходе линейного усилителя под действием дробового эффекта постоянного тока . 663

Литература к главе IX 665

Глава X. Приближенные и графические вычисления 666

10.1. Решение численных уравнений 666

10.1.1. Графическое решение 666
10.1.2. Метод Ньютона и метод пропорциональных частей 667
10.1.3. Метод итерации 669
10.1.4. Приближенное решение системы двух уравнений 671

10.2. Решение алгебраических уравнений 674

10.2.1. Численное решение уравнений третьей и четвертой степени . . 674
10.2.2. Схема Горнера 676
10.2.3. Построение Лилла 678
10.2.4. Способ Лагранжа 679
10.2.5. Метод Лобачевского — Греффе — Данделеиа 680

10.3. Приближение функции 688

Приближение функции полиномами 688

10.3.1. Введение 688
10.3.2. Значения аргумента распределены неравномерно. Интерполяционный полином Лагранжа 688
10.3.3. Зиачения переменной находятся в арифметической прогрессии. Таблица разностей 691

Интерполяционные полиномы 693

10.3.4. Интерполяционный полином Ньютона 693
10.3.5. Интерполяционный полином Стирлинга 696
10.3.6. Интерполяционный полином Бесселя 697
10.3.7. Области применения интерполяционных полиномов Ньютоиа, Бесселя, Стирлинга 698
10.3.8. Верхний предел ошибки, совершаемой при применении интерполяционных формул Ньютона, Стирлинга, Бесселя 699
10.3.9 Приближение линейной комбинацией функций, определенной с помощью критерия наименьших квадратов 700
10.3.10. Приближение полиномом, определенным с помощью критерия наименьших квадратов 700

Приближение отрезком ряда Фурье. Задача гармонического анализа . 705

10.3.11. Функция задана аналитически 705
10.3.12. Эмпирическая функция 706
10.3.13. Практические способы вычисления 708
10.3.14. Приближение эмпирической функции линейной комбинацией показательных функций 711

10.3.15. Приближение функции по Чебышеву 714
10.3.16. Применение ряда Тейлора 716

10.4. Численное дифференцирование 717

10.5. Численное интегрирование 719
10.5.1. Числа Бернулли 719
10.5.2. Полином Бернулли 720
10.5.3. Формула Эйлера 722
10.5.4. Формула трапеций 725
10.5.5. Формула Симпсона 726
10.5.6. Формула Уэддля 727
10.5.7. Формула Грегори 728
10.5.8. Введение в методы Ньютона — Котеса, Чебышева, Гаусса . . . 730
10.5.9. Метод Ньютона — Котеса 730
10.5.10. Метод Чебышева 732
10.5.11. Метод Гаусса 733
10.5.12. Применение интерполяционных полиномов Ньютона 735
10.5.13. Исключительные случаи 737

10.6. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений 738

10.6.1. Введение 738
10.6.2. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка 739
10.6.3. Решение с помощью ряда Тейлора 739
10.6.4. Способ Адамса 740
10.6.5. Сокращенный вариант 747
10.6.6. Приближенное интегрирование системы дифференциальных уравнений первого порядка 748
10.6.7. Использование ряда Тейлора 748
10.6.8. Применение интерполяционного полинома Ньютона с нисходящими разностями 749
10.6.9. Способ Пикара 750

10.7. Графическое решение дифференциальных уравнений 752

10.7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Способ изоклин 752
10.7.2. Графическое решение дифференциальных уравнений второго порядка способом радиусов кривизны 755

10.8. Численное решение уравнений в частных производных 757

10.8.1. Плоские задачи 757
10.8.2. Задачи вращения 760

10.9. Номограммы 762

10.9.1. Введение 762
10.9.2. Определение. Графическая шкала 762
10.9.3. Номограммы с выравненными точками 764
10.9.4. Номограммы с тремя параллельными прямолинейными шкалами 765
10.9.5. Номограммы с двумя параллельными прямоугольными шкалами и одной криволинейной 767
10.9.6. *N*-образная номограмма 769
10.9.7. Номограмма с двумя криволинейными шкалами и одной прямолинейной 770
10.9.8. *W*-образная номограмма 770
10.9.9. *Z*-образная номограмма 771
10.9.10. Номограмма с тремя криволинейными шкалами 771
10.9.11. Сложные номограммы 772

Литература к главе X 772
Предметный указатель 773
Указатель обозначений 779

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Андре Анго, перевод которой предлагается вниманию читателей, содержит дополнительные главы к общему втузовскому курсу высшей математики. Автору удалось в четкой и компактной форме изложить широкий круг вопросов математики, знание которых в настоящее время необходимо всякому образованному электро- и радиоинженеру.

Предисловие Луи де Бройля, введение автора и подробное оглавление позволяют читателю получить полное представление о содержании книги.

Книга выдержала во Франции три издания (1949, 1952, 1957 гг.). Она написана живым языком, причем центр тяжести изложения перенесен со строгих доказательств на наглядность, физический смысл и практические приложения.

Отдельные главы книги не очень тесно связаны между собой, так что их можно читать независимо друг от друга. Большое количество формул, таблиц и графиков делает книгу ценным справочным пособием.

В книге рассматривается много интересных приложений, главным образом из области электро- и радиотехники. Все электротехнические формулы написаны в рационализированной системе единиц МКСА (в международной системе СИ). В этой же системе единиц выполняются численные расчеты.

При изложении численных методов автор ограничился главным образом приемами, которые могут быть выполнены с помощью ручной счетной машины и набора таблиц. Он не рассматривает специальных приемов, связанных с применением электронных вычислительных машин, полагая, что это относится к компетенции специалистов-программистов.

При переводе исправлены все замеченные ошибки или описки оригинала, сделаны некоторые сокращения и добавления. В тех случаях, где это представлялось удобным, редакторские вставки вынесены в подстрочные примечания. Однако большая часть этих дополнений, органически слитых с авторским текстом, нигде специально не отмечена. Списки литературы, приводимые в конце каждой главы, изменены. Опущены устаревшие, труднодоступные работы и добавлены издания, легкодоступные советскому читателю.

Перевод книги с третьего французского издания выполнен Е. М. Шифриной. Редактировали перевод: гл. I, II, III, VI, VII — А. Я. Перельман, К. С. Шифрин; гл. IV — Ю. А. Седов, К. С. Шифрин; гл. V — Л. Б. Комарон, К. С. Шифрин; гл. VIII — И. А. Назаров; гл. IX — Л. Б. Комаров; гл. X — М. К. Гавурин. Общая редакция перевода выполнена К. С. Шифриным.

Мы надеемся, что содержательная книга А. Анго будет интересна не только электро- и радиоинженерам, но и широкому кругу инженерно-технических и научных работников, имеющих дело с математикой и ее многочисленными приложениями, а также студентам и аспирантам втузов.

К. С. Шифрин

ПРЕДИСЛОВИЕ

По многим причинам во Франции преподавание математики физикам и инженерам в большинстве случаев не очень хорошо приспособлено к требованиям тех, для кого оно предназначено.

Всего лишь тридцать лет тому назад и физик и инженер могли превосходно обходиться знанием классических результатов дифференциального и интегрального исчисления. Но в наши дни, когда изучение новых теорий все чаще требует владения весьма разнообразным математическим аппаратом, физик и инженер должны знать многочисленные и часто недавно развитые разделы математики, например тензорный анализ, матричный анализ, символическое исчисление Хевисайда, теорию собственных значений, подчас даже теорию интегральных уравнений и теорию групп. Однако преподавание математики в институтах и высших школах до сих пор недостаточно приспособлено к новым потребностям в аналитических знаниях тех, кто интересуется приложениями.

Более того, сама манера изложения лекций и книг по математическому анализу, авторами которых в большинстве случаев бывают профессиональные математики, не совсем подходит физику или инженеру, для которых различные тонкости в доказательствах значат довольно мало, а решающее значение имеет знание различных математических методов, применяемых на практике. Имеются многочисленные труды по математическому анализу, в которых многие страницы посвящены установлению существования решений дифференциальных уравнений и всего в нескольких строчках делается намек на полиномы Лежандра или бесселевы функции. Теория рядов Фурье излагается с большим обилием деталей, зачастую бесполезных для практика, а об интеграле Фурье, значение которого столь велико в старых и новых разделах математической физики, даже не упоминается. Можно было бы продолжить примеры и показать, что, несмотря на некоторые успехи, преподавание анализа лишь в редких случаях отвечает требованиям тех, кто имеет практический уклон.

В других, в частности, в англо-саксонских странах, дело часто обстоит иначе. Там имеются превосходные курсы по математике и ценные монографии по вопросам, которые физику и инженеру необходимо хорошо знать. Авторы этих работ, оставляя в стороне крайнюю математическую строгость и часто заменяя безукоризненные доказательства простыми соображениями, стремятся оттенить смысл и практическую пользу математических методов расчета и подробно ознакомить читателя с наиболее важными функциями, встречающимися в приложениях. Цель таких трудов — на многочисленных примерах, взятых из конкретных задач, помочь читателю овладеть математическим рабочим инструментом. Несомненно, это и есть правильный метод изучения приложений математики к физике и технике.

Поэтому можно считать большой удачей, что профессор Высшего электротехнического училища А. Анго предлагает нам труд подобного рода (до

настоящего времени такого редкого во Франции) под названием «Математика для электро- и радиоинженеров». Это книга, чтение которой в высшей степени приятно и поучительно. Польза ее несомненна. Автор включил в нее все определения, доказательства и способы расчетов, которые должен знать современный инженер, если он хочет следить за развитием электро- и радиотехники и читать работы, в которых применяются математические методы. Не добиваясь строгости доказательств, по поводу которых он отсылает читателя к трудам по анализу, автор в особенности настаивает на подробных вычислениях и приводит многочисленные примеры практического применения изложенных методов к конкретным задачам. Графики, кривые, таблицы дополняют рассмотрение различных типов функций и придают этой книге, помимо чисто познавательного интереса, характер ценного справочника. Список библиографической литературы позволит читателю, желающему глубже изучить какой-либо из рассматриваемых вопросов, обратиться к специальным монографиям.

Функции комплексной переменной, ряды и интегралы Фурье, векторное и тензорное исчисление, матричная алгебра, дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных в прямоугольных или криволинейных координатах, изучение важных функций, в частности, бесселевых и Лежандра, операционный анализ — таковы вопросы, рассматриваемые в данной работе. К этому следует также добавить изложение принципов теории вероятностей, дополненное очерком о случайных функциях Блан-Лапьера, являющегося мастером этого вопроса. И все время, как лейтмотив, приводятся практические задачи на расчеты электрических цепей, на примере которых читатель видит, для чего служат излагаемые методы вычисления и как следует ими пользоваться.

Эта книга специально предназначена для электро- и радиоинженеров, но следует рекомендовать ее также и физикам, так как вся современная теоретическая физика широко пользуется алгоритмами, рассматриваемыми здесь. Для физика, как и для инженера, прекрасная книга А. Анго будет служить неисчерпаемым источником необходимых сведений и ценных справок.

Луи де Бройль

Париж, 1949 г.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа не представляет собой курса математики в обычном смысле слова. В ней не следует искать связи между отдельными главами, кроме их общей направленности к применению в электро- и радиотехнике. Главная задача книги — представить в удобной и доступной форме те основные математические сведения, которые должен иметь инженер со средней подготовкой, чтобы с пользой для себя читать статьи и работы, в которых рассматриваются достижения науки в области слабых и сильных токов.

Для этой цели автор кое-где намеренно поступился строгостью доказательств в пользу краткости и ясности. Читатель, стремящийся к абсолютной математической строгости, должен будет обратиться к классическим трудам по анализу или к работам, цитируемым в ссылках.

Для того чтобы быть в курсе развития своей области техники, инженер должен следить за специальной литературой. Однако легко заметить, что это требует высокого уровня математических знаний. И если читатель будет вынужден, прежде чем приступить к чтению специальных работ, дополнительно изучать некоторые разделы математики, необходимые для понимания текста, то результат известен заранее: как бы ни была важна статья, она прочитана не будет; мало того, что это требует скучного труда, но в большинстве случаев необходимые сведения разбросаны по отдельным книгам и статьям, часто на иностранных языках, и собирать их долго и трудно.

Эту работу я и попытался проделать в данной книге. Особые старания были приложены к тому, чтобы читатель мог найти формулы, таблицы и кривые, необходимые для численных расчетов, которыми обычно завершаются инженерные исследования.

Эту книгу следует рассматривать, как некий рабочий инструмент.

Выражаю мою живейшую благодарность Луи де Бройлю, оказавшему мне честь представить эту работу читателю.

Обращаюсь с признательностью к Блан-Лапьеру, который соблаговолил взять на себя труд отредактировать часть IX главы, посвященной случайным функциям.

Андре Анго

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1.1. Определения. Вещественное число можно изобразить графически. В самом деле, пусть $x'x$ (рис. 1. 1) — бесконечная прямая, на которой выбрано положительное направление. От точки O, принятой за начало, отложим в определенном масштабе отрезок, длина которого пропорциональна рассматриваемому вещественному числу. На рис. 1.1 отрезок OA представляет положительное число, а OB — отрицательное. На прямой $x'x$ размещаются все вещественные числа: целые, дробные, алгебраические, трансцендентные, причем как положительные, так и отрицательные.

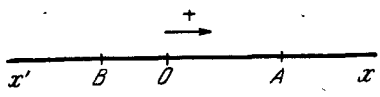


Рис. 1.1.

Понятие вещественного числа можно обобщить, если ввести в рассмотрение число z, образованное парой вещественных чисел x и y, взятых в определенном порядке. Такое число назовем комплексным. Временно будем записывать его в виде

$$z = [x,\ y].$$

Вещественные числа x и y составляют соответственно вещественную и мнимую части комплексного числа z. Часто используются обозначения

$$x = \mathrm{R}(z), \qquad y = \mathrm{I}(z).$$

Комплексные числа также можно изобразить графически. Это изображение будет двухмерным на плоскости, образованной двумя взаимно перпендикулярными осями Ox и Oy.

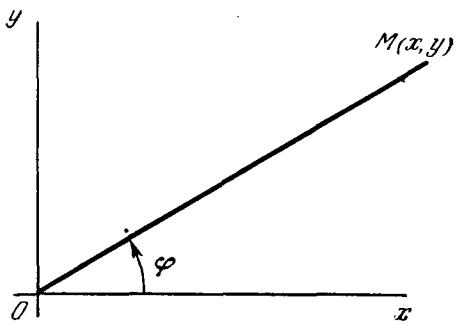


Рис. 1.2.

Комплексное число на плоскости xOy (рис. 1.2) представляется точкой M с координатами x, y; эту точку называют также изображением комплексного числа. И обратно, пару чисел $[x, y]$, образующих комплексное число z, называют аффиксом точки M.

Два комплексных числа $z = [x, y]$ и $z' = [x', y']$ считаются равными, если совпадают изображающие их точки. Это означает, что равенство z и z' имеет место в том, и только в том случае, когда

$$x = x', \qquad y = y'.$$

Если изображение комплексного числа совпадает с началом координат, то его вещественная и мнимая части равны нулю. Такое комплексное число называют нулем. Следовательно, равенства $z=0$ и $x=0$, $y=0$ равносильны.

Положительное число $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, равное длине отрезка OM (рис. 1.2), называется модулем комплексного числа z; модуль z обычно обозначают $|z|$. Угол φ, на который нужно повернуть ось Ox в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения с направлением OM, называется аргументом комплексного числа z. Этот угол определяется с точностью до целого числа оборотов; углы $\varphi+2k\pi$ также будут представлять собой аргументы z (k может принимать все возможные целые значения: положительные, отрицательные и нуль).

Если заменить x на $\rho\cos\varphi$, а y на $\rho\sin\varphi$, то комплексное число можно написать в таком виде:

$$z=[\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi].$$

Вместо того чтобы изображать комплексное число $[x, y]$ точкой M, мы можем представить его отрезком OM. И обратно, отрезок OM изображает комплексное число $[x, y]$.

1.1.2. Сложение. Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, вещественная и мнимая части которого представляют собой соответственно сумму вещественных и мнимых частей z_1 и z_2:

$$Z=[x, y]=z_1+z_2=[x_1+x_2,\ y_1+y_2].$$

Пусть точки M_1, M_2 и M — изображения чисел z_1, z_2 и z. Из рис. 1.3 видно, что точка M может быть получена по точкам M_1 и M_2 с помощью

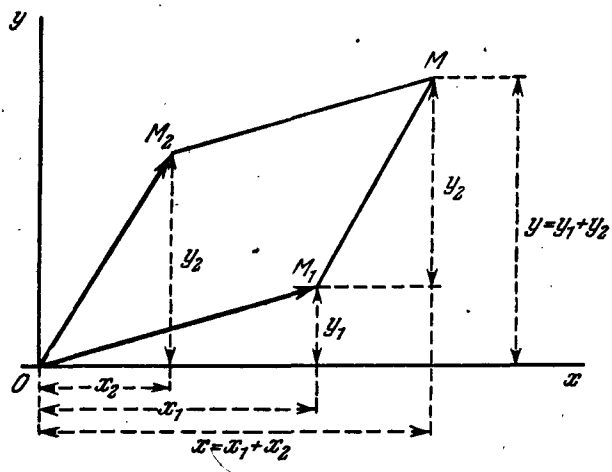


Рис. 1.3.

правила параллелограмма. Следовательно, сложение комплексных чисел z_1 и z_2 графически представляется как геометрическое суммирование отрезков OM_1 и OM_2.

Если ρ_1 и ρ_2 обозначают модули z_1 и z_2, то из рис 1.3 непосредственно следует справедливость двух неравенств:

$$|z_1+z_2|\leqslant\rho_1+\rho_2,\qquad |z_1-z_2|\geqslant|\rho_1-\rho_2|.$$

1.1.3. Умножение. Пусть $z_1=[x_1, y_1]$, $z_2=[x_2, y_2]$ — два комплексных числа, изображения которых суть точки M_1 и M_2. Произведением этих двух

чисел называют комплексное число, изображение которого M получается следующим способом (рис. 1.4): выбирают точку F на оси Ox таким образом, чтобы $OF=1$, и строят подобные треугольники OFM_1 и OM_2M. Этот способ представляет собой распространение на плоскость обычного способа умножения двух вещественных чисел, изображенных на прямой двумя отрезками OA и OB (рис. 1.5). Длина отрезка OC, который является произведением этих чисел, такова, что

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{1}.$$

Легко получить

$$z=z_1\cdot z_2=[x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+y_1x_2].$$

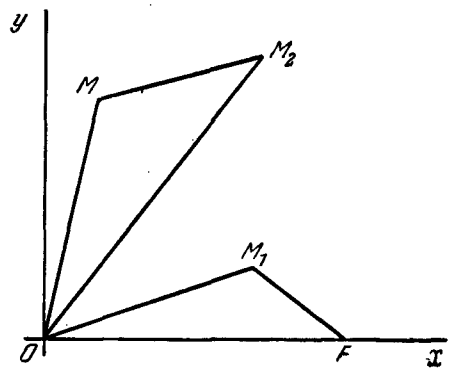


Рис. 1.4.

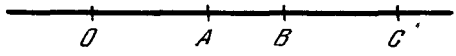


Рис. 1.5.

Из рис. 1.4 видно, что модуль произведения равен произведению модулей сомножителей:

$$OM=OM_1\cdot OM_2$$

и что аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей:

$$\angle xOM=\angle xOM_1+\angle M_1OM=\angle xOM_1+\angle xOM_2.$$

Тот же прием, выполняемый в обратном порядке, позволяет осуществить графически деление комплексных чисел. Очевидно, модуль частного равен частному модулей числителя и знаменателя, а аргумент частного равен разности аргументов числителя и знаменателя.

1.1.4. Замена обозначений. Легко убедиться, что все вычисления с комплексными числами можно производить, применяя обычные правила алгебры, если записывать эти числа в виде [1])

$$z=x+jy,$$

где x — вещественная, а y — мнимая части комплексного числа, и условиться, что в расчетах j^2 заменяется -1. Покажем это на примере операции умножения:

$$z_1=x_1+jy_1,\qquad z_2=x_2+jy_2,$$

$$z=z_1z_2=(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)=x_1x_2+j^2y_1y_2+j(x_1y_2+x_2y_1)=$$

$$=x_1x_2-y_1y_2+j(x_1y_2+x_2y_1).$$

Таким образом, для комплексных чисел нет нужды создавать специальную алгебру.

В дальнейшем комплексное число будем записывать в виде $z=x+jy$ или $z=\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi)$.

---

[1]) Математики обычно употребляют здесь букву i вместо буквы j. Мы же пользуемся по традиции электриков буквой j, чтобы не создавать путаницу с обозначением силы тока.

Можно также определить j как оператор поворота любого отрезка OM на угол $\frac{\pi}{2}$. Действительно (рис. 1.6), пусть отрезок OM представляет собой комплексное число $x+jy$. Имеем

$$j(x+jy)=jx+j^2y=$$
$$=jx-y=-y+jx.$$

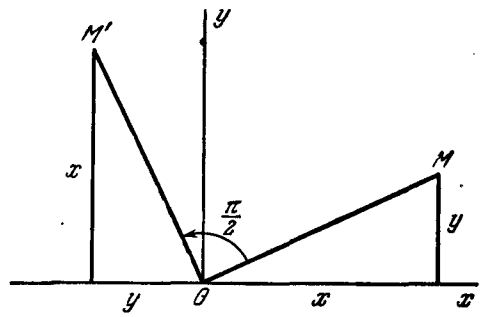


Рис. 1.6.

Отрезок OM', изображающий комплексное число $-y+jx=$ $=j(x+jy)$, представляет собой отрезок OM, повернутый вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$.

1.1.5. Сопряженные комплексные числа. Комплексные числа $x+jy$ и $x-jy$ называются сопряженными. Комплексное число, сопряженное с числом z, обозначается $\bar{z}$ или z^*.

Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число: $z+z^*=2x$.

Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть вещественное число: $zz^*=x^2+y^2=\rho^2$.

Рассмотрим (рис 1.7) число $z=\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ и сопряженное комплексное число $z^*=\rho(\cos\varphi-j\sin\varphi)$. Имеем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}(\cos\varphi-j\sin\varphi),$$
$$\frac{1}{z^*}=\frac{1}{\rho}(\cos\varphi+j\sin\varphi).$$

Следовательно, изображение z^* симметрично изображению z относительно оси Ox, а изображение $\frac{1}{z^*}$ симметрично изображению z относительно окружности единичного радиуса. Точки z и $\frac{1}{z^*}$ называются взаимно симметричными относительно единичной окружности.

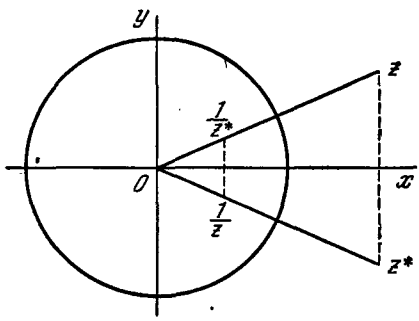


Рис. 1.7.

Уравнение окружности с центром O и радиусом r имеет вид

$$zz^*=r^2;$$

значит, уравнение окружности того же радиуса, но с центром в a будет

$$(z-a)(z^*-a^*)=r^2$$

или

$$zz^*+\alpha z+\alpha^*z^*+\beta=0,$$

где $\alpha^*=-a$ и $\beta=\alpha\alpha^*-r^2$ (β вещественно). Если окружность вырождается в прямую, то

$$\alpha z+\alpha^*z^*+\beta=0.$$

1.1.6. Степень комплексного числа. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей. Поэтому при возвышении в степень n

комплексного числа $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ модуль степени будет равен ρ^n, а аргумент — $n\varphi$.

Строго говоря, поскольку φ определено с точностью до $2k\pi$, аргумент степени равен $n\varphi + 2nk\pi$. Последнее слагаемое здесь не существенно, так как лучи $n\varphi$ и $n\varphi + 2nk\pi$ совпадают; поэтому оно опускается. Следовательно,

$$z^n = \rho^n(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

и, в частности,

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi.$$

Раскрывая левую часть по формуле бинома и приравнивая вещественные и мнимые части, получаем следующие соотношения (формулы Муавра):

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$
$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots,$$

где

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

В частности,

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$,

$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$; $\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.

1.1.7. Корни из комплексного числа. Если считать, что

$$z^n = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \text{и} \quad z = r(\cos\theta + j\sin\theta),$$

то, используя предыдущее рассуждение, находим

$$r^n = \rho \quad \text{и} \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

откуда получаем

$$r = \rho^{1/n} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

В отличие от п. 1.1.6 здесь слагаемым $2k\pi$ пренебречь нельзя. В самом деле, придавая k значения n последовательных целых чисел, получаем n различных корней. Все эти корни имеют один и тот же модуль $\rho^{1/n}$, но отличаются аргументами.

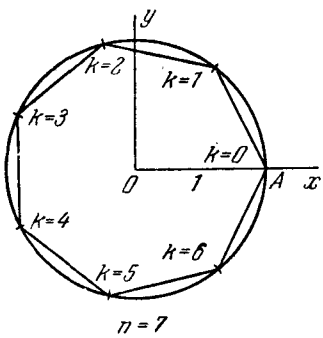


Рис. 1.8.

1.1.8. Корни из единицы. Единица может быть записана в комплексной форме $\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, если положить $\rho = 1$ и $\varphi = 0$.

Следовательно, корни n-й степени из единицы определяются по формулам

$$\cos 2k\frac{\pi}{n} + j\sin 2k\frac{\pi}{n}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Из рис. 1.8 видно, что изображения этих корней совпадают с вершинами правильного многоугольника с n сторонами, вписанного в окружность радиуса 1. Вершина, соответствующая $k = 0$, находится в точке A (1,0).

Если сравнить формулы

$$\rho^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

и

$$\cos\left(2k\frac{\pi}{n}\right)+j\sin\left(2k\frac{\pi}{n}\right),$$

то увидим, что все корни n-й степени из $\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ можно получить, умножая любой такой корень z_k последовательно на n корней n-й степени из единицы.

1.1.9. Ряды с комплексными членами. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k,$$

общий член которого $z_k=x_k+jy_k$. Ряд будет называться сходящимся, если его частичная сумма $S_n=\sum_{k=0}^{n}(x_k+jy_k)$ стремится к пределу $X+jY$, когда $n\to\infty$. Для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы сходились порознь ряды $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty}y_k$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k.$$

Общий член этого ряда $\rho_k=\sqrt{x_k^2+y_k^2}$ — модуль комплексного числа z_k. Так как

$$|x_k|\leqslant\rho_k, \qquad |y_k|\leqslant\rho_k,$$

то сходимость ряда из модулей влечет сходимость обоих рядов $\sum_{k=0}^{\infty}x_k$, $\sum_{k=0}^{\infty}y_k$. В этом случае про ряд $\sum_{k=0}^{\infty}z_k$ говорят, что он абсолютно сходящийся.

1.1.10. Степенные ряды *). Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, где a_k и z — комплексные числа.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\rho^k \qquad (A_k=|a_k|,\ \rho=|z|),$$

составленный из модулей членов первого ряда, есть степенной ряд с вещественными членами. Для этих рядов доказывается существование числа $R\geqslant 0$ (оно может быть равно и бесконечности) такого, что ряд сходится при $\rho<R$ и расходится при $\rho>R$.

Вернемся теперь к ряду $\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ (степенному ряду с комплексными членами) и рассмотрим в комплексной плоскости круг с центром O и радиусом R. Этот ряд будет сходящимся или расходящимся в зависимости от того, где будет находиться изображение z: внутри или вне круга.

Понятие равномерной сходимости, а также теоремы, относящиеся к сложению, умножению, дифференцированию и интегрированию вещественных степенных рядов, целиком применимы к комплексным степенным рядам.

---

*) Автор называет степенной ряд «целым рядом». Этот термин принят в некоторых французских руководствах. (Здесь и далее звездочкой отмечены подстрочные примечания редакторов перевода.)

Пример. Рассмотрим разложение в степенной ряд (ряд Тейлора) функции e^{jy}:

$$e^{jy} = 1 + \frac{jy}{1!} + \frac{j^2y^2}{2!} + \frac{j^3y^3}{3!} + \ldots,$$

$$e^{jy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + j\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right).$$

В вещественной и мнимой части этого разложения можно узнать ряды для $\cos y$ и $\sin y$. Таким образом, получаем формулу Эйлера:

$$e^{jy} = \cos y + j \sin y.$$

Если заменить y на $-y$, то

$$e^{-jy} = \cos y - j \sin y.$$

Складывая и вычитая полученные формулы, найдем:

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}.$$

Отметим важные частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{\pm 2\pi j} = 1, \quad e^{\pm \pi j} = -1, \quad e^{\pm \frac{\pi}{2} j} = \pm j, \quad e^{\pm \frac{\pi}{4} j} = \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}}.$$

Формула Эйлера дает возможность комплексное число

$$z = x + jy = \rho(\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

записать в виде [1])

$$z = \rho e^{j\varphi}.$$

Последняя формула непосредственно иллюстрирует правило умножения и деления двух комплексных чисел $z = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. В самом деле, имеем

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

1.1.11. Экспоненциальная функция и логарифм. Функцию $w = e^z$, где $z = x + jy$, с помощью формулы Эйлера можно написать в таком виде:

$$w = e^x(\cos y + j \sin y).$$

Заменяя z на $z_1 = z + 2k\pi j$, где k — целое число, получаем

$$e^{z_1} = e^z e^{2k\pi j} = e^z.$$

Таким образом, экспоненциальная функция имеет период $2\pi j$.

Рассмотрим функцию w, определенную соотношением $z = e^w$ при $z = x + jy = \rho e^{i\varphi}$. Имеем *)

$$w = \ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + j \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$w = \ln \rho + j(\varphi + 2k\pi).$$

---

[1]) Иногда число $z = |z|(\cos\varphi + j \sin\varphi)$ записывают в виде $|z|\underline{|\varphi}$ при отрицательном φ и $|z|\underline{|\varphi}$ при положительном φ. Например, $z = 10 + 5j = 11{,}18\,\underline{|26°34'}$.

*) Обычно различают главное значение логарифма $\ln z$ и бесконечнозначную функцию $\operatorname{Ln} z$ (см., например, [4], стр. 33—36).

1.1.12. Дифференцирование и интегрирование по аргументу. Дано комплексное число $z = \rho e^{j\varphi}$. Его производная по φ есть

$$\frac{dz}{d\varphi} = j\rho e^{j\varphi} = \rho e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = \rho e^{j\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Таким образом, дифференцирование по аргументу приводит к повороту отрезка OM на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 1.6). Очевидно, что интегрирование по φ приводит к повороту отрезка OM на угол $-\frac{\pi}{2}$.

1.1.13. Суммирование тригонометрических функций, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию. Требуется вычислить суммы

$$S_1 = \cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\alpha+2\delta) + \ldots + \cos[\alpha+(m-1)\delta],$$
$$S_2 = \sin\alpha + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\alpha+2\delta) + \ldots + \sin[\alpha+(m-1)\delta]$$

m косинусов или синусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию.

Рассмотрим сумму $S = S_1 + jS_2$:

$$S = e^{j\alpha}\left[1 + e^{j\delta} + e^{j2\delta} + \ldots + e^{j(m-1)\delta}\right] = e^{j\alpha}\frac{1-e^{jm\delta}}{1-e^{j\delta}}.$$

Последовательно находим

$$S = e^{j\alpha}\frac{e^{jm\delta/2}}{e^{j\delta/2}}\frac{e^{-jm\delta/2}-e^{jm\delta/2}}{e^{-j\delta/2}-e^{j\delta/2}} = e^{j[\alpha+(m-1)\delta/2]}\frac{\sin m\delta/2}{\sin\delta/2} =$$
$$= \{\cos[\alpha+(m-1)\delta/2] + j\sin[\alpha+(m-1)\delta/2]\}\frac{\sin m\delta/2}{\sin\delta/2}.$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$S_1 = \cos[\alpha+(m-1)\delta/2]\frac{\sin m\delta/2}{\sin\delta/2}, \quad (1)$$

$$S_2 = \sin[\alpha+(m-1)\delta/2]\frac{\sin m\delta/2}{\sin\delta/2}. \quad (2)$$

1.2. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

1.2.1. Введение. Рассмотрим периодическую функцию $f(t)$ с периодом T, т. е. такую, что $f(t) = f(t+nT)$ (n — целое). В гл. II мы увидим, что эта функция может быть разложена в ряд Фурье. Иначе говоря, ее можно написать в виде

$$f(t) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\omega t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\omega t, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Изучение поведения электрической цепи, в которой течет периодический ток $i = f(t)$, можно свести к рассмотрению той же цепи с синусоидальными токами периода T, $T/2$, $T/3$, ..., иначе говоря, к рассмотрению постоянных синусоидальных режимов этой цепи.

Если функция $f(t)$ непериодична, то, как мы увидим в гл. II, разложением в интеграл Фурье ее можно представить в виде суммы синусоидальных

функций, частоты которых сплошь заполняют числовую ось от нуля до бесконечности:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau.$$

Если, как в предыдущем случае, мы хотим изучить поведение электрической цепи с током $i=f(t)$, то мы снова приходим к рассмотрению постоянных синусоидальных режимов. Из этого видна важность синусоидальных функций времени и интерес, который может представить разработка способов расчета, специально приспособленных для этих функций.

1.2.2. Графическое изображение синусоидальной функции. Рассмотрим вектор постоянной длины I_1, вращающийся в заданной плоскости вокруг точки O с угловой скоростью ω. Введем в указанной плоскости систему прямоугольных координат xOy (рис. 1.9). Пусть φ_1—угол, образованный OM_1 с осью Ox в начальный момент времени. Тогда i_1 — ордината точки M_1 в момент времени t — выражается формулой

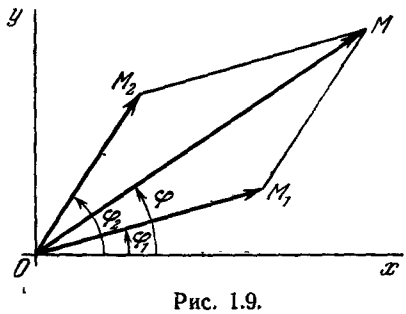


Рис. 1.9.

$$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1).$$

Вектор OM_1 удобно использовать для графического представления синусоидальных функций времени (синус получится при проектировании на ось Oy, косинус — на ось Ox).

Пусть нам нужно сложить две синусоидальные функции с одинаковым периодом, но с разными начальными фазами

$$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1),\quad i_2=I_2\sin(\omega t+\varphi_2).$$

По известному правилу вектор OM, изображающий сумму обеих функций i_1 и i_2, можно получить как геометрическую сумму векторов OM_1 и OM_2, изображающих эти функции. Все три вектора вращаются одновременно с угловой скоростью ω. Легко непосредственно проверить, что ордината точки M представляет собой сумму функций $I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ и $I_2\sin(\omega t+\varphi_2)$. Аналогично абсцисса точки M равна сумме функций $I_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ и $I_2\cos(\omega t+\varphi_2)$.

Вместо того чтобы вращать векторы с угловой скоростью ω, можно предположить, что они неподвижны, а оси координат вращаются с угловой скоростью $-\omega$.

На рис. 1.9 изображено относительное расположение векторов и осей (в момент $t=0$).

Геометрическое построение, описанное выше, определяет амплитуду $OM=I$ и фазу φ и тем самым позволяет найти выражения

$$I\sin(\omega t+\varphi)=I_1\sin(\omega t+\varphi_1)+I_2\sin(\omega t+\varphi_2),$$
$$I\cos(\omega t+\varphi)=I_1\cos(\omega t+\varphi_1)+I_2\cos(\omega t+\varphi_2).$$

Часто нужно уметь вычислять производные или интегралы синусоидальных функций типа $i=I\sin(\omega t+\varphi)$. Имеем

$$\frac{di}{dt}=\omega I\cos(\omega t+\varphi)=\omega I\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\int i\,dt=-\frac{I}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)=\frac{I}{\omega}\sin\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Производные и первообразные от функции i изображаются векторами, повернутыми по отношению к исходному вектору соответственно на угол $+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Длины этих векторов будут ωI и I/ω. Такой прием позволяет графически получить синусоидальные решения дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотренный нами способ векторного представления весьма употребителен. Однако графические построения становятся неудобными и мало точными в случае длинных и сложных вычислений, особенно когда порядок величин векторов ωI, I, I/ω весьма различен. Способ же, который мы сейчас изложим, соединяет в себе простоту графического приема с точностью алгебраических вычислений.

1.2.3. Представление с помощью комплексных чисел. Поскольку речь идет о векторах, расположенных в одной плоскости, то можно плоскость на рис. 1.9 считать комплексной и трактовать вектор как комплексное число, вещественная и мнимая части которого представляют собой соответственно проекции вектора на оси Ox и Oy. Вектор OM определяется комплексным числом [1])

$$I[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)]=Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}.$$

Член $\mathcal{J}=Ie^{j\varphi}$ определяет собой неподвижный вектор OM, отнесенный к неподвижным осям (рис. 1.9). Величина $\mathcal{J}$ называется комплексной амплитудой или просто комплексным током. Точно так же, рассматривая напряжение $u=U\sin(\omega t+\theta)$, мы можем ввести величину $\mathcal{U}=Ue^{j\theta}$, которую будем называть комплексным напряжением.

Покажем теперь, что сложение двух синусоидальных функций, изображенное на рис. 1.9, можно произвести и без графического построения. Действительно, пусть даны две (или несколько) синусоидальных функций, представляющих собой, например, ток

$$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1),\quad i_2=I_2\sin(\omega t+\varphi_2).$$

Положим, что

$$i_1=I_1e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}=\mathcal{J}_1e^{j\omega t},\quad i_2=I_2e^{j\varphi_2}e^{j\omega t}=\mathcal{J}_2e^{j\omega t}.$$

Так как сложение комплексных чисел подчиняется правилу векторного сложения, то очевидно, что вектор OM на рис. 1.9 определяется комплексным числом $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2$. Искомая синусоидальная функция будет представлять собой мнимую часть от $\mathcal{J}e^{j\omega t}$.

Производная по времени функции $i=I\sin(\omega t+\varphi)$ будет мнимой частью производной по времени от функции $\mathcal{J}e^{j\omega t}$. В этом легко убедиться непосредственно, если сравнить оба выражения. Точно так же неопределенный интеграл по времени от i совпадает с мнимой частью интеграла от $\mathcal{J}e^{j\omega t}$. Отсюда можно вывести следующее правило: дано

$$i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1),\quad i_2=I_2\sin(\omega t+\varphi_2),\ \ldots$$

несколько синусоидальных функций. Требуется определить синусоидальную функцию, представляющую результат подстановки i_1, i_2, ... в линейное и

[1]) Иногда функцию $Ae^{j\psi}$ называют сиссоидальной и обозначают $A\,\mathrm{cis}\,\psi$. Слог cis является сокращением от cosinus $+\,i$ sinus. Здесь буква j заменена буквой i, как это принято в математике.

однородное выражение первого порядка

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \beta_1 \frac{di_1}{dt} + \beta_2 \frac{di_2}{dt} + \ldots + \gamma_1 \int^t i_1\,dt + \gamma_2 \int^t i_2\,dt + \ldots \quad (3)$$

Здесь коэффициенты α, β, γ не зависят от времени. Положим

$$i_1 = \mathcal{J}_1 e^{j\omega t}, \quad i_2 = \mathcal{J}_2 e^{j\omega t}, \ldots, \quad \text{где} \quad \mathcal{J}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}, \quad \mathcal{J}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}, \ldots$$

Член $e^{j\omega t}$ входит множителем во все слагаемые выражения (3). Окончательный результат, очевидно, может быть написан в виде

$$\mathcal{J} e^{j\omega t} = I e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

Мнимая часть этого выражения и есть искомая синусоидальная функция

$$i = I \sin(\omega t + \varphi).$$

Вещественная часть дает результат подстановки в (3) соответствующих косинусоидальных функций.

1.2.4. Ограничения метода. Только что установленное правило применимо в тех случаях, когда требуется произвести сложение, дифференцирование, интегрирование токов или синусоидальных напряжений либо линейные комбинации этих операций. Правило это, однако, неприменимо, если нужно подвергнуть токи или напряжения нелинейным алгебраическим операциям, как, например, умножению или возведению в степень. Действительно, легко видеть, что при таких операциях возникают круговые частоты, отличные от ω. Это обрекает на неудачу векторное построение, изображенное на рис. 1.9, а следовательно, и комплексное представление, которое является его отображением.

Рассмотрим это на примере умножения. Пусть

$$i_1 = \mathcal{J}_1 e^{j\omega t}, \quad i_2 = \mathcal{J}_2 e^{j\omega t}, \quad \mathcal{J}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}, \quad \mathcal{J}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}.$$

Правило умножения комплексных чисел, примененное к $i_1 i_2$, дает

$$i_1 i_2 = I_1 I_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2) + 2j\omega t}.$$

Мнимая часть этого выражения равна

$$I_1 I_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\omega t).$$

Если же непосредственно умножить $i_1 = I_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ на $i_2 = I_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, то получим

$$i_1 i_2 = I_1 I_2 \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) = \frac{1}{2} I_1 I_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)].$$

Результаты, как видим, получились совершенно различные.

Замечание. Комплексное исчисление может оказаться весьма полезным в тех случаях, когда требуется определить активную и реактивную мощности в цепи переменного тока *).

*) Напомним, что в цепи переменного тока различают мгновенную мощность p, активную мощность (среднее за период значение мгновенной мощности) P и так называемую реактивную мощность Q.

Если мы обозначим соответственно мгновенные значения тока и напряжения через $i(t)$ и $u(t)$, амплитуды этих величин через I и U, а сдвиг фаз между ними через φ, то упомянутые выше мощности определяются формулами: $p = i(t)\,u(t)$, $P = \bar{p} = IU \cos\varphi$, $Q = IU \sin\varphi$.

Обозначим комплексный ток в цепи через $\mathcal{J} = Ie^{j\delta}$, а напряжение — $\mathcal{U} = Ue^{j\varepsilon}$. Положим $\varepsilon - \delta = \varphi$. Величина $\mathcal{J}^*$, комплексно сопряженная току $\mathcal{J}$, равна $\mathcal{J}^* = Ie^{-j\delta}$, а произведение $\mathcal{U}\mathcal{J}^*$ равно $UIe^{j(\varepsilon-\delta)} = UIe^{j\varphi}$. Активная мощность в цепи будет $UI\cos\varphi$, а реактивная — $UI\sin\varphi$. Мы видим, таким образом, что для отыскания активной и реактивной мощности, расходуемой в цепи с комплексным током $\mathcal{J}$ и комплексным напряжением $\mathcal{U}$, достаточно взять вещественную и мнимую части выражения $\mathcal{U}\mathcal{J}^*$.

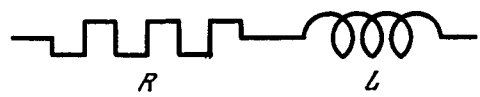


Рис. 1.10.

1.2.5. Понятие комплексного полного сопротивления. Рассмотрим цепь, составленную из омического сопротивления R и самоиндукции L (рис. 1.10). Требуется найти разность потенциалов $u = U\sin(\omega t + \varphi)$, возникающую на концах цепи, если в ней течет ток $i = I\sin(\omega t + \alpha)$.

Имеем

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri. \tag{4}$$

Положим

$$u = \mathcal{U}e^{j\omega t}, \quad i = \mathcal{J}e^{j\omega t}, \quad \text{где} \quad \mathcal{U} = Ue^{j\varphi}, \quad \mathcal{J} = Ie^{j\alpha}.$$

Правая часть формулы (4) представляет собой частный случай выражения (3). Мы можем найти $\mathcal{U}$, если подставим i в (4) и опустим множитель $e^{j\omega t}$, содержащийся в обеих частях равенства (4):

$$\mathcal{U} = (jL\omega + R)\,\mathcal{J} = Z\mathcal{J}.$$



Рис. 1.11.

Заметим, что в последнем равенстве время не фигурирует. Коэффициент пропорциональности Z между $\mathcal{U}$ и $\mathcal{J}$ является комплексным числом, не зависящим от времени. Он имеет размерность сопротивления и называется комплексным полным сопротивлением *).

Разность потенциалов определяется мнимой частью u. Сохраняя для нее прежнее обозначение, имеем

$$u = U\sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$U = I|Z| = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2},$$

$$\varphi = \alpha + \beta, \quad \operatorname{tg}\beta = L\omega/R.$$

Рассмотрим теперь ту же задачу для цепи с емкостью C, соединенной последовательно с сопротивлением R (рис. 1.11). Уравнение задачи следующее:

$$u = Ri + \frac{1}{C}\int^t i\,dt.$$

В тех же обозначениях имеем $\mathcal{U} = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\mathcal{J} = Z\mathcal{J}$.

В вещественной форме напряжение будет

$$u = U\sin(\omega t + \varphi),$$

*) Комплексное полное сопротивление цепи иногда называют импедансом цепи.

где

$$U = I|Z| = I\sqrt{R^2 + 1/C^2\omega^2},$$

$$\varphi = \alpha + \beta, \quad \operatorname{tg}\beta = -1/RC\omega.$$

Замечание. Вычисления в обоих предыдущих примерах имели одно несущественное осложнение — сдвиги фаз. Удобно, если это возможно, выбирать начало отсчета времени так, чтобы исходная величина имела нулевую фазу. Например, если задан ток i, то следует выбрать начало так, чтобы $\alpha = 0$. Тогда

$$\mathcal{J} = I \quad \text{и} \quad \beta = \varphi.$$

Заметим также, что совершенно не обязательно анализ задач, подобных рассмотренным выше, производить в вещественной форме.

Комплексное полное сопротивление Z содержит все интересующие нас данные, так как $|Z|$ есть коэффициент пропорциональности между амплитудами тока и напряжения, а $\arg Z$ равен разности фаз между ними.

Понятие комплексного полного сопротивления позволяет сохранить обычный закон Ома для комплексных токов и разности потенциалов:

$$\mathcal{U} = Z\mathcal{J}.$$

1.2.6. Комплексное полное сопротивление при последовательном и параллельном соединении. Рассмотрим цепь, состоящую из соединенных последовательно самоиндукций, емкостей и сопротивлений (рис. 1.12). Такую цепь всегда можно сгруппировать в виде отдельных участков, подобных рассмотренным в п. 1.2.5. Если по ней течет комплексный ток $\mathcal{J}$, то разность комплексных потенциалов на концах всей цепи представляет собой сумму разностей комплексных потенциалов на концах каждого участка цепи:



Рис. 1.12.

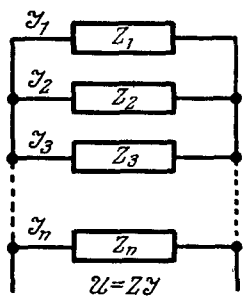


Рис. 1.13.

$$\mathcal{U} = \mathcal{J}Z_1 + \mathcal{J}Z_2 + \ldots + \mathcal{J}Z_n = \mathcal{J}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n) = \mathcal{J}Z.$$

Следовательно, комплексное полное сопротивление всей цепи представляет собой сумму комплексных полных сопротивлений отдельных участков цепи. А комплексная разность потенциалов равна произведению этого сопротивления на комплексный ток.

В случае же если дано несколько цепей, соединенных параллельно (рис. 1.13), то

$$\mathcal{U} = Z_1\mathcal{J}_1 = Z_2\mathcal{J}_2 = \ldots = Z_n\mathcal{J}_n.$$

Полный ток $\mathcal{J}$ представляет собой сумму парциальных токов $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_n$. Следовательно,

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}\right)$$

и

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}.$$

Значит, правила для комплексных токов здесь такие же, как и для постоянных токов.

1.2.7. Законы Кирхгофа. Рассмотрим некоторую цепь и узел O, в который стекаются p комплексных токов $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, ..., $\mathcal{J}_p$ (рис. 1.14). Геометрическая сумма токов $I_1+I_2+\ldots+I_p$ равна нулю, или, что то же самое, сумма комплексных токов $\sum_{n=1}^{p}\mathcal{J}_n=0$.

Если мы будем перемещаться по контуру (рис. 1.15), встречая по пути p цепей с комплексными полными сопротивлениями Z_1, Z_2, ..., Z_p, то будет

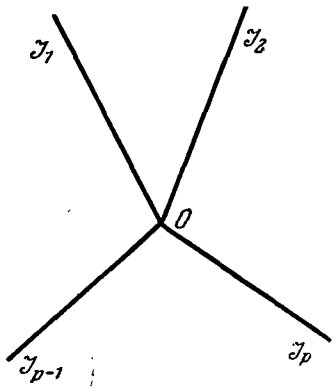


Рис. 1.14.

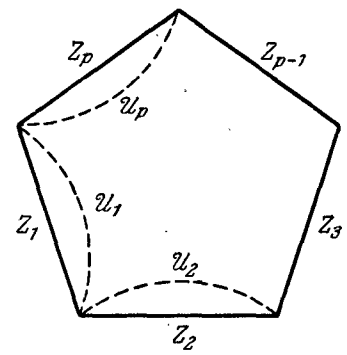


Рис. 1.15.

равна нулю геометрическая сумма встреченных разностей потенциалов $U_1+U_2+\ldots+U_p$ или, что то же самое, будет равна нулю сумма разностей комплексных потенциалов:

$$\sum_{n=1}^{p}\mathcal{J}_n Z_n=0.$$

Замечание. Если наряду с комплексными полными сопротивлениями Z_1, ..., Z_p в цепи содержатся также источники комплексной электродвижущей силы $\mathcal{E}_n$ той же частоты, что и питание основной сети, то сформулированное выше правило получает такой вид:

$$\sum_{n=1}^{p}(\mathcal{J}_n Z_n-\mathcal{E}_n)=0.$$

Выведенные формулы позволяют свести вычисление комплексного полного сопротивления сложной цепи к вычислению комплексных полных сопротивлений отдельных участков этой цепи.

В окончательном виде комплексное полное сопротивление $Z(j\omega)$ можно представить как

$$Z(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega),$$

где $R(\omega)$ — активное сопротивление, а $X(\omega)$ — реактивное сопротивление цепи. Разность фаз между напряжением и током $\varphi=\arg Z(j\omega)$, а отношение амплитуд напряжения и тока равно $|Z(j\omega)|$.

В конкретной физической задаче комплексное полное сопротивление определяется через решение линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами. Следовательно, функция Z зависит только от вещественных коэффициентов уравнения и от $j\omega$. Это означает, что мнимость

в Z входит только через $j\omega$. Поэтому при переходе к комплексному сопряженному значению имеем

$$[Z(j\omega)]^* = Z([j\omega]^*) = Z(-j\omega).$$

Поэтому из формулы для $Z(j\omega)$ получим

$$Z(-j\omega) = R(\omega) - jX(\omega).$$

С другой стороны, если в выражении для $Z(j\omega)$ заменить ω на $-\omega$, то

$$Z(-j\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega),$$

откуда

$$R(-\omega) = R(\omega) \text{ — четная функция } \omega,$$
$$X(-\omega) = -X(\omega) \text{ — нечетная функция } \omega.$$

Величину, обратную $Z(j\omega)$, можно записать в таком виде:

$$\frac{1}{Z(j\omega)} = Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega).$$

Это — комплексная полная проводимость цепи, а $G(\omega)$ и $B(\omega)$ — соответственно активная и реактивная проводимости.

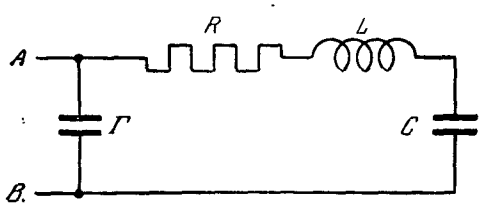


Рис. 1.16.

Пример. Требуется рассчитать комплексное полное сопротивление цепи (рис. 1.16) между зажимами A и B.

Здесь налицо два связанных между собой контура. Первый содержит конденсатор с емкостью Г, комплексное полное сопротивление которого Z_1 равно $-\frac{j}{\Gamma\omega}$. Второй контур состоит из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C, подключенных последовательно. Комплексное полное сопротивление этого контура

$$Z_2 = jL\omega - \frac{j}{C\omega} + R.$$

Искомое комплексное полное сопротивление $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$, т. е.

$$Z(j\omega) = \frac{-j/\Gamma\omega\,(R + jL\omega - j/C\omega)}{R + jL\omega - j\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma}\right)\frac{1}{\omega}},$$

откуда

$$|Z| = \frac{1}{\Gamma\omega}\sqrt{\frac{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}{R^2 + \left[L\omega - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma}\right)\frac{1}{\omega}\right]^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{R}{\frac{1}{C\omega} - L\omega} - \operatorname{arctg}\frac{L\omega - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma}\right)\frac{1}{\omega}}{R}.$$

1.2.8. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления. Рассмотрим электрическую цепь самого общего вида, состоящую из n отдельных контуров. Остановимся на контурах l и m.

Пусть L_{ll}, R_{ll}, C_{ll} — самоиндукция, сопротивление и емкость, включенные последовательно в контур l; L_{mm}, R_{mm} и C_{mm} — те же величины для контура m.

Обозначим через $L_{lm}=L_{ml}$, $R_{lm}=R_{ml}$, $C_{lm}=C_{ml}$ самоиндукцию, сопротивление и емкость связи между двумя контурами l и m. Для объяснения смысла этих величин рассмотрим цепь на рис. 1.17, состоящую из двух

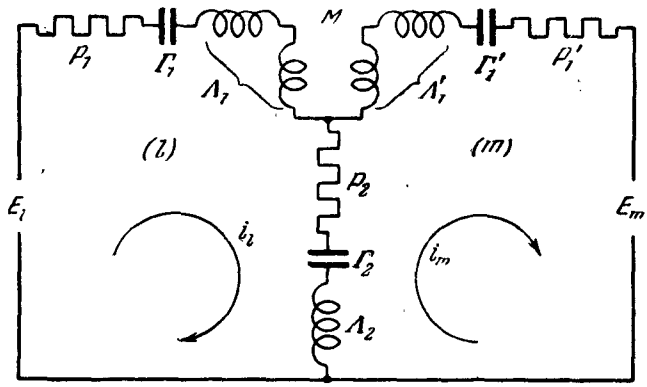


Рис. 1.17.

связанных контуров l и m. В этом примере мы имеем при выбранном для токов положительном направлении

$$L_{ll}=\Lambda_1+\Lambda_2,\quad L_{mm}=\Lambda_1'+\Lambda_2,\quad L_{ml}=L_{lm}=M-\Lambda_2,$$

$$\frac{1}{C_{ll}}=\frac{1}{\Gamma_1}+\frac{1}{\Gamma_2},\quad \frac{1}{C_{mm}}=\frac{1}{\Gamma_1'}+\frac{1}{\Gamma_2},\quad \frac{1}{C_{ml}}=\frac{1}{C_{lm}}=-\frac{1}{\Gamma_2}$$

и

$$R_{ll}=P_1+P_2,\quad R_{mm}=P_1'+P_2,\quad R_{ml}=R_{lm}=-P_2.$$

Вернемся к изучению цепи наиболее общего вида. Эта цепь описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\left[L_{11}\dfrac{di_1}{dt}+R_{11}i_1+\dfrac{1}{C_{11}}\int i_1\,dt\right]+\ldots \\ \qquad\ldots+\left[L_{1n}\dfrac{di_n}{dt}+R_{1n}i_n+\dfrac{1}{C_{1n}}\int i_n\,dt\right]=e_1,\\ \ldots\ldots\ldots\

то система приобретает такой вид

$$z_{11}(j\omega)\,\mathcal{J}_1 + \ldots + z_{1n}(j\omega)\,\mathcal{J}_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{l1}(j\omega)\,\mathcal{J}_1 + \ldots + z_{ln}(j\omega)\,\mathcal{J}_n = E_l,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{n1}(j\omega)\,\mathcal{J}_1 + \ldots + z_{nn}(j\omega)\,\mathcal{J}_n = 0.$$

Обозначая через $D(j\omega)$ определитель системы, а через $M_{lm}(j\omega)$ алгебраическое дополнение элемента $z_{lm}(j\omega)$, получаем

$$\mathcal{J}_m = \frac{M_{lm}(j\omega)}{D(j\omega)} E_l.$$

Если положим

$$Z_{lm}(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{M_{lm}(j\omega)},$$

то окончательно получим $E_l = Z_{lm}\mathcal{J}_m$ или $E_l e^{j\omega t} = Z_{lm}\mathcal{J}_m e^{j\omega t}$. Величина $Z_{lm}(j\omega)$ называется эквивалентным полным сопротивлением цепи l по отношению к цепи m. Это — отношение комплексного напряжения, приложенного к цепи l, к комплексному току, текущему по цепи m.

Величина, обратная эквивалентному полному сопротивлению, иногда называется коэффициентом изоморфного отклика цепи m по отношению к цепи l. Мы определили, таким образом, комплексное полное сопротивление, которое позволяет связать синусоидальный ток, текущий по одному контуру, с синусоидальным возбуждением, возникающим в другом контуре, связанном с первым. На практике можно вычислить эквивалентное полное сопротивление, выписав систему канонических интегро-дифференциальных уравнений рассматриваемой цепи и заменяя в этой системе знак дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на $j\omega$, а знак интегрирования на $\frac{1}{j\omega}$. После этого остается решить систему полученных таким способом алгебраических уравнений.

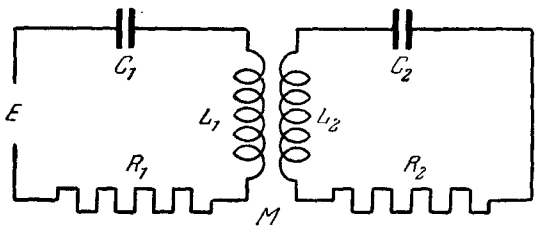


Рис. 1.18.

Пример. Рассмотрим два связанных между собой контура, изображенных на рис. 1.18. Приложим к левому контуру электродвижущую силу $E = e^{j\omega t}$. Дифференциальные уравнения системы принимают вид:

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + M\frac{di_2}{dt} = E,$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt + M\frac{di_1}{dt} = 0.$$

Соответствующая алгебраическая система будет

$$\left(j\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) i_1 + j\omega M i_2 = 1,$$
$$\left(j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) i_2 + j\omega M i_1 = 0.$$

Определитель ее

$$D(j\omega) = \left(j\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) + \omega^2 M^2.$$

Алгебраические дополнения

$$M_{11}(j\omega) = j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2},$$

$$M_{12}(j\omega) = -j\omega M,$$

откуда

$$\frac{1}{Z_{11}(j\omega)} = \frac{M_{11}(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}{D(j\omega)},$$

$$\frac{1}{Z_{12}(j\omega)} = \frac{M_{12}(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{-j\omega M}{D(j\omega)}.$$

1.2.9. Комплексный вектор. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}$, синусоидально зависящий от времени. Его проекции на три оси прямоугольных координат равны

$$a_x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad a_y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y), \quad a_z = A_z \cos(\omega t + \varphi_z).$$

Амплитуды A_x, A_y, A_z и фазы φ_x, φ_y, φ_z не зависят от времени, а только от координат x, y, z.

Проекции a_x, a_y, a_z вектора $\boldsymbol{a}$ являются синусоидальными скалярными величинами — вещественными частями комплексных чисел

$$\mathcal{A}_{0_x} e^{j\omega t}, \quad \mathcal{A}_{0_y} e^{j\omega t}, \quad \mathcal{A}_{0_z} e^{j\omega t}.$$

Комплексные числа

$$\mathcal{A}_{0_x} = A_x e^{j\varphi_x}, \quad \mathcal{A}_{0_y} = A_y e^{j\varphi_y}, \quad \mathcal{A}_{0_z} = A_z e^{j\varphi_z}$$

можно рассматривать как координаты комплексного вектора $\mathcal{A}$, отнесенного к комплексному пространству [1]).

Комплексный вектор $\mathcal{A}^*$, сопряженный с вектором $\mathcal{A}$, имеет следующие проекции на оси координат:

$$A_x e^{-j\varphi_x}, \quad A_y e^{-j\varphi_y}, \quad A_z e^{-j\varphi_z}.$$

Для векторов, имеющих синусоидальную зависимость от времени, комплексный вектор играет роль, аналогичную той, которую играют комплексные токи и напряжения для токов и напряжений, синусоидально зависящих от времени.

Вещественная часть вектора $\mathcal{A} e^{j\omega t}$ — это вектор $\boldsymbol{a}$, а мнимая его часть — вектор $\boldsymbol{a}'$, отстоящий по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от $\boldsymbol{a}$:

$$a'_x = A_x \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right), \quad a'_y = A_y \cos\left(\omega t + \varphi_y - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a'_z = A_z \cos\left(\omega t + \varphi_z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если разделить вещественные и мнимые части комплексного вектора $\mathcal{A}$, то его можно представить в виде

$$\mathcal{A} = A_1 + jA_2.$$

Очевидно,

$$\boldsymbol{a} = A_1 \cos\omega t - A_2 \sin\omega t.$$

---

[1]) Здесь идет речь о комплексном пространстве, существенно отличающемся от комплексной плоскости, о которой говорилось в начале этой главы. В данном случае комплексные числа откладываются по трем осям координат. Подробнее понятие о комплексном пространстве развивается в п. 4.1.29 и последующих.

Вектор $\boldsymbol{a}$ вращается в плоскости, определенной двумя вещественными векторами $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, с угловой скоростью ω. Конец вектора $\boldsymbol{a}$ описывает эллипс, причем $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ — два его сопряженных полудиаметра. Векторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ соответственно представляют собой положения, занимаемые вектором $\boldsymbol{a}$ в начальный момент времени и в момент $t = -T/4\,(T = 2\pi/\omega)$.

Преимущество использования комплексных векторов при расчетах с синусоидальными векторами заключается в том, что время t выпадает из вычислений, так же как это имело место с комплексными токами и напряжениями. Точно так же комплексные векторы удобно использовать при подстановке в линейные уравнения.

Возьмем для примера уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Синусоидальным векторам $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ соответствуют комплексные векторы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{E}$. При этом уравнение Максвелла получит вид

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathfrak{E}.$$

Если ввести комплексную диэлектрическую постоянную

$$\eta = \varepsilon - \frac{j\sigma}{\omega},$$

то

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = j\omega\eta\mathfrak{E}.$$

Следовательно, использование комплексных величин упрощает расчеты с векторами, имеющими синусоидальную зависимость от времени, аналогично тому как оно упрощает расчеты с токами и напряжениями, синусоидально зависящими от времени.

Основные определения и векторные операции (скалярное и векторное умножение, операции grad, div, ...) легко обобщаются на комплексные векторы.

1.3. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции вещественных переменных x и y, то комплексная величина

$$P(x, y) + jQ(x, y)$$

получит одно или несколько строго определенных значений для каждой пары величин x, y. Данное выражение рассматривается как функция комплексного переменного $z = x + jy$ и записывается в виде $f(z)$. Отметим, что эта запись условна. В общем случае она не означает, что функция f зависит от x и y только в комбинации $x + jy$. Например, про выражение $x + 2jy$ говорят, что оно является функцией переменной z.

1.3.1. Непрерывность. Функция $f(z)$ непрерывна при $z = a$, если всякому положительному сколь угодно малому числу ε соответствует положительное число η такое, что неравенство $|z - a| < \eta$ имеет следствием

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

1.3.2. Однозначные функции. Функция однозначна, если каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение функции.

Например, функция $u = z^{1/m}$ неоднозначна. Действительно, положим $z = re^{j\varphi}$, $u = \rho e^{j\theta}$. Тогда

$$\rho = r^{1/m} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\varphi}{m} + \frac{2\pi}{m} k.$$

Если принять $k=0, 1, 2, \ldots, m-1$, то для одного значения z получится m значений u.

1.3.3. Аналитическая функция. Производная однозначной функции (или одного из ее значений, если функция многозначна) определяется как предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Если такой предел существует и не зависит от того, каким образом Δz стремится к нулю, то говорят, что функция $f(z)$ аналитическая.

Изучим подробнее условие независимости стремления Δz к нулю (рис. 1.19). Пусть

$$f(z)=P(x, y)+jQ(x, y).$$

Дадим z приращение Δz; тогда функция f получит приращение Δf. Можно написать

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta P+j\Delta Q}{\Delta x+j\Delta y}.$$

Заменяя ΔP и ΔQ их дифференциалами и переходя к пределу, получим

$$\frac{df}{dz}=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+j\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+j\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy}{dx+j\,dy}.$$

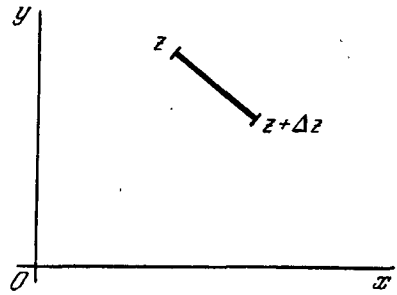


Рис. 1.19.

Для независимости этого предела от способа стремления Δz к нулю, т. е. от ориентировки малого отрезка $dz=dx+j\,dy$, нужно, чтобы это отношение не зависело от $\frac{dy}{dx}$. Последнее обстоятельство имеет место, если коэффициенты при dx и dy в числителе пропорциональны соответствующим коэффициентам в знаменателе, т. е.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+j\frac{\partial Q}{\partial x}}{1}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}+j\frac{\partial Q}{\partial y}}{j}.$$

Отсюда вытекают условия, которые называются условиями Коши — Римана:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Эти условия необходимы для аналитичности функции. Они будут достаточными, если дополнительно потребовать непрерывность частных производных функций P и Q *).

Дифференцируя полученные два уравнения и приравнивая смешанные производные, имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0.$$

Следовательно, вещественная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Отметим, что последние условия недостаточны для аналитичности функции, так как не всякая пара решений уравнения Лапласа удовлетворяет условиям Коши — Римана.

*) Подробнее см. [1], стр. 72—75.

Существует удобный критерий для проверки аналитичности функции. Функция комплексной переменной аналитична, если она, являясь по форме функцией двух независимых переменных x и y, фактически зависит только от их комбинации $x+jy$, т. е. является функцией одной независимой переменной z. Легко убедиться, что это требование эквивалентно выполнимости условий Коши — Римана. В самом деле, если в выражении

$$P(x, y)+jQ(x, y)$$

заменим x на $z-jy$ и полученную функцию переменных z и y частным образом продифференцируем по y, то находим

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}+j\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}+j\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

Если функция аналитическая, то это выражение тождественно равно нулю. Таким образом, полученная ранее функция переменных z и y не зависит от y, т. е. является функцией одного z. Обратное очевидно.

Отсюда следует, что дифференцируемая функция $\varphi(t)$ вещественной переменной t, рассматриваемая как функция $\varphi(x+jy)$, — аналитическая. Например, $x+2jy$ — не аналитическая функция, $x^2-y^2+2jxy=z^2$ — аналитическая.

1.3.4. Голоморфная функция. Аналитическая функция может быть как однозначной, так и многозначной. Однозначная аналитическая функция называется голоморфной *).

1.3.5. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной. Пусть $f(z)$ — функция комплексной переменной z, C — непрерывная кривая, а z_0 и z — аффиксы концов этой кривой. Разделим кривую на произвольное число частей с помощью промежуточных точек $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n=z$ (рис. 1.20).

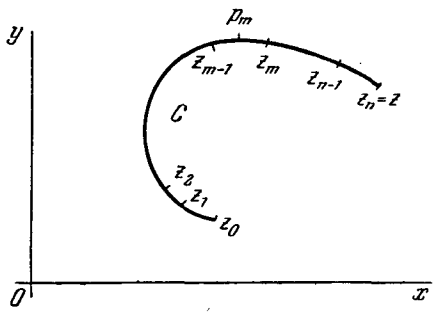


Рис. 1.20.

Пусть p_m — точка, находящаяся между z_{m-1} и z_m. Отрезок, началом которого является z_{m-1}, а концом z_m, обозначим через Δz_m.

Рассмотрим сумму

$$S_n=\sum_{m=1}^{n} f(p_m)\Delta z_m.$$

Устремим n к бесконечности при условии, что наибольшее $|\Delta z_m|$ стремится к нулю. Если при этом сумма S_n имеет предел, не зависящий от выбора промежуточных точек, то этот предел называется криволинейным интегралом функции $f(z)$ вдоль кривой C. Он обозначается так:

$$\int_C f(z)\,dz.$$

Величина этого интеграла зависит не только от $f(z)$, но и от формы кривой C.

*) Часто голоморфную функцию определяют как функцию, разлагающуюся в ряд Тейлора. Отметим, что оба эти определения эквивалентны (см., например, [1], стр. 200—201).

Предположим, что длина кривой C конечна и равна s и что на этой кривой модуль $f(z)$ не превосходит постоянной M. Тогда справедлива оценка

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant Ms.$$

В самом деле,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant M \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} |\Delta z_m|,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} |\Delta z_m| = \int_C |dz| = \int_C \sqrt{dx^2+dy^2} = s,$$

что и доказывает оценку.

Если разложить $f(z)$ и dz на их вещественную и мнимую части

$$f(z) = P(x, y) + jQ(x, y), \quad dz = dx + j\,dy,$$

то получим

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (P\,dx - Q\,dy) + j\int_C (P\,dy + Q\,dx). \tag{5}$$

Как указано выше, интеграл, определенный таким образом, зависит не только от положения концов кривой C, но и, вообще говоря, от формы этой кривой.

1.3.6. Теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри некоторой области. Тогда криволинейный интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, расположенному внутри области, равен нулю (рис. 1.21, *а*) [1]).

Итак, требуется доказать, что $\int_C f(z)\,dz = 0$.

Применим формулу (5) к замкнутому контуру C, ограничивающему область S. Вещественные интегралы, стоящие в правой части этой формулы, преобразуем по формуле Грина *):

$$\int_C (P\,dy + Q\,dx) = \int_S \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{6}$$

$$\int_C (P\,dx - Q\,dy) = -\int_S \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{7}$$

Для голоморфной функции $f(z)$ выполняются условия Коши — Римана, т. е. оба выражения (6) и (7) равны нулю. Таким образом, теорема Коши доказана **).

---

[1]) Это условие достаточно, но не необходимо. Действительно, существуют функции, не голоморфные во всех точках области и такие, что рассматриваемый криволинейный интеграл равен нулю. Примером может служить функция $(z-a)^{-n}$ при целых $n > 1$.

*) Эта формула является частным случаем теоремы Стокса (п. 3.3.9).

**) Отметим, что при использовании формулы Грина существенно предположение о непрерывности частных производных функций P и Q. Это предположение для справедливости теоремы Коши является излишним (см. [1], стр. 148—155).

Замечание. Доказанная теорема справедлива не только для простых контуров типа, изображенного на рис. 1.21, *а*. Она верна также в случае,

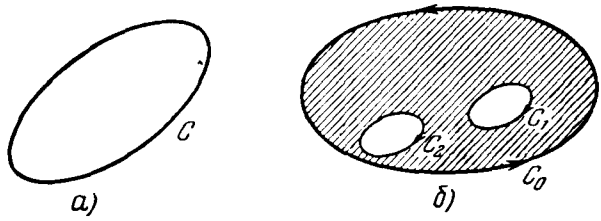


Рис. 1.21.

когда внутри области, ограниченной контуром C_0, имеются дырки, окруженные контурами C_1, C_2 и т. д. (см. рис. 1.21, *б*). В этом случае под контуром C в теореме Коши надо понимать сложный контур, состоящий из наружной кривой C_0, проходимой в положительном направлении (против часовой стрелки), и всех внутренних кривых C_1, C_2 и т. д., проходимых в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

В случае голоморфности $f(z)$ интеграл (5) зависит только от положения начала и конца кривой C и не зависит от формы пути интегрирования. Для доказательства достаточно применить теорему Коши к замкнутому контуру $C+C'$, где C' — любая кривая, соединяющая концы кривой C.

Замечание. Вещественный криволинейный интеграл не зависит от формы пути, если он берется от функции, представляющей полный дифференциал. Условия Коши — Римана совпадают с условиями полного дифференциала для (5).

1.3.7. Формула Коши. Пусть $f(z)$—функция, голоморфная в замкнутой области, ограниченной контуром C, а z_0 — внутренняя точка области (рис. 1.22). Докажем, что имеет место формула Коши

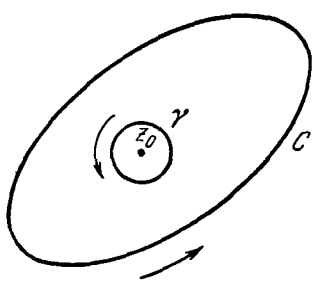


Рис. 1.22.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz, \tag{8}$$

где контур C обходится в положительном направлении. Действительно, функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ голоморфна во всех точках внутри контура, кроме точки $z=z_0$. Исключим из рассматриваемой области небольшой круг с центром z_0 и радиусом ρ. Окружность его обозначим через γ (см. рис. 1.22). Функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ голоморфна внутри кольцевой области, ограниченной C и γ. Если перемещаться по C и по γ в положительном направлении, то по теореме Коши

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Интеграл слева не зависит от ρ. Следовательно, интеграл в правой части также не зависит от ρ.

Имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_\gamma \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0}+\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

Первый интеграл справа вычисляем непосредственно:

$$\int_\gamma \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)\int_0^{2\pi} \frac{j\rho e^{j\theta}\,d\theta}{\rho e^{j\theta}} = 2\pi j f(z_0).$$

Так как $f(z)$ непрерывна, то можно выбрать ρ настолько малым, что в круге внутри γ $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Для этого значения ρ

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| < \int_\gamma \frac{\varepsilon\,|dz|}{|z-z_0|} = \int_\gamma \frac{\varepsilon}{\rho}\,dS = 2\pi\varepsilon,$$

так как путь интегрирования равен $2\pi\rho$. Это и доказывает формулу Коши (8).

Продифференцировав (8) n раз, получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \tag{9}$$

1.3.8. Ряд Тейлора. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная внутри круга C с центром в a; z_0 — точка внутри этого круга. По формуле Коши имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Запишем

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a-(z_0-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z_0-a}{z-a}}.$$

Тогда

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{f(z)}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z_0-a}{z-a}} = \frac{f(z)}{z-a}\left[1+\frac{z_0-a}{z-a}+\ldots+\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n+\ldots\right],$$

так как $|z_0-a|<|z-a|$. Умножим обе части этого выражения на $\frac{1}{2\pi j}$ и проинтегрируем вдоль контура C. Это возможно, так как рассматриваемый ряд сходится равномерно относительно точек окружности. Имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0) = A_0 + A_1(z_0-a)+\ldots+A_n(z_0-a)^n+\ldots, \tag{10}$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz. \tag{11}$$

Согласно формуле (9)

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{12}$$

Таким образом, получаем разложение в ряд Тейлора, распространенное на функции комплексной переменной:

$$f(z_0) = f(a) + \frac{z_0-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(z_0-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

При $a=0$ (центр круга в начале координат) получим

$$f(z_0)=f(0)+\frac{z_0}{1!}f'(0)+\ldots+\frac{z_0^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Это ряд Маклорена.

1.3.9. Особые точки. Точка, в окрестности которой аналитическая функция разложима в ряд Тейлора, называется обыкновенной точкой. Всякая необыкновенная точка называется особой точкой.

Полюса — это изолированные особые точки, вблизи которых $f(z)$ остается однозначной и которые являются обыкновенными точками для $\frac{1}{f(z)}$.

Существенно особые точки — это изолированные особые точки, в окрестности которых $f(z)$ остается однозначной, но которые являются особыми и для функции $\frac{1}{f(z)}$.

Критические точки или точки разветвления — это особые точки, вблизи которых функция $f(z)$ не остается однозначной.

Примеры особых точек. Функция $\frac{1}{z^2}$ имеет полюс 2-го порядка в начале координат.

Функция $\frac{1}{z^2+1}$ имеет простые полюса $z=+j$ и $z=-j$ (ср. стр. 49).

Функция $\sin\frac{1}{z}$ имеет существенно особую точку в начале координат.

Функция $e^{1/z-a}$ имеет в точке $z=a$ существенно особую точку.

Функция $z^{1/n}$ имеет точку разветвления в начале координат.

1.3.10. Разложение в ряд Лорана. Дана функция $f(z)$, имеющая полюс или существенно особую точку $z=a$. Если выделить эту точку маленькой окружностью γ радиуса ρ, то функция $f(z)$ становится голоморфной внутри круговой области, заключенной между γ и окружностью Γ с радиусом R, также имеющей центром a (рис. 1.23). Применим формулу Коши к контуру $\gamma+\Gamma$. Обозначив через z_0 точку внутри кругового кольца, получаем

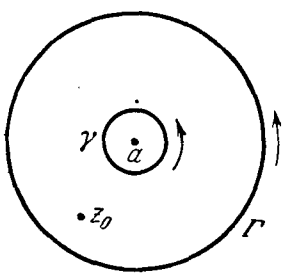


Рис. 1.23.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Оба криволинейных интеграла берутся в положительном направлении.

Согласно соотношению (10) предыдущего пункта первый интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=A_0+A_1(z-a)+\ldots+A_n(z-a)^n+\ldots,$$

где в силу формулы (11)

$$A_n=\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Равенство (12) в данном случае использовать нельзя, так как $f(z)$ голоморфна не во всех точках внутри Γ.

Второй интеграл вычисляем аналогично первому. Имеем

$$\frac{1}{z_0-z}=\frac{1}{z_0-a-(z-a)}=\frac{1}{z_0-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{z_0-a}}.$$

Так как $|z_0-a|>|z-a|$, то полученное выражение можно разложить в ряд и проинтегрировать:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(z)}{z_0-z}\,dz=\frac{A_{-1}}{z_0-a}+\ \ldots\ +\frac{A_{-n}}{(z_0-a)^n}+\ \ldots,$$

где

$$A_{-n}=\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1}\,dz. \tag{13}$$

Таким образом, получаем разложение в ряд Лорана

$$f(z_0)=\ \ldots+\frac{A_{-n}}{(z_0-a)^n}+\ \ldots+\frac{A_{-1}}{(z_0-a)}+$$
$$+A_0+A_1(z_0-a)+\ \ldots\ +A_n(z_0-a)^n+\ \ldots$$

Коэффициенты A_n и A_{-n} определяются формулами (11) и (13).

Так как ρ можно выбрать сколь угодно малым, то точка z_0 может быть сколь угодно близка к точке a. Следовательно, разложение в ряд Лорана представляет собой разложение в ряд функции $f(z)$ вблизи полюса или существенно особой точки. Использование разложения в ряд Лорана позволяет более точно классифицировать полюсы и существенно особые точки.

Если в ряде Лорана имеется только конечное число коэффициентов типа A_{-n}, то особая точка является полюсом для рассматриваемой функции. Обозначим через n наивысшую степень $\dfrac{1}{z-a}$, входящую в разложение Лорана. Число n есть порядок полюса; если $n=1$, то полюс называется простым.

Если разложение Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a является существенно особой точкой.

Примеры. Дана функция

$$\frac{1}{z(z-1)}.$$

Найдем ее разложение в ряд Лорана вблизи полюса $z=0$. Имеем

$$\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\ \ldots)=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\ \ldots$$

Вблизи полюса $z=1$ имеем

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ \ldots]=$$
$$=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+\ \ldots$$

Рассмотрим, далее, функцию $e^{1/z}$. Найдем ее разложение в ряд Лорана вблизи существенно особой точки $z=0$. Непосредственно получаем

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\ \ldots$$

Интегрирование по методу вычетов

1.3.11. Теорема о вычетах. Пусть a—полюс функции $f(z)$, а C—контур, окружающий точку a, на котором выбрано положительное направление: функция $f(z)$ голоморфна во всех точках внутри C, кроме, разумеется, точки a. Покажем, что в принятых предположениях имеет место формула

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi j A_{-1},$$

где A_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z-a}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана. Величина A_{-1} называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки a *).

Действительно, если a — полюс порядка m, то

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — голоморфная функция внутри контура C. Отсюда получаем

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{A_{-m}}{(z-a)^m}\,dz + \ldots + \int_C \frac{A_{-1}}{z-a}\,dz + \int_C \varphi(z)\,dz.$$

В силу голоморфности $\varphi(z)$ по теореме Коши $\int_C \varphi(z)\,dz = 0$.

Опишем из точки a как из центра окружность Γ радиуса R, целиком лежащую внутри контура C. Применяя теорему Коши к области, ограниченной контурами Γ и C (на C также выбрано положительное направление), получим

$$\int_C f(z)\,dz = A_{-m}\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^m} + \ldots + A_{-1}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Положим $z - a = Re^{j\theta}$, $dz = jRe^{\theta j}\,d\theta$. Имеем

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = j\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi j,$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-a)^m} = \frac{j}{R^{m-1}}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{(m-1)j\theta}} =$$

$$= \frac{j}{R^{m-1}}\int_0^{2\pi} [\cos(m-1)\theta - j\sin(m-1)\theta]\,d\theta = 0 \qquad (m > 1),$$

откуда

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi j A_{-1}.$$

1.3.12. Вычисление вычетов. Рассмотрим сначала случай простого полюса. Пусть $f(z)/g(z)$ — отношение двух голоморфных функций. Тогда $g(z) = (z-a)\xi(z)$, $\xi(a) \neq 0$. Имеем

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z-a)\xi(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a}.$$

*) Часто используется обозначение $A_{-1} = \operatorname{Res}(a)$ функции $f(z)$.

Следовательно,

$$A_{-1}=\frac{f(a)}{\xi(a)}.$$

Пример. Рассмотрим функцию $\frac{e^z}{z^2+a^2}$. Имеются два простых полюса: $z=+ja$ и $z=-ja$. Применим предыдущую формулу:

$$\operatorname{Res}(ja)=\frac{e^{ja}}{2ja}, \quad \operatorname{Res}(-ja)=\frac{-e^{-ja}}{2ja}.$$

Следовательно, сумма вычетов равна $\frac{\sin a}{a}$ и

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+a^2}\,dz=2\pi j\frac{\sin a}{a}.$$

Здесь C — произвольная кривая, окружающая оба полюса, как показано на рис. 1.24, *а*.

Замечание 1. Можно последовательно изменять контур, окружающий оба полюса до тех пор, пока не останутся маленькие круги с центрами в полюсах, соединенные между собой бесконечно узким разрезом, берега которого проходятся в противоположных направлениях. При этой деформации интеграл сохранит свое значение (теорема Коши). Значения интегралов вдоль противоположных берегов разреза в силу однозначности функции взаимно компенсируют друг друга. Поэтому в качестве контура интегрирования можно брать совокупность отдельных замкнутых контуров, каждый из которых содержит один полюс функции (см. рис. 1.24, *б*, а также рис. 8.15).

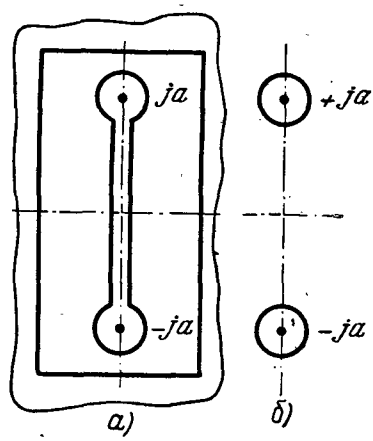


Рис. 1.24.

Замечание 2. Указанный в начале этого пункта способ вычисления вычета в простом полюсе удобно несколько видоизменить. Очевидно,

$$\operatorname{Res}(a)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)f(z)}{g(z)}.$$

Для раскрытия этой неопределенности типа $\frac{0}{0}$ применим правило Лопиталя:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)+(z-a)f'(z)}{g'(z)}=\frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}(a)=\frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Замечание 3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — простые полюса для $\frac{f(z)}{g(z)}$. Тогда

$$\sum \operatorname{Res}=\sum_{m=1}^{n}\frac{f(a_m)}{g'(a_m)}.$$

Рассмотрим функцию вида $\frac{f(z)}{zg(z)}$, $g(0) \neq 0$. Легко убедиться, что в этом случае

$$\sum \operatorname{Res} = \frac{f(0)}{g(0)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{f(a_m)}{a_m g'(a_m)}.$$

Пример 1. Найти сумму вычетов $\frac{e^z}{\sin mz}$ относительно полюсов, находящихся на вещественной оси между $-\infty$ и 0.

Так как $\sin mz = 0$ при $z = \frac{-n\pi}{m}$, то имеем

$$\sum \operatorname{Res} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^z}{m \cos mz}\right]_{z=-\frac{n\pi}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n\frac{\pi}{m}} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{m}} + e^{-2\frac{\pi}{m}} - \ldots}{m} = \frac{1}{m\left(1 + e^{-\frac{\pi}{m}}\right)}.$$

Приведем способ вычисления вычетов относительно кратных полюсов.

Пример 2. Вычислить $\int_C \frac{e^z\, dz}{z \sin mz}$, где C — малая окружность вокруг начала координат.

Разложим e^z и $\sin mz$. Для малых z имеем

$$\frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots}{mz^2\left(1 - \frac{m^2z^2}{3!} + \frac{m^4z^4}{5!} - \ldots\right)} = \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{m^2z^2}{6} + \ldots\right)}{mz^2}.$$

Таким образом, в данном примере $z = 0$ — полюс второго порядка. Коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{m}$, следовательно,

$$\int_C \frac{e^z}{z \sin mz}\, dz = \frac{1}{m} 2\pi j.$$

1.3.13. Вычисление вычетов относительно кратных полюсов с помощью производных. Пусть $\frac{f(z)}{g(z)}$ — функция, имеющая в точке a полюс порядка n. Разлагая ее в ряд Лорана, получаем

$$\frac{f(z)}{g(z)} = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + \ldots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Умножим обе части равенства на $(z-a)^n$:

$$(z-a)^n \frac{f(z)}{g(z)} = [A_0 + A_1(z-a) + \ldots](z-a)^n + A_{-1}(z-a)^{n-1} + \ldots + A_{-n}.$$

Дифференцируем это тождество $n-1$ раз и полагаем затем $z = a$. Имеем

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n \frac{f(z)}{g(z)}\right]\Big|_{z=a} = (n-1)!\, A_{-1}.$$

Отсюда получаем искомый коэффициент A_{-1}.

Пример. Найти вычет $\frac{ze^z}{(z-a)^3}$ относительно $z=a$.

1-й способ.

$$\operatorname{Res}(a)=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(ze^z)\Big|_{z=a},$$

$$\frac{d}{dz}(ze^z)=(z+1)e^z,\quad \frac{d^2}{dz^2}(ze^z)=(z+2)e^z,$$

т. е.
$$\operatorname{Res}(a)=e^a\left(1+\frac{a}{2}\right).$$

2-й способ. Переместим начало координат в точку a, положив $z=u+a$:

$$\frac{(u+a)e^{u+a}}{u^3}=e^a\left(\frac{1}{u^2}+\frac{a}{u^3}\right)\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots\right).$$

Вычет равен коэффициенту при $\frac{1}{u}$, т. е. $e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$. Следовательно, $\frac{1}{2\pi j}\int\limits_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz=e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$ для любого контура C, окружающего точку $z=a$.

1.3.14. Лемма Жордана. Часто бывает полезно рассматривать открытые контуры интегрирования, точнее, контуры, которые в действительности замыкаются бесконечной окружностью комплексной плоскости. В большинстве случаев речь идет о прямолинейном контуре, замыкающемся полуокружностью с центром в начале координат, радиус которой растет до бесконечности. Если интеграл по этой полуокружности стремится к нулю, то контур интегрирования сводится к бесконечной прямой. Следующее положение, известное как лемма Жордана, позволяет указать важный частный случай равенства нулю интеграла по полуокружности бесконечного радиуса.

Пусть $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в верхней полуплоскости ($0<\arg z<\pi$), за исключением конечного числа полюсов, и стремящаяся к нулю при $|z|\to\infty$ равномерно относительно $\arg z$. Тогда при $t>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C'} e^{jtz}\Phi(z)\,dz=0,$$

где контур C' представляет собой полуокружность с центром O и радиусом R, замыкающую верхнюю полуплоскость.

Действительно, произведем замену переменной

$$z=Re^{j\theta}.$$

Очевидно,

$$\left|e^{jtR\cos\theta-tR\sin\theta}\right|=e^{-tR\sin\theta}.$$

В силу равномерного стремления $\Phi(z)$ к нулю, для достаточно больших R имеет место неравенство $|\Phi(z)|<\varepsilon$, где ε — положительное, произвольно малое. Используя, далее, неравенство $\frac{\sin\theta}{\theta}\geqslant\frac{2}{\pi}$, справедливое при $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\left|\int\limits_C \Phi(z)e^{jtz}dz\right|<\varepsilon R\int\limits_0^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta\leqslant 2\varepsilon R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2Rt\theta/\pi}d\theta=\frac{\pi\varepsilon}{t}(1-e^{-Rt})<\frac{\varepsilon\pi}{t},$$

что и доказывает лемму.

Если t отрицательно, то в условии леммы следует только заменить верхнюю полуплоскость на нижнюю ($-\pi < \arg z < 0$) и соответственно верхнюю полуокружность на нижнюю.

Рассмотрим теперь

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_C e^{tz}\Phi(z)\,dz.$$

Этот предел равен нулю при тех же условиях, что и предыдущий, если для t положительного и отрицательного речь идет соответственно о левой полуплоскости $\left(\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$ и о правой полуплоскости $\left(-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right)$ относительно мнимой оси. Контур C обозначает соответственно полуокружность с центром O и радиусом R справа или слева от мнимой оси.

Замечание. При вычислении интеграла по бесконечной оси с помощью теоремы о вычетах следует помнить, что контур, образованный осью и бесконечной полуокружностью, должен обходиться в положительном направлении.

1.3.15. Применение леммы Жордана к единичной функции. Рассмотрим функцию вещественной переменной t, определенную с помощью интеграла в комплексной плоскости:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega. \qquad (14)$$

Контур C представляет собой ось x с выемкой в форме полуокружности со стороны отрицательных y (рис. 1.25).

Обозначим через γ часть контура C, ограниченную двумя точками A и B, равноотстоящими от начала координат, и через Γ полуокружность с центром O, проходящую через A и B и находящуюся под действительной

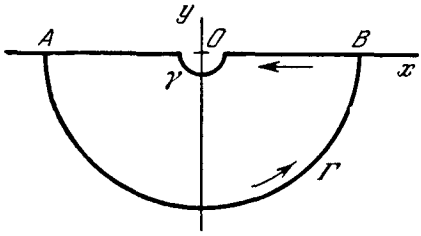


Рис. 1.25.

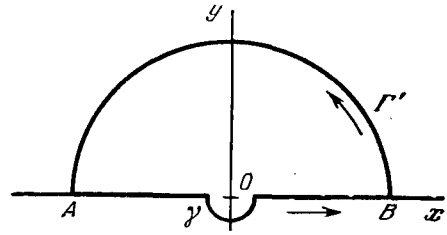


Рис. 1.26.

осью. Контур $\gamma+\Gamma$ не содержит особых точек подынтегральной функции. Следовательно, соответствующий криволинейный интеграл равен нулю.

Если предположить, что t отрицательно, то по лемме Жордана интеграл по контуру Γ стремится к нулю, когда радиус окружности бесконечно возрастает. Следовательно, предел интеграла по контуру γ (т. е. интеграл по контуру C) равен нулю:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Положим теперь, что t положительно. Рассмотрим полуокружность Γ', проходящую через A и B и расположенную со стороны положительных y (рис. 1.26). В этом случае

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma+\Gamma'} \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega = 1,$$

так как вычет относительно точки 0 равен единице. По лемме Жордана интеграл по контуру Γ' стремится к нулю, если радиус окружности бесконечно растет. В пределе имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega = 1 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

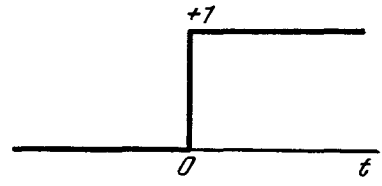


Рис. 1.27.

Функция $f(t)$, определенная равенством (14), равна нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$ (рис. 1.27). Она представляет собой единичную функцию или единичный импульс и обозначается через $\eta(t)$.

Приведем другое выражение для $\eta(t)$. Повторяя предыдущее рассуждение, получим

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^{-j\omega t}}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} -1 & \text{для} \quad t < 0, \\ 0 & \text{для} \quad t > 0. \end{cases}$$

Следовательно, мы можем написать

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi j}\left[\int_C \frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega - \int_C \frac{e^{-j\omega t}}{\omega}\,d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\sin \omega t}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} -1/2 & \text{для} \quad t < 0, \\ +1/2 & \text{для} \quad t > 0. \end{cases}$$

Так как $\frac{\sin \omega t}{\omega}$ является четной функцией, не имеющей особенности при $\omega = 0$, то справедливо равенство

$$\eta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\,d\omega. \tag{15}$$

1.3.16. Интегрирование при наличии точки разветвления. Рассмотрим простой пример и проиллюстрируем на нем, какие следует принять предосторожности при интегрировании по контуру, внутри которого имеются точки разветвления. А именно вычислим интеграл $\int_C \sqrt{z}\,dz$. Контур C — окружность с центром A и радиусом R.

Если точка z перемещается по этой окружности, то можно положить $z = Re^{j\theta}$. Рассмотрим точку $z_0 = Re^{j\theta_0}$. В этой точке функция $\sqrt{z}$ имеет два значения:

$$\sqrt{z_0} = \begin{cases} \sqrt{R}\,e^{j\frac{\theta_0}{2}}, \\ \sqrt{R}\,e^{j\left(\frac{\theta_0}{2}+\pi\right)}. \end{cases}$$

Возьмем первое значение этого корня, а саму точку z_0 в качестве отправной. Имеем

$$\int_C \sqrt{z}\,dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} jR^{\frac{3}{2}}e^{j\frac{3\theta}{2}}\,d\theta = -\frac{4}{3}R^{\frac{3}{2}}e^{j\frac{3\theta_0}{2}}.$$

Величина интеграла зависит не только от значения, выбранного для $z^{1/2}$, но также от отправной точки интегрирования и радиуса окружности.

Таким образом, при вычислении интеграла по контуру, внутри которого находятся точки разветвления функции, требуется предварительно фиксировать определенную ветвь функции и отправную точку интегрирования.

На практике вычисление производится следующим образом. Точку разветвления A соединяют с контуром C дугой, не имеющей двойных точек, которую z при движении вдоль C не может пересечь. Таким образом осуществляется разрез. Точка z может перемещаться по замкнутому контуру Г, состоящему из контура C, малой окружности, заключающей точку разветвления, и обоих берегов бесконечно узкого разреза (эти берега обходятся в противоположных направлениях). Отметим, что контур, состоящий из обоих берегов разреза и малой окружности, иногда называют шнуром (рис. 1.28).

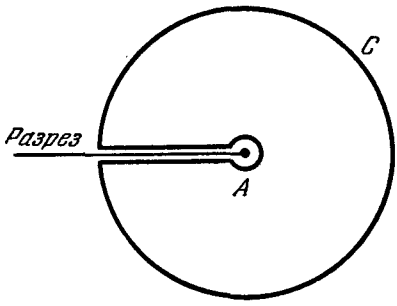


Рис. 1.28.

Наличие разреза обязывает функцию $f(z)$ снова принимать прежнее значение, когда z возвращается в исходную точку, какой бы при этом ни был описан путь внутри Г или на нем. Действительно, при таком движении аргумент точки z может изменяться только на величину, меньшую 2π. Внутри контура Г функция $f(z)$ становится голоморфной (кроме как в конечном числе полюсов), и поэтому можно применить теорему о вычетах. Интеграл, взятый по контуру C, начиная от заданной начальной точки (искомый интеграл), сложенный с интегралами по разрезу и по малой окружности, будет равен сумме вычетов относительно полюсов, находящихся внутри Г.

Следует заметить, что существует глубокое различие между разрезом, описанным в п. 1.3.12 (замечание 1) и рассмотренным в данном пункте. В последнем случае интегралы по различным берегам разреза не компенсируют друг друга, так как значения, которые принимает функция $f(z)$ в двух бесконечно близких точках на разных берегах разреза, существенно отличаются друг от друга. Рассмотрим, например, функцию $z^{1/2}$. Если бы не было разреза, то любую точку R, θ_0 можно было бы представить как точку R, $\theta_0+2\pi$, — для этого требуется лишь осуществить один поворот около точки разветвления (в положительном направлении). И тогда функция $\sqrt{z}$ вместо начального значения $\sqrt{R}\,e^{\frac{j\theta_0}{2}}$ приняла бы значение $\sqrt{R}\,e^{\frac{j\theta_0}{2}}e^{j\pi}$. На верхнем и нижнем берегах разреза в точках окружности C функция $z^{1/2}$ принимает соответственно значения $jR^{1/2}$ и $-jR^{1/2}$.

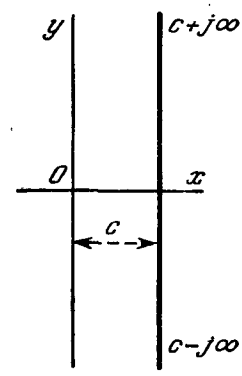


Рис. 1.29.

1.3.17. Контур Бромвича. Контур Бромвича представляет собой прямую, соединяющую точку $c-j\infty$ с точкой $c+j\infty$, оставляющую слева от себя все особые точки рассматриваемой функции (рис. 1.29). Величина c, равная расстоянию от контура до оси y, всегда положительна.

В задачах, относящихся к движению устойчивых механизмов или диссипативным электрическим цепям, особенности функций в большинстве случаев находятся либо слева от мнимой оси, либо на ней самой. В первом случае мнимую ось можно считать контуром Бромвича. В задачах о распространении электрических или акустических волн некоторые из особых точек являются точками разветвления, в других задачах — это, как правило, полюса.

1.3.18. Интеграл Бромвича — Вагнера. Бромвич и Вагнер определили форму интеграла, встречающегося при решении технических задач с помощью операционного исчисления (см. теорему Фурье — Меллина, п. 8.3.22). Этот интеграл имеет следующий вид:

$$I=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{zt}\Phi(z)\,dz,$$

где $\Phi(z)$ — функция, все особенности которой лежат слева от контура Бромвича.

1.3.19. Эквивалентный контур. Если функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то интеграл по бесконечной полуокружности, расположенной слева от мнимой оси, равен нулю при $t>0$.

Рассмотрим типичные эквивалентные контуры для особых точек разного типа.

1. *Все особенности являются полюсами.* В этом случае контур, эквивалентный контуру Бромвича, состоит из произвольной замкнутой кривой, не имеющей двойных точек, внутри которой расположены все полюса. Значение интеграла по контуру Бромвича равно сумме вычетов относительно этих полюсов.

2. *Функция имеет точки разветвления.* В качестве контура, эквивалентного контуру Бромвича, можно взять малую окружность, заключающую точку разветвления, соединенную разрезом с бесконечной полуокружностью, лежащей слева от мнимой оси.

Примеры эквивалентных контуров. Для функции $\frac{e^{zt}}{z^2}$ контур, эквивалентный контуру Бромвича, — окружность с центром в начале координат (рис. 1.30).

Для функции $\frac{e^{zt}}{z^{3/2}}$ контур, эквивалентный контуру Бромвича, состоит из малой окружности с центром в начале координат,

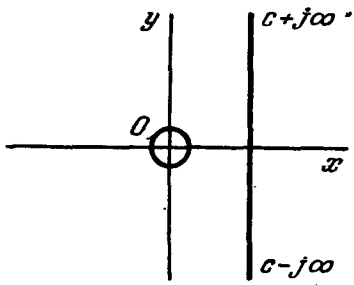


Рис. 1.30.

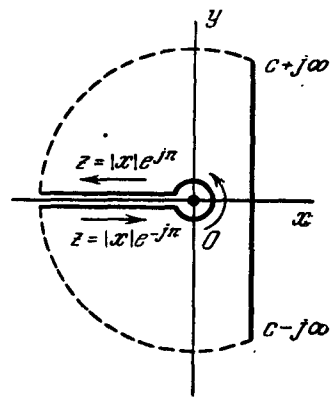


Рис. 1.31.

являющемся точкой разветвления, соединенной с бесконечным полукругом, как это показано на рис. 1.31.

Для функции $\frac{e^{zt}}{\sqrt{z^2+1}}$, имеющей две точки разветвления в $z=\pm j$, можно начертить множество эквивалентных контуров. Несколько таких контуров показано на рис. 1.32.

Пример 1. Вычислить

$$I=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,dz \qquad (n>0,\ \text{целое}).$$

Особенность $\Phi(z)$ представляет собой кратный полюс в начале координат. Так как условия Жордана выполняются, то интеграл будет равен вычету функции относительно точки $z=0$.

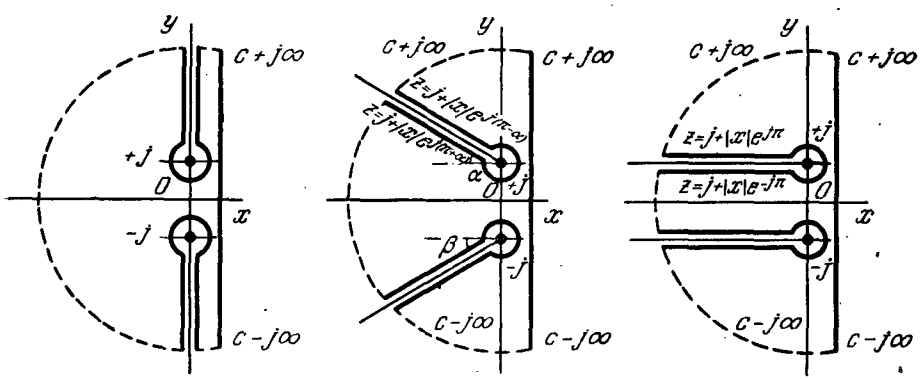


Рис. 1.32.

Разложим e^{zt} в ряд. Вычет относительно особой точки $z=0$ равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$ в произведении

$$\left[1+zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{z^nt^n}{n!}+\ldots\right]\frac{1}{z^{n+1}},$$

т. е.

$$I=\frac{t^n}{n!}$$

Пример 2. Вычислить $I=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-hz})}$. Условия Жордана выполнены. Особенностями функции являются, во-первых, двойной полюс в начале координат, во-вторых, бесконечное число простых полюсов $z=\frac{2\pi j}{h}n$, когда n принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, кроме значения $z=0$. Следовательно, интеграл I равен сумме вычетов относительно полюсов подынтегральной функции.

Вычислим вычет относительно точки $z=0$. Для этого разложим в ряд числитель и знаменатель подынтегральной функции:

$$\frac{1+zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\ldots}{hz^2\left(1-\frac{hz}{2!}+\frac{h^2z^2}{3!}-\ldots\right)}.$$

При малых z это выражение можно записать в виде

$$\frac{\left(1+zt+\frac{z^2t^2}{2}+\ldots\right)\left(1+\frac{hz}{2}+\frac{h^2z^2}{12}+\ldots\right)}{hz^2}.$$

Вычет равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$, т. е. $\frac{t}{h}+\frac{1}{2}$.

Вычислим сумму вычетов относительно $z=\frac{2\pi j}{h}n$ $(n\neq 0)$. Имеем *)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\frac{e^{zt}}{z\frac{d}{dz}(1-e^{-hz})}\right]_{z=\frac{2\pi nj}{h}}=\frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\frac{e^{zt}}{ze^{-hz}}\right]_{z=\frac{2\pi nj}{h}}$$

Сгруппируем попарно в последней формуле члены, содержащие $\frac{1}{2j}e^{\frac{2\pi njt}{h}}$ с членами, содержащими $\frac{1}{2j}e^{\frac{-2\pi njt}{h}}$. Имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{\frac{2\pi njt}{h}}}{2\pi nj}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi nt}{h}}{n}.$$

Если учесть вычет относительно начала координат, то находим

$$I=\frac{1}{2}+\frac{1}{h}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi nt}{h}}{n}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{zt}z^{1/2}\,dz}{z^2+\omega^2}.$$

Особенностями функции $\Phi(z)=\frac{z^{1/2}}{z^2+\omega^2}$ являются два полюса $z=\pm j\omega$ и точка разветвления $z=0$.

Рассмотрим разрез вдоль отрицательной части действительной оси и обозначим соответствующий ему шнур через Γ (см. рис. 1.31). Так как функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то интеграл по контуру Бромвича равен интегралу по шнуру Γ (направление обхода указано стрелками) плюс сумма вычетов относительно полюсов $z=\pm j\omega$:

$$I=\sum\operatorname{Res}+\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3},$$

где γ_1 — окружность с центром O и бесконечно малым радиусом, γ_2 — путь, проходимый по верхнему берегу разреза, γ_3 — путь, проходимый по нижнему берегу разреза.

1. Вычислим вычеты относительно особых точек. Вычет относительно $z=+j\omega$ равен

$$\left(\frac{e^{zt}z^{1/2}}{z+j\omega}\right)_{z=j\omega}=\frac{e^{j\omega t}\sqrt{j\omega}}{2j\omega}=\frac{e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2j\sqrt{\omega}}.$$

Вычет относительно $z=-j\omega$ равен

$$\left(\frac{e^{zt}z^{1/2}}{z-j\omega}\right)_{z=-j\omega}=\frac{e^{-j\omega t}\sqrt{-j\omega}}{-2j\omega}=-\frac{e^{-j\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2j\sqrt{\omega}}.$$

*) $\sum'$ означает, что суммирование идет для $n\neq 0$.

Сумма вычетов дает

$$\sum \operatorname{Res} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Для точек окружности радиуса ρ с центром O имеем $z = \rho e^{i\theta}$. Так как $|z| \ll \omega$, то

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} e^{t\rho(\cos\theta + j\sin\theta)} \rho^{3/2} e^{j3/2\theta}\, d\theta = 0.$$

3. На верхнем берегу разреза

$$z = |x| e^{j\pi},$$

$$\int_{\gamma_2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} x^{1/2}}{x^2 + \omega^2}\, dx.$$

На нижнем берегу разреза

$$z = |x| e^{-j\pi},$$

$$\int_{\gamma_3} = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-xt} x^{1/2}}{x^2 + \omega^2}\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} x^{1/2}}{x^2 + \omega^2}\, dx$$

и, наконец,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} x^{1/2}}{x^2 + \omega^2}\, dx.$$

Характерные примеры интегрирования на комплексной плоскости даны в пп. 8.3.23 и 8.4.18.

1.3.20. Теорема о числе полюсов и числе нулей. Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри замкнутого контура C, за исключением конечного числа полюсов, непрерывна и не обращается в нуль на C. Обозначим через N и P соответственно количество нулей и полюсов $f(z)$ внутри контура C, причем каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность. Тогда произведение разности $N - P$ на $2\pi j$ равно интегралу от логарифмической производной $f(z)$ по контуру C при обходе его в положительном направлении.

Действительно, пусть a — нуль порядка α. В окрестности точки a имеем

$$f(z) = (z - a)^{\alpha} \psi(z), \qquad \psi(a) \neq 0;$$

далее,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z - a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Если C_1 — малый контур, окружающий точку a, то

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \alpha.$$

Точно так же, если b — полюс порядка β, то в окрестности точки b имеем

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-b)^{\beta}}, \qquad \varphi(b)\neq 0.$$

Функция $\varphi(z)$ голоморфна в окрестности b. Поэтому вблизи b можно написать

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{\beta}{z-b}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Если C_2 — малый контур, окружающий b, то

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-\beta.$$

Из доказанного следует, что для функции $f(z)$, имеющей в области, ограниченной контуром C, нули $a_1, \ldots, a_n$ порядков $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и полюса $b_1, \ldots, b_n$ порядков $\beta_1, \ldots, \beta_n$, справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\alpha_1+\ldots+\alpha_n-\beta_1-\ldots-\beta_n,$$

т. е.

$$\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=2\pi j\,(N-P).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим преобразование

$$Z=f(z).$$

Если точка z описывает контур C в плоскости z, то точка Z описывает контур Γ в плоскости Z. Имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi j}[\ln f(z)]_C=\frac{1}{2\pi j}[\ln(X+jY)]_\Gamma=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\left[\frac{1}{2}\ln(X^2+Y^2)+j\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}\right]_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}\right]_\Gamma.$$

Этот интеграл равен числу T оборотов, которые описывает кривая Γ вокруг начала координат. По доказанному,

$$T=N-P.$$

Применение теоремы о вычетах к вычислению некоторых определенных интегралов

1.3.21. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ (f — рациональная функция $\cos\theta$ и $\sin\theta$, конечная внутри промежутка интегрирования). Положим $e^{j\theta}=z$. Имеем

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta=\frac{1}{2j}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Интеграл получает вид $\int_C \varphi(z)\,dz$, где C — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Этот интеграл равен $2\pi j\Sigma$, если через Σ

обозначить сумму вычетов относительно полюсов, заключенных внутри окружности C.

Пример. Вычислить

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}\qquad (a>b>0).$$

Имеем

$$I=\frac{4}{j}\int_C\frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2}=8\pi\Sigma.$$

Единственный полюс, заключенный внутри круга радиуса 1, $z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$; кратность его равна двум. Найдем вычет относительно этого полюса:

$$\Sigma=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(bz+a+\sqrt{a^2-b^2})^2}\right)\right]_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{a}{4}(a^2-b^2)^{-3/2}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

1.3.22. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$. Пусть $f(x)$ — функция вещественной переменной x, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $f(z)$ голоморфна во всей полуплоскости, расположенной над вещественной осью, исключая конечное число полюсов;

б) $f(z)$ не имеет полюсов на вещественной оси;

в) если $|z|$ стремится к бесконечности, то $zf(z)$ стремится к нулю равномерно относительно аргумента z, изменяющегося от 0 до π.

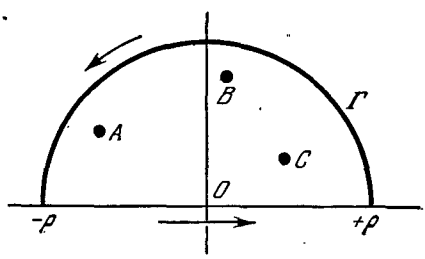


Рис. 1.33.

г) $\int_0^{\infty}f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx$ сходятся.

Легко показать, что $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ равен $2\pi j\Sigma$, где Σ представляет собой сумму вычетов относительно полюсов функции $f(z)$, расположенных над вещественной осью.

Для доказательства достаточно рассмотреть (рис. 1.33) контур интегрирования, состоящий из части вещественной оси между $-\rho$ и ρ и полуокружности Γ с центром O и радиусом ρ, причем ρ настолько велико, что все полюса A, B, C, ... функции $f(z)$ находятся внутри Γ. Если устремлять ρ к бесконечности, то часть интеграла, соответствующая Γ, стремится к нулю в силу допущения в). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=2\pi j\Sigma.$$

Пример. Вычислить

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Положим $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$. В $z=j$ рассматриваемая функция имеет единственный полюс над вещественной осью (его кратность равна трем). Вычет Σ относительно этого полюса равен

$$\Sigma=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+j)^3}\right)\right]_{z=j}=\frac{3}{16j}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{3}{8}\pi.$$

1.3.23. Интегралы вида $\int_0^\infty f(x)\cos mx\,dx$, $\int_0^\infty f(x)\sin mx\,dx$. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям предыдущего параграфа, причем условие в) заменено менее обременительным: если $|z|$ стремится к бесконечности, то $f(z)$ стремится к нулю равномерно относительно аргумента z $(0\leqslant\arg z\leqslant\pi)$. Рассмотрим контур на рис. 1.33. Согласно лемме Жордана имеем $(m>0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{jmx}\,dx=2\pi j\Sigma,$$

где Σ обозначает сумму вычетов относительно полюсов функции $f(z)\,e^{jmz}$, находящихся в верхней полуплоскости. Отделяя вещественные и мнимые части, можем написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos mx\,dx=-2\pi\mathrm{I}(\Sigma),\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin mx\,dx=2\pi\mathrm{R}(\Sigma).$$

Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{mjx}\,dx=\int_0^{+\infty}[f(x)\,e^{mjx}+f(-x)\,e^{-mjx}]\,dx=2\pi j\Sigma$$

вытекает, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_0^{+\infty}f(x)\cos mx\,dx=\pi j\Sigma,$$

а если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_0^{+\infty}f(x)\sin mx\,dx=\pi\Sigma.$$

Пример. Вычислить

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}\,dx\quad(a>0,\ k>0).$$

Функция $\frac{z \sin az}{z^2+k^2}$ имеет над вещественной осью только один полюс $z=jk$. Вычет относительно этого полюса равен

$$\Sigma = \left(\frac{ze^{jaz}}{z+jk}\right)_{z=jk} = \frac{1}{2}e^{-ak}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

Замечание. Пусть $f(z)$ имеет простые полюса на вещественной оси, иначе говоря, условие б) п. 1.3.22 не выполняется. Пусть функция $f(x)$ такова, что ее интеграл в интервале, где $f(x)$ получает бесконечные значения, сохраняет смысл. Тогда при вычислении интегралов, рассмотренных в п. 1. 3.22—23, следует к сумме вычетов Σ относительно полюсов над вещественной осью прибавить величину $\frac{1}{2}\sigma$, где σ означает сумму вычетов относительно полюсов на самой вещественной оси.

1.3.24. Интегралы вида $\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$. Полагаем, что $f(x)$ — рациональная функция x, причем $z^{\alpha+1}f(z)$ стремится к нулю, когда $|z|$ стремится к бесконечности и к нулю, и $f(z)$ не имеет полюсов на положительной части вещественной оси. Если мы осуществим разрез на этом отрезке вещественной оси, то функция $z^\alpha f(z)$ будет однозначной на всем контуре, не пересекающем разрез (в частности, на контуре рис. 1.34). Пусть ρ — радиус малого круга, а R — радиус большого круга такие, что в полученном кольце содержатся все полюса $f(z)$. В силу предположений относительно $f(z)$ интеграл, взятый по большой окружности, стремится к нулю, если R бесконечно возрастает, а интеграл, взятый по малой окружности, стремится к нулю вместе с ρ. Следовательно, интеграл, взятый по AB и DC, равен сумме вычетов Σ относительно всех полюсов функции $z^\alpha f(z)$, так как вычет относительно $z=0$ равен нулю. В самом деле, $z^{\alpha+1}f(z)$ стремится к нулю вместе с $|z|$, и поэтому коэффициент при $1/z$ разложения функции $z^\alpha f(z)$ должен быть равным нулю.

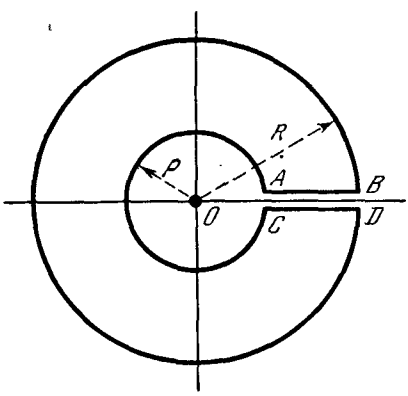


Рис. 1 34.

На AB $z=x$, на CD $z=xe^{2\pi j}$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ R\to\infty}} \int_\rho^R [x^\alpha f(x) - x^\alpha e^{2\pi j\alpha} f(x)]\,dx = 2\pi j\,\Sigma.$$

Наконец,

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{2\pi j\,\Sigma}{1-e^{2\pi j\alpha}}.$$

Пример. Вычислить

$$I=\int_0^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{(1+x^2)^2}\quad(-1<\alpha<3).$$

Функция $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ имеет два полюса второго порядка $z=\pm j$;

$$\Sigma=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^\alpha}{(z+j)^2}\right)\right]_{z=j}+\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^\alpha}{(z-j)^2}\right)\right]_{z=-j}=$$

$$=\frac{2(\alpha-1)}{8j}\,j^\alpha[(-1)^\alpha-1]=\frac{\alpha-1}{4j}\,\frac{e^{j\pi\alpha}-1}{e^{-j\pi\alpha/2}}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1-\alpha}{4j}\,\frac{1-e^{j\pi\alpha}}{e^{-j\pi\alpha/2}}\,\frac{2\pi j}{1-e^{2\pi j\alpha}}=\frac{\pi}{4}\,\frac{1-\alpha}{\cos\alpha\pi/2}.$$

1.3.25. Применение теоремы о вычетах к суммированию некоторых рядов. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n).$$

Положим, что функция $f(z)$ голоморфна на всей плоскости z за исключением простых полюсов $a_1, \ldots, a_k$, вычеты относительно которых равны $b_1, \ldots, b_k$. Контур C_n заключает в себе все полюса $f(z)$ и точки $0, \pm 1, \ldots, \pm n$ вещественной оси.

Числа $a_1, \ldots, a_k$, разумеется, не целые, так как иначе ряд не имел бы смысла.

Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z f(z)$, которая внутри контура C_n имеет в качестве полюсов полюса $f(z)$ с вычетами $\pi b_1\operatorname{ctg}\pi a_1$, $\pi b_2\operatorname{ctg}\pi a_2, \ldots, \pi b_k\operatorname{ctg}\pi a_k$ и точки $0, \pm 1, \ldots, \pm n$ с вычетами $f(0), f(\pm 1), \ldots, f(\pm n)$. Имеем

$$\int_{C_n}\varphi(z)\,dz=2\pi j\{f(-n)+f(-n+1)+\ldots$$

$$\ldots+f(n)+\pi b_1\operatorname{ctg}\pi a_1+\ldots+\pi b_k\operatorname{ctg}\pi a_k\}.$$

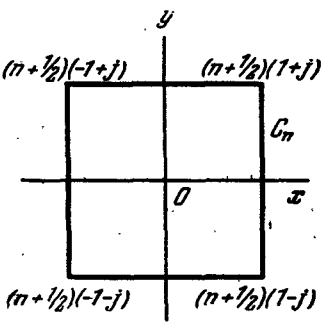


Рис. 1.35.

Если контур C_n при бесконечно возрастающем n отодвигается в бесконечность, причем криволинейный интеграл функции $\varphi(z)$ по C_n стремится к нулю, то можно вычислить сумму рассматриваемого ряда. Эти условия соблюдаются, если, например, в качестве контура C_n использовать квадрат, представленный на рис. 1.35, и считать, что при бесконечном возрастании $|z|$ произведение $zf(z)$ равномерно стремится к нулю.

Выберем n достаточно большим, чтобы $nf(n)<\varepsilon$; $\operatorname{ctg}\pi z$ ограничен на C_n, пусть M — его верхняя граница. Тогда справедлива оценка

$$\left|\int_{C_n} zf(z)\,\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz\right|<\frac{4\pi\varepsilon M(2n+1)}{n+1/2}.$$

Следовательно, контур C_n отвечает поставленным условиям и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=-\pi\{b_1\operatorname{ctg}\pi a_1+\ldots+b_k\operatorname{ctg}\pi a_k\}.$$

Пример 1. Вычислить $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. Функция $\frac{z}{z^2+a^2}$ стремится к нулю, когда $|z|$ бесконечно возрастает. Функция $\frac{1}{z^2+a^2}$ не имеет полюсов при значениях z, равных целому числу, и голоморфна на всей плоскости, за исключением $z = \pm ja$. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\pi\left\{\frac{1}{2aj}\operatorname{ctg}\pi aj + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-2aj}\operatorname{ctg}(-\pi aj)\right\} = \frac{\pi}{a}\operatorname{cth}\pi a.$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\operatorname{cth}\pi a.$$

Замечание. Если вместо $\operatorname{ctg}\pi z$ использовать $\frac{1}{\sin\pi z}$, то при тех же условиях можно суммировать ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

Пример 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\frac{1}{\operatorname{sh}\pi a}.$$

1.4. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1.4.1. Определение. Дана аналитическая функция $Z = f(z)$. Если точка m с аффиксом $z = x + jy$ описывает кривую γ в плоскости z, то точка M с аффиксом $Z = X + jY$ описывает кривую Γ в плоскости Z

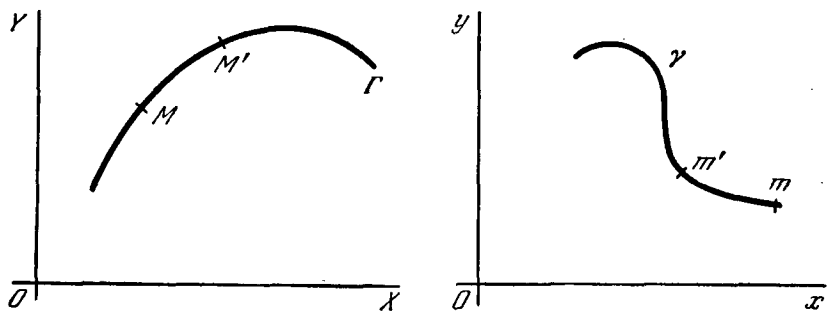


Рис. 1.36.

(рис. 1.36). Кривая Γ называется образом кривой γ; точки M и m называются соответствующими. Основное свойство этого преобразования состоит в том, что оно сохраняет углы и, следовательно, вид бесконечно малых элементов. Поэтому оно называется конформным (conforme — подобный).

Действительно, пусть m, m' — две соседние точки на кривой γ, а M и M' — две соответствующие точки на кривой Γ. Если обозначить через

φ и Φ углы между mm' и Ox и между MM' и OX, то

$$\Delta z = mm' e^{j\varphi}, \quad \Delta Z = MM' e^{j\Phi}, \quad \frac{\Delta Z}{\Delta z} = e^{j(\Phi-\varphi)} \frac{MM'}{mm'}.$$

В этих формулах mm' и MM' означают длины соответствующих отрезков. Если m' стремится к m, то M' будет стремиться к M. Можно показать *), что при этом отношение длин $\frac{MM'}{mm'}$ стремится к $|f'(z)|$, а угол поворота $(\Phi - \varphi)$ — к аргументу производной функции $f(z)$. Таким образом,

$$dZ = e^{j \arg f'(z)} |f'(z)| dz.$$

Это означает, что при конформном отображении элемент dz удлиняется в $|f'(z)|$ раз и поворачивается на угол $\arg f'(z)$. Такое же преобразование испытывает любой бесконечно малый элемент комплексной плоскости.

Если γ_1 и γ_2 — две кривые в плоскости z, проходящие через точку z и образующие друг с другом некоторый угол, то такой же угол по величине и по знаку образуют между собой образы этих кривых Γ_1 и Γ_2.

Проведенные рассуждения перестают быть верными в точках, где производная равна нулю или где ее модуль бесконечен. Действительно, рассмотрим, например, функции $Z = kz^n (n > 1)$ и $Z = \frac{k}{z}$ (см. случаи а) и г) п. 1.4.2). Две прямые, проходящие через начало координат и образующие между собой угол φ, преобразуются в плоскости Z в две прямые, образующие между собой угол $n\varphi$ (случай а) и $-\varphi$ (случай д). В первом примере модуль производной в начале координат равен нулю, во втором — бесконечности.

Отделяя в равенстве $Z = f(z)$ вещественные и мнимые части, получим $Z = X + jY = f(x + jy) = X(x, y) + jY(x, y)$.

Если точка z описывает кривые $X(x, y) = \text{const}$ или $Y(x, y) = \text{const}$ в плоскости z, то точка Z описывает прямые, параллельные осям OY, OX (рис. 1.37). Следовательно, в силу сохранения углов кривые $X(x, y) = \text{const}$

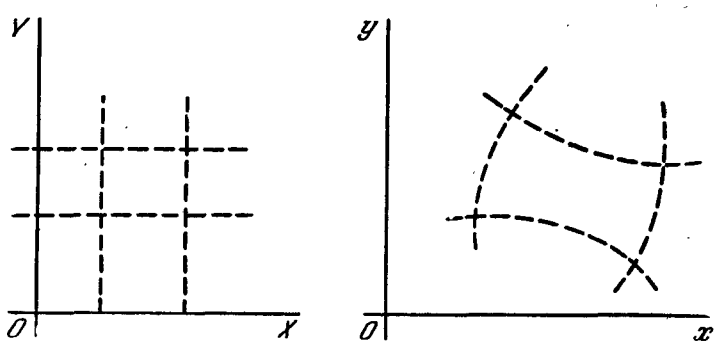


Рис. 1.37.

и $Y(x, y) = \text{const}$ ортогональны. $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — вещественная и мнимая части $f(z)$ — называются сопряженными функциями.

Часто бывает проще рассматривать не $Z = f(z)$, а обратное преобразование $z = F(Z)$. Приравнивая вещественную и мнимую части, получаем

$$x = x(X, Y),$$
$$y = y(X, Y).$$

*) Подробнее см. [1], стр. 96—99.

В этом случае кривые, которые преобразуются в прямые, параллельные осям OX, OY, задаются в параметрической форме: Y фиксировано, X меняется или X фиксировано, Y меняется.

Исключая из обоих равенств последовательно X и Y, получим соответственно

$$g(x, y, Y)=0, \quad h(x, y, X)=0$$

— уравнения семейств кривых, преобразующихся в параллели осям OX и OY, причем Y и X играют здесь роль параметров, фиксирующих конкретную кривую.

Из аналитичности $f(z)$ следует (см. п. 1.3.3), что

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0.$$

Таким образом, функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — гармонические, причем семейства $X(x, y)=\text{const}$ и $Y(x, y)=\text{const}$ ортогональны в плоскости z. Эти семейства ортогональных гармонических функций преобразуются в семейства прямых, параллельных осям координат плоскости Z.

Отметим, что задача отыскания функции $Z=f(z)$, отображающей кривую $y=\varphi(x)$ плоскости z в прямую, параллельную какой-нибудь оси плоскости Z, в общем случае не решается. Поэтому обычно приходится ограничиваться заранее известными конформными отображениями, используя ортогональные семейства двухмерных гармонических функций (например, отображения при помощи комбинаций элементарных функций). Эта задача отыскания ортогональных семейств двухмерных гармонических функций возникает при рассмотрении различных плоских полей.

Примеры: 1) отыскание силовых и эквипотенциальных *) линий электростатического или магнитного плоского полей; 2) отыскание линий теплового потока и изотерм нагретого тела; 3) отыскание линий равного потенциала скорости и линий тока плоского установившегося движения жидкости; 4) отыскание линий электрического тока и эквипотенциальных линий в проводнике и т. д.

Рассмотрим подробнее случай электростатики. Пусть даны два проводящих тела, помещенных в идеальный диэлектрик. Их потенциалы соответственно V_1 и V_2. Основная задача в этом случае состоит в определении конфигурации возникшего электростатического поля и величины заряда на каждом из проводников. Известно, что эта задача сводится к отысканию решения уравнения Лапласа, т. е. к отысканию гармонической функции, которая принимает заданные величины V_1 и V_2 на поверхности проводников. Если проводники представляют собой два цилиндра с параллельными осями, продольные размеры которых велики по сравнению с поперечными, то, изучая распределение поля в поперечном сечении средней части проводников, можно пренебречь краевыми эффектами. Таким образом, мы приходим к плоской задаче.

Если мы найдем конформное отображение, приводящее поперечные сечения цилиндров, изображенные в плоскости z, в соответствие с параллелями $X=V_1$, $X=V_2$, изображенными в плоскости Z, иначе говоря, если нам удастся задать оба этих поперечных сечения в качестве представителей некоторого семейства гармонических функций, то прямые $Y=\text{const}$ и $X=\text{const}$ являются соответственно образами электростатических силовых и эквипотенциальных линий, расположенных в плоскости z. В частности,

*) Линии равного потенциала или линии уровня.

к эквипотенциальным линиям относятся и поперечные сечения данных цилиндров, значения потенциалов на которых как раз равны V_1 и V_2.

И обратно: если задано какое-либо конформное отображение $Z=f(z)$, то с помощью функций $X(x, y)$, $Y(x, y)$ можно решить соответствующую электростатическую задачу. Мы уже отмечали, что вычисления в этом случае гораздо проще, чем в предыдущем. Выражения $X(x, y)=\text{const}$ и $Y(x, y)=\text{const}$ представляют собой уравнения эквипотенциальных и силовых линий.

Остается определить плотность заряда σ и величину заряда q проводника[1]). Пусть $\boldsymbol{E}$ — вектор электрического поля; он является градиентом скалярного потенциала. Если принять функцию $X(x, y)$ за потенциальную функцию, то (п. 3.2.16)

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} X(x, y).$$

Обозначим через ε диэлектрическую проницаемость среды. Известно, что поверхностная плотность электрического заряда σ равна произведению ε на модуль вектора $\boldsymbol{E}$ в рассматриваемой точке поверхности проводника. Так как этот вектор нормален к поверхности, то

$$\sigma=-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial n}$$

или в силу ортогональности кривых X и Y будет

$$\sigma=\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial s}.$$

Рассмотрим элемент нашей цилиндрической поверхности, имеющий высоту единица и стягиваемый дугой длиной ds. Заряд, несомый этим элементом, равен

$$dq=\sigma\,ds=\varepsilon\,dY.$$

Заряд участка поверхности единичной высоты, опирающегося на дугу AB поперечного сечения цилиндра, равен

$$q_{AB}=\varepsilon\int_A^B dY=\varepsilon(Y_B-Y_A).$$

Заряд единицы длины одного из цилиндров (единичный заряд), который мы определим, если совершим полный поворот вокруг соответствующего поперечного сечения, равен с точностью до коэффициента ε приращению функции Y. Если цилиндр заряжен, эта функция, очевидно, неоднозначна.

В нижеследующих примерах обе функции X и Y взаимно заменяемы и одна из них, в зависимости от условий, играет роль функции потенциала.

Пример. Рассмотрим преобразование $Z=\operatorname{arch}\frac{z}{d}$, т. е. $z=d\operatorname{ch} Z$. Имеем

$$x=d\operatorname{ch} X\cos Y,\qquad y=d\operatorname{sh} X\sin Y.$$

Если считать X постоянным, то в плоскости z получаем кривую

$$\frac{x^2}{d^2\operatorname{ch}^2 X}+\frac{y^2}{d^2\operatorname{sh}^2 X}-1=0.$$

---

[1]) Мы используем рационализированную систему единиц. В нерационализированной системе достаточно заменить в нижестоящих формулах σ на $4\pi\sigma$ и q на $4\pi q$. По поводу рационализированной системы см. сноску на стр. 147.

Если считать Y постоянным, то в плоскости z получаем кривую

$$\frac{x^2}{d^2\cos^2 Y} - \frac{y^2}{d^2\sin^2 Y} - 1 = 0.$$

Эти кривые образуют ортогональные семейства эллипсов и софокусных гипербол с фокусами F' и F, отстоящими друг от друга на расстоянии $2d$.

Рассмотрим эллипсы и гиперболы соответственно как эквипотенциальные и силовые линии некоторого плоского электростатического поля. В пространстве эквипотенциальные поверхности представляют собой эллиптические цилиндры. Поперечное сечение их изображено на рис. 1.38.

Ничего не меняя в распределении поля, можно материализовать одну из этих поверхностей в виде проводника определенного потенциала. Таким образом, мы определим силовые линии и поперечное сечение эквипотенциальных поверхностей для наэлектризованного эллиптического цилиндра. В частном случае $X = 0$ наш цилиндр вырождается в плоскую ленту шириной $2d$. Указанные выше формулы позволяют и для этого проводника определить силовые линии и эквипотенциальные поверхности.

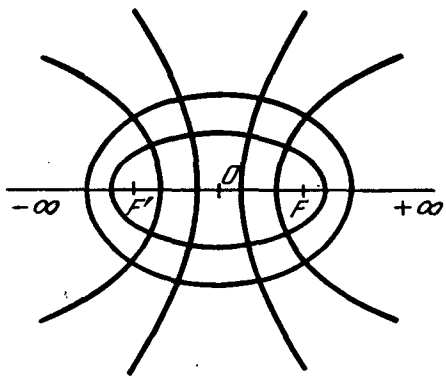


Рис. 1.38.

Определим емкость единицы длины передающего кабеля, у которого внутренний и внешний проводники представляют собой соответственно ленту и эллиптический цилиндр. Если через a и b обозначить полуоси эллипса, то $a^2 - b^2 = d^2$. При обходе вокруг одного из проводников функция Y изменяется на 2π. Следовательно, искомая единичная емкость C будет равна [1])

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{|X_1 - X_2|},$$

где X_1 и X_2 — соответствующие потенциалы ленты и цилиндра. Поскольку $X_1 = 0$, а $\operatorname{ch} X_2 = \frac{a}{d}$, для C получим

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\frac{a}{d}} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(a+b) - \ln d}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда гиперболы — эквипотенциальные линии, а эллипсы — силовые линии. На рис. 1.38 изображены эти линии, вызванные в данном случае электрическим полем, возникающим между двумя поверхностями гиперболического цилиндра, наэлектризованными до определенного потенциала. Рассмотрим, в частности, вырожденный гиперболический цилиндр, соответствующий тем значениям Y, которые обращают в нуль $\sin Y$. Он сводится к двум полуплоскостям, разделенным разрезом шириной в $2d$. Ограничим эти полуплоскости прямыми, перпендикулярными $F'F$, с абсциссами x и $-x$, и прямыми, параллельными оси $F'F$, на расстоянии l от нее (рис. 1.39). Конечно, чтобы не возмущать поле, остальная часть каждой полуплоскости должна обладать тем же потенциалом, но по контурам $ABCD$

[1]) В нерационализированной системе единиц следует правую часть формулы для емкости C разделить на 4π.

и $A'B'C'D'$ отделяться от обоих прямоугольников очень узким промежутком (охранным кольцом). Найдем емкость конденсатора, образованного указанными прямоугольниками.

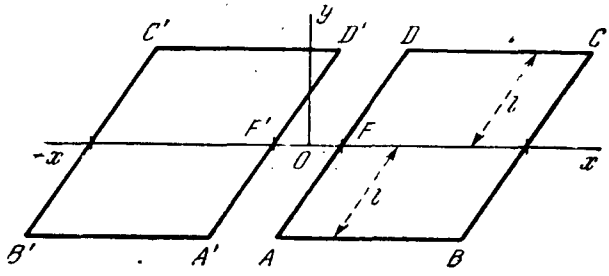


Рис. 1.39.

Заряд одного прямоугольника равен

$$Q = 2l\varepsilon\,[X]_{x=d}^{x=x} = 2l\varepsilon\left[\operatorname{arch}\frac{x}{d}\right]_d^x,$$

$$Q = 2l\varepsilon \ln\left(\frac{x}{d} + \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}\right).$$

Потенциал одной полуплоскости соответствует $Y = 0$, потенциал другой — $Y = \pi$. Следовательно, искомая емкость равна [1])

$$C = \frac{2l\varepsilon}{\pi} \ln\left(\frac{x}{d} + \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}\right).$$

Вернемся к рис. 1.38 и примем $Y = \frac{\pi}{2}$. Гиперболический цилиндр сведется в этом случае к плоскости, перпендикулярной прямой $F'F$. Следовательно, рис. 1.38 представляет также силовые линии и линии уровня системы, образованной плоскостью и перпендикулярной ей полуплоскостью, разделенными разрезом шириной в d.

1.4.2. Несколько примеров конформных отображений. Конформные отображения определяются функцией $z = f(Z)$, где

$$z = x + jy = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

$$Z = X + jY = P(\cos\Phi + j\sin\Phi).$$

Будем изображать кривые $X(x, y) = \text{const}$ и $Y(x, y) = \text{const}$ в плоскости z. Эти кривые соответствуют прямым $X = \text{const}$ и $Y = \text{const}$ в плоскости Z.

а) *Преобразование* $Z = kz^n$ (k и n вещественны). Имеем $X + jY = Pe^{j\Phi} = k\rho^n e^{nj\varphi}$, откуда

$$X = k\rho^n \cos n\varphi, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

при

$$Y = k\rho^n \sin n\varphi \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Полная плоскость Z преобразуется в угол $\frac{2\pi}{n}$ плоскости z. Будем трактовать Y как потенциальную функцию. Нулевой потенциал получается при двух значениях $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{n}$. Рассмотрим наэлектризованный двугранный

[1]) См. сноску на стр. 70.

угол θ. В нем существует электрическое поле, силовые и эквипотенциальные линии которого задаются в полярных координатах равенствами:

$$X = k\rho^{\frac{\pi}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\varphi\right), \quad X = \text{const};$$

$$Y = k\rho^{\frac{\pi}{\theta}} \sin\left(\frac{\pi}{\theta}\varphi\right), \quad Y = \text{const}.$$

Плотность электрического заряда в точке на грани, отстоящей от вершины двугранного угла на расстоянии ρ, будет равна

$$\sigma = \varepsilon\left[\frac{dX}{d\rho}\right]_{\varphi=0} = k\varepsilon\frac{\pi}{\theta}\rho^{\frac{\pi}{\theta}-1}.$$

б) *Преобразование* $Z = kz^2$. Это частный случай примера а) при $n = 2$. Полная плоскость Z преобразуется в верхнюю полуплоскость плоскости z. Нетрудно найти силовые и эквипотенциальные линии наэлектризованного прямого двугранного угла. Эти линии задаются в декартовых координатах соотношениями

$$X = k(x^2 - y^2), \quad Y = 2kxy$$

и представляют собой два семейства равносторонних ортогональных гипербол. Они изображены на рис. 1.40 для $X = -1$, $Y = 1$ ($k = 1$). Плотность электрического заряда в данном случае равна

$$\sigma = 2k\varepsilon\rho.$$

в) *Преобразование* $Z = kz^{1/2}$. Это тоже частный случай примера а), здесь $n = 1/2$.

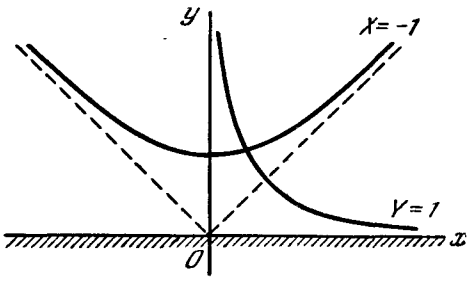


Рис. 1.40.

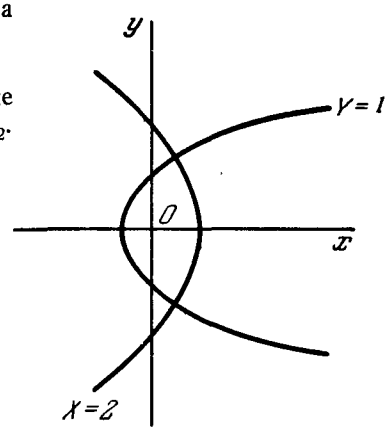


Рис. 1.41.

Верхняя полуплоскость плоскости Z преобразуется в полную плоскость z. Кривые, конформные отображения которых параллельны осям OX и OY, легко записываются в прямоугольных координатах плоскости z:

$$x = \frac{k^2y^2}{4Y^2} - \frac{Y^2}{k^2},$$

$$x = \frac{X^2}{k^2} - \frac{k^2y^2}{4X^2}.$$

Это семейства софокусных парабол с фокусом O. Они изображены на рис. 1.41 для $X = 2$, $Y = 1$ ($k = 1$). Таким способом мы получаем силовые и эквипотенциальные линии поля, вызванного наэлектризованным параболическим цилиндром.

Рассмотрим параболу семейства, вырождающуюся в прямую Ox. Мы получаем при этом такое же распределение электрического заряда, как в случае заряженной полуплоскости. Плотность заряда определяется равенством

$$\sigma = \frac{k\varepsilon}{2\sqrt{\rho}}.$$

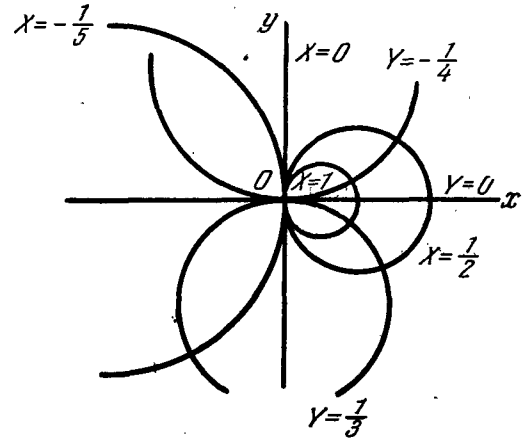


Рис. 1.42.

г) *Преобразование* $Z = \frac{k}{z}$. Это отображение осуществляет аналитическую инверсию, т. е. сводится к выполнению двух последовательных операций — геометрической инверсии относительно круга радиуса $\sqrt{k}$ и симметрии относительно вещественной оси. Легко получить оба ортогональных семейства, конформные отображения которых параллельны осям OX и OY. Это — окружности, касающиеся осей в начале

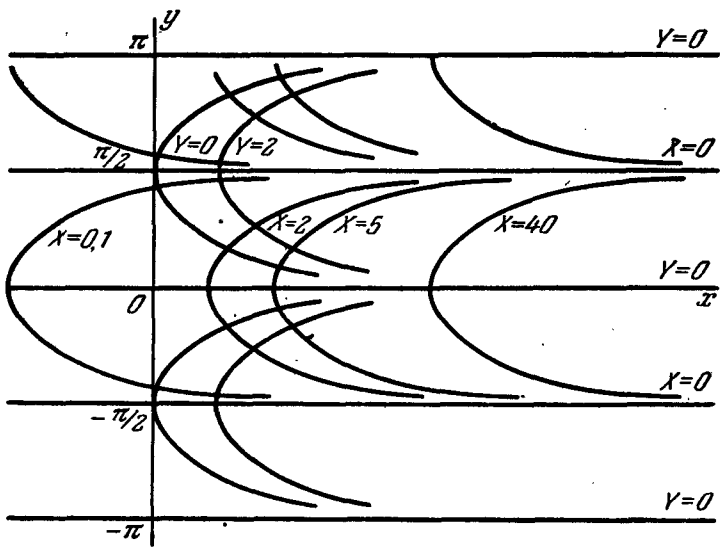


Рис. 1.43.

координат. На рис. 1.42 они изображены при $k = 1$. Уравнения этих семейств имеют вид

$$x^2 + \left(y + \frac{k}{2Y}\right)^2 = \frac{k^2}{4Y^2},$$

$$\left(x - \frac{k}{2X}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4X^2}.$$

д) *Преобразование* $Z = e^z$. Имеем

$$e^x \cos y = X, \quad e^x \sin y = Y.$$

Интересующие нас семейства кривых изображены на рис. 1.43. Любые кривые каждого из семейств могут быть совмещены путем параллельного переноса:

$$x = \ln X - \ln\cos y,$$

$$x = \ln Y - \ln\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right).$$

е) *Преобразование* $Z = k \ln z$. Имеем

$$x^2 + y^2 = e^{2X/k}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{Y}{k}.$$

Таким образом, получаем ортогональные семейства полупрямых и окружностей с центром в начале координат (рис. 1.44 для $k = 1$). Это отображение дает силовые и эквипотенциальные поля, вызванные наэлектризованной

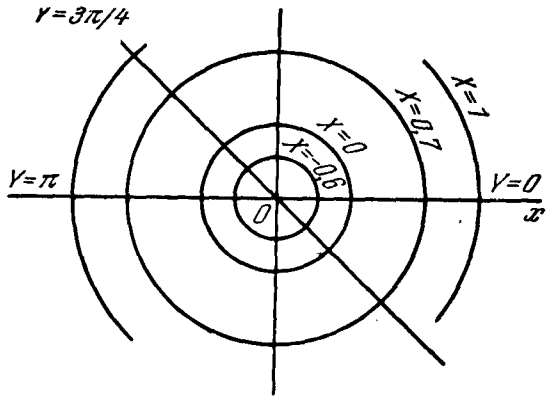


Рис. 1.44.

поверхностью прямого круглого цилиндра, в частности, вокруг наэлектризованной прямой, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рис. 1.44. Та же картина силовых линий и линий уровня возникнет между двумя концентрическими прямыми цилиндрами с круглыми основаниями, обладающими разными потенциалами. Рассмотрим последний случай.

Пусть X — потенциальная функция, X_1 и X_2 — соответствующие потенциалы цилиндров с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$). Имеем $R_1 = e^{X_1/k}$, а $R_2 = e^{X_2/k}$. При полном повороте вокруг оси приращение функции Y равно $2k\pi$. Следовательно, единичный заряд будет равен $2k\pi\varepsilon$. Отсюда емкость C на единицу длины конденсатора, образованного двумя концентрическими цилиндрами, равна [1])

$$C = \frac{2k\pi\varepsilon}{|X_1 - X_2|} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{R_1}{R_2}}.$$

ж) *Преобразование* $Z = k \ln\frac{z-d}{z+d}$. Приравнивая в обеих частях равенства $\frac{z-d}{z+d} = e^{X/k} e^{jY/k}$ модули и аргументы, получаем

$$\left(x + d\operatorname{cth}\frac{X}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{\operatorname{sh}^2\frac{X}{k}}, \qquad (а)$$

$$x^2 + \left(y - d\operatorname{ctg}\frac{Y}{k}\right)^2 = \frac{d^2}{\sin^2\frac{Y}{k}}. \qquad (б)$$

[1]) См. сноску на стр. 70.

Это — уравнения двух ортогональных семейств окружностей (рис. 1.45). Окружности семейства (б) проходят через точки F и F' с абсциссами $\pm d$, к которым сводятся окружности семейства (а) при $X = \pm\infty$. Для одной

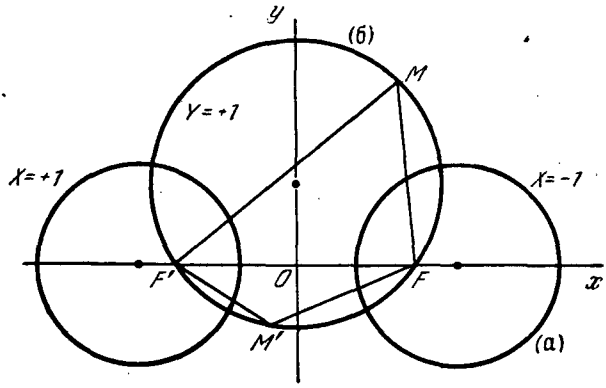


Рис. 1.45.

и той же окружности семейства (б) при переходе от верхней дуги $F'MF$ к нижней дуге $F'M'F$ значения параметра $\frac{Y}{k}$ отличаются друг от друга на π. Из этого следует, что если уравнение отрезка $F'F$ будет $Y = \pi$, то уравнение оси абсцисс, из которой вырезан этот отрезок, будет $Y = 0$. Точно так же окружностям семейства (а), находящимся справа от оси Oy, соответствуют отрицательные значения X, находящимся слева — положительные. Легко заметить, что $\frac{Y}{k} = \angle FMF'$ для верхней дуги окружности (б), $\frac{Y}{k} = \pi - \angle FM'F'$ для нижней дуги окружности (б) и $\frac{X}{k} = \ln\frac{MF}{MF'}$.

Пусть X — потенциальная функция. В этом случае предыдущие равенства дают силовые эквипотенциальные линии поля, вызванного двумя наэлектризованными поверхностями прямых цилиндров с круглым основанием, оси которых параллельны друг другу и находятся на расстоянии $2a$. Положим, что радиусы цилиндров равны R. Вычислим емкость C на единицу длины конденсатора, образованного обеими поверхностями. Пусть X — потенциал левого цилиндра, $-X$ — потенциал правого, разность потенциалов соответственно равна $2X$. Имеем

$$d\operatorname{cth}\frac{X}{k} = a \quad \text{и} \quad \frac{d}{\operatorname{sh}\frac{X}{k}} = R;$$

значит, $X = k\operatorname{arch}\frac{a}{R}$.

При обходе вокруг цилиндра Y изменяется на величину $2k\pi$. Следовательно, единичный заряд $q = 2k\pi\varepsilon$ [1]) и

$$C = \frac{q}{2X} = \frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{arch}\frac{a}{R}} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{a}{R} + \sqrt{\frac{a^2}{R^2} - 1}\right)}.$$

Замечание. Если проводящий цилиндр сводится к прямолинейному проводу пренебрежимо малого диаметра, то предыдущие равенства дают

[1]) См. сноску на стр. 70.

электрическое поле, вызванное двумя параллельными проводами, отстоящими друг от друга на расстоянии $2d$, или проводом, отстоящим на расстоянии d от параллельной ему бесконечной проводящей плоскости ($X=0$).

з) *Преобразование* $z=Z+e^Z$. Из этого равенства, придавая постоянное значение либо X, либо Y, получаем семейства кривых $x=X+e^X\cos Y$, $y=Y+e^X\sin Y$, записанных в параметрической форме. Мы легко можем определить эквипотенциальные линии $Y(x, y)$ и силовые линии $X(x, y)$ электростатического поля между двумя бесконечными полуплоскостями с потенциалами $+\pi$ и $-\pi$ (рис. 1.46) и вблизи их границы.

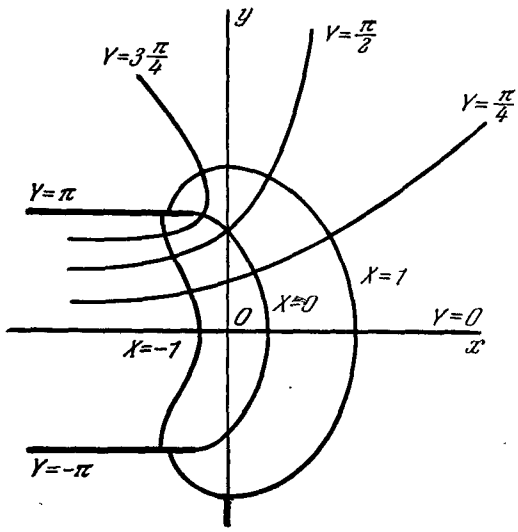


Рис. 1.46.

Замечание. Все конформные отображения представляют кривые $X(x, y)=\text{const}$ и $Y(x, y)=\text{const}$ как образы прямых $X=\text{const}$, $Y=\text{const}$. В примерах, рассмотренных выше, отображения выбирались нами априори. Затем мы находили соответствующую им картину силовых и эквипотенциальных линий. Однако, как уже отмечалось выше, чаще приходится решать обратную задачу: задана кривая $y=\varphi(x)$; найти функцию $f(z)$, отображающую эту кривую на ось $Y=0$. К сожалению, эта задача обычно бывает неразрешима, кроме следующих двух основных случаев.

1. Кривая $y=\varphi(x)$ может быть выражена в параметрической форме:

$$x=u(t), \quad y=v(t).$$

Тогда искомое преобразование имеет вид

$$z=u(kZ)+jv(kZ),$$

где k — вещественная постоянная.

Действительно, приравняем $Y=0$, тогда

$$x=u(kX), \quad y=v(kX).$$

Эти равенства и являются параметрическими уравнениями данной кривой.

Найдем отображение, преобразующее, например, ось $Y=0$ в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Имеем $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Как легко заметить, искомое преобразование будет

$$z=a\cos Z+jb\sin Z.$$

2. Кривая $y=\varphi(x)$ задает замкнутый многоугольник. В этом случае задача решается отображением Шварца (п. 1.4.4).

1.4.3. Последовательные отображения. Рассмотрим два отображения, связывающие между собой три точки плоскостей комплексных переменных Z, V, z:

$$Z=\varphi(V), \quad V=\psi(z).$$

Исключив переменную V из этих двух соотношений, получаем зависимость

$$Z = f(z),$$

которая устанавливает непосредственное соответствие между точкой плоскости Z и точкой плоскости z. Следовательно, можно сложные отображения разложить на последовательно применяемые более простые отображения.

Пример 1. Дано отображение $V = \psi(z)$, устанавливающее соответствие между точкой $x_0 + jy_0 = z_0$ и вещественной точкой $d = \psi(z_0)$, а также между кривой γ и мнимой осью плоскости V. Известно (п. 1.4.2, ж)), что поле, созданное заряженным проводом, имеющим след в точке d, несущим линейный заряд q и проходящим на расстоянии d параллельно бесконечной плоскости, следом которой является мнимая ось плоскости V, описывается преобразованием

$$Z = k \ln \frac{V - d}{V + d}.$$

И если прямая со следом в точке z_0 на плоскости z находится перед заряженной цилиндрической поверхностью, поперечное сечение которой представляет собой кривую γ, то линейный заряд q, несомый этой прямой, создает электростатическое поле, силовые и эквипотенциальные линии которого могут быть найдены с помощью преобразования

$$Z = k \ln \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{\psi(z) + \psi(z_0)}, \quad k = \frac{2q}{\varepsilon}.$$

Пример 2. Даны две цилиндрические поверхности, поперечные сечения которых в плоскости z представляют собой кривые C и γ. Пусть $V = \psi(z)$ — отображение, переводящее кривые C и γ соответственно в отрицательную и положительную части вещественной оси плоскости V. Рассмотрим отображение $Z = k \ln V$.

Положив $V = re^{j\theta}$, имеем

$$X = k \ln r, \quad Y = k\theta.$$

Положительная часть вещественной оси плоскости V соответствует значению $Y = 0$, т. е. полной вещественной оси плоскости Z. Отрицательная часть вещественной оси плоскости V соответствует значению $Y = k\pi$, т. е. прямой, параллельной вещественной оси плоскости Z и проходящей от нее на расстоянии $k\pi$.

Следовательно, полное преобразование

$$Z = k \ln \psi(z)$$

отображает кривые C и γ на две прямые $Y = k\pi$ и $Y = 0$. Значение Y на C равно $k\pi$, значение Y на γ равно нулю. Таким образом, с помощью найденного преобразования можно определить конфигурацию силовых и эквипотенциальных линий электростатического поля, созданного двумя цилиндрами (поперечные сечения их представляют собой кривые C и γ), при разности потенциалов между ними, равной $k\pi$.

1.4.4. Отображение Шварца. Рассмотрим функцию $(Z - A)^{\alpha - 1}$, где A — вещественное число, а α — число, меньшее единицы.

Введем функцию z, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{dz}{dZ} = (Z - A)^{\alpha - 1}$.

Предположим, что точка Z пробегает ось $Y=0$ плоскости Z (рис. 1.47). Найдем кривую, которую описывает соответствующая точка плоскости z. Если точка X расположена левее точки A, то аргумент отрицательного числа $X-A$ равен π. Если точка X правее точки A, то аргумент положительного числа $X-A$ равен нулю. Следовательно, аргумент числа $(X-A)^{\alpha-1}$

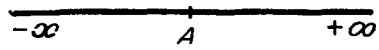


Рис. 1.47.

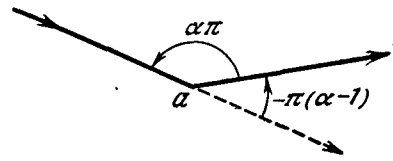


Рис. 1.48.

будет скачкообразно изменяться на $-\pi(\alpha-1)$, когда X пробегает прямую $Y=0$. Точка z при этом опишет две полупрямых, образующих между собой такой же угол $-\pi(\alpha-1)$ в плоскости z, ибо

$$\arg\frac{dz}{dZ}=\arg\frac{dx+j\,dy}{dX}=\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx};$$

соответственно внутренний угол между этими прямыми равен $\pi\alpha$ (рис. 1.48). Ясно, что точке A в рассматриваемом отображении соответствует точка a.

Рассмотрим теперь замкнутый многоугольник с внутренними углами

$$\pi\alpha_1,\ \pi\alpha_2,\ \ldots,\ \pi\alpha_n.$$

Из рассуждений, приведенных выше, вытекает, что с помощью преобразования

$$\frac{dz}{dZ}=(Z-A_1)^{\alpha_1-1}(Z-A_2)^{\alpha_2-1}\ldots(Z-A_n)^{\alpha_n-1}$$

осуществляется отображение оси $Y=0$ на многоугольник плоскости z с углами при вершинах, равными $\pi\alpha_1,\ \pi\alpha_2,\ \ldots,\ \pi\alpha_n$.

Величины $A_1,\ \ldots,\ A_n\ (A_1<\ \ldots\ <A_n)$, соответствующие различным вершинам многоугольника, подлежат определению. В силу замкнутости многоугольника значения $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ связаны между собой равенством

$$\pi\alpha_1+\ \ldots\ +\pi\alpha_n=\pi(n-2)$$

или

$$\sum(\alpha_n-1)=-2. \tag{16}$$

Рассмотрим точку $X\,(Y=0)$, перемещающуюся по вещественной оси плоскости Z от $-\infty$ до A_1. Согласно (16) можно принять, что для этих Z аргумент величины

$$(X-A_1)^{\alpha_1-1}(X-A_2)^{\alpha_2-1}\ \ldots\ (X-A_n)^{\alpha_n-1}$$

равен нулю. Тогда точка z будет перемещаться по вещественной оси плоскости z от точки a_0, соответствующей $X=-\infty$. Положение точки a_0 зависит от постоянной интегрирования уравнения

$$\frac{dx}{dX}=(X-A_1)^{\alpha_1-1}(X-A_2)^{\alpha_2-1}\ \ldots\ (X-A_n)^{\alpha_n-1}.$$

Пусть точкам $A_k\ (k=1,\ \ldots,\ n)$ вещественной оси плоскости Z (рис. 1.49) соответствуют точки a_k плоскости z, являющиеся вершинами рассматриваемого многоугольника, а точка X продолжает перемещаться вдоль вещественной оси плоскости Z. При переходе точки X через A_1 аргумент правой части выписанного выше дифференциального уравнения изменяется на

$-\pi(\alpha_1-1)$. Соответственно этому при переходе через a_1 аргумент z, равный до этого нулю, также получает приращение $-\pi(\alpha_1-1)$, т. е. в a_1 точка переходит с вещественной оси плоскости z на прямую, образующую с этой осью внутренний угол $\pi\alpha_1$ (ср. рис. 1.48). Совершенно аналогично

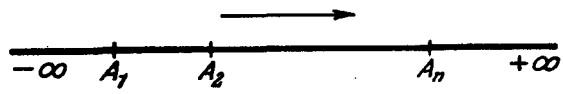


Рис. 1.49.

при переходе точки X через A_2 аргумент z получает приращение $-\pi(\alpha_2-1)$ и точка z переходит в a_2 на новую прямую, образующую с прежней угол $\pi\alpha_2$ и т. д.

Следовательно, точка z описывает ломаную линию с углами при вершинах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, измеряемыми в полуокружностях. Эта ломаная линия образует замкнутый многоугольник. Действительно, когда точка X пробегает отрезок от точки A_n до ∞, точка z описывает прямую, образующую с положительным направлением вещественной оси угол $-\pi\sum(\alpha_n-1)=2\pi$, т. е. крайние стороны ломаной линии параллельны вещественной оси. Отметим, далее, что вершины a_1 и a_n расположены на вещественной оси плоскости z.

Остается определить числа $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы они действительно являлись образами вершин заданного многоугольника. Это обстоятельство составляет главную трудность при практическом использовании отображения Шварца. Доказывается, что можно произвольно выбрать образы трех вершин многоугольника (т. е. три числа из $A_1, \ldots, A_n$), а остальные числа A_k определяются единственным образом. Рассмотрим способ их отыскания. Пусть задан многоугольник с вершинами $a_1, \ldots, a_n$. Через вершины a_n и a_1 проводим вещественную ось плоскости z. Пусть углы при вершинах многоугольника $\pi\alpha_1, \ldots, \pi\alpha_n$. Тогда искомое преобразование имеет вид

$$z = k\int_{Z_0}^{Z}(Z-A_1)^{\alpha_1-1}\ldots(Z-A_n)^{\alpha_n-1}\,dZ.$$

Число Z_0 и три числа из $A_1, \ldots, A_n$ выбираются произвольно. Число k и $n-3$ числа из $A_1, \ldots, A_n$ следует выбрать таким образом, чтобы стороны получаемого многоугольника были равны сторонам данного многоугольника; $n-3$ числа A определяются через интегралы. Трудность вычислений быстро возрастает вместе с числом сторон. Однако в физике отображение Шварца очень редко применяется к многоугольникам с числом сторон, большим 4.

Легко заметить, что преобразование Шварца отображает верхнюю полуплоскость Z на внутренность многоугольника плоскости z, тогда как нижняя полуплоскость Z соответствует внешности многоугольника плоскости z.

Пример 1. Найти отображение треугольника, расположенного в плоскости z, на вещественную ось плоскости Z. Если углы треугольника равны $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$, то функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$z = \int_{Z_0}^{Z}(Z-A)^{\alpha-1}(Z-B)^{\beta-1}(Z-C)^{\gamma-1}\,dZ = \int_{Z_0}^{Z} f(Z)\,dZ, \qquad (17)$$

где

$$(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=-2. \qquad (18)$$

Если Z пробегает вещественную ось от $-\infty$ до A, то точка z описывает вещественную ось от точки с абсциссой m, соответствующей $X=-\infty$, до точки с абсциссой a, соответствующей $X=A$ (рис. 1.50), — это имеет

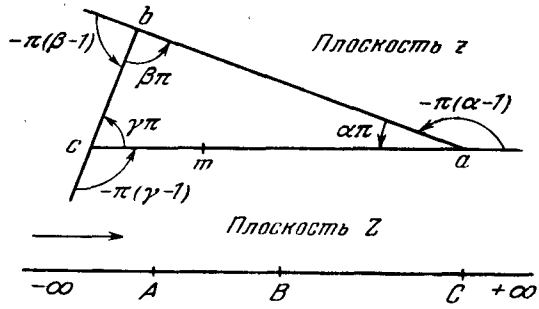


Рис. 1.50.

место, если выбрать ту ветвь $f(z)$, определяемую формулой (17), для которой аргумент $f(Z)$ при $-\infty < X < A$ равен нулю. Возможность такого выбора обеспечивается равенством (18).

Имеем

$$a = m + \int_{-\infty}^{A} f(X)\,dX.$$

При переходе точки X через A соответствующая ей точка плоскости z переходит с вещественной оси на прямую, составляющую с этой осью угол $-\pi(\alpha-1)$. По новой прямой точка z движется до точки b, которая соответствует точке $X=B$ вещественной оси плоскости Z, причем

$$b = a + e^{-j\pi(\alpha-1)} \int_{A}^{B} f(X)\,dX.$$

При переходе точки X через B соответствующая ей точка плоскости z снова переходит на другую прямую, составляющую с предыдущей угол $-\pi(\beta-1)$. По новой прямой точка z доходит до точки c, которая соответствует точке $X=C$ вещественной оси плоскости Z, причем

$$c = b + e^{-j\pi(\beta-1)} \int_{B}^{C} f(X)\,dX.$$

Наконец, при переходе X через точку C соответствующая прямая в плоскости z поворачивается на угол $-\pi(\gamma-1)$, и при $X \to \infty$ точка z стремится к начальной точке m, оставаясь на этой прямой. Имеем

$$m = c + e^{-j\pi(\gamma-1)} \int_{C}^{+\infty} f(X)\,dX.$$

В силу соотношения (18) отрезки cm и ma являются продолжением один другого.

Таким образом, каковы бы ни были числа A, B, C, функция (17) определяет отображение, которое преобразует треугольник, подобный данному, в вещественную ось $Y=0$. Для перехода к заданному треугольнику достаточно

в интеграле (17) ввести постоянный множитель, учитывающий отношение сходственных сторон треугольника.

Многоугольник, рассматриваемый в отображении Шварца, всегда может быть построен по заданным условиям; он может иметь вершины в бесконечности.

Пример 2. Рассмотрим две параллельные прямые, одна из которых разорвана (рис. 1.51). Эту фигуру можно считать многоугольником. Вершина a находится в бесконечности, сторона ab сливается со стороной bc.

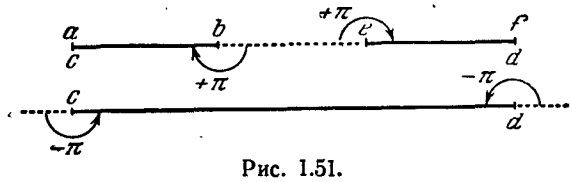


Рис. 1.51.

Вершины c и d находятся в бесконечности. Сторона de сливается со стороной ef, и многоугольник замыкается прямой на бесконечности. Величины углов $\pi(\alpha_1 - 1)$, $\pi(\alpha_2 - 1)$, ... обозначены на рисунке.

Следовательно, функция, определяющая преобразование, имеет вид

$$z = \int_{Z_0}^{Z} \frac{(Z-B)(Z-E)}{(Z-C)(Z-D)}\, dZ.$$

Из четырех вещественных чисел B, C, D, E три можно выбрать произвольно. Учитывая, что $B < C < D < E$, можно положить $B = -1$, $E = +1$, $C = -d$, $D = d$ $(0 < d < 1)$. Тогда

$$z = \int_{Z_0}^{Z} \frac{Z^2-1}{Z^2-d^2}\, dZ = Z + \frac{d^2-1}{2d} \ln \frac{Z-d}{Z+d} + \text{const}.$$

Определим постоянную так, чтобы начало координат плоскости z отображалось в начало координат плоскости Z. Имеем

$$\text{const} = j\pi \frac{1-d^2}{2d},$$

т. е. искомое отображение принимает вид

$$z = Z + \frac{d^2-1}{2d} \ln \frac{Z-d}{Z+d} + \frac{1-d^2}{2d} j\pi.$$

Отделяя вещественные и мнимые части, найдем соотношение

$$x + jy = X + jY + \frac{d^2-1}{4d} \ln \frac{(X-d)^2+Y^2}{(X+d)^2+Y^2} + j\frac{d^2-1}{2d} \operatorname{arctg} \frac{2dY}{X^2+Y^2-d^2} + \frac{1-d^2}{2d} j\pi;$$

из него непосредственно получаются параметрические уравнения кривых, отображениями которых служат прямые $X = \text{const}$ и $Y = \text{const}$, параллельные осям координат плоскости Z. Покажем, что при перемещении точки Z по оси $Y = 0$ точка z описывает рассматриваемую фигуру в плоскости z. Если X находится вне интервала $(-d, d)$, то

$$x = X + \frac{d^2-1}{2d} \ln \frac{X-d}{X+d},$$

$$y = \pi \frac{1-d^2}{2d}.$$

Если X находится внутри интервала $(-d, d)$, то под знаком логарифма стоит отрицательное число, аргумент которого равен $+\pi$, и соответственно находим

$$x = X + \frac{d^2-1}{2d} \ln \frac{d-X}{d+X},$$

$$y = \frac{d^2-1}{2d}\pi + \frac{1-d^2}{2d}\pi = 0.$$

Используя полученные формулы, заполним таблицу, описывающую изменения на плоскости z при пробегании X вдоль вещественной оси плоскости Z (рис. 1.52):

X	$-\infty$	-1	$-d$		$+d$	$+1$	$+\infty$
$\frac{dx}{dX}$	$+$	0	$-$	$+$		$-$ 0 $+$	
x	$-\infty$	$\nearrow b$	$\searrow -\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$		$+\infty$ $\searrow e \nearrow$	$+\infty$
y	$\frac{1-d^2}{2d}\pi$			0		$\frac{1-d^2}{2d}\pi$	
Положение	a	b	c		d	e	f
		$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{cd}$		$\overline{de}$ $\overline{ef}$	

Для полного совпадения полученной и заданной фигур достаточно, чтобы отношение

$$\frac{\text{расстояние } be}{\text{расстояние между прямыми}}$$

для обеих фигур было бы равным. Из этого равенства определяется число d.

Только что описанное отображение позволяет решать задачи плоского поля, в которых фигурируют две параллельные плоскости, причем одна из

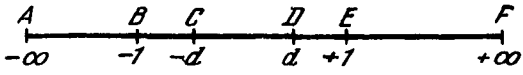


Рис. 1.52.

них рассечена бесконечной трещиной. Найдем, например, силовые и эквипотенциальные линии электростатического поля, возбужденного бесконечной плоскостью и двумя полуплоскостями, имеющими потенциал V.

Эквипотенциальные и силовые линии являются соответственно отображениями прямых $Y = \text{const}$ и $X = \text{const}$. Отметим, что такие же линии возникают в электростатическом поле, созданном бесконечной плоскостью, пересекающей плоскость Z по прямой $Y = 0$.

Рассмотрим ту же задачу для случая, когда на бесконечной плоскости и на двух полуплоскостях созданы разные потенциалы. Эта задача сведется к задаче для полосы шириной в $2d$ в плоскости Z, окаймленной двумя бесконечными полуплоскостями, причем полоса и полуплоскости обладают разными потенциалами. Легко заметить, что решение задачи дается с помощью отображения ж) п. 1.4.2. Действительно, при рассмотрении плоскости комплексной переменной ζ видно, что

$$\zeta = k \ln \frac{Z-d}{Z+d}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, нетрудно убедиться в том, что при перемещении точки вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $X=-d$, затем от $X=-d$ до точки $X=+d$ и от $X=+d$ до $+\infty$ точка ζ перемещается в плоскости ζ по вещественной оси от 0 до $+\infty$, затем по прямой, параллельной вещественной оси, от $-\infty$ до $+\infty$ и по вещественной оси от $-\infty$ до 0. Следовательно, задача сводится к изучению электростатического поля между двумя бесконечными плоскостями с разными потенциалами. Нам известны силовые и эквипотенциальные линии этого поля, которые являются прямыми, параллельными соответственно мнимой и вещественной осям плоскости. Отображения этих линий представляют собой в плоскости Z семейство ортогональных окружностей, показанных на рис. 1.45. Поэтому задача, поставленная вначале, может быть решена применением отображения Шварца к указанному семейству окружностей. Это отображение в конечном счете даст эквипотенциальные и силовые линии в плоскости z. Таким образом, задача решается с помощью двух последовательных отображений.

1.4.5. Различные применения конформных отображений. До сих пор мы применяли конформные отображения только к задачам электростатики. Рассмотрим применения конформных отображений для расчета других плоских полей, о которых упоминалось в п. 1.4.1.

а) *Циркуляция токов в плоском однородном проводнике.* Если заряженные частицы, создающие электрический ток (электроны в твердых телах, ионы в электролитах), испытывают значительное трение, пропорциональное скорости, так что влияние инерции частиц пренебрежимо мало, и если, кроме того, можно пренебречь явлениями, обязанными своим возникновением пространственному заряду, то, используя результаты предыдущих параграфов, можно решать задачи о распределении тока в среде с сопротивлением, в которой помещены электроды заданной формы с известными потенциалами. Эти электроды могут быть впаяны, если речь идет о твердом теле, или погружены в электролитическую ванну, если речь идет о жидкой среде.

Итак, при переходе к рассматриваемой задаче достаточно заменить в предыдущем тексте слова «силовые линии» на «линии тока» и «поверхностная плотность заряда» на «плотность тока на электродах». В частности, сопротивление R, препятствующее прохождению тока между двумя электродами, непосредственно связывается с емкостью C, образованной этими же самыми электродами, погруженными в изолирующую среду.

Если ρ — удельное сопротивление проводящей среды, а ε — диэлектрическая проницаемость изолирующей среды, то [1])

$$CR=\varepsilon\rho.$$

Мы, например, видели, что емкость на единицу длины конденсатора, образованного двумя одинаковыми цилиндрами с радиусом r, оси которых параллельны и находятся на расстоянии $2a$, равна

$$C=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{a}{r}+\sqrt{\frac{a^2}{r^2}-1}\right)}.$$

Сопротивление на единицу длины между теми же двумя цилиндрами (предполагается, что они идеально проводящи), погруженными в среду с удельным сопротивлением ρ, равно

$$R=\frac{\rho\ln\left(\frac{a}{r}+\sqrt{\frac{a^2}{r^2}-1}\right)}{\pi}.$$

[1]) В нерационализированной системе единиц $CR=\varepsilon\rho/4\pi$.

б) *Распространение тепла.* Все сказанное выше переносится и на этот случай. Разности потенциалов здесь соответствует разность температур. Линии одинаковой температуры, или изотермы, заменяют эквипотенциальные линии, линии теплового тока — силовые линии, количество тепла в секунду — силу тока или поток электростатической индукции, удельная теплопроводность играет роль удельной проводимости или величины, обратной удельному сопротивлению.

в) *Движение вязкой жидкости.* Легко показать, что перемещение вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, находящимися друг от друга на расстоянии $2e$, происходит параллельно плоскостям.

Если рассматривать перемещение плоского слоя, находящегося на расстоянии z от срединной плоскости, и обозначить через η коэффициент вязкости, а через p давление, отнесенное к единице длины, то скорость перемещения v равна

$$v = \frac{p}{2\eta}(e^2 - z^2).$$

Таким образом, движение произвольного слоя определяется из движения среднего слоя ($z = 0$). При этом имеет место полная аналогия предыдущим случаям: давление соответствует потенциалу, линии скорости — линиям тока, а количество жидкости, протекающей в единицу времени, — электрическому току.

г) *Движение идеальной жидкости.* В этом случае дело обстоит иначе, даже если предположить, что движение безвихревое.

Действительно, вместо функции силовых линий можно составить функцию, представляющую линии тока жидкости. Точно так же можно определить потенциал скоростей, частные производные которого представляют собой проекции вектора скорости, играющего роль электрического потенциала. Однако при этом может возникнуть явление, не имевшее места в предыдущих случаях, а именно существование линий разрыва в течении. Если переходить с одной стороны этих линий на другую, вектор скорости терпит разрыв. Отсюда возникает новый тип задачи. Условия на границах задаются вдоль одной из линий, форма которой входит в число неизвестных задачи.

д) *Магнитные поля.* Мы еще не говорили о применении конформного отображения для определения силовых линий магнитных полей в присутствии магнитных тел. Основные законы здесь те же, что и в электростатике, однако между магнитным и электростатическим полем имеется глубокое различие. Магнитные заряды движутся всегда парами и на фиксированном расстоянии. Магнитное поле не равно нулю внутри магнитных тел, и силовые линии не выходят из них нормально. Поэтому применение конформного преобразования в том виде, как оно было выше изложено, может привести в этом случае лишь к довольно неточным результатам.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ I

1. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1957.
3. Фукс Б. А., Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Физматгиз, 1959.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
5. Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.
6. Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э., Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления, Физматгиз, 1958.

ГЛАВА II

РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.1. РЯД ФУРЬЕ

2.1.0. Введение. Рассмотрим функцию $f(x)$ вещественной переменной x, определенную в каждой точке промежутка $[\theta, \theta+2\pi]$. Предположим, что в этом промежутке функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям (так называемым условиям Дирихле):

1) всюду однозначна, конечна и кусочно-непрерывна,

2) имеет ограниченное число максимумов и минимумов.

(Например, функции $\frac{1}{x}$ и $\sin\frac{1}{x}$ не удовлетворяют соответственно условиям 1 и 2 в промежутке, содержащем точку $x=0$.) В таком случае можно представить функцию $f(x)$ в рассматриваемом промежутке в виде ряда

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx.$$

Здесь b_0, a_n и b_n — независимые от x коэффициенты. Этот ряд называется рядом Фурье функции $f(x)$. Он сходится к $f(x)$ во всех точках непрерывности функции и к значению

$$\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2}=f(a)$$

в точках разрыва функции $x=a$. Это среднее арифметическое значение двух предельных ординат, и его естественно принять за значение функции в точке разрыва.

2.1.1. Вычисление коэффициентов. Исходными здесь будут следующие соотношения:

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin nx \sin mx\, dx=\begin{cases} 0 & \text{для } n\neq m, \\ \pi & \text{для } n=m; \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos nx \cos mx\, dx=\begin{cases} 0 & \text{для } n\neq m, \\ \pi & \text{для } n=m; \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin nx \cos mx\, dx=0. \tag{3}$$

Действительно,

$$\sin nx \sin mx=\frac{1}{2}\cos(n-m)x-\frac{1}{2}\cos(n+m)x.$$

Отсюда для первого интеграла при $m \neq n$ найдем

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{\theta}^{\theta+2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_{\theta}^{\theta+2\pi} = 0.$$

При $n = m$ имеем

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} dx - \frac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos 2nx\,dx = \pi.$$

Подобными же элементарными расчетами легко убедиться в справедливости соотношений (2) и (3).

Умножим обе части формулы для ряда Фурье на $\sin mx$ и проинтегрируем от θ до $\theta+2\pi$. Тогда *)

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \sin mx\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx\right)dx.$$

Согласно соотношениям (1), (2) и (3) все интегралы справа равны нулю, кроме

$$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} a_m \sin mx \sin mx\,dx,$$

который равен $a_m\pi$. Поэтому

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x)\sin mx\,dx. \tag{4}$$

Аналогичный расчет дает

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \tag{5}$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(x)\,dx. \tag{6}$$

2.1.2. Разложение в ряд по ортогональным функциям. Способ вычисления коэффициентов, описанный выше, может быть применен и в случае разложения в более общие ряды — в ряды по произвольной системе ортогональных функций.

Рассмотрим совокупность функций вещественной переменной

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$$

Если эти функции таковы, что

$$\int_a^b u_m(x)\,u_n(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \tag{7}$$

при $m \neq n$, то принято говорить, что функции $u_n(x)$ образуют в промежутке $[a, b]$ ортогональную систему с весовой [1]) функцией $\varphi(x)$.

*) Нетрудно показать, что при выполнении условий Дирихле ряд можно интегрировать почленно.

[1]) Она называется также базовой функцией.

Пусть дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле. Она может быть представлена в виде бесконечной суммы ортогональных функций, т. е. ортогональным рядом вида

$$f(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+c_3u_3(x)+\ \dots\ +c_nu_n(x)+\ \dots$$

Чтобы вычислить коэффициент c_m, умножим обе части последнего равенства на $u_m(x)\varphi(x)$ и проинтегрируем в промежутке $[a, b]$. Согласно формуле (7) все интегралы справа исчезают, кроме

$$c_m\int_a^b u_m^2(x)\varphi(x)\,dx,$$

откуда

$$c_m=\frac{\int_a^b u_m(x)\varphi(x)f(x)\,dx}{\int_a^b u_m^2(x)\varphi(x)\,dx}. \tag{8}$$

Например, для полиномов Чебышева промежуток равен $(-1, +1)$, а весовая функция будет $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (см. п. 7.9.3). В некоторых случаях весовая функция равна единице, например для полиномов Лежандра (см. п. 7.6.9).

Если кроме равенства (7) функции $u_n(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_a^b u_m^2(x)\varphi(x)\,dx=1, \tag{9}$$

то система называется ортонормированной.

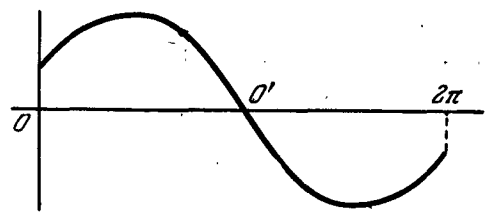


Рис. 2.1.

Основная тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \dots,$$

как следует из формул (1)—(3), ортогональна с весовой функцией, равной единице, но не ортонормирована.

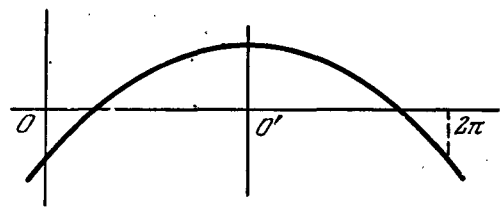


Рис. 2.2.

2.1.3. Частные случаи. Если кривая, изображающая функцию, имеет на оси Ox центр симметрии — точку O' (рис. 2.1), то, приняв эту точку за начало координат, получим $f(-x)=-f(x)$. Функция $f(x)$ — нечетная, поэтому ее ряд Фурье должен содержать только синусы. Следовательно,

$$b_0=b_1=b_2=\ \dots\ =b_n=\ \dots\ =0.$$

Если кривая, изображающая функцию $f(x)$, имеет ось симметрии, то, приняв эту ось за ось ординат и выбрав начало координат в точке O', в которой ось симметрии пересекает ось Ox (рис. 2.2), получим $f(x)=f(-x)$. Функция $f(x)$ — четная, поэтому ее ряд Фурье должен содержать только косинусы и постоянный член. Следовательно,

$$a_1=a_2=\ \dots\ =a_n=\ \dots\ =0.$$

2.1.4. Интегрирование и дифференцирование. Если функция удовлетворяет условиям, поставленным в начале главы, то ряд Фурье для интеграла от $f(x)$ получается почленным интегрированием ряда Фурье для функции $f(x)$. Ряд для производной $f'(x)$ может быть получен из ряда для $f(x)$ почленным дифференцированием. Это верно, если только ряд для $f'(x)$ является сходящимся, что бывает не всегда *).

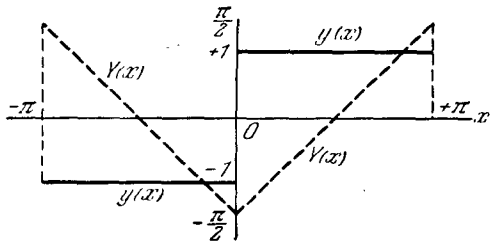


Рис. 2.3.

Пример. Требуется разложить в ряд Фурье в промежутке $-\pi, +\pi$ ($\theta = -\pi$) функцию $y = f(x)$, равную -1 при $-\pi < x < 0$ и $+1$ при $0 < x < +\pi$. Из графика функции (рис. 2.3) видно, что точка O является центром симметрии. Следовательно,

$$b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \ldots = 0.$$

Имеем

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{0} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\cos nx}{n}\right)_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{n\pi}[1 - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n],$$

т. е.

$$a_{2p} = 0, \qquad a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}.$$

Отсюда получаем ряд

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right].$$

Производная заданной функции повсюду равна нулю, кроме точки $x = 0$, где она обращается в бесконечность. Однако дифференцирование полученного ряда приводит к расходящемуся ряду.

Первообразная функция для функции $y(x)$, $Y = F(x)$, представляется сходящимся рядом

$$Y(x) = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right] + \text{const}.$$

График функции $Y(x)$ проходит (если константу справа считать равной нулю) через точку $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$**). На рис. 2.3 он показан пунктиром.

Положим в предыдущем разложении $x = 0$. Получим формулу

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2p+1)^2} + \ldots$$

Замечание 1. Если $y = f(x)$ — непериодическая функция, то ряд Фурье совпадает с самой функцией только в промежутке от θ до $\theta + 2\pi$. Если $f(x)$

*) Последнее замечание очень важно. При дифференцировании $\cos nx$ и $\sin nx$ члены ряда умножаются на n, что ухудшает сходимость. Подробнее см. [1], гл. 20, стр. 577—578.

**) В этом легко убедиться, если, в соответствии с рис. 2.3, проинтегрировать функцию $y(x)$ от $-\frac{\pi}{2}$ до x.

имеет период 2π, то ряд Фурье равен этой функции для всех значений x от $-\infty$ до $+\infty$.

В рассмотренном примере разложения для y и Y представляют собой ступенчатую и пилообразную функции, графики которых указаны на рис. 2.4.

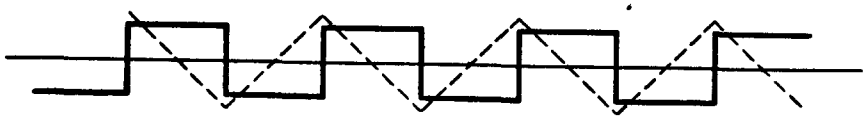


Рис. 2.4.

Замечание 2. В предыдущем примере функция $f(x)$ разрывна — коэффициенты ее ряда Фурье имеют вид $\frac{1}{n}$. Функция $F(x)$ непрерывна, но ее первая производная разрывна — коэффициенты ряда для $F(x)$ имеют вид $\frac{1}{n^2}$. Нетрудно обобщить это правило и показать, что если дана периодическая функция, непрерывная вместе с ее первыми $p-1$ производными, и если ее p-я производная разрывна, то коэффициенты ее ряда Фурье будут порядка $\frac{1}{n^{p+1}}$.

Пример. Разложим в ряд функции $f(x)=\cos \alpha x$ от $-\pi$ до $+\pi$ (α — не целое число).

Функция $f(x)$ — четная, поэтому все коэффициенты a_n равны нулю. Имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\alpha \sin \alpha\pi \frac{\cos n\pi}{\alpha^2-n^2} = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\alpha^2-n^2},$$

откуда

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2-1^2} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2-2^2} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2-3^2} + \ldots\right].$$

Приложение. Положим в предыдущей формуле $x=\pi$ и обозначим α через x. Разделив на $\sin \pi x$, получим

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \frac{1}{x^2-3^2} + \ldots\right]$$

или

$$\operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \frac{1}{3^2-x^2} + \ldots\right].$$

Если x заключен в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a < 1$, то общий член ряда внутри квадратных скобок меньше общего члена ряда

$$\sum \frac{1}{n^2-a^2}.$$

Следовательно, ряд внутри квадратных скобок сходится равномерно, и можно проинтегрировать обе части равенства от нуля до x. Освобождаясь от множителя $\frac{1}{\pi}$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} \ln \frac{\sin \pi x}{x} = \ln \pi$, имеем

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

или

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Символ $\prod$ означает бесконечное произведение. В данном случае это произведение биномов вида $1 - \frac{x^2}{n^2}$, n пробегает все целые значения [1]). Отсюда получаем формулу

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \dots \qquad (10)$$

Если x придать значение $\frac{1}{2}$, получим формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \cdots$$

2.1.5. Случай, когда разложение в ряд Фурье ограничено первыми n членами. Дана функция $f(x)$, определенная в интервале $(\theta, \theta + 2\pi)$, и тригонометрический ряд, который оборван на первых n членах. Коэффициенты ряда произвольны. Мы можем спросить себя, какими должны быть эти коэффициенты, чтобы сумма первых n членов тригонометрического ряда представляла наилучшим образом функцию $f(x)$ в рассмотренном интервале.

Пусть сумма первых n членов тригонометрического ряда равна

$$S_n(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos kx.$$

Определим выражение для коэффициентов ряда a_k, b_k так, чтобы величина $E = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx$ — средняя квадратичная ошибка, которую мы делаем, заменяя $f(x)$ на $S_n(x)$ в интервале от θ до $\theta + 2\pi$, — была минимальной. Для этого нужно коэффициенты a_k и b_k выбрать так, чтобы

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial E}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_n} = \frac{\partial E}{\partial b_0} = \frac{\partial E}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial E}{\partial b_n} = 0.$$

---

[1]) При помощи символа $\prod$ бесконечное произведение

$$(1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots$$

может быть кратко записано в виде

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n).$$

Логарифм бесконечного произведения равен сумме ряда, общий член которого $\ln(1 + u_n)$. Так как ряды $|\ln(1 + u_n)|$ и $|u_n|$ одновременно сходятся или расходятся, то можно сформулировать следующее положение.

Произведение $\prod_{n=0}^{n} (1 + u_n)$ имеет при бесконечно возрастающем n предел, не равный нулю и не зависящий от порядка сомножителей, если ряд, общий член которого равен u_n, абсолютно сходящийся. Такое произведение называется абсолютно сходящимся.

Обратимся к коэффициенту a_m. Он определяется из уравнения $\frac{\partial E}{\partial a_m} = 0$:

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = -\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - S_n(x)]\frac{\partial S_n}{\partial a_m}\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = -\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi}\left[f(x) - b_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx - \sum_{k=1}^{n} b_k \cos kx\right]\sin mx\,dx = 0.$$

Это дает нам

$$\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\theta+2\pi} [f(x) - a_m \sin mx]\sin mx\,dx = 0,$$

откуда получаем

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{0+2\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье не только точно представляет функцию $f(x)$ при неограниченном числе членов *), но и обеспечивает наименьшую среднюю квадратичную ошибку по сравнению с любым тригонометрическим рядом по $\sin kx$ и $\cos kx$, если эти ряды обрывать на произвольном конечном числе слагаемых. Замечательно, что при увеличении числа членов в конечной тригонометрической сумме $S_n(x)$ все прежние коэффициенты сохраняют свой вид.

Замечание. Рассуждения остаются точно такими же, если речь идет о разложении в ряд по произвольной системе ортогональных функций $u(z)$. Это означает, что мы получим наилучшее представление функции $f(x)$ в виде ограниченного ряда по ортогональным функциям, если коэффициенты разложения определим по формуле (8). И здесь при увеличении числа членов в конечной сумме прежние коэффициенты сохраняют свой вид.

2.1.6. Изучение разложения в ряд Фурье вблизи точки разрыва. Явление Гиббса. Пусть $y = f(x)$ — функция, имеющая разрыв в точке $x = a$ (см. рис. 2.5):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(a-\varepsilon) = A,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon) = B.$$

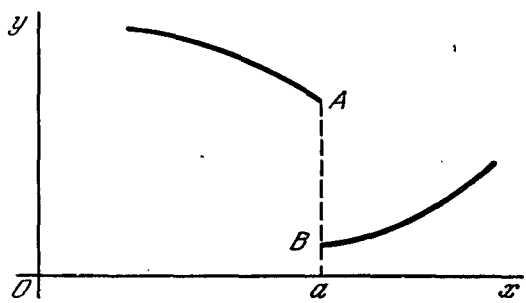


Рис. 2.5.

Введем в рассмотрение $G(x)$ — функцию, имеющую значение -1 при $-\pi < x < 0$ и $+1$ при $0 < x < \pi$. Ряд Фурье для $G(x)$ будет

$$G(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right].$$

Функция $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{B-A}{2}\,G(x-a) + f_1(x),$$

*) В том смысле, что при $n \to \infty$ $\lim E = 0$.

где $f_1(x)$ — функция, уже не имеющая разрыва при $x=a$ $\left(f_1(a)=\frac{A+B}{2}\right)$. Поэтому для изучения особенности разложения $f(x)$ вблизи $x=a$ достаточно рассмотреть поведение $G(x)$ вблизи нуля.

При $x=0$ $G(x)$ имеет своим значением ± 1 в зависимости от того, как x стремится к нулю: принимая положительные или отрицательные значения. Сумма же ряда Фурье для $G(x)$ при $x\to 0$ стремится к единственному значению — нулю. В этом нет ничего удивительного, так как ряд справа — непрерывная функция x и не может иметь двух разных значений при значении переменной $x=0$.

Рассмотрим первые n членов разложения $G(x)$:

$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right].$$

Начертим кривую, представленную этим рядом. Для этого изучим производную $S_n'(x)$:

$$S_n'(x)=\frac{4}{\pi}[\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x].$$

Если в формуле (1) п. 1.1.13 положим $\delta=2x$, $\alpha=x$, то

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\cos nx\sin nx}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

Следовательно,

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

Максимумы и минимумы $S_n(x)$ при изменении x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ определяются равенством $\sin 2nx=0$, откуда

$$x=\frac{k\pi}{2n}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

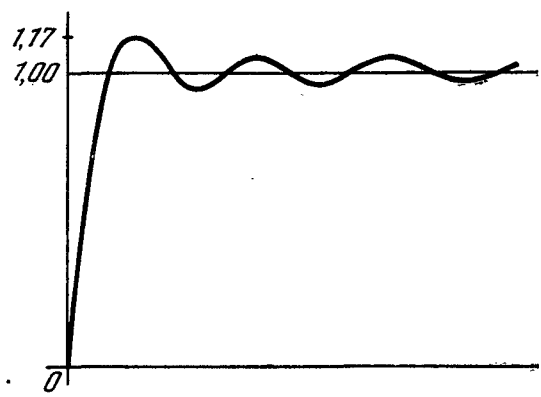


Рис. 2.6.

Кривая $S_n(x)$ совершает ряд колебаний вокруг ординаты $y=+1$ (рис. 2.6). Нетрудно заметить, что первый максимум (при $k=1$) наибольший. Его ордината равна

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin y\,dy}{2n\sin\frac{y}{2n}},$$

где мы обозначили $y=2nt$.

При больших значениях n (соответственно малых x) можно заменить $\sin\frac{y}{2n}$ на $\frac{y}{2n}$. Предел ординаты первого максимума при $n\to\infty$ $(x\to 0)$ будет, следовательно,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{2}{\pi}\operatorname{Si}\pi=1{,}179\ldots$$

вместо того, чтобы быть равным единице (символ Si обозначает интегральный синус — см. п. 7.2.1).

Таким образом, функция, представленная тригонометрическим рядом, переходя через разрыв, делает скачок, примерно на 18% больший, чем исходная функция. Это явление было обнаружено в 1899 г. американским физиком Гиббсом. Оно иллюстрируется рис. 2.7, где приведены графики функций $S_n(x)$ — сумм n первых членов разложения в ряд Фурье функции $G(x)$ — для $n=1, 3, 7, 15, \infty$ в промежутке $[0, \pi]$. Из-за явления

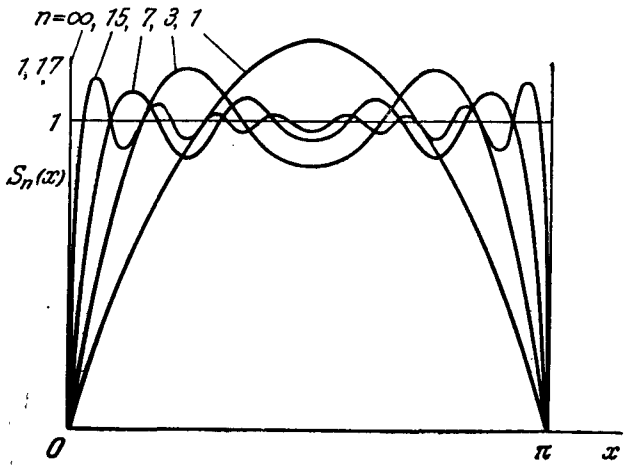


Рис. 2.7.

Гиббса представление разрывных функций рядом Фурье в окрестности точек разрыва не вполне удовлетворительно *).

2.1.7. Случай произвольного промежутка. В случае, если период функции $f(t)$ равен не 2π, а T, то ее следует рассматривать в промежутке не от θ до $\theta+2\pi$, а от θ до $\theta+T$. Тогда

$$f(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t, \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{11}$$

Коэффициенты равны

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\cos n\omega t\, dt, \tag{12}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\sin n\omega t\, dt, \tag{13}$$

$$b_0=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\, dt. \tag{14}$$

Эти формулы совпадают с (4) — (6), если заменить там x на $\frac{2\pi t}{T}$ **).

*) Подробное изложение явления Гиббса дано в [1], стр. 490—495.

**) При вычислении интегралов от периодической функции $f(t)$ можно считать $\theta=0$.

2.1.8. Ряды с комплексными членами. Пусть

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t+b_0.$$

Имеем

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2j}\left(e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left(e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}\right)+b_0=$$

$$=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{b_n-ja_n}{2}e^{jn\omega t}+\frac{b_n+ja_n}{2}e^{-jn\omega t}\right],$$

где на основании формул (12)—(14)

$$\frac{b_n-ja_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)(\cos n\omega t-j\sin n\omega t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt,$$

$$\frac{b_n+ja_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\,e^{jn\omega t}\,dt.$$

Здесь отметим два обстоятельства:

1. Из формулы для $\frac{b_n-ja_n}{2}$ можно получить выражение для $\frac{b_n+ja_n}{2}$, изменив n на $-n$. Если первый коэффициент обозначить через c_n, то второй должен быть обозначен как c_{-n}.

2. Постоянный член можно написать в таком виде: $b_0=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\,e^0\,dt$.

Он получится из общей формулы, дающей $c_{\pm n}$, если положить в ней $n=0$. Следовательно,

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \tag{15}$$

где

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} f(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt. \tag{16}$$

Выражение (15) представляет собой разложение в ряд Фурье с комплексными членами, а (16) — формулу для коэффициентов, которые участвуют в этом разложении. Мы получаем, таким образом, внешне более простой ряд, чем разложение с вещественными членами. Он имеет то преимущество, что коэффициенты разложения определяются одной общей формулой. В разложении с вещественными членами это не имеет места.

2.1.9. Графическое представление. Спектр. Если положить $a_n=s_n\sin\varphi_n$ и $b_n=s_n\cos\varphi_n$, то ряд (11) функции $f(t)$ получает вид

$$f(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty} s_n\cos(n\omega t-\varphi_n).$$

Функция $f(t)$ разложена в сумму гармонических компонент; s_n и φ_n представляют собой соответственно амплитуду и фазу отдельных гармоник.

Эти гармоники можно представить в векторной форме. Если расположить разные векторы, соответствующие каждой круговой частоте, вдоль

некоторой оси, то мы получим трехмерное представление гармоник разложения в ряд Фурье. На рис. 2.8 оно дано для момента $t = 0$. Такое представление, однако, не очень удобно. Поэтому его обычно заменяют двумя

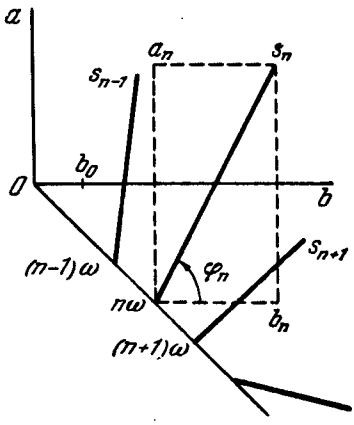


Рис. 2.8.

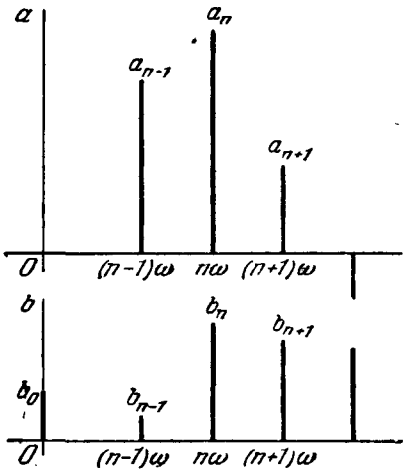


Рис. 2.9.

(рис. 2.9), которые являются проекциями совокупности предыдущих векторов соответственно на плоскости фаз $\frac{\pi}{2}$ и нуля, иначе говоря, представлением величин a_n и b_n вдоль оси круговой частоты. Можно даже ограничиться представлением одних только длин s_n или их квадратов, опуская фазовые соотношения отдельных компонент. Такое представление называют спектром функции $f(t)$ или, чаще, линейным спектром функции.

Что касается трехмерного представления на рис. 2.8, то здесь уместно сделать следующее замечание: если принять за новое начало отсчета времени момент t_0, то картина, изображенная на рис. 2.9, изменится, но длина векторов на рис. 2.8 останется неизменной. Каждый вектор повернется только на угол $n\omega t_0$, а вся совокупность векторов претерпит нечто вроде винтообразного скручивания. Поэтому представление, состоящее в том, чтобы изображать только модули s_n или их квадраты s_n^2, удобнее, так как оно инвариантно по отношению к изменению начала отсчета времени.

Возьмем ряд функции $f(t)$ с комплексными членами (15). Совокупность комплексных величин c_n может быть точно так же изображена в трехмерной векторной форме. Вещественная и мнимая части векторов c_n играют ту же роль, что и коэффициенты a_n и b_n, со следующим различием. Рис. 2.8 должен быть продолжен в сторону отрицательных круговых частот. Формулы

$$c_n = \frac{1}{2}(b_n - ja_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(b_n + ja_n)$$

дают

$$\mathrm{R}(c_n) = \frac{1}{2}b_n, \qquad \mathrm{R}(c_{-n}) = \frac{1}{2}b_n, \qquad \mathrm{I}(c_n) = -\frac{1}{2}a_n, \qquad \mathrm{I}(c_{-n}) = \frac{1}{2}a_n,$$

что приводит к очевидной симметрии картины. Аналогично представлениям рис. 2.9 проекции на плоскости фаз $\frac{\pi}{2}$ и нуля образуют удобные для

работы представления (рис. 2.10). Приведенные выше замечания относительно влияния смещения начала отсчета времени действительны и в случае разложения с комплексными членами.

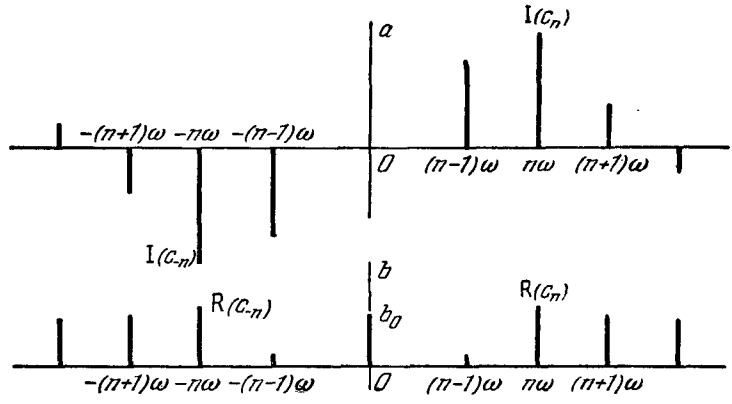


Рис. 2.10.

2.1.10. Среднее значение произведения двух функций одного периода, разложимых в ряд Фурье. Даны

$$f(t)=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\sin m\omega t+b_m\cos m\omega t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m e^{jm\omega t},$$

$$\varphi(t)=\beta_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\sin m\omega t+\beta_m\cos m\omega t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\gamma_m e^{jm\omega t}.$$

Исходя из формул (1) — (3), отнесенных к периоду $T=\frac{2\pi}{\omega}$, нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt=b_0\beta_0+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m\gamma_{-m}. \qquad (17)$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt=b_0^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m c_{-m}. \qquad (18)$$

Так, например, если $\varphi(t)$ — периодическая электродвижущая сила, приложенная к цепи, а $f(t)$ — текущий по этой цепи ток, то среднее значение произведения — это средняя мощность, расходуемая в цепи. Она выражена в формуле (17) с помощью коэффициентов обоих разложений в ряд Фурье. Выражение (18), умноженное на R, дает среднюю мощность $\bar{P}$, расходуемую на сопротивлении R циркуляцией переменного тока $f(t)$. Эффективная сила тока $i_{эф}$ в этом случае определяется из формулы

$$Ri_{эф}^2=\bar{P}.$$

Заметим, что b_0 — это интенсивность постоянной составляющей тока, а $\sqrt{\frac{1}{2}(a_m^2+b_m^2)}=i_m$ — интенсивность гармоники тока m-го порядка. Формула (18) при этом дает

$$i_{эф}=\sqrt{b_0^2+i_1^2+i_2^2+\ldots+i_m^2+\ldots}.$$

2.1.11. Распространение ряда Фурье на почти периодические функции[1]. Рассмотрим функцию $f(x)$, представляющую собой сумму периодических функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ с периодами τ_1, τ_2, τ_3, ..., τ_n соответственно. Если периоды соизмеримы между собой или, иначе говоря, они являются целыми кратными некоторого числа T, то это T и будет периодом функции $f(x)$. В противном случае функция $f(x)$ не периодична.

Однако если разложить функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ в ряды Фурье и просуммировать эти ряды, то мы получим разложение вида

$$f(x) = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \omega_m x + \alpha_m \sin \omega_m x).$$

Оно внешне походит на разложение в ряд Фурье, но это не ряд Фурье, потому что множители ω_m — коэффициенты при x — не целые кратные одного числа.

Попробуем вычислить коэффициенты β_0, β_m, α_m. Рассмотрим ряд Фурье некоторой периодической функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m \cos m\omega x + a_m \sin m\omega x).$$

Согласно формуле (14) коэффициент b_0 равен среднему значению функции $\varphi(x)$ по периоду, но он равен также среднему значению функции $\varphi(x)$ по бесконечному интервалу:

$$b_0 = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \varphi(x)\, dx.$$

Мы можем, следовательно, вычислить b_0, не зная периода функции $\varphi(x)$. Точно так же, заметив, что соотношения (12) и (13) являются не чем иным, как средними значениями по периоду функций $\varphi(x)\sin m\omega x$ и $\varphi(x)\cos m\omega x$, мы получим коэффициенты a_m и b_m из соотношений

$$a_m = \lim_{S\to\infty} \frac{2}{S} \int_0^S \varphi(x) \sin m\omega x\, dx,$$

$$b_m = \lim_{S\to\infty} \frac{2}{S} \int_0^S \varphi(x) \cos m\omega x\, dx.$$

Таким образом, коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ можно вычислить и не зная периода этой функции. Это наводит на мысль, что коэффициенты β_0, β_m, α_m получаются из соотношений

$$\beta_0 = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_0^S f(x)\, dx,$$

$$\beta_m = \lim_{S\to\infty} \frac{2}{S} \int_0^S f(x) \cos \omega_m x\, dx,$$

$$\alpha_m = \lim_{S\to\infty} \frac{2}{S} \int_0^S f(x) \sin \omega_m x\, dx.$$

[1]) P. Lévy, Cours d'Analyse, t. 1, p. 183, 1930.

Можно, впрочем, определить эти коэффициенты и не зная значений ω_m. Действительно, коэффициенты определяются как те числа, для которых интегралы

$$\lim_{S\to\infty}\frac{2}{S}\int_0^S f(x)\cos\tau x\,dx,$$

$$\lim_{S\to\infty}\frac{2}{S}\int_0^S f(x)\sin\tau x\,dx$$

отличны от нуля, когда τ изменяется от нуля до бесконечности.

Если рассматривать сумму

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

как равномерно сходящийся ряд периодических функций, то функция $f(x)$ будет называться почти периодической. Она может быть разложена в ряд, очень похожий на ряд Фурье.

Численный расчет коэффициентов ряда Фурье изложен в гл. X, посвященной численным и графическим методам (п. 10.3.6).

2.2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.2.1. Вещественная форма интеграла Фурье. Пусть на всей вещественной оси задана некоторая функция $f(t)$. Мы уже видели, что в промежутке $[\theta,\ \theta+T]$ ее можно разложить в ряд Фурье. Если считать теперь, что t изменяется не от θ до $\theta+T$, а пробегает всю вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$, то функция, представленная рядом Фурье, уже не будет совпадать с $f(t)$ вне промежутка $[\theta,\ \theta+T]$. График этой функции получится параллельным переносом (как направо, так и налево) на участки длиной T, $2T$, $3T$, ... графика $f(t)$ на основном промежутке.

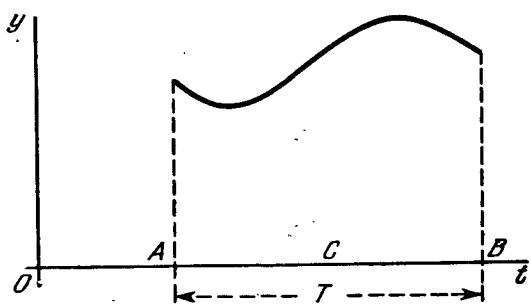


Рис. 2.11.

Для целого ряда задач было бы полезно вывести из ряда Фурье разложение, могущее представить функцию $f(t)$, заданную от $-\infty$ до $+\infty$. Оно называется разложением $f(t)$ в интеграл Фурье.

Возьмем функцию $f(t)$ и рассмотрим, как уже было сказано, ее значения в промежутке $[\theta,\ \theta+T]$, иначе говоря, рассмотрим часть изображающей ее кривой, заключенную между точками с абсциссами $A=\theta$ и $B=\theta+T$ (рис. 2.11).

Переместим начало координат в среднюю точку C отрезка AB. Для значений t, заключенных между A и B, т. е. для таких t, что $-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant+\frac{T}{2}$, функция $f(t)$ представляется разложением

$$f(t)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos n\Omega t+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\Omega t,$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, а коэффициенты a_n, b_n и b_0 даются формулами

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \sin n\Omega\tau \, d\tau,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cos n\Omega\tau \, d\tau,$$

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \, d\tau.$$

Рассмотрим, что произойдет с разложением, если T устремить к бесконечности. Для этого запишем разложение в следующем виде:

$$f(t) = b_0 + \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=\Omega}^{\infty} \Omega (b_n \cos \omega t + a_n \sin \omega t).$$

Мы обозначили $n\Omega = \omega$; при суммировании учтем, что Ω — разность между двумя последовательными значениями ω:

$$\omega = (n+1)\Omega \quad \text{и} \quad \omega = n\Omega.$$

Можно, следовательно, рассматривать Ω как приращение $\Delta\omega$ величины ω.

Заменяя a_n, b_n и b_0 их выражениями, найдем

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{\omega=\Omega}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) [\cos \omega\tau \cos \omega t + \sin \omega\tau \sin \omega t] \, d\tau.$$

Иначе говоря,

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{\omega=\Omega}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau.$$

Пусть T стремится к бесконечности. В этом случае $\Delta\omega$ превращается в $d\omega$, а $\sum_{\omega=\Omega}^{\infty}$ в $\int_0^{\infty}$. Будем считать, что интеграл от $f(\tau)$ по бесконечному промежутку сходится. Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \, d\tau = 0,$$

и мы получим следующую формулу для функции $f(t)$:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

Это разложение в интеграл Фурье функции $f(t)$*).

Если раскрыть $\cos\omega(t-\tau)$ и вывести из-под знака внутреннего интеграла члены, не зависящие от τ, то можно написать

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega\left\{\cos\omega t\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau+\sin\omega t\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau\right\}.$$

Отсюда мы видим, что $f(t)$ можно рассматривать как сумму бесконечного числа синусоидальных колебаний с амплитудой

$$\frac{1}{\pi}A(\omega)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau\right)^2}$$

и фазой

$$\Phi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau}.$$

Формулу (19) можно теперь написать в следующем виде:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} A(\omega)\cos[\omega t-\Phi(\omega)]\,d\omega.$$

2.2.2. Комплексная форма интеграла Фурье. Применим формулы (15) и (16) для ряда Фурье с комплексными членами к функции, изображенной на рис. 2.11. Имеем

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\Omega t},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-jn\Omega\tau}\,d\tau.$$

Если обозначить, как это делалось в предыдущем пункте,

$$n\Omega=\omega,\quad \Delta\omega=\Omega$$

и, кроме того,

$$c_n=\Omega G(\omega),$$

*) Интеграл по τ с бесконечными пределами возник в результате предельного перехода при $T\to\infty$. Его, следовательно, надо понимать в смысле главного значения (Valeur principiale, см. [1], стр. 532—533). Знак главного значения (v. p.) будем для краткости опускать.

то

$$f(t)=\sum_{\omega=-\infty}^{+\infty} G(\omega)\,e^{j\omega t}\,\Delta\omega, \quad G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau.$$

Оба эти выражения справедливы при $-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant+\frac{T}{2}$.

Пусть T бесконечно возрастает. Тогда в пределе

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{20}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \tag{21}$$

Если подставить выражение (21) для $G(\omega)$ в формулу для $f(t)$, то

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau.$$

Последнее выражение представляет собой комплексную форму интеграла Фурье.

Отделим вещественную часть от мнимой:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau+j\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right].$$

Функция $\sin\omega(t-\tau)$ — нечетная функция от ω. Отсюда вытекает, что мнимая часть полученной формулы равна нулю. Это, впрочем, очевидно, так как $f(t)$ — вещественная функция и мнимая часть справа должна отсутствовать. Точно так же, поскольку $\cos\omega(t-\tau)$ — четная функция от ω, мы можем, введя коэффициент 2, свести область интегрирования по ω к интервалу $[0, \infty)$. Следовательно, в конечном счете

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau.$$

Это в точности формула (19), найденная нами ранее.

Было бы интересно получить выражение интеграла Фурье в комплексной форме, используя амплитудную функцию $A(\omega)$ и фазовую $\Phi(\omega)$, определенные в п. 2.2.1.

Очевидно, что

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}A(\omega)\,e^{-j\Phi(\omega)},$$

откуда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\,e^{j[\omega t-\Phi(\omega)]}\,d\omega. \tag{22}$$

Замечание. Множитель $\frac{1}{2\pi}$ можно поместить в любую из формул (20) или (21): в выражение для $G(\omega)$, как в данном пункте, либо в выражение для $f(t)$, как будет сделано в п. 2.2.8, в соответствии с принятым стандартом для формул преобразования Фурье. Некоторые авторы из соображений симметрии вводят множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в обе формулы. Все это вопрос определения $G(\omega)$, иначе говоря, зависит от смысла вводимых в теорию обозначений. Здесь следует быть весьма внимательным, в частности, при пользовании таблицами преобразований Фурье.

2.2.3. Применение к электрическим цепям. Положим, что функция $f(t)$ представляет собой электродвижущую силу, приложенную к контуру или электрической цепи. Согласно формуле (20) можно рассматривать электродвижущую силу $f(t)$ как сумму бесконечного числа синусоидальных составляющих, амплитуды которых даны выражением $|G(\omega)|$, а частоты проходят весь спектр от $-\infty$ до $+\infty$. Следует считать, что эти элементарные синусоидальные электродвижущие силы приложены бесконечно давно. Поэтому единственным электрическим током, который существует в цепи, будет ток с постоянным синусоидальным режимом. Действительно, переходной ток, вызванный внезапным приложением элементарной электродвижущей силы, экспоненциально затухает и в стационарном режиме равняется нулю. Конечно, для этого нужно, чтобы сопротивления цепи были положительны, иными словами, чтобы это была рассеивающая цепь. Итак, нас будут интересовать только синусоидальные токи.

Известно, что если представить через $Z(j\omega)$ полное сопротивление контура или эквивалентное полное сопротивление цепи, а через $E_0 e^{j\omega t}$ — синусоидальную электродвижущую силу, то стационарный синусоидальный ток будет равен

$$\frac{E_0 e^{j\omega t}}{Z(j\omega)}.$$

Применим эту формулу к сумме синусоидальных электродвижущих сил, представленных формулой (20). Электродвижущая сила, соответствующая частотам, заключенным между ω и $\omega + d\omega$, будет

$$G(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Результирующий стационарный синусоидальный ток, вызванный такой электродвижущей силой, равен

$$\frac{G(\omega)\, e^{j\omega t}}{Z(j\omega)}\, d\omega.$$

Сумма этих токов даст реакцию контура или цепи на электродвижущую силу $f(t)$. Суммарный ток выражается равенством

$$i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)\, e^{j\omega t}}{Z(j\omega)}\, d\omega.$$

Если полное сопротивление контура или эквивалентное полное сопротивление цепи выразить через модуль и фазовый угол

$$Z(j\omega) = B(\omega)\, e^{j\beta(\omega)},$$

то формула (22) дает

$$i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A(\omega)}{B(\omega)}e^{j[\omega t-\Phi(\omega)-\beta(\omega)]}d\omega. \qquad (23)$$

Пример. Электродвижущая сила $f(t)$, разложение которой в интеграл Фурье дано формулой (22), приложена к зажимам усилителя. Коэффициент его комплексного усиления дается выражением

$$B(\omega)e^{j\beta(\omega)}.$$

Пусть функции, характеризующие изменение амплитуды $B(\omega)$ и фазы $\beta(\omega)$, представляют собой соответственно четную и нечетную функции от величины ω (рис. 2.12). Величина C на рисунке имеет размерность времени, $\frac{\pi}{c}$ можно трактовать как полуширину полосы пропускания.

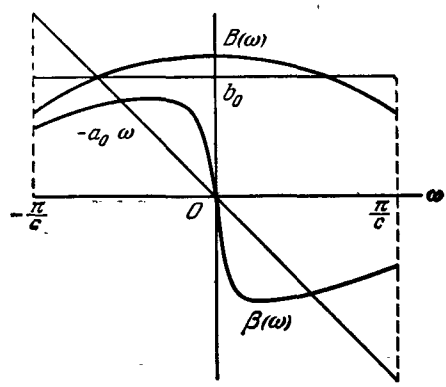


Рис. 2.12.

Форма выходного сигнала усилителя может быть представлена формулой (24), аналогичной (23):

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)B(\omega)e^{j[\omega t-\Phi(\omega)+\beta(\omega)]}d\omega. \qquad (24)$$

Если бы это был идеальный усилитель, то четная функция $B(\omega)$ свелась бы к постоянной b_0 (усиление, не зависимое от частоты), а нечетная функция $\beta(\omega)$ к линейной функции $-a_0\omega$ (фазовый сдвиг пропорционален частоте). Разложим в ряд Фурье разности между идеальными и реальными функциями. Имеем

$$B(\omega)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nc\omega,$$

$$\beta(\omega)=-a_0\omega+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin mc\omega.$$

Тогда формула (24) принимает вид

$$e(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)\left[b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left(e^{jnc\omega}+e^{-jnc\omega}\right)\right]\times$$

$$\times e^{j[\omega(t-a_0)-\Phi(\omega)]}e^{\sum_{m=1}^{\infty}ja_m\sin mc\omega}d\omega.$$

Но известно (см. п. 7.5.11), что

$$e^{ja_m\sin mc\omega}=J_0(a_m)+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(a_m)\left[e^{jkmc\omega}+(-1)^ke^{-jkmc\omega}\right].$$

Если подставить это разложение в предыдущую формулу, то мы в соответствии с (22) представим выходной сигнал $e(t)$ с помощью членов вида

$$\left.\begin{aligned} &f(t-a_0)\,b_0J_0(a_m),\\ &f(t-a_0+kmc)\,b_0J_k(a_m),\\ &f(t-a_0-kmc)\cdot(-1)^k\,b_0J_k(a_m),\\ &f(t-a_0\pm nc)\,\frac{b_n}{2}J_k(a_m),\\ &f(t-a_0\pm nc+kmc)\,\frac{b_n}{2}J_k(a_m),\\ &f(t-a_0\pm nc-kmc)\cdot(-1)^k\,\frac{b_n}{2}J_k(a_m). \end{aligned}\right\} \quad m,\ n,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Таким образом, основной сигнал оказывается окруженным на расстояниях, кратных c, рядом паразитных сигналов.

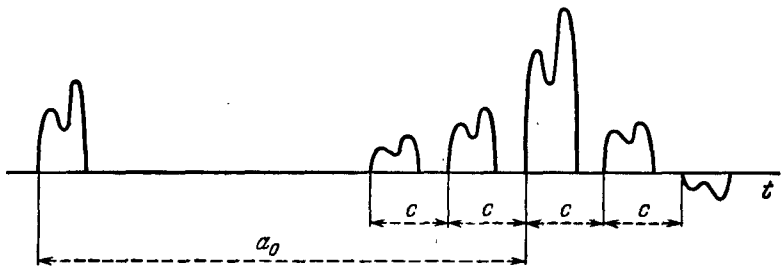


Рис. 2.13.

Картина будет более наглядной, если мы ограничимся в каждом из рядов (для $B(\omega)$ и $\beta(\omega)$) только первыми членами. Тогда остается только

$$b_0J_0(a_1)\,f(t-a_0),$$

(т. е. входной сигнал, запаздывающий на a_0 и умноженный на постоянный коэффициент) и еще сигналы вида

$$\left[\frac{b_1}{2}J_0(a_1)+b_0J_1(a_1)\right]f(t-a_0+c),$$

$$\left[\frac{b_1}{2}J_0(a_1)-b_0J_1(a_1)\right]f(t-a_0-c),$$

. . . . . .

изображенные на схеме рис. 2.13.

2.2.4. Случай незатухающей цепи. Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что речь идет о рассеивающих электрических цепях, т. е. что все корни характеристического дифференциального уравнения, определяющего систему, имеют отрицательные вещественные части. Если же корни чисто мнимые, то интеграл

$$i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\omega)}{Z(j\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

не будет сходиться, так как $Z(j\omega)$ становится равным нулю при вещественных значениях ω, следовательно, внутри интервала интегрирования. Чтобы найти, однако, решение в этом важном случае, обычно достаточно ввести

малый коэффициент затухания, вычислить ответ, а затем устремить коэффициент затухания к нулю:

$$i(t) = \lim_{\beta \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{Z(j\omega + \beta)} e^{j\omega t} d\omega.$$

2.2.5. Спектр частот. Имея функцию $G(\omega)$, мы можем определить спектр частот функции $f(t)$, аналогичный спектру ряда Фурье в комплексном виде, с той разницей, что здесь речь идет о непрерывном спектре. При частном значении ω функция $G(\omega)$ может быть представлена вектором, компоненты которого будут действительной и мнимой частью $G(\omega)$. Если расположить начало этих векторов, соответствующее всем значениям ω от $-\infty$ до $+\infty$, на оси $O\omega$, перпендикулярной плоскости xOy, образованной действительной и мнимой осями, то конец вектора $G(\omega)$ опишет кривую (в большинстве случаев пространственную), которая и будет графически представлять непрерывный спектр частот функции $f(t)$ (рис. 2.14).

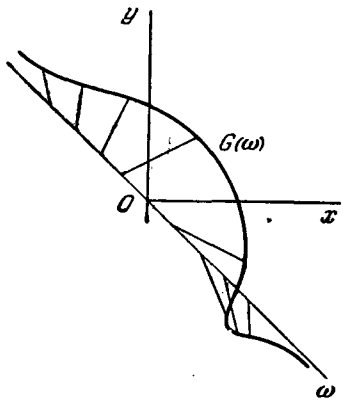


Рис. 2.14.

Это трехмерное довольно неудобное изображение заменяют проекциями кривой $G(\omega)$ на плоскости $xO\omega$, $yO\omega$, т. е. кривыми,

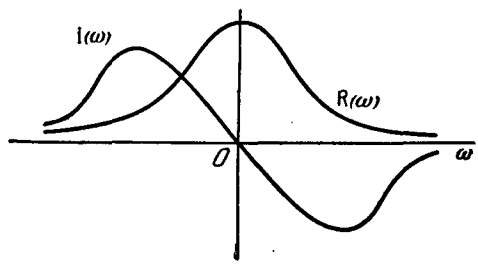


Рис. 2.15.

представляющими отдельно вещественную $R(\omega)$ и мнимую $I(\omega)$ части комплексной функции $G(\omega)$ (рис. 2.15):

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau, \qquad I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau.$$

Эти две кривые полностью осведомляют нас об амплитуде и фазе каждой составляющей. $I(\omega)$ — нечетная функция, иначе говоря, начало координат будет центром симметрии кривой $I(\omega)$. $R(\omega)$ — четная функция, иначе говоря, ось ординат Oy будет осью симметрии кривой $R(\omega)$. Отсюда вытекает, что если $f(t)$ — четная функция, то спектр сводится только к действительной части $R(\omega)$, совпадающей с модулем функции $G(\omega)$, или с амплитудой $\frac{A(\omega)}{2\pi}$. Точно так же, если $f(t)$ — нечетная функция, то спектр сводится к мнимой части $I(\omega)$, которая совпадает в этом случае с $|G(\omega)| = \frac{A(\omega)}{2\pi}$.

Можно пользоваться также и другим представлением, которое состоит в том, что по оси ординат откладывают либо амплитуду

$$\frac{A(\omega)}{2\pi} = |G(\omega)| = [R^2(\omega) + I^2(\omega)]^{1/2},$$

либо ее квадрат (рис. 2.16). Это представление неудобно тем, что не выявляет фаз отдельных составляющих, однако имеет то преимущество, что остается неизменным при любом перемещении начала отсчета времени t_0. Действительно, легко заметить, что так же, как в случае спектра для ряда Фурье, при смещении начала отсчета времени кривая $G(\omega)$ претерпевает винтообразное скручивание, пропорциональное t_0. Это изменяет составляющие $R(\omega)$ и $I(\omega)$, но не амплитуду $\frac{A(\omega)}{2\pi} = |G(\omega)|$.

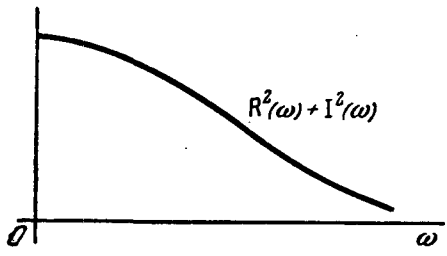


Рис. 2.16.

Пример. Чтобы лучше понять механизм перехода от разложения в ряд Фурье к интегралу Фурье, рассмотрим следующий простой пример. Дана функция времени, состоящая из прямоугольных импульсов высотой h и шириной 2ε, повторяющихся с частотой ν. Это функция с периодом

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\Omega} \qquad (T > 2\varepsilon).$$

Ее разложение в ряд Фурье будет

$$f(t) = \frac{h}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Omega \frac{\sin m\Omega\varepsilon}{m\Omega} e^{jm\Omega t}.$$

Спектр этой функции состоит из счетного числа отдельных линий (соответствующих последовательным целым числам), отстоящих друг от друга на $2\pi\nu$. График функции $f(t)$ и ее спектр для нескольких значений отношения $\frac{\varepsilon}{T}$ приведены на рис. 2.17, где введено обозначение $m\Omega = \omega$. Концы вертикальных линий, изображающих амплитуды, располагаются на кривых

$$\frac{h}{\pi} \Omega \frac{\sin \omega\varepsilon}{\omega},$$

показанных на рисунке слева; самый большой максимум на этих кривых равен $2h\nu\varepsilon = 2h\frac{\varepsilon}{T}$.

Рассмотрим теперь кривые

$$\frac{h}{\pi} \frac{\sin \omega\varepsilon}{\omega},$$

показанные на рис. 2.17 справа; самый большой максимум здесь равен $\frac{\varepsilon h}{\pi}$. Ординаты правых кривых будут с точностью до коэффициента $\frac{h}{\pi}$ равны относительным амплитудам. Они отличаются от предыдущих множителем $\Omega = \Delta\omega$, т. е. отнесены к $\Delta\omega = 1$. Если Ω стремится к нулю, т. е. если импульсы все дальше отстоят друг от друга по времени, сохраняя прежнюю форму, то линии спектра все больше сближаются, левая кривая — величины их амплитуд — все больше сплющивается, но относительные амплитуды на правой кривой остаются неизменными. В пределе, когда $\Omega = 0$, функция $f(t)$ сводится к одиночному импульсу в начале отсчета времени. Тогда в спектре частот имеется несчетное число линий (т. е. столько, сколько точек на прямой), кривая слева — бесконечно сплющенная — сливается с осью ω, но

кривая справа — относительные амплитуды — остается неизменной, ее внутренняя область полностью заполняется бесконечно сближенными линиями. Это спектр частот изолированного импульса. Его можно найти непосредственно из формулы (21):

$$G(\omega)=\frac{h}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{h}{\pi}\frac{\sin\omega\varepsilon}{\omega}.$$

Это особенно простой пример, так как в силу симметрии подынтегральной функции мнимая часть $I(\omega)$ равна нулю. Все составляющие находятся в одинаковой фазе.

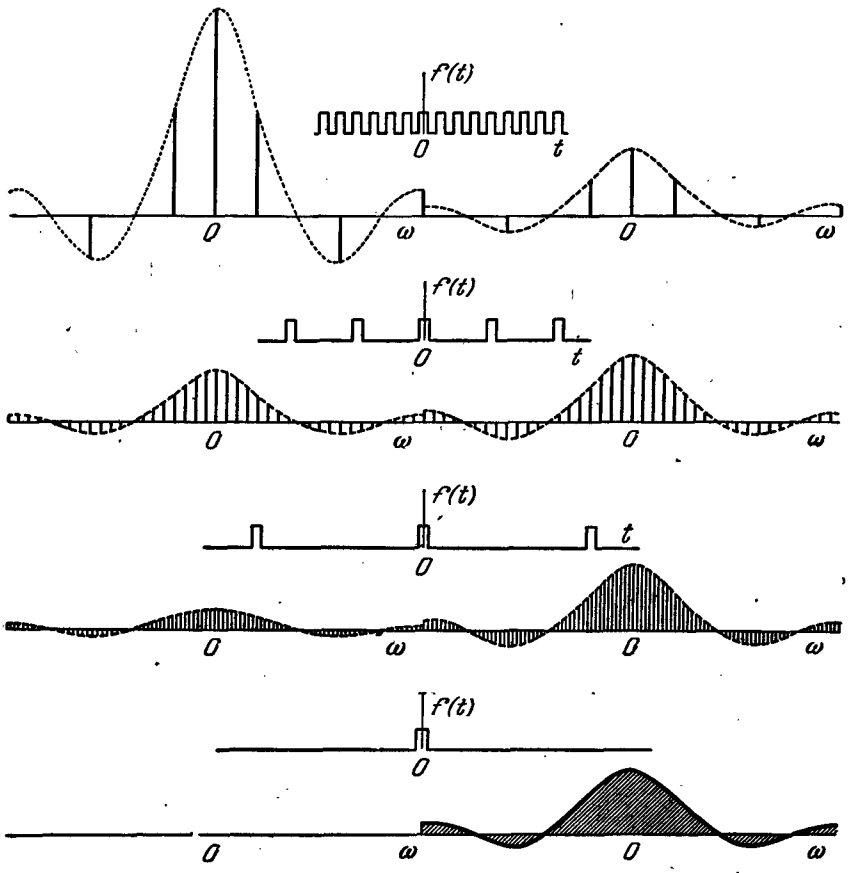


Рис. 2.17.

На рис. 2.17 изображен импульс высотой $h=1$, шириной $2\varepsilon=1$ *сек* для следующих случаев: один импульс за каждые две, восемь, двадцать секунд и одиночный импульс.

Случай ударного импульса. Предположим, что h бесконечно возрастает, а ε стремится к нулю так, что произведение $h\cdot 2\varepsilon$ постоянно и равно конечному числу P. В этом случае

$$G(\omega)=\frac{P}{2\pi}\frac{\sin\omega\varepsilon}{\omega\varepsilon}\to\frac{P}{2\pi}.$$

Очень короткий ударный импульс имеет спектр частот, не зависящий от частоты (рис. 2.18).

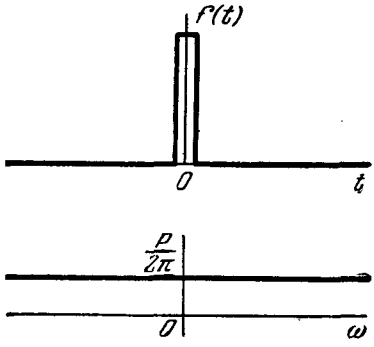


Рис. 2.18.

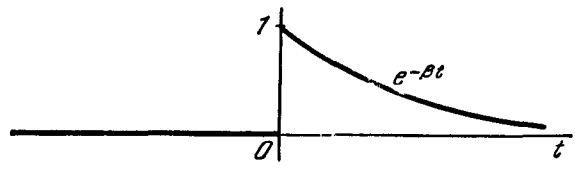


Рис. 2.19.

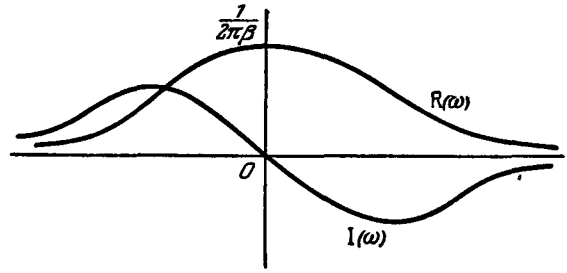


Рис. 2.20.

Пример. Функция $f(t)$ равна нулю при $t<0$ и равна $e^{-\beta t}$ при $t>0$ (рис. 2.19). Имеем

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,dt,$$

откуда

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

На рис. 2.20 воспроизведен спектр частот, т. е. кривые

$$\mathrm{R}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\quad\text{и}\quad \mathrm{I}(\omega)=-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

Подставим $G(\omega)$ в формулу (20). Тогда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\omega^2+\beta^2}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,d\omega,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega+$$

$$+\frac{j}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\sin\omega t}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega\right]. \qquad (25)$$

Мнимая часть справа равна нулю. Интегралы, определяющие вещественную часть, очень легко подсчитать по способу, указанному в п. 1.3.23. Первый интеграл равен $\frac{1}{2}e^{\beta t}$ при $t<0$ и $\frac{1}{2}e^{-\beta t}$ при $t>0$ (рис. 2.21).

Второй интеграл равен $-\frac{1}{2}e^{\beta t}$ при $t<0$ и $\frac{1}{2}e^{-\beta t}$ при $t>0$ (рис. 2.22). Сумма, следовательно, равна нулю при $t<0$ и $e^{-\beta t}$ при $t>0$. Мы восстановили, таким образом, функцию $f(t)$. Спектр частот, который можно получить, возведя модуль $G(\omega)$ в квадрат, будет

$$R^2(\omega)+I^2(\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\omega^2+\beta^2}$$

(см. рис. 2.23).

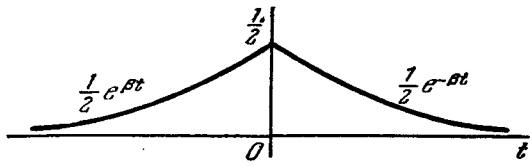


Рис. 2.21.

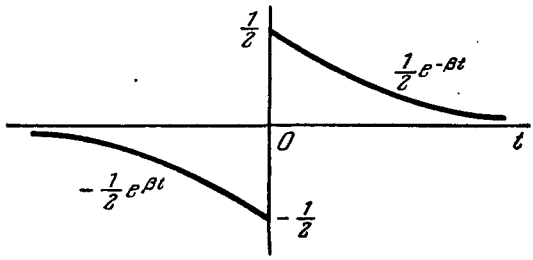


Рис. 2.22.

2.2.6. Единичная функция Хевисайда. Дана функция $\Upsilon(t)$, равная нулю при $t<0$ и единице при $t>0$. Это единичная функция Хевисайда или просто единичная функция. Нетрудно получить ее разложение в интеграл Фурье, или, точнее, разложение функции $\Upsilon(t)-\frac{1}{2}$, среднее значение которой в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$ равно нулю.

Разложение функции, рассмотренной в предыдущем примере (рис. 2.19), дается формулой (25). Если β стремится к нулю, то первый интеграл в формуле (25), представленный кривой на рис. 2.21, стремится к $1/2$. Второй интеграл стремится к

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega,$$

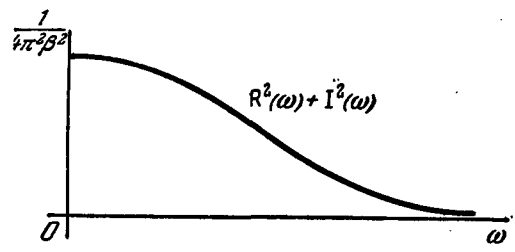


Рис. 2.23.

и мы приходим к формуле, указанной нами ранее (гл. I, формула (15)):

$$\Upsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega.$$

2.2.7. Пары функций. Можно заметить некоторую взаимосвязанность формул (20) и (21). Уравнение (20) определяет $f(t)$, если функция $G(\omega)$ известна. Уравнение (21), наоборот, определяет $G(\omega)$, если известна $f(t)$.

Эту симметрию можно сделать еще более явной, если круговую частоту ω заменить частотой $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$.

Положим $2\pi G(2\pi\nu)=\Phi(\nu)$. Имеем

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\nu)\,e^{j2\pi\nu t}\,d\nu, \tag{26}$$

$$\Phi(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-j2\pi\nu t}\,dt. \tag{27}$$

Если заменить t на $-t$, то

$$f(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\nu)\,e^{-j2\pi\nu t}\,d\nu,$$

$$\Phi(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\,e^{j2\pi\nu t}\,dt.$$

Здесь функции $f(-t)$ и $\Phi(\nu)$ поменялись местами. Спектр функции $\Phi(\nu)$ стал спектром $f(-t)$. Функции $f(t)$ и $\Phi(t)$ принято называть парой; для них построены специальные таблицы. Существует полная симметрия между обеими переменными — временем и частотой. Формула (26) показывает, что функцию $f(t)$ можно рассматривать как сумму синусоидальных составляющих времени. Точно так же формула (27) показывает, что функцию $\Phi(\nu)$ можно рассматривать как сумму синусоидальных составляющих частоты. Установление этого факта крайне важно и играет большую роль в современной теории информации.

2.2.8. Преобразование Фурье. Вместо симметричных формул (26) и (27) для определения преобразования Фурье предпочтительнее пользоваться соотношениями (20) и (21), но при этом следует ввести множитель $\frac{1}{2\pi}$ в формулу взаимного преобразования.

Стандартная форма экспоненциальной трансформанты Фурье функции $f(t)$ определяется соотношением

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \tag{28}$$

Обратное преобразование определяется по формуле

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{29}$$

Эти формулы не полностью симметричны. Экспоненциальная трансформанта Фурье для функции $G(t)$ равна $2\pi f(-\omega)$.

Если функция $f(t)$ определена только при $t>0$, если к тому же она, как и функции, рассматриваемые в гл. VIII (преобразование Лапласа), равна нулю при $t<0$, то мы можем определить два других преобразования Фурье: преобразование

$$G_1(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt, \qquad t>0, \tag{30}$$

называется косинус-преобразованием Фурье для $f(t)$; преобразование

$$G_2(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt, \qquad t>0, \tag{31}$$

называется синус-преобразованием Фурье для $f(t)$.

Обратные преобразования будут

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega, \qquad t>0, \tag{32}$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_2(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \qquad t>0. \tag{33}$$

Имеются очень полные таблицы трансформант Фурье для основных функций [1]).

Можно вывести формулы преобразований Фурье из таблиц пп. 8.3.29, 8.3.30, в которых приводятся формулы преобразований Лапласа. Для этого, однако, недостаточно заменить переменную p на $j\omega$, следует еще убедиться, что выполнены некоторые дополнительные условия. Действительно, замена переменной приводит в соответствие мнимую и вещественную оси — пути интегрирования. В преобразовании Лапласа путь интегрирования связывает точки $c-j\infty$ и $c+j\infty$. Замена p на $j\omega$ может быть произведена, если функция $F(p)$ не имеет полюсов вправо от мнимой оси или на ней самой. Кроме того, функция времени $h(t)$, рассматриваемая в преобразовании Лапласа, равна нулю при $t<0$. Это приводит к необходимости различать два случая.

1. Функция $f(t)$ равна нулю при $t<0$. Достаточно заменить p на $j\omega$ в $F(p)$, если только эта функция не имеет полюсов справа от мнимой оси или на ней самой.

Пример 1. $f(t)=0$ при $t<0$, $f(t)=e^{at}$ при $t>0$. Функция $F(p)=\frac{1}{p+a}$ удовлетворяет предыдущим условиям, если $\mathrm{R}(a)>0$. Искомая экспоненциальная трансформанта Фурье равна, следовательно, $G(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$. Так как $f(t)=0$ при $t<0$, то, взяв вещественные и мнимые части функции $G(\omega)$, мы непосредственно получаем косинус- и синус-трансформанты Фурье для $f(t)$:

$$G_1(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}, \quad G_2(\omega)=-\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

2. Функция не равна нулю при $t<0$. Можно написать

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt+\int_0^\infty f(-t)\,e^{j\omega t}\,dt.$$

Если $f(t)$ и $f(-t)$ соответственно имеют в качестве трансформант Лапласа функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ и если обе эти функции не имеют полюсов вправо от мнимой оси или на ней самой, то

$$G(\omega)=F_1(j\omega)+F_2(-j\omega).$$

Пример 2. Функции $f(t)=\sin\nu t$ соответствует трансформанта Лапласа $\frac{\nu}{p^2+\nu^2}$, имеющая два полюса на мнимой оси.

Функции $f(t)=e^{-at}\sin\nu t$ соответствует трансформанта Лапласа $\frac{\nu}{(p+a)^2+\nu^2}$. Полюсы функции $F_1(p)$ находятся слева от мнимой оси, полюсы функции $F_2(p)$ находятся справа от нее.

[1]) В частности, Tables of Integral Transforms, vol. I, Calif. Inst. of Technology, 1954.

Обе функции $\sin \nu t$ и $e^{-at}\sin \nu t$ не имеют экспоненциальной трансформанты Фурье, и это представляет большое затруднение при электротехнических расчетах.

Пример 3. Трансформанта Лапласа от $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ равна

$$F(p) = e^{\frac{p^2}{2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)\right]^{*}).$$

Функция $F(p)$ не имеет особых точек на конечном расстоянии. Следовательно, экспоненциальная трансформанта Фурье от $e^{-\frac{t^2}{2}}$ будет $\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}$, так как функция Ф, будучи нечетной, исчезает в сумме $F_1(j\omega) + F_2(-j\omega)$. Поэтому трансформанта Фурье функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ имеет такой же вид, как и она сама, с точностью до коэффициента $\sqrt{2\pi}$.

Замечание. Иногда удобно использовать частоту ν вместо круговой частоты ω. В этом случае нужно обратиться к формулам (26) и (27), которые определяют экспоненциальную трансформанту $\Phi(\nu)$ для функции $f(t)$ и обратное преобразование.

Как и в предыдущем случае, если $f(t)$ равна нулю при $t < 0$, преобразования Фурье по косинусам и синусам будут соответственно:

$$\Phi_1(\nu) = \int_0^{\infty} f(t)\cos 2\pi\nu t\, dt, \qquad t > 0, \tag{34}$$

$$\Phi_2(\nu) = \int_0^{\infty} f(t)\sin 2\pi\nu t\, dt, \qquad t > 0; \tag{35}$$

обратные преобразования:

$$f(t) = 4\int_0^{\infty} \Phi_1(\nu)\cos 2\pi\nu t\, d\nu, \qquad t > 0, \tag{36}$$

$$f(t) = 4\int_0^{\infty} \Phi_2(\nu)\sin 2\pi\nu t\, d\nu, \qquad t > 0. \tag{37}$$

Преобразование Фурье в случае двух переменных. Преобразование Фурье легко обобщается на функции нескольких переменных. Приведем формулы для случая двух переменных. Они представляют собой обобщение формул (20) и (21):

$$f(t, s) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \psi)\, e^{j(\omega t + \psi s)}\, d\omega\, d\psi, \tag{38}$$

$$G(\omega, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, e^{-j(\omega t + \psi s)}\, dt\, ds. \tag{39}$$

*) Здесь $\Phi(x)$ — функция вероятности ошибок. Она рассмотрена в п. 7.3.1.

Полагая $\omega = 2\pi\nu$, $\psi = 2\pi\mu$, $\Phi(\nu, \mu) = 4\pi^2 G(2\pi\nu, 2\pi\mu)$, получаем формулы, аналогичные (26) и (27):

$$f(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\nu, \mu)\, e^{2\pi j(\nu t + \mu s)}\, d\nu\, d\mu, \tag{40}$$

$$\Phi(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s)\, e^{-2\pi j(\nu t + \mu s)}\, dt\, ds. \tag{41}$$

Соображения о симметрии, которые мы приводили раньше в отношении одномерного преобразования, могут быть повторены и здесь в отношении переменных t, ν, с одной стороны, и s, μ — с другой.

2.2.9. Физическая реальность интеграла Фурье. Многочисленные авторы отрицали физическую реальность интеграла Фурье, опираясь на следующие соображения.

Рассмотрим лампу, зажженную в момент времени $t = 0$. Излучение этого источника света, равное нулю при $t < 0$ и ставшее постоянным при $t > 0$, представляет собой функцию времени, которую можно заменить ее разложением в интеграл Фурье. Следовательно, можно рассматривать свет, излучаемый источником, как бесконечное число частот, проходящих весь спектр и существующих от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Предположим, что в момент $t < 0$ мы наблюдаем источник света через цветное стекло. Невероятно, чтобы наложение частот, дающее результат, равный нулю при $t < 0$, продолжало давать тот же результат после исключения одной или нескольких полос частот при случайном выборе фильтра. Следовательно, можно увидеть свет прежде, чем мы зажжем лампу, если смотреть на нее сквозь цветной фильтр. Этот явно нелепый результат приводил некоторых авторов к отрицанию физической реальности интеграла Фурье.

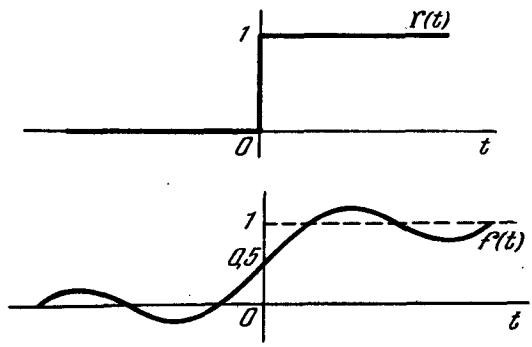


Рис. 2.24.

Приведенное рассуждение неверно. Мы проделаем его заново для случая электрического фильтра, что позволит отчетливо выявить сделанное при этом ошибочное предположение.

Имеется электрическое возмущение, равное единичной функции $\Upsilon(t)$. Оно приложено к зажимам низкочастотного фильтра, который пропускает без ослабления частоты только ниже $2\pi\omega_0$. На выходе фильтра снимают электродвижущую силу

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Si} \omega_0 t,$$

где через Si обозначен интегральный синус (см. п. 7.2.1).

На рис. 2.24 показана единичная функция $\Upsilon(t)$ и „обрезанная" кривая $f(t)$, т. е. $f(t)$ при конечном ω_0. Так же как и в оптической задаче, оказывается, что напряжение возникает здесь до момента приложения электродвижущей силы — следствие опережает причину. Мы снова приходим к парадоксу, о котором говорили выше.

Но кроме гипотезы „интеграл Фурье имеет физический смысл" мы, написав

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}\omega_0 t$$

или, что то же самое,

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0}\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}\,d\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}\omega_0(t-t_0),$$

сделали еще одно предположение: существуют фильтры с бесконечным ослаблением вне полосы пропускания, такие, что изменение фазы либо равно нулю, либо является линейной функцией ω внутри полосы пропускания (рис. 2.25). Однако это предположение неверно.

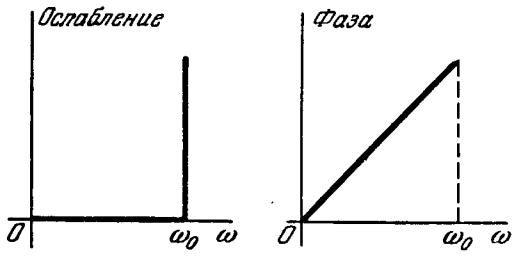


Рис. 2.25.

Фильтр, характеристики которого даны на рис. 2.25, называется идеальным. В отличие от идеального трансформатора, к которому можно заставить асимптотически приближаться реальную физическую систему, идеальный фильтр невозможен, это физический абсурд. Одна из лучших демонстраций этого абсурда — рассуждение, приведенное в начале данного пункта.

Можно показать, что для реально осуществимого фильтра функция, представляющая ослабление, и функция, представляющая изменение по фазе, не независимы. В частности, обе функции, изображенные на рис. 2.25, несовместны.

Итак, если приложить к фильтру, о котором уже говорилось, электродвижущую силу, представляемую единичной функцией, то мы обязательно получим напряжение, начинающееся в момент времени $t\geqslant 0$ (рис. 2.26).

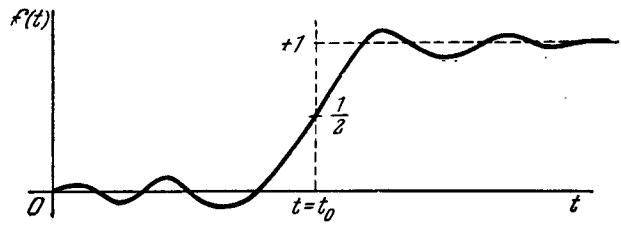


Рис. 2.26.

Иначе говоря, изменения фазы $\varphi(\omega)$ и амплитуды $A(\omega)$, введенные прохождением сигнала, имеющего характер единичной функции, через низкочастотный фильтр, таковы, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\omega)\frac{\sin[\omega t+\varphi(\omega)]}{\omega}\,d\omega=0\quad\text{при}\quad t<0.$$

Верхний предел интеграла — бесконечность, так как функция $A(\omega)$ не может быть строго равна нулю, а может быть только близка к нулю при значениях $\omega>\omega_0$.

Соображения, изложенные выше, приложимы и к оптическим примерам, хотя конкретный анализ здесь часто весьма сложен *).

Добавим к сказанному, что, вообще говоря, можно осуществить фильтр с характеристиками, указанными на рис. 2.25, если собрать его из бесконечного числа элементов. Распространение возмущения в нем будет длиться бесконечно долго. В этом случае напряжение на выходе не сможет появиться раньше приложения на входе электродвижущей силы.

2.2.10. Изучение диаграмм направленности. Кроме применения к изучению переходных режимов электрических цепей, преобразование Фурье очень полезно при расчете диаграмм направленности излучателей радиоволн.

Рассмотрим излучающую рупорную антенну с плоским раструбом, поверхность которого равна S (рис. 2.27). Положим, что вектор излучающего электромагнитного поля в раструбе имеет постоянное направление и фазу. Тогда в плоскости раструба поле характеризуется скалярной функцией $E(x, y)$ координат точки по отношению к двум прямоугольным осям Ox, Oy, расположенным в плоскости раструба. Пусть Oz — нормаль, а P — весьма удаленная точка в направлении OP, которое определяется двумя углами α и β. Напряженность результирующего электрического поля в точке P обратно пропорциональна расстоянию OP.

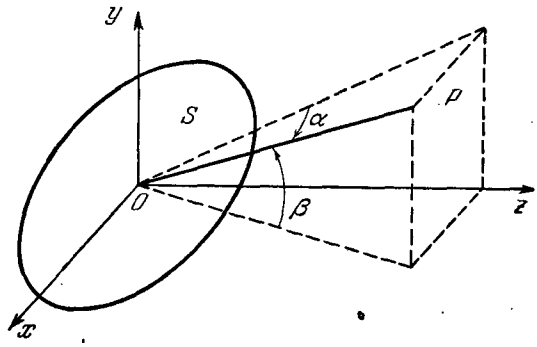


Рис. 2.27.

Произведение напряженности на это расстояние зависит только от направления, т. е. от углов α и β. Можно получить диаграмму направленности излучателя радиоволн, если отложить в направлении OP отрезок, пропорциональный этому произведению. Величина отрезка в тех направлениях, где можно пренебречь членами порядка α^3 и β^3, равна функции ρ, определяемой по формуле [1]):

$$\rho\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda}, \frac{\sin\beta}{\lambda}\right) = \int_S \int \frac{E(x, y)}{\lambda} e^{2\pi j \frac{x\sin\alpha + y\sin\beta}{\lambda}} dx\, dy.$$

Так как поле вне области S равно нулю, то можно распространить двойное интегрирование на всю плоскость xOy. Тогда, считая, что

$$\nu = -\frac{\sin\alpha}{\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{и} \quad \mu = -\frac{\sin\beta}{\lambda} = -\frac{\beta}{\lambda},$$

мы видим, что диаграмма направленности описывается преобразованием Фурье функции $E(x, y)$ (см. формулу (41)). И наоборот, если требуется получить

*) В оптических задачах рассмотренный парадокс свидетельствует о том, что имеется тесная связь между коэффициентом преломления, определяющим набег фазы, и коэффициентом поглощения. Формулы связи были найдены в 1928 г. Р. Кронигом и Г. Крамерсом в виде соотношений, связывающих вещественную и мнимую части диэлектрической постоянной. Они называются дисперсионными соотношениями (см. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957).

В последние годы дисперсионные соотношения стали широко использоваться при изучении взаимодействия элементарных частиц.

[1]) G. Goudet, Les ondes électromagnétiques centimétriques, Paris, 1948, p. 154.

заданную диаграмму направленности, то распределение амплитуд в области S можно получить с помощью обратного преобразования Фурье.

Пример. Положим, что поле у прямоугольного отверстия излучающей рупорной антенны постоянно. Возьмем точку O в центре прямоугольника и оси Ox и Oy, соответственно параллельные сторонам прямоугольника с длиной a и b. Тогда непосредственно получаем

$$\rho\left(\frac{\sin\alpha}{\lambda}, \frac{\sin\beta}{\lambda}\right) = \frac{Eab}{\lambda} \frac{\sin\frac{\pi a \sin\alpha}{\lambda} \sin\frac{\pi b \sin\beta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin\alpha}{\lambda} \frac{\pi b \sin\beta}{\lambda}},$$

откуда диаграммы в плоскостях xOz и yOz будут соответственно описываться формулами

$$\frac{Eab}{\lambda}\frac{\sin u}{u}, \quad \frac{Eab}{\lambda}\frac{\sin\nu}{\nu},$$

где

$$u = \frac{\pi a \sin\alpha}{\lambda}, \quad \nu = \frac{\pi b \sin\beta}{\lambda}.$$

Направления нулевого излучения в этих плоскостях получаются из формул

$$u = K\pi, \quad \nu = N\pi \qquad (K, N \text{ — целые числа } \neq 0),$$

иначе говоря,

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{a}K, \quad \sin\beta = \frac{\lambda}{b}N$$

или же, поскольку синус приближенно равен дуге, $\alpha = \frac{\lambda}{a}K$, $\beta = \frac{\lambda}{b}N$.

Замечание. В большом количестве случаев раструбы излучающих рупорных антенн прямоугольны, как в рассмотренном примере; кроме того, E не зависит от координаты y, а только от координаты x. Тогда диаграмма излучения в плоскости xOy получается из формул (26) и (27) преобразования Фурье с одной переменной [1]).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ II

1. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального интегрального исчисления т. III, Физматгиз, 1960.
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II. Физматгиз, 1962.
3. Толстов Г. П., Ряды Фурье, Физматгиз, 1960.

[1]) J. F. Ramsay, Fourier transforms in aerial theory, The Marconi Review, № 83—88.

ГЛАВА III

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Скалярные величины

Величины называются скалярными (скалярами), если они после выбора единицы измерения полностью характеризуются одним числом. Примерами скалярных величин являются угол, поверхность, объем; масса, плотность, электрический заряд, сопротивление, температура.

Следует различать два типа скалярных величин: чистые скаляры и псевдоскаляры.

3.1.1. Чистые скаляры. Чистые скаляры полностью определяются одним числом, не зависящим от выбора осей отсчета. Примером чистых скаляров могут служить температура и масса.

3.1.2. Псевдоскаляры. Как и чистые скаляры, псевдоскаляры определяются с помощью одного числа, абсолютная величина которого не зависит от выбора осей отсчета. Однако знак этого числа зависит от выбора положительных направлений на осях координат *).

Рассмотрим, например, прямоугольный параллелепипед, проекции ребер которого на прямоугольные оси координат соответственно равны a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z. Объем этого параллелепипеда определяется с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

абсолютная величина которого не зависит от выбора прямоугольных осей координат. Однако, если переменить положительное направление на одной из осей координат, то определитель изменит знак. Объем — это псевдоскаляр. Псевдоскалярами являются также угол, площадь, поверхность. Ниже (п. 5.1.8) мы увидим, что псевдоскаляр представляет собой в действительности тензор особого рода.

Векторные величины

3.1.3. Ось. Ось — это бесконечная прямая, на которой выбрано положительное направление. Пусть xx' — такая прямая, а направление от x к x'

*) Иными словами, псевдоскаляры есть величины, которые изменяют знак при переходе от правой системы координат к левой.

Иногда псевдоскалярами называют величины, полностью характеризующиеся одним числом, которое зависит от выбора системы координат (проекция вектора, статический момент и др.), — см., например, [9], стр. 42.

считается положительным. Рассмотрим отрезок AB на этой прямой и положим, что число, измеряющее длину AB, равно a (рис. 3.1). Тогда алгебраическая длина отрезка AB равна a, алгебраическая длина отрезка BA равна $-a$.

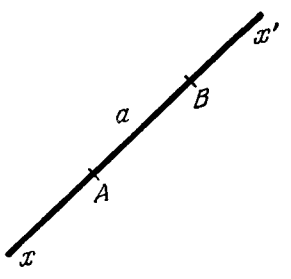


Рис. 3.1.

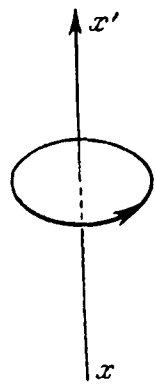


Рис. 3.2.

Если взять несколько параллельных прямых, то, определив положительное направление на одной из них, мы тем самым определяем его на остальных. Иначе обстоит дело, если прямые не параллельны; тогда нужно специально уславливаться относительно выбора положительного направления для каждой прямой.

3.1.4. Направление вращения. Пусть xx' — ось. Вращение относительно оси xx' назовем положительным или прямым, если оно осуществляется для наблюдателя, стоящего вдоль положительного направления оси, справа и налево (рис. 3.2). В противном случае оно называется отрицательным или обратным.

3.1.5. Прямые и обратные трехгранники. Пусть $Oxyz$ — некоторый трехгранник (прямоугольный или непрямоугольный). Положительные направления выбраны на осях соответственно от O к x, от O к y и от O к z.

Рассмотрим вращение вокруг оси Oz полуплоскости xOz, приводящее ее к совмещению с полуплоскостью yOz (угол поворота меньше π). Если при этом направление вращения положительно по отношению к оси Oz, то говорят, что трехгранник $Oxyz$ расположен положительно (рис. 3.3, *а*). В противном случае трехгранник расположен отрицательно (рис. 3.3, *б*).

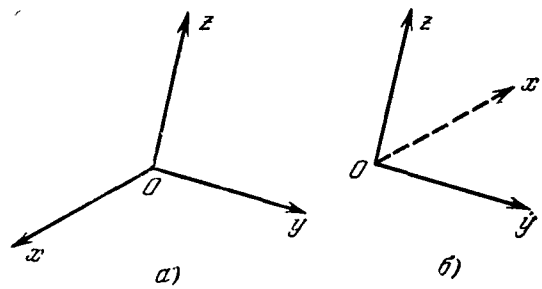


Рис. 3.3.

При определении расположения трехгранника основное значение имеет порядок следования букв x, y, z. Действительно, трехгранники $Oxyz$, $Oyzx$, $Ozxy$ имеют одно расположение, а трехгранники $Oxzy$, $Oyxz$, $Ozyx$ — обратное. Одна перестановка букв x, y, z меняет расположение трехгранника, две перестановки не меняют.

3.1.6. Векторы. Векторная величина зависит от двух элементов разной природы: алгебраического элемента — числа, измеряющего длину (модуль) вектора, и геометрического элемента — направления вектора. Различают три разных типа векторов. Каждый из них объединяет совокупность векторов с одинаковыми свойствами.

Связанный вектор. Для определения связанного вектора $\boldsymbol{AB}$ требуется знать: его линию действия (xx'), направление на этой линии (от x к x'), его начало (A) и неотрицательное число, измеряющее длину a отрезка AB (рис. 3.4.). Это число a называется модулем вектора.

Если поместить вектор $\boldsymbol{AB}$ на уже ориентированную ось, то алгебраическая длина этого вектора равна его модулю, взятому со знаком плюс или

минус, в зависимости от того, имеют ли вектор и ось одинаковое направление или нет.

Скользящий вектор. Определение остается таким же, как и в предыдущем случае, если исключить требование о закреплении начала вектора. Оно может находиться в любой точке оси xx' (рис. 3.5). Силы, рассматриваемые в статической механике, представляют собой скользящие векторы.

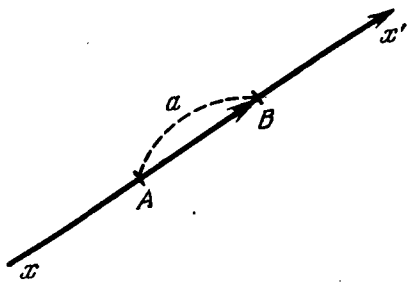


Рис. 3.4.

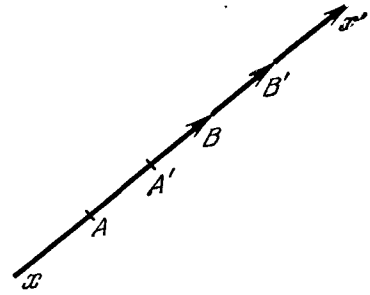


Рис. 3.5.

В самом деле, нельзя нарушить равновесие твердого тела, перемещая точку приложения силы вдоль линии действия этой силы.

Свободный вектор. Такой вектор определяется положительным направлением линии действия и модулем a (рис. 3.6). Два одинаково направленных и равных по длине вектора называются эквиполентными. Свободные векторы равны, если они эквиполентны. Обычно свободный вектор обозначают через $\boldsymbol{a}$.

В начале этой главы мы рассматриваем главным образом свободные векторы, но, когда речь пойдет о векторах поля (п. 3.2.5. и следующие), будут иметься в виду связанные векторы.

Единичный вектор. Это вектор, модуль которого равен единице. Обычно его называют ортом. Орт вектора или оси имеет всегда то же направление, что и рассматриваемый вектор или ось. Единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz обозначаются соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

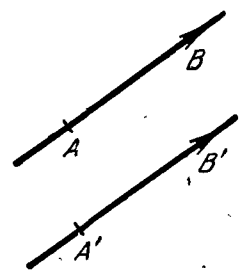


Рис. 3.6.

Полярный вектор. Осевой вектор. Некоторые векторы не зависят от изменения направления, выбранного на осях координат в качестве положительного (например, сила, скорость, вектор электрического поля). Векторы, обладающие указанным свойством, называются полярными.

Другие векторы, напротив, меняют знак, если изменить направление, выбранное на осях координат в качестве положительного. Такие векторы называются осевыми.

Полярные и осевые векторы существенно отличаются друг от друга по своей природе. Лишь полярные векторы являются векторами в чистом виде. Ниже (п. 5.1.10) мы увидим, что осевой вектор представляет собой антисимметричный тензор второго порядка. В случае трехмерного пространства (только такое пространство и рассматривается нами) число составляющих этого тензора равно 3, поэтому его можно принять за вектор. В четырехмерном пространстве этот особый тензор имел бы 6 составляющих, тогда как полярный вектор только 4, т. е. там исключена возможность смешения.

Отсюда следует, что векторное равенство может иметь место либо только между полярными векторами, либо только между осевыми. Если, например, вектор, являющийся первым членом векторного равенства, — осевой, то и второй член этого равенства тоже должен быть осевым вектором. Такая однородность, присущая векторному исчислению, позволяет обнаруживать вычислительные ошибки.

3.1.7. Положительное расположение трех векторов a, b, c. Говорят, что три вектора a, b, c расположены положительно (отрицательно), если расположен положительно (отрицательно) трехгранник, имеющий ребра, параллельные этим векторам, таким же образом ориентированные и взятые в том же порядке.

3.1.8. Угол между двумя векторами a и b. Это угол, не превосходящий π, на который нужно повернуть вектор a, чтобы совместить его с вектором, эквиполентным b, начало которого совпадает с началом вектора a. Он обозначается (a, b).

Операции над векторами

3.1.9. Произведение вектора a на скаляр f. Результат умножения вектора a на скаляр f — это вектор с модулем, равным fa, параллельный вектору a, направленный в ту же сторону, что и a, при положительном f и в противоположную при отрицательном f.

В частности, любой вектор a равен произведению его модуля $|a|$ — скаляра — на орт u направления вектора a, т. е.

$$a = |a|\,u \quad \text{или} \quad a = au. \tag{1}$$

3.1.10. Составляющие вектора. Введем три оси прямоугольных координат и рассмотрим геометрические проекции (компоненты) вектора a на эти оси:

$$a_x,\ a_y,\ a_z.$$

Имеем

$$a = a_x + a_y + a_z. \tag{2}$$

Используя i — орт оси Ox, можем написать $a_x = ia_x$ (a_x — число, измеряющее алгебраическую длину a_x по направлению оси Ox; следовательно, это число положительно, если a_x и i имеют одинаковое направление, и отрицательно в противном случае). Аналогично

$$a_y = ja_y, \qquad a_z = ka_z.$$

Таким образом,

$$a = ia_x + ja_y + ka_z.$$

Числа a_x, a_y, a_z называются составляющими вектора a относительно соответствующих осей координат *).

3.1.11. Сложение векторов. Сумма нескольких векторов a, b, ..., p определяется следующим образом.

Из произвольной точки O проводим вектор OA, эквиполентный вектору a, затем из точки A проводим вектор AB, эквиполентный вектору b, и т. д. до получения точки P — конца вектора, эквиполентного вектору p (рис. 3.7).

*) Числа a_x, a_y, a_z называются также проекциями (алгебраическими проекциями) и координатами вектора относительно соответствующих осей координат.

Вектор $\boldsymbol{OP}$ представляет собой сумму векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{p}$. Эта сумма, очевидно не зависит от выбора точки O. Следовательно, вектор суммы $\boldsymbol{s}$ также представляет собой свободный вектор.

Векторное сложение записывается в виде

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\ \ldots\ +\boldsymbol{p}. \qquad (3)$$

Из геометрического определения суммы векторов непосредственно следует, что эта операция коммутативна, т. е.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

и ассоциативна, т. е.

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

Составляющая по оси Ox вектора суммы $\boldsymbol{s}$ векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{p}$ равна сумме составляющих этих векторов относительно той же оси:

$$s_x=a_x+b_x+\ \ldots\ +p_x.$$

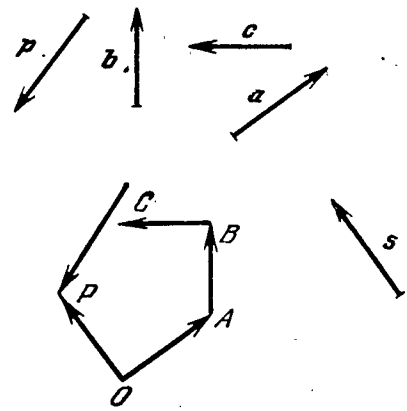


Рис. 3.7.

3.1.12. Скалярное произведение. Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — это число, равное произведению трех величин a, b и $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; оно обозначается через $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

Легко заметить, что скалярное произведение коммутативно: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ и дистрибутивно: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

Вопрос об ассоциативности скалярного произведения отпадает, так как формула $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ не имеет смысла; кроме того, очевидно, неверно равенство $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

Замечание 1. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы ортогональны. Действительно, $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$; следовательно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$.

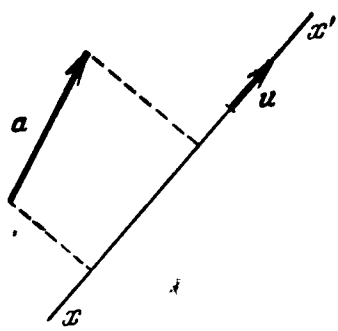


Рис. 3.8.

Замечание 2. Пусть xx' — ориентированная ось, а $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор этой оси (рис. 3.8). Тогда скалярное произведение любого вектора $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{u}$ равно проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на ось xx':

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=a\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}). \qquad (4)$$

Замечание 3. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля этого вектора:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2.$$

Замечание 4. Если через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ обозначить единичные векторы осей координат, то

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

Скалярное произведение в декартовых координатах. Пусть a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z — соответственно проекции на оси Ox, Oy, Oz векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Имеем

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}).$$

Учитывая дистрибутивность скалярного произведения и замечание 4, получим

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{5}$$

Замечание 5. Используя формулу (5) и определение скалярного произведения, получим выражение для косинуса угла между двумя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ через проекции этих векторов:

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3.1.13. Векторное произведение. Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ называют вектор $\boldsymbol{c}$, длина которого равна $ab\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и который перпендикулярен обоим векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ расположены положительно.

Векторное произведение обозначают так: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

Замечание. Если ни один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не равен нулю, то выражение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ означает, что линии действия векторов параллельны, так как $\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Модуль вектора $\boldsymbol{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах, эквиполентных $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проведенных через любую точку O пространства.

Это замечание позволяет дать более наглядное определение векторного произведения. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два вектора. Проведем через точку O векторы $\boldsymbol{OA}$ и $\boldsymbol{OB}$, эквиполентные $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 3.9). Тогда векторное произведение $\boldsymbol{c}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будет определяться следующим образом.

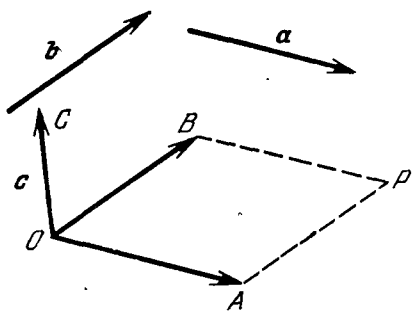


Рис. 3.9.

Модуль вектора $\boldsymbol{c}$ равен числу, измеряющему площадь параллелограмма $OAPB$. Линия действия этого вектора перпендикулярна плоскости OAB, а направление его таково, что поворот на угол, не превышающий π, совмещающий $\boldsymbol{OA}$ с $\boldsymbol{OB}$, происходит в положительном относительно $\boldsymbol{c}$ направлении.

Использование векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{OA}$ и $\boldsymbol{OB}$ позволяет легко определить алгебраическую площадь треугольника OAB. Ориентируем плоскость OAB, иначе говоря, выберем в этой плоскости положительное направление вращения. Алгебраическая площадь треугольника OAB равна половине алгебраической длины векторного произведения $\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{OB}$, отсчитанной вдоль оси, перпендикулярной плоскости OAB и ориентированной таким образом, чтобы выбранное направление вращения было для нее положительным (см. п. 3.1.4).

Векторное произведение в декартовых координатах. Так как вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ перпендикулярен плоскости AOB, а модуль его равен площади параллелограмма $OAPB$, то проекция векторного произведения $\boldsymbol{c}$ на Ox равна площади проекции параллелограмма на Oyz. Следовательно,

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y.$$

По аналогии находим

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z,$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

т. е.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\boldsymbol{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\boldsymbol{k}(a_xb_y-a_yb_x). \tag{6}$$

Это выражение можно записать в более симметричной форме:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Перечислим основные свойства векторного произведения.

Эта операция антикоммутативна, т. е. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. В самом деле, обе тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ образуют противоположно расположенные трехгранники (см. п. 3.1.5).

Далее, векторное произведение не ассоциативно. Действительно, равенство $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, вообще говоря, неверно, так как направления векторов, записанных в левой и правой частях этого соотношения, отличаются друг от друга. Однако векторное произведение — операция дистрибутивная, т. е. справедлива формула

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Эта формула равносильна соотношению

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Векторные произведения ортов координатных осей соответственно равны: $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

Замечание 2. Момент вектора $\boldsymbol{a}$ относительно точки O равен векторному произведению $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$. Здесь $\boldsymbol{r}$ — вектор, имеющий начало в точке O, а конец — в любой точке на линии действия вектора $\boldsymbol{a}$.

3.1.14. Смешанное произведение трех векторов. Смешанным произведением трех векторов называется скаляр

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

Применяя формулы для скалярного и векторного произведений в декартовых координатах, получаем

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(b_yc_z-b_zc_y)\,a_x+(b_zc_x-b_xc_z)\,a_y+(b_xc_y-b_yc_x)\,a_z,$$

т. е.

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Мы видим, что смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на трех векторах $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}$ (с общим началом в точке O), эквиполентных векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Объем положителен или отрицателен в зависимости от того, положительно или отрицательно расположены эти три вектора. Следовательно, роль векторов, составляющих смешанное произведение, совершенно одинакова и

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

Первая строка показывает, что при круговой перестановке векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ их смешанное произведение не меняется, вторая — что можно менять местами знаки скалярного и векторного произведений. Последнее обстоятельство служит обоснованием для упрощения обозначения смешанного произведения: оно записывается в виде $(\boldsymbol{abc})$ или $\boldsymbol{abc}$.

3.1.15. Двойное векторное произведение трех векторов. Двойное векторное произведение трех векторов выражается формулой

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}. \tag{9}$$

В самом деле, например, проекции на ось Ox векторов левой и правой части этой формулы соответственно равны

$$a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z),$$
$$(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z)\,b_x - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\,c_x.$$

Легко проверить тождественность этих двух выражений.

Используя формулу (9) и правила перестановки векторов, составляющих смешанное произведение, получим

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}), \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{acd}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bcd}). \tag{11}$$

3.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

Дифференцирование

3.2.1. Производная вектора. Производная точки. Допустим, что каждому значению переменной t соответствует определенный вектор $\boldsymbol{a}$. В таком случае говорят, что этот вектор является функцией переменной t и записывают его в виде $\boldsymbol{a}(t)$. Дадим переменной t приращение Δt и рассмотрим вектор $\Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t + \Delta t) - \boldsymbol{a}(t)$. Если при Δt, стремящемся к нулю, модуль вектора $\Delta\boldsymbol{a}$ стремится к нулю, то $\boldsymbol{a}(t)$ есть непрерывная функция от t. Предел вектора $\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}$ называется производной вектора $\boldsymbol{a}(t)$ по t.

Производная вектора $\boldsymbol{a}(t)$ обозначается через $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ или $\boldsymbol{a}'(t)$. Она равна $\boldsymbol{i}\frac{da_x}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{da_y}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{da_z}{dt}$. Аналогично определяется вторая производная вектора и т. д.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ зависит от нескольких переменных τ, θ, ..., то можно также определить частные производные $\boldsymbol{a}$ различных порядков.

Если каждому значению переменной t соответствует точка пространства M, то говорят, что точка M есть функция от t. Для наглядности запишем ее в виде $M(t)$. Придадим переменной t приращение Δt и рассмотрим вектор

$$\Delta\boldsymbol{M} = M(t + \Delta t) - M(t)\ *).$$

Если при Δt, стремящемся к нулю, модуль этого вектора тоже стремится к нулю, то $M(t)$ есть непрерывная функция от t. Предел вектора $\frac{\Delta\boldsymbol{M}}{\Delta t}$

*) Здесь использована запись, введенная Грассманом: вектор $\boldsymbol{AB}$ обозначается с помощью выражения $B - A$.

называется производной точки $M(t)$ по t:

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Используя определение производной первого порядка, можно определить производные точки M высших порядков. Если точка M является функцией нескольких независимых переменных, то для нее определяются также и частные производные.

Замечание. Понятие производной точки сводится к понятию производной вектора. Для этого достаточно зафиксировать любую точку O. Производная точки $M(t)$ представляет собой производную вектора $\boldsymbol{OM}$.

3.2.2. Производная вектора по другому вектору. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Производной вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$ называется вектор

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z} b_z, \tag{12}$$

который обозначают через

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}}.$$

Проекции этого вектора на оси Ox, Oy, Oz соответственно равны:

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z,$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z,$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z.$$

3.2.3. Основные формулы дифференцирования.

Производная суммы. Пусть

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{p}.$$

Очевидно,

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' + \ldots + \boldsymbol{p}'.$$

Производная произведения вектора на число. Пусть

$$\boldsymbol{b} = n\boldsymbol{a}.$$

Очевидно,

$$\boldsymbol{b}' = n\boldsymbol{a}'.$$

Следовательно, если n, m, ..., g — числа, то производная вектора

$$\boldsymbol{u} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} + \ldots + g\boldsymbol{p}$$

равна

$$\boldsymbol{u}' = n\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{b}' + \ldots + g\boldsymbol{p}'. \tag{13}$$

Производная произведения векторной и скалярной функций. Пусть $f(t)$ и $\boldsymbol{a}(t)$ — скалярная и векторная функции от t и $\boldsymbol{u} = f\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t} = \frac{(f + \Delta f)(\boldsymbol{a} + \Delta \boldsymbol{a}) - f\boldsymbol{a}}{\Delta t} = f \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t} + \boldsymbol{a} \frac{\Delta f}{\Delta t} + \frac{\Delta \boldsymbol{a}\, \Delta f}{\Delta t}.$$

В пределе получим

$$\boldsymbol{u}' = f\boldsymbol{a} + f'\boldsymbol{a}. \tag{14}$$

Производная скалярного произведения. Пусть $\boldsymbol{a}(t)$ и $\boldsymbol{b}(t)$ — две векторные функции и $f=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ — их скалярное произведение. Рассмотрим

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\Delta t}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}+\boldsymbol{b}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{a}\cdot\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, имеем

$$f'=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}. \tag{15}$$

Производная векторного произведения. Аналогично предыдущему получим, что производная векторного произведения $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ равна

$$\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}. \tag{16}$$

В этой формуле следует внимательно следить за порядком множителей, так как $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}$.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольный переменный вектор. Тогда

$$|\boldsymbol{a}|'=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Для вывода этой формулы достаточно продифференцировать тождество $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

Теорема 2. Если переменный вектор $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет равенству $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'=0$, то он параллелен одному и тому же направлению.

Дифференцируя отношение $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, получаем $\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}'-|\boldsymbol{a}|'\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$; но $|\boldsymbol{a}|'=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}'}{|\boldsymbol{a}|}$, и, учитывая (9), имеем

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)'=\frac{|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{a}'-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}')\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^3}=\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}')\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^3}.$$

Согласно предположению правая часть равенства равна нулю и, значит,

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\text{const}.$$

Следовательно, орт направления $\boldsymbol{a}$ постоянен, т. е. направление переменного вектора $\boldsymbol{a}$ неизменно.

3.2.4. Интеграл от вектора. Дан переменный вектор $\boldsymbol{a}(t)$:

$$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z.$$

Обозначая через t_0 и t_1 два значения t, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{a}(t)\,dt=\boldsymbol{i}\int_{t_0}^{t_1}a_x\,dt+\boldsymbol{j}\int_{t_0}^{t_1}a_y\,dt+\boldsymbol{k}\int_{t_0}^{t_1}a_z\,dt.$$

Функции точки

В математической физике часто рассматривается величина, которая зависит не только от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z, но и еще от какой-либо другой переменной, в большинстве случаев от времени. Если рассматриваемая величина является числом (вектором), то принято говорить, что речь идет о скалярной (векторной) функции точки. В этих случаях говорят также, что в рассматриваемой области пространства задано скалярное или векторное поле.

Например, плотность заряда в различных точках изолированного наэлектризованного тела представляет собой скалярную функцию точки;

электрическое поле, которое создается этими зарядами в различных точках тела, представляет собой векторную функцию точки. Электрические заряды создают скалярное поле плотности и векторное поле электрических сил. Если электрические заряды изменяются в зависимости от времени, то скалярное и векторное поля являются не только функциями координат рассматриваемой точки, но также и функциями времени.

Наиболее важные поля характеризуют следующие три функции:

1) градиент — векторная функция, аргументом которой является скалярная функция точки;

2) дивергенция — скалярная функция, аргументом которой является векторная функция точки;

3) вихрь — векторная функция, аргументом которой является векторная функция точки.

3.2.5. Градиент. Дана скалярная функция $f(x, y, z)$. Градиентом этой функции называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Он обозначается через $\operatorname{grad} f$. Следовательно, согласно определению можно написать

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{17}$$

Пусть $M(x, y, z)$ и $M + dM$ — бесконечно близкие точки поверхности S (рис. 3.10). Скалярное произведение $\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M}$ равно df. Действительно

$$\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df. \tag{18}$$

Отношение $\frac{df}{|dM|}$ называется производной скалярной функции f в точке M по направлению $d\boldsymbol{M}$. Формула $\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = df$ показывает, что эта

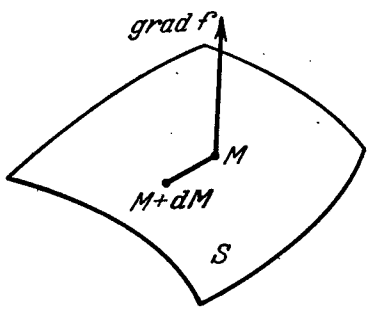


Рис. 3.10.

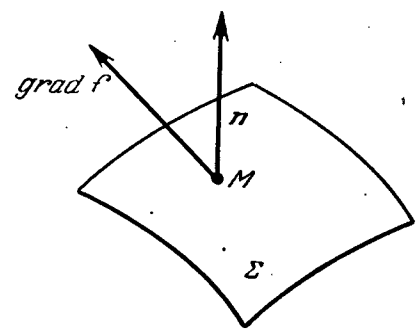


Рис. 3.11.

производная равна проекции вектора $\operatorname{grad} f$ на направление $d\boldsymbol{M}$, так как

$$\frac{df}{|dM|} = \frac{d\boldsymbol{M}}{|dM|} \cdot \operatorname{grad} f.$$

3.2.6. Нормальная производная. Рассмотрим нормаль в точке M к некоторой поверхности Σ, проходящей через эту точку (рис. 3.11). Производная от f в точке M по направлению нормали называется нормальной производной от f для поверхности Σ. Если $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, то эта производная равна $\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{n}$, т. е. проекции вектора $\operatorname{grad} f$ на нормаль $\boldsymbol{n}$.

3.2.7. Поверхности уровня. Поверхности уровня определяются равенством $f(x, y, z) = \text{const}$. Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

Оно геометрически представляет одну поверхность, если функция $f(x, y, z)$ однозначна, что почти всегда и встречается в физике. Вектор $\operatorname{grad} f$ в каждой точке нормален к рассматриваемой поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Действительно, формула (18) при любом перемещении $d\boldsymbol{M}$ точки M дает $\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = df$. Так как на поверхности уровня f неизменно, то при любом перемещении $d\boldsymbol{M}$ точки M по этой поверхности $df = 0$. Аналогичное заключение можно сделать в случае, когда точка M перемещается по касательной плоскости, проведенной к поверхности уровня в этой точке. Следовательно, $d\boldsymbol{M}$ и $\operatorname{grad} f$ перпендикулярны друг другу. Так как вектор $d\boldsymbol{M}$ — произвольный вектор на касательной плоскости, проведенной в точке M к поверхности уровня, то высказанное утверждение доказано.

3.2.8. Смысл вектора $\operatorname{grad} f$. Вектор $\operatorname{grad} f$ полностью описывает поведение функции f в окрестности рассматриваемой точки M. В частности, самое быстрое изменение f происходит при перемещении по нормали к поверхности уровня. Это максимальное изменение определяется по величине и направлению вектором $\operatorname{grad} f$.

Для того чтобы представить поле вектора $\operatorname{grad} f$, построим поверхности уровня

$$f(x, y, z) = kc,$$

где $k = 1, 2, \ldots$, а c — достаточно малая постоянная.

Рассмотрим две поверхности уровня S_1 и S_2, соответствующие двум значениям k: n и $n+1$. Пусть M — точка поверхности S_1 и d — расстояние от M до S_2. Вектор $\operatorname{grad} f$ будет в точке M нормален к S_1, направлен в сторону возрастающих f и по модулю приближенно равен $\frac{c}{d}$. Следовательно, $|\operatorname{grad} f|$ будет тем больше, чем ближе друг к другу рассматриваемые поверхности.

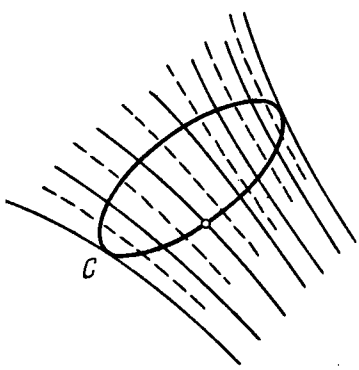


Рис. 3.12.

Замечание. Как показывает формула $\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = df$, вектор $\operatorname{grad} f$ не зависит от выбора осей (см. также п. 3.3.7).

3.2.9. Силовые линии. Кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора $\operatorname{grad} f$, соответствующего этой точке, называется силовой линией. Векторное уравнение силовой линии: $\operatorname{grad} f \times d\boldsymbol{M} = 0$. Ее скалярные уравнения:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{dy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{dz}.$$

Следовательно, силовые линии представляют собой ортогональные траектории к поверхностям уровня:

$$f(x, y, z) = \text{const}.$$

Силовая трубка — это поверхность, описанная силовой линией, перемещающейся вдоль замкнутого контура C (рис. 3.12).

3.2.10. Градиент сложной скалярной функции. Если скалярная функция $f(m, n, \ldots)$ является функцией нескольких скаляров m, n, ..., которые сами представляют собой функции координат x, y, z, то имеет место формула:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial m}\operatorname{grad} m + \frac{\partial f}{\partial n}\operatorname{grad} n + \ldots. \tag{19}$$

Действительно,

$$\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = df = \frac{\partial f}{\partial m}\,dm + \frac{\partial f}{\partial n}\,dn + \ldots,$$

но

$$dm = \operatorname{grad} m \cdot d\boldsymbol{M}, \quad dn = \operatorname{grad} n \cdot d\boldsymbol{M}.$$

Отсюда в силу произвольности вектора $d\boldsymbol{M}$ вытекает справедливость формулы (19).

Сравнив эту формулу с формулой для полного дифференциала $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$, убедимся, что знак grad ведет себя точно так же, как знак дифференциала.

Применяя формулу (19) к функциям $f(m, n) = m + n$ и $f(m, n) = mn$, получим

$$\operatorname{grad}(m + n) = \operatorname{grad} m + \operatorname{grad} n,$$

$$\operatorname{grad} mn = m \operatorname{grad} n + n \operatorname{grad} m.$$

Далее, из соотношения $\operatorname{grad} f \cdot d\boldsymbol{M} = df$ следует, что уравнение

$$\operatorname{grad} m = \operatorname{grad} n$$

равносильно уравнению

$$m = n + \text{const}.$$

3.2.11. Дивергенция и вихрь. Дана векторная функция $\boldsymbol{a}$ точки $M(x, y, z)$. Пусть a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на соответствующие оси координат.

Дивергенция. Дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$ — это скалярная величина

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{20}$$

Вихрь. Вихрь вектора $\boldsymbol{a}$ — это векторная величина

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{21}$$

Следовательно, проекции вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ [1]) равны:

$$\text{на ось } Ox: \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},$$

$$\text{на ось } Oy: \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\text{на ось } Oz: \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Замечание. Дивергенция представима в виде суммы следующих скалярных произведений:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}.$$

[1]) Иногда вместо $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ пишут $\operatorname{curl} \boldsymbol{a}$.

Вихрь представим в виде суммы следующих векторных произведений:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}. \tag{22}$$

3.2.12. Оператор Лапласа. Оператором Лапласа (лапласианом) называют

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если применить его к скалярной функции, то

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Название оператора происходит от уравнения Лапласа, которое записывается в виде $\Delta f = 0$.

Применим оператор Лапласа к вектору $\boldsymbol{a}$. Имеем

$$\Delta \boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial z^2}.$$

Так как

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} a_x + \boldsymbol{j} a_y + \boldsymbol{k} a_z,$$

то для вектора $\Delta \boldsymbol{a}$ получаем следующее выражение:

$$\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\, \Delta a_x + \boldsymbol{j}\, \Delta a_y + \boldsymbol{k}\, \Delta a_z.$$

3.2.13. Символический вектор набла (оператор Гамильтона). Оператором Гамильтона называют векторный оператор

$$\nabla = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя его к скаляру f, получаем *)

$$\nabla f = \boldsymbol{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{grad} f. \tag{23}$$

Скалярное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$ равно:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}. \tag{24}$$

Векторное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$ равно:

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a}. \tag{25}$$

Поэтому для функций $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ часто используются следующие обозначения:

$$\nabla f, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{a}, \quad \nabla \times \boldsymbol{a}.$$

Аналогично получаем

$$\Delta f = \nabla^2 f, \quad \Delta a = \nabla^2 \boldsymbol{a},$$

где скалярный оператор $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ обозначен через Δ.

*) При выполнении действий по правилам, установленным ранее для обычных скаляров и векторов, под „произведением" символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на скаляр (x, y, z) будем понимать соответственно скаляры $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Далее, выражение (12) для производной вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{b}$ можно переписать в виде

$$\left\{b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z}\right\} \boldsymbol{a},$$

т. е.

$$(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{a}.$$

При расчетах следует помнить, что символический вектор ∇ обладает не только свойствами вектора. В самом деле, рассмотрим произведение

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Применяя к нему формулу (9), получим

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a} - (\nabla \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}$$

или, возвращаясь к обычным обозначениям,

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a},$$

а это неверно.

Если применить ту же самую формулу (9) к произведению

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}),$$

то получим

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\, \boldsymbol{a}$$

или в обычных обозначениях

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}.$$

Эта формула верна (см. п. 3.2.14).

Неправильность первого результата объясняется тем, что вектор ∇, кроме векторных свойств, обладает также дифференциальными свойствами, которые не проявлялись, пока нужно было умножать на вектор ∇ какое-либо число, вектор или линейную комбинацию векторов, однако проявились при умножении на вектор ∇ произведения векторов *).

Действительно, рассмотрим снова произведение $\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$. Согласно формуле (22) имеем

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{j} \times \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

или, ограничиваясь записью только первого члена,

$$\boldsymbol{i} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} \times \boldsymbol{b}\right) + \boldsymbol{i} \times \left(\boldsymbol{a} \times \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right) + \ldots$$

Применим теперь формулу (9):

$$(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{b}) \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} - \left(\boldsymbol{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right) \boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right) \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{a}) \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x} + \ldots$$

*) Встреченные затруднения можно обойти, если ввести дополнительное ограничение при использовании символического вектора ∇ (см., например, [4]). В этом случае с помощью ∇ можно получить все приведенные ниже формулы для векторных и скалярных функций точки.

Далее получаем последовательно:

$$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{b})\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+\ldots=\left\{b_x\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right\}\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a},$$

$$\left(\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right)\boldsymbol{b}+\ldots=\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}),$$

$$\left(\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right)\boldsymbol{a}+\ldots=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{a})\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+\ldots=\left\{a_x\frac{\partial}{\partial x}+\ldots\right\}\boldsymbol{b}=\frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b},$$

откуда

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

или в обычных обозначениях

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}}-\frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}}.$$

Справедливость этого результата мы проверим в следующем пункте.

3.2.14. Наиболее употребительные формулы.

Градиент скалярного произведения.

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}}+\frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}}. \tag{26}$$

Проекция левой части формулы (26) на ось Ox равна

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}b_x+\frac{\partial a_y}{\partial x}b_y+\frac{\partial a_z}{\partial x}b_z+\frac{\partial b_x}{\partial x}a_x+\frac{\partial b_y}{\partial x}a_y+\frac{\partial b_z}{\partial x}a_z.$$

Проекция правой части формулы (26) на ось Ox равна

$$a_y\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-$$

$$-b_z\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial a_x}{\partial x}b_x+\frac{\partial a_x}{\partial y}b_y+\frac{\partial a_x}{\partial z}b_z+\frac{\partial b_x}{\partial x}a_x+\frac{\partial b_x}{\partial y}a_y+\frac{\partial b_x}{\partial z}a_z.$$

Нетрудно убедиться, что полученные выражения для проекций совпадают. То же самое, очевидно, имеет место для проекций на оси Oy и Oz.

Дивергенция произведения скалярной функции на векторную.

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}f+f\operatorname{div}\boldsymbol{a}. \tag{27}$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=\frac{\partial(fa_x)}{\partial x}+\frac{\partial(fa_y)}{\partial y}+\frac{\partial(fa_z)}{\partial z}=$$

$$=f\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+a_x\frac{\partial f}{\partial x}+a_y\frac{\partial f}{\partial y}+a_z\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$=f\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}f.$$

Дивергенция векторного произведения.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}. \tag{28}$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right)+\boldsymbol{j}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial y}\right)+$$

$$+\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z}\right).$$

Учитывая свойства смешанного произведения и формулу (22), получаем

$$\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\times\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\right),$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right)=-\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}\right),$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+\ldots\right)-\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+\ldots\right)=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

Дивергенция градиента.

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\Delta f. \tag{29}$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}=\Delta f.$$

Дивергенция вихря.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})=0. \tag{30}$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0.$$

Дивергенция лапласиана.

$$\operatorname{div}(\Delta\boldsymbol{a})=\Delta(\operatorname{div}\boldsymbol{a}). \tag{31}$$

Действительно,

$$\operatorname{div}(\Delta\boldsymbol{a})=\frac{\partial\Delta a_x}{\partial x}+\frac{\partial\Delta a_y}{\partial y}+\frac{\partial\Delta a_z}{\partial z}.$$

Используя определение Лапласиана, придадим этому выражению следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)=\Delta\operatorname{div}\boldsymbol{a}.$$

Вихрь градиента.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=0. \tag{32}$$

Действительно,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=0.$$

Вихрь произведения скалярной функции на векторную.

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a})=\operatorname{grad} f\times\boldsymbol{a}+f\operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{33}$$

Действительно,

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{a})=\boldsymbol{i}\times\frac{\partial(f\boldsymbol{a})}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial(f\boldsymbol{a})}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial(f\boldsymbol{a})}{\partial z}=$$

$$=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{a}+f\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\right)=$$

$$=\operatorname{grad} f\times\boldsymbol{a}+f\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Вихрь векторного произведения.

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\frac{d\boldsymbol{a}}{d\boldsymbol{b}}-\frac{d\boldsymbol{b}}{d\boldsymbol{a}}. \tag{34}$$

Проекция, например, на ось Ox левой части равенства равна

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_z b_x - a_x b_z).$$

Проекция на ось Ox правой части равенства равна

$$a_x\left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) - b_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) +$$
$$+ \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z - \frac{\partial b_x}{\partial x} a_x - \frac{\partial b_x}{\partial y} b_y - \frac{\partial b_x}{\partial z} b_z.$$

Легко проверить, что обе эти проекции равны.

Вихрь вихря.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}. \tag{35}$$

Проекция на ось Ox вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ равна

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Если $\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, то

$$A_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$
$$A_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}.$$

Следовательно, проекция вектора $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ на ось Ox равна

$$\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \Delta a_x =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{a}) - \Delta a_x.$$

Аналогично доказывается равенство проекций векторов обеих частей формулы (35) на оси Oy и Oz.

3.2.15. Смысл вектора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Рассмотрим вращательное движение материальной точки с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг некоторой оси. Из механики известно, что линейная скорость точки V связана с $\boldsymbol{\omega}$ и радиусом-вектором точки $\boldsymbol{r}$ соотношением

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Перейдем к более общему случаю. Рассмотрим поле скоростей текущей жидкости $\boldsymbol{V}(x, y, z, t)$. Движение малого элемента жидкости складывается из параллельного переноса, поворота как твердого тела и деформаций. Можно показать, что и в этом случае вихрь скорости $\boldsymbol{V}$ равен удвоенной угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ элемента жидкости.

3.2.16. Скалярный потенциал. Любая векторная функция точки M, вихрь которой тождественно равен нулю, может рассматриваться как градиент некоторой скалярной функции точки M.

Действительно, пусть вихрь вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z$ равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}. \tag{36}$$

Введем функции f с помощью соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x. \tag{37}$$

Докажем, что тогда из равенств (36) следует

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Согласно формуле (37)

$$f = \int_0^x a_x\,dx + \varphi(y,\ z), \tag{38}$$

где φ — произвольная функция. Продифференцируем (38) по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial a_x}{\partial y}\,dx + \frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial y}.$$

Учитывая третье равенство из (36), находим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^x \frac{\partial a_y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi(y,\ z)}{dy}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y - a_y\Big|_{x=0} + \frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial y}.$$

Точно так же, дифференцируя равенство (38) по z и применяя второе равенство (36), находим

$$\frac{\partial f}{\partial z} = a_z - a_z\Big|_{x=0} + \frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial z}.$$

Далее, функцию $\varphi(y,\ z)$ можно определить так, что

$$\frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial z} = a_z\Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial y} = a_y\Big|_{x=0}. \tag{*}$$

Действительно, положим

$$\frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial z} = a_z\Big|_{x=0}.$$

Отсюда

$$\varphi(y,\ z) = \int_0^z a_z\Big|_{x=0}\,dz + \psi(y),$$

где $\psi(y)$ — произвольная функция. Дифференцируя по y, имеем

$$\frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial y} = \int_0^z \frac{\partial a_z}{\partial y}\Big|_{x=0}\,dz + \psi'(y).$$

Применяя первое равенство (36), можем написать

$$\frac{\partial \varphi(y,\ z)}{\partial y} = \int_0^z \frac{\partial a_y}{\partial z}\Big|_{x=0}\,dz + \psi'(y),$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = a_y\Big|_{x=0} - a_y\Big|_{\substack{x=0\\z=0}} + \psi'(y).$$

Для доказательства (*) достаточно положить

$$\psi'(y) = a_y\Big|_{\substack{x=0\\z=0}}.$$

Используя (*), получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Таким образом, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, то можно найти такую скалярную функцию f, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z.$$

Обратно, если

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = a_z,$$

то

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0.$$

Это очевидно, так как в рассматриваемом случае $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f$, а согласно формуле (32) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Следовательно, для того чтобы данное векторное поле $\boldsymbol{a}$ являлось градиентом некоторой скалярной величины f, необходимо и достаточно обращение в нуль вихря $\boldsymbol{a}$, т. е. выполнение равенства $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$.

Итак, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, то существует такая скалярная функция $V = -f$, что $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} V$. Если при этом функция V однозначна, то она называется скалярным потенциалом, а про вектор $\boldsymbol{a}$ говорят, что он равен производной от скалярного потенциала V. Из равенства $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} V$ и формулы (29) следует:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = -\Delta V.$$

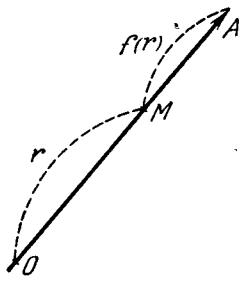


Рис. 3.13.

Такое поле векторов $\boldsymbol{a}$ называется потенциальным, ньютоновым, слоистым или безвихревым. Эти названия напоминают, что поле всемирного тяготения относится к рассматриваемому типу полей, что эти поля могут быть разложены с помощью поверхностей уровня $V = \text{const}$ на слои и что $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Отметим, что стационарное электрическое поле равно производной от скалярного потенциала.

3.2.17. Частный случай: вектор проходит через фиксированную точку. Пусть O — фиксированная и $M(x, y, z)$ — переменная точка (рис. 3.13). Обозначим через r расстояние OM, а через $\boldsymbol{u}$ орт вектора $\boldsymbol{OM}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{u}r.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{MA}$, линия действия которого проходит через точку O. Если его модуль зависит только от расстояния $OM = r$, то мы можем написать

$$\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{u}f(r).$$

Имеем

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \operatorname{grad} r.$$

Далее,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \operatorname{grad} r = \frac{ix+jy+kz}{r} = \frac{OM}{r} = u.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\,u. \tag{39}$$

Вычислим дивергенцию вектора MA. Имеем

$$MA = uf(r) = \frac{OM}{r} f(r).$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} MA = \frac{f(r)}{r} \operatorname{div} OM + OM \cdot \operatorname{grad} \frac{f(r)}{r},$$

но

$$\operatorname{div} OM = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Поэтому, учитывая (39), получаем

$$\operatorname{div} MA = 3\frac{f(r)}{r} + \frac{d}{dr}\left[\frac{f(r)}{r}\right] u \cdot ru,$$

т. е.

$$\operatorname{div} MA = \frac{2}{r} f(r) + f'(r). \tag{40}$$

Пусть $F(r)$ такова, что $F'(r) = f(r)$. Тогда, согласно (39),

$$MA = uf(r) = \operatorname{grad} F(r), \tag{41}$$

т. е. MA является производной от скалярного потенциала $V = -F(r)$. Поэтому

$$\operatorname{rot} MA = 0.$$

3.2.18. Векторный потенциал. Любая векторная функция точки M, для которой дивергенция тождественно равна нулю, может рассматриваться как вихрь некоторого вектора.

Действительно, пусть задан вектор $a = ia_x + ja_y + ka_z$, причем

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0.$$

Отыскание вектора $b = ib_x + jb_y + kb_z$, удовлетворяющего условию $a = \operatorname{rot} b$, сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = a_x, \tag{42}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} = a_y, \tag{43}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z. \tag{44}$$

Таких векторов b существует бесконечно много. Выберем один из них при условии, что $b_z = 0$. В этом случае равенства (42) и (43) переходят в

$$\frac{\partial b_y}{\partial z} = -a_x, \tag{45}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} = a_y. \tag{46}$$

Из равенства (45) получаем

$$b_y = -\int_0^z a_x\,dz + f(x,\ y).$$

В силу последнего соотношения равенство (44) переходит в уравнение относительно b_x:

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = -\int_0^z \frac{\partial a_x}{\partial x}\,dz + f'_x(x,\ y) - a_z. \tag{47}$$

Дифференцируя равенство (46) по y, найдем

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Используя это соотношение и равенство (47), продифференцированное по z, имеем

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\int_0^z \frac{\partial a_x}{\partial x}\,dz + f'_x(x,\ y) - a_z\right]$$

или

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = -\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Эта формула справедлива в силу предположения, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$.

Таким образом, соотношение (44) является следствием формул (45), (46) и уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$. Иначе говоря, равенства (45) и (46) при условии $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ определяют вектор $\boldsymbol{b}$ такой, что $b_z = 0$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Пусть теперь вектор $\boldsymbol{c}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$. Тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{c} - \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$$

или

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = 0,$$

т. е.

$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \operatorname{grad} f.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{c}$ определяется лишь с точностью до градиента произвольной скалярной функции точки M. Это соотношение очевидно, так как к полю векторов $\boldsymbol{c}$, для которых $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$, можно добавить поле любых других векторов с нулевым вихрем. Из бесконечного множества этих векторов выберем вектор, дивергенция которого равна нулю. Обозначим его через $\boldsymbol{v}$. Вектор $\boldsymbol{v}$ можно представить в виде суммы определенного выше вектора $\boldsymbol{b}$ и градиента произвольной скалярной функции f.

Имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b} = \operatorname{grad} f.$$

Из последнего равенства следует

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{b} = \Delta f.$$

Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, то f определяется из уравнения $\Delta f = -\operatorname{div} \boldsymbol{b}$. Итак, если $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, то существует такой вектор $\boldsymbol{v}$, что $\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Вектор $\boldsymbol{v}$ называется векторным потенциалом $\boldsymbol{a}$, а про вектор $\boldsymbol{a}$ говорят.

что он равен производной от векторного потенциала $\boldsymbol{v}$. Вектор $\boldsymbol{a}$, для которого $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$, называется соленоидальным вектором. Поле векторов с нулевой дивергенцией называется соленоидальным или лапласовым (магнитное поле системы токов, элементарные поля которых задаются законом Лапласа, относится к рассмотренному типу полей).

Замечание. Векторный потенциал определяется неоднозначно. В самом деле, рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}+\operatorname{grad}\varphi.$$

Имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}+\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi.$$

Так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$, то $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{a}$ при любом φ. Условие

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1=0$$

выполняется, если $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi=0$. Следовательно, векторный потенциал определяется с точностью до градиента скалярной функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа.

3.2.19. Общий случай векторного поля. Любое векторное поле можно рассматривать как наложение потенциального и соленоидального полей.

Действительно, пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольное векторное поле. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{b}$, вихрь которого равен нулю. Тогда $\boldsymbol{b}=\operatorname{grad}f$; вид скалярной функции f указывается ниже.

Положим $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Выберем вектор $\boldsymbol{b}$ так, чтобы $\operatorname{div}\boldsymbol{c}=0$. Тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{b}=\operatorname{div}\operatorname{grad}f=\Delta f.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{div}\boldsymbol{c}=0$, если $\Delta f=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. Так как $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, а $\operatorname{rot}\boldsymbol{b}=0$, то теорема доказана.

Согласно п. 3.2.16 вектор $\boldsymbol{b}$ равен производной от скалярного потенциала $V=-f$. Вектор $\boldsymbol{c}$ равен производной от векторного потенциала $\boldsymbol{v}$ (см. п. 3.2.18). Таким образом,

$$\boldsymbol{a}=-\operatorname{grad}V+\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

3.3. ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.3.1. Циркуляция вектора. Пусть M — переменная точка дуги AB (рис. 3.14), $\boldsymbol{a}$ — векторная функция точки M.

Циркуляцией вектора $\boldsymbol{a}$ по дуге AB называется значение криволинейного интеграла $\int_A^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{M}$*) (криволинейный интеграл берется от скалярного произведения).

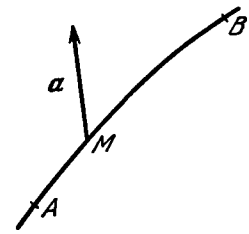


Рис. 3.14.

Если $\boldsymbol{a}$ — сила, то рассматриваемый интеграл представляет собой работу этой силы вдоль дуги AB.

Замечание. Если вектор $\boldsymbol{a}$ равен производной от скалярного потенциала V, то согласно формуле $\operatorname{grad}V\cdot d\boldsymbol{M}=dV$ имеем $\int_A^B \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{M}=V_A-V_B$. В этом случае циркуляция зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования.

*) Обычно циркуляцией называется криволинейный интеграл векторного поля, взятый по замкнутому контуру. Если же контур не замкнут, то этот интеграл называют линейным.

3.3.2. Поток вектора. Пусть S — двухсторонняя поверхность, M — переменная точка на S, $\boldsymbol{a}$ — векторная функция точки M, MN — нормаль к S, на которой выбрано положительное направление, $d\sigma$ — элемент поверхности, окружающий точку M. Обозначим через $d\boldsymbol{\sigma}$ вектор, длина которого равна площади $d\sigma$, а направление совпадает с положительным направлением нормали к этому элементу. Потоком вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S называют двойной интеграл $\int\limits_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ (двойной интеграл берется от скалярного произведения).

Основные формулы

Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем τ, M — переменная точка τ (или на поверхности S), $d\boldsymbol{\sigma}$ — определенный выше вектор, направленный по внешней нормали к поверхности S. Пусть, далее, f — скалярная и $\boldsymbol{a}$ — векторная функции точки M. Предполагается, что они непрерывны вместе со своими первыми производными в любой точке объема τ и его границы S.

Справедливы следующие три формулы, заменяющие тройной интеграл двойным:

1) формула для градиента

$$\int\limits_\tau \operatorname{grad} f \, d\tau = \int\limits_S f \, d\boldsymbol{\sigma};$$

2) формула для дивергенции (теорема Остроградского)

$$\int\limits_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, d\tau = \int\limits_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}; \tag{49}$$

3) формула для вихря *)

$$\int\limits_\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \, d\tau = \int\limits_S d\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{a}.$$

3.3.3. Теорема Остроградского. Теорема Остроградского — это теорема, выраженная формулой (49): интеграл от дивергенции $\boldsymbol{a}$, распространенный на объем τ, равен потоку вектора $\boldsymbol{a}$, направленному по внешней нормали через замкнутую поверхность S, ограничивающую этот объем τ **).

---

*) Используя символический вектор ∇, можно указать удобное для запоминания операторное соотношение, из которого формулы (48) — (50) получаются в виде частных случаев. Это соотношение имеет вид:

$$\int\limits_\tau d\tau \, \nabla = \int\limits_S d\boldsymbol{\sigma}, \quad d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n} \, d\sigma, \tag{*}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к замкнутой поверхности S, ограничивающей объем τ. Формула (48) получается в результате умножения обеих частей (*) на скаляр f, (49) — в результате скалярного умножения на вектор $\boldsymbol{a}$ и (50) — в результате векторного умножения на вектор $\boldsymbol{a}$.

**) Формула Остроградского, строго говоря, верна только для „пространственно" односвязных областей (см. [2], стр. 336).

Левая часть формулы (49) в декартовых координатах имеет вид

$$I=\int_{\tau}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_{\tau}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz+\int_{\tau}\frac{\partial a_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz+\int_{\tau}\frac{\partial a_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\tau}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$. В объеме τ с помощью четырех плоскостей y, $y+dy$, z, $z+dz$ вырежем параллелепипед. На поверхности S указанные плоскости вырезают два криволинейных четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, площади которых обозначим через $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ (рис. 3.15).

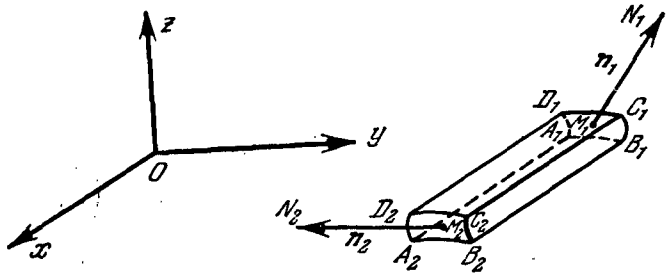


Рис. 3.15.

Пусть M_1 и M_2 — точки этих четырехугольников, M_1N_1 и M_2N_2 — внешние нормали к поверхности S, орты которых соответственно $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

Нормаль M_1N_1 образует с осью Ox тупой угол $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_1)$; нормаль M_2N_2 образует с осью Ox острый угол $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_2)$. Имеем

$$dy\,dz=-\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_1)\,d\sigma_1=\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_2)\,d\sigma_2.$$

Пусть $(a_x)_1$ и $(a_x)_2$ — значения a_x в M_1 и M_2. Интеграл $\int_{\tau}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$, распространенный на элемент объема $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, равен

$$dy\,dz\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx=dy\,dz\,[(a_x)_2-(a_x)_1]=(a_x)_2\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_2)\,d\sigma_2+(a_x)_1\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_1)\,d\sigma_1;$$

но

$$\cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_1)=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}_1,\quad \cos(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}_2)=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}_2.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1 d\sigma_1$ и $\boldsymbol{n}_2 d\sigma_2$ совпадают с векторами $d\boldsymbol{\sigma}_1$ и $d\boldsymbol{\sigma}_2$, введенными в предыдущем пункте, если считать, что направление внешней нормали положительно.

Следовательно, имеем

$$dy\,dz\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx=(a_x)_2\,\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2+(a_x)_1\,\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_1,$$

откуда

$$\int_{\tau}\frac{\partial a_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\int_{S}a_x\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Тройной интеграл распространяется на объем τ, а двойной интеграл на поверхность S.

Повторяя приведенные рассуждения для $\int\limits_\tau \frac{\partial a_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$ и $\int\limits_\tau \frac{\partial a_z}{\partial z}\times$ $\times\, dx\,dy\,dz$, покажем, что

$$\int\limits_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\tau = \int\limits_S (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

3.3.4. Смысл скаляра $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$. Из формулы Остроградского следует, что полный поток вектора $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую бесконечно малый объем $d\tau$, равен $\operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\tau$. Следовательно, дивергенция, вычисленная в точке векторного поля, приближенно равна потоку, выходящему из единицы объема, окружающего эту точку. Точное значение дивергенции векторного поля $\boldsymbol{a}$ может быть определено следующим образом:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\int\limits_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\tau} \text{ *).}$$

Рассмотрим движение жидкости. Пусть ее плотность ρ и скорость движения $\boldsymbol{a}$ — соответственно скалярная и векторная функции точки пространства и времени t. Предположим, что S — произвольная поверхность в пространстве, заполненном жидкостью, и $\boldsymbol{n}$ — орт внешней нормали к этой поверхности. Масса жидкости, проходящая в направлении $\boldsymbol{n}$ за единицу времени через поверхность S, равна

$$\int\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \rho \boldsymbol{a}\, d\sigma.$$

Если поверхность S замкнута и ограничивает объем τ, то полученная формула дает массу жидкости, вытекающую за единицу времени из τ. С другой стороны, увеличение массы жидкости внутри объема τ за единицу времени равно

$$\int\limits_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau.$$

Применяя теорему Остроградского, получим

$$\int\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \rho \boldsymbol{a}\, d\sigma = \int\limits_\tau \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a})\, d\tau.$$

Если предположить, что внутри τ отсутствуют источники и стоки, то

$$\int\limits_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int\limits_\tau \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a})\, d\tau.$$

Это равенство справедливо для любого объема τ рассматриваемого поля. В силу непрерывности функций и их производных (ср. п. 3.3.7)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a}) = 0. \tag{51}$$

*) Этот предел представляет собой объемную производную векторного поля.

Уравнение (51) называется уравнением неразрывности жидкости. Если жидкость несжимаемая, то

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a}) = 0.$$

Если, кроме того, скорость $\boldsymbol{a}$ равна производной от скалярного потенциала V, а плотность ρ постоянна, то уравнение неразрывности принимает вид

$$\Delta V = 0.$$

Это уравнение можно непосредственно применить к электрическому полю, если вместо плотности жидкости ρ взять плотность электрических зарядов, движущихся со скоростью $\boldsymbol{a}$.

Введем обозначения: θ — температура, ρ — плотность, k — коэффициент внутренней теплопроводности и c — удельная теплоемкость тела в рассматриваемой точке (скалярные функции). Количество тепла, вытекающего через поверхность S, равно

$$-\int_S k\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{grad}\theta \, d\sigma.$$

С другой стороны, увеличение количества тепла внутри τ равно

$$\int_\tau c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} d\tau.$$

Отсюда по аналогии с предыдущим случаем получаем

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad}\theta) = 0.$$

Это уравнение теплопроводности.

В случае однородной среды и при стационарном распределении температуры $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0\right)$ уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta\theta = 0.$$

3.3.5. Формула для градиента. Положим

$$\boldsymbol{a} = f\boldsymbol{b},$$

где f — скалярная функция точки M, а $\boldsymbol{b}$ — произвольный постоянный вектор. Согласно формуле (27)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \operatorname{div}(f\boldsymbol{b}) = f \operatorname{div}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Вектор $\boldsymbol{b}$ постоянен, поэтому

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Применим формулу (49) к вектору $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{b} \cdot \int_\tau \operatorname{grad} f \, d\tau = \boldsymbol{b} \cdot \int_S f \, d\boldsymbol{\sigma}.$$

В силу произвольности вектора $\boldsymbol{b}$ отсюда следует формула (48).

3.3.6. Формула для вихря. Пусть $\boldsymbol{b}$ — произвольный постоянный вектор. Тогда по формуле (28)

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{a},$$

так как $\operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0$. Подставим в формулу (49) вместо вектора $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{b} \cdot \int_\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\tau = \int_S (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Смешанное произведение $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{b} \cdot (d\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{a})$ (см. п. 3.1.14), следовательно,

$$\boldsymbol{b} \cdot \int_\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\tau = \boldsymbol{b} \cdot \int_S d\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{a}.$$

В силу произвольности вектора $\boldsymbol{b}$ отсюда следует справедливость формулы (50).

3.3.7. Инвариантность*) градиента, дивергенции, вихря. Докажем инвариантность дивергенции. Имеем (формула (49))

$$\int_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\tau = \int_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Введем новые оси координат, и пусть $\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a}$ — дивергенция, полученная в новой системе координат. Так как скалярное произведение $\boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ не зависит от выбора системы координат, то для любого объема τ имеет место равенство

$$\int_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\tau = \int_\tau \operatorname{div}_1 \boldsymbol{a}\, d\tau$$

или

$$\int_\tau (\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a} - \operatorname{div} \boldsymbol{a})\, d\tau = 0. \qquad (*)$$

Если в какой-либо точке $\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a}$ отличается от $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, то эту точку можно окружить объемом, внутри которого $\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a} - \operatorname{div} \boldsymbol{a}$ была бы не равна нулю и сохраняла знак (вследствие непрерывности частных производных вектора $\boldsymbol{a}$). Следовательно, для этого объема интеграл

$$\int_\tau (\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a} - \operatorname{div} \boldsymbol{a})\, d\tau$$

был бы не равен нулю, что противоречит (*). Поэтому для любых осей координат $\operatorname{div}_1 \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, т. е. скаляр $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ инвариантен относительно выбора координатной системы.

Пользуясь формулами (48) и (50), можно провести аналогичное доказательство инвариантности векторов $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ относительно выбора осей координат.

3.3.8. Формула Грина. Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем τ, p и q — две скалярные функции точки M. Докажем, что имеет место формула Грина:

$$\int_\tau (p\, \Delta q - q\, \Delta p)\, d\tau = \int_S (p \operatorname{grad} q - q \operatorname{grad} p) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Используя формулу (27), получаем

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} q) = p \operatorname{div} \operatorname{grad} q + \operatorname{grad} q \cdot \operatorname{grad} p = p\, \Delta q + \operatorname{grad} q \cdot \operatorname{grad} p.$$

---

*) Независимость от выбора координатной системы.

Подставим в формулу (49) вместо вектора $\boldsymbol{a}$ вектор $p\operatorname{grad} q$. Имеем

$$\int_{\tau} (p\,\Delta q + \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} q)\,d\tau = \int_{S} p \operatorname{grad} q \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Меняя роли функций p и q, находим

$$\int_{\tau} (q\,\Delta p + \operatorname{grad} q \cdot \operatorname{grad} p)\,d\tau = \int_{S} q \operatorname{grad} p \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Вычитая последнее выражение из предыдущего, получим формулу Грина.

3.3.9. Формула Стокса. Пусть двухсторонняя поверхность S ограничена замкнутой кривой C, на которой указано определенное направление обхода. Нормали к поверхности S ориентируем таким образом, чтобы выбранное на C направление обхода оказалось положительным *).

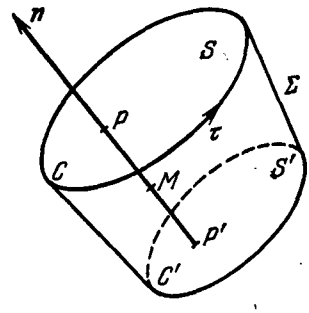


Рис. 3.16.

В каждой точке P поверхности S отложим вдоль отрицательного направления нормали отрезки постоянной длины PP'. Точки P', соответствующие точкам P, образуют поверхность S', параллельную поверхности S и ограниченную замкнутой кривой C'. Обозначим через Σ поверхность, образованную нормалями, соединяющими точки кривых C и C'. Пусть τ — объем тела, ограниченного поверхностями S, S', Σ (рис. 3.16).

Будем считать, что отложенная вдоль направления нормали постоянная длина достаточно мала. Пусть M — точка внутри или на поверхности рассматриваемого тела τ. Опустим из точки M перпендикуляр MP к поверхности S; l — длина MP. Тогда $\boldsymbol{MP} = l\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали.

Рассмотрим точку $M + d\boldsymbol{M}$ (см. п. 3.2.1). Ей соответствует точка $P + d\boldsymbol{P}$. Имеем

$$d\boldsymbol{P} - d\boldsymbol{M} = l\,d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\,dl \;\text{**)}.$$

Это выражение умножим скалярно на $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{P} - \boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{M} = l\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}\,dl.$$

Но $\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{P} = 0$, так как векторы $\boldsymbol{n}$ и $d\boldsymbol{P}$ перпендикулярны. Кроме того, $\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{n} = 0$, потому что вектор постоянной длины перпендикулярен своей производной (это следует из теоремы 1 п. 3.2.3). Учитывая также, что $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$, получаем

$$-\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{M} = dl.$$

Далее, согласно (18) $\operatorname{grad} l \cdot d\boldsymbol{M} = dl$. Следовательно, при любом $d\boldsymbol{M}$ имеет место $-\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{M} = \operatorname{grad} l \cdot d\boldsymbol{M}$. Поэтому $\boldsymbol{n} = -\operatorname{grad} l$.

Возьмем вихрь от обеих частей этого равенства. Имеем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{n} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} l = 0.$$

---

*) Тем самым определяется рассматриваемая сторона поверхности. Очевидно что выбор стороны поверхности и ее ориентация взаимно определяют друг друга.

**) В самом деле, пусть $M + d\boldsymbol{M}$ соответствует точка M_1, а $P + d\boldsymbol{P}$ — точка P_1. Тогда $d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{MM_1}$, $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{PP_1}$. Имеем $\Delta\boldsymbol{MP} = \boldsymbol{M_1P_1} - \boldsymbol{MP} = \boldsymbol{M_1M} + \boldsymbol{MP} + \boldsymbol{PP_1} - \boldsymbol{MP} = d\boldsymbol{P} - d\boldsymbol{M}$. С другой стороны, $\Delta\boldsymbol{MP} \approx d\boldsymbol{MP} = d(l\boldsymbol{n}) = l\,d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\,dl$, т. е. $d\boldsymbol{P} - d\boldsymbol{M} = l\,d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\,dl$.

Применим теорему Остроградского к вектору $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}$:

$$\int_{\tau}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\,d\tau=\int_{S+S'+\Sigma}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Вектор $d\boldsymbol{\sigma}$ имеет длину $d\sigma$ и отложен по нормали к поверхности. На поверхности S вектор $d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\,d\sigma$, а на поверхности Σ вектор $d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}_1\,d\sigma$ (через n_1 обозначается орт нормали к поверхности Σ). Имеем

$$\int_{\tau}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\,d\tau=\int_{S+S'}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma+\int_{\Sigma}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}_1\,d\sigma.$$

Смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}$, очевидно, равно нулю, так как векторы $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}$ ортогональны. Поэтому предыдущая формула принимает вид

$$\int_{\tau}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\,d\tau=\int_{\Sigma}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}_1\,d\sigma.$$

Смешанное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}_1=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1)\cdot\boldsymbol{a}$. Но $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1$ — это орт t касательной к кривой C при условии, что точка P находится на этой кривой C (рис. 3.17). Следовательно,

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{t}.$$

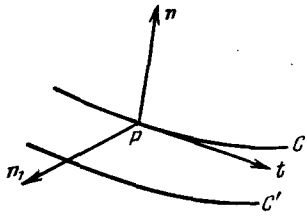


Рис. 3.17.

Далее, согласно формуле (28) и доказанному выше равенству $\operatorname{rot}\boldsymbol{n}=0$, находим

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Таким образом,

$$\int_{\tau}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\tau=\int_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\,d\sigma.$$

Если расстояние $PP'=d\delta$ мало, то $d\tau=d\sigma\,d\delta$, где $d\sigma$ — элемент поверхности S. Если $d\sigma$ — элемент поверхности Σ, то $d\sigma=dl\,d\delta$, где dl — элемент кривой C. Тогда

$$d\delta\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\sigma=d\delta\int_{C}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}\,dl=d\delta\int_{C}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{M},$$

откуда и получается формула Стокса

$$\int_{S}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\sigma=\int_{C}\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{M}. \tag{52}$$

Итак, циркуляция вектора $\boldsymbol{a}$ по замкнутой кривой C равна потоку его вихря через поверхность, ограниченную C *). В случае соленоидального векторного поля $\boldsymbol{a}$ известно, что $\boldsymbol{a}$ является производной от вектор-

*) 1. Легко непосредственно убедиться в том, что в формуле (52) можно брать любую поверхность S, стягиваемую замкнутой кривой C. Действительно, пусть S_1 и S_2 — такие поверхности. Тогда поверхность S_1+S_2 ограничивает трехмерное тело с объемом τ. Учитывая, что только для одной поверхности S_1 или S_2 направление внешней нормали совпадает с положительным направлением нормали $\boldsymbol{n}$, и применяя формулу Остроградского, получим

$$\int_{S_1}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\sigma-\int_{S_2}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\sigma=\int_{S_1+S_2}\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\sigma=\int_{\tau}\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,d\tau=0,$$

так как $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$.

2. Формула Стокса может быть обобщена аналогично формуле Остроградского (см. п. 3.3.2). Соответствующие формулы удобно получить из операторного соотношения (ср. сноску на стр. 140):

$$\int_{S}d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla=\int_{C}d\boldsymbol{M},\quad d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\,d\sigma,\quad d\boldsymbol{M}=\boldsymbol{t}\,dl, \tag{*}$$

ного потенциала v, т. е. $a = \operatorname{rot} v$. По формуле Стокса поток вектора $\operatorname{rot} v$ через поверхность равен циркуляции v по контуру, ограничивающему эту поверхность. Таким образом, поток соленоидального вектора через поверхность равен циркуляции его векторного потенциала по контуру этой поверхности.

Теорема Стокса позволяет дать новое определение вихря. Для этого определим составляющую $\operatorname{rot} a$ в точке A по любому фиксированному направлению AW.

Опишем из точки A, как из центра, окружность C малого радиуса r, лежащую в плоскости, перпендикулярной рассматриваемому направлению (рис. 3.18). Составляющая вихря по направлению AW имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot}_W a = \lim_{r \to 0} \frac{\int_C a \cdot dl}{\pi r^2}, \quad dl = t\,dl = dM. \qquad (53)$$

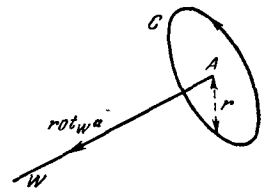


Рис. 3.18.

Приложение векторного исчисления к теории электромагнитного поля [1])

3.3.10. Электростатическое поле. Рассмотрим два точечных заряда Q_1 и Q_2, помещенных в пустоте в точках A и B на расстоянии r друг от друга (рис. 3.19). Тогда сила, действующая на заряд Q_1, равна

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{u}{r^2} \quad \text{(закон Кулона)},$$

где u — орт вектора $\boldsymbol{BA}$. Пусть в точке O помещен заряд Q. Электрическое поле заряда Q в точке A равно силе, действующей на единичный заряд, помещенный в точке A (рис. 3.20):

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{u}{r^2}.$$

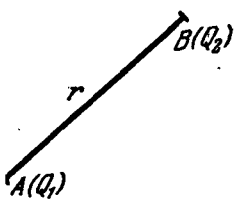


Рис. 3.19.

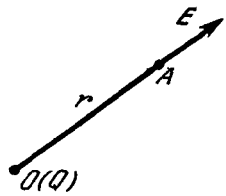


Рис. 3.20.

Это электрическое поле представляет собой поле векторов, проходящих через фиксированную точку O. Используем формулы (40) и (41) для $f(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$. Имеем

$$\operatorname{div} E = 0,$$

где поверхность S ограничена замкнутым контуром C, причем направления n и t — ортов нормали к S и касательной к C — согласованы, как указано в начале настоящего пункта. В частности, формула (52) получается в результате скалярного умножения обеих частей (*) на вектор a. Формула Стокса, строго говоря, верна только для „поверхностно" односвязных областей (см. [2], стр. 305).

[1]) Ниже все формулы даны в рационализированной системе единиц МКС, включающей четыре основные единицы: метр, килограмм-массу, секунду и ампер или вольт. В электротехнике для получения уравнений с наиболее простыми и симметричными размерностями часто берут за основные метр, секуиду, вольт и ампер. Главные производные единицы: кулон, ом, фарада, генри и т. д. Единицы, входящие в формулы, которыми мы пользуемся, это: единицы силы — ньютон (10^5 дин), единица напряженности электрического поля — вольт на метр, единица электростатической индукции — кулон на квадратный метр, единица электромагнитной индукции — вебер (10^4 гауссов) на квадратный метр. Рационализация вводит множитель $1/4\pi$ в оба основных закона Кулона (в электростатике и магнитостатике). Поэтому значения для диэлектрической и магнитной проницаемости в пустоте следующие:

$$\varepsilon_0 = 10^{-9}(36\pi)^{-1} = 8{,}842 \cdot 10^{-12} \text{ фарад на метр},$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \text{ генри на метр},$$

причем $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, где скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*.

а скалярный потенциал $\boldsymbol{E}$ равен

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Применяя формулу (49) к замкнутой поверхности, не содержащей внутри себя точки O (теорема Остроградского, вообще говоря, неверна, если в области тройного интегрирования векторная функция имеет бесконечный разрыв), получим, что поток вектора $\boldsymbol{E}$ через эту поверхность равен нулю. С другой стороны, непосредственно очевидно, что поток вектора $\boldsymbol{E}$ через поверхность любого шара с центром в O равен Q/ε_0. Обозначим через S произвольную замкнутую поверхность, содержащую внутри себя точку O и проведем сферу с центром O, целиком находящуюся внутри S. Применяя формулу (49) к области, ограниченной S и поверхностью этой сферы (учтем, что внутренняя нормаль сферы является внешней для рассматриваемой области), получим

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \text{ (теорема Гаусса).}$$

Если внутри поверхности S содержится несколько точечных зарядов $Q_1, \ldots, Q_n$, то

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Предположим, что заряды распределены непрерывно внутри объема v и плотность распределения зарядов дается скалярной функцией точки ρ. Тогда соотношение $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ нарушается. Распространяя на этот случай теорему Гаусса, получим

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho\, dv,$$

а так как

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_v \operatorname{div}\boldsymbol{E}\, dv,$$

то при непрерывном распределении зарядов

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Далее,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} V = -\Delta V,$$

и поэтому

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{(уравнение Пуассона).}$$

До сих пор мы рассматривали поле в пустоте. Обратимся теперь к полю внутри диэлектрика. В этом случае молекулы тела ведут себя как электрические диполи — каждый элемент объема содержит большое число зарядов противоположного знака, соединенных попарно.

При отсутствии внешнего поля моменты молекул ориентированы по-разному, и их векторная сумма равна нулю. При наличии внешнего поля диполи частично повернутся, и сумма моментов станет отличной от нуля. Диэлектрик с ориентированными в той или иной степени дипольными моментами окажется поляризованным. Степень поляризации характеризуется

вектором поляризации $\boldsymbol{P}$, который, по определению, равен суммарному моменту молекул, отнесенному к единице объема *). Учет поляризации можно осуществить, если ввести фиктивную плотность электрических зарядов, равную $-\operatorname{div} \boldsymbol{P}$. При этом условии теорема Гаусса записывается в следующей форме:

$$\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_v \rho\, dv - \int_v \operatorname{div} \boldsymbol{P}\, dv.$$

Применяя формулу (49), получаем

$$\int_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_v \rho\, dv.$$

В данном случае векторное поле, удовлетворяющее теореме Гаусса, имеет вид

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}.$$

Вектор $\boldsymbol{D}$ называется вектором электростатической индукции. Он, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho.$$

3.3.11. Магнитное поле постоянных токов. Все, что говорилось выше относительно электрического поля $\boldsymbol{E}$, можно повторить для магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Однако следует учитывать, что свободные магнитные заряды не существуют, т. е. вне магнитной среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Внутри магнитной среды присутствуют элементарные магниты. Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к необходимости определить вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B}$, дивергенция которого равна нулю как внутри, так и вне магнитной среды:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Рассмотрим контур C, окружающий ток I (рис. 3.21). Циркуляция вектора магнитного поля по контуру C равна

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I \quad \text{(теорема Ампера).}$$

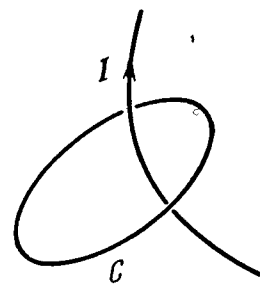


Рис. 3.21.

Если внутри контура C тока нет, то

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

Из определения вихря по формуле (53) следует, что в точках, где ток отсутствует,

$$\operatorname{rot}_W \boldsymbol{H} = \lim_{S \to 0} \frac{\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}{S} = 0 \quad (W \text{ — любое}), \text{ т. е. } \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0.$$

*) Точнее, векторная функция точки $\boldsymbol{P}$ определяется как производная от суммарного момента молекул по трехмерной области ([2], стр. 311—312).

3.3.12. Электромагнитное поле. Выпишем формулы, используемые при выводе уравнений Максвелла (см. 3.3.15):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{54}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{55}$$

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I. \tag{56}$$

3.3.13. Закон Фарадея. Электродвижущая сила, индуктированная на контуре C, помещенном в электрическом поле $\boldsymbol{E}$, выражается криволинейным интегралом

$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Если обозначить через S какую-либо поверхность, опирающуюся на контур C (рис. 3.22), то согласно теореме Стокса получим

$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

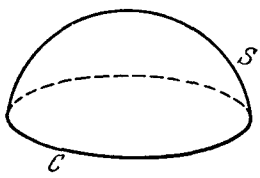


Рис. 3.22.

По закону Фарадея индуктированная электродвижущая сила пропорциональна изменению потока $\boldsymbol{B}$ во времени, т. е.

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

В силу произвольности поверхности S

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

3.3.14. Закон Ампера. Обозначим через $\boldsymbol{J}$ вектор плотности тока в точке. Тогда закон Ампера можно записать в виде

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{57}$$

так как поток вектора $\boldsymbol{J}$ через поверхность S равен интенсивности тока, проходящего по контуру C. В силу теоремы Стокса

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Сравнивая с формулой (57), получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}. \tag{58}$$

Ток $\boldsymbol{J}$ создается зарядами, движущимися со скоростью $\boldsymbol{V}$. Обозначим через ρ пространственную плотность этих зарядов. Очевидно, что вектор плотности тока

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{V}.$$

При этом формула (58) принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \rho \boldsymbol{V}. \tag{59}$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей этого равенства. Учитывая формулу (30), имеем

$$\operatorname{div} (\rho \boldsymbol{V}) = 0. \tag{60}$$

Формула (51) дает

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Дифференцируем по времени равенство (55):

$$\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Используя две последние формулы, получим

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = -\operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{61}$$

Формулы (60) и (61) противоречивы.

3.3.15. Уравнения Максвелла. Чтобы устранить полученное противоречие, Максвелл видоизменил закон Ампера следующим образом: полный ток, который мы рассматриваем, состоит не только из тока проводимости $\rho \boldsymbol{V}$, но и из тока смещения $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$. Поэтому вектор $\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{V}$ следует заменить на

$$\rho \boldsymbol{V} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

и тогда уравнение Ампера (59) примет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \rho \boldsymbol{V} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{62}$$

Для пустоты система уравнений Максвелла (62) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{63}$$

3.3.16. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током. Рассмотрим электрический заряд e, перемещающийся со скоростью $\boldsymbol{V}$. Он эквивалентен электрическому току силы I, текущему по элементу длины $d\boldsymbol{l}$:

$$I\, d\boldsymbol{l} = e\boldsymbol{V}. \tag{64}$$

Величина I положительна, если направление тока совпадает с направлением вектора $d\boldsymbol{l}$.

Магнитное поле, создаваемое рассматриваемым движущимся зарядом на расстоянии r от этого заряда, равно (формула Био — Савара — Лапласа)

$$\boldsymbol{H} = \frac{e\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}. \tag{65}$$

Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, то для вектора $\boldsymbol{B}$ существует векторный потенциал $\boldsymbol{A}$. Определим его. Имеем

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

В пустоте

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H},$$

поэтому

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{eV \times r}{r^3}. \tag{66}$$

Преобразуем формулу (66):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[eV \times i \frac{x}{r^3} + eV \times j \frac{y}{r^3} + eV \times k \frac{z}{r^3}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[i \times \left(-\frac{eVx}{r^3}\right) + j \times \left(-\frac{eVy}{r^3}\right) + k \times \left(-\frac{eVz}{r^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[i \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{eV}{r}\right) + j \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{eV}{r}\right) + k \times \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{eV}{r}\right)\right].$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (22), найдем, что

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{eV}{r}.$$

Применим полученную формулу для случая тока, текущего по проводу. Это важный частный случай движения заряженных частиц. Пусть dS — элемент поверхности, через который проходит ток I, $\boldsymbol{J}$ — вектор плотности тока. Имеем $\boldsymbol{J}\,dS = I$. Используя формулы (64) и (65), получим выражение для векторного потенциала тока в проводе $\boldsymbol{A}$ через интеграл, распространенный на объем V ($dv = dS\,dz$) рассматриваемого провода:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J}\,dv}{r}. \tag{67}$$

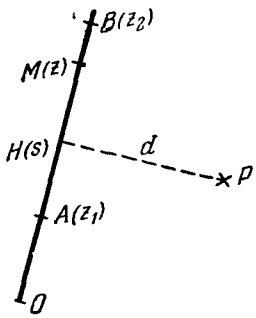


Рис. 3.23.

Применение этой формулы к электрической цепи, по которой идет ток, может привести к некоторым затруднениям. Рассмотрим, например, случай бесконечного прямолинейного провода. Пусть его сечение dS, а сила тока в нем I. Выделим мысленно отрезок AB и найдем векторный потенциал, созданный током, текущим по этому отрезку. Рассмотрим точку P, отстоящую от AB на расстоянии d (рис. 3.23). Так как векторный потенциал обладает осевой симметрией относительно AB, то при определении точки P достаточно указать абсциссу точки H и расстояние $HP = d$.

Пусть M — любая точка отрезка AB, а z_1, z_2, s и z — абсциссы точек A, B, H, M относительно фиксированной точки O. Обозначим через r расстояние MP. Имеем $\boldsymbol{J}\,dv = \boldsymbol{J}\,dS\,dz = I\,dz$. Поэтому формула (67) дает следующее выражение для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{d^2 + (z-s)^2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{\ln\left[\sqrt{d^2 + (z-s)^2} + (z-s)\right]\right\}_{z=z_1}^{z=z_2},$$

а так как

$$\sqrt{d^2 + (z_1 - s)^2} + z_1 - s = \frac{d^2}{\sqrt{d^2 + (z_1 - s)^2} - (z_1 - s)},$$

то

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left\{\ln\frac{1}{d^2}+\ln\left[\sqrt{d^2+(z_2-s)^2}+z_2-s\right]+\right.$$
$$\left.+\ln\left[\sqrt{d^2+(z_1-s)^2}-(z_1-s)\right]\right\}. \quad (68)$$

Для перехода к бесконечному прямолинейному току нужно устремить z_1 и z_2 соответственно к $-\infty$ и $+\infty$. При этом векторный потенциал также стремится к бесконечности.

Следует заметить, однако, что магнитное поле B рассматриваемого тока конечно. Поэтому должны быть конечны частные производные векторного потенциала A, так как

$$B=\operatorname{rot}A.$$

Положим в формуле (68) $d=d_1$ и $s=s_1$, и полученную постоянную величину вычтем из правой части этой формулы. Имеем с точностью до потенциала в фиксированной точке:

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left\{\ln\frac{1}{d^2}-\ln\frac{1}{d_1^2}+\right.$$
$$\left.+\ln\frac{\left(\sqrt{d^2+(z_2-s)^2}+z_2-s\right)\left(\sqrt{d^2+(z_1-s)^2}-(z_1-s)\right)}{\left(\sqrt{d_1^2+(z_2-s_1)^2}+z_2-s_1\right)\left(\sqrt{d_1^2+(z_1-s_1)^2}-(z_1-s_1)\right)}\right\}. \quad (69)$$

Если теперь устремить z_1 и z_2 соответственно к $-\infty$ и $+\infty$, то

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}I\left\{\ln\frac{1}{d^2}-\ln\frac{1}{d_1^2}\right\}.$$

Так как векторный потенциал определяется лишь с точностью до градиента скалярной функции (см. п. 3.2.18), то можно написать

$$A=\frac{\mu_0}{4\pi}I(-\ln d^2).$$

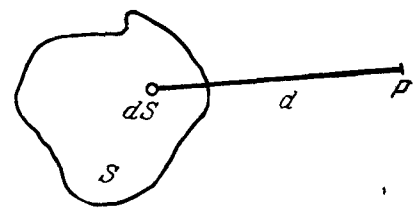


Рис. 3.24.

Векторный потенциал тока в проводнике с любым поперечным сечением (рис. 3.24) выражается через поверхностный интеграл:

$$A=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S J\ln d^2\,dS.$$

3.4. СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

3.4.1. Определение. Рассмотрим трехмерное пространство, в котором введена система прямоугольных координат Ox, Oy, Oz. Мы можем связать это пространство с системой криволинейных координат. Пусть между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами u, v, w устанавливается взаимно однозначное соответствие, описываемое формулами

$$x=p(u,\ v,\ w),\quad y=q(u,\ v,\ w),\quad z=r(u,\ v,\ w) \quad (70)$$

и

$$u=P(x,\ y,\ z)\quad v=Q(x,\ y,\ z),\quad w=R(x,\ y,\ z). \quad (71)$$

Уравнения $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ представляют собой уравнения координатных поверхностей криволинейной системы в прямоугольной системе координат.

Каждая пара координатных поверхностей, проходящих через фиксированную точку M, образует в пересечении координатную линию. Параметрические уравнения координатных линий получаются из уравнений (70), если в них поочередно изменять только одну из переменных u, v, w, оставляя при этом неизменными остальные две (рис. 3.25).

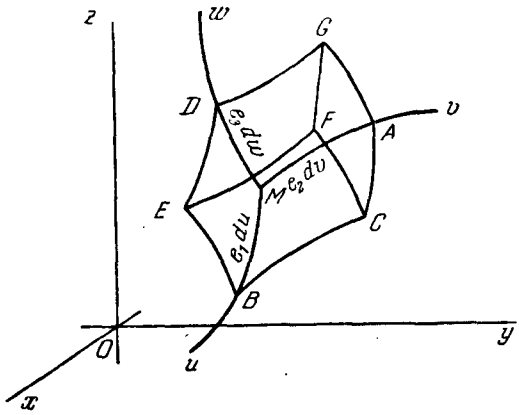


Рис. 3.25.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением ортогональных криволинейных координат, неортогональные системы будут изучены в п. 5.2.1 и последующих. По определению, криволинейные координаты называются ортогональными, если в любой точке M касательные к координатным линиям образуют прямоугольный трехгранник.

Квадрат элемента длины ds в прямоугольных координатах дается формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

В случае ортогональных криволинейных координат эта формула приобретает следующий вид:

$$ds^2 = e_1^2\,du^2 + e_2^2\,dv^2 + e_3^2\,dw^2\ *),$$

где e_1^2, e_2^2, e_3^2 обозначают величины

$$e_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$e_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$e_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2.$$

Если элемент ds параллелен касательной в точке M к оси Mu, то его длина будет равна $e_1\,du$. Аналогично длины элементов, параллельных осям Mv и Mw, равны $e_2\,dv$ и $e_3\,dw$. Так как величины e_1, e_2, e_3 являются функциями координат точки, их называют единицами локальной длины **).

Рассмотрим скалярную функцию точки $V(x, y, z)$. Выражение этой функции в криволинейной системе координат получается простой заменой x, y, z их значениями (70). Пусть теперь $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ — векторная функция точки, A_x, A_y, A_z — проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на оси прямоугольной системы

*) Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием ортогональности системы криволинейных координат является условие, состоящее в том, чтобы выражение ds^2 содержало только члены с квадратами дифференциалов (см., например, [3], стр. 340, 341).

**) Величины e_1, e_2, e_3 называются также коэффициентами Ламе, метрическими коэффициентами, масштабными множителями.

координат. Проведем в точке $M(x, y, z)$ касательные к криволинейным осям Mu, Mv, Mw и обозначим через A_u, A_v, A_w проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на эти касательные. Используя формулы (4) и (5), получим

$$\begin{aligned} A_u &= A_x\cos(x, u) + A_y\cos(y, u) + A_z\cos(z, u),\\ A_v &= A_x\cos(x, v) + A_y\cos(y, v) + A_z\cos(z, v),\\ A_w &= A_x\cos(x, w) + A_y\cos(y, w) + A_z\cos(z, w). \end{aligned} \tag{72}$$

В этих формулах *)

$$\begin{aligned} &\cos(x, u) = \frac{1}{e_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(y, u) = \frac{1}{e_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(z, u) = \frac{1}{e_1}\frac{\partial z}{\partial v},\\ &\cos(x, v) = \frac{1}{e_2}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos(y, v) = \frac{1}{e_2}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos(z, v) = \frac{1}{e_2}\frac{\partial z}{\partial v},\\ &\cos(x, w) = \frac{1}{e_3}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \cos(y, w) = \frac{1}{e_3}\frac{\partial y}{\partial w}, \quad \cos(z, w) = \frac{1}{e_3}\frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned} \tag{73}$$

Пример. Рассмотрим систему координат ξ, φ, z, связанную с прямоугольными координатами x, y, z по формулам:

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi, \quad z = z.$$

Координатные поверхности имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi} + \frac{y^2}{a^2\,\mathrm{sh}^2\,\xi} - 1 = 0$$

(эллиптический цилиндр),

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{a^2\sin^2\varphi} - 1 = 0$$

(гиперболический цилиндр),

$z = \mathrm{const}$ (плоскость).

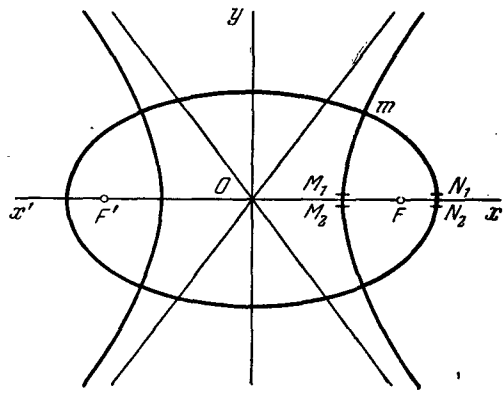


Рис. 3.26.

Эти три поверхности попарно ортогональны, так как ортогональны софокусные эллипсы и гиперболы, а плоскости $z = c$ перпендикулярны образующим полученных цилиндров (рис. 3.26).

Координатные линии представляют собой гиперболу, эллипс (обе кривые в плоскости, перпендикулярной оси Oz) и прямую, параллельную оси Oz и проходящую через точку m (см. рисунок).

Квадрат элемента длины равен

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\varphi)\,d\xi^2 + a^2(\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\varphi)\,d\varphi^2 + dz^2.$$

---

*) Вектор

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k},$$

длина которого равна e_1, параллелен касательной к координатной линии u. Это следует из параметрических уравнений линии u (см. выше). Далее,

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{i} = e_1\cos(x, u),$$

откуда и вытекает первая из формул (73). Аналогично получаются и остальные формулы (73).

Следовательно, единицы локальной длины соответственно равны

$$e_1 = e_2 = a\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}, \quad e_3 = 1.$$

Проекции векторной функции

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z$$

относительно криволинейных осей координат находятся по формулам:

$$A_\xi = A_x \frac{\mathrm{sh}\,\xi\cos\varphi}{(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}} + A_y \frac{\mathrm{ch}\,\xi\sin\varphi}{(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}},$$

$$A_\varphi = A_x \frac{-\mathrm{ch}\,\xi\sin\varphi}{(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}} + A_y \frac{\mathrm{sh}\,\xi\cos\varphi}{(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}},$$

$$A_z = A_z.$$

Замечание. С криволинейными ортогональными координатами не так легко обращаться, как с прямоугольными. Обычно уравнения (70) однозначно определяют x, y, z по криволинейным координатам, однако уравнения (71) не являются однозначными функциями прямоугольных координат. Это нарушение взаимной однозначности приводит к существенным трудностям.

Рассмотрим эллиптические координаты на плоскости. Они определяются по формулам рассмотренного выше примера, если ограничиться случаем постоянного z.

Пусть ξ и φ принимают все возможные значения (т. е. все значения, заключенные соответственно между $-\infty$ и $+\infty$ и между 0 и 2π). Тогда каждая точка плоскости xOy пробегается по два раза. Эти точки получатся по одному разу, если принять одно из следующих двух ограничений:

1) $$0 \leqslant \xi < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$

2) $$-\infty < \xi < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < \pi.$$

Однако и при этих ограничениях имеется неустранимое нарушение непрерывности. Изучим этот вопрос подробнее.

Точки, расположенные на отрезке $F'F$ (см. рис. 3.26), находятся на бесконечно сплюснутом эллипсе ($\xi = 0$) и в вершинах гипербол ($\varphi = \mathrm{const}$). Рассмотрим точки $M_1(\xi_1, \varphi_1)$ и $M_2(\xi_2, \varphi_2)$, расположенные на гиперболе вблизи отрезка $F'F$ по разные стороны от него. Если φ меняется от 0 до 2π (случай 1), то $\xi \geqslant 0$, и необходимо $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$. Пусть точки M_1 и M_2 неограниченно приближаются друг к другу, оставаясь на одной и той же гиперболе. Тогда ξ_1 и ξ_2 стремятся к нулю, а φ_1 и φ_2 остаются постоянными. Следовательно, в случае 1 бесконечно близкие к отрезку $F'F$ точки имеют существенно разные эллиптические координаты (по φ).

Далее, точки, расположенные на оси $x'x$ вне отрезка $F'F$, находятся на вырожденной гиперболе $\varphi = 0$ и в вершинах эллипсов ($\xi = \mathrm{const}$). Рассмотрим теперь точки на эллипсе $N_1(\xi_1, \varphi_1)$ и $N_2(\xi_2, \varphi_2)$, положение которых показано на рис. 3.26. Если ξ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (случай 2), то $0 \leqslant \varphi < \pi$, и необходимо $\xi_2 = -\xi_1$. При неограниченном сближении N_1 и N_2 по одному и тому же эллипсу φ_1 и φ_2 стремятся к нулю, а ξ_1 и ξ_2 остаются постоянными. Следовательно, в случае 2 бесконечно близкие к полупрямым $x'F'$ и Fx точки имеют существенно разные эллиптические координаты (по ξ).

Фактически в случаях 1 и 2 мы имеем две разные системы эллиптических координат.

3.4.2. Дифференциальные операторы в ортогоиальных криволинейных координатах. Пусть $V(x, y, z)$ и $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ — скалярная и векторная функции точки. Найдем выражения для $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, ΔV, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ в системе ортогональных криволинейных координат, заданных уравнениями (70).

Рассмотрим малый криволинейный параллелепипед, построенный на осях координат Mu, Mv, Mw, проходящих через точку M (рис. 8.25). Используя формулы (72) и (73), нетрудно показать, что проекция вектора $\operatorname{grad} V$ на направление касательной в точке M к дуге MB равна $\operatorname{grad}_u V = \dfrac{\partial V}{e_1\, du}$. Следовательно, имеют место формулы:

$$\operatorname{grad}_u V = \frac{1}{e_1}\frac{\partial V}{\partial u}, \quad \operatorname{grad}_v V = \frac{1}{e_2}\frac{\partial V}{\partial v}, \quad \operatorname{grad}_w V = \frac{1}{e_3}\frac{\partial V}{\partial w}. \tag{74}$$

Чтобы вычислить выражение для дивергенции вектора $\boldsymbol{A}$, мы воспользуемся формулой (49), применяя ее к элементарному объему в криволинейной системе координат.

Разность между поверхностными интегралами по поверхности $BCFE$ и поверхности $MAGD$ равна

$$\frac{\partial}{\partial u}(e_2 e_3 A_u)\, du\, dv\, dw\ ^*).$$

Аналогичное выражение получится и для остальных пар противолежащих граней. Таким образом **),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2 e_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_3 e_1 A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(e_1 e_2 A_w)\right]. \tag{75}$$

Применяя формулу Стокса к поверхности $MAGD$, можно определить проекцию вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ на направление касательной к оси u. Линейные интегралы вектора $\boldsymbol{A}$ вдоль MA, AG, GD, DM с точностью до бесконечно малых высшего порядка соответственно равны

$$A_v e_2\, dv, \quad A_w e_3\, dw + \frac{\partial}{\partial v}(e_3 A_w)\, dv\, dw,$$

$$-\left[A_v e_2\, dv + \frac{\partial}{\partial w}(e_2 A_v)\, dw\, dv\right], \quad -A_w e_3\, dw,$$

причем значения проекций $\boldsymbol{A}$ и локальных длин e_1, e_2, e_3 вычислены в точке M (рис. 3.25). Сумма этих интегралов равна произведению составляющей $\operatorname{rot}_u \boldsymbol{A}$

---

*) Обозначим поверхности $MAGD$ и $BCFE$ соответственно (I) и (II), а орты осей u, v, w — через e_1^0, e_2^0, e_3^0. Длины ребер рассматриваемого элементарного объема $\Delta\tau$ равны $e_1\, du$, $e_2\, dv$, $e_3\, dw$. Учитывая ортогональность системы координат и направление внешней нормали на гранях $\Delta\tau$, имеем:

$$d\sigma_{\mathrm{I}} = -e_1^0 e_2\, dv\, e_3\, dw, \quad d\sigma_{\mathrm{II}} = e_1^0 e_2\, dv\, e_3\, dw,$$

$$\int\limits_{(\mathrm{I})+(\mathrm{II})} \boldsymbol{A}\cdot d\sigma = \int\limits_{(\mathrm{II})} (A_u e_1^0 + \ldots)\cdot e_1^0 e_2 e_3\, dv\, dw - \int\limits_{(\mathrm{I})} (A_u e_1^0 + \ldots)\cdot e_1^0 e_2 e_3\, dv\, dw \approx$$

$$\approx [(A_u e_2 e_3)_{(\mathrm{II})} - (A_u e_2 e_3)_{(\mathrm{I})}]\, dv\, dw \approx \frac{\partial}{\partial u}(A_u e_2 e_3)\, du\, dv\, dw.$$

**) Очевидно, имеем

$$\int\limits_{\Delta\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau = \int\limits_{\Delta\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{A} e_1\, du\, e_2\, dv\, e_3\, dw \approx \operatorname{div} \boldsymbol{A} e_1 e_2 e_3\, du\, dv\, dw.$$

на площадь поверхности $MAGD$, т. е.

$$\mathrm{rot}_u A = \frac{1}{e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial v}(e_3 A_w) - \frac{\partial}{\partial w}(e_2 A_v)\right]. \tag{76}$$

С помощью круговой перестановки цифр 1, 2, 3 и букв u, v, w, находим:

$$\mathrm{rot}_v A = \frac{1}{e_3 e_1}\left[\frac{\partial}{\partial w}(e_1 A_u) - \frac{\partial}{\partial u}(e_3 A_w)\right],$$

$$\mathrm{rot}_w A = \frac{1}{e_1 e_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2 A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(e_1 A_u)\right].$$

Отметим, что проекции A_u, A_v, A_w можно определить по формулам (72) и (73).

Положим в (75) $A = \mathrm{grad}\, V$. Имеем

$$\Delta V = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right]^{*}).$$

Важнейшие системы ортогональных криволинейных координат в пространстве

Рассмотрим несколько конкретных систем ортогональных координат. Эти системы будут использованы в гл. VI при изучении уравнений распространения волн и Лапласа. С целью облегчения дальнейших вычислений мы приведем выражения для дивергенции, лапласиана, проекций градиента и вихря во всех рассмотренных ниже системах координат. Будем считать, что V и A — соответственно скалярная и векторная функции точки.

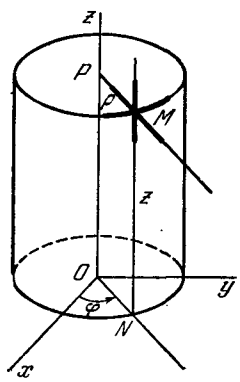


Рис. 3.27.

3.4.3. Система цилиндрических координат. Координатные поверхности: круговые цилиндры с осью вращения Oz, плоскости, перпендикулярные оси Oz, и полуплоскости, проходящие через Oz (рис. 3.27). Цилиндрические координаты ρ, φ, z связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

Уравнения координатных поверхностей соответственно в прямоугольной и цилиндрической системах имеют вид:

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \rho = \mathrm{const},$$
$$y/x = \mathrm{tg}\,\varphi, \quad \varphi = \mathrm{const},$$
$$z = \mathrm{const}, \quad z = \mathrm{const}.$$

Квадрат элемента длины равен

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

следовательно, единицы локальной длины равны

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \rho, \quad e_3 = 1.$$

*) Более детальный вывод формул этого пункта см., например, в [5].

Согласно формулам п. 3.4.2 получаем:

$$\operatorname{grad}_\rho V = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho},$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi};$$

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

3.4.4. Система сферических координат. Координатные поверхности: сферы с центром O и радиусом ρ, круговые конусы с вершиной O, образующие которых составляют с осью вращения Oz угол θ, и полуплоскости, проходящие через Oz под углом φ к плоскости xOz (рис. 3.28).

Сферические координаты [1]) ρ, θ, φ связаны с координатами x, y, z соотношениями

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

Уравнения координатных поверхностей соответственно в прямоугольной и сферической системах имеют вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0, \qquad \rho = \text{const},$$
$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2\theta + 0, \qquad \theta = \text{const},$$
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \varphi = \text{const}.$$

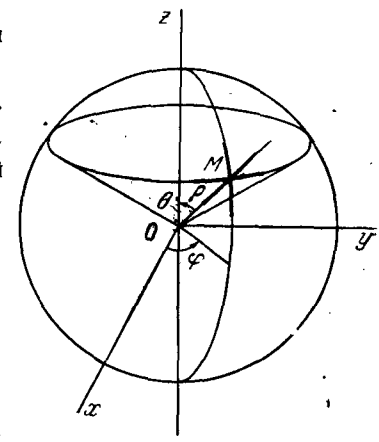


Рис. 3.28.

Квадрат элемента длины равен

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

следовательно, единицы локальной длины равны

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \rho, \quad e_3 = \rho \sin\theta.$$

Согласно формулам п. 3.4.2 получаем:

$$\operatorname{grad}_\rho V = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \operatorname{grad}_\theta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{2}{\rho} A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \operatorname{tg}\theta} A_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho \operatorname{tg}\theta} A_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot}_\theta \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} A_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta};$$

$$\Delta V = \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{tg}\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

[1]) Координаты φ и θ часто называются долготой и дополнением широты (зенитным расстоянием).

3.4.5. Система параболических цилиндрических координат. Рассмотрим рис. 3.29, на котором представлены параболы двух семейств взаимно ортогональных софокусных парабол (фокус в начале координат). Проведем ось OZ, перпендикулярную к плоскости OXY, и будем параллельно перемещать параболы при условии, что их фокусы остаются на оси OZ. Тогда параболы обоих семейств опишут параболические цилиндры, образующие две системы взаимно ортогональных координатных поверхностей. Третья система координатных поверхностей состоит из плоскостей, параллельных OXY. Если принять за оси прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz соответственно OX, OY, OZ, то уравнения координатных поверхностей в прямоугольной и параболической цилиндрической системах имеют вид:

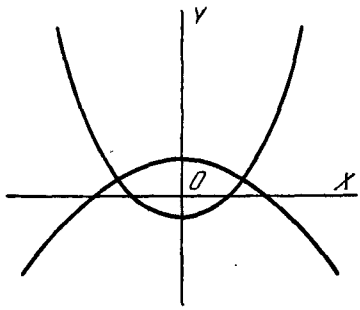


Рис. 3.29.

$$x^2 = c^2\alpha^2\left(\frac{2y}{c} + \alpha^2\right), \quad \alpha = \text{const},$$

$$x^2 = c^2\beta^2\left(\beta^2 - \frac{2y}{c}\right), \quad \beta = \text{const},$$

$$z = \text{const}, \quad z = \text{const}.$$

Координаты α, β, z связаны с прямоугольными координатами соотношениями:

$$x = c\alpha\beta, \quad y = \frac{c}{2}(\beta^2 - \alpha^2), \quad z = z.$$

Квадрат элемента длины равен

$$ds^2 = c^2(\alpha^2 + \beta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2) + dz^2,$$

следовательно, единицы локальной длины равны

$$e_1 = e_2 = c(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad e_3 = 1.$$

Для упрощения записи положим $(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \delta$. Согласно формулам п. 3.4.2 получаем:

$$\operatorname{grad}_\alpha V = \frac{1}{c\delta}\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \quad \operatorname{grad}_\beta V = \frac{1}{c\delta}\frac{\partial V}{\partial \beta}, \quad \operatorname{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c\delta^3}(\alpha A_\alpha + \beta A_\beta) + \frac{1}{c\delta}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_\alpha \boldsymbol{A} = \frac{1}{c\delta}\frac{\partial A_z}{\partial \beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\beta \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} - \frac{1}{c\delta}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha},$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} = \frac{1}{c\delta^3}(\alpha A_\beta - \beta A_\alpha) + \frac{1}{c\delta}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}\right);$$

$$\Delta V = \frac{1}{c^2\delta^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

3.4.6. Система параболических координат вращения (параболоидальные координаты). При вращении фигуры на рис. 3.29 вокруг оси OY параболы обоих семейств опишут ортогональные параболоиды вращения, образующие две системы взаимно ортогональных координатных поверхностей. Третья система координатных поверхностей состоит из полуплоскостей, проходящих через ось вращения. Если принять за оси прямоугольной системы коорди-

натных поверхностей в прямоугольной системе и в системе параболических координат вращения имеют вид:

$$x^2+y^2=c^2\alpha^2\left(\frac{2z}{c}+\alpha^2\right), \qquad \alpha=\text{const},$$
$$x^2+y^2=c^2\beta^2\left(\beta^2-\frac{2z}{c}\right), \qquad \beta=\text{const},$$
$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\psi, \qquad \psi=\text{const}.$$

Координаты α, β, ψ связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$x=c\alpha\beta\cos\psi, \quad y=c\alpha\beta\sin\psi, \quad z=\frac{c}{2}(\beta^2-\alpha^2).$$

Квадрат элемента длины и единицы локальной длины соответственно равны

$$ds^2=c^2(\alpha^2+\beta^2)(d\alpha^2+d\beta^2)+c^2\alpha^2\beta^2\,d\psi^2;$$
$$e_1=e_2=c(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}, \quad e_2=c\alpha\beta.$$

Положим $(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}=\delta$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\alpha V=\frac{1}{c\delta}\frac{\partial V}{\partial\alpha}, \quad \operatorname{grad}_\beta V=\frac{1}{c\delta}\frac{\partial V}{\partial\beta}, \quad \operatorname{grad}_\psi V=\frac{1}{c\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial\psi};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{c\alpha\beta\delta^3}[(\alpha^2+\delta^2)\beta A_\alpha+(\beta^2+\delta^2)\alpha A_\beta]+\frac{1}{c\delta}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial A_\beta}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{c\alpha\beta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi};$$

$$\operatorname{rot}_\alpha\boldsymbol{A}=\frac{1}{c\beta\delta}\left(A_\psi+\beta\frac{\partial A_\psi}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{c\alpha\beta}\frac{\partial A_\beta}{\partial\psi},$$

$$\operatorname{rot}_\beta\boldsymbol{A}=\frac{1}{c\alpha\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\psi}-\frac{1}{c\alpha\delta}\left(A_\psi+\alpha\frac{\partial A_\psi}{\partial\alpha}\right),$$

$$\operatorname{rot}_\psi\boldsymbol{A}=\frac{1}{c\delta^3}(\alpha A_\beta-\beta A_\alpha)+\frac{1}{c\delta}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta}\right);$$

$$\Delta V=\frac{1}{c^2\alpha\beta\delta^2}\left(\beta\frac{\partial V}{\partial\alpha}+\alpha\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{c^2\delta^2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}\right)+\frac{1}{c^2\alpha^2\beta^2}\frac{\partial^2V}{\partial\psi^2}.$$

3.4.7. Система эллиптических цилиндрических координат. На рис. 3.30 изображены эллипс и гипербола — представители двух взаимно ортогональных семейств софокусных эллипсов и гипербол с осями OA и OB [1]). При параллельном переносе по перпендикуляру OC к плоскости рисунка рассматриваемые эллипсы и гиперболы опишут эллиптические и гиперболические цилиндры, образующие две системы взаимно ортогональных координатных поверхностей. Третья система координатных поверхностей состоит из плоскостей, параллельных плоскости OAB. Если OA, OB, OC принять за оси прямоугольной системы Ox, Oy, Oz, то уравнения координатных поверхностей в прямоугольной и эллиптической цилиндрической системах имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{y^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi}-1=0, \qquad \xi=\text{const},$$
$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\varphi}-1=0, \qquad \varphi=\text{const},$$
$$z=\text{const}, \qquad z=\text{const}.$$

[1]) Здесь полезно вспомнить замечание, сделанное в п. 3.4.1 по поводу плоских эллиптических координат.

Координаты ξ, φ, z связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sh}\xi \sin\varphi, \quad z = z.$$

Квадрат элемента длины и локальные единицы равны

$$ds^2 = a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)(d\xi^2 + d\varphi^2) + dz^2,$$
$$e_1 = e_2 = a(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}, \quad e_3 = 1.$$

Положим $(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2} = \Delta$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{a\Delta^3}(\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi A_\xi + \sin\varphi\cos\varphi A_\varphi) + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_\xi A = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_\varphi A = \frac{\partial A_\xi}{\partial z} - \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial A_z}{\partial \xi},$$

$$\operatorname{rot}_z A = \frac{1}{a\Delta^3}(\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi A_\varphi - \sin\varphi\cos\varphi A_\xi) + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \varphi}\right);$$

$$\Delta V = \frac{1}{a^2\Delta^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

3.4.8. Система вытянутых эллипсоидальных координат (вращения). При вращении семейств софокусных эллипсов и гипербол (рис. 3.30) вокруг оси OA получаются соответственно взаимно ортогональные семейства вытянутых эллипсоидов вращения и двуполостных гиперболоидов вращения. Они образуют две системы координатных поверхностей. Третья система состоит из полуплоскостей, проходящих через ось вращения. Если принять OA, OB, OC (OC — перпендикуляр в точке O к плоскости OAB) за оси Oz, Ox, Oy, то координатные поверхности в прямоугольной системе и в системе вытянутых эллипсоидальных координат имеют вид:

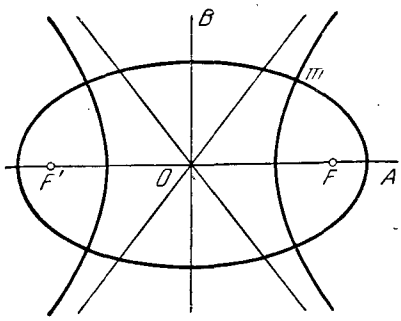


Рис. 3.30.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi} + \frac{z^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi} - 1 = 0, \qquad \xi = \text{const},$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\varphi} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\varphi} + 1 = 0, \qquad \varphi = \text{const},$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \psi = \text{const}.$$

Если ограничить изменения координат следующими интервалами:

$$0 \leqslant \xi < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi,$$

то все точки пространства пробегаются по одному разу.

Уравнение $\xi = 0$ соответствует вырожденному эллипсоиду — отрезку прямой $F'F$. Уравнение $\varphi = 0$ соответствует вырожденному гиперболоиду — прямой с вырезанным отрезком $F'F$.

Координаты ξ, φ, ψ связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями:

$$x = a \operatorname{sh}\xi \sin\varphi \sin\psi, \quad y = a \operatorname{sh}\xi \sin\varphi \cos\psi, \quad z = a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi,$$

Квадрат элемента длины и единицы локальной длины соответственно равны

$$ds^2 = a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)(d\xi^2 + d\varphi^2) + a^2\operatorname{sh}^2\xi\sin^2\varphi\, d\psi^2,$$

$$e_1 = e_2 = a(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}, \quad e_3 = a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi.$$

Положим для упрощения записи $\Delta = (\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial\xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad \operatorname{grad}_\psi V = \frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial\psi};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{a\Delta^3}\left(\frac{2\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\varphi}{\operatorname{th}\xi}A_\xi + \frac{2\sin^2\varphi + \operatorname{sh}^2\xi}{\operatorname{tg}\varphi}A_\varphi\right) + \\ + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi};$$

$$\operatorname{rot}_\xi \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{a\Delta}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}A_\psi + \frac{\partial A_\psi}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\psi},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial A_\xi}{\partial\psi} - \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}A_\psi + \frac{\partial A_\psi}{\partial\xi}\right),$$

$$\operatorname{rot}_\psi \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\Delta^3}(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi A_\varphi - \cos\varphi\sin\varphi A_\xi) + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial\varphi}\right);$$

$$\Delta V = \frac{1}{a^2\Delta^2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}\frac{\partial V}{\partial\xi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{a^2\operatorname{sh}^2\xi\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}.$$

3.4.9. Система сплюснутых эллипсоидальных координиат (вращения). При вращении семейств софокусных эллипсов и гипербол (рис. 3.30) вокруг оси OB получаются взаимно ортогональные семейства сплюснутых эллипсоидов вращения и однополостных гиперболоидов вращения. Они образуют две системы координатных поверхностей. Третья система состоит из полуплоскостей, проходящих через ось вращения. Если принять OA, OB, OC (OC — перпендикуляр к OA и OB) соответственно за оси Ox, Oz, Oy, то координатные поверхности в прямоугольной системе и в системе сплюснутых эллипсоидальных координат имеют вид:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi} + \frac{z^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi} - 1 = 0, \qquad \xi = \text{const},$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cos^2\varphi} - \frac{z^2}{a^2\sin^2\varphi} - 1 = 0, \qquad \varphi = \text{const},$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \psi = \text{const}.$$

Координаты ξ, φ, ψ связаны с координатами x, y, z соотношениями

$$x = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi\sin\psi, \quad y = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi\cos\psi, \quad z = a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi.$$

Квадрат элемента длины и единицы локальной длины равны

$$ds^2 = a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)(d\xi^2 + d\varphi^2) + a^2\operatorname{ch}^2\xi\cos^2\varphi\, d\psi^2,$$

$$e_1 = e_2 = a(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}, \quad e_3 = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi.$$

Пусть длина интервала возможных значений ψ равна 2π. Тогда все точки пространства пробегаются по одному разу в следующих двух случаях:

1) $$0 \leqslant \xi < +\infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

2) $$-\infty < \xi < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Уравнения поверхностей $\xi = 0$ и $\varphi = 0$ описывают в прямоугольной системе координат вырожденный эллипсоид (внутренность круга диаметра $F'F$, лежащего в плоскости xOy) и вырожденный гиперболоид (плоскость xOy с вырезанным кругом диаметра $F'F$). В первом случае для точек, находящихся над или под рассматриваемым кругом, имеет место $\varphi > 0$ или $\varphi < 0$. Во втором случае для точек, находящихся над или под плоскостью с вырезанным кругом, имеет место $\xi > 0$ или $\xi < 0$.

Положим $\Delta = (\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{a\Delta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_\psi V = \frac{1}{a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi}\frac{\partial V}{\partial \psi};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\Delta^3}\left[\operatorname{th}\xi\,(2\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)\,A_\xi + \operatorname{tg}\varphi\,(2\cos^2\varphi - \operatorname{ch}^2\xi)\,A_\varphi\right] + \\ + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi}\frac{\partial A_\psi}{\partial \psi};$$

$$\operatorname{rot}_\xi \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial \varphi} - \operatorname{tg}\varphi\, A_\psi\right) - \frac{1}{a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \psi},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{a \operatorname{ch}\xi \cos\varphi}\frac{\partial A_\xi}{\partial \psi} - \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial \xi} + \operatorname{th}\xi\, A_\psi\right),$$

$$\operatorname{rot}_\psi \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\Delta^3}(\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi\, A_\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\, A_\xi) + \frac{1}{a\Delta}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \varphi}\right);$$

$$\Delta V = \frac{1}{a^2\Delta^2}\left(\operatorname{th}\xi\frac{\partial V}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{a^2 \operatorname{ch}^2\xi \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}.$$

3.4.10. Система бицилиндрических координат. Рассмотрим два ортогональных семейства окружностей (рис. 3.31):

1) окружности, центры которых находятся на оси OX, вида

$$X^2 + Y^2 - 2aX \operatorname{cth}\xi + a^2 = 0; \qquad \text{(а)}$$

2) окружности, центры которых находятся на оси OY, вида

$$X^2 + Y^2 + 2aY \operatorname{ctg}\varphi - a^2 = 0. \qquad \text{(б)}$$

Окружности (б) проходят через точки F' и F, в которые вырождаются окружности (а) при $\xi = \pm\infty$.

Пусть ось OZ перпендикулярна к плоскости XOY. Если рассматриваемые окружности перемещать параллельно оси OZ, то получаются два взаимно ортогональных семейства круговых цилиндров. Они образуют две системы координатных плоскостей. Третья система состоит из плоскостей, параллельных XOY. Если принять OX, OY, OZ соответственно за оси Ox, Oy, Oz, то координатные поверхности в прямоугольной и бицилиндрической системах координат имеют вид:

$x^2 + y^2 - 2ax \operatorname{cth}\xi + a^2 = 0,$	$\xi = \text{const},$
$x^2 + y^2 + 2ay \operatorname{ctg}\varphi - a^2 = 0,$	$\varphi = \text{const},$
$z = \text{const},$	$z = \text{const}.$

Следовательно, координаты ξ, φ, z связаны с координатами x, y, z соотношениями

$$x = a\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad y = a\frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad z = z.$$

Окружности семейства (а) целиком расположены справа или слева от оси Oy соответственно при положительном или отрицательном значении ξ. При $\xi = \pm\infty$ цилиндры (а) вырождаются в прямые, параллельные оси Oz и проходящие через F и F'; плоскость yOz задается уравнением (а) при $\xi = 0$.

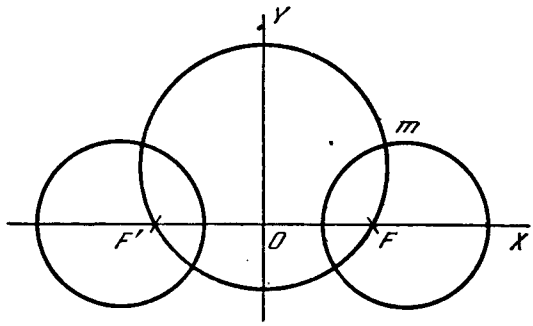


Рис. 3.31.

Значение параметра φ, соответствующее любой окружности семейства (б), определяется лишь с точностью до $k\pi$. Поэтому будем считать, что φ лежит в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Отсюда следует, что точки окружностей семейства (а), симметричные относительно оси OX, имеют координаты φ и $\pi - \varphi$ $\left(\text{для точек нижней полуплоскости } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Если полоса плоскости xOz, заключенная между двумя фокальными линиями, выражается уравнением $\varphi = 0$, то часть этой же плоскости вне полосы имеет уравнение $\varphi = \pi$.

Легко показать, что угол $FmF' = \pi - \varphi$ или φ в зависимости от положения точки пересечения окружностей m на верхней или нижней дуге и что $\xi = \ln \frac{mF}{mF'}$.

Квадрат элемента длины и локальные единицы равны

$$ds = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi)^2}(d\xi^2 + d\varphi^2) + dz^2,$$

$$e_1 = e_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad e_3 = 1.$$

Положим $\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi = \lambda$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V = \frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{a}(\sin\varphi A_\varphi - \operatorname{sh}\xi A_\xi) + \frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_\xi A = \frac{\lambda}{a}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_\varphi A = \frac{\partial A_\xi}{\partial z} - \frac{\lambda}{a}\frac{\partial A_z}{\partial \xi},$$

$$\operatorname{rot}_z A = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{a}(\sin\varphi A_\xi + \operatorname{sh}\xi A_\varphi);$$

$$\Delta V = \frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

3.4.11. Системы тороидальных и бисферических координат. 1. При вращении фигуры на рис. 3.31 вокруг оси OY окружности (а) и (б) образуют ортогональные семейства торов и сфер. Третья система координатных поверхностей рассматриваемой тороидальной системы координат состоит из полуплоскостей, проходящих через ось вращения. Примем оси OX, OY, OZ соответственно за оси Ox, Oz, Oy. Уравнения координатных поверхностей

в прямоугольной и тороидальной системах имеют вид:

$$(x^2+y^2+z^2+a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)\operatorname{cth}^2\xi=0, \qquad \xi=\text{const};$$
$$x^2+y^2+z^2-2az\operatorname{ctg}\varphi-a^2=0, \qquad \varphi=\text{const};$$
$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\psi, \qquad \psi=\text{const}.$$

Координаты ξ, φ, ψ связаны с координатами x, y, z соотношениями *)

$$x=a\frac{\operatorname{sh}\xi\sin\psi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad y=a\frac{\operatorname{sh}\xi\cos\psi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad z=-a\frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}.$$

Все точки пространства пробегаются по одному разу, если изменение координат ξ, φ, ψ ограничить интервалами

$$0\leqslant\xi<+\infty, \quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\psi<2\pi.$$

Уравнение $\xi=+\infty$ соответствует вырожденному тору — кругу с диаметром $F'F$. Этот же круг получится, если мы примем $\varphi=0$. Внешность этого круга (плоскость, из которой вырезан рассматриваемый круг) выражается уравнениями $\varphi=\pm\pi$.

Квадрат элемента длины и локальные единицы равны

$$ds^2=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi)^2}(d\xi^2+d\varphi^2+\operatorname{sh}^2\xi\,d\psi^2).$$
$$e_1=e_2=\frac{a}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad e_3=\frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}.$$

Положим $\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi=\lambda$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V=\frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial\xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V=\frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad \operatorname{grad}_\psi V=\frac{\lambda}{a\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial V}{\partial\psi};$$
$$\operatorname{div}A=\frac{1-\operatorname{sh}^2\xi+\operatorname{ch}\xi\cos\varphi}{a\operatorname{sh}\xi}A_\xi+\frac{2\sin\varphi}{a}A_\varphi+\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\lambda}{a\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi};$$
$$\operatorname{rot}_\xi A=\frac{\sin\varphi}{a}A_\psi+\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial\varphi}-\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\psi}\right),$$
$$\operatorname{rot}_\varphi A=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial A_\xi}{\partial\psi}-\frac{\partial A_\psi}{\partial\xi}\right)-\frac{1+\operatorname{ch}\xi\cos\varphi}{a\operatorname{sh}\xi}A_\psi,$$
$$\operatorname{rot}_\psi A=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\xi}-\frac{\partial A_\xi}{\partial\varphi}\right)-\frac{\sin\varphi}{a}A_\xi-\frac{\operatorname{sh}\xi}{a}A_\varphi;$$
$$\Delta V=\frac{\lambda(1+\cos\varphi\operatorname{ch}\xi)}{a^2\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial V}{\partial\xi}+\frac{\lambda\sin\varphi}{a^2}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\frac{\partial^2V}{\partial\psi^2}\right).$$

2. При вращении фигуры на рис. 3.31 вокруг оси OX окружности (а) и (б) образуют соответственно две сферы и ортогональные им тороидальные поверхности. Эти тороидальные поверхности отличаются от торов, полученных выше при вращении рис. 3.31 вокруг оси OY, так как окружности семейства (б) пересекают ось вращения. Третья система координатных поверхностей бисферической системы координат состоит из полуплоскостей, проходящих через ось вращения. Отметим, что при определенных условиях сферы вырождаются в две точки F и F', играющие роль полюсов. Поэтому

*) Обычно в знаменателях формул связи между тороидальными и прямоугольными координатами стоит знак минус. Это соответствует замене φ на $\pi-\varphi$ (см., например, [6]).

бисферическая система координат называется также биполярной системой координат (в пространстве). Если OX, OY, OZ принять соответственно за оси Oz, Ox, Oy, то уравнения координатных поверхностей в прямоугольной и бисферической системах имеют вид:

$$x^2+y^2+z^2-2az\operatorname{cth}\xi+a^2=0, \quad \xi=\text{const},$$
$$(x^2+y^2+z^2-a^2)^2-4a^2(x^2+y^2)\operatorname{ctg}^2\varphi=0, \quad \varphi=\text{const},$$
$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\psi, \quad \psi=\text{const}.$$

Координаты ξ, φ, ψ и x, y, z связаны соотношениями *)

$$x=a\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad y=a\frac{\sin\varphi\cos\psi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad z=a\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}.$$

Все точки пространства пробегаются по одному разу, если изменения координат ξ, φ, ψ ограничить следующими интервалами:

$$-\infty<\xi<+\infty, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \quad 0\leqslant\psi<2\pi.$$

Квадрат элемента длины и локальные единицы длины равны

$$ds^2=\frac{a^2}{(\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi)^2}(d\xi^2+d\varphi^2+\sin^2\varphi\,d\psi^2),$$
$$e_1=e_2=\frac{a}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}, \quad e_3=\frac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi}.$$

Положим $\operatorname{ch}\xi+\cos\varphi=\lambda$. Согласно формулам п. 3.4.2 имеем:

$$\operatorname{grad}_\xi V=\frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial\xi}, \quad \operatorname{grad}_\varphi V=\frac{\lambda}{a}\frac{\partial V}{\partial\varphi}, \quad \operatorname{grad}_\psi V=\frac{\lambda}{a\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial\psi};$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\cos\varphi\operatorname{ch}\xi+\sin^2\varphi+1}{a\sin\varphi}A_\varphi-\frac{2\operatorname{sh}\xi}{a}A_\xi+\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}\right);$$
$$\operatorname{rot}_\xi\boldsymbol{A}=\frac{\cos\varphi\operatorname{ch}\xi+1}{a\sin\varphi}A_\psi+\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\psi}{\partial\varphi}-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\psi}\right),$$
$$\operatorname{rot}_\varphi\boldsymbol{A}=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial A_\xi}{\partial\psi}-\frac{\partial A_\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\operatorname{sh}\xi}{a}A_\psi,$$
$$\operatorname{rot}_\psi\boldsymbol{A}=\frac{\lambda}{a}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\xi}-\frac{\partial A_\xi}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{a}(\operatorname{sh}\xi A_\varphi+\sin\varphi A_\xi);$$
$$\Delta V=\frac{\lambda}{a^2}\left(\frac{\cos\varphi\operatorname{ch}\xi+1}{\sin\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}-\operatorname{sh}\xi\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)+\frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2V}{\partial\psi^2}\right).$$

3.4.12. Система софокусных поверхностей второго порядка (система общих эллипсоидальных координат). Рассмотрим семейство софокусных поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}-1=0, \quad 0\leqslant c^2<b^2<a^2,$$

зависящих от одного параметра k. Через каждую точку пространства с координатами (x, y, z) проходят три поверхности указанного типа. В самом деле, при любых фиксированных x, y, z относительно k получается уравнение третьей степени. Все три корня этого уравнения λ, μ и ν вещественны и подчиняются неравенствам

$$\lambda<c^2<\mu<b^2<\nu<a^2.$$

*) Относительно знака в знаменателях см. предыдущую сноску.

Отсюда следует, что через каждую точку пространства проходят эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды. Эти поверхности попарно ортогональны, т. е. три величины λ, μ, ν определяют ортогональную криволинейную систему координат.

Определим зависимость между координатами λ, μ, ν и x, y, z. С этой целью рассмотрим тождество

$$x^2(b^2-k)(c^2-k)+y^2(a^2-k)(c^2-k)+z^2(a^2-k)(b^2-k)- \\ -(a^2-k)(b^2-k)(c^2-k)\equiv(k-\lambda)(k-\mu)(k-\nu).$$

Приравнивая k последовательно a^2, b^2, c^2, получим выражения для x^2, y^2, z^2 вида

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Если координатам λ, μ, ν придать приращения $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, то, учитывая взаимную ортогональность координатных поверхностей, найдем единицы локальной длины:

$$e_1^2=\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)},$$

$$e_2^2=\frac{1}{4}\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)},$$

$$e_3^2=\frac{1}{4}\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}.$$

3.4.13. Приложение к уравнениям Максвелла. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах. Формулы (75) и (76), примененные к системе (62), позволяют написать уравнения Максвелла в системе ортогональных криволинейных координат u, v, w. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}(e_3E_w)-\frac{\partial}{\partial w}(e_2E_v)=-e_2e_3\frac{\partial B_u}{\partial t}. \tag{77}$$

Два других уравнения получаются круговой перестановкой индексов. По аналогии

$$\frac{\partial}{\partial v}(e_3H_w)-\frac{\partial}{\partial w}(e_2H_v)=e_2e_3\frac{\partial D_u}{\partial t}+e_2e_3J_u \tag{78}$$

и, как выше, два других уравнения получаются круговой перестановкой индексов.

Условия $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho$ записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial u}(B_ue_2e_3)+\frac{\partial}{\partial v}(B_ve_3e_1)+\frac{\partial}{\partial w}(B_we_1e_2)=0, \tag{79}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_ue_2e_3)+\frac{\partial}{\partial v}(D_ve_3e_1)+\frac{\partial}{\partial w}(D_we_1e_2)=e_1e_2e_3\rho. \tag{80}$$

Совокупность уравнений (77) — (80) может оказаться очень полезной, например, при решении задачи о распространении электромагнитных волн, направленных вдоль проводящей поверхности простой геометрической формы [1]).

[1]) Использование уравнений Максвелла в ортогональных криволинейных координатах при решении конкретных задач изложено в гл. VI.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III

1. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начало теизорного исчисления, Изд. АН СССР, 1951.
2. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Физматгиз, 1963.
3. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Физматгиз, 1962.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочиик по математике, Физматгиз, 1959.
5. Романовский П. И., Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, Физматгиз, 1959.
6. Бермант А. Ф., Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина, Физматгиз, 1958.
7. Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1960.
8. Гольдфайн И. А., Векториый анализ и теория поля, Физматгиз, 1962.
9. Меркин Д. Р., Алгебра свободных и скользящих векторов, Физматгиз, 1962.

ГЛАВА IV

МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

4.1.1. Плоское преобразование, понятие оператора. Обозначим через α операцию, преобразующую вектор $\boldsymbol{u}$ в другой вектор $\boldsymbol{v}$. Это преобразование можно символически написать в виде

$$\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}.$$

Если операция α преобразует каждый вектор в строго определенный вектор, то рассматриваемое преобразование однозначно.

Если операция α преобразует различные векторы в различные, т. е. неравенство $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ влечет за собой $\alpha\boldsymbol{u} \neq \alpha\boldsymbol{v}$, то она называется неособенной.

Если

$$\alpha(c\boldsymbol{u}) = c(\alpha\boldsymbol{u}),$$

$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v},$$

где c — произвольная постоянная, а $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — произвольные векторы, то преобразование называется линейным. Ниже мы ограничимся только линейными операциями.

Принято называть α оператором преобразования.

Если вектор $\boldsymbol{u}$, отличный от нуля, преобразуется в вектор $\boldsymbol{v}$, имеющий то же направление, т. е. если преобразование α изменяет только длину или, как принято говорить, модуль вектора $\boldsymbol{u}$, то, обозначив через λ коэффициент растяжения или сжатия длины вектора, получаем

$$\alpha\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}.$$

(В этом равенстве α — оператор, а λ — алгебраическое число.) Принято говорить, что направление вектора $\boldsymbol{u}$ — это собственное направление оператора α, а λ — это соответствующее собственное значение.

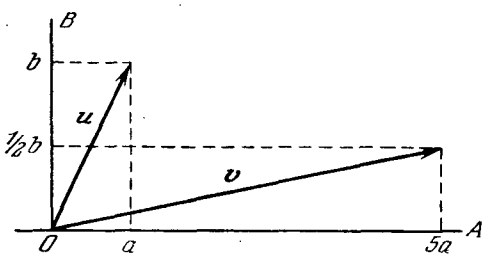


Рис. 4.1.

Пример 1. Даны две взаимно перпендикулярные прямые OA, OB и вектор $\boldsymbol{u}$. Пусть новый вектор $\boldsymbol{v}$ определяется следующим образом: его проекция на OA в 5 раз больше проекции $\boldsymbol{u}$ на OA, а его проекция на OB равна половине проекции $\boldsymbol{u}$ на OB (рис. 4.1).

Ясно, что если вектор $\boldsymbol{u}$ находится на прямой OA, то

$$\alpha\boldsymbol{u} = 5\boldsymbol{u},$$

а если он находится на OB, то

$$\alpha u = 0{,}5\, u.$$

Следовательно, OA и OB — два собственных направления α, а числа 5 и 0,5 — два соответствующих им собственных значения.

4.1.2. Сумма двух операторов. Если две операции α и β по отдельности приложены к вектору u, то сумма $\alpha u + \beta u$ обозначается через

$$(\alpha + \beta) u.$$

Оператор $\alpha + \beta$ называется суммой операторов α и β.

4.1.3. Произведение двух операторов. Пусть произведена операция α над результатом операции β, проделанной над u. Если можно перейти непосредственно от u к конечному результату действия обоих операторов при помощи единственной операции γ, то оператор γ называется произведением операторов α и β:

$$\gamma u = \alpha(\beta u).$$

Символически это записывается в виде

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Следует заметить, что в большинстве случаев оператор $\alpha\beta$ отличается от $\beta\alpha$, поскольку порядок, в котором производятся операции, не безразличен. Это легко показать на следующем примере.

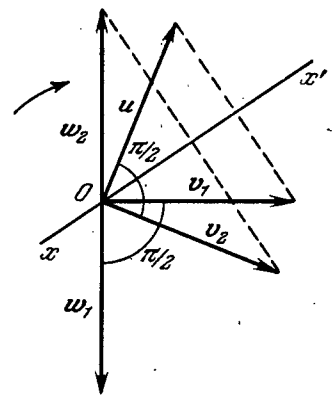


Рис. 4.2.

Пример 2. Дана прямая xx', точка O на этой прямой и некоторый вектор u (рис. 4.2). Операцию α определим как зеркальное отображение по отношению к прямой xx', а операцию β как поворот на 90° в направлении часовой стрелки. Операция α над u дает вектор v_1, а операция β над v_1 — вектор w_1. Операция β над u дает вектор v_2, а операция α над v_2 — вектор w_2, отличный от w_1 (концы векторов w_1 и w_2 симметричны по отношению к точке O).

Разность $\alpha\beta - \beta\alpha$ назовем коммутатором операторов α и β. Если коммутатор двух операторов равен нулю, то говорят, что операторы перестановочны. В этом случае

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

4.1.4. Представление плоских преобразований с помощью матриц. Даны две оси прямоугольных координат, вектор u с составляющими u_1, u_2 и вектор v, полученный из u посредством преобразования α. Составляющие v_1 и v_2 нового вектора можно выразить как линейную функцию координат u_1 и u_2 прежнего вектора. Получим два равенства, в которых коэффициенты α_{ik} — числа:

$$v_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2,$$
$$v_2 = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2.$$

Рассматриваемое преобразование характеризуется таблицей коэффициентов $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$. Она называется матрицей преобразования.

Пример 3. В примере 1 имеем

$$v_1 = 5u_1 + 0 \cdot u_2,$$
$$v_2 = 0 \cdot u_1 + 0{,}5u_2.$$

Матрица оператора α здесь равна

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. В примере 2 операция α представлена матрицей $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, а операция β — матрицей $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.1.5. Произведение двух матриц. Даны два преобразования α и β, характеризующиеся соответственно матрицами

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Применив к вектору u преобразование β, а к полученному таким образом вектору v преобразование α, найдем вектор w. Определим матрицу преобразования γ, позволяющего непосредственно перейти от вектора u к вектору w. Имеем

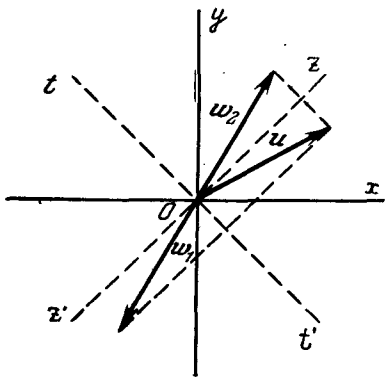


Рис. 4.3.

$$v_1 = \beta_{11}u_1 + \beta_{12}u_2,$$
$$v_2 = \beta_{21}u_1 + \beta_{22}u_2.$$

Затем

$$w_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2,$$
$$w_2 = \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2$$

или

$$w_1 = (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21})\,u_1 + (\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22})\,u_2,$$
$$w_2 = (\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21})\,u_1 + (\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22})\,u_2.$$

Итак, матрица, определяющая преобразование $\alpha\beta$, иначе говоря, матрица произведения γ, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{bmatrix}.$$

Мы узнаем здесь обычное правило образования элементов произведения двух определителей.

Пример 5. Рассмотрим обе матрицы из примера 4. Имеем

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразование $\alpha\beta$ является зеркальным отображением вектора u относительно биссектрисы координатного угла zz', а преобразование $\beta\alpha$ — зеркальным отображением относительно биссектрисы tt'. Результаты преобразований, очевидно, симметричны по отношению к точке O (рис. 4.3).

Легко заметить правило образования элементов матрицы произведения $\alpha\beta$ на приведенном примере произведения двух матриц, имеющих по две

строки и два столбца. Каждый элемент строки матрицы α умножают на соответствующий элемент столбца матрицы β и полученные произведения складывают. Например, элемент γ_{12} матрицы произведения, находящийся на пересечении первой строки и второго столбца, является суммой произведений первого элемента первой строки матрицы α на первый элемент второго столбца β и второго элемента той же строки α на второй элемент того же столбца β:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix},$$

$$\gamma_{12}=\alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}.$$

4.1.6. Представление вектора посредством матрицы. Дан вектор u с составляющими u_1, u_2. Мы можем представить его как матрицу

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

Преобразование вектора u с помощью операции, определяемой матрицей α, состоит теперь в умножении матриц

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}.$$

Применяя предыдущее правило, получаем координаты вектора v:

$$v_1=\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}u_2,$$
$$v_2=\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}u_2.$$

4.1.7. Обобщение на n-мерное пространство. Все, что мы говорили о двухмерном пространстве, легко обобщить на n-мерное пространство.

Пусть дан вектор u с координатами $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Группа линейных преобразований

$$v_i=\sum_k \alpha_{ik}u_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

позволяет перейти от вектора u к вектору v с координатами $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Матрица преобразования будет

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}.$$

Вектор u может быть представлен в виде матрицы, состоящей из одного столбца

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \cdot\\ \cdot\\ u_n\end{bmatrix}.$$

Матрицу с элементами α_{ik} будем обозначать через $[\alpha_{ik}]$. Для упрощения записи и только в том случае, когда можно не опасаться путаницы, мы будем обозначать ее просто через α. Точно так же будем обозначать через u одностолбцовую матрицу, образованную из координат вектора.

4.1.8. Равенство двух матриц. Две матрицы равны, если определяемое ими преобразование, примененное к произвольному вектору, дает один и тот же результат.

Из

$$\sum_k \alpha_{ik} u_k = \sum_k \alpha'_{ik} u_k$$

получаем

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik},$$

т. е. соответствующие элементы, составляющие две равные матрицы, должны быть равны.

4.1.9. Сложение двух матриц. Даны векторы v и w, полученные последовательным применением к одному и тому же вектору u преобразования, определяемого матрицами α и β:

$$v_i = \sum_k \alpha_{ik} u_k, \qquad v = \alpha u,$$

$$w_j = \sum_l \beta_{jl} u_l, \qquad w = \beta u.$$

Сумму $v + w$ можно получить, применяя к вектору u преобразование, определяемое матрицей γ, которая получена сложением соответствующих элементов матриц α и β:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik},$$

$$v_i + w_i = \sum_k (\alpha_{ik} + \beta_{ik}) u_k, \quad v + w = (\alpha + \beta) u.$$

Матрица γ называется суммой двух матриц α и β. Сложение матриц определено только в том случае, когда они имеют одинаковое число строк и столбцов. Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

4.1.10. Умножение матрицы на число. Из предыдущего определения следует, что если нужно сложить λ одинаковых матриц α, т. е. умножить матрицу α на число λ, то результат этой операции можно получить, умножив каждый элемент матрицы α на λ:

$$\gamma_{ik} = \lambda \alpha_{ik}, \quad \gamma = \lambda \alpha.$$

Например,

$$7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 14 & 0 & -21 \\ 28 & -7 & -14 \end{bmatrix}.$$

4.1.11. Умножение матриц. Вектор w может быть получен последовательным применением к вектору u преобразований, определяемых матрицами β и α. Перейдем, как в п. 4.1.5, от u к w непосредственно, путем преобразования, определяемого матрицей γ.

Имеем

$$v_l = \sum_k \beta_{lk} u_k, \quad w_j = \sum_l \alpha_{jl} v_l,$$

откуда

$$w_j = \sum_k \left(\sum_l \alpha_{jl} \beta_{lk} \right) u_k.$$

Сравнивая с

$$w_j = \sum_k \gamma_{jk} u_k,$$

получаем правило умножения матриц α и β

$$\gamma_{jk} = \sum_l \alpha_{jl} \beta_{lk},$$

определяющее матрицу произведения

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Следовательно, элемент на пересечении строки j и столбца k матрицы γ мы получим, умножая первый член строки j матрицы α на первый член столбца k матрицы β и складывая с аналогичным произведением вторых членов, потом третьих и т. д. по схеме рис. 4.4. Итак, правило умножения, описанное в п. 4.1.5 для случая матриц в две строки и два столбца, имеет общий характер.

Рассмотрим совокупность линейных преобразований, переводящих вектор u в вектор v:

$$v_l = \sum_k \alpha_{lk} u_k.$$

Эти преобразования можно получить, применив правило умножения матриц:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}.$$

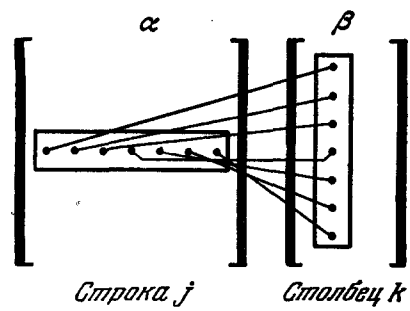


Рис. 4.4.

Иначе говоря,

$$v = \alpha u.$$

Замечания. 1. Мы видели, что умножение матриц — некоммутативная операция, но легко показать, что эта операция ассоциативная, т. е. что

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Из правила умножения матриц непосредственно видно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей. Поэтому если

$$\alpha\beta = \gamma,$$

то

$$|\alpha||\beta| = |\gamma|,$$

где $|\alpha|$, $|\beta|$ и $|\gamma|$ — определители соответствующих матриц. Понятно, что это замечание имеет смысл только в случае квадратных матриц.

2. Очевидно, что понятие произведения двух матриц приложимо не только к квадратным матрицам или матрицам в одну строку или один столбец, но и к прямоугольным матрицам. Однако важно отметить, что произведение матриц имеет смысл только в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Примеры. Применяя изложенные выше правила умножения, получаем следующие результаты:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & -9 & -15 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 0 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3+2j \\ -4-j & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5+3j & -1+7j \\ 1-4j & -2j \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=-6,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

4.1.12. Симметричные матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу α. Общий элемент ее α_{ik} находится на пересечении строки i и столбца k:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1}\alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ik} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элементы $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{ii}, \dots, \alpha_{kk}, \dots, \alpha_{nn}$, расположенные по нисходящей диагонали слева направо, образуют так называемую главную диагональ матрицы.

Симметричной называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны между собой:

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}.$$

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & x & -y \\ x & 3 & 4 \\ -y & 4 & z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} x & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -z \\ -3 & -z & 9 \end{bmatrix}$$

— симметричные матрицы.

4.1.13. Кососимметричные матрицы. Кососимметричной называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку:

$$\alpha_{ik}=-\alpha_{ki}.$$

Из определения следует, что все элементы главной диагонали кососимметричной матрицы равны нулю: $\alpha_{ii}=0$.

Следующие матрицы кососимметричны:

$$\begin{bmatrix} 0 & x & -3 & 4 \\ -x & 0 & -z & 1 \\ 3 & z & 0 & xy \\ -4 & -1 & -xy & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & y & 4 \\ -y & 0 & -x \\ -4 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

4.1.14. Диагональные матрицы. Диагональной называется матрица, все элементы которой равны нулю, кроме тех, что расположены на главной диагонали:

$$a_{lk} \begin{cases} = 0 & \text{для } l \neq k, \\ \neq 0 & \text{для } l = k. \end{cases}$$

Например, матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

диагональна.

Легко показать, что произведение двух диагональных матриц — тоже диагональная матрица и что они перестановочны.

4.1.15. Единичная матрица. Нулевая матрица. Единичная матрица — это диагональная матрица, все элементы которой равны единице. Будем обозначать ее через [1]. В матричном исчислении она играет такую же роль, как число 1 в алгебре. Здесь удобно ввести символ Кронекера δ_{lk}, который понадобится нам в дальнейшем. Этот символ равен нулю при $l \neq k$ и единице при $l = k$. Пользуясь этим обозначением, получаем для единичной матрицы

$$a_{lk} = \delta_{lk}.$$

Единичная матрица, например, в 3 строки и 3 столбца может быть написана так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица преобразует любой вектор в самого себя:

$$[1]\, u = u.$$

Действительно,

$$u_k = \sum_l \delta_{kl} u_l.$$

Соотношение $[1]\, u = u$ соответствует формуле $1 \cdot a = a$ для чисел.

Нулевая матрица — это матрица, все элементы которой равны нулю. Мы обозначим ее через [0]. В матричном исчислении она играет ту же роль, что число нуль в алгебре.

4.1.16. Порядок, ранг матрицы. Если квадратная матрица имеет n строк и столбцов, то число n называется порядком матрицы.

Если определитель матрицы равен нулю, говорят, что она вырождена.

Минором матрицы называется определитель, полученный вычеркиванием из матрицы одинакового числа столбцов и строк. Если все миноры порядка выше r, которые можно составить из матрицы, равны нулю, а среди миноров порядка r хотя бы один отличен от нуля, то число r называется

рангом этой матрицы. Иначе говоря, ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров матрицы.

Пример. Матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

вырожденная. Порядок ее равен 4, а ранг 1.

4.1.17. Необходимые условия равенства нулю произведения двух матриц. Рассмотрим произведение двух квадратных матриц порядка n, имеющих ранги r_1 и r_2. Можно доказать, что ранг r матрицы произведения удовлетворяет неравенствам:

$$r \leqslant r_1 \quad \text{и} \quad r \leqslant r_2, \tag{*}$$

$$n + r \geqslant r_1 + r_2. \tag{**}$$

Пусть даны две квадратные матрицы α и β порядка n, такие, что

$$\alpha\beta = [0].$$

В отличие от алгебры, где равенство $ab = 0$ влечет за собой одно из равенств $a = 0$ или $b = 0$, произведение двух матриц может быть нулевой матрицей и в случае, когда оба сомножителя отличны от нуля (точнее, от нулевой матрицы).

Пусть матрицы α и β — ненулевые. Если их произведение равно нулю, значит, равен нулю ранг r матрицы этого произведения. Следовательно, в этом случае неравенства (*) всегда удовлетворяются. Неравенство (**) дает необходимое (но не достаточное) условие, которому должны удовлетворять ранги матриц-сомножителей:

$$r_1 + r_2 \leqslant n.$$

Отсюда следует, что обе матрицы обязательно вырождены. Представим себе такой случай: матрица α вырождена, но один из ее миноров, составленный из $n - 1$ строк и столбцов, не равен нулю. Тогда ранг α равен $n - 1$. Так как ранг матрицы β не равен нулю, то в силу предыдущего неравенства он может быть равен только единице. Но, как легко заметить, квадратная матрица может быть ранга 1 только в том случае, если все ее элементы пропорциональны. Следовательно, матрица β обязательно имеет вид

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & a_1\beta_{11} & \dots & a_n\beta_{11} \\ \beta_{21} & a_1\beta_{21} & \dots & a_n\beta_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & a_1\beta_{n1} & \dots & a_n\beta_{n1} \end{bmatrix}.$$

Примеры.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0]_4, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [0]_3,$$

где $[0]_n$ означает нулевую матрицу порядка n.

4.1.18. Транспонированная матрица. Транспонированной называют матрицу, которую можно получить из матрицы α, заменив строки столбцами. Обозначим ее через $\tilde{\alpha}$. Тогда

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}.$$

Например, матрица

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

является транспонированной по отношению к

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица, транспонированная матрице произведения двух матриц, равна произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке:

$$\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}.$$

Действительно, матрица $\widetilde{(\alpha\beta)}$ получена вначале умножением элементов строк α на элементы столбцов β, а затем заменой строк на столбцы. Тот же результат можно получить, умножая элементы столбцов β, т. е. строк $\tilde{\beta}$, на элементы строк α, т. е. столбцов $\tilde{\alpha}$.

Указанное правило непосредственно распространяется на произведение более чем двух матриц:

$$\widetilde{(\alpha \cdot \beta \ldots \omega)} = \tilde{\omega} \ldots \tilde{\beta}\tilde{\alpha}.$$

Замечания. 1. Рассмотрим скалярное произведение двух векторов u и v, представленных соответственно матрицами

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Оно может быть записано в системе прямоугольных координат:

$$P = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

Чтобы получить это произведение по правилу матричного умножения, следует принять, что

$$P = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix},$$

то есть

$$P = \tilde{u}v.$$

Квадрат модуля вектора u будет, следовательно, равен

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \tilde{u}u.$$

2. Билинейная форма, иначе говоря, выражение, зависящее от двух переменных

$$\sum_{r=1}^{n} y_r(\alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rm}x_m),$$

может быть записана в матричном виде как $\tilde{y}\alpha x$ или $\tilde{x}\tilde{\alpha}y$, если через y, x, α обозначить следующие матрицы:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}.$$

При $x = y$ получаем квадратичную форму.

Примеры.

$$[y_1y_2y_3]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= y_1(3x_1 + x_2) + y_2 2x_2 + y_3(-x_1 + x_2),$$

$$[x_1x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

4.1.19. Обратная матрица. Рассмотрим матрицу α, преобразующую вектор u в вектор v:

$$v = \alpha u.$$

Иначе говоря, речь идет о таблице коэффициентов, входящих в n линейных соотношений

$$v_i = \sum_k \alpha_{ik}u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу β, определяющую обратное преобразование от нового вектора v к прежнему вектору u

$$u = \beta v,$$

иначе говоря, таблицу коэффициентов, входящих в следующие линейные соотношения:

$$u_j = \sum_l \beta_{jl}v_l \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Матрица β называется обратной по отношению к матрице α и обозначается через α^{-1}.

Коэффициенты β_{jl} системы соотношений (2) можно получить из системы (1), решив ее относительно $u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots, u_n$. Они могут быть вычислены по известной формуле Крамера:

$$\beta_{jl} = \frac{A_{lj}}{\Delta}.$$

Здесь Δ — определитель матрицы α, A_{lj} — алгебраическое дополнение соответствующего элемента α_{lj}, т. е. определитель, который получают, вычеркивая в Δ строку и столбец, пересекающиеся на элементе α_{lj}, снабженный

множителем $(-1)^{l+j}$[1]). Следует обратить внимание на то, что элемент β_{jl}, находящийся на пересечении строки j и столбца l в β, соответствует в α минору A_{lj}, относящемуся к элементу α_{lj}, который находится на пересечении строки l и столбца j. На практике вычисление матрицы, обратной α, осуществляется так:

1. Выписывают матрицу $\tilde{\alpha}$, транспонированную по отношению к α.

2. Заменяют каждый элемент матрицы $\tilde{\alpha}$ определителем, полученным в результате вычеркивания строки и столбца, на которых расположен данный элемент.

3. Этот определитель сопровождают знаком плюс, если сумма индексов элемента четная, и знаком минус — в противном случае.

4. Делят полученную матрицу на Δ — определитель матрицы α.

Пример. Требуется вычислить матрицу, обратную

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{\alpha}$ будет

$$\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Заменим каждый элемент определителем, полученным при вычеркивании соответствующей строки и столбца:

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \\ 24 & 3 & -6 \\ 22 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Переменим знаки у элементов с нечетной суммой индексов. Тогда

$$\begin{bmatrix} -3 & +6 & -3 \\ -24 & +3 & +6 \\ +22 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Разделим на $\Delta = 15$. Таким образом, получаем

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице произведения двух матриц, равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке, т. е.

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

---

[1]) Алгебраическое дополнение отличается от соответствующего минора множителем $(-1)^{l+j}$.

Действительно, рассмотрим произведение $\alpha\beta\beta^{-1}\alpha^{-1}$. В силу ассоциативности операции умножения (п. 4.1.11), $\alpha\beta\beta^{-1}\alpha^{-1} = [1]$. Обозначая $\alpha\beta = \gamma$ и учитывая, что $\gamma\gamma^{-1} = [1]$, находим

$$\gamma^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Это правило непосредственно распространяется и на произведение любого числа матриц:

$$(\alpha\beta \dots \omega)^{-1} = \omega^{-1} \dots \beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Замечания. 1. При вычислении обратной матрицы предполагается, что определитель матрицы отличен от нуля, иначе говоря, что матрица невырождена. В противном случае определить обратную матрицу невозможно.

Сказанное относится и ко всем не квадратным матрицам. Их можно всегда сделать квадратными, прибавив необходимое число нулей, но тогда определитель матрицы будет равен нулю.

2. В случае диагональной матрицы обратная матрица также диагональна. Элементы ее, не равные нулю, представляют собой обратные величины диагональных элементов заданной матрицы:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \qquad \alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}.$$

3. Мы видели, что правило умножения двух матриц то же, что и умножения двух определителей. Однако аналогия между матричным исчислением и операциями с определителями на этом и заканчивается. В частности, правило умножения на число и правило сложения очень различны. Действительно,

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & b & c \\ \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Точно так же

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b & c \\ a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a' & 2b & 2c \\ a_1 + a'_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ a_2 + a'_2 & 2b_2 & 2c_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b & c \\ a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + a' & b & c \\ a_1 + a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Мы не останавливаемся, конечно, на глубоком различии сущности обоих понятий. Предыдущее замечание было сделано только для того, чтобы внешняя аналогия не привела к ошибкам из-за смешения правил вычисления.

4.1.20. Применение матричного исчисления к решению системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений может быть выполнено по формулам Крамера. Матричные обозначения позволяют записать систему в сжатой форме и, таким образом, делают более удобным обращение с нею. В особенности матричные обозначения облегчают получение некоторых групп неизвестных, причем часто отпадает необходимость вычислять остальные неизвестные.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Если обозначить через y матрицу $\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$, через x матрицу $\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, а через α матрицу коэффициентов, то система (3) может быть записана в форме

$$y = \alpha x.$$

Положим, что нам нужно решить эту систему относительно первых k неизвестных $x_1, \ldots, x_k$. Мы можем написать матрицу α в виде

$$\alpha = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,\,k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,\,k+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ \hline \alpha_{k+1,\,1} & \ldots & \alpha_{k+1,\,k} & \alpha_{k+1,\,k+1} & \ldots & \alpha_{k+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nk} & \alpha_{n,\,k+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right].$$

Ее можно рассматривать как составленную из четырех матриц A_1, A_2, A_3, A_4. Подобным же разложением получим

$$y = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \\ \hline y_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, систему (3) можно представить как

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Формулы умножения матриц показывают, что можно считать матрицы A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_2, Y_1, Y_2 составными элементами и записать систему в виде

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_1X_1 + A_2X_2, \\ Y_2 &= A_3X_1 + A_4X_2. \end{aligned}$$

Исключим из этой системы X_2. Последовательным вычислением получим

$$A_4X_2 = Y_2 - A_3X_1,$$
$$X_2 = A_4^{-1}(Y_2 - A_3X_1),$$
$$Y_1 = A_1X_1 + A_2A_4^{-1}(Y_2 - A_3X_1)$$

и окончательно

$$Y_1 - A_2A_4^{-1}Y_2 = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)X_1.$$

Это — группа из k линейных уравнений вида $Y = \alpha X$, она не содержит больше $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Пример. Решить относительно x_1, x_2 систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -16, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -12. \end{cases}$$

Разложим матрицы x, y, α следующим образом:

$$\alpha = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right], \quad x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right], \quad y = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 9 \\ \hdashline -16 \\ 2 \\ -12 \end{array}\right].$$

Имеем последовательно:

$$A_4^{-1} = -\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 4 & -16 & 14 \\ -10 & -16 & -7 \\ 28 & 0 & -14 \end{bmatrix}, \quad A_2A_4^{-1} = -\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 22 & -32 & -7 \\ 90 & -80 & -49 \end{bmatrix},$$

$$A_2A_4^{-1}Y_2 = +\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 3 & 32 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad Y_1 - A_2A_4^{-1}Y_2 = +\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$A_2A_4^{-1}A_3 = +\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 45 & 49 \\ 11 & 119 \end{bmatrix}, \quad A_1 - A_2A_4^{-1}A_3 = +\frac{1}{112}\begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix}.$$

Получаем систему уравнений, содержащих только x_1 и x_2:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 63 \\ 101 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

которая может быть записана в виде

$$\begin{cases} 4 = 67x_1 + 63x_2, \\ -4 = 101x_1 + 105x_2. \end{cases}$$

В заключение отметим, что теоретически систему (3) можно полностью решить очень быстро. В матричных обозначениях имеем

$$y = \alpha x,$$

откуда

$$x = \alpha^{-1} y.$$

Практически расчет сводится к вычислению α^{-1}. Это совпадает с вычислением по формулам Крамера.

4.1.21. Преобразование системы координат. Рассмотрим изменение составляющих вектора $u_1, u_2, \ldots, u_n$ при преобразовании системы координат. Обозначим составляющие вектора в новой системе через $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Вектор, который в прежней системе был выражен матрицей

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix},$$

будет в новой системе выражен матрицей

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix}.$$

Имеет место однородное линейное соотношение между координатами u и U:

$$u_i = \sum_k \sigma_{ik} U_k \quad \text{или} \quad u = \sigma U.$$

Матрица σ и есть матрица преобразования координат.

Член σ_{ik} — это составляющая по прежней оси l для единичного вектора, расположенного вдоль новой оси k. Из этого вытекает, что матрица, образованная столбцом k матрицы σ

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1k} \\ \sigma_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{nk} \end{bmatrix},$$

представляет собой в прежней системе координат единичный вектор новой оси k. И обратно, если известны составляющие единичных векторов, расположенных вдоль новых осей, матрица преобразования образуется последовательным сочетанием в надлежащем порядке n одностолбцовых матриц, представляющих единичные векторы новых осей в старой системе.

Замечание. Если число независимых векторов (размерность) прежнего и нового пространства различно, то матрица преобразования прямоугольна. Вектор, представленный в прежнем пространстве матрицей

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix},$$

будет представлен в новом пространстве матрицей

$$U=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \end{bmatrix}.$$

Всегда будет иметь место равенство $u=\sigma U$, но в матрице σ будет n строк и m столбцов.

4.1.22. Ортогональное преобразование. Нам нужно определить матрицу преобразования σ, с помощью которого пространство, отнесенное к ортогональным осям координат, преобразуется в новое пространство, также отнесенное к ортогональным осям *). Для этого достаточно, чтобы при таком преобразовании сохранились длины векторов **).

Пусть задан вектор, представляемый в прежнем пространстве матрицей u; квадрат его модуля равен $\tilde{u}u$. В новом пространстве, где тот же вектор выражен через матрицу U, этот квадрат будет равен $\tilde{U}U$. Следовательно,

$$\tilde{u}u=\tilde{U}U.$$

Но

$$u=\sigma U, \quad \text{откуда} \quad \tilde{u}=\tilde{U}\tilde{\sigma};$$

поэтому

$$\tilde{U}U=\tilde{U}\tilde{\sigma}\sigma U,$$

т. е.

$$\tilde{\sigma}\sigma=[1] \quad \text{или} \quad \tilde{\sigma}=\sigma^{-1}.$$

Итак, матрица σ выражает ортогональное преобразование, если транспонированная по отношению к ней матрица совпадает с обратной.

Рассмотрим два вектора, представленные в некоторой системе координат матрицами u и v. Матрица α связывает проекции этих векторов на оси координат.

Преобразуем систему координат с помощью матрицы σ. Тогда координаты обоих векторов образуют в новой системе матрицы U и V. Отыщем матрицу β, связывающую новые координаты этих векторов:

$$V=\beta U.$$

В матричных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} v&=\alpha u,\\ v&=\sigma V,\\ u&=\sigma U,\\ \sigma V&=\alpha\sigma U. \end{aligned}$$

Умножим обе части последнего равенства слева на σ^{-1}. Тогда

$$V=\sigma^{-1}\alpha\sigma U,$$

откуда

$$\beta=\sigma^{-1}\alpha\sigma. \qquad (4)$$

*) Система осей называется ортогональной, если скалярное произведение двух любых ненулевых векторов, параллельных различным осям, равно нулю.

**) Это равносильно сохранению скалярного произведения (см. [3], стр. 178).

Если преобразование σ ортогонально, то $\sigma^{-1}=\tilde{\sigma}$. В этом случае

$$\beta=\tilde{\sigma}\alpha\sigma. \tag{5}$$

4.1.23. Пример ортогональных преобразований. Поворот. Рассмотрим трехмерную прямоугольную систему координат с осями Ox_1, Ox_2, Ox_3 и новую систему, полученную из предыдущей поворотом на угол $+\varphi$ вокруг оси Ox_3. Матрица преобразования координат будет

$$\sigma_3=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Если бы были сделаны повороты на углы $+\psi$ и $+\theta$ вокруг осей Ox_1 и Ox_2, то мы получили бы матрицы

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Они, очевидно, определяют ортогональные преобразования. Действительно, легко убедиться, что обратные матрицы совпадают с транспонированными.

Если последовательно осуществить повороты вокруг координатных осей на углы ψ, θ, φ, то матрица σ полного преобразования будет равняться

$$\sigma=\sigma_3\sigma_2\sigma_1.$$

Обобщение на комплексное пространство

В n-мерном комплексном пространстве условно считают, что координаты, отложенные на осях, являются комплексными числами. Это пространство существенно отличается от комплексной плоскости, используемой в теории комплексных чисел, где на осях откладывают вещественные числа, являющиеся действительной и мнимой частью комплексных чисел.

Определим предварительно два новых типа матриц.

4.1.24. Эрмитова матрица. Эрмитовой называется матрица, в которой элементы, симметричные по отношению к главной диагонали, — комплексные сопряженные числа:

$$\alpha_{kl}=\alpha^*_{lk}.$$

Например, матрица

$$\begin{bmatrix}2 & 2+3j & j\\ 2-3j & 4 & 3\\ -j & 3 & -1\end{bmatrix}$$

эрмитова.

Элементы главной диагонали эрмитовой матрицы обязательно вещественны. Вещественная эрмитова матрица симметрична.

4.1.25. Эрмитово-сопряженная матрица. Эрмитово-сопряженная матрица получается транспонированием исходной матрицы α и заменой полученных элементов на комплексно-сопряженные. Обозначим ее через α^+. Согласно определению имеем

$$\alpha^+_{lk}=\alpha^*_{kl}.$$

Здесь дается пример α и ее эрмитово-сопряженной матрицы α^+:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1+j & 4 & j \\ 5 & 0 & 1-j \\ 3+2j & -3 & -j \end{bmatrix}, \quad \alpha^+ = \begin{bmatrix} 1-j & 5 & 3-2j \\ 4 & 0 & -3 \\ -j & 1+j & j \end{bmatrix}.$$

Можно заметить, что эрмитова матрица равна своей эрмитово-сопряженной. Действительно, для эрмитовой матрицы α

$$\alpha_{ik} = \alpha^*_{ki}.$$

Следовательно, $\alpha^+_{ik} = \alpha_{ik}$ и $\alpha^+ = \alpha$.

Пусть дано произведение двух матриц α и β. Тогда

$$(\alpha\beta)^+ = \beta^+\alpha^+.$$

В самом деле,

$$(\alpha\beta)_{ik} = \sum_l \alpha_{il}\beta_{lk},$$

$$(\alpha\beta)^+_{ik} = \sum_l \alpha^*_{kl}\beta^*_{li} = \sum_l \beta^+_{il}\alpha^+_{lk}.$$

В более общем случае имеем

$$(\alpha\beta \ldots \omega)^+ = \omega^+ \ldots \beta^+\alpha^+.$$

4.1.26. Модуль и скалярное произведение в комплексном пространстве. Рассмотрим в n-мерном комплексном пространстве вектор u, представленный n комплексными числами. Координаты вектора образуют матрицу

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Чтобы модуль любого комплексного вектора был вещественной и положительной величиной, его определяют в ортогональных координатах формулой

$$|u|^2 = u^*_1u_1 + u^*_2u_2 + \ldots + u^*_nu_n.$$

Мы видели, что квадрат модуля вектора равен произведению двух матриц

$$[u^*_1u^*_2 \ldots u^*_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix},$$

а в сокращенной матричной записи

$$u^+u.$$

Чтобы скалярное произведение вектора на самого себя было равно квадрату длины этого вектора, мы определим здесь скалярное произведение соотношением

$$u \cdot v = u^*_1v_1 + \ldots + u^*_nv_n$$

или в сокращенной матричной записи

$$u \cdot v = u^+ v.$$

Определенное таким образом скалярное произведение уже не коммутативно.

Все правила, относящиеся к преобразованиям с помощью матриц, к произведению матриц, к обратной матрице и т. д., легко обобщаются на комплексное пространство.

4.1.27. Ортогональное преобразование комплексного пространства (унитарное преобразование). Ортогональное комплексное пространство называется унитарным. Определим характер матрицы σ, преобразующей унитарное пространство в другое такое же. Для этого достаточно, чтобы сохранялись длины векторов, т. е. модуль вектора, представленного двумя матрицами u и U, был инвариантен. Поэтому

$$u^+ u = U^+ U.$$

Рассуждение такое же, как в п. 4.1.22, приводит к следующему условию, которому должна удовлетворять матрица σ:

$$\sigma^+ = \sigma^{-1}.$$

Следовательно, унитарная матрица такова, что ее эрмитово-сопряженная и обратная матрицы совпадают. Если бы матрица была вещественной, то мы имели бы $\sigma^+ = \tilde{\sigma}$ и пришли бы к уже известной формуле $\tilde{\sigma} = \sigma^{-1}$.

Легко доказать, что формула (4)

$$\beta = \sigma^{-1} \alpha \sigma$$

справедлива и в комплексном пространстве. Если σ — унитарная матрица, то (4) принимает вид

$$\beta = \sigma^+ \alpha \sigma.$$

4.1.28. Собственные значения, собственные векторы и характеристическое уравнение матрицы. Дана матрица $\alpha = [\alpha_{ik}]$ и вектор, отличный от нуля, представленный матрицей u. Если вектор u таков, что преобразования, которые выполняет над ним матрица α, сводятся к удлинению или сжатию, то он называется собственным вектором, его направление — собственным направлением и коэффициент его удлинения или сжатия λ — собственным значением матрицы α. Это имеет место, если

$$\alpha u = \lambda u \qquad (\lambda \text{ — число})$$

или

$$\sum_i \alpha_{ki} u_i = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Напишем это равенство в развернутом виде. Имеем n соотношений

$$\begin{aligned}
(\alpha_{11} - \lambda) u_1 + \alpha_{12} u_2 + \ldots + \alpha_{1n} u_n &= 0, \\
\alpha_{21} u_1 + (\alpha_{22} - \lambda) u_2 + \ldots + \alpha_{2n} u_n &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\alpha_{n1} u_1 + \alpha_{n2} u_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda) u_n &= 0.
\end{aligned}$$

Так как по крайней мере одна из величин $u_1, \ldots, u_n$ отлична от нуля, то определитель системы n однородных линейных уравнений равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение для вычисления собственных значений λ. Оно называется характеристическим уравнением матрицы α.

Корень λ_1, подставленный в систему уравнений, позволяет вычислить собственный вектор, иначе говоря, собственное направление, отвечающее этому собственному значению λ.

Пример. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda + 324 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_1 = 18, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 3.$$

Найдем собственное направление, соответствующее λ_1. Подставляя λ_1 в систему, получим

$$\begin{aligned} 8u_1 - 6u_2 + 2u_3 &= 0, \\ -6u_1 + 7u_2 - 4u_3 &= 0, \\ 2u_1 - 4u_2 + 3u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю. Поэтому можно отбросить последнее уравнение и решать полученную систему по отношению к произвольной переменной, например, $u_1 = c_3$:

$$\begin{aligned} -6u_2 + 2u_3 &= -8c_1, \\ 7u_2 - 4u_3 &= 6c_1. \end{aligned}$$

Отсюда и получаем собственное направление для $\lambda_1 = 3$:

$$c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Таким же образом можно найти собственные направления для $\lambda_2 = 6$, $\lambda_1 = 18$:

$$c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.1.29. Свойства характеристического уравнения. Расположим определитель $\Delta(\lambda)$ по убывающим степеням λ:

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} A_1 \lambda^{n-1} + \ldots - A_{n-1}\lambda + A_n = 0.$$

Коэффициент A_1 не что иное, как сумма элементов главной диагонали $\sum_k \alpha_{kk}$. Эту сумму называют следом матрицы. След матрицы по теореме Виета равен сумме ее собственных значений.

Коэффициент A_n равен определителю $|\alpha|$ матрицы. Значит, по той же теореме $|\alpha|$ равен произведению собственных значений α.

Мы докажем важное свойство характеристического уравнения: оставаться инвариантным при всех преобразованиях системы координат. Действительно, характеристический многочлен является определителем матрицы

$$[\alpha] - \lambda[1]. \tag{7}$$

Преобразуем систему координат с помощью матрицы σ. Тогда матрица α преобразуется по формуле (4)

$$\sigma^{-1}\alpha\sigma = \beta \quad \text{или} \quad \sigma\beta = \alpha\sigma.$$

Характеристический многочлен матрицы β равен определителю матрицы

$$[\beta] - \lambda[1].$$

Очевидно,

$$[\sigma][1] = [1][\sigma].$$

Тогда из предыдущего ясно, что

$$[\sigma]\{[\beta] - \lambda[1]\} = \{[\alpha] - \lambda[1]\}[\sigma].$$

Произведение определителей коммутативно. Поэтому после деления обеих частей равенства на $|\sigma|$ имеем

$$|[\sigma^{-1}\alpha\sigma] - \lambda[1]| = |[\alpha] - \lambda[1]|.$$

Это и показывает инвариантность характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

4.1.30. Матрица, отнесенная к собственным направлениям. Предположим, что характеристическое уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет лишь простые корни. Тогда n собственных направлений различны. Их можно принять за оси координат.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Докажем, что в новой системе координат матрица α получит вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Это, очевидно, диагональная матрица; она сообщает вектору на i-й оси лишь удлинение или сокращение в λ_i раз. Обозначим через u_{km} проекцию на ось k собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_m. Тогда матрицей преобразования координат σ станет матрица $[u_{km}]$. Произведение $\sigma^{-1}\alpha\sigma$ представит в этом случае преобразование матрицы α в системе координат, оси которой имеют направления собственных векторов α. Это будет, следовательно, матрица (8).

Пример. Обратимся к примеру п. 4.1.28. Матрица σ и обратная ей матрица σ^{-1} равны (с точностью до коэффициентов c_1, c_2, c_3)

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Произведение $\sigma^{-1}\alpha\sigma$ будет

$$-\frac{1}{27}\begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

4.1.31. Условия коммутативности двух матриц. Даны две матрицы α и β. Предположим, что их характеристические уравнения содержат лишь простые корни. Если матрицы коммутируют, то

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

Пусть $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор α, представленный одностолбцовой матрицей u. Тогда

$$\alpha u = \lambda u \qquad (\lambda \text{ — число}).$$

Преобразуем вектор $\boldsymbol{u}$ с помощью матрицы $\alpha\beta$. Имеем

$$\alpha\beta u = \beta\alpha u = \beta\lambda u = \lambda\beta u.$$

Соотношение $\alpha\beta u = \lambda\beta u$ показывает, что вектор, представленный матрицей βu, также является собственным вектором матрицы α с тем же собственным значением λ. Он параллелен вектору $\boldsymbol{u}$, так как корни характеристического уравнения матрицы α простые. Можно поэтому написать

$$\beta u = \mu u \qquad (\mu \text{ — число}).$$

Последнее равенство показывает, что $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор и матрицы β.

Итак, если две матрицы коммутируют, то у них одинаковые собственные направления.

Докажем и обратное. Даны две матрицы α и β, имеющие одинаковые собственные направления. Если принять эти направления за оси координат, то обе матрицы получают вид

$$\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}.$$

Так как обе они диагональны, то они, очевидно, коммутируют.

Нетрудно показать, что это свойство сохранится и в первоначальной системе координат.

4.1.32. Собственные значения и собственные направления эрмитовой матрицы. Все собственные значения эрмитовой матрицы вещественны, а собственные направления ортогональны. Докажем это.

Эрмитова матрица характеризуется равенством

$$\alpha^+ = \alpha.$$

Пусть $\boldsymbol{u}$ — собственный вектор, а λ — соответствующее собственное значение. Тогда

$$\alpha u = \lambda u.$$

Умножим обе части уравнения на u^+:

$$u^+\alpha u = \lambda u^+ u.$$

Применим операцию „$+$“ к обеим частям равенства

$$(u^+\alpha u)^+ = (\lambda u^+ u)^+.$$

Раскрывая скобки и замечая, что операция „$+$“ для числа означает переход к комплексно-сопряженному значению, имеем

$$u^+\alpha^+ u^{++} = \lambda^* u^+ u^{++},$$

$$u^+\alpha^+ u = \lambda^* u^+ u,$$

потому что $u^{++}=u$. Так как, кроме того, $\alpha^{+}=\alpha$, то

$$u^{+}\alpha u=\lambda^{*}u^{+}u;$$

но $\alpha u=\lambda u$, поэтому

$$\lambda u^{+}u=\lambda^{*}u^{+}u.$$

Следовательно, $\lambda=\lambda^{*}$. Это доказывает, что λ — вещественное число.

Покажем также, что собственные векторы ортогональны. Даны два различных собственных значения λ и μ и два соответствующих им собственных вектора u и v. Имеем

$$\alpha u=\lambda u, \qquad \alpha v=\mu v.$$

Умножаем соответственно на v^{+} и u^{+}:

$$v^{+}\alpha u=\lambda v^{+}u, \tag{9}$$

$$u^{+}\alpha v=\mu u^{+}v. \tag{10}$$

Применим операцию „$+$“ к обеим частям равенства (9):

$$(v^{+}\alpha u)^{+}=(\lambda v^{+}u)^{+},$$

$$u^{+}\alpha^{+}v=\lambda^{*}u^{+}v. \tag{11}$$

Так как $\alpha=\alpha^{+}$, а $\lambda=\lambda^{*}$, то соотношение (11) принимает вид

$$u^{+}\alpha v=\lambda u^{+}v.$$

Сравнивая с (10), получаем

$$(\mu-\lambda)\,u^{+}v=0.$$

Так как $\mu\neq\lambda$ то $u^{+}v=0$, а это доказывает, что оба вектора u и v ортогональны.

Замечание. Отсюда следует, что и для симметричной матрицы собственные направления ортогональны, так как такая матрица представляет собой частный случай эрмитовой.

Функции от матриц

4.1.33. Степень матрицы.[1]). Матрица α^{p} равна произведению $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{p\text{ раз}}$.

Если матрица α отнесена к своим собственным направлениям, то она имеет диагональную форму и, будучи возведена в степень p, дает

$$\begin{bmatrix}\lambda_1^{p} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2^{p} & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^{p}\end{bmatrix}.$$

Действительно, α^{p} должна преобразовать вектор v, расположенный по оси i, в вектор, представленный матрицей

$$\begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ (\lambda_i)^{p}\,v_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}.$$

[1]) Случай дробной степени изложен в п. 4.1.38.

Случай отрицательных p не представляет трудностей, если только матрица α невырождена.

4.1.34. Теорема Кэли—Гамильтона. Покажем, что результат подстановки квадратной матрицы в ее характеристическое уравнение дает нулевую матрицу

$$\Delta(\alpha) = [0].$$

Пусть $\boldsymbol{u}$ — вектор, составляющие которого по собственным направлениям матрицы α равны

$$u_1, \ldots, u_n.$$

Матрица α преобразует составляющую u_i в $\lambda_i u_i$, а матрица $\Delta(\alpha)$ преобразует эту составляющую в $\Delta(\lambda_i) u_i$. Последнее выражение равно нулю, так как $\Delta(\lambda_i) = 0$. А следовательно, и все составляющие вектора $\Delta(\alpha)\boldsymbol{u}$ равны нулю. Поскольку вектор $\boldsymbol{u}$ произволен, то матрица $\Delta(\alpha)$ должна быть нулевой *).

4.1.35. Функции от матриц. Теорема Сильвестра. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n-1$ и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — n различных произвольных постоянных. Следующее тождество называется интерполяционной формулой Лагранжа (см. п. 10.3.2):

$$P(x) \equiv \sum_{r=1}^{n} P(a_r) \frac{\prod\limits_{s \neq r} (x - a_s)}{\prod\limits_{s \neq r} (a_r - a_s)}.$$

Символ $\prod\limits_{s \neq r}$ означает произведение одночленов для всех значений $s = 1, 2, \ldots, n$, кроме $s = r$.

Определение степени матрицы дает возможность определить многочлен от матрицы. Заменив в предыдущем тождестве x на матрицу α, получаем новое тождество

$$P(\alpha) \equiv \sum_{r=1}^{n} P(a_r) \frac{\prod\limits_{s \neq r} (\alpha - a_s [1])}{\prod\limits_{s \neq r} (a_r - a_s)}.$$

Теорема Кэли — Гамильтона позволяет показать, что матричный многочлен от α степени $\geqslant n$ может быть выражен при помощи матричного многочлена степени $n-1$. Действительно, пусть $\Delta(\lambda) = 0$ — характеристическое уравнение. Тогда, поскольку $\Delta(\alpha) = [0]$, имеем

$$\lambda^n = A_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} A_n,$$
$$\alpha^n = A_1 \alpha^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} A_n [1].$$

Последовательные умножения на λ и α этих соотношений показывают, что степени λ^{n+p} и α^{n+p} могут быть выражены соответственно как функции $\lambda, \ldots, \lambda^{n-1}$ и $\alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Таким образом, если $f(x)$ — многочлен степени большей или равной n, то

$$f(\lambda) = P(\lambda),$$
$$f(\alpha) = P(\alpha),$$

*) Это доказательство справедливо при наличии n собственных направлений. Общий случай рассмотрен, например, в [3], стр. 26, 27.

где $P(x)$ — некоторый многочлен степени $n-1$. Применим к многочлену $P(\alpha)$ тождество Лагранжа. Предположив, что все собственные значения различны, мы можем, в силу предыдущих соотношений, написать следующую формулу, выражающую теорему Сильвестра:

$$f(\alpha)=\sum_{r=1}^{n} f(\lambda_r) Z_r \tag{12}$$

при

$$Z_r=\frac{\prod_{s\neq r}(\alpha-\lambda_s[1])}{\prod_{s\neq r}(\lambda_r-\lambda_s)}.$$

Пусть $\varphi(x)$ — функция, разложимая в степенной ряд, сходящийся при $|x|<\rho$. Обозначим этот ряд через $f(x)$. Тогда формула (12) показывает, что ряд $f(\alpha)$ сходится в том случае, если все ряды $f(\lambda_r)$ сходятся. Это позволяет применять теорему Сильвестра не только к многочлену, но также и к функции, разложимой в степенной ряд.

Замечание. Легко показать, что матрица Z_r имеет следующие свойства: она вырождена и ранга 1;

$$Z_r Z_p=\begin{cases} 0, & \text{если } p\neq r,\\ Z_r & \text{если } p=r,\end{cases}$$

откуда

$$Z_r^m=Z_r.$$

По формуле (12) при $f(\lambda)\equiv 1$ имеем

$$\sum_{r=1}^{n} Z_r=[1].$$

Точно так же применение формулы (12) к $f(\alpha)=\alpha$ дает

$$\alpha=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r Z_r.$$

Пример. Применим формулу (12) к вычислению матричного многочлена

$$\varphi(\alpha)=\alpha^2+3\alpha+[1],$$

где матрица α равна

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы α были вычислены ранее (см. п. 4.1.28):

$$\lambda_1=18,\qquad \lambda_2=6,\qquad \lambda_3=3.$$

Отсюда

$$\varphi(\lambda_1)=379,\qquad \varphi(\lambda_2)=55,\qquad \varphi(\lambda_3)=19.$$

Таким образом, $\varphi(\alpha)=\varphi(\lambda_1)Z_1+\varphi(\lambda_2)Z_2+\varphi(\lambda_3)Z_3$,

$$Z_3=\frac{\left\{\begin{bmatrix}11&-6&2\\-6&10&-4\\2&-4&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix}11&-6&2\\-6&10&-4\\2&-4&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18&0&0\\0&18&0\\0&0&18\end{bmatrix}\right\}}{(3-6)(3-18)}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{bmatrix}.$$

Такой же расчет для Z_2 и Z_1 дает

$$Z_2=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{bmatrix},\qquad Z_1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{bmatrix},$$

откуда

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1755&-1368&576\\-1368&1647&-792\\576&-792&675\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}195&-152&64\\-152&183&-88\\64&-88&75\end{bmatrix}.$$

Прямое вычисление, гораздо более легкое в данном случае из-за простоты функции φ, дает тот же результат:

$$\varphi(\alpha)=\begin{bmatrix}161&-134&58\\-134&152&-76\\58&-76&56\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}11&-6&2\\-6&10&-4\\2&-4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}195&-152&64\\-152&183&-88\\64&-88&75\end{bmatrix}.$$

4.1.36. Формула Бэкера. Формулу для $\varphi(\alpha)$ можно представить и в другом виде [1]):

$$\varphi(\alpha)=\frac{D_{n-1}}{D}\alpha^{n-1}+\frac{D_{n-2}}{D}\alpha^{n-2}+\ldots+\frac{D_1}{D}\alpha+\frac{D_0}{D}[1]. \qquad (13)$$

В этой формуле D — определитель Вандермонда:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\ldots&\lambda_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\ldots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

[1]) Baker H. F., Proc. Lond. Math. Soc., 1902, pp. 347 — 360; 1905, pp. 293—296; Phil. Trans. Roy. Soc. [A], 1916, pp. 129—186.

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения матрицы α, а D_{r-1} — определитель, полученный из D заменой элементов r-й строки на $\varphi(\lambda_1), \ldots, \varphi(\lambda_n)$:

$$D_{r-1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{r-2} & \lambda_2^{r-2} & \ldots & \lambda_n^{r-2} \\ \varphi(\lambda_1) & \varphi(\lambda_2) & \ldots & \varphi(\lambda_n) \\ \lambda_1^{r} & \lambda_2^{r} & \ldots & \lambda_n^{r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Применим формулы (12) и (13) к простому случаю, в котором непосредственное вычисление также не представляет затруднений. Пусть требуется вычислить матрицу e^{α}, причем $\alpha=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Так как эта матрица диагональна, то прямое вычисление дает

$$e^{\alpha}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\alpha^p}{p!},$$

но

$$\alpha^p=\begin{bmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & 2^p \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$e^{\alpha}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\alpha^p}{p!}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{2^p}{p!} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Применим теперь формулу (12):

$$e^{\alpha}=e^{\lambda_1}Z_1+e^{\lambda_2}Z_2, \qquad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=2.$$

Матрицы Z_1 и Z_2 получаются следующим образом:

$$Z_1=\frac{\alpha-2[1]}{1-2}=2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z_2=\frac{\alpha-[1]}{2-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это дает

$$e^{\alpha}=e\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+e^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (13):

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e & e^2\end{vmatrix}=e^2-e,$$

$$D_0=\begin{vmatrix}e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2}\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e & e^2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2e-e^2.$$

По формуле Бэкера имеем

$$e^{\alpha}=\frac{D_1}{D}\alpha+\frac{D_0}{D}[1]=(e^2-e)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+(2e-e^2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & 0\\ 0 & e^2\end{bmatrix}.$$

4.1.37. Высокие степени матрицы. Применим формулу (12) к функции α^p. Имеем

$$\alpha^p=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^p Z_r, \qquad Z_r=\prod_{s\neq r}\frac{(\alpha-\lambda_s[1])}{\lambda_r-\lambda_s}.$$

Очевидно, Z_r не зависит от p.

Предположим, что n корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ расположены по убывающим модулям:

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>|\lambda_n|.$$

Если p очень велико, то можно пренебречь $\lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p$ по сравнению с λ_1^p и написать

$$\alpha^p\approx\lambda_1^p\prod_{s\neq 1}\frac{\alpha-\lambda_s[1]}{\lambda_1-\lambda_s}.$$

Пример. Требуется вычислить приближенное значение

$$\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}^{428}.$$

Корни характеристического многочлена равны

$$\lambda_1=18, \qquad \lambda_2=6, \qquad \lambda_3=3.$$

Z_1 уже было вычислено в п. 4.1.35:

$$Z_1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}^{428}\approx 2\cdot 18^{427}\begin{bmatrix}4 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

4.1.38. Дробная степень матрицы. Рассмотрим для примера матрицу степени $^1/_2$ с двумя строками и двумя столбцами. Формула Сильвестра (12), примененная к функции $\varphi(\alpha)=\alpha^{1/2}$, дает

$$\alpha^{1/2}=\lambda_1^{1/2}Z_1+\lambda_2^{1/2}Z_2.$$

Это можно проверить и непосредственно. Действительно, возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$$\alpha=(\lambda_1^{1/2}Z_1+\lambda_2^{1/2}Z_2)^2=\lambda_1Z_1^2+\lambda_1^{1/2}\lambda_2^{1/2}(Z_1Z_2+Z_2Z_1)+\lambda_2Z_2^2.$$

В силу свойств матриц Z_r (п. 4.1.35) правая часть сводится к

$$\lambda_1Z_1+\lambda_2Z_2,$$

что по формуле (12) тождественно α.

Подобной же проверкой нетрудно убедиться, что в качестве квадратного корня из матрицы α может быть взято любое из четырех выражений

$$\pm\lambda_1^{1/2}Z_1\pm\lambda_2^{1/2}Z_2.$$

В более общем виде можно показать, что существует m^n корней m-й степени из матрицы порядка n при условии, что все собственные значения матрицы различны. Если это не так, то существует бесконечное множество корней. Действительно, отыщем квадратный корень единичной матрицы второго порядка (ее собственные значения совпадают). Имеем

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда искомый квадратный корень равен либо $\begin{bmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{bmatrix}$, либо $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ при условии, что $1-a^2=bc$. Иначе говоря, получаем бесконечное множество решений.

4.1.39. Приближенное вычисление собственных значений матрицы. Пусть λ_1 — то собственное значение, которое имеет наибольший модуль.

а) *Собственное значение вещественно.* В п. 4.1.37 мы видели, что α^p при бесконечно возрастающем p может быть представлена в виде $\lambda_1^pZ_1$. Отсюда следует, что если p достаточно велико, то для матриц α^p и α^{p+1} справедливо приближенное равенство

$$\alpha^{p+1}\approx\lambda_1\alpha^p.$$

Если f_{ij} и g_{ij} — два элемента, занимающие одинаковые места соответственно в матрицах α^p и α^{p+1}, то

$$\lambda_1=\lim_{p\to\infty}\frac{g_{ij}}{f_{ij}}.$$

Пример. Найдем собственное значение с наибольшим модулем матрицы

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Вычисление α^8 дает

$$[f_{ij}]=\begin{bmatrix} 4\,898\,507\,481 & -4\,897\,385\,550 & 2\,448\,135\,090 \\ -4\,897\,385\,550 & 4\,897\,949\,796 & -2\,449\,250\,460 \\ 2\,448\,135\,090 & -2\,449\,250\,460 & 1\,225\,189\,476 \end{bmatrix}.$$

Вычислим только элемент g_{11} матрицы α^9. Он равен 88 164 165 771. Разделив на элемент f_{11} матрицы α^8, получим $\lambda_1 \approx 17{,}9981\ldots$ А нам известно, что точное значение λ_1 равно 18.

б) *Собственное значение комплексно.* Ограничимся матрицами с вещественными элементами. Пусть λ_1 и λ_2 — два комплексных сопряженных собственных значения с наибольшим модулем. Напишем предельную форму соотношения Сильвестра для функции $x^p P(x)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен, не зависящий от p:

$$\alpha^p P(\alpha) \approx \lambda_1^p P(\lambda_1) Z_1 + \lambda_2^p P(\lambda_2) Z_2.$$

Возьмем

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

Тогда

$$P(\alpha) = (\alpha - \lambda_1 [1])(\alpha - \lambda_2 [1])$$

и

$$P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha^p (\alpha - \lambda_1 [1])(\alpha - \lambda_2 [1]) \approx 0,$$

или

$$\alpha^{p+2} - \alpha^{p+1}(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha^p \lambda_1 \lambda_2 \approx 0.$$

Пусть h_{ij}, g_{ij}, f_{ij} будут элементами, занимающими одинаковые места соответственно в матрицах α^{p+2}, α^{p+1}, α^p. Если p достаточно велико, то

$$h_{ij} - g_{ij}(\lambda_1 + \lambda_2) + f_{ij}\lambda_1\lambda_2 \approx 0.$$

Для других соответствующих элементов имеем

$$h_{kl} - g_{kl}(\lambda_1 + \lambda_2) + f_{kl}\lambda_1\lambda_2 \approx 0.$$

Решая эти уравнения и полагая $\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$, получаем

$$\lambda_1\lambda_2 = a^2 + b^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{kl} \\ h_{ij} & h_{kl} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{ij} & g_{ij} \\ f_{kl} & g_{kl} \end{vmatrix}},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2a = \frac{\begin{vmatrix} f_{ij} & h_{ij} \\ f_{kl} & h_{kl} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{ij} & g_{ij} \\ f_{kl} & g_{kl} \end{vmatrix}}.$$

Пример. Требуется найти собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & -10 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти их очень легко, так как характеристическое уравнение имеет простой вид

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 10 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_1 = 3 + j, \qquad \lambda_2 = 3 - j, \qquad \lambda_3 = 1.$$

Воспользуемся предыдущим способом. Вычисляем последовательно

$$[f_{ij}] = \alpha^8 = \begin{bmatrix} 13\,810 & -13\,809 & 3\,837 \\ 38\,370 & -38\,369 & 9\,213 \\ 38\,640 & -38\,640 & 7\,616 \end{bmatrix},$$

$$[g_{ij}] = \alpha^9 = \begin{bmatrix} 38\,370 & -38\,369 & 9\,213 \\ 92\,130 & -92\,129 & 16\,909 \\ 76\,960 & -76\,960 & 7\,536 \end{bmatrix},$$

$$[h_{ij}] = \alpha^{10} = \begin{bmatrix} 92\,130 & -92\,129 & 16\,909 \\ 169\,090 & -169\,089 & 9\,225 \\ 75\,360 & -75\,360 & -31\,744 \end{bmatrix}.$$

Взяв $i = j = 1$, $k = l = 3$, получим

$$a^2 + b^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{33} \\ h_{11} & h_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & g_{11} \\ f_{33} & g_{33} \end{vmatrix}} = 10{,}00035,$$

$$2a = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & h_{11} \\ f_{33} & h_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & g_{11} \\ f_{33} & g_{33} \end{vmatrix}} = 6{,}00040,$$

тогда как точные значения будут:

$$a^2 + b^2 = (3 + j)(3 - j) = 10,$$
$$2a = (3 + j) + (3 - j) = 6.$$

Замечание. Если собственное значение с наибольшим модулем вещественно, то элементы возрастающих степеней матрицы монотонно возрастают. Если это не так, то колебания, доходящие иногда до перемены знака, указывают, что собственное значение с наибольшим модулем будет комплексным числом.

Упрощение метода. Способ, состоящий в том, чтобы возводить матрицу α n-го порядка в возрастающие степени, требует каждый раз вычисления n^3 произведений. Можно свести число произведений до n^2, если, используя ассоциативность, вместо матриц α, α^2, ..., α^p, α^{p+1}, α^{p+2} образовать матрицы αd, $\alpha^2 d$, ..., $\alpha^p d$, $\alpha^{p+1} d$, $\alpha^{p+2} d$, обозначив через d матрицу, представляющую собой произвольный вектор с координатами d_1, d_2, ..., d_n.

Пусть опять λ_1 — собственное значение, имеющее наибольший модуль. Рассмотрим отдельно два случая.

а) *Собственное значение* λ_1 *вещественно.* Как и в предыдущем случае, g_{ij} и f_{ij} — элементы матриц α^{p+1} и α^p. Элементы c_i и b_i одностолбцовых матриц $\alpha^{p+1} d$, $\alpha^p d$ соответственно равны

$$c_i = \sum_j g_{ij} d_j, \qquad b_i = \sum_j f_{ij} d_j.$$

Если p достаточно велико то отношение g к f близко к λ_1. Следовательно, также дело обстоит и с элементами c_i и b_i. Поэтому мы можем написать

$$\lambda_1 = \lim_{p \to \infty} \frac{c_i}{b_i}.$$

б) *Собственное значение* λ_1 *комплексно.* Как и в предыдущем случае, пусть f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} — элементы матриц α^p, α^{p+1}, α^{p+2} а b_i, c_i, e_i — элементы одностолбцовых матриц $\alpha^p d$, $\alpha^{p+1} d$, $\alpha^{p+2} d$. Если p достаточно велико, то мы имеем соотношение

$$h_{ij} - g_{ij}(\lambda_1 + \lambda_2) + f_{ij}\lambda_1\lambda_2 \approx 0.$$

Так как

$$b_i = \sum_j f_{ij}u_j, \qquad c_i = \sum_j g_{ij}u_j, \qquad e_i = \sum_j h_{ij}u_j,$$

то

$$e_i - c_i(\lambda_1 + \lambda_2) + b_i\lambda_1\lambda_2 \approx 0.$$

Замечания. 1. Сказанное выше означает, что повторное умножение матрицы на любой вектор стремится повернуть этот вектор вдоль собственного направления матрицы, соответствующего собственному значению с наибольшим модулем. Следовательно, вектор, представленный матрицей $\alpha^p d$, стремится к собственному вектору, соответствующему собственному значению λ_1, и при достаточно большом p может слиться с этим собственным вектором.

Докажем это положение. Числа, пропорциональные координатам u_1, u_2, ..., u_n собственного вектора, соответствующего собственному значению с наибольшим модулем λ_1, получаются из однородного уравнения

$$\{\alpha - \lambda_1[1]\}\, u = [0]. \tag{14}$$

Но по теореме Кэли — Гамильтона

$$\{\alpha - \lambda_1[1]\}\, Z_1 d = \frac{\Delta(\alpha)\, d}{\prod\limits_{s \neq 1}(\lambda_1 - \lambda_s)} = [0]. \tag{15}$$

Сравнив уравнения (14) и (15), мы видим, что элементы матриц u и $Z_1 d$ пропорциональны. С другой стороны, известно, что если p достаточно велико, то $\alpha^p d \approx \lambda_1^p Z_1 d$, т. е. матрица $Z_1 d$ является с точностью до постоянного коэффициента пределом $\alpha^p d$. Следовательно, этот предел определяет собственное направление, соответствующее λ_1.

2. Пусть после того, как найдено собственное значение λ_1 с наибольшим модулем, требуется определить собственное значение λ_2, модуль которого является следующим по величине после модуля λ_1. В п. 4.1.35 получена формула

$$\alpha = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r Z_r.$$

В матрице

$$\beta = \alpha - \lambda_1 Z_1 = \sum_{r=2}^{n} \lambda_r Z_r$$

собственное значение λ_1 заменено нулем, но сохраняются все остальные собственные значения матрицы α. Поэтому, чтобы продолжить вычисление, достаточно применить к матрице β тот или другой из рассмотренных методов.

Первый метод. Если p достаточно велико, то

$$\alpha^p \approx \lambda_1^p Z_1.$$

Отсюда

$$\beta \approx \alpha - \lambda_1^{1-p}\alpha^p.$$

Способ вычисления α^p и λ_1 указан ранее.

Второй метод. Если при вычислении λ_1 был использован вектор d, то

$$\beta d \approx \alpha d - \lambda_1^{1-p}\alpha^p d.$$

Способ вычисления одностолбцовых матриц αd и $\alpha^p d$ указан ранее.

Пример. Возьмем матрицу α из первого примера п. 4.1.39. Получаем

$$\beta \approx \alpha - \lambda_1^{-7}\alpha^8 = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы β равны 0, 6, 3.

4.1.40. Приближенное вычисление корней уравнения n-й степени. Все предыдущие вычисления применимы без изменения к вычислению корня с наибольшим модулем уравнения

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

при условии, что удастся составить матрицу, имеющую в качестве характеристического многочлена функцию $f(z)$. Докажем, что это всегда возможно.

Сопоставим с многочленом $f(z)$ матрицу

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix},$$

и докажем, что $(-1)^n f(z)$ представляет собой характеристический многочлен этой матрицы.

Действительно, характеристический многочлен матрицы α может быть записан в виде

$$\begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -z & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \ldots & -a_2 & -a_1 - z \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Допустим, что такой определитель из $n-1$ строк и столбцов равен $(-1)^{n-1}(z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$*). Тогда, разложив определитель (*) по элементам первого столбца, получаем

$$-z(-1)^{n-1}(z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) - (-1)^{n+1} a_n$$

или

$$(-1)^n (z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n),$$

т. е.

$$(-1)^n f(z).$$

Так как правило очевидно при $n = 1$, то оно имеет место для любого n.

*) Он отделен штриховой линией.

Пример 1. Требуется решить уравнение

$$f(z) = z^3 - 16z^2 + 68z - 80 = 0.$$

Тогда

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 80 & -68 & 16 \end{bmatrix}.$$

Возьмем вектор $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Последовательным умножением получаем

$$\alpha^9 u = \begin{bmatrix} 20\,811\,520 \\ 208\,246\,016 \\ 2\,082\,983\,936 \end{bmatrix}, \quad \alpha^{10} u = \begin{bmatrix} 208\,246\,016 \\ 2\,082\,983\,936 \\ 20\,831\,935\,488 \end{bmatrix}.$$

Отношение $\frac{c_3}{b_3}$ дает $\lambda_1 = 10,0010\ldots$, а решение уравнения второй степени, полученное после деления $f(z)$ на $z - 10,0010$, дает $\lambda_2 = 3,996\ldots$, $\lambda_3 = 2,003\ldots$

Точные значения корней 10, 4, 2.

Пример 2. Требуется решить уравнение

$$f(z) = z^3 - 7z^2 + 17z + 25 = 0.$$

Тогда

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -25 & -17 & 7 \end{bmatrix}.$$

Возьмем вектор $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Последовательное умножение дает

$$[b_i] = \alpha^9 u = \begin{bmatrix} 918\,721 \\ 4\,368\,961 \\ 11\,983\,645 \end{bmatrix}, \quad [c_i] = \alpha^{10} u = \begin{bmatrix} 4\,368\,961 \\ 11\,983\,645 \\ -11\,354\,847 \end{bmatrix},$$

$$[e_i] = \alpha^{11} u = \begin{bmatrix} 11\,983\,645 \\ -13\,354\,847 \\ -406\,429\,919 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ e_1 & e_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = 25,0002\ldots,$$

$$2a = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & e_1 \\ b_3 & e_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = 7,99985\ldots$$

Точные значения корней: $\lambda_1 = 4 + 3j$, $\lambda_2 = 4 - 3j$, $\lambda_3 = -1$.

Замечания. 1. В использованном методе ошибка при вычислениях не имеет большого значения: она просто отодвигает момент получения иско-

мого корня. Действительно, ошибка в произведении $\alpha^p u$ приводит к изменению вектора u, а так как он произволен, то это не сказывается на окончательном результате.

2. Приближенные методы, изложенные в п. 4.1.39 и 4.1.40, имеют своей основой теорему Сильвестра, выраженную формулой (12). Эта формула неверна, если имеется двойной корень характеристического уравнения. Однако, устремив друг к другу два корня λ_s и λ_{s+1}, легко показать, что приближенные методы не полностью изменяются при наличии двойного, а в более общем случае — кратного корня, если только он не является также корнем с наибольшим модулем λ_1. В этом случае мы можем вывести новую формулу для приближенного вычисления корней, но менее простую, чем предыдущие. Если λ_1 — кратный корень, то порядок кратности всех корней удобно свести к единице следующим способом.

У функций $f(z)$ и $f'(z)$ кратные корни общие. Последовательным делением мы можем найти их общий наибольший делитель:

$$f = f'A + R_1,$$
$$f' = R_1 B + R_2,$$
$$R_1 = R_2 C + R_3,$$
$$R_2 = R_3 D + 0.$$

Получение нулевого остатка показывает, что R_3 и есть общий наибольший делитель. Уравнение $\varphi = \frac{f}{R_3} = 0$ содержит все корни уравнения $f = 0$, но при этом кратность корней уже будет равна единице.

Дифференциальные операции над матрицами. Применение к решению дифференциальных уравнений

4.1.41. Дифференцирование и интегрирование матрицы. Пусть дана матрица $[\alpha]$, элементы которой α_{ij} суть функции одной переменной t:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t).$$

Производная матрицы $[\alpha]$ определяется соотношением

$$\frac{d}{dt}[\alpha] = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_{11}}{dt} & \dots & \frac{d\alpha_{1n}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\alpha_{n1}}{dt} & \dots & \frac{d\alpha_{nn}}{dt} \end{bmatrix},$$

т. е., короче, если заменить $\frac{d}{dt}$ символом D, получим

$$D[\alpha] = [D\alpha].$$

Аналогично

$$\int_{t_0}^{t} [\alpha]\, dt = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} \alpha_{11}\, dt & \dots & \int_{t_0}^{t} \alpha_{1n}\, dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{t_0}^{t} \alpha_{n1}\, dt & \dots & \int_{t_0}^{t} \alpha_{nn}\, dt \end{bmatrix}.$$

Если обозначить через Q операцию интегрирования $\int_{t_0}^{t}(\ )\,dt$, то

$$Q[\alpha]=[Q\alpha].$$

4.1.42. Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим следующую систему, к которой всегда можно привести любую линейную систему первого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ \dots\ +\alpha_{1n}x_n,\\
\frac{dx_2}{dt}&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ \dots\ +\alpha_{2n}x_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dx_n}{dt}&=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ \dots\ +\alpha_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Обозначив через D операцию дифференцирования, мы можем записать систему при помощи матричных обозначений:

$$[Dx]=[\alpha]\,[x],$$

или

$$\frac{d}{dt}[x]=[\alpha]\,[x].$$

Рассмотрим сначала случай, когда $n=1$. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\alpha(t)\,y$$

и поставлены начальные условия: $y=y_0$ при $t=t_0$. Тогда

$$y=y_0+\int_{t_0}^{t}\alpha(t)\,y\,dt.$$

Это интегральное уравнение может быть решено последовательным приближением (метод Пикара). Пусть Q — оператор, определяющий операцию $\int_{t_0}^{t}(\ )\,dt$. Имеем

$$y=y_0+Q\alpha y.$$

Подставляя это значение y в правую часть уравнения, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
y&=y_0+Q\alpha(y_0+Q\alpha y),\\
y&=y_0+Q\alpha(y_0+Q\alpha(y_0+Q\alpha y)),\\
y&=y_0+y_0Q\alpha+y_0Q\alpha Q\alpha+Q\alpha Q\alpha Q\alpha y
\end{aligned}$$

и т. д. В результате имеем

$$y=y_0(1+Q\alpha+Q\alpha Q\alpha+Q\alpha Q\alpha Q\alpha+\ \dots).$$

Этот ряд быстро сходится.

Аналогично поступим с матричным уравнением

$$\frac{d}{dt}[x]=[\alpha]\,[x].$$

Начальные условия: $[x]=[x(t_0)]$ в момент времени $t=t_0$.

Интегральное уравнение задачи имеет вид

$$[x(t)] = [x(t_0)] + \int_{t_0}^{t} [\alpha(t)]\,[x(t)]\,dt.$$

Решая это уравнение последовательным приближением, получим

$$[x(t)] = \{[1] + Q[\alpha] + Q[\alpha]\,Q[\alpha] + Q[\alpha]\,Q[\alpha]\,Q[\alpha] + \ldots\}\,[x(t_0)].$$

Обозначим через $\Omega^{t_0,\,t}$ оператор, определенный следующим образом:

$$\Omega^{t_0,\,t} = \left\{[1] + \int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt + \int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt\int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt\int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt\int_{t_0}^{t}(\quad)\,dt + \ldots\right\}.$$

Назовем его оператором интегрирования. Результат операции $\Omega^{t_0,\,t}$, произведенной над матрицей $[\alpha]$, равен

$$\Omega^{t_0,\,t}[\alpha] = \left\{[1] + \int_{t_0}^{t}[\alpha]dt + \int_{t_0}^{t}[\alpha]\,dt\int_{t_0}^{t}[\alpha]\,dt + \int_{t_0}^{t}[\alpha]\,dt\int_{t_0}^{t}[\alpha]\,dt\int_{t_0}^{t}[\alpha]\,dt + \ldots\right\}.$$

Мы можем достаточно долго продолжать вычисления, чтобы обеспечить любую наперед заданную точность.

Итак, решение системы имеет вид

$$[x(t)] = \Omega^{t_0,\,t}[\alpha]\,[x(t_0)].$$

Заметим, что с помощью оператора интегрирования можно сразу же написать

$$\Omega^{t_0,\,t_0}[\alpha] = [1].$$

Если дифференцировать $\Omega^{t_0,\,t}[\alpha]$ по t, то находим

$$\frac{d}{dt}\,\Omega^{t_0,\,t}[\alpha] = [\alpha]\,\Omega^{t_0,\,t}[\alpha].$$

Если элементы матрицы $[\alpha]$ — постоянные, то

$$\Omega^{t_0,\,t}[\alpha] = e^{[\alpha](t-t_0)},$$

так как в этом случае

$$\underbrace{Q[\alpha]\,Q[\alpha]\,Q[\alpha]\ldots Q[\alpha]}_{n\text{ раз}} = \frac{(t-t_0)^n}{n!}\,[\alpha]^n.$$

4.1.43. Система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В этом случае все элементы матрицы $[\alpha]$ не зависят от t и согласно предпоследней формуле решение

$$[x(t)] = \Omega^{t_0,\,t}[\alpha]\,[x(t_0)]$$

может быть записано в виде

$$[x(t)] = e^{[\alpha](t-t_0)}\,[x(t_0)].$$

Матрицу $e^{[\alpha](t-t_0)}$ можно легко вычислить при помощи формулы Бэкера (см. п. 4.1.36).

Возьмем систему двух уравнений. Имеем

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2-(\alpha_{11}+\alpha_{22})\lambda+\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=0$ будут

$$\lambda_1=a+b,\quad \lambda_2=a-b.$$

Применение формулы Бэкера дает

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a+b & a-b\end{vmatrix}=-2b,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{(a+b)(t-t_0)} & e^{(a-b)(t-t_0)}\end{vmatrix}=-2e^{a(t-t_0)}\operatorname{sh} b(t-t_0),$$

$$D_0=\begin{vmatrix}e^{(a+b)(t-t_0)} & e^{(a-b)(t-t_0)}\\ a+b & a-b\end{vmatrix}=2e^{a(t-t_0)}\{a\operatorname{sh} b(t-t_0)-b\operatorname{ch} b(t-t_0)\},$$

$$e^{[\alpha](t-t_0)}=\frac{e^{a(t-t_0)}}{b}\operatorname{sh} b(t-t_0)[\alpha]-\frac{e^{a(t-t_0)}}{b}\{a\operatorname{sh} b(t-t_0)-b\operatorname{ch} b(t-t_0)\}[1].$$

Отсюда

$$\Omega^{t_0,\,t}[\alpha]=\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix},$$

где

$$\Omega_{11}=\left\{\frac{\alpha_{11}-a}{b}\operatorname{sh} b(t-t_0)+\operatorname{ch} b(t-t_0)\right\}e^{a(t-t_0)},$$

$$\Omega_{12}=\frac{\alpha_{12}}{b}\operatorname{sh} b(t-t_0)\,e^{a(t-t_0)},$$

$$\Omega_{22}=\left\{\frac{\alpha_{22}-a}{b}\operatorname{sh} b(t-t_0)+\operatorname{ch} b(t-t_0)\right\}e^{a(t-t_0)},$$

$$\Omega_{21}=\frac{\alpha_{21}}{b}\operatorname{sh} b(t-t_0)\,e^{a(t-t_0)}.$$

Решение имеет вид

$$[x(t)]=\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix}[x(t_0)].$$

Вернемся к общему случаю системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, где коэффициенты α являются функциями переменной t, конечными для всех значений интервала $(t_0,\ t)$. Тогда вычисление $\Omega^{t_0,\,t}[\alpha(t)]$ будет весьма затруднительным.

Мы получим приближенное решение, разделив промежуток $(t_0,\ t)$ на отрезки, в которых коэффициенты α могут приблизительно рассматриваться как постоянные. Пусть $(t_s,\ t_{s+1})$ — один из таких промежутков. Пользуясь предыдущими результатами, получим выражение

$$[x(t_{s+1})]=e^{[\alpha](t_{s+1}-t_s)}[x(t_s)],$$

которое легко может быть вычислено. Значение неизвестной функции $x(t)$ будет тем ближе к истинному, чем меньше будут промежутки $(t_{s+1},\ t_s)$.

4.1.44. Случай линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Пусть дано уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} - \beta_n(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} - \ldots - \beta_1(t)\,x = 0.$$

Положив

$$x = x_1,\ \frac{dx}{dt} = x_2,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x_n,$$

мы приходим к системе

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3,\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots \beta_n x_n.$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{dt}[x] = [\beta][x],$$

где β — матрица вида

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Это — частный случай задачи, рассмотренной в п. 4.1.43.

Пример. Следуя Келлеру, применим этот метод к решению уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{6}{1-t^2}\,x = 0$$

при следующих начальных условиях: $x(0) = -\frac{1}{2}$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$.

Положим

$$x = x_1,\quad \frac{dx_1}{dt} = x_2.$$

Имеем систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{6}{1-t^2}x_1 + \frac{2t}{1-t^2}x_2,$$

или в матричных обозначениях

$$\frac{d}{dt}[x] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-6}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \end{bmatrix}[x] = [\alpha][x].$$

Возьмем промежуток $0 \leqslant t \leqslant 0{,}1$. Будем в нем считать элементы α_{21} и α_{22} постоянными и равными их среднему значению в этом промежутке:

$$\alpha_{21} = \frac{-6}{0{,}1}\int_0^{0{,}1}\frac{dt}{1-t^2} = -6{,}015,\quad \alpha_{22} = \frac{2}{0{,}1}\int_0^{0{,}1}\frac{t\,dt}{1-t^2} = 0{,}1.$$

Тогда в этом промежутке матрица $[\alpha]$ заменится на

$$[\alpha_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6{,}015 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения $\frac{d}{dt}[x]=[\alpha_1][x]$ будет

$$[x]=e^{0,1\,|\alpha_1|}[x(t_0)].$$

Корни характеристического уравнения для $[\alpha_1]$ равны $0,05 \pm 2,45j$. Отсюда

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \frac{e^{0,005}}{2,45}\left\{(2,45\cos 0,245 - 0,05\sin 0,245)[1] + \right.$$

$$\left. + \sin 0,245 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6,015 & 0,1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(x_1)_{t=0,1} = -0,48, \qquad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0,1} = 0,30.$$

Для промежутка $0,1 \leqslant t \leqslant 0,2$ таким же точно образом находим

$$(x_1)_{t=0,2} = -0,43, \qquad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0,2} = 0,59$$

и постепенно составляем следующую таблицу:

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x	—0,50	—0,48	—0,43	—0,34	—0,23	—0,11
$\frac{dx}{dt}$	0,00	0,30	0,59	0,86	1,08	1,21

Предложенное уравнение легко может быть решено непосредственно. Находим

$$x=\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{1}{3}\right).$$

Естественно, что подобные уравнения не следует решать матричным методом, который имеет смысл применять лишь в случае, когда прямое интегрирование невозможно.

4.2. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ИЗУЧЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

4.2.1. Определение. По определению четырехполюсник представляет собой электрическую цепь, в которой различают два входных и два выходных зажима (рис. 4.5). Будем предполагать, что эта цепь содержит только сопротивления, индуктивности, емкости, электродвигатели с одинаковой угловой частотой ω или усилители при непременном условии работы в линейном режиме.

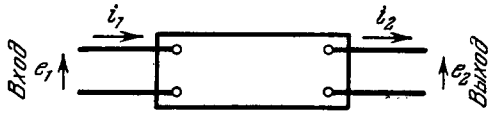


Рис. 4.5.

Пусть i_1, e_1, i_2, e_2 — мгновенные токи и напряжения соответственно на входе и на выходе цепи.

Мы будем рассматривать только установившиеся режимы четырехполюсников при синусоидальных токах и напряжениях. Тогда

$$i_1 = I_1 e^{j\omega t}, \quad i_2 = I_2 e^{j\omega t},$$
$$e_1 = E_1 e^{j\omega t}, \quad e_2 = E_2 e^{j\omega t}.$$

I_1, E_1, I_2, E_2 представляют собой комплексные амплитуды тока и напряжения на входе и выходе четырехполюсника.

Эти четыре величины не являются независимыми. Между ними существуют два линейных соотношения:

$$\begin{cases} I_1 = \alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2, \\ I_2 = \alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2. \end{cases} \tag{16}$$

I_1, I_2 и E_1, E_2 можно рассматривать как составляющие некоторого вектора в двумерном комплексном пространстве. Сделаем предположение, что оно отнесено к двум прямоугольным осям. Соотношения (16) в матричном обозначении запишутся в виде

$$[I] = [\alpha][E].$$

Назовем $[\alpha]$ матрицей полной проводимости четырехполюсника. Будем считать, что матрица $[\alpha]$ невырожденная. Тогда можно решить систему (16) относительно E_1 и E_2. При этом получаем новую систему

$$[E] = [\alpha]^{-1}[I].$$

Матрицу $[Z] = [\alpha]^{-1}$ назовем матрицей полного сопротивления или импеданса четырехполюсника. Имеем

$$[Z] = \frac{1}{|\alpha|}\begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Можно решить систему (16) относительно других пар переменных, например относительно E_2, I_2 как функций E_1, I_1.

Будем считать, что (E_1, I_1), (E_2, I_2) — составляющие некоторого обобщенного вектора: вектора входного тока — напряжения (обозначим его через $[\mathcal{U}_1]$) и соответственно вектора выходного тока — напряжения (обозначим его $[\mathcal{U}_2]$). Векторы $[\mathcal{U}_1]$ и $[\mathcal{U}_2]$ связаны соотношением

$$[\mathcal{U}_2] = [\gamma][\mathcal{U}_1].$$

Матрицу $[\gamma]$ назовем характеристической матрицей четырехполюсника. Она получается из коэффициентов системы (16), решенной относительно E_2, I_2. Предполагая, что $\alpha_{12} \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} E_2 = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}E_1 + \frac{1}{\alpha_{12}}I_1, \\ I_2 = -\frac{|\alpha|}{\alpha_{12}}E_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}}I_1. \end{cases} \tag{18}$$

Мы можем также с помощью системы (16) вычислить другую пару переменных E_1, I_2 как функции I_1, E_2. В связи с этим рассмотрим два вектора $[\mathcal{V}_1]$ и $[\mathcal{V}_2]$, составляющие которых соответственно равны E_1, I_2 и I_1, E_2. Тогда

$$[\mathcal{V}_1] = [h][\mathcal{V}_2].$$
$$[\mathcal{V}_2] = [g][\mathcal{V}_1],$$

где $[g]$ и $[h]$ — две новые матрицы, обратные друг другу. Было бы удобно иметь возможность представить каждую из матриц $[\alpha]$, $[Z]$, $[\gamma]$, $[h]$, $[g]$ как

функцию элементов любой из оставшихся. Результат такого вычисления собран здесь:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{|Z|}\begin{bmatrix}Z_{22} & -Z_{12}\\ -Z_{21} & Z_{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{\gamma_{12}}\begin{bmatrix}-\gamma_{11} & 1\\ -|\gamma| & \gamma_{22}\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{g_{22}}\begin{bmatrix}|g| & g_{12}\\ -g_{21} & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix}1 & -h_{12}\\ h_{21} & |h|\end{bmatrix},$$
$$[Z]=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{|\alpha|}\begin{bmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{\gamma_{21}}\begin{bmatrix}-\gamma_{22} & 1\\ -|\gamma| & \gamma_{11}\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{g_{11}}\begin{bmatrix}1 & -g_{12}\\ g_{21} & |g|\end{bmatrix}=\frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix}|h| & h_{12}\\ -h_{21} & 1\end{bmatrix},$$
$$[\gamma]=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_{12}}\begin{bmatrix}-\alpha_{11} & 1\\ -|\alpha| & \alpha_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{Z_{12}}\begin{bmatrix}Z_{22} & -|Z|\\ 1 & -Z_{11}\end{bmatrix}= \tag{19}$$
$$=\frac{1}{g_{12}}\begin{bmatrix}-|g| & g_{22}\\ -g_{11} & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{h_{12}}\begin{bmatrix}1 & -h_{11}\\ h_{22} & -|h|\end{bmatrix},$$
$$[g]=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_{22}}\begin{bmatrix}|\alpha| & \alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{Z_{11}}\begin{bmatrix}1 & -Z_{12}\\ Z_{21} & |Z|\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\gamma_{22}}\begin{bmatrix}-\gamma_{21} & 1\\ |\gamma| & \gamma_{12}\end{bmatrix}=\frac{1}{|h|}\begin{bmatrix}h_{22} & -h_{12}\\ -h_{21} & h_{11}\end{bmatrix},$$
$$[h]=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_{11}}\begin{bmatrix}1 & -\alpha_{12}\\ \alpha_{21} & |\alpha|\end{bmatrix}=\frac{1}{Z_{22}}\begin{bmatrix}|Z| & Z_{12}\\ -Z_{21} & 1\end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\gamma_{11}}\begin{bmatrix}-\gamma_{12} & 1\\ |\gamma| & \gamma_{21}\end{bmatrix}=\frac{1}{|g|}\begin{bmatrix}g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{bmatrix}.$$

4.2.2. Соединение четырехполюсников по цепной схеме *). Такое соединение представлено схематически на рис. 4.6 для четырехполюсников

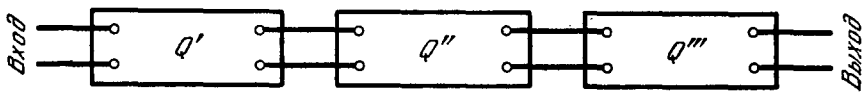


Рис. 4.6.

Q', Q'', Q'''. Так как выходной ток и напряжение каждого четырехполюсника равны входному току и напряжению последующего, то, учитывая связь между входом и выходом,

$$[\mathcal{U}_2']=[\gamma'][\mathcal{U}_1'],\quad [\mathcal{U}_2'']=[\gamma''][\mathcal{U}_1''],\quad [\mathcal{U}_2'''']=[\gamma''''][\mathcal{U}_1''''],$$

получим

$$[\mathcal{U}_2'''']=[\gamma''''][\gamma''][\gamma'][\mathcal{U}_1'].$$

Если ввести матрицу $[\gamma]$, определяемую формулой

$$[\mathcal{U}_2'''']=[\gamma][\mathcal{U}_1'],$$

то

$$[\gamma]=[\gamma''''][\gamma''][\gamma']. \tag{20}$$

*) Такое соединение иногда называют каскадным.

Следует особо отметить, что матрицы здесь расположены в порядке, обратном порядку последовательности четырехполюсников.

Таким образом, характеристическая матрица эквивалентного четырехполюсника Q, состоящего из трех четырехполюсников Q', Q'', Q''', соединенных по цепной схеме, равна произведению характеристических матриц каждого из составляющих четырехполюсников.

Можно заметить, что результирующий четырехполюсник будет в большинстве случаев меняться при перемене мест составляющих четырехполюсников, что согласуется с некоммутативностью исходных матриц. В случае коммутирующих матриц, он не будет изменяться. Мы увидим далее, какой это имеет физический смысл (см. п. 4. 2. 16). При n одинаковых четырехполюсниках имеем

$$[\gamma] = [\gamma']^n.$$

4.2.3. Параллельное соединение четырехполюсников. Такое соединение схематически изображено на рис. 4.7. Здесь

$$[I'] = [\alpha'][E'],$$
$$[I''] = [\alpha''][E''].$$

Так как при этом входные напряжения и, соответственно, выходные будут у четырехполюсников одинаковы, то

$$[E'] = [E''] = [E].$$

Полные входные и выходные токи равны сумме входных и выходных токов каждого из четырехполюсников:

$$[I] = [I'] + [I''],$$

откуда

$$[I] = [\alpha][E] = \{[\alpha'] + [\alpha'']\}[E].$$

Следовательно,

$$[\alpha] = [\alpha'] + [\alpha'']. \qquad (21)$$

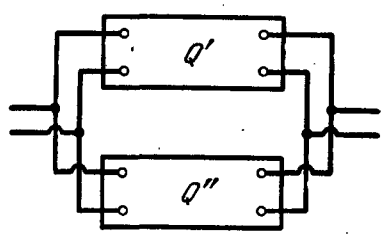


Рис. 4.7.

Матрица полной проводимости эквивалентного четырехполюсника Q, образованного параллельно соединенными четырехполюсниками, представляет собой сумму матриц полной проводимости составляющих четырехполюсников.

4.2.4. Последовательное соединение четырехполюсников. Такое соединение схематически представлено на рис. 4.8. Имеем

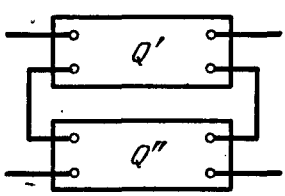


Рис. 4.8.

$$[E'] = [Z'][I'],$$
$$[E''] = [Z''][I''].$$

Кроме того,

$$[E] = [E'] + [E''],$$
$$[I] = [I'] = [I''].$$

Поэтому

$$[E] = [Z][I] = \{[Z'] + [Z'']\}[I],$$

откуда

$$[Z] = [Z'] + [Z'']. \qquad (22)$$

Матрица полного сопротивления четырехполюсника, образованного последовательным соединением четырехполюсников, равна сумме матриц полных сопротивлений составляющих четырехполюсников *).

*) Будем в дальнейшем для краткости говорить просто «сопротивление четырехполюсника», имея в виду его полное сопротивление.

4.2.5. Последовательно-параллельное и параллельно-последовательное соединение четырехполюсников. Последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников Q' и Q'' представлено на рис. 4.9. Обе пары входных зажимов соединены последовательно, а обе пары выходных зажимов

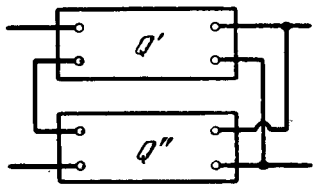


Рис. 4.9.

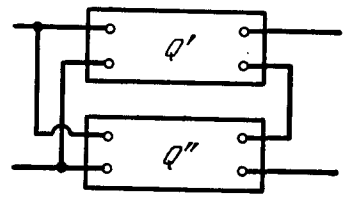


Рис. 4.10.

параллельно. При помощи вычисления, подобного предыдущим, легко получить, что в этом случае матрица $[h]$ эквивалентного четырехполюсника Q равна сумме матриц $[h']$ и $[h'']$ составляющих четырехполюсников Q' и Q'':

$$[h] = [h'] + [h''].$$

Параллельно-последовательное соединение двух четырехполюсников Q' и Q'' представлено на рис. 4.10. Здесь обе пары входных зажимов соединены параллельно, обе пары выходных зажимов — последовательно. В этом случае

$$[g] = [g'] + [g''].$$

Важное замечание. Условие равенства, которое должно существовать между током, входящим через первый входной зажим и выходящим через второй входной зажим, может не выполняться при параллельном или последовательном соединении четырехполюсников. Действительно, один из составляющих четырехполюсников устанавливает внешнюю связь между двумя — соответственно входным и выходным — зажимами одного из соседних четырехполюсников. Тогда формулы, найденные для последовательного или параллельного соединения, могут оказаться неверными.

Рассмотрим сначала параллельное соединение двух четырехполюсников Q и Q'. Соединим только входные зажимы. Можно также соединить выходные зажимы, если выходные напряжения каждого четырехполюсника окажутся до этой операции равными между собой, или же, что одно и то же, если напряжения U и U' между зажимами 2—4 и 2′—4′ одинаковы. Эти напряжения выражаются для каждого четырехполюсника однородной линейной функцией от входного и выходного напряжений:

$$U = s_1 E_1 + s_2 E_2,$$
$$U' = s_1' E_1' + s_2' E_2',$$

где s_1, s_2, s_1', s_2' — параметры обоих четырехполюсников.

Если два четырехполюсника таковы, что $s_1 = s_1'$, $s_2 = s_2'$, то условие $U = U'$ влечет за собой $E_1 = E_1'$ и $E_2 = E_2'$. Соединим параллельно входные зажимы четырехполюсников и замкнем накоротко зажимы 3—4 и 3′—4′ (рис. 4.11, *а*). Тогда $E_2 = E_2' = 0$. Условие $s_1 = s_1'$ равносильно $U = U'$. А условие $U = U'$, в свою очередь, равносильно $v = 0$, если обозначить через v напряжение между выходными зажимами четырехполюсников. Если возобновить этот опыт, заменив вход выходом и наоборот, то $v = 0$ будет означать $s_2' = s_2$.

Проверку обоих условий, которым удовлетворяют четырехполюсники, можно в большинстве случаев осуществить непосредственным рассмотрением их составляющих.

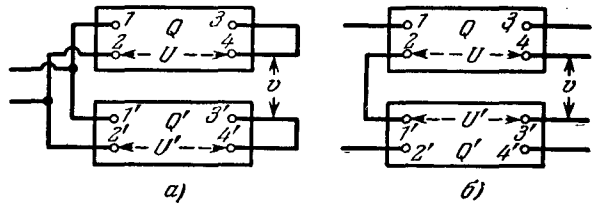


Рис. 4.11.

Что касается последовательного соединения, то мы можем рассуждать аналогично. Оба условия представляют собой равенства $I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2$. Напряжения U и U' могут быть выражены как функции токов линейными соотношениями:

$$U = r_1 I_1 + r_2 I_2,$$
$$U' = r'_1 I'_1 + r'_2 I'_2.$$

Соединим последовательно входные зажимы и оставим выходные зажимы разомкнутыми (рис. 4.11, *б*). Условие $v = 0$ равносильно $r_1 = r'_1$. Поменяем местами входные и выходные зажимы. Теперь условие $v = 0$ равносильно $r_2 = r'_2$.

Существуют два частных случая, когда вышеописанные условия всегда выполняются.

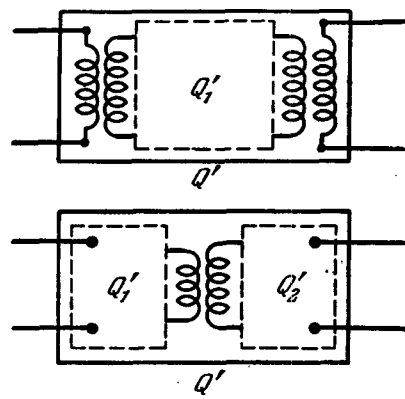


Рис. 4.12.

1. Один из четырехполюсников содержит один или несколько трансформаторов, помещенных таким образом, что между входными и выходными зажимами четырехполюсника нет непосредственной электрической связи. При этом U и U' неопределенны. На рис. 4.12 изображены два примера таких четырехполюсников.

2. Оба четырехполюсника таковы, что в каждом из них имеется безымпедансная связь между входным и соответствующим выходным зажимами.

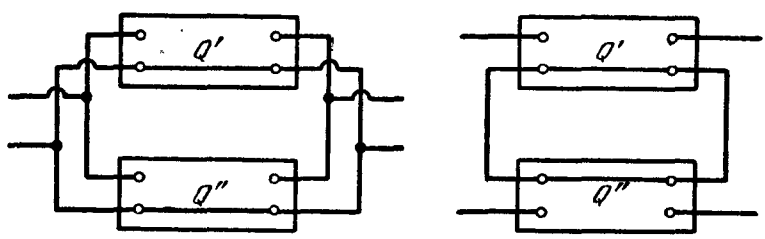


Рис. 4.13.

Последний пример отражает громадное большинство обычно применяемых четырехполюсников. На рис. 4.13 показано последовательное и параллельное соединение двух таких четырехполюсников. Соединены те зажимы, которые связаны внутри каждого четырехполюсника безымпедансной связью.

Формулы, найденные для последовательно-параллельного или параллельно-последовательного соединения, оказываются действительными только при наличии некоторых условий, аналогичных условиям, указанным выше для последовательного или параллельного соединения. При этом, так же как и для тех соединений, имеются два случая отсутствия ограничений: когда трансформатор изолирует входные и выходные зажимы одного из четырехполюсников, и более существенный случай, когда имеет место безымпедансная связь между входным и выходным зажимом в каждом из двух четырехполюсников Q' и Q''. Такое соединение показано на рис. 4.14.

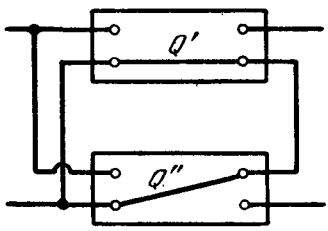


Рис. 4.14.

4.2.6. Сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника. Это сопротивления, измеряемые на входе и выходе при отключении входа или выхода или при замыкании накоротко. Обозначим их через

$$(Z_1)_{\text{х. х}},\quad (Z_2)_{\text{х. х}},\quad (Z_1)_{\text{к. з}},\quad (Z_2)_{\text{к. з}}$$

(х. х — холостой ход, к. з — короткое замыкание). Указанные величины легко измерить. Нетрудно также найти следующие соотношения между этими величинами и элементами матриц $[\alpha]$, $[Z]$, $[\gamma]$, $[h]$, $[g]$:

$$\begin{aligned}
(Z_1)_{\text{х. х}} &= \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{|Z|}{Z_{22}} = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} = \frac{g_{22}}{|g|} = h_{11},\\
(Z_2)_{\text{х. х}} &= -\frac{1}{\alpha_{22}} = -\frac{|Z|}{Z_{11}} = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} = -g_{22} = -\frac{h_{11}}{|h|},\\
(Z_1)_{\text{к. з}} &= \frac{\alpha_{22}}{|\alpha|} = Z_{11} = -\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{21}} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{|h|}{h_{22}},\\
(Z_2)_{\text{к. з}} &= -\frac{\alpha_{11}}{|\alpha|} = -Z_{22} = -\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{21}} = -\frac{|g|}{g_{11}} = -\frac{1}{h_{22}}.
\end{aligned} \tag{23}$$

4.2.7. Пассивные четырехполюсники. Пассивным называется четырехполюсник, не содержащий в себе источников энергии. В нем имеются лишь емкости, индуктивности и активные сопротивления. Это ограничение несколько упрощает матрицы $[\alpha]$, $[Z]$, $[\gamma]$, $[h]$, $[g]$.

Действительно, приложим напряжение E ко входу пассивного четырехполюсника, выход которого закорочен. При этом на выходе наблюдается ток I. Если приложить то же напряжение к выходу, то на входе, если его закоротить, должен наблюдаться тот же самый ток, что вытекает из весьма общей теоремы обратимости. В этом случае система (16) сводится к следующей:

$$\begin{aligned}
I &= \alpha_{21}E,\\
-I &= \alpha_{12}E.
\end{aligned}$$

Знак минус во втором равенстве связан с условием о знаке тока. Ток i считается положительным, если он течет в выбранном направлении по выходной цепи, и отрицательным, если он имеет то же направление во входной цепи.

Следовательно, $\alpha_{12} = -\alpha_{21}$, и из (19) мы получаем

$$\frac{g_{21}}{g_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{12}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{12}} = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} = |\gamma| = 1. \tag{24}$$

4.2.8. Симметричные четырехполюсники. Четырехполюсник называется симметричным, если замена входа на выход не влечет за собой изменений его свойств. Очевидно, что сопротивления холостого хода и короткого замыкания такого четырехполюсника (п. 4.2.6) должны быть попарно равны:

$$(Z_1)_{\text{х. х}} = (Z_2)_{\text{х. х}}, \quad (Z_1)_{\text{к. з}} = (Z_2)_{\text{к. з}}.$$

Если, кроме того, такой четырехполюсник пассивен, то условия (23) вместе с двумя последними равенствами дают

$$\gamma_{11} = \gamma_{22}. \tag{25}$$

Это соотношение характеризует симметричный четырехполюсник.

Примеры простых четырехполюсников

Небезынтересно определить матрицы $[\alpha]$, $[\gamma]$, $[Z]$ некоторых элементарных четырехполюсников. Соединенные в различных комбинациях такие элементарные четырехполюсники образуют более сложные четырехполюсники, матрицы которых можно получить путем применения изложенных выше правил вычисления.

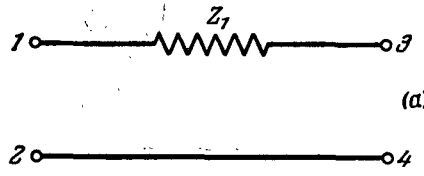


Рис. 4.15.

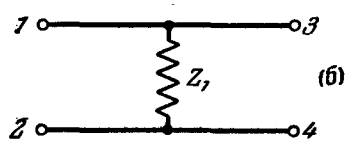


Рис. 4.16.

4.2.9. Четырехполюсник с одним последовательным сопротивлением. Такой четырехполюсник изображен на рис. 4.15. Будем называть его четырехполюсник (а). Имеем

$$E_2 = E_1 - I_1 Z_1,$$

$$I_2 = I_1.$$

Отсюда

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\alpha] = \frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2.10. Четырехполюсник с одним параллельным сопротивлением. Такой четырехполюсник изображен на рис. 4.16. Будем называть его четырехполюсник (б). Имеем

$$E_2 = E_1,$$

$$I_2 = -\frac{1}{Z_1} E_1 + I_1.$$

Отсюда

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix}, \quad [Z] = Z_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя матрицы четырехполюсников (а) и (б), можно легко получить матрицы многих простых четырехполюсников.

4.2.11. Г-образный четырехполюсник. Четырехполюсник на рис. 4.17 состоит из четырехполюсника (б) и соединенного с ним по цепной схеме четырехполюсника (а). Следовательно, имеем

$$[\gamma]=\begin{bmatrix}1 & -Z_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{Z_1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{Z_2}{Z_1} & -Z_2\\ -\frac{1}{Z_1} & 1\end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}\\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}\end{bmatrix},\quad [Z]=\begin{bmatrix}Z_1 & -Z_1\\ Z_1 & -Z_1-Z_2\end{bmatrix}.$$

Четырехполюсник на рис. 4.18 — также Г-образный, но составляющие его элементарные четырехполюсники (а) и (б) соединены в другой последо-

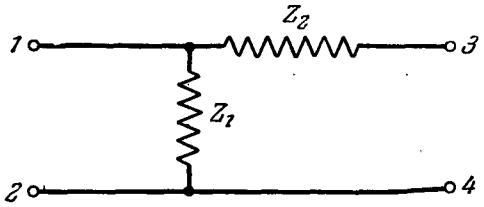


Рис. 4.17.

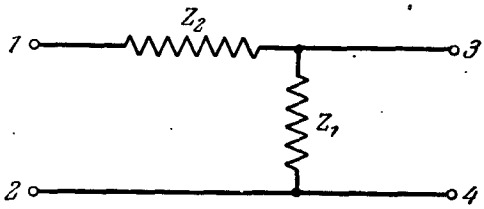


Рис. 4.18.

вательности, чем на рис. 4.17. Характеризующие его матрицы можно получить из предыдущего выражения, переменив порядок умножения матриц:

$$[\gamma]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{Z_1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -Z_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -Z_2\\ -\frac{1}{Z_1} & 1+\frac{Z_2}{Z_1}\end{bmatrix}$$

при

$$[Z]=\begin{bmatrix}Z_1+Z_2 & -Z_1\\ Z_1 & -Z_1\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad[\alpha]=\begin{bmatrix}\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}\\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}-\frac{1}{Z_1}\end{bmatrix}.$$

4.2.12. Т-образный и П-образный четырехполюсники. Т-образный четырехполюсник состоит из трех элементов (а, б, а), соединенных по цепной схеме (рис. 4.19). Поэтому мы имеем

$$[\gamma]=\begin{bmatrix}1 & -Z_3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{Z_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -Z_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{Z_3}{Z_2} & -Z_1-Z_3-\frac{Z_1Z_3}{Z_2}\\ -\frac{1}{Z_2} & 1+\frac{Z_1}{Z_2}\end{bmatrix},$$

$$[Z]=\begin{bmatrix}Z_1+Z_2 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_2+Z_3)\end{bmatrix},$$

$$[\alpha]=\frac{1}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}\begin{bmatrix}Z_2+Z_3 & -Z_2\\ Z_2 & -(Z_1+Z_2)\end{bmatrix}.$$

П-образный четырехполюсник также состоит из трех элементов, соединенных по цепной схеме, но уже в другом сочетании (б, а, б), как показано на рис. 4.20. Поэтому

$$[\gamma]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{Z_3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -Z_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{Z_1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{Z_2}{Z_1} & -Z_2\\ -\frac{1}{Z_1}-\frac{1}{Z_3}-\frac{Z_2}{Z_1Z_3} & 1+\frac{Z_2}{Z_3}\end{bmatrix},$$

$$[Z]=\frac{1}{Z_1+Z_2+Z_3}\begin{bmatrix}Z_1(Z_2+Z_3) & -Z_1Z_3\\ Z_1Z_3 & -Z_3(Z_1+Z_2)\end{bmatrix},$$

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}\\ \frac{1}{Z_2} & -\left(\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}\right)\end{bmatrix}.$$

4.2.13. Х-образный четырехполюсник (решетчатый фильтр). Этот четырехполюсник, изображенный на рис. 4.21, *а*, можно рассматривать как

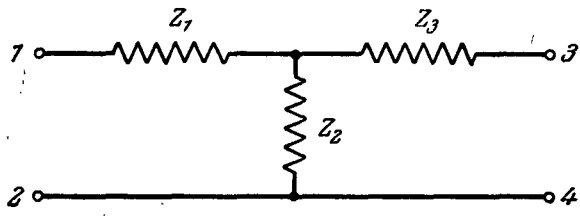


Рис. 4.19.

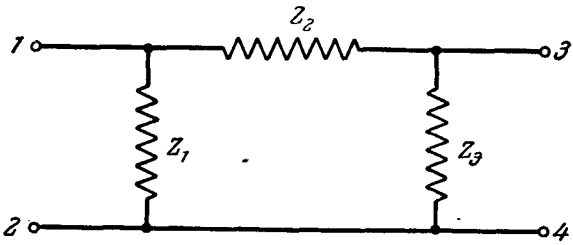


Рис. 4.20.

последовательно-параллельное соединение двух четырехполюсников, представленных на том же рисунке (рис. 4.21, *б*, *в*). Первый из них — Г-образный четырехполюсник. Его матрицу $[h]$ можно получить, применяя одну из формул (19) к результатам вычислений, проделанных в п. 4.2.11:

$$[h]=\frac{1}{Z_1+Z_2}\begin{bmatrix}Z_1Z_2 & Z_1\\ Z_1 & -1\end{bmatrix}.$$

Для четырехполюсника (в) простой расчет дает

$$E_1=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}I_1-\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}E_2,$$

$$I_2=-\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}I_1-\frac{1}{Z_1+Z_2}E_2.$$

Следовательно, его матрица

$$[h]=\frac{1}{Z_1+Z_2}\begin{bmatrix}Z_1Z_2 & -Z_2\\ -Z_2 & -1\end{bmatrix}.$$

Матрица $[h]$ Х-образного четырехполюсника равна сумме этих двух матриц, или

$$\frac{1}{Z_1+Z_2}\begin{bmatrix}2Z_1Z_2 & Z_1-Z_2\\ Z_1-Z_2 & -2\end{bmatrix}.$$

Отсюда посредством формул (19) получаем характеристические матрицы про-

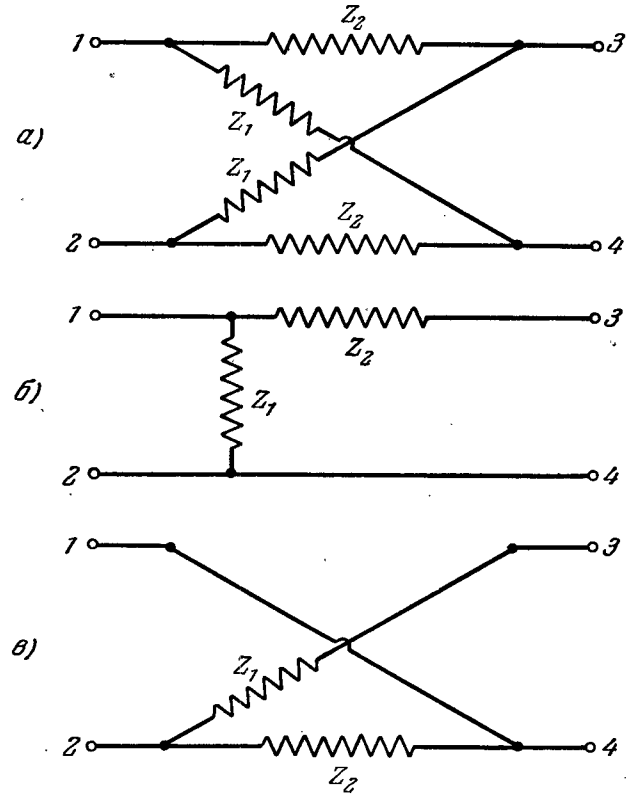


Рис. 4.21.

водимости и сопротивления:

$$[\Upsilon]=\frac{1}{Z_1-Z_2}\begin{bmatrix}Z_1+Z_2 & -2Z_1Z_2\\ -2 & Z_1+Z_2\end{bmatrix},\quad [\alpha]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_1}-\frac{1}{Z_2}\\ \frac{1}{Z_2}-\frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_2}-\frac{1}{Z_1}\end{bmatrix},$$

$$[Z]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}Z_1+Z_2 & Z_2-Z_1\\ Z_1-Z_2 & -Z_1-Z_2\end{bmatrix}.$$

4.2.14. Трансформатор (рис. 4.22). Даны две обмотки с сопротивлениями

$$Z_1=R_1+j\omega L_1 \quad \text{и} \quad Z_2=R_2+j\omega L_2$$

и индуктивной связью

$$\mathcal{M}=j\omega M.$$

Имеем два уравнения

$$E_1 = Z_1 I_1 - \mathscr{M} I_2,$$
$$E_2 = \mathscr{M} I_1 - Z_2 I_2.$$

Отсюда

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & -\mathscr{M} \\ \mathscr{M} & -Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [\alpha] = \frac{1}{\mathscr{M}^2 - Z_1 Z_2} \begin{bmatrix} -Z_2 & \mathscr{M} \\ -\mathscr{M} & Z_1 \end{bmatrix},$$
$$[\gamma] = \frac{1}{\mathscr{M}} \begin{bmatrix} Z_2 & \mathscr{M}^2 - Z_1 Z_2 \\ -1 & Z_1 \end{bmatrix}.$$

4.2.15. Электронная лампа. Рассмотрим триод, работающий на линейном участке характеристики при нулевом сеточном токе. Если через i_a, i_g, e_a, e_g, s, R_i обозначить соответственно анодный и сеточный ток, анодное и сеточное напряжение, крутизну характеристики и внутреннее сопротивление, то, принимая во внимание условие о знаке тока в четырехполюсниках, имеем

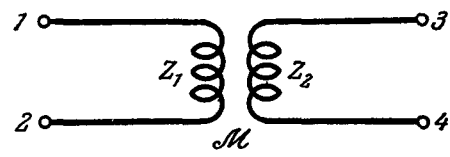


Рис. 4.22.

$$i_a = -se_g - \frac{1}{R_i} e_a, \quad i_g = 0.$$

Различные способы соединения триода сводятся к трем схемам четырехполюсников, изображенным на рис. 4.23. Если через r обозначить сопротивление утечки, то рассмотрение всех трех схем позволяет нам, приняв

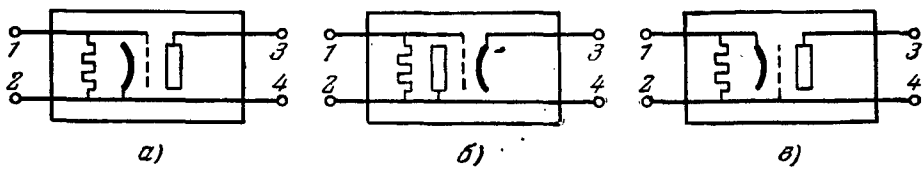


Рис. 4.23.

во внимание уравнения работы триода, написать матрицы $[\alpha]$, $[Z]$, $[\gamma]$ этих четырехполюсников (или $[\gamma]^{-1}$, если матрица $[\gamma]$ не определена):

а)

$$[\alpha_a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ -s & \frac{1}{R_i} \end{bmatrix}, \quad [Z_a] = \begin{bmatrix} r & 0 \\ -rsR_i & -R_i \end{bmatrix}, \quad [\gamma_a]^{-1} = -\frac{1}{s} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_i} & 1 \\ \frac{1}{rR_i} & \frac{1}{r} \end{bmatrix},$$

б)

$$[\alpha_б] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ s & -s - \frac{1}{R_i} \end{bmatrix}, \quad [Z_б] = \begin{bmatrix} r & 0 \\ \frac{srR_i}{1+sR_i} & -\frac{R_i}{1+sR_i} \end{bmatrix},$$
$$[\gamma_б]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{sR_i} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{srR_i} & \frac{1}{sr} \end{bmatrix},$$

в)

$$[\alpha_в]=\begin{bmatrix} s+\frac{1}{r}+\frac{1}{R_l} & -\frac{1}{R_l} \\ s+\frac{1}{R_l} & -\frac{1}{R_l} \end{bmatrix},\quad [Z_в]=\begin{bmatrix} r & -r \\ (1+sR_l)r & -R_l-(1+sR_l)r \end{bmatrix},$$

$$[\gamma_в]=\begin{bmatrix} 1+sR_l+\frac{R_l}{r} & -R_l \\ -\frac{1}{r} & 1 \end{bmatrix}.$$

После обзора простых четырехполюсников мы можем перейти к более сложным, пользуясь правилами составления матриц элементарных четырехполюсников, образующих элементы рассматриваемой схемы.

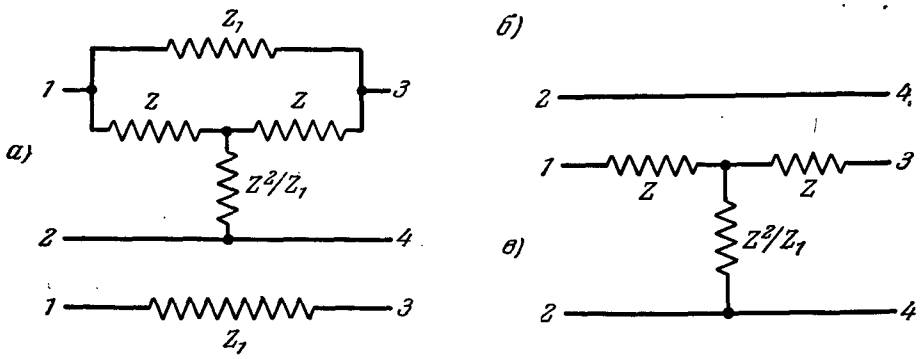


Рис. 4.24.

Пример 1. Т-образная мостовая схема (рис. 4.24, *а*). Такую схему можно разложить на две элементарные, соединенные параллельно (рис. 4.24, *б*, *в*). Имеем

$$[\alpha]=[\alpha_а]+[\alpha_в],$$

$$[\alpha_а]=\frac{1}{Z_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$[\alpha_в]=\frac{1}{(Z_1+2Z)Z}\begin{bmatrix} Z_1+Z & -Z \\ Z & -(Z_1+Z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$[\alpha]=\frac{1}{(Z_1+2Z)ZZ_1}\begin{bmatrix} Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2 & -2Z(Z_1+Z) \\ 2Z(Z_1+Z) & -(Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2) \end{bmatrix},$$

$$[Z]=\frac{Z}{Z_1(Z_1+2Z)}\begin{bmatrix} Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2 & -2Z(Z_1+Z) \\ 2Z(Z_1+Z) & -(Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2) \end{bmatrix},$$

$$[\gamma]=\frac{1}{2Z(Z_1+Z)}\begin{bmatrix} Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2 & -Z_1Z(Z_1+2Z) \\ -\frac{Z_1}{Z}(Z_1+2Z) & Z_1^2+2Z_1Z+2Z^2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Четырехполюсник состоит из двух трансформаторов в каскадном соединении (рис. 4.25). Произведение матриц $[\gamma]$, характери-

зующих каждый трансформатор, дает матрицу $[\gamma]$ эквивалентного четырехполюсника:

$$[\gamma]=\frac{1}{\mathscr{M}_{12}\mathscr{M}_{34}}\begin{bmatrix} Z_4 & -Z_3Z_4+\mathscr{M}_{34}^2 \\ -1 & Z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_2 & -Z_1Z_2+\mathscr{M}_{12}^2 \\ -1 & Z_1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{Z_2+Z_3}{\mathscr{M}_{12}\mathscr{M}_{34}}\begin{bmatrix} Z_4-\dfrac{\mathscr{M}_{34}^2}{Z_2+Z_3} & -Z_1Z_4+\dfrac{\mathscr{M}_{12}^2Z_4}{Z_2+Z_3}+\dfrac{\mathscr{M}_{34}^2Z_1}{Z_2+Z_3} \\ -1 & Z_1-\dfrac{\mathscr{M}_{12}^2}{Z_2+Z_3} \end{bmatrix}.$$

Отсюда непосредственно можно получить первичное и вторичное сопро-

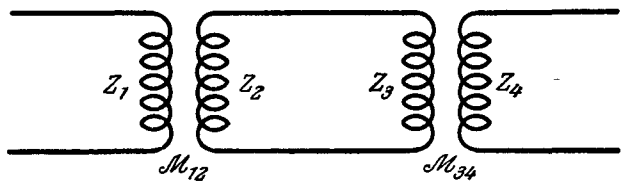


Рис. 4.25.

тивления и коэффициент связи фиктивного трансформатора, эквивалентного двум данным трансформаторам в каскадном соединении:

$$\bar{Z}_1=Z_1-\frac{\mathscr{M}_{12}^2}{Z_2+Z_3},$$

$$\bar{Z}_2=Z_4-\frac{\mathscr{M}_{34}^2}{Z_2+Z_3},$$

$$\bar{\mathscr{M}}=\frac{\mathscr{M}_{12}\mathscr{M}_{34}}{Z_2+Z_3}.$$

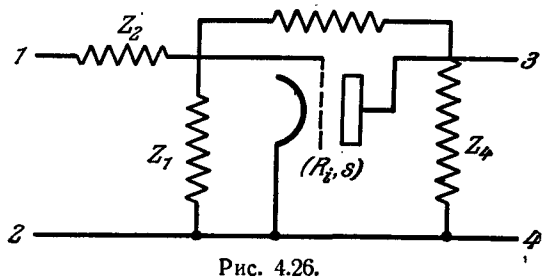


Рис. 4.26.

Пример 3. Рассмотрим усилительную схему на рис. 4.26. Этот четырехполюсник можно разложить на три четырехполюсника, соединенных по цепной схеме, причем центральный состоит из двух четырехполюсников, соединенных параллельно (рис. 4.27).

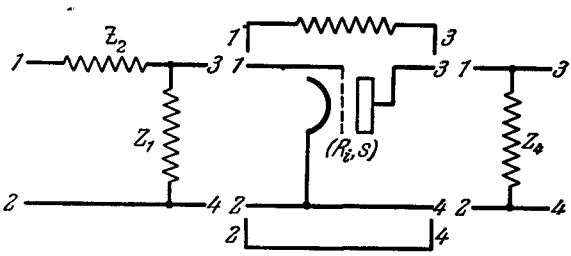


Рис. 4.27.

Матрица $[\alpha']$ центрального четырехполюсника будет равна сумме матриц $[\alpha]$, характеризующих четырехполюсник вакуумной лампы и четырехполюсник вида (а). Можно немного упростить расчеты, введя сопротивление утечки в сопротивление Z_1:

$$[\alpha']=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_3} & -\dfrac{1}{Z_3} \\ \dfrac{1}{Z_3} & -\dfrac{1}{Z_3} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -s & -\dfrac{1}{R_i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_3} & -\dfrac{1}{Z_3} \\ -s+\dfrac{1}{Z_3} & -\dfrac{1}{Z_3}-\dfrac{1}{R_i} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем матрицу

$$[\gamma'] = \begin{bmatrix} -1 & -Z_3 \\ -s - \frac{1}{R_i} & 1 + \frac{Z_3}{R_i} \end{bmatrix}.$$

Характеристическая матрица эквивалентного четырехполюсника будет равна

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z_4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -Z_3 \\ -s - \frac{1}{R_i} & 1 + \frac{Z_3}{R_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Z_2 \\ -\frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}.$$

Для изучения режима триода, работающего как усилитель с анодной нагрузкой Z, следует принять во внимание емкости сетка — катод C_{kg}, сетка — анод C_{ag}, катод — анод C_{ak}. Тогда

$$Z_2 = 0, \quad \frac{1}{Z_1} = j\omega C_{kg} + \frac{1}{r}, \quad Z_3 = \frac{1}{j\omega C_{ag}}, \quad \frac{1}{Z_4} = j\omega C_{ak} + \frac{1}{Z}.$$

4.2.16. Повторное сопротивление четырехполюсника. Рассмотрим четырехполюсник с характеристической матрицей

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}.$$

Если замкнуть его на сопротивление Z, то на входе он покажет кажущееся сопротивление $Z_{вх}$ (рис. 4.28). Имеем соотношения

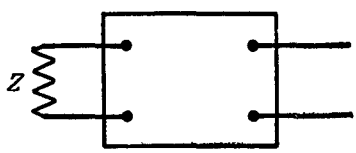


Рис. 4.28.

$$\begin{cases} E_2 = ZI_2, \\ E_1 = Z_{вх} I_1, \end{cases} \tag{26}$$

$$[\mathcal{U}_2] = [\gamma][\mathcal{U}_1]. \tag{27}$$

Выясним, каково должно быть значение Z, чтобы входное сопротивление $Z_{вх}$ было ему равно, иначе говоря, чтобы

$$Z_{вх} = Z = \zeta.$$

Если это равенство имеет место, то общее значение ζ представляет собой повторное сопротивление четырехполюсника. Система (26) показывает, что тогда

$$\frac{E_2}{I_2} = \frac{E_1}{I_1} = \zeta,$$

т. е. что

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{I_2}{I_1} = \lambda.$$

Чтобы можно было говорить о распространении гармонической волны, необходимо отсутствие искажений. Это как раз наш случай, потому что

$$E_2 = \lambda E_1, \quad I_2 = \lambda I_1.$$

Так как составляющие векторов $[\mathcal{U}_1]$ и $[\mathcal{U}_2]$ пропорциональны, то

$$[\mathcal{U}_2] = \lambda [\mathcal{U}_1]. \tag{28}$$

Выражение для $[\mathcal{U}_2]$, полученное из уравнения (28) и подставленное в равенство (27), дает

$$[\gamma][\mathcal{U}_1] = \lambda [\mathcal{U}_1].$$

Следовательно, λ представляет собой собственное значение матрицы $[\gamma]$, т. е. корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}-\lambda & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\gamma_{11}+\gamma_{22})\lambda + |\gamma| = 0. \tag{29}$$

Замечание. Если два четырехполюсника Q и Q' имеют одинаковые повторные сопротивления, то порядок соединения их по цепной схеме безразличен, т. е. соединение Q, Q' равносильно соединению Q', Q. Матрицы $[\gamma]$ и $[\gamma']$ должны при этом коммутировать, и это действительно имеет место, так как у них одинаковы собственные направления.

4.2.17. Случай пассивного четырехполюсника. Здесь $[\gamma]=1$. Следовательно, произведение корней $\lambda_1\lambda_2$ равно единице. Если положить $\lambda_1 = e^{\Gamma}$, то $\lambda_2 = e^{-\Gamma}$.

Предположим, что корень λ_1 соответствует распространению волн справа налево. Тогда корень λ_2 будет соответствовать распространению слева направо. Попробуем вычислить отношение напряжения к току, т. е. повторное сопротивление ζ. Имеем

$$\lambda E_1 = \gamma_{11}E_1 + \gamma_{12}I_1,$$
$$\lambda I_1 = \gamma_{21}E_1 + \gamma_{22}I_1$$

или

$$\frac{E_1}{I_1} = \frac{\gamma_{12}}{\lambda-\gamma_{11}} = \frac{\lambda-\gamma_{22}}{\gamma_{21}} = Z = \zeta.$$

Вычислив λ как функцию ζ и введя эту величину в характеристическое уравнение для $[\gamma]$, находим

$$\gamma_{21}\zeta^2 + (\gamma_{22}-\gamma_{11})\zeta - \gamma_{12} = 0. \tag{30}$$

Можно легко убедиться, что это — характеристическое уравнение матрицы сопротивлений. Следовательно, повторные сопротивления представляют собой собственные значения матрицы $[Z]$.

Пусть ζ_1 и ζ_2 — два корня уравнения (30). С другой стороны, мы имеем

$$\lambda_1 = e^{\Gamma}; \quad \lambda_2 = e^{-\Gamma}.$$

Найдем обе пары соответствующих друг другу значений. Иначе говоря, если e^{Γ} соответствует распространению справа налево, то найдем корень ζ_1 или ζ_2, соответствующий этому направлению распространения. Так как мы рассматриваем пассивный четырехполюсник, то усиление волны не может иметь места. Поэтому вещественная часть Γ должна быть положительной или равна нулю. Корень, который этой волне соответствует, должен иметь наибольшую вещественную часть. Вычислив из уравнений (29) и (30) величины λ_1, λ_2, ζ_1, ζ_2 и полагая

$$\delta = \sqrt{(\gamma_{22}-\gamma_{11})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}},$$

получаем следующие соотношения:

$$\zeta_1 = \frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}+\delta}{2\gamma_{21}}, \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}+\delta}{2},$$

$$\zeta_2 = \frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}-\delta}{2\gamma_{21}}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}-\delta}{2}.$$

Заметим, что ζ_1 и ζ_2 характеризуют собой наклон собственных направлений матрицы $[\gamma]$. Таким образом, получаем следующие формулы:

$$\lambda = e^{\pm\Gamma} = \frac{1}{2}(\gamma_{11}+\gamma_{22} \pm \sqrt{(\gamma_{11}-\gamma_{22})^2+4\gamma_{12}\gamma_{21}}) =$$
$$= \frac{1}{2\alpha_{21}}(\alpha_{22}-\alpha_{11} \pm \sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2-4|\alpha|}) =$$
$$= \frac{1}{2Z_{21}}(Z_{22}-Z_{11} \pm \sqrt{(Z_{11}-Z_{22})^2-4|Z|}), \qquad (31)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\gamma_{21}}(\gamma_{11}-\gamma_{22} \pm \sqrt{(\gamma_{11}-\gamma_{22})^2+4\gamma_{12}\gamma_{21}}) =$$
$$= \frac{1}{2|\alpha|}(\alpha_{11}+\alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2-4|\alpha|}) =$$
$$= \frac{1}{2}(Z_{11}+Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11}+Z_{22})^2-4|Z|}).$$

Замечание. Если пассивный четырехполюсник к тому же и симметричен, то оба повторных сопротивления, естественно, совпадают. Так как $\gamma_{11}=\gamma_{22}$, то эта общая величина равна

$$\zeta = \sqrt{\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21}}}.$$

4.2.18. Цепные фильтры. Имеем n одинаковых четырехполюсников, соединенных по цепной схеме (рис. 4.6). Если $[\gamma]$ — характеристическая матрица каждого четырехполюсника, то характеристическая матрица всей схемы будет $[\gamma]^n$.

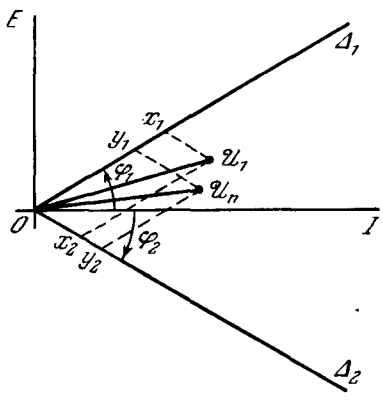


Рис. 4.29.

Первый случай. Цепь замкнута на повторное сопротивление. Если отнести матрицу к ее собственным направлениям, то она получает такой вид

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому характеристическая матрица схемы будет

$$[\gamma]^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}.$$

Вектор $[\mathcal{U}_1]$ отложен по собственному направлению, соответствующему λ_1, поскольку цепь замкнута на повторное сопротивление. После прохождения через n четырехполюсников вектор $[\mathcal{U}_1]$ сохранит собственное направление с угловым коэффициентом ζ_1, но уменьшится в $\frac{1}{\lambda_1^n}$ раз.

Второй случай. Цепь не замкнута на повторное сопротивление. Мы приводим схему 4.29 только для наглядности рассуждений, так как комплексные координаты не могут быть воспроизведены на двумерной плоскости.

Итак, даны две прямоугольных оси I и E. Пусть Δ_1 и Δ_2 — собственные направления матрицы $[\gamma]$, соответствующие λ_1 и λ_2, а φ_1 и φ_2 — углы, образуемые Δ_1 и Δ_2 с I. Рассмотрим вектор $[\mathcal{U}_1]$, направление которого не совпадает с собственным направлением, так как, по предположению, цепь не замкнута на повторное сопротивление. Разложим вектор $[\mathcal{U}_1]$ по собст-

венным направлениям Δ_1 и Δ_2 на составляющие Ox_1 и Ox_2. Можно рассматривать $\boldsymbol{Ox}_1$ и $\boldsymbol{Ox}_2$ как некоторые гипотетические векторы тока — напряжения. При прохождении по цепи четырехполюсников произойдет сокращение длин их модулей: первого в $\frac{1}{\lambda_1^n}$, второго в $\frac{1}{\lambda_2^n} = \lambda_1^n$ раз. В результате эти два сокращенных вектора будут представлять собой разложение полного вектора $[\mathcal{U}_n]$ после прохождения по цепи.

Все сказанное сводится к преобразованию координат, легко осуществимому с помощью матриц.

Матрица, дающая возможность перейти от пространства I, E к пространству Δ_1, Δ_2, равна

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \qquad (\varphi_2 < 0).$$

Преобразование вектора $[\mathcal{U}_1]$ в вектор $[\mathcal{U}_n]$ происходит в пространстве Δ_1, Δ_2 с помощью матрицы

$$[\gamma]^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}.$$

Матрица, позволяющая вернуться к пространству I, E, равна $[\Omega]^{-1}$:

$$[\Omega]^{-1} = \frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица полного преобразования будет

$$[\Omega][\gamma]^n[\Omega]^{-1},$$

т. е.

$$\frac{1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \begin{bmatrix} \lambda_1^n \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \lambda_2^n \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\lambda_1^n \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \lambda_2^n \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \end{bmatrix}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2$ и заменив $\operatorname{tg}\varphi_1$ на ζ_1, $\operatorname{tg}\varphi_2$ на ζ_2, λ_1^n на $e^{n\Gamma}$ и $\lambda_2^n = \frac{1}{\lambda_1^n}$ на $e^{-n\Gamma}$, получаем

$$\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \begin{bmatrix} \zeta_1 e^{n\Gamma} - \zeta_2 e^{-n\Gamma} & -2\zeta_1\zeta_2 \operatorname{sh} n\Gamma \\ 2 \operatorname{sh} n\Gamma & \zeta_1 e^{-n\Gamma} - \zeta_2 e^{n\Gamma} \end{bmatrix},$$

что представляет собой матрицу преобразования

$$E_1 = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \{(\zeta_1 e^{n\Gamma} - \zeta_2 e^{-n\Gamma}) E_n - 2\zeta_1\zeta_2 \operatorname{sh} n\Gamma I_n\},$$

$$I_1 = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \{2 \operatorname{sh} n\Gamma E_n + (\zeta_1 e^{-n\Gamma} - \zeta_2 e^{n\Gamma}) I_n\}.$$

Если четырехполюсники симметричны, что случается довольно часто, то формулы существенно упрощаются:

$$E_1 = E_n \operatorname{ch} n\Gamma + \zeta I_n \operatorname{sh} n\Gamma,$$

$$I_1 = \frac{E_n}{\zeta} \operatorname{sh} n\Gamma + I_n \operatorname{ch} n\Gamma.$$

При бесконечном возрастании числа элементов цепи, когда размеры их становятся бесконечно малыми по сравнению с длиной волны, мы получаем

линию передачи. Она определяется повторным (волновым) сопротивлением ζ и коэффициентом распространения k (рис. 4.30). Если через L, R, C, G

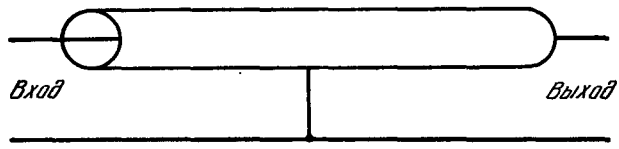


Рис. 4.30.

обозначить соответственно индуктивность, активное сопротивление, емкость, проводимость изоляции линии на единицу длины, а через l длину линии, то (см. п. 8.4.10)

$$\zeta = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}, \qquad k = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}.$$

Следовательно,

$$E_{вх} = E_{вых} \operatorname{ch} kl + \zeta I_{вых} \operatorname{sh} kl,$$
$$I_{вх} = \frac{E_{вых}}{\zeta} \operatorname{sh} kl + I_{вых} \operatorname{ch} kl.$$

Характеристическая матрица такого четырехполюсника равна

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} kl & -\zeta \operatorname{sh} kl \\ -\frac{\operatorname{sh} kl}{\zeta} & \operatorname{ch} kl \end{bmatrix}.$$

4.2.19. Полоса пропускания четырехполюсника. Предположим, что четырехполюсник замкнут на повторное сопротивление. Мы знаем, что это является необходимым условием распространения волны через фильтр без искажения. Для передачи сигнала без затухания нужно, чтобы модуль λ для данной частоты был равен 1. При этом оба корня λ_1 и λ_2 являются комплексными и сопряженными. Следовательно, их сумма вещественна и заключена между -2 и $+2$. Действительно, два сопряженных комплексных числа с модулем 1 могут быть написаны в виде

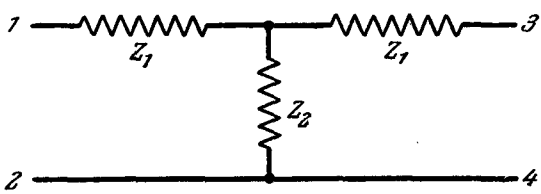


Рис. 4.31.

$$\cos\varphi + j\sin\varphi,$$
$$\cos\varphi - j\sin\varphi.$$

Сумма их равна $2\cos\varphi$ и заключена между -2 и $+2$. Сумма $\lambda_1 + \lambda_2$ равна $\gamma_{11} + \gamma_{22}$. Следовательно, частоты внутри полосы пропускания определяются неравенством

$$-2 < \gamma_{11} + \gamma_{22} < 2.$$

Пример. Рассмотрим симметричный Т-образный фильтр (рис. 4.31). Мы уже получили (п. 4.2.12)

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Поэтому

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} = 2 + 2\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Следовательно, неравенство, определяющее полосу пропускания, будет

$$-1 < 1 + \frac{Z_1}{Z_2} < 1 \quad \text{или} \quad -2 < \frac{Z_1}{Z_2} < 0.$$

Дана схема (рис. 4.32):

$$Z_1 = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}, \qquad Z_2 = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega C}.$$

Отсюда

$$0 < \frac{\omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)^2} < 2.$$

Из этого мы делаем заключение, что полоса пропускания находится вне интервала частот

$$\frac{1}{\sqrt{2LC}}, \quad \sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

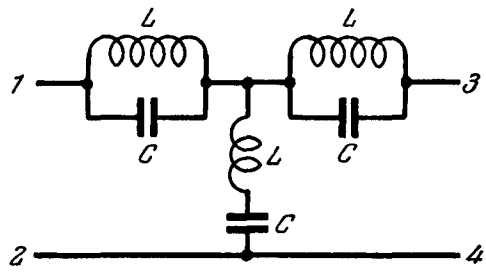


Рис. 4.32.

Замечание. В предыдущем расчете предполагается, что четырехполюсник замкнут на свое повторное сопротивление. Но чаще всего повторное сопротивление само изменяется вместе с частотой. Фильтры, изготовляемые на практике, в большинстве случаев замкнуты на сопротивление, которое можно отождествлять с повторным лишь в очень узкой области изменений ω.

4.2.20. Расчет свободных колебаний цепи.

Вычисление частот. Пусть дана цепь. Сопротивление контура l этой цепи обозначим Z_{ll}. Сопротивление связи контуров обозначим через Z_{kl} (см. пп. 1.2.8 и 5.4.1).

Предположим, что электродвижущая сила отсутствует. Тогда

$$\begin{aligned} &Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \ldots + Z_{1n}I_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \ldots + Z_{nn}I_n = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Положим, что

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & \ldots & Z_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & \ldots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Система (32) в матричной форме запишется так:

$$[Z][I] = [0].$$

Сопротивление Z_{ik} имеет вид

$$Z_{ik} = j\omega L_{ik} - \frac{j}{\omega} \cdot \frac{1}{C_{ik}} + R_{ik}.$$

Предположим, что сопротивление Z_{ik} — чисто реактивное, т. е. $R_{ik} = 0$. Пусть

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left[\frac{1}{C}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & \ldots & \frac{1}{C_{1n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{C_{n1}} & \ldots & \frac{1}{C_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение, дающее частоты собственных колебаний цепи ω, будет иметь вид

$$\left\{\omega^2[L]-\left[\frac{1}{C}\right]\right\}[I]=[0]$$

или после умножения на $[L]^{-1}$

$$\left\{\omega^2[1]-[L]^{-1}\left[\frac{1}{C}\right]\right\}[I]=[0].$$

Это матричное обобщение известной формулы

$$\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)I=0.$$

Положим

$$\omega^2=\mu,\quad [L]^{-1}\left[\frac{1}{C}\right]=[M],$$

Тогда система (32) будет

$$\{\mu[1]-[M]\}[I]=[0].$$

Определитель первой матрицы должен быть равен нулю:

$$|\mu[1]-[M]|=0. \tag{33}$$

Это означает, что величины $\mu=\omega^2$ представляют собой собственные значения матрицы $[M]$.

Уравнение (33) может быть очень высокого порядка. В таком случае естественно пользоваться методом решения, изложенным в п. 4.1.39. Этот метод дает последовательные значения корней, начиная с наибольшего. Отсюда следует, что вычисление самых низких частот, отягощенное всеми ошибками, сделанными при вычислении предыдущих частот, может привести к недостаточно точному результату. Во избежание этого достаточно умножить исходное матричное уравнение не на $[L]^{-1}$, а на $\left[\frac{1}{C}\right]^{-1}$. Тогда

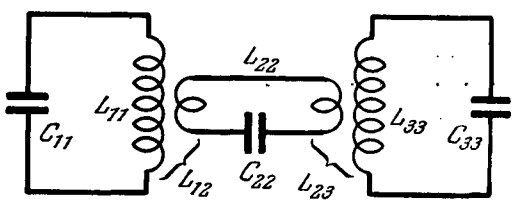


Рис. 4.33.

$$\left\{\left[\frac{1}{C}\right]^{-1}[L]-\frac{[1]}{\omega^2}\right\}[I]=0.$$

Это показывает, что $\frac{1}{\omega^2}=\nu$ — собственное вначение матрицы

$$[N]=\left[\frac{1}{C}\right]^{-1}[L].$$

Матричное решение характеристического уравнения для $[N]$ начнется с наибольшего значения ν, т. е. с самой низкой частоты.

Вычисление амплитуд. Амплитуды токов, соответствующих частоте $\omega_1^2=\mu_1$ в различных контурах, можно вычислить, решая однородную систему

$$\{[M]-\mu_1[1]\}[I]=[0]. \tag{34}$$

Она дает величины, пропорциональные искомым амплитудам, иначе говоря, координаты собственного направления, соответствующего μ_1. Применение способа, изложенного в п. 4.1.39 при отыскании собственного значения наибольшего модуля, приводит нас к вычислению приближенного значения предела для $[M]^p[d]$. Известно[1]), что такой предел представляет собой

[1]) См. замечание на стр. 202.

собственное направление, соответствующее собственному значению наибольшего модуля. Мы получим, таким образом, величины, пропорциональные $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Приведем пример Л. Пайпса. Даны два колебательных контура, соединенные третьим (рис. 4.33) при следующих численных данных:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = 10^{-6}\ \text{ф},$$

$$L_{13} = L_{31} = C_{12} = C_{21} = C_{31} = C_{13} = C_{23} = C_{32} = 0,$$

$$L_{11} = \frac{5}{6}\ \text{гн},\quad L_{22} = \frac{1}{2}\ \text{гн},\quad L_{33} = \frac{1}{6}\ \text{гн},$$

$$L_{12} = L_{21} = -\frac{1}{3}\ \text{гн},\quad L_{23} = L_{32} = -\frac{1}{6}\ \text{гн}.$$

Имеем

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad \left[\frac{1}{C}\right] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 [1],$$

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \qquad [M] = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Выберем вектор

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отыщем собственные значения следующей матрицы:

$$[M'] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Достаточно умножить затем найденные значения на 10^6, чтобы получить собственные значения $[M]$.

Вычисляем последовательно:

$$[M'][u] = 18 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad [M']^2[u] = 18 \cdot 15 \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{9}{15} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[M']^3[u] = 18 \cdot 15 \cdot 14{,}533 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}256881 \\ 0{,}584762 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[M']^4[u] = 18 \cdot 15 \cdot 14{,}533 \cdot 14{,}4495 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}255238 \\ 0{,}584762 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\mu_1 = 14{,}4 \cdot 10^6, \quad \omega_1 = 3{,}8 \cdot 10^3.$$

Амплитуды будут пропорциональны 0,25; 0,58 и 1.

Далее, легко определить μ_2 и μ_3, а по ним ω_2 и ω_3 и соответствующие им амплитуды.

4.2.21. Контуры с периодически меняющимися параметрами [1]). Рассмотрим свободные колебания контура, у которого активное сопротивление, индуктивность и емкость периодически меняются во времени. Примерами могут служить генератор переменного тока, индуктивность которого является синусоидальной функцией времени, телефонные наушники, угольный микрофон, конденсаторный микрофон, периодически изменяющие параметры контуров, в которые они входят как составные элементы.

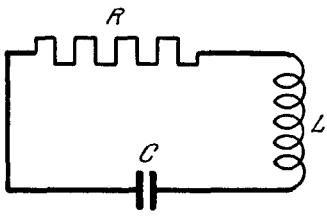


Рис. 4.34.

Рассмотрим контур, изображенный на рис. 4.34, и положим

$$R = R_0 + r(t),$$
$$L = L_0 + l(t),$$
$$S = \frac{1}{C} = S_0 + s(t),$$

где $r(t)$, $l(t)$, $s(t)$ — переменные члены, а R_0, L_0, S_0 — постоянные. Кроме того, положим, что постоянные члены больше соответствующих амплитуд переменных членов, т. е.

$$|s| < S_0, \quad |l| < L_0, \quad |r| < R_0.$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний цепи будет

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{1}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{S}{L} Q = 0, \tag{35}$$

если принять за функцию заряд конденсатора Q.

Задача легко решается, если известны два предельных условия. Положим, что

$$\left(R + \frac{dL}{dt}\right)\frac{1}{L} = A(t), \quad \frac{S}{L} = B(t)$$

и

$$Q(t) = e^{-\frac{1}{2}\int A(t)\,dt}\, y(t).$$

Тогда уравнение (35) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(B - \frac{1}{2} \cdot \frac{dA}{dt} - \frac{1}{4} A^2\right) y = 0.$$

Положим

$$B - \frac{1}{2} \cdot \frac{dA}{dt} - \frac{1}{4} A^2 = b^2 + \alpha(t).$$

Функции B и A периодичны. Следовательно, $\alpha(t)$ также периодична, и мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [b^2 + \alpha(t)]\, y = 0, \tag{36}$$

которое называется уравнением Хилла.

---

[1]) См. [11].

Если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — два линейно независимых решения, то общее решение представляет собой их линейную комбинацию и может быть написано в таком виде:

$$y(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t), \tag{37}$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные.

Найдем соотношение между двумя значениями функции $y(t)$, разделенными периодом T функции $\alpha(t)$. Положим

$$\eta(t) = y(t+T)$$

и будем искать соотношение между $\eta(t)$ и $y(t)$. Положим

$$\eta(t) = \lambda(t)\, y(t),$$
$$\eta' = \lambda' y + \lambda y',$$
$$\eta'' = \lambda'' y + 2\lambda' y' + \lambda y''.$$

Воспользовавшись (36), получаем $\frac{y''}{y} = \frac{\eta''}{\eta}$, откуда

$$\lambda'' y + 2\lambda' y' = 0.$$

Это равенство должно быть справедливо в любой момент времени t. Необходимо, следовательно, чтобы

$$\lambda'' = \lambda' = 0.$$

Поэтому

$$\lambda = \text{const}.$$

Возьмем произвольный момент времени t_0. Тогда получим последовательно

$$y(t_0+T) = \lambda y(t_0),$$
$$y(t_0+2T) = \lambda y(t_0+T),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y(t_0+nT) = \lambda y\{t_0+(n-1)T\}.$$

Отсюда

$$y(t_0+nT) = \lambda^n y(t_0).$$

Величина модуля λ позволит определить устойчивость решения. Положим

$$y = x_1(t), \qquad \frac{dy}{dt} = x_2(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t), \\ x_2(t) &= C_1 \frac{dg_1(t)}{dt} + C_2 \frac{dg_2(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{38}$$

Если

$$[G(t)] = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ \frac{d}{dt} g_1(t) & \frac{d}{dt} g_2(t) \end{bmatrix}, \qquad [x(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad [C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

то система (38) может быть записана в виде

$$[x(t)] = [G(t)]\,[C].$$

Матрица $[C]$ из постоянных C_1 и C_2 определяется начальными условиями:

$$[x(t_0)] = [G(t_0)]\,[C].$$

Отсюда получаем новую форму для системы (38):

$$[x(t)] = [G(t)]\,[G(t_0)]^{-1}\,[x(t_0)].$$

Придавая величине t значение t_0+T, находим

$$[x(t_0+T)] = \lambda\,[x(t_0)] = [G(t_0+T)]\,[G(t_0)]^{-1}[x(t_0)].$$

Это равенство показывает, что λ — собственное значение матрицы $[M] = [G(t_0+T)]\,[G(t_0)]^{-1}$.

Производная определителя матрицы $[G(t)]$ равна

$$g_1(t)\frac{d^2}{dt^2}g_2(t) - g_2(t)\frac{d^2}{dt^2}g_1(t).$$

Это выражение равно нулю в силу уравнения Хилла, которому удовлетворяют $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Следовательно, определитель матрицы $[G(t)]$ независим от t.

Определитель $[G(t_0+T)]$ равен величине, обратной определителю $[G(t_0)]^{-1}$. Поэтому определитель произведения, т. е. определитель $[M]$, равен единице. Эта величина равна также произведению собственных значений матрицы $[M]$. Мы можем, следовательно, считать, что

$$\lambda_1 = e^{\mu T}, \qquad \lambda_2 = e^{-\mu T}.$$

Корни λ_1 и λ_2, произведение которых равно единице, могут быть написаны в таком виде:

$$\lambda = k \pm \sqrt{k^2-1},$$

где k вещественно.

Если $|k|>1$, то показатель степени μT вещественен и равен $\operatorname{arch} k$. В этом случае решение неустойчиво, потому что один из корней λ_1 или λ_2 по абсолютному значению больше единицы. Если $|k|<1$, то показатель степени μT — чисто мнимая величина, равная $j\arccos k$. Если $\arccos k$ равен рациональной дроби $\frac{p}{s}$, то решение будет периодичным с периодом sT, т. е. устойчивым. Если $\arccos k$ не равен рациональной дроби, то решение непериодично, но продолжает оставаться конечным, а следовательно, устойчивым. В общем если диагональные члены матрицы $[M]$ будут M_{11} и M_{22}, то достаточно сравнить абсолютную величину $|M_{11}+M_{22}|$ с 2.

Практическое вычисление устойчивости этих решений связано с очень большими трудностями. Поэтому рассмотрим приближенный метод вычисления матрицы

$$[G(t_0+T)]\,[G(t_0)]^{-1} = [M].$$

Эта матрица определяется из уравнения

$$[x(t_0+T)] = [M]\,[x(t_0)].$$

Будем исходить из уравнения Хилла

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \{b^2+\alpha(t)\}\,y = 0$$

при начальных условиях, определенных для y и $\frac{dy}{dt}$. Если ввести обозначения $y = x_1$, $\frac{dy}{dt} = x_2$, то уравнение Хилла сводится к системе

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2,$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -\{b^2+\alpha(t)\}\,x_1 = F(t)\,x_1,$$

которая в матричной форме выглядит так:

$$\frac{d}{dt}[x(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F(t) & 0 \end{bmatrix} [x(t)].$$

Предположим, что $\alpha(t)$ примерно постоянна в промежутке времени $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$. Тогда требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t_s)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F(t_s) & 0 \end{bmatrix} [x(t_s)],$$

которое является уравнением с постоянными коэффициентами. Такая задача уже решалась в п. 4.1.43. Характеристическое уравнение матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F(t_s) & 0 \end{bmatrix}$ будет $\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -F(t_s) & \lambda \end{bmatrix} = 0$. Корни его равны $\pm \sqrt{F(t_s)} = \pm b_s$. Следовательно,

$$[x(t_s)] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(b_s \Delta t_s) & \frac{\operatorname{sh}(b_s \Delta t_s)}{b_s} \\ b_s \operatorname{sh}(b_s \Delta t_s) & \operatorname{ch}(b_s \Delta t_s) \end{bmatrix} [x(t_{s-1})].$$

Итак, исходя из $[x(t_0)]$, мы постепенно приближаемся к $[x(t_0+T)]$, т. е. к равенству вида

$$[x(t_0+T)] = [M][x(t_0)].$$

Теперь остается только сравнить с единицей корни характеристического уравнения матрицы $[M]$.

4.2.22. Матрицы в квантовой механике. Рассмотрим периодическое движение электрона, положение которого зависит от одной только координаты q. В классической теории электромагнитного поля мы разлагаем функцию времени $q(t)$ в ряд Фурье:

$$q(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{2\pi j p \nu t}. \tag{39}$$

Эта формула выявляет частоты электромагнитных волн $p\nu$, которые может излучать электрон. Чтобы учесть сдвиг фаз каждой волны, амплитуду a_p в формуле (39) нужно считать комплексным числом. Так как координата q вещественна, то a_p и a_{-p} должны быть сопряженными комплексными величинами:

$$a_p = a^*_{-p}. \tag{40}$$

Интенсивность каждой гармоники дается квадратом амплитуды или произведением

$$a_p a^*_p = a_p a_{-p}. \tag{41}$$

В квантовой механике механизм излучения электрона трактуется иначе. Испускание частоты ν происходит при переходе электрона с одной устойчивой траектории на другую, или, иначе, с одного энергетического уровня W_m на другой энергетический уровень W_n. Частота излучения дается соотношением

$$W_m - W_n = h\nu, \tag{42}$$

где h — постоянная Планка.

Если $W_m > W_n$, происходит испускание; если $W_m < W_n$ — поглощение. Поэтому частоты ν оказываются здесь зависящими от двух индексов m и n. Обозначим их в виде ν_{mn}. Это означает, что непрерывную функцию $q(t)$, которую мы ранее писали в виде разложения в ряд Фурье, мы должны заменить прямоугольной таблицей членов вида

$$q_{mn} = a_{mn} e^{2\pi j \nu_{mn} t}. \tag{43}$$

Такая точка зрения, высказанная впервые Гейзенбергом, игнорирует всякие представления о механизме атомных явлений и признает только величины, полученные непосредственно из эксперимента, т. е. интенсивность спектральных линий и их частоту. Эти величины, зависящие от двух индексов, можно разместить в виде прямоугольной таблицы

$$\begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{Vmatrix}.$$

Табличная форма записи в квантовой механике аналогична разложению в ряд Фурье в максвелловской теории электромагнетизма.

Совершенно очевидно, что, исходя из формулы (42), мы получим

$$\begin{aligned} \nu_{mn} &= -\nu_{nm}, \\ \nu_{nn} &= \nu_{mm} = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Это означает, что при переходе из состояния m в состояние n испускается та же частота, что и поглощается при обратном переходе, и что если атом находится в устойчивом стационарном состоянии, он не излучает.

Величина a_{mn} — комплексная. Ее модуль является мерой вероятности перехода из состояния m в состояние n. Квадрат модуля определяет интенсивность линии испускания. Так как возможен переход и в обратном направлении, то должно иметь место

$$|a_{mn}| = |a_{nm}|.$$

Это убеждает нас, что, так же как и в случае ряда Фурье, a_{mn} и a_{nm} — комплексные сопряженные величины:

$$a_{mn} = a^*_{nm}. \tag{45}$$

Из (45) и (44) мы получаем также

$$q_{mn} = q^*_{nm}.$$

Для умножения двух таблиц $\{q\}$ и $\{p\}$ введено правило

$$r_{mn} = \sum_k q_{mk} p_{kn},$$

совпадающее с правилом умножения матриц. Оно дано так, чтобы умножение обеих таблиц не вводило в рассмотрение новых частот.

Действительно, рассмотрим общий член каждой таблицы:

$$q_{mk} = a_{mk} e^{2\pi j \nu_{mk} t}, \qquad p_{kn} = b_{kn} e^{2\pi j \nu_{kn} t},$$
$$r_{mn} = \sum_k a_{mk} b_{kn} e^{2\pi j [\nu_{mk} + \nu_{kn}] t}.$$

Но

$$\nu_{mk} = \frac{1}{h}(W_m - W_k),$$

$$\nu_{kn} = \frac{1}{h}(W_k - W_n).$$

Следовательно,

$$\nu_{mk} + \nu_{kn} = \nu_{mn}.$$

Таким образом, правило умножения не вводит частот, которые не содержались бы раньше в q и p.

Легко заметить, что рассмотренные таблицы подчиняются правилам матричного исчисления, а в силу соотношения $q_{mn} = q^*_{nm}$, это эрмитовы матрицы.

Матрица, полученная из матрицы q дифференцированием каждого члена по времени, — это новая матрица p. Гейзенберг принял за отправную точку квантовой механики предположение, что выражение вида $pq - qp$ — коммутатор матриц p и q — равно $\frac{h}{2\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 1, Физматгиз, 1962.
2. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.
3. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
4. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1954.
5. Фрезер Р. А., Дункан В. И. и Коллар А. Р., Теория матриц и ее приложение, ИЛ, 1950.
6. Беккенбах Э. Ф. (ред.), Современная математика для инженеров, гл. 12, ИЛ, 1958.
7. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Квантовая механика, ч. 1, Физматгиз, 1963.
8. Duncan W. J., Collar A. R., A method for the solution of oscillation problems by matrices, Phil. Mag., № 5, 1934.
9. Feldtkeller R., Einführung in die Vierpoltheorie, Leipzig.
10. Howitt N., Equivalent electrical networks Proc. IRE, № 6, 1932.
11. Pipes L. A., Matrices in engineering, Electrical Engineering, sept., 1937.
12. Pipes L. A., Matrix solution of polynomial equations., J. of Franklin Inst., № 4, 1938.

ГЛАВА V

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Аффинное векторное пространство. Метрическое пространство

5.1.1. Определения. Рассмотрим r-мерное пространство. В этом случае система координат состоит из r координатных осей. На каждой из них мы определим свою единицу длины, которая будет служить для измерения координат вдоль этой оси. Единичные отрезки осей, имеющие положительное направление, принято называть единичными векторами или ортами. Обозначим их через $e_1, e_2, \ldots, e_r$.

Рассмотрим вектор V. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_r$ — его компоненты по осям $1, 2, \ldots, r$. Компоненту вектора по оси можно получить, проектируя вектор на эту ось параллельно гиперплоскости, образованной другими осями. Вектор V будет, следовательно, представлять собой геометрическую сумму

$$V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + \ldots + V_r e_r = \sum_k V_k e_k.$$

Символ $\sum_k$ означает, что сумма состоит из всех членов, которые можно получить, если придавать k все возможные значения от 1 до r.

Если в рассматриваемом r-мерном пространстве не предполагается возможным сравнение длин $|e_1|, |e_2|, \ldots, |e_r|$, мы будем называть его аффинным векторным пространством. В противном случае, т. е. если возможно найти эталон длины, сравнимый со всеми длинами $|e_1|, |e_2|, \ldots, |e_r|$, будем называть пространство метрическим.

Аффинное векторное пространство позволяет изучать общие свойства фигур, не изменяющиеся при произвольном преобразовании системы координат. Однако оно ограничивает исследование лишь теми свойствами фигур, при изучении которых не приходится прибегать к понятию расстояния, а следовательно, и к понятию угла. Пока эти понятия нам не потребуются, мы будем рассматривать аффинное пространство, но, как только возникнет необходимость ввести понятие расстояния, мы будем переходить к метрическому пространству. При такой постановке мы сможем формулировать теоремы с наибольшей общностью.

На первый взгляд рассмотрение пространств, в которых понятие расстояния между двумя точками не имеет смысла, может показаться странным. Между тем такими пространствами часто пользуются. Классическим примером может служить трехмерное пространство, в котором по координатным осям откладываются давление, удельный объем и температура. Очевидно, что не существует общей единицы измерения для давлений, объемов и температур; следовательно, понятие расстояния между двумя точками в таком пространстве

совершенно бессмысленно. Точно так же обстоит дело, например, с кривыми, которые чертит регистрирующий термометр или барометр.

5.1.2. Преобразование координат. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — единичные векторы старой системы координат, а $E_1, E_2, \ldots, E_r$ — единичные векторы новой системы.

Если обозначить через α_m^k проекцию единичного вектора E_m на единичный вектор e_k, полученную при проектировании параллельно гиперплоскости, образованной всеми остальными осями старой системы, то получится r уравнений:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \ldots + \alpha_1^k e_k + \ldots + \alpha_1^r e_r = \sum_k \alpha_1^k e_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m &= \alpha_m^1 e_1 + \alpha_m^2 e_2 + \ldots + \alpha_m^k e_k + \ldots + \alpha_m^r e_r = \sum_k \alpha_m^k e_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_r &= \alpha_r^1 e_1 + \alpha_r^2 e_2 + \ldots + \alpha_r^k e_k + \ldots + \alpha_r^r e_r = \sum_k \alpha_r^k e_k. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Таблица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^k & \ldots & \alpha_1^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m^1 & \ldots & \alpha_m^k & \ldots & \alpha_m^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r^1 & \ldots & \alpha_r^k & \ldots & \alpha_r^r \end{bmatrix}$$

есть матрица α линейного преобразования.

По предположению, старые единичные векторы линейно независимы. Это значит, что нельзя построить такую их линейную комбинацию $\sum_k p_k e_k = 0$, в которой хотя бы один из коэффициентов p_k был бы отличен от нуля.

Если определитель, составленный из величин α_m^k

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^k & \ldots & \alpha_1^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m^1 & \ldots & \alpha_m^k & \ldots & \alpha_m^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r^1 & \ldots & \alpha_r^k & \ldots & \alpha_r^r \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то новые векторы будут также линейно независимы. Это значит, что нельзя построить линейную комбинацию $\sum_m p_m E_m = 0$, в которой хотя бы один из коэффициентов p_m был отличен от нуля. Другими словами, если векторы e_k не находятся в одной гиперплоскости и если определитель Δ отличен от нуля, то и векторы E_m также не находятся в одной гиперплоскости.

Уравнения (1), которые можно написать сокращенно в виде

$$E_m = \sum_k \alpha_m^k e_k \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),$$

дают нам новые единичные векторы E_m как функции старых единичных векторов e_k.

Рассмотрим обратный случай, т. е. будем искать старые единичные векторы как функции новых. Эта задача сводится к решению системы (1)

относительно $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Найдя решение, получим систему r уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \beta_1^1 E_1 + \beta_1^2 E_2 + \ldots + \beta_1^r E_r = \sum_m \beta_1^m E_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_k &= \beta_k^1 E_1 + \beta_k^2 E_2 + \ldots + \beta_k^r E_r = \sum_m \beta_k^m E_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_r &= \beta_r^1 E_1 + \beta_r^2 E_2 + \ldots + \beta_r^r E_r = \sum_m \beta_r^m E_m \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или, в сокращенном виде,

$$e_k = \sum_m \beta_k^m E_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Матрица β этого линейного преобразования равна α^{-1}. Общий элемент матрицы β будет, следовательно, равен

$$\beta_k^m = \frac{A_m^k}{\Delta},$$

где A_m^k — алгебраическое дополнение элемента α_m^k определителя Δ матрицы α. Рассмотрим сумму произведений

$$\sum_m \alpha_m^k \beta_j^m.$$

Эта сумма равна единице при k, равном j, и нулю при k, отличном от j. Действительно, произведение двух матриц α и $\beta = \alpha^{-1}$ есть единичная матрица. Элементы $\sum_m \alpha_m^k \beta_k^m$ этой матрицы находятся на главной диагонали — они равны единице. Элементы $\sum_m \alpha_m^k \beta_j^m$ не находятся на главной диагонали — они равны нулю. Пользуясь символом Кронекера, будем обозначать

$$\sum_m \alpha_m^k \beta_j^m = \delta_j^k, \quad \sum_k \alpha_m^k \beta_k = \delta_m^l.$$

Напомним, что $\delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$

Если требуется найти коэффициенты α как функции коэффициентов β, то, учитывая, что $\alpha = \beta^{-1}$, получим

$$\alpha_m^k = \frac{B_k^m}{\Delta'},$$

где B_k^m — алгебраическое дополнение элемента β_k^m определителя Δ' матрицы β.

5.1.3. Ковариантные и контравариантные векторы. Мы уже знаем формулы преобразования векторов:

$$e_k = \sum_l \beta_k^l E_l, \quad E_m = \sum_k \alpha_m^k e_k.$$

Всякий вектор, который при преобразовании системы координат преобразуется согласно правилам преобразования единичных векторов, называется ковариантным. Индекс, означающий номер координатной оси, у соответствующих проекций ковариантного вектора помещают внизу: $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Пусть дан вектор, составляющие которого в старой системе будут $a_1, a_2, \ldots, a_r$, а в новой системе — $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Если этот вектор

ковариантен, то формулы преобразования будут

$$A_k = \sum_k \alpha_m^k a_k, \quad a_k = \sum_l \beta_k^l A_l.$$

Например, градиент скалярной функции будет ковариантным вектором.

Используемые на практике векторы обычно не следуют указанному правилу преобразования. Такие векторы называются контравариантными. Индекс у проекций вектора на оси координат в этом случае помещают вверху: $x^1, x^2, \ldots, x^r$.

Рассмотрим вектор, составляющие которого равны $x^1, x^2, \ldots, x^r$ и $X^1, X^2, \ldots, X^r$ в старой и новой системах соответственно. Пользуясь формулами преобразования единичных векторов, получим

$$\sum_k x^k e_k = \sum_k \sum_l x^k \beta_k^l E_l = \sum_l X^l E_l.$$

Следовательно,

$$X^l = \sum_k \beta_k^l x^k,$$

и наоборот,

$$x^k = \sum_m \alpha_m^k X^m.$$

Получились формулы, обратные формулам преобразования единичных векторов [1]). В случае метрического пространства и прямоугольной системы координат нет надобности различать ковариантные и контравариантные индексы, так как в этом случае $\alpha_m^k = \beta_k^m = e_k \cdot E_m$.

5.1.4. Определение тензора. Скалярная величина является тензором нулевой валентности и имеет только одну компоненту. Вектор является тензором первой валентности и имеет r компонент. Этот тензор может быть либо ковариантным — при этом его компоненты должны обозначаться через t_k, либо контравариантным — тогда его компоненты должны обозначаться через t^k.

Тензор второй валентности имеет r^2 компонент. Существует три типа тензоров второй валентности:

дважды ковариантный тензор, общая компонента которого может быть записана в виде t_{ik};

дважды контравариантный тензор, общая компонента которого может быть записана в виде t^{ik};

смешанный тензор — один раз ковариантный, один раз контравариантный, — общая компонента которого может быть записана в виде t_l^k.

Компоненты тензора второй валентности могут быть расположены в виде квадратной таблицы. Ниже мы увидим, что между тензором и матрицей имеется существенная разница. Часто для указания того, что элементы, входящие в таблицу, являются тензорными, таблицу заключают в круглые скобки:

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & \ldots & t_1^k & \ldots & t_1^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_l^1 & \ldots & t_l^k & \ldots & t_l^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_r^1 & \ldots & t_r^k & \ldots & t_r^r \end{pmatrix}$$

или сокращенно (t_l^k).

[1]) Эти соотношения показывают, что матрица β линейного преобразования равна матрице α преобразования координат, определенной в п. 4.1.21.

Тензор третьей валентности имеет r^3 компонент, которые могут располагаться в виде кубической таблицы. Существует четыре типа тензоров третьей валентности:

$$(t^{ikl}),\quad (t_l^{ik}),\quad (t_{kl}^{i}),\quad (t_{ikl}).$$

Произвольная компонента наиболее общего тензора запишется в виде

$$t_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{k_1 k_2 \cdots k_m}$$

с n ковариантными и m контравариантными индексами. Сумма $m+n=p$ — валентность тензора, имеющего r^p компонент. Это не означает, что „математический объект", состоящий из r^p элементов, является p-валентным тензором в r-мерном пространстве. Определение тензора дается с помощью формул преобразования координат.

Пусть $t_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{k_1 k_2 \cdots k_m}$ — произвольная компонента p-валентного тензора, n раз ковариантного и m раз контравариантного в некоторой системе координат, а $T_{j_1 j_2 \cdots j_n}^{l_1 l_2 \cdots l_m}$ — соответствующая компонента того же тензора в любой другой системе координат.

Если $t_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{k_1 k_2 \cdots k_m}$ — компонента тензора, то преобразование компоненты t в компоненту T происходит по формуле

$$T_{j_1 j_2 \cdots j_n}^{l_1 l_2 \cdots l_m} = \sum_{i \ldots k} \alpha_{j_1}^{i_1} \ldots \alpha_{j_n}^{i_n} \beta_{k_1}^{l_1} \ldots \beta_{k_m}^{l_m} t_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{k_1 k_2 \cdots k_m}.$$

Наличие n ковариантных и m контравариантных индексов влечет за собой введение n множителей α и m множителей β.

Обратное преобразование имеет вид

$$t_{i_1 i_2 \cdots i_n}^{k_1 k_2 \cdots k_m} = \sum_{j \ldots l} \beta_{i_1}^{j_1} \ldots \beta_{i_n}^{j_n} \alpha_{l_1}^{k_1} \ldots \alpha_{l_m}^{k_m} T_{j_1 j_2 \cdots j_n}^{l_1 l_2 \cdots l_m}.$$

Если преобразование t в T и обратно не подчиняется этим формулам, то t не является тензором. Однако выяснение вопроса о том, является ли данная совокупность элементов тензором, путем установления применимости или неприменимости приведенных формул преобразования координат — длинная и сложная операция. Ниже (п. 5.1.15) мы рассмотрим более быстрый способ выяснения этого вопроса.

5.1.5. Матричная форма формул преобразования координат. Используя матричную форму, можно конкретизировать и упростить формулы преобразования координат для наиболее важных тензоров — тензоров первой и второй валентностей.

Пусть α — матрица преобразования координат:

$$\alpha = [\alpha_l^k] = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^k & \ldots & \alpha_1^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_l^1 & \ldots & \alpha_l^k & \ldots & \alpha_l^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_r^1 & \ldots & \alpha_r^k & \ldots & \alpha_r^r \end{bmatrix}.$$

Для контравариантного вектора имеем

$$t^k = \sum_l \alpha_l^k T^l,$$

где суммирование происходит по нижнему индексу, означающему номер строки. Изменяя этот индекс, мы перемещаемся в матрице α вдоль k-го

столбца. Рассматриваемая формула имеет обычный вид произведения двух матриц (см. рис. 4.4), если ввести матрицу $\tilde{\alpha}$, транспонированную по отношению к α; матричная формула преобразования контравариантного вектора имеет вид

$$t = \tilde{\alpha} T \quad \text{или} \quad T = \tilde{\alpha}^{-1} t, \quad \text{где} \quad t = \begin{bmatrix} t^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^r \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T^r \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формулу преобразования для ковариантного вектора:

$$T_l = \sum_k \alpha_l^k t_k.$$

Так как индекс суммирования представляет собой номер столбца для матрицы α и номер строки для одностолбцовой матрицы t, то матрица T представляет собой произведение матрицы α на матрицу t. Формула преобразования ковариантного вектора в матричной форме принимает вид:

$$T = \alpha t \quad \text{или} \quad t = \alpha^{-1} T, \quad \text{где} \quad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_r \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_r \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай дважды ковариантного тензора. Имеем

$$T_{lm} = \sum_{ik} \alpha_l^i \alpha_m^k t_{ik}.$$

В слагаемом

$$\sum_i \alpha_l^i t_{ik} = A_{lk}$$

индекс суммы представляет собой номер столбца для матрицы α и номер строки для матрицы t, т. е. суммирование идет вдоль строки с номером l матрицы α и вдоль столбца с номером k матрицы t. Следовательно, речь идет об элементе произведения матриц $A = \alpha t$. В формуле

$$T_{lm} = \sum_k A_{lk} \alpha_m^k$$

индекс суммы представляет собой номер столбца и для матрицы A, и для матрицы α. Следовательно, речь идет о произведении матрицы A на матрицу, транспонированную по отношению к α. Таким образом, матричная формула преобразования для дважды ковариантного тензора имеет вид

$$T = A\tilde{\alpha} = \alpha t \tilde{\alpha}.$$

Для дважды контравариантного тензора имеем

$$T^{lm} = \sum_{ik} \beta_i^l \beta_k^m t^{ik}.$$

Рассуждение, подобное предыдущему, позволяет получить для него следующую матричную формулу преобразования:

$$T = \tilde{\beta} t \beta \quad \text{при} \quad \beta = \alpha^{-1}.$$

Наконец, для смешанного тензора имеем

$$T^l_m = \sum_{ik} \alpha^k_m \beta^l_i t^i_k,$$

а в матричной форме

$$T = \alpha t \beta.$$

Замечание. Из приведенных формул не следует делать вывод, что квадратная матрица является тензором, так же как нельзя заключить, что совокупность двух чисел есть вектор на плоскости. Матрицы — это просто таблицы чисел или символов, никак не зависящие от преобразования системы координат. Тензором квадратная таблица чисел является только в том случае, если она состоит из компонент тензора [1]).

Можно сказать, что тензор второй валентности представляет собой в некоторой системе координат матрицу, элементы которой подчиняются законам преобразования, свойственным компонентам тензора.

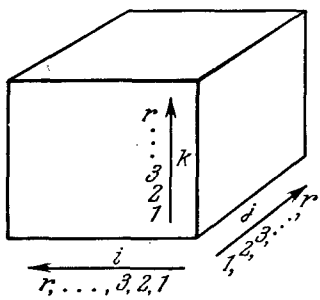


Рис. 5.1.

Аналогично тому, как элементы матриц

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_r \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_r \end{bmatrix}$$

представляют собой координаты вектора в двух системах координат, причем свойства и существование этого вектора не зависят от системы координат, также и матрицы

$$[t_{ik}], \quad [T_{lm}]$$

содержат компоненты тензора второй валентности в двух системах координат. Свойства и существование этого тензора также не зависят от системы координат.

Аналогичное рассуждение применимо и к тензорам более высоких валентностей.

Тензор третьей валентности представляется в некоторой системе координат кубической матрицей (рис. 5.1). Она разлагается на r квадратных матриц, которые можно получить, разрезав куб на слои в соответствии с каким-нибудь из индексов.

Тензор четвертой валентности может быть представлен набором из r кубических матриц или из r^2 квадратных матриц и т. д.

Для тензора любой валентности можно получить общие формулы преобразования в матричной форме, используя матрицы α, $\tilde{\alpha}$ и обратные им. В формулу преобразования для p-валентного тензора входят p матриц пре-

[1]) Мы видели, что при преобразовании координат матрица, связывающая два вектора, преобразовывалась по формуле (4) гл. IV. Эта матрица является тензором. Принимая во внимание сказанное в п. 5.1.3, заключаем, что указанная формула характеризует смешанный тензор.

образования, которые должны быть соответствующим образом выбраны из набора матриц:

$$\alpha,\ \tilde{\alpha},\quad \beta=\alpha^{-1},\quad \tilde{\beta}=\tilde{\alpha}^{-1}.$$

Описанные свойства тензоров по аналогии с химией позволяют называть порядок тензора валентностью.

5.1.6. Немой индекс. Отметим, что суммирование в формулах преобразования тензоров всегда происходит по индексу, который применяется дважды: один раз внизу и один раз вверху. Поэтому нет смысла ставить знак $\sum$ суммы и отмечать под ним, по каким индексам производится суммирование. Такие индексы называются немыми.

Это упрощение записи ввел в тензорный анализ Эйнштейн. Например, для преобразования координат вектора мы используем формулы

$$A_m=\sum_k \alpha^k_m a_k,$$

$$a_k=\sum_l \beta^l_k A_l.$$

Можно, упрощая запись и подразумевая суммирование, написать

$$A_m=\alpha^k_m a_k,\quad \text{где } k \text{ — немой индекс;}$$

$$a_k=\beta^l_k A_l,\quad \text{где } l \text{ — немой индекс.}$$

Преобразование компонент тензора по формуле

$$t^{k_1k_2\dots k_m}_{l_1l_2\dots l_n}=\sum_{j\dots l}\alpha^{k_1}_{l_1}\dots\alpha^{k_m}_{l_m}\beta^{j_1}_{l_1}\dots\beta^{j_n}_{l_n}T^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}$$

можно, подразумевая суммирование, записать в виде

$$t^{k_1k_2\dots k_m}_{l_1l_2\dots l_n}=\alpha^{k_1}_{l_1}\dots\alpha^{k_m}_{l_m}\beta^{j_1}_{l_1}\dots\beta^{j_n}_{l_n}T^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}.$$

Здесь $l_1, \dots, l_m, j_1, \dots, j_n$ — это $m+n=p$ немых индексов. Приведенный способ упрощения записи является классическим, и его можно встретить в большом количестве работ, но мы не будем им пользоваться.

5.1.7. Симметрия и антисимметрия. Рассмотрим случай тензоров второй валентности. Как мы видели, такие тензоры бывают трех видов: дважды контравариантные t^{ik}, дважды ковариантные t_{ik} и смешанные t^k_l.

Остановимся сначала на тензорах первых двух видов. Они называются симметричными, если

$$t^{ik}=t^{ki}\quad\text{или}\quad t_{ik}=t_{ki},$$

и антисимметричными, если

$$t^{ik}=-t^{ki}\quad\text{или}\quad t_{ik}=-t_{ki}.$$

Симметричность или антисимметричность есть свойство тензора, которое не изменяется при преобразовании координат. Обозначим через ε величину ± 1. Согласно определению, мы имеем в этом случае для дважды контравариантного тензора

$$t^{ik}=\varepsilon t^{ki}.$$

Пусть T^{lm} — его компонента после любого преобразования координат. Покажем, что будет также иметь место равенство

$$T^{lm}=\varepsilon T^{ml}.$$

Действительно,

$$T^{ml} = \sum_{ik} \beta_k^m \beta_i^l t^{ik},$$

$$T^{lm} = \sum_{ik} \beta_i^l \beta_k^m t^{ik} = \sum_{ik} \beta_i^l \beta_k^m \varepsilon t^{ik} = \varepsilon T^{ml}.$$

Аналогичными выкладками можно показать, что если $t_{kl} = \varepsilon t_{ik}$, то $T_{ml} = T_{lm}$.

Смешанный тензор t_l^k не может быть симметричным или антисимметричным, потому что если бы это свойство имело место при каком-то частном выборе системы координат, то оно не сохранилось бы при преобразовании координат. Действительно, положим, что в некоторой системе координат

$$t_l^k = \varepsilon t_k^i.$$

После преобразования координат получим

$$T_m^l = \sum_{ik} \alpha_m^k \beta_i^l t_k^i,$$

$$T_l^m = \sum_{ik} \alpha_l^i \beta_k^m t_l^k = \sum_{ik} \alpha_l^i \beta_k^m \varepsilon t_k^i.$$

Видим, что T_l^m не равно εT_m^l.

Полученные результаты легко обобщить на случай тензоров более высоких валентностей, симметричных или антисимметричных по двум индексам непременно одинаковой вариантности (т. е. оба индекса должны быть нижними или оба верхними). Их можно также легко обобщить на случай тензоров любой валентности, в которых условия симметричности или антисимметричности рассматриваются более чем для двух индексов обязательно одинаковой вариантности. Это обобщение очень просто по отношению к симметричности. Пусть дан тензор $t_{mn\ldots}^{l\alpha\beta\gamma\delta kl\ldots}$, в котором условия симметричности рассматриваются по отношению к четырем контравариантным индексам α, β, γ, δ. Условие симметричности состоит в том, что

$$t_{mn\ldots}^{i\ (\alpha\beta\gamma\delta)\ kl\ldots} = t_{mn\ldots}^{i\ (p)\ kl\ldots},$$

если через p обозначить любую перестановку индексов α, β, γ, δ.

Что касается антисимметричности, то здесь обобщение сложнее, так как при этом встает вопрос о знаках. Обозначим по-прежнему ± 1 через ε. Условие антисимметричности состоит в том, что

$$t_{mn\ldots}^{k\ (\alpha\beta\gamma\delta)\ l} = \varepsilon t_{mn\ldots}^{k\ (p)\ l\ldots},$$

где p по-прежнему означает любую перестановку индексов α, β, γ, δ.

Если перестановка p четная, т. е. если имеет место переход от $\alpha\beta\gamma\delta$ к p путем четного числа перестановок букв (например, $\beta\alpha\delta\gamma$ — четная перестановка), то ε будет равно $+1$.

Если перестановка p нечетная, т. е. если имеет место переход от $\alpha\beta\gamma\delta$ к p путем нечетного числа перестановок букв (например, $\delta\alpha\beta\gamma$ — нечетная перестановка), то ε будет равно -1.

Представляет интерес частный случай тензора порядка m, антисимметричного по отношению ко всем своим индексам, которые либо ковариантны, либо контравариантны. Простой расчет показывает, что число существенных (не совпадающих по абсолютной величине) компонент, отличных от нуля, вместо r^m составит $\frac{r!}{m!(r-m)!}$.

5.1.8. Псевдоскаляры. Скалярная плотность и скалярная емкость. Для примера рассмотрим в трехмерном пространстве антисимметричный по всем индексам трижды контравариантный тензор. Пусть t^{ijk} — его общая компонента. Подставив в выражение $\frac{r!}{m!(r-m)!}$ $r=3$, $m=3$, получим, что число существенных, отличных от нуля компонент будет равно 1. Если через $|\tau|$ обозначить общее абсолютное значение этих компонент, то они будут равны либо $+|\tau|$, либо $-|\tau|$ в зависимости от того, будут ли перестановки индексов четными или нечетными по отношению к начальной перестановке. Пусть, например, дана перестановка 123, т. е.

$$\tau = t^{123}.$$

Как будет вести себя величина τ после преобразования координат?

После преобразования тензор не перестает быть ни антисимметричным, ни трижды контравариантным. Значит, он также будет иметь только одну отличную от нуля существенную компоненту. Если обозначить буквами с чертой сверху компоненты тензора после преобразования координат, то

$$\bar{\tau} = \bar{t}^{123}.$$

Найдем соотношение между τ и $\bar{\tau}$. Применяем формулу преобразования координат для случая тройной контравариантности:

$$t^{ijk} = \sum_{lmn} \alpha_l^i \alpha_m^j \alpha_n^k \bar{t}^{lmn}.$$

Все элементы t и $\bar{t}$, не равные нулю, имеют неодинаковые индексы, так как

$$t^{ilk} = -t^{ilk}, \quad \bar{t}^{ilk} = -\bar{t}^{ilk}.$$

Имеем $\bar{t}^{lmn} = \varepsilon\bar{\tau}$. Величина ε будет равна либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, будет ли lmn четной или нечетной перестановкой чисел 123. Поэтому

$$t^{123} = \tau = \sum_{lmn} \alpha_l^1 \alpha_m^2 \alpha_n^3 \bar{t}^{lmn} = \bar{\tau} \sum_{lmn} \varepsilon \alpha_l^1 \alpha_m^2 \alpha_n^3.$$

Учитывая смысл знака ε, заключаем, что сумма $\sum_{lmn} \varepsilon \alpha_l^1 \alpha_m^2 \alpha_n^3$ представляет собой определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\tau = \Delta\bar{\tau}$.

Таким образом, перед нами величина только с одной существенной компонентой, но она тем не менее не является скаляром, так как после преобразования координат претерпевает изменение. Эта величина называется псевдоскаляром. В частном случае контравариантных индексов она называется скалярной емкостью.

Возьмем теперь также в трехмерном пространстве трижды ковариантный антисимметричный тензор третьей валентности

$$c_{ijk}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения и обозначив через Γ величину компоненты c_{123}, можно получить формулу преобразования координат

$$\Gamma = c_{123} = \bar{\Gamma} \sum_{lmn} \varepsilon \beta_1^l \beta_2^m \beta_3^n = \Delta' \bar{\Gamma}.$$

Определитель Δ', который является определителем матрицы β, равен $\frac{1}{\Delta}$. Поэтому

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta}\bar{\Gamma}.$$

Найденный нами псевдоскаляр подчиняется правилу преобразования, которое обратно правилу преобразования для псевдоскаляра типа емкости. Его называют скалярной плотностью.

Полученные результаты легко обобщить на r-мерное пространство. Для r раз ковариантного тензора $c_{ijk\ldots r}$ можно прийти к понятию скалярной плотности

$$\Gamma = c_{123\ldots r},$$

которая преобразуется по формуле

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta}\bar{\Gamma}.$$

Для r раз контравариантного тензора $t^{ijk\ldots r}$ можно прийти к понятию скалярной емкости

$$\tau = t^{123\ldots r},$$

которая преобразуется по формуле

$$\tau = \Delta\bar{\tau}.$$

5.1.9. Тензорная плотность и тензорная емкость. Произведение скалярной емкости на тензор дает тензорную емкость. Если дан, например, тензор t_l^{ik}, то соответствующая тензорная емкость ω_l^{ik} будет равна

$$\omega_l^{ik} = \tau t_l^{ik}.$$

Тензорная емкость при преобразовании координат преобразуется по формулам

$$\omega_l^{ik} = \Delta \sum_{mnp} \alpha_m^l \alpha_n^k \beta_l^p \bar{\omega}_p^{mn},$$

$$\bar{\omega}_p^{mn} = \frac{1}{\Delta} \sum_{ikl} \beta_l^m \beta_k^n \alpha_p^l \omega_l^{ik}.$$

Аналогично произведение скалярной плотности на тензор дает тензорную плотность. Если рассматривать тензор t_l^{ik}, то произведение

$$\Omega_l^{ik} = \Gamma t_l^{ik}$$

представляет собой тензорную плотность. Тензорная плотность преобразуется по формулам

$$\Omega_l^{ik} = \frac{1}{\Delta} \sum_{mnp} \alpha_m^l \alpha_n^k \beta_l^p \bar{\Omega}_p^{mn},$$

$$\bar{\Omega}_p^{mn} = \Delta \sum_{ikl} \beta_l^m \beta_k^n \alpha_p^l \Omega_l^{ik}.$$

Замечание. Произведение тензорной емкости на тензорную плотность дает тензор, так как сомножители Δ и $\frac{1}{\Delta}$ сокращаются.

5.1.10. Антисимметричный тензор второй валентности в трехмерном пространстве. Такой тензор, если он дважды контравариантен, можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Примем какой-либо порядок индексов, например 123 для левой системы координат и 132 для правой. Положим

$$t^{ij} = \varepsilon\tau_k,$$

где $\varepsilon = +1$, если ijk получается из 123 четной перестановкой, и $\varepsilon = -1$ в противном случае. Тогда тензор примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_3 & -\tau_2 \\ -\tau_3 & 0 & \tau_1 \\ \tau_2 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат будут следующие:

$$t^{ij} = \sum_{lm} \alpha_l^i \alpha_m^j \bar{t}^{lm} = \sum_{lm} \alpha_l^i \alpha_m^j \varepsilon \bar{\tau}_n.$$

Записывая сумму подробно и располагая слагаемые по порядку, получим

$$\varepsilon\tau_k = t^{ij} = (\alpha_2^i\alpha_3^j - \alpha_3^i\alpha_2^j)\bar{\tau}_1 + (\alpha_3^i\alpha_1^j - \alpha_1^i\alpha_3^j)\bar{\tau}_2 + (\alpha_1^i\alpha_2^j - \alpha_2^i\alpha_1^j)\bar{\tau}_3,$$

$$\varepsilon\tau_k = t^{ij} = \Delta(\beta_k^1\bar{\tau}_1 + \beta_k^2\bar{\tau}_2 + \beta_k^3\bar{\tau}_3) = \Delta\sum_n \beta_k^n\bar{\tau}_n.$$

Это псевдовектор типа емкости.

Точно так же, взяв тензор дважды ковариантный

$$\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^3 & -\Gamma^2 \\ -\Gamma^3 & 0 & \Gamma^1 \\ \Gamma^2 & -\Gamma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\Gamma^k = \frac{1}{\Delta}\sum_n \alpha_n^k \bar{\Gamma}^n.$$

Это псевдовектор типа плотности.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, расположенную в метрическом трехмерном пространстве (покинем временно аффинное векторное пространство). В этом случае

$$\alpha_m^i = \cos(x^i, \bar{x}^m) = \beta_i^m,$$

следовательно,

$$\Delta = \Delta';$$

но

$$\Delta = \frac{1}{\Delta'},$$

поэтому

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1.$$

Рассмотрим теперь наш тензор. Он дважды ковариантен или контравариантен (что одно и то же в прямоугольной системе координат) и может быть определен тремя существенными, отличными от нуля компонентами,

Его можно рассматривать как вектор во всех случаях, за исключением того, когда при преобразовании координат совершается переход от левой системы координат к правой или наоборот. В этом случае вследствие того, что $\Delta = \pm 1$, вектор меняет знак. Такой вектор в векторном исчислении называют скользящим вектором. Это позволяет понять глубокое различие между скользящим и свободным вектором.

Операции над тензорами

5.1.11. Сложение двух тензоров. Складывать можно только тензоры, имеющие одинаковую валентность и одинаковую вариантность. Суммой двух тензоров является тензор, компоненты которого представляют собой суммы соответствующих компонент слагаемых:

$$t_m^{lk} = r_m^{lk} + s_m^{lk}.$$

5.1.12. Свертывание тензора. Пусть дан тензор с ковариантными и контравариантными индексами. Можно получить из него другой тензор с валентностью, на две единицы меньшей. Для этого нужно приравнять один из ковариантных индексов какому-нибудь контравариантному, иначе говоря, поставить условие, чтобы эти два индекса имели всегда одинаковые значения, и затем просуммировать компоненты тензора по совпадающему индексу. Эту операцию называют свертыванием тензора.

Рассмотрим для примера тензор третьей валентности t_m^{lk}. Поставим условие, чтобы было $m = i$, и просуммируем компоненты тензора по совпадающему индексу i. Получим

$$c^k = \sum_i t_i^{ik},$$

где c^k — элементы тензора первой валентности (в данном случае контравариантного вектора). Действительно, формула преобразования тензора t_m^{lk} имеет вид

$$T_n^{jl} = \sum_{ikm} \beta_i^j \beta_k^l \alpha_n^m t_m^{lk}.$$

Произведя операцию свертывания тензора T_n^{jl}; получим

$$C^l = \sum_j T_j^{jl} = \sum_j \sum_{ikm} \beta_i^j \beta_k^l \alpha_j^m t_m^{lk}.$$

Но известно, что

$$\sum_j \alpha_j^m \beta_i^j = \delta_i^m \quad \text{(символ Кронекера)}.$$

Следовательно,

$$C^l = \sum_j T_j^{jl} = \sum_{ik} \beta_k^l t_i^{ik} = \sum_k \beta_k^l c^k.$$

Видим, что формулы преобразования c^k представляют собой формулы преобразования тензора (в данном случае контравариантного вектора).

Это доказательство можно без труда обобщить на тензоры более высокой валентности. В частном случае смешанного тензора второй валентности t_i^k свертывание тензора дает скаляр

$$C = \sum_k t_k^k = t_1^1 + t_2^2 + \ldots + t_r^r.$$

Свертыванием получен тензор нулевой валентности. Отсюда следует, что сумма компонент главной диагонали смешанного тензора второй валентности

инвариантна. При полном свертывании любого тензора по всем индексам получается инвариант.

5.1.13. Умножение тензоров. Пусть r_m^{ik} и s_n^j — общие компоненты двух тензоров.

Произведением тензора r_m^{ik} (третьей валентности) на тензор s_n^j (второй валентности) является тензор p_{mn}^{ikj} (пятой валентности), компоненты которого определяются формулами

$$p_{mn}^{ikj} = r_m^{ik} s_n^j.$$

Произведение тензоров зависит от порядка сомножителей.

5.1.14. Свертывание произведения. Операция свертывания тензоров была описана выше. Посмотрим, что дает ее применение к произведению двух тензоров, например к приведенному выше тензору

$$p_{mn}^{ikj} = r_m^{ik} s_n^j.$$

В применении к двум индексам n и k операция свертывания дает

$$c_m^{ij} = \sum_k p_{mk}^{ikj}.$$

Второе свертывание, примененное к индексам j и m, дает

$$a^l = \sum_j c_j^{lj}.$$

Мы пришли к контравариантному вектору. Если бы количество ковариантных и контравариантных индексов было одинаковым, мы получили бы в конечном результате инвариант.

Возьмем, например, два вектора противоположной вариантности v_l и u^k и образуем тензор $t_l^k = u^k v_l$. Производя свертывание, получим

$$c = \sum_k t_k^k = u^1 v_1 + \ldots + u^r v_r = \sum_k u^k v_k;$$

величина c представляет собой инвариант — это скалярное произведение двух векторов u^k, v_l.

Изложенные выше результаты дают критерий, позволяющий более быстрым способом, чем при использовании формул преобразования координат, установить, является ли совокупность элементов тензором (см. п. 5.1.4).

5.1.15. Установление типа тензора. Предположим, что нам встретилась величина, представленная совокупностью из r^3 элементов, зависящих, например, от трех индексов, которые меняются от 1 до r каждый. Мы не знаем, является ли эта совокупность элементов тензором и если да, то какова его вариантность, иначе говоря, положение его индексов. Обозначим рассматриваемую величину через $t(i, k, m)$, где i, k, m — индексы, которые мы пока заключаем в скобки, так как еще не имеем возможности разместить их должным образом.

Попробуем произвести свертывание произведения этой величины на три вектора u, v, w (так как имеется только три индекса). Если мы найдем, что в результате свертывания произведения

$$\sum_{ikm} t(i, k, m)\, u^i v_k w^m$$

получился инвариант по отношению к любому преобразованию координат, то величина $t(i, k, m)$ представляет собой дважды ковариантный и один раз контравариантный тензор t_{im}^k.

Действительно, произведем произвольное преобразование координат. Так как при свертывании произведения получается инвариант, то

$$\sum_{ikm} t(i,\ k,\ m)\, u^i v_k w^m = \sum_{jln} T(j,\ l,\ n)\, U^j V_l W^n.$$

Но

$$U^j = \sum_i \beta_i^j u^i; \quad V_l = \sum_k \alpha_l^k v_k; \quad W^n = \sum_m \beta_m^n w^m.$$

Следовательно,

$$t(i,\ k,\ m) = \sum_{jln} T(j,\ l,\ n)\, \beta_i^j \alpha_l^k \beta_m^n,$$

что указывает на тензорный характер величины t и дает его вариантность.

Пример. Перемещение точки представляет собой контравариантный вектор δx^k. Какова вариантность силы?

Известно, что величина $\delta A = \sum_k f_k \delta x^k$ — это совершенная силой работа, следовательно, скаляр. В правой части равенства стоит свернутое произведение силы на контравариантный вектор. Следовательно, сила представляет собой ковариантный вектор.

5.2. ТЕНЗОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

5.2.1. Определение криволинейных координат. Криволинейные оси. Координатиая поверхность. Пусть дано трехмерное пространство, отнесенное к прямолинейным осям Ox^1, Ox^2, Ox^3, причем e_1, e_2, e_3 — соответствующие единичные векторы (рис. 5.2).

Отнесем то же пространство к криволинейной системе координат, т. е. свяжем старые координаты x^1, x^2, x^3 с новыми X^1, X^2, X^3 соотношениями

$$x^i = f^i(X^1,\ X^2,\ X^3). \tag{3}$$

При этом новые координаты связаны со старыми обратными соотношениями

$$X^m = F^m(x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{4}$$

Дадим X^1, X^2, X^3 частные значения, соответствующие произвольной фиксированной точке O' пространства, координаты которой выражены в старой системе координат формулами (3). Начиная с этой точки O', меняем значения X^1 и оставляем X^2 и X^3 фиксированными.

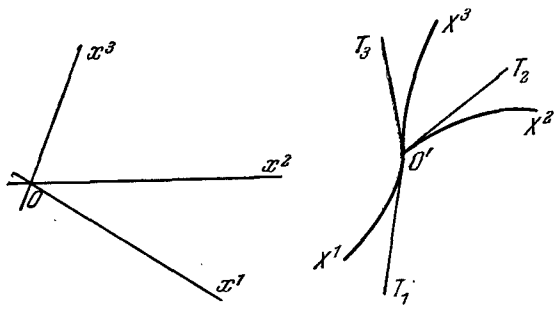


Рис. 5.2.

Точка, определяемая координатами

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(X^1,\ X^2,\ X^3),\\ x^2 &= f^2(X^1,\ X^2,\ X^3),\\ x^3 &= f^3(X^1,\ X^2,\ X^3), \end{aligned} \tag{5}$$

описывает кривую, для которой уравнения (5) при условии, что изменяется только величина X^1, являются параметрическими уравнениями. Эта кривая есть криволинейная ось $O'X^1$, проходящая через точку O'. Таким же образом можно определить криволинейные оси $O'X^2$ и $O'X^3$.

Если в уравнениях (5) зафиксировать величину X^3 и изменять только X^1 и X^2, то точка опишет поверхность, которая определяется параметрическими

уравнениями (5). Это координатная поверхность $O'X^1X^2$. Таким же образом определяются координатные поверхности $O'X^2X^3$ и $O'X^1X^3$.

Приведенные определения легко обобщить на r-мерное пространство. Криволинейные оси определяются с помощью r уравнений с одним переменным параметром, а координатные поверхности становятся гиперповерхностями, выраженными r уравнениями с двумя параметрами.

Знакомые нам формулы преобразования координат

$$x^k = \sum_m \alpha^k_m X^m, \quad X^l = \sum_i \beta^l_i x^i$$

применимы и в этом случае, но лишь к бесконечно малым перемещениям относительно точки O'. В старой системе координат такие перемещения равны dx^l, в новой — dX^m.

Перемещения в новой системе координат можно считать происходящими по касательным $O'T^m$ к криволинейным осям X^m.

Длины dX^m и dx^k выражаются с помощью локальных единиц длины, определяемых для каждой оси единичными векторами

$$\boldsymbol{E}_m = \sum_i \alpha^i_m \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_k = \sum_i \beta^i_k \boldsymbol{E}_i.$$

Локальные единицы длины постоянны в бесконечно малом объеме вблизи точки O' и меняются вместе с O'. Действительно, имеем

$$\alpha^i_m = \frac{\partial f^i}{\partial X^m}, \quad \beta^i_k = \frac{\partial F^i}{\partial x^k}.$$

Если к бесконечно малым перемещениям относительно точки O' применить формулы преобразования координат, то эти формулы примут вид

$$dX^l = \sum_k \frac{\partial F^l}{\partial x^k} dx^k = \sum_k \beta^l_k dx^k,$$

$$dx^l = \sum_m \frac{\partial f^l}{\partial X^m} dX^m = \sum_m \alpha^l_m dX^m.$$

Все эти формулы без всяких изменений применимы к случаю, когда старая система координат x^i, e^i является также криволинейной системой координат.

Начиная с этого момента, мы будем вместо аффинного векторного пространства рассматривать метрическое пространство, так как теперь нам придется пользоваться понятием расстояния между двумя точками.

Пусть произошло перемещение dX^1 по оси X^1. Тогда соответствующие перемещения в старой системе координат будут

$$dx^1 = \frac{\partial f^1}{\partial X^1} dX^1, \quad dx^2 = \frac{\partial f^2}{\partial X^1} dX^1, \quad dx^3 = \frac{\partial f^3}{\partial X^1} dX^1.$$

Если предположить, что старая система координат прямолинейна и прямоугольна, то будет справедливо равенство

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = (E_1 dX^1)^2,$$

где

$$E_1 = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial f^k}{\partial X^1}\right)^2};$$

аналогично

$$E_2 = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial f^k}{\partial X^2}\right)^2}, \quad E_3 = \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial f^k}{\partial X^3}\right)^2}.$$

5.2.2. Фундаментальный метрический тензор. Пусть дано пространство, в котором мы можем определить расстояние между двумя бесконечно близкими точками. Если оси ортогональны, то, например, в трехмерном пространстве имеем

$$ds^2 = (dx^1)^2 (e_1)^2 + (dx^2)^2 (e_2)^2 + (dx^3)^2 (e_3)^2.$$

Если система координат косоугольная, то

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (dx^1)(dx^1)(e_1)^2 + (dx^2)(dx^2)(e_2)^2 + (dx^3)(dx^3)(e_3)^2 + \\ & + (dx^1)(dx^2)\, e_1 e_2 \cos(e_1, e_2) + (dx^1)(dx^3)\, e_1 e_3 \cos(e_1, e_3) + \\ & + (dx^2)(dx^3)\, e_2 e_3 \cos(e_2, e_3) + (dx^2)(dx^1)\, e_2 e_1 \cos(e_2, e_1) + \\ & + (dx^3)(dx^2)\, e_3 e_2 \cos(e_3, e_2) + (dx^3)(dx^1)\, e_3 e_1 \cos(e_3, e_1). \end{aligned}$$

В более общем виде

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

где

$$g_{ik} = g_{ki} = e_i e_k \cos(e_i, e_k).$$

Так как величина ds^2 инвариантна при любом преобразовании координат, то g_{ik} — элементы дважды ковариантного тензора второй валентности. Тензор (g_{ik}) называется фундаментальным метрическим тензором.

Обозначим через g определитель, составленный из элементов g_{ik}, $g = |g_{ik}|$. Пусть G_{ik} — алгебраическое дополнение элемента g_{ik}. Определитель g можно записать в виде

$$g = \sum_k g_{ik} G_{ik} = \sum_i g_{ik} G_{ik}.$$

Первое выражение — это разложение определителя по элементам i-й строки, второе — его разложение по элементам k-го столбца.

Кроме того,

$$\sum_k g_{ik} G_{jk} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j,$$

так как при $i \neq j$ получается определитель, имеющий две одинаковые строки, и

$$\sum_i g_{ik} G_{il} = 0, \quad \text{если} \quad k \neq l,$$

так как при $k \neq l$ получается определитель, имеющий два одинаковых столбца. Если положить

$$g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g},$$

то g^{ik} — дважды контравариантный тензор, потому что

$$\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \quad \sum_i g_{ki} g^{il} = \delta_k^l.$$

Определитель g' тензора g^{ik} равен обратной величине определителя g тензора g_{ik}:

$$g' = |g^{ik}| = g^{-1}.$$

5.2.3. Преобразование определителя g фундаментального метрического тензора при преобразовании координат. Имеем

$$\bar{g}_{lm} = \sum_{ik} \alpha_l^i \alpha_m^k g_{ik},$$

где g_{ik} — компоненты тензора в старой, а $\bar{g}_{lm}$ — в новой системах координат. Это выражение представляет собой не что иное, как общий элемент произведения трех определителей g, Δ и Δ. Следовательно, определитель $\bar{g}$ равен

$$\bar{g} = g \times \Delta^2,$$

или, иначе [1]),

$$\sqrt{|g|} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{|\bar{g}|}.$$

Эта формула показывает, что $\sqrt{|g|}$ — скалярная плотность, а $\frac{1}{\sqrt{|g|}}$ — скалярная емкость.

5.2.4. Выражение для элемента объема. Рассмотрим в r-мерном пространстве r раз контравариантный антисимметричный тензор, общая компонента которого равна

$$t^{ijk\ldots} = dx^i\, dx^j\, dx^k \ldots,$$

где dx^i обозначает бесконечно малое перемещение по оси i, а $ijk\ldots$ — некоторая перестановка из чисел 1, 2, ..., r.

Известно, что все не равные нулю составляющие этого тензора имеют общее значение $\pm d\tau$:

$$d\tau = dx^1\, dx^2 \ldots dx^r,$$

где $d\tau$ — скалярная емкость. Поэтому произведение $d\tau$ на величину $\sqrt{|g|}$ которая представляет собой скалярную плотность, будет независимо от выбора системы координат. Чтобы выяснить, что собой представляет это произведение, рассмотрим прямоугольную декартову систему координат. Тогда $d\tau$ преобразуется в $\overline{d\tau}$ по формуле

$$\overline{d\tau} = \overline{dx^1}\, \overline{dx^2} \ldots \overline{dx^r},$$

а $\sqrt{|g|}$ преобразуется в $\sqrt{|\bar{g}|} = 1$.

Так как произведение

$$\sqrt{|\bar{g}|}\, \overline{d\tau} = \overline{dx^1}\, \overline{dx^2} \ldots \overline{dx^r}$$

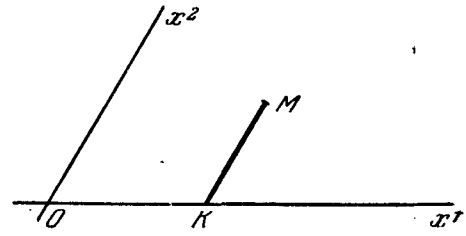


Рис. 5.3.

представляет собой в этой системе координат объем параллелепипеда с ребрами $dx^1, \ldots, dx^r$, то величина $\sqrt{|g|}\, d\tau$ представляет собой тот же объем в произвольной системе координат.

5.2.5. Косоугольная система координат на плоскости. Пусть Ox^1 и Ox^2 — две неперпендикулярные оси (рис. 5.3), а e_1 и e_2 — соответствующие единицы длины.

Рассмотрим некоторую точку M на плоскости. Координаты этой точки можно получить, измеряя отрезки OK и KM ломаной OKM, параллельные

[1]) Величина g — это определитель; $|g|$ — абсолютная величина определителя. Величина g_{ik} — это общий элемент матрицы $[g_{ik}]$ тензора (g_{ik}) в рассматриваемой системе координат. Символом $|g_{ik}|$ обозначается определитель этой матрицы.

осям координат Ox^1 и Ox^2. Их истинные длины равны

$$OK = e_1 x^1, \quad KM = e_2 x^2,$$

где x^1 и x^2 — число соответствующих единиц длины в отрезках OK и KM. Следовательно,

$$OM = (e_1\,dx^1)^2 + (e_2\,dx^2)^2 + 2e_1e_2x^1x^2\cos\theta_{12},$$

где θ_{12} — угол между осями Ox^1 и Ox^2.

Сравнивая с выражением

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{12}\,dx^1\,dx^2,$$

получаем

$$g_{11} = (e_1)^2, \quad g_{22} = (e_2)^2, \quad g_{12} = e_1e_2\cos\theta_{12}.$$

Следовательно, тензор g_{ik} имеет вид

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1)^2 & e_1e_2\cos\theta_{12} \\ e_1e_2\cos\theta_{12} & (e_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Элементарный объем $d\tau\sqrt{|g|}$ (в данном случае элемент площади) равен

$$d\sigma = dx^1\,dx^2e_1e_2\sqrt{1-\cos^2\theta_{12}} = e_1e_2\sin\theta_{12}\,dx^1\,dx^2.$$

5.2.6. Ортогональные криволинейные координаты в трехмерном пространстве[1]. Пусть дана точка M; Mx^1, Mx^2, Mx^3 — криволинейные оси, проходящие через эту точку, а e_1, e_2, e_3 — локальные единицы длины

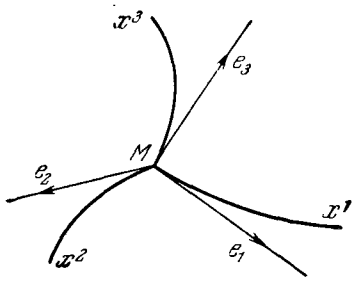


Рис. 5.4.

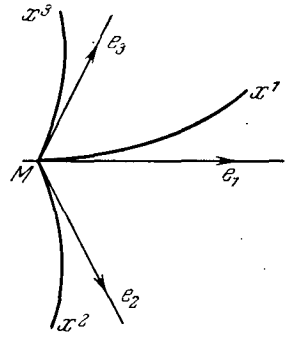


Рис. 5.5.

относительно точки M (рис. 5.4). Приращения координат dx^1, dx^2, dx^3 соответствуют истинным перемещениям

$$e_1\,dx^1, \quad e_2\,dx^2, \quad e_3\,dx^3,$$

откуда получаем тензор g_{ik}:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} (e_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (e_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (e_3)^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель g равен

$$g = (e_1e_2e_3)^2.$$

Определитель g' равен

$$g' = \frac{1}{(e_1e_2e_3)^2}.$$

[1]) Большое количество примеров ортогональных криволинейных координат приведено в п. 3.4.1 и последующих.

5.2.7. Случай произвольных криволинейных координат. Имеем (рис. 5.5)

$$ds^2 = \sum_i \sum_k g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Приращение dx^k влечет за собой перемещение, истинная длина которого равна

$$dl_k = e_k\, dx^k.$$

Но $ds^2 = g_{kk}(dx^k)^2$. Следовательно, $g_{kk} = (e_k)^2$.

Если одновременно изменять dx^k и dx^i, то эти изменения влекут за собой в плоскости, касательной к координатной поверхности Mx^ix^k, перемещение, квадрат истинной длины которого равен

$$ds^2 = g_{ii}(dx^i)^2 + g_{kk}(dx^k)^2 + 2g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

и в то же время

$$ds^2 = (e_i\, dx^i)^2 + (e_k\, dx^k)^2 + 2e_ie_k \cos(e_i, e_k)\, dx^i\, dx^k.$$

Поэтому

$$g_{ik} = e_ie_k \cos(e_i, e_k) = e_i \cdot e_k,$$

где $e_i \cdot e_k$ — скалярное произведение векторов e_i и e_k.

5.2.8. Контравариантные или ковариантные компоненты одного и того же вектора. Вопрос о вариантности вектора является составной частью аффинной векторной геометрии. В метрическом пространстве вектор может менять вариантность. Он может, например, быть контравариантным, если рассматривать его компоненты как контравариантные, или ковариантным, если рассматривать его компоненты как ковариантные.

Рассмотрим вектор с контравариантными составляющими u^k. Его ковариантные составляющие равны, по определению,

$$u_i = \sum_k g_{ik}u^k.$$

И наоборот, для определения контравариантных составляющих, исходя из ковариантных, справедлива формула

$$u^k = \sum_j g^{kj}u_j.$$

Действительно,

$$u_i = \sum_{kj} g_{ik}g^{kj}u_j = \sum_j \delta_i^j u_j.$$

Точно так же, если контравариантные составляющие бесконечно малого перемещения будут dx^k, а ковариантные составляющие будут dx_i, то

$$dx_i = \sum_k g_{ik}\, dx^k, \quad dx^j = \sum_i g^{ji}\, dx_i.$$

Следовательно,

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k = \sum_i dx_i\, dx^i = \sum_{ij} g^{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

Скалярное произведение двух векторов, которое в аффинном векторном пространстве можно было определить лишь для двух векторов противоположной вариантности, можно теперь записать в виде

$$u \cdot v = \sum_i u_iv^i = \sum_{ik} g_{ik}u^kv^i = \sum_k u^kv_k = \sum_{jk} g^{jk}u_ju_k.$$

Заменяя v на u, получим

$$|u|^2 = \sum_i u^i u_i = \sum_{ik} g_{ik} u^i u^k = \sum_{ik} g^{ik} u_i u_k.$$

Учитывая, что

$$u \cdot v = |u|\,|v| \cos(u, v),$$

имеем

$$\cos(u, v) = \frac{\sum_{ik} g_{ik} u^i v^k}{\sqrt{\sum_{ik} g_{ik} u^i u^k \sum_{ik} g_{ik} v^i v^k}}.$$

Если вектор u направлен по оси Ox^1, а v по оси Ox^2, то

$$\cos(e_1, e_2) = \frac{g_{12} u^1 v^2}{\sqrt{g_{11}(u^1)^2 g_{22}(v^2)^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}.$$

5.2.9. Изменение вариантности тензора. Пользуясь фундаментальным метрическим тензором, можно внести изменения в вариантность одного и того же данного тензора. Для этого достаточно произвести свертывание произведения фундаментального метрического тензора (g_{ik}) на данный тензор, например (t^{ikl}). Действительно,

$$t^{ij}_k = \sum_h g_{hk} t^{ijh}, \quad t^{ijk} = \sum_h g^{hk} t^{ij}_h.$$

5.2.10. Смешанный фундаментальный метрический тензор. Формулы п. 5.2.8 позволяют определить смешанный фундаментальный метрический тензор:

$$g^k_i = \sum_h g_{ih} g^{hk} = \delta^k_i.$$

Следовательно,

$$(g^k_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

5.2.11. Случай прямолинейной прямоугольной системы координат. В этом случае тензоры (g_{ik}) и (g^{ik}) совпадают с тензором (g^k_i):

$$(g_{ik}) = (g^{ik}) = (g^k_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в прямоугольной системе координат контравариантные и ковариантные компоненты не отличаются друг от друга.

Геометрическое представление контравариантных и ковариантных компонент вектора

5.2.12. Случай прямолинейной косоугольной системы координат. Пусть дан вектор OM в трехмерном пространстве (рис. 5.6), e_1, e_2, e_3 — единичные векторы координатных осей.

Контравариантные составляющие вектора OM будут

$$x^1 = \frac{OA}{e_1}, \quad x^2 = \frac{AB}{e_2}, \quad x^3 = \frac{BM}{e_3},$$

так как AB и BM соответственно параллельны Ox^2 и Ox^3.

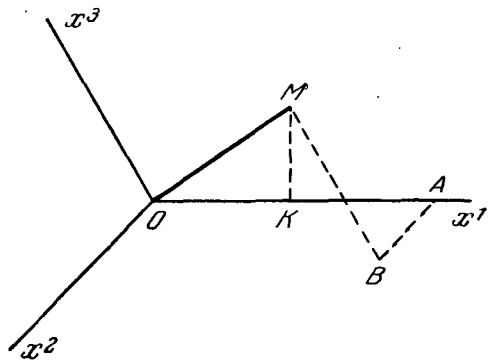


Рис. 5.6.

Обозначим через K ортогональную проекцию точки M на ось Ox^1. Тогда

$$OK = OA + AB\cos(e_1, e_2) + BM\cos(e_1, e_3)$$

или

$$OK = e_1x^1 + e_2x^2\cos(e_1, e_2) + e_3x^3\cos(e_1, e_3).$$

Но

$$\cos(e_1, e_2) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos(e_1, e_3) = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}.$$

Следовательно, умножая на e_1, получим

$$e_1OK = (e_1)^2 x^1 + \frac{e_1e_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} g_{12}x^2 + \frac{e_1e_3}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} g_{13}x^3$$

или

$$e_1OK = g_{11}x^1 + g_{12}x^2 + g_{13}x^3 = \sum_k g_{1k}x^k = x_1.$$

Итак, ковариантная компонента вектора OM по оси l представляет собой произведение ортогональной проекции этого вектора на ось l на единицу длины для этой оси.

5.2.13. Случай криволинейных координат. Пусть дана прямолинейная и прямоугольная система координат в трехмерном пространстве и пусть x^l — координаты произвольной точки в этой системе.

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками определяется формулой

$$ds^2 = \sum_{lk} g_{lk}\,dx^l\,dx^k \quad \text{при} \quad g_{lk} = \delta_l^k, \text{ так как } e_1 = e_2 = e_3 = 1.$$

Перейдем к наиболее общей системе криволинейных координат при помощи формул

$$x^l = f^l(X^1, X^2, X^3),$$
$$X^m = F^m(x^1, x^2, x^3).$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — локальные единицы длины, отложенные соответственно по касательным $O'T_1$, $O'T_2$, $O'T_3$ к криволинейным осям, проходящим через точку O' (рис. 5.7).

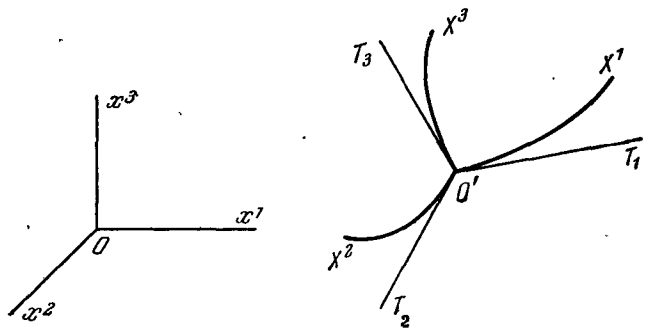


Рис. 5.7.

Элементы фундаментального метрического тензора, которые в старой системе координат равны

$$g_{ik} = \delta_i^k,$$

становятся в новой системе равными

$$G_{lm} = \sum_{ik} \alpha_l^i \alpha_m^k g_{ik}.$$

Записывая подробно, получим

$$G_{11} = \sum_{ik} g_{ik}\alpha_1^i\alpha_1^k = g_{11}(\alpha_1^1)^2 + g_{22}(\alpha_1^2)^2 + g_{33}(\alpha_1^3)^2 = (\alpha_1^1)^2 + (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_1^3)^2.$$

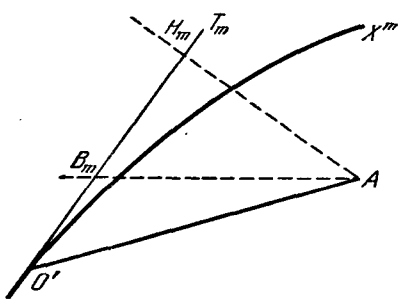


Рис. 5.8.

Следовательно,

$$\cos(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{E}_1) = \frac{\alpha_1^1}{\sqrt{(\alpha_1^1)^2 + (\alpha_1^2)^2 + (\alpha_1^3)^2}} = \frac{\alpha_1^1}{\sqrt{G_{11}}},$$

$$\cos(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{E}_2) = \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{G_{22}}},$$

$$\cos(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{E}_3) = \frac{\alpha_3^3}{\sqrt{G_{33}}}.$$

Рассмотрим теперь вектор $\boldsymbol{O'A}$ с координатами a_1, a_2, a_3 в старой системе, в которой не различаются контравариантность и ковариантность, а также с ковариантными координатами A_1, A_2, A_3 и с контравариантными координатами A^1, A^2, A^3 в новой системе. Спроектируем ортогонально этот вектор на касательную $O'T_m$ к координатной линии $O'X^m$, проходящей через точку O'. Обозначим полученную проекцию через $O'H_m$ (рис. 5.8).

Проведем через точку A — конец вектора $\boldsymbol{O'A}$ — плоскость, параллельную плоскости, касательной к координатной поверхности, не содержащей линии $O'X_m$. Пусть B_m — точка пересечения этой плоскости с касательной $O'T_m$.

Имеем

$$O'H_m = \sum_i a_i \cos(E_m, e_i) = \frac{\sum_i a_i \alpha_m^i}{\sqrt{G_{mm}}} = \frac{A_m}{\sqrt{G_{mm}}},$$

$$a_i = \sum_m O'B_m \cos(E_m, e_i),$$

$$a_i = \frac{\sum_m O'B_m \alpha_m^i}{\sqrt{G_{mm}}},$$

$$A^m = \sum_i \beta_i^m a^i = \frac{\sum_{mi} O'B_m \alpha_m^i \beta_i^m}{\sqrt{G_{mm}}} = \frac{O'B_m}{\sqrt{G_{mm}}}.$$

В итоге получаем

$$A^m = \frac{O'B_m}{\sqrt{G_{mm}}}, \quad A_m = O'H_m \sqrt{G_{mm}}.$$

Это хорошо согласуется с результатом, полученным для более частного случая прямолинейной косоугольной системы координат.

5.2.14. Частный случай ортогональных криволинейных координат. В этом случае $O'H_m = O'B_m$. Следовательно,

$$A^m \sqrt{G_{mm}} = \frac{A_m}{\sqrt{G_{mm}}}$$

или

$$A_m = G_{mm} A^m.$$

В векторном исчислении общее значение величин $A^m \sqrt{G_{mm}} = \frac{A_m}{\sqrt{G_{mm}}}$ рассматривается как компонента a_m вектора $O'A$ (индекс в этом случае не имеет ковариантного смысла).

Действительно, длина l вектора определяется выражением

$$l^2 = \sum_{mn} G_{mn} A^m A^n.$$

Поскольку мы рассматриваем криволинейные ортогональные координаты, то $G_{mn} = 0$, если $m \neq n$, а $G_{mm} = E_m^2$. Поэтому

$$l^2 = \sum_m G_{mm} (A^m)^2 = \sum_m \frac{(A_m)^2}{G_{mm}}.$$

Если пользоваться прямолинейной прямоугольной системой координат, то

$$l^2 = \sum_m (a_m)^2,$$

откуда и следует, что $A^m \sqrt{G_{mm}} = A^m E_m = \frac{A_m}{\sqrt{G_{mm}}} = \frac{A_m}{E_m} = a_m$.

5.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

5.3.1. Градиент. Рассмотрим скалярную функцию V. Компоненты градиента определяются формулой

$$a_i = \frac{\partial V}{\partial x^i}.$$

Вектор градиент ковариантен, так как полный дифференциал dV — это

инвариант, равный

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i}\, dx^i.$$

5.3.2. Ротор (вихрь). Если $\boldsymbol{a}$ — ковариантный вектор, зависящий от координат произвольной точки, то компоненты ротора от векторной функции $\boldsymbol{a}$ определяются формулами

$$b_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k},$$

откуда $b_{ik} = -b_{ki}$. Следовательно, ротор $\boldsymbol{a}$ — это дважды ковариантный антисимметричный тензор (в трехмерном пространстве ротор можно уподобить осевому вектору).

5.3.3. Дивергенция. Рассмотрим формулу (см. п. 3.3.4)

$$dm = \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V})\, d\tau,$$

где через dm обозначена масса, вытекающая в единицу времени из бесконечно малого объема $d\tau$, ρ — плотность жидкости, а $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости.

Необходимо уточнить природу величин, входящих в эту формулу, установленную для пространства, отнесенного к прямоугольной системе координат, чтобы затем можно было обобщить ее на пространство, отнесенное к произвольным криволинейным координатам. Вектор $\boldsymbol{V}$ контравариантен. Произведение элемента объема $d\tau$ (скалярная емкость) на плотность ρ представляет собой массу (чистый скаляр). Следовательно, ρ — скалярная плотность. Поэтому произведение $\rho \boldsymbol{V}$ будет векторной плотностью. Произведение дивергенции на элемент объема представляет собой массу. Следовательно, дивергенция будет скалярной плотностью.

Таким образом, операция дивергенции приложима не к вектору, а к векторной плотности $\mathfrak{a}$. Результат представляет собой скалярную плотность

$$\mathfrak{D} = \operatorname{div} \mathfrak{a} = \sum_i \frac{\partial a^i}{\partial x^i}.$$

5.3.4. Лапласиан (оператор Лапласа). Лапласиан — это скаляр, определяемый как дивергенция градиента скалярной функции V.

Градиент скалярной функции — это ковариантный вектор. Но, как мы сейчас видели, дивергенция приложима к векторной плотности, т. е. к произведению скалярной плотности на контравариантный вектор.

Фундаментальный метрический тензор позволяет получить градиент в контравариантной форме:

$$a^i = \sum_k g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Соответствующая векторная плотность по оси i будет

$$\mathfrak{a}^i = \sqrt{|g|} \sum_k g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathfrak{a} = \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{|g|}\, g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right].$$

Так как должен получиться чистый скаляр, то достаточно умножить полученное выражение на $\frac{1}{\sqrt{|g|}}$. Тогда

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik} \frac{\partial V}{\partial x^k}\right).$$

Не следует забывать, что $|g|$ — это абсолютное значение определителя (g_{ik}).

Мы получили выражение для лапласиана в наиболее общей системе криволинейных координат.

Частный случай ортогональных криволинейных координат

Мы видели, что в случае ортогональных криволинейных координат можно связать тензорное исчисление с векторным и что определения компонент вектора неодинаковы. Поэтому если мы хотим использовать в векторных обозначениях различные дифференциальные операторы, то следует изменить соответствующим образом полученные выше формулы.

Обозначим через $\mathfrak{a}$ компоненты, используемые в векторном исчислении, а через A — компоненты того же вектора, применяемые в тензорном исчислении. Мы видели, что эти различные компоненты связаны соотношением

$$\frac{A_m}{\sqrt{G_{mm}}} = \frac{A_m}{E_m} = A^m \sqrt{G_{mm}} = A^m E_m = \mathfrak{a}_m. \tag{6}$$

Покажем, как изменятся формулы для дифференциальных операторов применительно к компонентам вектора, используемым в векторном исчислении.

5.3.5. Градиент. Как уже было отмечено, составляющие вектора градиента равны

$$A_k = \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Следовательно, согласно формулам (6),

$$\mathfrak{a}_k = \frac{1}{e_k} \cdot \frac{\partial V}{\partial x^k}. \tag{7}$$

5.3.6. Ротор. Аналогичным образом получим для компонент ротора

$$b_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

$$\operatorname{rot}_j \mathfrak{a} = b_{ik} = \frac{1}{e_i e_k}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(e_k \mathfrak{a}_k) - \frac{\partial}{\partial x^k}(e_i \mathfrak{a}_i)\right]. \tag{8}$$

5.3.7. Дивергенция. Дивергенция, которая представляет собой скалярную плотность, становится чистым скаляром, если умножить ее на $\frac{1}{\sqrt{|g|}}$. Общая формула этой скалярной дивергенции в произвольных криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}\, A^i).$$

В трехмерных ортогональных криволинейных координатах получим

$$\sqrt{|g|} = e_1 e_2 e_3.$$

Формула для скалярной дивергенции преобразуется к виду

$$\frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(e_1e_2e_3A^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(e_1e_2e_3A^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(e_1e_2e_3A^3)\right].$$

Вводя обычные для векторного исчисления компоненты, будем иметь

$$\operatorname{div}\mathfrak{a}=\frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\mathfrak{a}_1e_2e_3)+\frac{\partial}{\partial x^2}(\mathfrak{a}_2e_1e_3)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\mathfrak{a}_3e_1e_2)\right]. \tag{9}$$

5.3.8. Лапласиан. Так как лапласиан есть чистый скаляр, так же как и функция V, то не требуется рассматривать вопрос о разнице в обозначениях, и мы можем вычислять лапласиан в ортогональных криволинейных координатах для трехмерного пространства, исходя из общей формулы

$$\Delta V=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i_k}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\,g^{ik}\frac{\partial V}{\partial x^k}\right).$$

Здесь

$$\sqrt{|g|}=e_1e_2e_3,\qquad (g^{ik})=\begin{pmatrix}e_1^{-2}&0&0\\0&e_2^{-2}&0\\0&0&e_3^{-2}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta V=\frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{e_2e_3}{e_1}\frac{\partial V}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{e_1e_3}{e_2}\frac{\partial V}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{e_1e_2}{e_3}\frac{\partial V}{\partial x^3}\right)\right].$$

5.3.9. Тензорная форма уравнений Максвелла. Рассмотрим обычное для теории относительности пространство. Величина ds^2 в этом ортогональном пространстве имеет форму

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2-c^2\,dt^2.$$

Следовательно, четыре координаты этого „пространства — времени" будут

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ и } jct,$$

где через c обозначена скорость электромагнитных волн в пустоте. В таком ортогональном пространстве обозначение вариантности несущественно. Поэтому индексы расставляются произвольно в нижнем положении.

Рассмотрим вектор J с проекциями

$$J_1,\ J_2,\ J_3,\ jc\rho$$

и два антисимметричных тензора второго порядка:

$$(G_{ij})=\begin{pmatrix}0&H_3&-H_2&-jcD_1\\-H_3&0&H_1&-jcD_2\\H_2&-H_1&0&-jcD_3\\jcD_1&jcD_2&jcD_3&0\end{pmatrix},$$

$$(F_{ij})=\begin{pmatrix}0&B_3&-B_2&-\frac{j}{c}E_1\\-B_3&0&B_1&-\frac{j}{c}E_2\\B_2&-B_1&0&-\frac{j}{c}E_3\\\frac{j}{c}E_1&\frac{j}{c}E_2&\frac{j}{c}E_3&0\end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла будут

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho,$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{J}$ — это соответственно векторы напряженности электрического и магнитного поля, электрической и магнитной индукции и плотности тока, а ρ — плотность электрических зарядов.

Мы получим первые два уравнения Максвелла, если в равенстве

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_j} = J_i$$

придадим i значения 1, 2, 3, 4. Аналогично два последних уравнения Максвелла получаются из равенства

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} = 0.$$

Замечание. Уравнения Максвелла написаны здесь в рационализированной системе МКСА. Если бы их требовалось написать в системе Гаусса, т. е. в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho,$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0,$$

то достаточно было бы последнюю строку и последний столбец тензора G разделить на c, а тензора F умножить на c и, кроме того, вектор $\boldsymbol{J}$ умножить на $\frac{4\pi}{c}$.

5.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Этот оригинальный метод был разработан в США Габриэлем Кроном.

5.4.1. Элементы электрических цепей с сосредоточенными постоянными. Электрическая цепь наиболее общего вида состоит из нескольких ветвей, соединенных между собой определенным и не меняющимся во времени способом. Такая ветвь, схематически представленная на рис. 5.9, может содержать катушки индуктивности, конденсаторы, активные сопротивления, электронные усилители, электродвигатели и т. д. Между элементами цепи, входящими в некоторые ветви, может иметь место электромагнитная или электромеханическая [1]) связь. В некоторых ветвях, или даже в большинстве из них, могут находиться источники э. д. с.

[1]) Например, две механически связанные между собой катушки, находящиеся в разных ветвях и помещенные в постоянное магнитное поле.

Точка соединения нескольких ветвей называется узлом. Если два узла соединены накоротко, они образуют один узел (рис. 5.10). Замкнутая цепь называется контуром. Сложную цепь можно разложить на некоторое число простейших цепей. Между двумя простейшими цепями нет непосредственного электрического соединения, но существует электромагнитная или электромеханическая связь. Без этой связи обе простейшие цепи будут полностью независимы друг от друга. Контуры и ветви представляют собой расчетные единицы цепи. Пусть S, N, M, B — соответственно наименьшее число простейших цепей, узлов, контуров и ветвей, какое только можно различить в данной цепи. Между ними существует соотношение

$$M = B - N + S, \tag{10}$$

позволяющее определить минимальное число контуров M, которое необходимо рассмотреть для

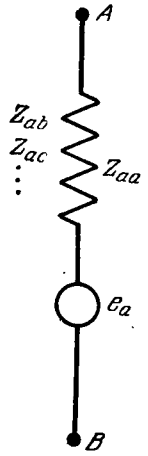


Рис. 5.9.

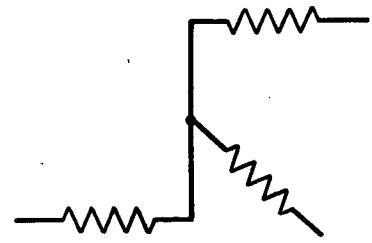


Рис. 5.10.

расчета цепи. При непосредственном рассмотрении цепи это число не очевидно, но минимальное количество узлов N, ветвей B, простейших цепей S можно сразу увидеть из схемы цепи. Отсюда по формуле (10) определяем число M.

Каждая ветвь содержит некоторое количество пассивных элементов, совокупность которых образует собственное сопротивление ветви. Прохождение комплексного тока по этому сопротивлению вызывает появление комплексного напряжения на его зажимах. Обозначим через Z_{aa} отношение комплексного напряжения на зажимах к комплексному току в ветви — собственное сопротивление ветви.

Если ветвь образована последовательным соединением индуктивности, активного сопротивления и емкости, то

$$Z_{aa} = j\omega L_{aa} + R_{aa} + \frac{1}{j\omega C_{aa}}.$$

Если исследуется не стационарный синусоидальный, а переходный режим, то величина Z_{aa} становится функцией комплексной переменной p и получает следующий вид:

$$Z_{aa} = pL_{aa} + R_{aa} + \frac{1}{pC_{aa}}.$$

Если две ветви a и b соединены друг с другом, это означает, что прохождение комплексного тока в ветви a вызывает в ветви b появление комплексной электродвижущей силы, и наоборот. Сопротивление связи между a и b измеряется соотношением между этим током и напряжением. Обозначим его через Z_{ab}. Сопротивление связи между b и a обозначим через Z_{ba}.

Принцип обратимости требует, чтобы

$$Z_{ab} = Z_{ba}\ ^{1}).$$

При электромагнитной связи

$$Z_{ab} = Z_{ba} = j\omega M$$

или

$$Z_{ab} = Z_{ba} = pM$$

в зависимости от рассматриваемой задачи.

Набор некоторого количества Z и электродвижущих сил в ветвях может оказаться недостаточным для полного расчета электрической цепи. Действительно, необходимо еще иметь возможность легко различать по схеме направление индуктивной связи между двумя ветвями. Существуют два способа последовательного соединения двух катушек индуктивности: потоки катушек могут быть либо противоположны друг другу, либо иметь одинаковое направление (встречное или согласное включение). Чтобы безошибочно показать это на схеме (см. рис. 5.11), самое простое — ввести нумерацию зажимов ветвей. Можно начать с любой ветви, зажимы которой нумеруются 1—2.

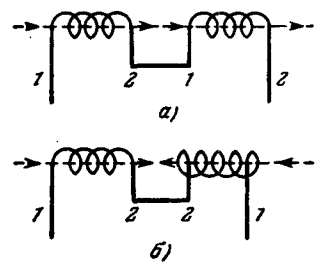


Рис. 5.11.

Рассмотрим какую-либо другую ветвь, индуктивно связанную с занумерованной. Если магнитный поток взаимной индукции, обусловленный током влияющей ветви, пронизывая рассматриваемую ветвь, будет иметь направление, одинаковое с ее собственным потоком, обозначим ее зажимы 1—2 (согласное включение, рис. 5.11, *а*). В противном случае их следует обозначить 2 — 1 (встречное включение, рис. 5.11, *б*). При согласном включении смежные индексы различны, при встречном одинаковы. При отсутствии индуктивной связи нумерация не имеет значения.

Условимся, далее, относительно связи между направлением токов в ветвях и нумерацией зажимов. За положительное направление тока примем направление 1—2. То же правило будем относить и к направлению электродвижущих сил.

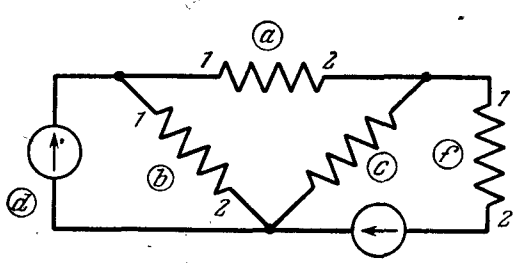


Рис. 5.12.

Пример. Рассмотрим электрическую цепь на рис. 5.12. Она содержит 3 узла, 5 ветвей и состоит из одной простейшей цепи. Следовательно, по формуле (10) минимальное число контуров равно 3. Предположим, что ветви a и f включены согласно, а a и b встречно. Предположим также, что электродвижущие силы, приложенные к ветвям d и f, имеют направления, указанные стрелками. Это обусловливает положительное направление токов в ветвях a, f и электродвижущей силы в ветви f. За положительные направления токов других ветвей могут быть приняты любые, однако их следует считать до конца вычисления неизменными. Если направление

[1]) Однако принцип обратимости может не иметь места, если, например, одна из ветвей содержит электронный усилитель или вентиль и т. п. В этом случае $Z_{ab} \neq Z_{ba}$.

тока в какой-либо ветви, принятое нами за положительное, не будет соответствовать действительному направлению тока, то это означает, что в результате решения мы получим для этой ветви отрицательную величину тока.

Если направления токов совпадают со стрелками на рисунке, то электродвижущая сила ветви d также будет положительна.

Ниже мы изложим метод быстрого составления уравнений, описывающих режим цепи. Подчеркнем, что речь идет о методе составления уравнений, а не об их решении.

5.4.2. Метод составления уравнений для цепи наиболее общего вида. Рассмотрим цепь наиболее общего вида. Примем токи, текущие в некоторых участках цепи, за вспомогательные неизвестные и с их помощью определим остальные токи цепи. Вспомогательные токи определяются следующим правилом: они должны протекать по таким участкам цепи, разорвав которые мы обесточим цепь. Это правило означает, что вспомогательные токи взаимно независимы в смысле первого закона Кирхгофа. Максимальное число таких токов равно минимальному числу контуров. Поэтому их называют контурными или независимыми токами в противоположность действительным токам, текущим в ветвях. Отсюда следует, что токи ветвей могут рассматриваться как результат наложения всех контурных токов, текущих по рассматриваемой ветви. Существенно определить для контурных токов положительное направление. Оно может быть совершенно произвольным, но, так же как определенное выше положительное направление для токов ветвей, не должно меняться до конца вычисления.

Обозначим контурные токи через i^p, i^q, ..., а токи ветвей через i^a, i^b, ... (поскольку ветви были обозначены буквами a, b, ... и т. д.).

Можно рассматривать контурные токи как координаты вектора I' в M-мерном пространстве. Назовем его контурным пространством или, проще, пространством $\mathscr{M}$. Токи ветвей можно рассматривать как координаты некоторого другого вектора I в B-мерном пространстве. Назовем его пространством ветвей или, проще, пространством $\mathscr{B}$. Векторы I и I' выражены соответственно матрицами

$$I' = \begin{bmatrix} i^p \\ i^q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Примем, что они контравариантны, что оправдывает расположение индексов вверху. Токи ветвей можно выразить с помощью первого закона Кирхгофа или, что одно и то же, приравнять их сумме контурных токов, протекающих в ветвях. Получаем следующие выражения:

$$i^a = C^a_p i^p + C^a_q i^q + \ldots \tag{11}$$

Каждый коэффициент C равен 0, $+1$ или -1 в зависимости от наличия тока в рассматриваемой ветви и от совпадения его направления с направлением, принятым для данной ветви за положительное.

Таблица коэффициентов C может рассматриваться как матрица преобразования, позволяющая перейти от вектора, представленного матрицей I', к вектору, представленному матрицей I. Назовем ее матрицей связи; при этом совокупность уравнений (11) запишется в матричных обозначениях [1]) как

$$I = CI'.$$

[1]) Матрица связи — это транспонированная матрица α п. 5.1.5.

Обратимся к цепи, рассмотренной в предыдущем примере. Схема токов в ней изображена на рис. 5.13. Ветви обозначены через a, b, c, d, f. За положительные направления токов примем направления, указанные стрелками. Для некоторых из токов эти направления обусловлены электромагнитной связью. Если разъединить ветви c, d, f, цепь становится полностью разомкнутой. Ее можно рассматривать, следовательно, как наложение трех контуров, обозначенных пунктирными линиями. На каждом контуре стрелками указано направление тока, произвольно принятое за положительное.

Матрицы I и I' будут равны соответственно

$$I=\begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ i^c \\ i^d \\ i^f \end{bmatrix}, \qquad I'=\begin{bmatrix} i^p \\ i^q \\ i^r \end{bmatrix}.$$

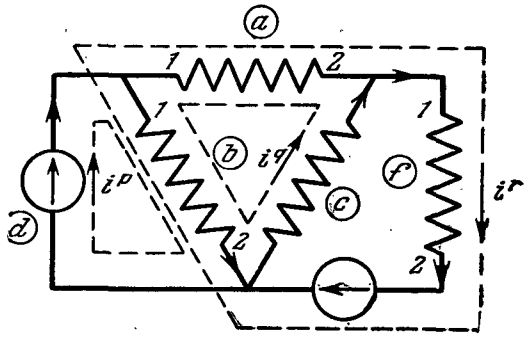


Рис. 5.13.

Первый закон Кирхгофа дает

$$\begin{aligned} i^a &= -i^q + i^r \\ i^b &= i^p + i^q - i^r \\ i^c &= +i^q \\ i^d &= i^p \\ i^f &= +i^r. \end{aligned}$$

Отсюда получаем матрицу C, устанавливающую связь между матрицами I и I':

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

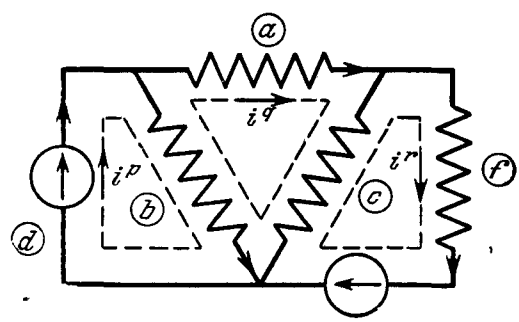


Рис. 5.14.

Для описания той же цепи, которую можно обесточить, разъединив другую тройку ветвей a, d, f, можно найти и другую систему контурных токов, например, изображенную на рис. 5.14. При этом находим новую матрицу связи C_1:

$$C_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вернемся к изучению цепи наиболее общего вида. Дана ветвь a (рис. 5.9) с зажимами A и B. Она содержит электродвижущую силу e_a, и по ней течет ток i^a, имеющий направление от A к B. Ветвь имеет собственное сопротивление Z_{aa} и связана с другими ветвями через сопротивления связи

Z_{ab}, Z_{ac}, ... Пусть u_a — разность потенциалов $V_A - V_B$. Между всеми указанными величинами имеется соотношение

$$u_a + \sum_{n=a}^{B} Z_{an} i^n = e_a. \tag{12}$$

Рассмотрим матрицы

$$U = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & \cdots \\ Z_{ba} & Z_{bb} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Матрица I представляет собой, по предположению, контравариантный вектор.

Мощность, получаемая от источников э. д. с., равна

$$W = \sum_j e_j i^{j*}.$$

Матрица E представляет собой ковариантный вектор. Матрица с элементами i^{j*} — контравариантный вектор, комплексно сопряженный с вектором I. Произведение E на I^* является скаляром.

Расходуемая мощность равна

$$W = \sum_{mk} Z_{mk} i^m i^k,$$

откуда следует, что матрица Z является дважды ковариантным тензором. Он называется тензором полных сопротивлений.

Формула (12) показывает, что матрица U есть ковариантный вектор. Соотношения типа (12), написанные для всех ветвей, могут быть в матричном обозначении записаны в виде

$$U + ZI = E. \tag{13}$$

Это — соотношение между тензорными величинами.

Рассмотрим преобразование, позволяющее перейти от пространства $\mathscr{B}$ к пространству $\mathscr{M}$. Оно определено матрицей связи C. Формулы преобразования тензорных величин U, Z, I, E с учетом их вариантности следующие:

$$i^a = \sum_p C_p^a i^p \qquad \text{(определение матрицы связи)},$$

$$e_p = \sum_a C_p^a e_a \qquad \text{(ковариантный вектор)},$$

$$u_p = \sum_a C_p^a u_a \qquad \text{(ковариантный вектор)},$$

$$Z_{pq} = \sum_{ab} C_p^a C_q^b Z_{ab} \qquad \text{(дважды ковариантный тензор)}$$

или, в матричном обозначении,

$$I = CI', \tag{14}$$

$$E' = \tilde{C}E, \tag{15}$$

$$U' = \tilde{C}U, \tag{16}$$

$$Z' = \tilde{C}ZC, \tag{17}$$

где I', E', U', Z' — матрицы, представляющие соответствующие тензорные величины в пространстве $\mathscr{M}$.

Соотношение (13), связывающее тензорные величины, не зависит от выбора системы координат. В пространстве $\mathscr{M}$ оно получает вид

$$U' + Z'I' = E'. \tag{18}$$

Элементы матрицы E' представляют собой алгебраическую сумму электродвижущих сил, действующих в контурах. Элементы главной диагонали матрицы Z' представляют собой собственные сопротивления контуров. Остальные элементы этой матрицы являются сопротивлениями связи между контурами. Каждый элемент матрицы U' — это сумма разностей потенциалов между зажимами элементов ветвей, встречаемых при последовательном прохождении по контуру. Известно, что эта геометрическая сумма равна нулю. Отсюда

$$U' = \tilde{C}U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Таким образом, соотношение (18) значительно упрощается в пространстве $\mathscr{M}$ и становится системой из M уравнений с M искомыми неизвестными:

$$E' = Z'I'. \tag{19}$$

Замечание. Уравнение (19) — это соотношение между тензорными величинами. Можно соблазниться свойством инвариантности тензорных соотношений и возвратиться из пространства $\mathscr{M}$ в пространство $\mathscr{B}$, написав (13) в виде $E = ZI$. Это, однако, неверно. Дело в том, что матрица связи C не допускает обращения, и перейти от пространства $\mathscr{M}$ к пространству $\mathscr{B}$ невозможно, точно так же, как нельзя написать токи i^p как функцию токов i^a.

Применим только что изложенное к примеру, рассмотренному на стр. 269. Мы уже вычислили матрицу C. Поэтому получаем

$$E' = \tilde{C}E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_d \\ e_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_d \\ 0 \\ e_f \end{bmatrix}.$$

Тензор сопротивлений в пространстве $\mathscr{B}$ равен (принимая во внимание предположение, сделанное о строении цепи)

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & 0 & 0 & Z_{af} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{fa} & 0 & 0 & 0 & Z_{ff} \end{bmatrix}.$$

В пространстве $\mathscr{M}$ он будет равен

$$Z' = \tilde{C}ZC = \begin{bmatrix} Z_{bb} & -Z_{ba}+Z_{bb} & Z_{ba}-Z_{bb} \\ -Z_{ab}+Z_{bb} & Z_{aa}-Z_{ba}- & -Z_{aa}+Z_{ba}+ \\ & -Z_{ab}+Z_{bb}+ & +Z_{ab}-Z_{bb}- \\ & +Z_{cc} & -Z_{af} \\ Z_{ab}-Z_{bb} & -Z_{aa}+Z_{ba}- & Z_{aa}-Z_{ba}+ \\ & -Z_{fa}+Z_{ab}- & +Z_{fa}-Z_{ab}+ \\ & -Z_{bb} & +Z_{bb}+Z_{af}+ \\ & & +Z_{ff} \end{bmatrix}.$$

Тензорное уравнение режима будет

$$E' = Z'I'.$$

Метод, изложенный в этом пункте, сводится к следующим простым приемам:

а) Тщательно вычертить схему изучаемой цепи, обозначить ветви, пронумеровав их зажимы в зависимости от связей, и обозначить имеющиеся электродвижущие силы.

б) Сосчитать узлы, ветви и простейшие цепи. Определить по ним наименьшее число контуров. Ввести столько независимых токов, сколько имеется контуров. Показать эти токи стрелками произвольных направлений.

в) С помощью независимых токов вычислить все токи в ветвях, пользуясь первым законом Кирхгофа и учитывая их направления. По полученной системе написать матрицу связи C.

г) Вычислить матрицы E' и Z' с помощью формул

$$E' = \tilde{C}E, \quad Z' = \tilde{C}ZC.$$

Отсюда выводится соотношение $E' = Z'I'$, решающее задачу.

Для дальнейших вычислений нужно знать структуру ветвей и, кроме того, более конкретно определить задачу. Если в задаче рассматривается только стационарный синусоидальный режим, то, например, электродвижущие силы и сопротивления будут иметь следующий вид:

$$E = E_0 e^{j\varphi} \quad (e = Ee^{j\omega t}), \qquad Z = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L.$$

При этом, решая систему (19), найдем комплексные токи I'.

Если требуется только составить систему дифференциальных уравнений, описывающих работу цепи, то следует заменить комплексные токи и напряжения мгновенными токами и напряжениями и подставить вместо знаков дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и интегрирования $\int (\ )dt$ соответственно $j\omega$ и $\frac{1}{j\omega}$.

Если же требуется отыскать переходный режим, создаваемый несколькими электродвижущими силами $h_1(t)$, $h_2(t)$, ..., приложенными в момент времени $t = 0$, то следует ввести в систему (19) изображения электродвижущих сил $f_1(p) \doteqdot h_1(t)$, $f_2(p) \doteqdot h_2(t)$, ... *) и сопротивлений в виде

*) Употребляются еще следующие обозначения: $f(p) \leftarrow\!\!\!\div\!\!\!- h(t)$, $f(p) \leftarrow h(t)$, $f(p) \subset h(t)$ (см. гл. 8).

$R+\frac{1}{pC}+pL$. Мы получим переходные токи как функцию времени, вычислив оригиналы выражений

$$\frac{\alpha_1(p)}{\delta(p)},\quad \frac{\alpha_2(p)}{\delta(p)},\quad \ldots,$$

например, путем применения теоремы разложения Хевисайда (см. п. 8.3.12).

Очевидно, что в случае постоянного тока речь идет лишь о решении системы линейных уравнений $E'=Z'I'$, где элементы Z' и E'—вещественные

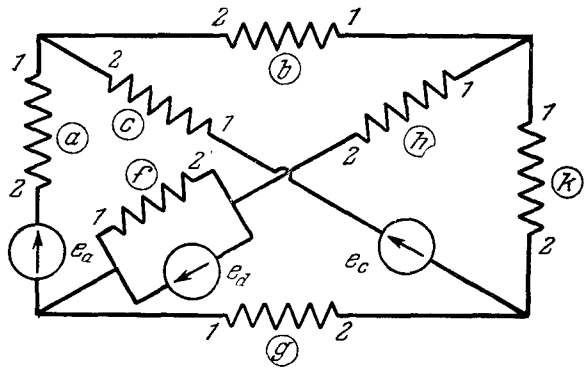


Рис. 5.15.

числа, выраженные соответственно в омах и в вольтах. При этом система (19) дает токи в амперах.

Последнее замечание: очевидно, что отыскание тензорным способом уравнений режима цепи, изображенной на рис. 5.13, невыгодно. Прямое

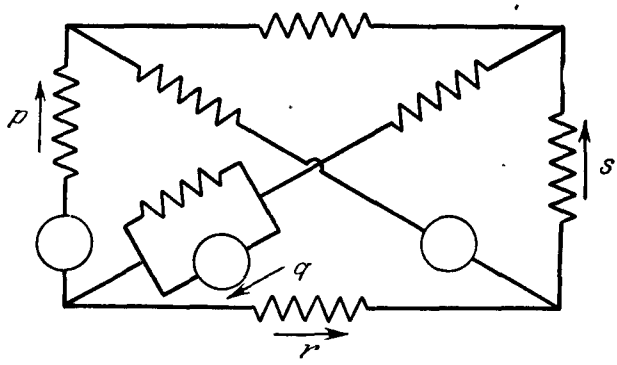


Рис. 5.16.

вычисление было бы проще. Однако легко заметить, что по мере возрастания сложности цепи тензорный способ получает преимущество над прямым вычислением.

Другое важное достоинство вытекает из полного единообразия приемов описанного метода. Проиллюстрируем его на двух примерах цепей довольно простой структуры, для которых, однако, уже составление уравнений режима прямым методом было бы весьма затруднительно.

Пример 1. Приложим наш метод к цепи, изображенной на рис. 5.15.

а) Предположим, что ток, проходя по пути b, h, f, a, c, k, встречает индуктивно связанные ветви. Причем конструкция такова, что одни ветви будут иметь согласное включение (ac, af, bf, cf, fk, bk), другие — встречное (ah, ch). Поэтому нужна нумерация ветвей, указанная на рис. 5.15.

б) Число ветвей равно 8, число узлов 5, число простейших цепей 1. Число контуров, следовательно, равно 4.

В качестве независимых токов выберем i^p, i^q, i^r, i^s. Они указаны на рис. 5.16 (буква i на данном и следующих рисунках опущена).

в) Остается вычислить токи ветвей как функции выбранных нами независимых токов. Результат такого вычисления показан на рис. 5.17.

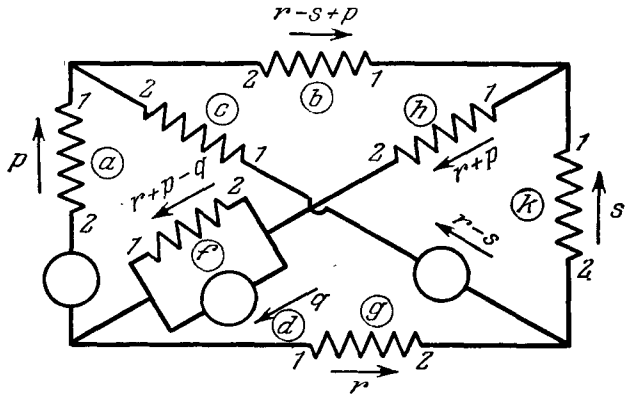


Рис. 5.17.

Заметим, что независимый ток i^p, проходящий по ветви a, имеет направление $2 \to 1$. Так как положительное направление тока i^a будет $1 \to 2$, то

$$i^a = -i^p.$$

То же относится к ветвям b, f и k. Сделав это замечание, мы можем написать выражения для токов ветвей как функции независимых токов. Запишем их в виде соотношений между значками, опуская букву i *). Эти соотношения позволяют получить матрицу связи C:

$$\begin{aligned}
a &= -p \\
b &= -p \quad -r+s \\
c &= \quad +r-s \\
d &= \quad +q \\
f &= -p+q-r \\
g &= \quad +r \\
h &= +p \quad +r \\
k &= \quad -s
\end{aligned}
\qquad
C = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}.$$

*) Подобную запись будем применять и в дальнейшем.

г) Вычислим матрицы E' и Z':

$$E' = \tilde{C}\begin{bmatrix} -e_a \\ 0 \\ e_c \\ e_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_a \\ e_d \\ e_c \\ -e_c \end{bmatrix},$$

$$Z' = \tilde{C}ZC = \tilde{C}\begin{bmatrix} Z_{aa} & 0 & Z_{ac} & 0 & Z_{af} & 0 & Z_{ah} & 0 \\ 0 & Z_{bb} & 0 & 0 & Z_{bf} & 0 & 0 & Z_{bk} \\ Z_{ca} & 0 & Z_{cc} & 0 & Z_{cf} & 0 & Z_{ch} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{fa} & Z_{fb} & Z_{fc} & 0 & Z_{ff} & 0 & Z_{fh} & Z_{fk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{gg} & 0 & 0 \\ Z_{ha} & 0 & Z_{hc} & 0 & Z_{hf} & 0 & Z_{hh} & 0 \\ 0 & Z_{kb} & 0 & 0 & Z_{kf} & 0 & 0 & Z_{kk} \end{bmatrix} C =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} Z_{aa}+Z_{af}-Z_{ah}+ \\ +Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{af}+ \\ +Z_{bf}+Z_{ff}-Z_{fh}- \\ -Z_{ah}-Z_{fh}+Z_{hh} \end{matrix} & \begin{matrix} -Z_{af}-Z_{bf}- \\ -Z_{ff}+Z_{fh} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_{bb}+Z_{bf}-Z_{ac}+ \\ +Z_{af}+Z_{bf}+Z_{ff}- \\ -Z_{fh}-Z_{ah}-Z_{fh}+ \\ +Z_{hh}-Z_{cf}+Z_{ch} \end{matrix} & \begin{matrix} -Z_{bb}-Z_{bf}+Z_{ac}+ \\ +Z_{bk}+Z_{fk}+Z_{cf}- \\ -Z_{ch} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -Z_{af}-Z_{bf}-Z_{ff}+ \\ +Z_{fh} \end{matrix} & Z_{ff} & \begin{matrix} -Z_{bf}+Z_{cf}-Z_{ff}+ \\ +Z_{fh} \end{matrix} & Z_{bf}-Z_{cf}-Z_{fk} \\ \begin{matrix} -Z_{ac}-Z_{af}-Z_{ah}+ \\ +Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{bf}- \\ -Z_{cf}+Z_{ff}-Z_{fh}+ \\ +Z_{ch}-Z_{fh}+Z_{hh} \end{matrix} & \begin{matrix} -Z_{bf}+Z_{cf}- \\ -Z_{ff}+Z_{fh} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_{bb}+Z_{bf}+Z_{cc}- \\ -Z_{cf}+Z_{ch}+Z_{bf}- \\ -Z_{cf}+Z_{ff}-Z_{fh}+ \\ +Z_{gg}+Z_{ch}-Z_{fh}+ \\ +Z_{hh} \end{matrix} & \begin{matrix} -Z_{bb}-Z_{bf}-Z_{cc}+ \\ +Z_{cf}-Z_{ch}+Z_{bk}+ \\ +Z_{fk} \end{matrix} \\ \begin{matrix} Z_{ac}-Z_{bb}+Z_{bk}+ \\ +Z_{cf}+Z_{fk}-Z_{ch}- \\ -Z_{bf} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_{bf}-Z_{cf}- \\ -Z_{fk} \end{matrix} & \begin{matrix} -Z_{bb}+Z_{bk}-Z_{cc}- \\ -Z_{bf}+Z_{cf}+Z_{fk}- \\ -Z_{ch} \end{matrix} & \begin{matrix} Z_{bb}-Z_{bk}+Z_{cc}- \\ -Z_{bk}+Z_{kk} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Искомая система уравнений — это $E' = Z'I'$.

Пример 2. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 5.18.

а) По конструкции она содержит некоторое количество индуктивно связанных ветвей (ab, cd, dg, gh, kf). Для тока, проходящего путь $bagdch$, и для тока, проходящего путь kf, имеем встречное включение. Отсюда проистекает нумерация ветвей, указанная на рис. 5.18.

б) Число ветвей равно 8, число узлов 4, число простейших цепей 1. Следовательно, число контуров равно 5. Пять выбранных независимых токов изображены на рис. 5.19.

в) Токи, протекающие по восьми ветвям, изображены на рис. 5.20.

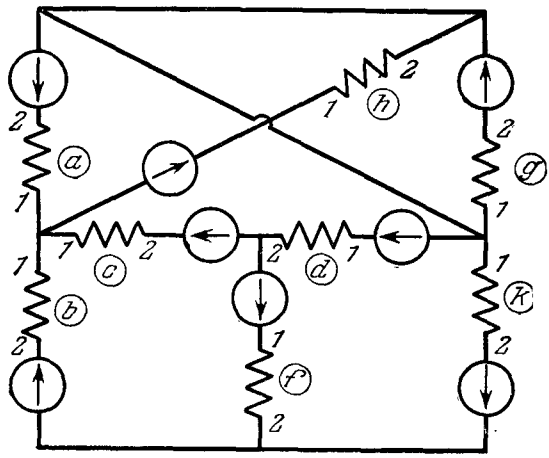


Рис. 5.18.

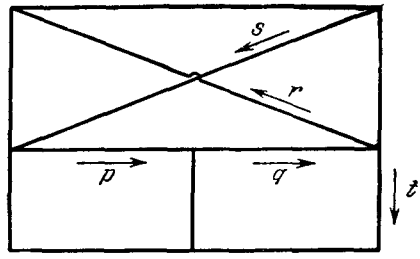


Рис. 5.19.

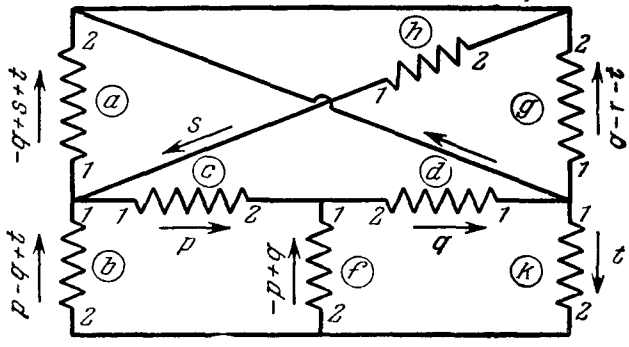


Рис. 5.20.

Выразим токи ветвей как функции пяти независимых токов. Имеем систему уравнений, из которой получим матрицу связи C:

$$\begin{array}{l} a = \quad -q \quad +s-t \\ b = -p+q \quad -t \\ c = \quad p \\ d = \quad -q \\ f = \quad p-q \\ g = \quad q-r \quad -t \\ h = \quad -s \\ k = \quad t \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы E и Z равны

$$E = \begin{pmatrix} -e_a \\ -e_b \\ -e_r \\ e_d \\ e_f \\ e_g \\ e_h \\ e_k \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{ab} & Z_{bb} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{cc} & Z_{cd} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{cd} & Z_{dd} & 0 & Z_{dg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{ff} & 0 & 0 & Z_{fk} \\ 0 & 0 & 0 & Z_{dg} & 0 & Z_{gg} & Z_{gh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{gh} & Z_{hh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{fk} & 0 & 0 & Z_{kk} \end{pmatrix}.$$

г) Вычисление E' и Z' дает

$$E' = \hat{C}E = \begin{pmatrix} e_b - e_c + e_f \\ e_a - e_b - e_d - e_f + e_g \\ -e_g \\ -e_a - e_h \\ e_a + e_b - e_g + e_k \end{pmatrix},$$

$$= \hat{C}ZC =$$

$$\begin{pmatrix} Z_{bb}+Z_{cc}+Z_{ff} & Z_{ab}-Z_{bb}+Z_{cd}-Z_{ff} & 0 & -Z_{ab} & Z_{ab}+Z_{bh}+Z_{fk} \\ Z_{ab}-Z_{bb}-Z_{cd}-Z_{ff} & Z_{aa}-Z_{ab}-Z_{ab}+Z_{bb}+Z_{dd}-Z_{dg}+Z_{ff}-Z_{dg}+Z_{gg} & Z_{dg}-Z_{gg} & -Z_{aa}+Z_{ab}-Z_{gh} & Z_{aa}-Z_{ab}+Z_{ab}+Z_{dg}-Z_{gg}-Z_{fk}-Z_{bb} \\ 0 & Z_{dg}-Z_{gg} & Z_{gg} & Z_{gh} & -Z_{gg} \\ -Z_{ab} & -Z_{aa}+Z_{ab}-Z_{gh} & Z_{gh} & Z_{aa}+Z_{hh} & -Z_{aa}-Z_{ab}+Z_{gh} \\ Z_{ab}+Z_{bb}+Z_{fk} & Z_{aa}-Z_{ab}+Z_{ab}-Z_{bb}+Z_{dg}-Z_{fk}-Z_{gg} & Z_{gg} & -Z_{aa}-Z_{ab}+Z_{gh} & Z_{aa}-Z_{ab}+Z_{ab}+Z_{bb}+Z_{gg}+Z_{kk} \end{pmatrix}.$$

Искомая система уравнений — это $E' = Z'I'$.

5.4.3. Соединение цепей посредством проводников. Для анализа сложной цепи достаточно разложить ее на более простые, подобные тем, которые

рассматривались нами выше. Одно из основных преимуществ тензорного метода и состоит в возможности постоянно использовать для расчета сложных цепей расчеты простых цепей, произведенные ранее.

Рассмотрим две цепи из примеров 1 и 2. Обозначим первую цепь через R_2, а вторую через R_1.

Поместив их рядом без какой-либо связи, мы можем считать, что совокупность этих цепей образует цепь R_1+R_2 (рис. 5.21).

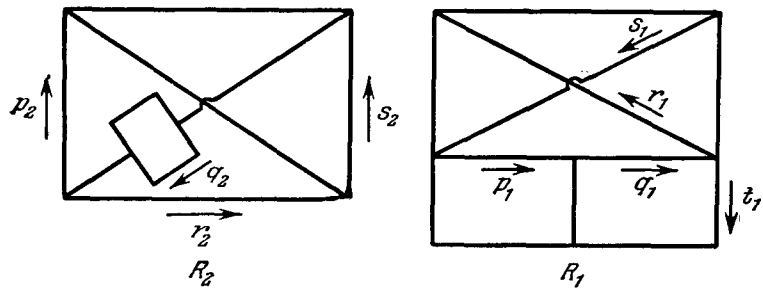


Рис. 5.21.

Если обозначить для цепей R_1 и R_2 соответственно через E_1, E_2 Z_1, Z_2, I_1, I_2 матрицы, которые в примерах 1 и 2 обозначались как E', Z', I', то для цепи R_1+R_2 получим уравнения

$$E_1 = +Z_1 I_1,$$
$$E_2 = +Z_2 I_2.$$

Обозначив через E, Z, I матрицы

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

мы можем написать уравнения (20) в виде

$$E = ZI.$$

Соединим совершенно произвольным образом цепи R_1 и R_2 и образуем из них более сложную цепь R, например, как показано на рис. 5.22.

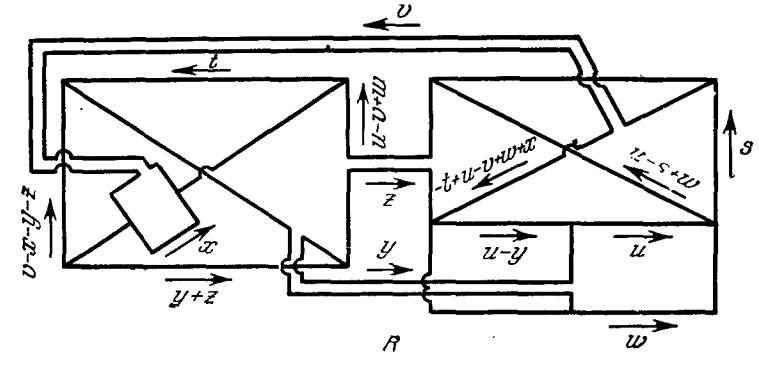


Рис. 5.22.

Выберем в цепи R независимые токи совершенно произвольно, однако соблюдая правило о том, чтобы, разорвав ветви, по которым текут эти токи, мы полностью обесточивали цепь. Число независимых токов нетрудно опре-

делить. Одна только цепь R_1 требует 5 таких токов, цепь R_2—4 тока. Следовательно, цепь R_1+R_2 будет иметь их 9. При электрическом соединении обеих цепей получим суммарное количество ветвей и узлов, но число простейших цепей сократится до 1. Поэтому для объединенной цепи потребуется $9-1=8$ независимых токов. Пусть s, t, u, v, w, x, y, z — независимые токи, образующие элементы матрицы I'. Матрица I образована токами p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, p_2, q_2, r_2, s_2. Вычисление последних токов как функций первых дает матрицу связи C для цепи R, определяемую равенством $I=CI'$:

$$\begin{aligned}
p_1 &= +u - y\\
q_1 &= +u\\
r_1 &= -s + u + w\\
s_1 &= -t + u - v + w + x\\
t_1 &= -w\\
p_2 &= +v - x - y - z\\
q_2 &= -x\\
r_2 &= +y + z\\
s_2 &= +u - v + w
\end{aligned}
\qquad C=\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}.$$

Получаем $E'=\tilde{C}E$ и $Z'=\tilde{C}ZC$. Искомая система уравнений будет

$$E'=Z'I'.$$

Для вычисления удобно воспользоваться частной формой записи матриц:

$$I=\begin{bmatrix} I_1\\ I_2\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} E_1\\ E_2\end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix} Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{bmatrix}$$

и матрицы C в виде $C=\begin{bmatrix} C_1\\ C_2\end{bmatrix}$, где C_1 и C_2 обозначают матрицы

$$C_1=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Мы получим

$$Z'=[\tilde{C}_1\tilde{C}_2]\begin{bmatrix} Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\tilde{C}_1Z_1C_1+\tilde{C}_2Z_2C_2,$$

$$E'=[\tilde{C}_1\tilde{C}_2]\begin{bmatrix} E_1\\ E_2\end{bmatrix}=\tilde{C}_1E_1+\tilde{C}_2E_2.$$

Используя результаты расчетов цепей R_1 и R_2, можно найти искомые уравнения задачи.

5.4.4. Соединение цепей посредством магнитопроводов. Мы уже видели, что наложение дополнительных условий равенства нескольких токов уменьшает число составляющих вектора тока при соединении цепей. Это находит свое отражение в структуре матрицы связи, характеризующей объединенную цепь. Аналогично предыдущему дополнительные связи между токами могут быть обусловлены введением в схему магнитопроводов с очень малым магнитным сопротивлением. Действительно, пусть a, b, ... — несколько ветвей, состоящих из катушек, надетых на магнитопровод (рис. 5.23).

Магнитодвижущая сила M равна

$$M = n_a i^a + n_b i^b + \ldots,$$

где через n_a, n_b, ... обозначено число витков катушек a, b, ... Если магнитное сопротивление очень мало, то между токами ветвей i^a, i^b, ... имеет место следующая дополнительная связь:

$$n_a i^a + n_b i^b + \ldots = 0. \quad (*)$$

Заменим i^a, i^b, ... их выражениями через независимые токи i^p, i^q, ..., текущие в данной цепи, вначале без учета магнитной связи. С учетом (*) получим уравнение, позволяющее исключить один из токов. Всего будет исключено столько токов, сколько имеется независимых магнитных цепей. Т. е., как и в п. 5.4.3, произойдет уменьшение числа составляющих вектора тока. Это уменьшение может быть учтено введением новой матрицы C', определяемой равенством

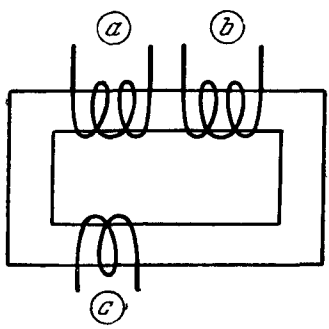


Рис. 5.23.

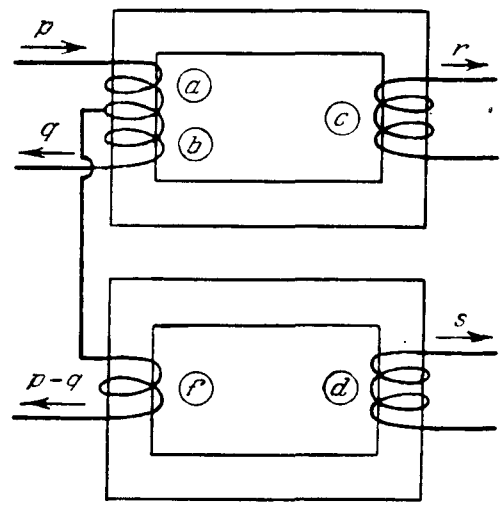


Рис. 5.24.

$$I' = C' I'',$$

где через I' обозначен вектор тока с составляющими i^p, i^q, ..., а через I'' — вектор тока после уменьшения числа составляющих. В зависимости от токов i^p, i^q, ..., которые требуется вычислить, отберем составляющие, подлежащие исключению. Приводимый ниже пример поясняет эту мысль.

Рассмотрим трансформатор Скотта (рис. 5.24). Он служит для преобразования трехфазных токов в двухфазные, и наоборот.

а) Вначале не учитываем магнитные цепи:

$$\begin{array}{l} a = p \\ b = \quad q \\ c = \quad r \\ d = \quad s \\ f = p - q \end{array} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

б) Вводим магнитные цепи. Это приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} n_a i^a + n_b i^b + n_c i^c &= 0, \\ n_d i^d + n_f i^f &= 0. \end{aligned}$$

Заменяя i^a, i^b, i^c, i^d, i^f их выражениями через i^p, i^q, i^r, i^s, получаем

$$\begin{aligned} n_a i^p + n_b i^q + n_c i^r &= 0, \\ n_f i^p - n_f i^q + n_d i^s &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Если i^p, i^q — составляющие, которые мы хотим оставить, то исключим i^r и i^s. Получим систему

$$\begin{aligned} i^p &= i^p \\ i^q &= i^q \\ i^r &= -\frac{n_a}{n_c} i^p - \frac{n_b}{n_c} i^q \\ i^s &= -\frac{n_f}{n_d} i^p + \frac{n_f}{n_d} i^q. \end{aligned}$$

Запишем ее в виде $I' = C'I''$, обозначив через I'', C', I' матрицы

$$I'' = \begin{bmatrix} i^p \\ i^q \end{bmatrix}, \quad I' = \begin{bmatrix} i^p \\ i^q \\ i^r \\ i^s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{n_a}{n_c} & -\frac{n_b}{n_c} \\ -\frac{n_f}{n_d} & \frac{n_f}{n_d} \end{bmatrix}.$$

Если Z и E представляют собой соответственно матрицы тензора сопротивлений и вектора напряжений в пространстве $\mathscr{B}$, то искомое уравнение будет

$$E'' = Z''I''$$

при

$$Z'' = (\widetilde{CC'})\, Z\, (CC'), \quad E'' = (\widetilde{CC'})\, E.$$

Если бы нам требовалось узнать составляющие i^r и i^s, то уравнения (21), решенные относительно i^p и i^q, дали бы систему

$$\begin{aligned} i^p &= -\frac{n_c}{n_a + n_b} i^r - \frac{n_b n_d}{(n_a + n_b) n_f} i^s \\ i^q &= -\frac{n_c}{n_a + n_b} i^r + \frac{n_a n_d}{(n_a + n_b) n_f} i^s \\ i^r &= i^r \\ i^s &= i^s \end{aligned}$$

и матрица C' приняла бы вид

$$C_1' = \begin{bmatrix} -\frac{n_c}{n_a + n_b} & -\frac{n_b n_d}{(n_a + n_b) n_f} \\ -\frac{n_c}{n_a + n_b} & \frac{n_a n_d}{(n_a + n_b) n_f} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение, к которому мы приходим, на этот раз будет

$$\begin{bmatrix} i^r \\ i^s \end{bmatrix} = [Z'']^{-1}[E'']$$

при

$$Z'' = (\widetilde{CC_1'})\, Z\, (CC_1'), \quad E'' = (\widetilde{CC_1'})\, E.$$

Замечание. При применении предыдущих формул необходимо помнить, что транспонированная матрица произведения двух матриц равна произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке:

$$(\widetilde{\alpha\beta}) = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}.$$

5.4.5. Анализ эквивалентных цепей. Дан двухполюсник, т. е. цепь, в которой различают входной и выходной зажимы. Требуется найти другой двухполюсник, имеющий при всех частотах приложенного к зажимам напряжения то же сопротивление, что и данный, т. е. характеристики обоих двухполюсников должны быть одинаковы. Это представляет некоторый практический интерес в случае, когда желательно заменить одну схему другой в целях упрощения или уменьшения стоимости производства.

Если при рассмотрении цепи принять за вспомогательные неизвестные контурные токи, то уравнения режима будут

$$[E] = [Z]\,[I].$$

Составляющие тензора, представленные элементами матрицы $[Z]$, будут

$$Z_{kl} = R_{kl} + j\omega L_{kl} + \frac{1}{j\omega} S_{kl} \quad \left(S_{kl} = \frac{1}{C_{kl}}\right),$$

так как имеются в виду только стационарные режимы. Эти составляющие будут либо собственными сопротивлениями, либо сопротивлениями связи при обходе рассматриваемого контура.

Матрица $[Z]$ может быть рассмотрена как сумма трех слагаемых:

$$[Z] = [R] + j\omega\,[L] + \frac{1}{j\omega}\,[S].$$

Матрицы $[R]$, $[L]$, $[S]$ являются соответственно тензорами сопротивлений, индуктивностей и величин, обратных емкостям (эластанцев).

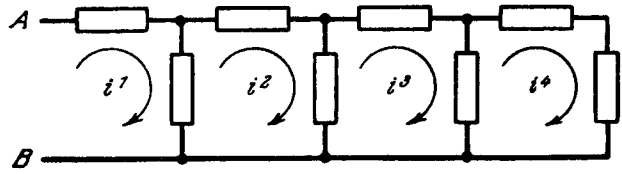


Рис. 5.25.

Рассмотрим подробнее случай двухполюсника, образованного из n пассивных контуров, соединенных цепочкой (рис. 5.25). Выберем в качестве вспомогательных неизвестных контурные токи, указанные на рисунке. Заменим этот двухполюсник другим той же конструкции (рис. 5.26). Составляющие векторов тока обоих двухполюсников связаны линейными соотношениями.

Так как мы хотим, чтобы одному и тому же напряжению, приложенному между A и B, соответствовал один и тот же ток (условие необходимое,

чтобы двухполюсники были эквивалентны), то возможны лишь следующие линейные соотношения:

$$\begin{aligned} i^1 &= i'^1, \\ i^2 &= \alpha_{21} i'^1 + \alpha_{22} i'^2 + \ldots + \alpha_{2n} i'^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i^n &= \alpha_{n1} i'^1 + \alpha_{n2} i'^2 + \ldots + \alpha_{nn} i'^n, \end{aligned}$$

или, сокращенно,

$$[I] = [\alpha]\,[I'].$$

Следовательно,

$$[Z'] = [\tilde{\alpha}]\,[Z]\,[\alpha].$$

Это выражение разлагается на три следующих:

$$[R'] = [\tilde{\alpha}]\,[R]\,[\alpha],$$

$$[L'] = [\tilde{\alpha}]\,[L]\,[\alpha],$$

$$[S'] = [\tilde{\alpha}]\,[S]\,[\alpha].$$

Матрица α не определена. Ее составляющие полностью произвольны, кроме составляющих первой строки, которые обязательно равны

$$1 \quad 0 \quad 0 \ldots 0.$$

Практическая ценность задачи заключается в возможности искусным подбором коэффициентов α_{kl} аннулировать как можно большее число членов

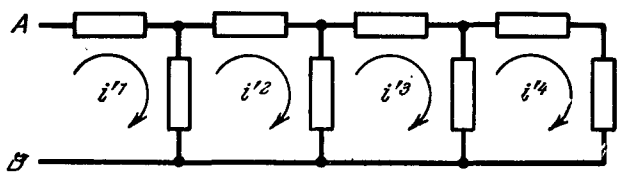


Рис. 5.26.

матриц R, L, S таким образом, чтобы заменить сложный двухполюсник простым.

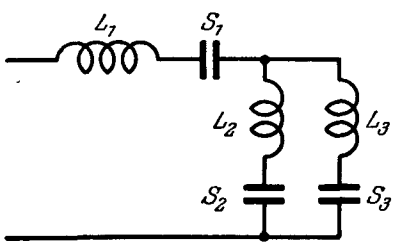


Рис. 5.27.

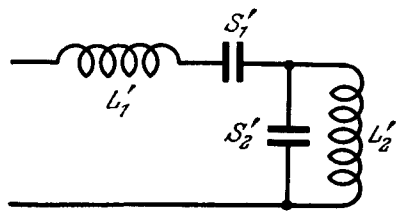


Рис. 5.28.

Пример. Дан двухполюсник, изображенный на рис. 5.27. Мы хотим заменить его другим, эквивалентным двухполюсником, представленным на рис. 5.28. Имеем

$$\begin{aligned} i^1 &= i'^1 \\ i^2 &= \alpha_{21} i'^1 + \alpha_{22} i'^2. \end{aligned}$$

Матрица α в данном случае будет

$$[\alpha]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [\tilde{\alpha}]=\begin{bmatrix}1 & \alpha_{21}\\ 0 & \alpha_{22}\end{bmatrix}.$$

Матрицы L, S первого двухполюсника и L', S' второго равны

$$[L]=\begin{bmatrix}L_1+L_2 & L_2\\ L_2 & L_2+L_3\end{bmatrix}, \quad [S]=\begin{bmatrix}S_1+S_2 & S_2\\ S_2 & S_2+S_3\end{bmatrix},$$

$$[L']=\begin{bmatrix}L_1' & 0\\ 0 & L_2'\end{bmatrix}, \quad [S']=\begin{bmatrix}S_1'+S_2' & S_2'\\ S_2' & S_2'\end{bmatrix}.$$

Мы должны определить коэффициенты α_{12} и α_{22} таким образом, чтобы удовлетворялись равенства

$$[L']=[\tilde{\alpha}][L][\alpha], \quad [S']=[\tilde{\alpha}][S][\alpha],$$

т. е., подробнее, равенства

$$\begin{bmatrix}L_1' & 0\\ 0 & L_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_1+L_2+2\alpha_{21}L_2+\alpha_{21}^2(L_2+L_3) & \alpha_{22}L_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(L_2+L_3)\\ \alpha_{22}L_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(L_2+L_3) & \alpha_{22}^2(L_2+L_3)\end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}S_1'+S_2' & S_2'\\ S_2' & S_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1+S_2+2\alpha_{21}S_2+\alpha_{21}^2(S_2+S_3) & \alpha_{22}S_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(S_2+S_3)\\ \alpha_{22}S_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(S_2+S_3) & \alpha_{22}^2(S_2+S_3)\end{bmatrix}.$$

Следовательно, α_{21} и α_{22} должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}&\alpha_{22}L_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(L_2+L_3)=0,\\ &\alpha_{22}S_2+\alpha_{21}\alpha_{22}(S_2+S_3)=\alpha_{22}^2(S_2+S_3).\end{aligned} \tag{23}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_{21}=-\frac{L_2}{L_2+L_3}, \quad \alpha_{22}=\frac{S_2(L_2+L_3)-L_2(S_2+S_3)}{(S_2+S_3)(L_2+L_3)}.$$

Подставляя эти значения в систему (22), легко вычислить L_1', L_2', S_1', S_2'.

Для конкретности обратимся к следующим численным значениям (L в *мкгн*, S в *мкф*$^{-1}$):

$$L_1=3, \quad L_2=1, \quad L_3=2, \quad S_1=2, \quad S_2=1, \quad S_3=0{,}5.$$

Находим

$$\alpha_{21}=-\frac{1}{3}, \quad \alpha_{22}=\frac{1}{3}.$$

Система (22) дает

$$L_1'=\frac{11}{3}, \quad L_2'=\frac{1}{3}, \quad S_1'=\frac{7}{3}, \quad S_2'=\frac{0{,}5}{3}.$$

Для проверки рассчитаем сопротивления обоих двухполюсников (рис. 5.27 и 5.28). Непосредственным вычислением находим одно и то же сопротивление

$$\frac{j}{\omega}\cdot\frac{11\omega^4-13\omega^2+3{,}5}{3\omega^2-1{,}5}.$$

Замечание. В цепи, содержащей n контуров, можно уменьшить количество элементов (индуктивностей, емкостей или сопротивлений) на $n(n-1)$ единиц. Это и было выполнено в предыдущем примере. Однако может случиться, что уравнения системы [аналогичной системе (22)], которым должны удовлетворять α_{kl}, окажутся несовместными. Кроме того, физически недопустимо рассматривать случай, когда они приводят к отрицательным значениям S, L или R.

5.4.6. Цепи с внешним питанием. Дана цепь, изображенная на рис. 5.29. Она не является простейшей, поскольку питается извне. К узлам этой цепи текут известные токи

$$J^r,\ J^s,\ J^t,\ \ldots,\ J^N$$

(N обозначает количество узлов). Эти N токов не независимы; в силу первого закона Кирхгофа мы можем написать

$$J^N = -(J^r + J^s + J^t + \ldots + J^{N-1}).$$

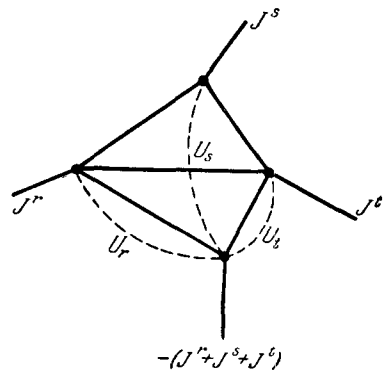


Рис. 5.29.

Следовательно, число независимых внешних токов равно $N-1$. Можно выразить B токов ветвей i^a, i^b, ... как функции M контурных токов i^p, i^q, ... и $N-1$ внешних токов J^r, J^s, ...

Матрица связи C определяется соотношением

$$[I] = [C][I'],$$

где векторы $[I]$ и $[I']$ имеют составляющие

$$[I] = \left.\begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\right\} (B), \qquad [I'] = \left.\begin{bmatrix} i^p \\ i^q \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline J^r \\ J^s \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}\right\} \begin{matrix} (M) \\ \\ \\ \\ \\ (N-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ \hline I'_2 \end{bmatrix}.$$

В силу соотношения $B = M + N - 1$ матрица связи — квадратная. Матричное уравнение режима в пространстве ветвей по-прежнему будет

$$[Z][I] + [U] = [E].$$

Матрицы Z, I, U, E те же самые, которые мы определили в п. 5.4.2.

Матрица связи C позволяет перейти от пространства ветвей к другому пространству, имеющему то же количество измерений. Формулы преобразования по-прежнему будут

$$[Z'] = [\tilde{C}][Z][C], \qquad [E'] = [\tilde{C}][E].$$

Ввиду наличия $N-1$ неизвестных разностей потенциалов U_r, U_s, ..., созданных прохождением внешних токов, вектор разности потенциалов

преобразуется не в нулевой вектор, а в вектор, равный

$$[U'] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdots \\ U_r \\ U_s \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\cdot\\\cdot\\\cdots\end{matrix}}\right\} (M) \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}U_r\\U_s\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix}}\right\} (N-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V' \end{bmatrix}.$$

Вид уравнения режима цепи не изменяется при преобразовании:

$$[Z'][I'] + [U'] = [E'].$$

Данное уравнение представляет собой систему из B уравнений с B неизвестными. Эти неизвестные суть M контурных токов i^p, i^q, ... и $N-1$ разностей потенциалов U_r, U_s, ... Для решения системы удобно представить ее в виде двух систем, используя специальную форму вектора $[U']$:

$$\begin{matrix} M \\ N-1 \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} \underbrace{Z_1'}_{M} & \underbrace{Z_2'}_{N-1} \\ Z_3' & Z_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \end{bmatrix}. \right.$$

Отсюда получаем первую систему

$$[E_1'] = [Z_1'][I_1'] + [Z_2'][I_2'],$$

которую легко решить относительно неизвестных $[I_1']$:

$$[I_1'] = [Z_1']^{-1}[E_1'] - [Z_1']^{-1}[Z_2'][I_2'],$$

и вторую систему

$$[V'] = [E_2'] - [Z_3'][I_1'] - [Z_4'][I_2'],$$

в правую часть которой надо ввести выражение для $[I_1']$.

Пример. Рассмотрим распределительную линию с тремя проводами I, II, III (рис. 5.30). Между каждой парой этих проводов включен двигатель.

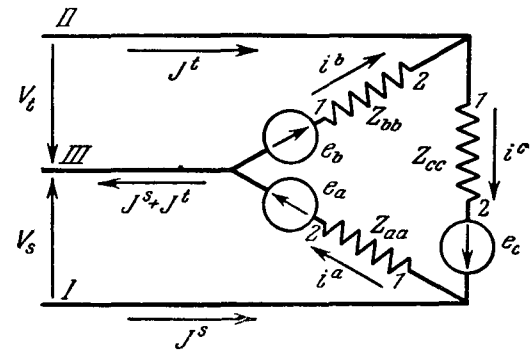


Рис. 5.30.

Электродвижущие силы и собственные сопротивления обозначены соответственно через e_a, e_b, e_c, Z_{aa}, Z_{bb}, Z_{cc}. Все сопротивления соединены между

собой, и по конструкции поток аддитивен для тока, проходящего в направлении abc. Пусть Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{bc} — сопротивления связи. По проводам I, II, III приходят известные нам токи: J^s, J^t, $-(J^s+J^t)$.

Имеем следующие численные значения:

$$\begin{aligned} &Z_{aa}=1+2j, \quad Z_{bb}=2+j, \quad Z_{cc}=1-j && \text{(в омах)},\\ &Z_{ab}=\quad j, \quad Z_{ac}=\quad 2j, \quad Z_{bc}=\quad j && \text{(в омах)},\\ &e_a=1 \quad , \quad e_b=1+j, \quad e_c=1-j && \text{(в вольтах)},\\ &J^s=2+2j, \quad J^t=1-j && \text{(в амперах)}. \end{aligned}$$

Комплексное значение показывает, что, например, сопротивление Z_{aa} состоит из активного сопротивления в 1 ом и из индуктивного сопротивления ωL в 2 ома; кроме того, e_b имеет амплитуду в $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ вольта и опережает e_a по фазе на 45°. Аналогично e_c имеет ту же амплитуду, что и e_b, но отстает от e_a по фазе на 45°.

Возьмем, например, i^a в качестве контурного тока и выразим i^a, i^b, i^c как функции i^a и внешних токов J^s, J^t:

$$\begin{aligned} i^a &= i^a,\\ i^b &= i^a - J^s - J^t,\\ i^c &= i^a - J^s. \end{aligned}$$

Этим определяется матрица связи $[C]$ и ее транспонированная

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{C}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$[Z']=[\tilde{C}][Z][C]=\begin{bmatrix} 4+10j & -3-5j & -2-3j\\ -3-5j & 3+2j & 2+2j\\ -2-3j & 2+2j & 2+j \end{bmatrix},$$

$$[E']=[\tilde{C}][E]=\begin{bmatrix} 2\\ -2\\ -1-j \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\left[\begin{array}{c|cc} 4+10j & -3-5j & -2-3j\\ \hline -3-5j & 3+2j & 2+2j\\ -2-3j & 2+2j & 2+j \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} i^a\\ \hline 2+2j\\ 1-j \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c} 0\\ \hline V_s\\ V_t \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 3\\ \hline -2\\ -1-j \end{array}\right].$$

Это уравнение можно представить в виде системы двух уравнений. Первое уравнение

$$(4+10j)\,i^a+[-3-5j \quad -2-3j]\begin{bmatrix} 2+2j\\ 1-j \end{bmatrix}=3,$$

откуда определяем численное значение i^a, а затем i^b и i^c:

$$\begin{aligned} i^a &= \quad 1{,}6+0{,}24j,\\ i^b &= -1{,}4-0{,}76j,\\ i^c &= -0{,}4-1{,}76j. \end{aligned}$$

Второе уравнение

$$\begin{bmatrix} -3-5j \\ -2-3j \end{bmatrix} i^a + \begin{bmatrix} 3+2j & 2+2j \\ 2+2j & 2+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+2j \\ 1-j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_s \\ V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1-j \end{bmatrix},$$

откуда находим численное значение V_s и V_t:

$$V_s = -4{,}4 \quad -1{,}28j,$$
$$V_t = -1{,}52 - 2{,}72j.$$

Далее, легко проверить, что

$$Z_{aa}i^a + Z_{bb}i^b + Z_{cc}i^c + Z_{ab}i^a + Z_{ab}i^b + Z_{ac}i^a + Z_{ac}i^c + \\ + Z_{bc}i^b + Z_{bc}i^c - e_a - e_b - e_c = 0,$$
$$V_s = e_a - Z_{aa}i^a - Z_{ab}i^b - Z_{ac}i^c, \quad -V_t = e_b - Z_{bb}i^b - Z_{ab}i^a - Z_{bc}i^c.$$

5.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

5.5.1. Введение. Тензорное исчисление позволяет значительно упростить изучение кристаллических сред (в большинстве своем анизотропных), определяя для кристаллов данного типа независимые постоянные, знания которых достаточно для получения всех необходимых данных о свойствах изучаемого явления. В частности, изучение пьезоэлектрических свойств кварца требует использования громоздкого математического аппарата. Методы же тензорной алгебры значительно упрощают исследование. Исторически тензорное исчисление, которое получило сейчас широкое развитие и проникло во все отрасли физики, было создано для изучения свойств анизотропных сред.

В дальнейшем мы будем рассматривать метрическое пространство, отнесенное к прямоугольной системе координат. Вследствие этого мы не будем делать различия между ковариантностью и контравариантностью, однако индексы будем по-прежнему размещать вверху и внизу, чтобы можно было использовать правило суммирования, принятое в начале главы.

Разъясним смысл сказанного на примере.

5.5.2. Диэлектрические свойства кристалла. Сравним соотношения, связывающие напряженность электрического поля $\boldsymbol{h}$ и электромагнитную индукцию $\boldsymbol{d}$ в некоторой точке, для изотропного и анизотропного тел.

В первом случае оба вектора $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{d}$ имеют одинаковое направление, и связывающая их диэлектрическая проницаемость ε представляет собой скаляр:

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon \boldsymbol{h}.$$

Для анизотропной среды связь между этими векторами гораздо сложнее. Векторы $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{h}$ имеют уже различные направления, их составляющие связаны линейными соотношениями, заменяющими пропорциональность, имевшую место в первом случае. Здесь мы получим три равенства (трехмерное пространство):

$$d_i = \sum_j \varepsilon_i^j h_j \quad (i = 1, 2, 3).$$

Эти формулы (свернутое произведение), определяющие вектор, показывают, что (ε_i^j) есть тензор второй валентности. Так как в декартовом пространстве понятие вариантности не имеет смысла, то тензор (ε_i^j) не является смешанным. Этот симметричный тензор есть тензор диэлектрической проницаемости.

Он имеет шесть существенных компонент, знание которых необходимо для установления диэлектрических свойств кристалла. Действительно, если нам требуется найти значение диэлектрической проницаемости в направлении, определяемом углом θ, который оно составляет с осью 3, и углом φ, который его проекция на плоскость $1-2$ образует с осью 1 (сферические координаты), то достаточно осуществить два последовательных поворота на углы φ и θ, приводящие к совпадению оси 1 с этим направлением.

Поворот против часовой стрелки на угол φ вокруг оси 3 и последующий поворот по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{2}-\theta$ вокруг нового положения оси 2 определяется матрицей преобразования координат, которая является произведением двух матриц, описывающих оба поворота, а именно:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

В определенной таким образом новой системе координат тензор диэлектрической проницаемости, представленный матрицей $\bar{\varepsilon}$, задается формулой [1])

$$\bar{\varepsilon} = \alpha'\varepsilon\tilde{\alpha}'.$$

Компонента $\bar{\varepsilon}_1$ этого тензора есть искомое значение диэлектрической проницаемости в требуемом направлении.

Вследствие имеющейся в кристалле симметрии число независимых компонент тензора (ε_l^j) уменьшается.

Действительно, рассмотрим, например, кристалл с осью симметрии n-го порядка. Если его повернуть на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг этой оси, то в новом положении кристалл ничем не отличается от кристалла, находящегося в прежнем положении. Если α — матрица, определяющая этот поворот, то

$$\varepsilon = \alpha\varepsilon\tilde{\alpha}.$$

Равенство матриц ε, входящих в обе части этого соотношения, накладывает на компоненты ε_l^j несколько условий, вследствие чего уменьшится число независимых компонент. В частности, нередко встречающееся условие $\varepsilon_l^j = -\varepsilon_l^j$ приводит к результату:

$$\varepsilon_l^j = 0.$$

5.5.3. Матрицы преобразования для некоторых часто встречающихся систем координат. Рассмотрим матрицы преобразования прямоугольных координат, используемые во всех тех случаях симметрии, которые могут встретиться при изучении кристаллов.

---

[1]) Здесь матрица α' определяет новую систему координат как функцию старой. Следовательно, она является обратной по отношению к матрице преобразования координат σ из п. 4.1.21: $\alpha' = \sigma^{-1}$. Более того, она представляет собой ортогональную матрицу, так как $(\alpha')^{-1} = \tilde{\alpha}$.

а) Поворот на угол $+\varphi$ (в направлении против часовой стрелки) вокруг оси 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix};$$

вокруг оси 2:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix};$$

вокруг оси 3:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Можно сразу же получить матрицы, соответствующие поворотам на углы π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ вокруг каждой из осей.

Рассмотрим поворот на угол φ вокруг оси 3 и последующий поворот на угол $\frac{\pi}{2}-\theta$ вокруг нового положения (после первого поворота) оси 2. Такое преобразование приводит к совпадению новой оси 1 с направлением, определяемым углами φ, θ (сферические координаты). Матрица этого преобразования обозначается α':

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

б) Симметрия по отношению к плоскостям 1—2, 2—3, 1—3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

в) Симметрия по отношению к началу координат:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Возьмем кристалл с осью симметрии четвертого порядка (тетрагональный). При повороте на 90° вокруг оси 3 матрица преобразования имеет вид

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Примем ось симметрии за ось 3. Если повернуть кристалл вокруг этой оси на 90°, то в физических свойствах кристалла не произойдет никаких изменений, а следовательно, такой поворот не изменит тензора ε, откуда следует, что

$$\varepsilon = \alpha\varepsilon\tilde{\alpha}.$$

Представляя это равенство в развернутом виде, получим

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^3 \\ -\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^1 & -\varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3^2 & -\varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix},$$

что, в силу симметрии матрицы, приводит к условиям:

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^1 = \varepsilon_3^1 = \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = \varepsilon_3^2 = 0, \quad \varepsilon_1^1 = \varepsilon_2^2.$$

Видим, что имеются только две не равные нулю независимые компоненты ε_1^1 и ε_3^3.

Кристаллы тетрагонального класса обладают и другими видами симметрии, которые в рассматриваемом случае не вносят никаких дополнительных упрощений. Итак, если ось симметрии четвертого порядка тетрагонального кристалла принимается за ось 3, то тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^3 \end{pmatrix}.$$

Диэлектрические свойства тетрагонального кристалла будут известны, если будут определены экспериментально величины ε_1^1 и ε_3^3, представляющие собой значения диэлектрической проницаемости в направлениях, соответственно перпендикулярном и параллельном оси симметрии кристалла.

Действительно, найдем для этого кристалла диэлектрическую проницаемость в направлении, определяемом углами θ, φ. Она будет равна $\bar{\varepsilon}_1^1$, где тензор $\bar{\varepsilon}$ определяется равенством

$$\bar{\varepsilon} = \alpha' \varepsilon \tilde{\alpha}'.$$

Непосредственное вычисление дает

$$\bar{\varepsilon}_1^1 = \varepsilon_1^1 \sin^2\theta + \varepsilon_3^3 \cos^2\theta.$$

Эта величина, как было очевидно и заранее, не зависит от угла φ, так как ось 1 является произвольной осью в плоскости, перпендикулярной оси 3, и, следовательно, угол φ также является произвольным.

Механические свойства кристалла

Применим принципы, изложенные выше в связи с изучением диэлектрических свойств кристаллов, к исследованию напряжений и деформаций среды, а также их связи с электрической поляризацией (т. е. с пьезоэлектричеством).

5.5.4. Напряжение. Вырежем мысленно в твердом теле небольшой тетраэдр, три грани которого параллельны координатным плоскостям. Установим условия равновесия этого объема.

Обозначим через $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$ напряжения (т. е. силы, приложенные к единице поверхности) на гранях тетраэдра, параллельных координатным плоскостям, а через $\boldsymbol{T}$ — напряжение на четвертой грани. Будем считать напряжения положительными, если они направлены от плоскостей тетраэдра

наружу. Если величины ds_1, ds_2, ds_3, ds представляют собой соответственно площади граней тетраэдра, то одно из условий равновесия выражается векторным равенством

$$\boldsymbol{T}\,ds = \boldsymbol{T}_1\,ds_1 + \boldsymbol{T}_2\,ds_2 + \boldsymbol{T}_3\,ds_3.$$

Если обозначить через n^1, n^2, n^3 составляющие единичного вектора внешней нормали к плоскости четвертой грани тетраэдра, то

$$ds_1 = n^1\,ds, \quad ds_2 = n^2\,ds, \quad ds_3 = n^3\,ds.$$

Если компоненты векторов $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$, $\boldsymbol{T}$ по осям 1, 2, 3 обозначить соответственно через t_{11}, t_{21}, t_{31}; t_{12}, t_{22}, t_{32}; t_{13}, t_{23}, t_{33}; t_1, t_2, t_3, то указанное векторное условие равновесия получит следующую скалярную форму:

$$t_j = \sum_i t_{ji} n^i.$$

Эти соотношения определяют тензор t с общей компонентой t_{ji}, который называется тензором напряжений.

Второе условие равновесия тетраэдра состоит в равенстве нулю главного момента приложенных к нему внешних сил. Использование этого условия приводит к равенству тангенциальных составляющих напряжений:

$$t_{12} = t_{21}, \quad t_{13} = t_{31}, \quad t_{23} = t_{32}.$$

Следовательно, тензор t симметричен и имеет шесть независимых компонент.

5.5.5. Деформации. Рассмотрим в твердом теле малый отрезок ds, проекции концов которого на координатную ось l обозначим через x^l и $x^l + dx^l$. Деформируем каким-либо способом твердое тело. Тогда отрезок ds перейдет в dS; начальная точка этого отрезка переместится на величину u^l; таким образом, после деформации координаты концов отрезка будут

$$x^l + u^l, \quad x^l + dx^l + u^l + du^l.$$

Величина u^l является непрерывной функцией координат x^l. Поэтому можно написать

$$du^l = \sum_k \frac{\partial u^l}{\partial x^k}\,dx^k,$$

откуда

$$dS^2 - ds^2 = \sum_{ik} s_{ik}\,dx^i\,dx^k,$$

где обозначено:

$$s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right) + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial u^j}{\partial x^k}.$$

В случае малых деформаций можно пренебречь членами второго порядка малости; тогда

$$s_{ii} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i}, \quad s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right).$$

Величины s_{ik} образуют тензор s с общей компонентой s_{ik}, который называется тензором деформации. Тензор деформации также симметричен, так как $s_{ik} = s_{ki}$, и имеет шесть независимых существенных компонент.

Можно показать, что компоненты, расположенные по главной диагонали s_{ii}, представляют собой деформации, параллельные оси i. Иными словами, s_{ii} — это растяжение вдоль оси i при положительных s_{ii} или сжатие при отрицательных s_{ii}. Остальные компоненты s_{ik} представляют собой изме-

нение, которое претерпевает при деформации угол, стороны которого были первоначально параллельны осям j и k.

Известно, что тензору можно придать диагональную форму, приняв за оси координат собственные направления представляющей его матрицы. В случае симметричной матрицы собственные направления ортогональны. Если указанным образом преобразовать тензор деформации, то он примет вид

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}.$$

Это не означает, что тензор деформации зависит только от трех не равных нулю компонент S_1, S_2, S_3, так как остальные три компоненты первоначального тензора были использованы для определения направлений собственных осей при преобразовании тензора к диагональной форме.

Шаровидный элемент твердого тела, имеющий радиус ρ, становится после деформации эллипсоидом с тремя неравными осями. Направления этих осей совпадают с собственными направлениями матрицы, а их длины равны

$$2\rho(1+S_1),\quad 2\rho(1+S_2),\quad 2\rho(1+S_3).$$

5.5.6. Тепловое расширение. Таким же образом можно рассматривать деформацию, возникающую вследствие теплового расширения. Если температура твердого тела изменяется от τ_0 до $\tau_0+\tau$, то вектор с началом в точке O и с проекциями l_i претерпит растяжение, в результате которого его проекции изменятся на величины Δl_i.

Если a — тензор теплового расширения, то

$$\Delta l_i = \tau \sum_j a_{ij} l^j.$$

Этому симметричному тензору можно придать диагональную форму

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Шар радиуса ρ станет после расширения эллипсоидом, оси которого совпадают с собственными направлениями матрицы; длины осей равны

$$2\rho(1+A_1)\tau,\quad 2\rho(1+A_2)\tau,\quad 2\rho(1+A_3)\tau.$$

Коэффициент расширения в направлении, задаваемом углами θ, φ, будет представлять собой компоненту $\bar{a}_1^1$ тензора $\bar{a}$, который определяется равенством

$$\bar{a} = \alpha' a \tilde{\alpha}'.$$

5.5.7. Обобщенный закон Гука. В одномерной среде (нить) закон Гука устанавливает зависимость между напряжением и деформацией:

$$t = ms.$$

Коэффициент пропорциональности m называется модулем упругости.

Для трехмерной среды (изотропной или неизотропной) эта зависимость в случае малых деформаций превращается в следующее тензорное соотношение:

$$t_{ij} = \sum_{kl} m_{ij}^{kl} S_{kl}, \tag{24}$$

где m — тензор четвертой валентности. Действительно, свертывание произведения этого тензора на тензор второй валентности s_{ij} приводит к тензору второй валентности t_{ij}. Тензор m_{ij}^{kl} называется тензором модулей упругости.

Так как тензоры t и s симметричны, то тензор m также симметричен по отношению к обеим парам своих индексов i, j и k, l. Следовательно, число его независимых компонент сократится с 81 до 36. Кроме того, поскольку в данном случае не различаются ковариантность и контравариантность (прямоугольные оси), то

$$m_{ij}^{kl} = m_{kl}^{ij},$$

что в самом общем случае сократит число независимых компонент до 21.

Систему (24) можно решить относительно величин s_{kl}, при этом получим

$$s_{kl} = \sum_{ij} c_{kl}^{ij} t_{ij}.$$

Тензор c, имеющий по тем же соображениям, что и тензор m, 21 компоненту, называется тензором коэффициентов упругости.

Наличие симметрии в кристалле значительно уменьшает число независимых компонент. При этом следует использовать метод, изложенный выше. Примем одну из осей симметрии за ось координат, осуществим надлежащий поворот, определяемый матрицей α, а затем приравняем элементы матрицы m_{ij}^{kl}, отнесенной к старой системе координат (до поворота), элементам матрицы m_{np}^{qr}, отнесенной к новой системе координат (после поворота). Это приведет нас к системе уравнений следующего вида:

$$m_{np}^{qr} = \sum_{ijkl} \alpha_n^i \alpha_p^j \beta_k^q \beta_l^r m_{ij}^{kl}.$$

Так как речь идет о прямоугольной системе координат, то между матрицами α и β существует соотношение

$$\beta = \alpha^{-1} = \tilde{\alpha}.$$

Пример. Рассмотрим кубический кристалл, имеющий три взаимно перпендикулярные оси симметрии четвертого порядка. Примем за ось 3 одну из осей симметрии, а за оси 2 и 1 — две другие.

Матрица, определяющая поворот на 90° вокруг оси 3, равна

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \alpha^{-1} = \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отличные от нуля члены:

$$\alpha_2^1 = -1, \quad \alpha_1^2 = 1, \quad \alpha_3^3 = 1, \quad \beta_2^1 = 1, \quad \beta_1^2 = -1, \quad \beta_3^3 = 1.$$

Вследствие простоты матрицы α, которая содержит только по одному не равному нулю члену в каждой строке и в каждом столбце, знак суммы, имеющийся в общей формуле, исчезает.

Произведения, содержащие по одному разу α_2^1 или β_1^2, приводят к равенству компонент, имеющих одинаковую абсолютную величину и противоположные знаки; следовательно, эти компоненты равны нулю. Произведения, совсем не содержащие или содержащие по два раза α_2^1 или β_2^1, приводят к равенству соответствующих компонент. Например,

$$m_{11}^{11} = \alpha_1^2 \alpha_1^2 \beta_2^1 \beta_2^1 m_{22}^{22} = m_{22}^{22}.$$

Если произвести такой же расчет для поворотов на 90° вокруг двух других осей, то окажется, что не равны нулю только следующие составляющие:

$$m_{11}^{11} = m_{22}^{22} = m_{33}^{33},$$
$$m_{12}^{12} = m_{23}^{23} = m_{13}^{13},$$
$$m_{11}^{22} = m_{11}^{33} = m_{22}^{33}.$$

Отсюда следует, что для кристалла кубического типа тензор модулей упругости имеет только три независимые существенные компоненты.

5.5.8. Применение шестимерного пространства. Если речь идет о тензорах валентности выше второй, то формулы преобразования координат довольно сложны. Вычисление компонент тензора в этом случае требует большой затраты труда и времени. Что же касается тензоров второй валентности, то применение формулы

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha\varepsilon\tilde{\alpha}$$

весьма упрощает вычисления. Естественно стремление найти аналогичную формулу для тензоров четвертой валентности.

Тензоры t и s симметричны и имеют по шесть составляющих в трехмерном пространстве (пространство d). В шестимерном пространстве (пространство D) мы можем рассматривать эти тензоры как векторы с компонентами

$$T_1 = t_{11},\quad T_2 = t_{22},\quad T_3 = t_{33},\quad T_4 = t_{23},\quad T_5 = t_{13},\quad T_6 = t_{12},$$
$$S_1 = s_{11},\quad S_2 = s_{22},\quad S_3 = s_{33},\quad S_4 = s_{23},\quad S_5 = s_{13},\quad S_6 = s_{12}.$$

Тензор m станет в пространстве D симметричным тензором M второй валентности, имеющим не более чем 21 компоненту. Равенство (24) превратится в пространстве D в равенство

$$T_p = \sum_q M_p^q S_q.$$

Требуется решить задачу: какова должна быть матрица A преобразования координат в пространстве D, соответствующая матрице α преобразования координат в пространстве d.

Если мы сможем образовать матрицу A с помощью элементов матрицы α, то для преобразований в пространстве D получим формулу

$$\overline{M} = AM\tilde{A}.$$

Для того чтобы найти матрицу A, достаточно сравнить формулы

$$\bar{t} = \alpha t\tilde{\alpha} \quad \text{и} \quad \overline{T} = AT,$$

где t — тензор второй валентности, а T — вектор с шестью составляющими в пространстве D. Приравнивая соответствующие компоненты в левых и правых частях этих равенств, получим

$$A = \begin{bmatrix}
(\alpha_1^1)^2 & (\alpha_1^2)^2 & (\alpha_1^3)^2 & 2\alpha_1^2\alpha_1^3 & 2\alpha_1^3\alpha_1^1 & 2\alpha_1^1\alpha_1^2 \\
(\alpha_2^1)^2 & (\alpha_2^2)^2 & (\alpha_2^3)^2 & 2\alpha_2^2\alpha_2^3 & 2\alpha_2^3\alpha_2^1 & 2\alpha_2^1\alpha_2^2 \\
(\alpha_3^1)^2 & (\alpha_3^2)^2 & (\alpha_3^3)^2 & 2\alpha_3^2\alpha_3^3 & 2\alpha_3^3\alpha_3^1 & 2\alpha_3^1\alpha_3^2 \\
\alpha_2^1\alpha_3^1 & \alpha_2^2\alpha_3^2 & \alpha_2^3\alpha_3^3 & \alpha_2^2\alpha_3^3 + \alpha_2^3\alpha_3^2 & \alpha_2^3\alpha_3^1 + \alpha_2^1\alpha_3^3 & \alpha_2^1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^1 \\
\alpha_3^1\alpha_1^1 & \alpha_3^2\alpha_1^2 & \alpha_3^3\alpha_1^3 & \alpha_1^2\alpha_3^3 + \alpha_1^3\alpha_3^2 & \alpha_1^3\alpha_3^1 + \alpha_1^1\alpha_3^3 & \alpha_1^1\alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_3^1 \\
\alpha_1^1\alpha_2^1 & \alpha_1^2\alpha_2^2 & \alpha_1^3\alpha_2^3 & \alpha_1^2\alpha_2^3 + \alpha_1^3\alpha_2^2 & \alpha_1^3\alpha_2^1 + \alpha_1^1\alpha_2^3 & \alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^1
\end{bmatrix}.$$

Видим, что матрицу A легко получить, исходя из элементов матрицы α. Если разложить ее на четыре матрицы, имеющие по три строки и по три столбца

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

то:

1. Элемент матрицы A_1 представляет собой квадрат элемента, занимающего в матрице α такое же место.

2. Элемент матрицы A_2 является удвоенным произведением двух остальных элементов, стоящих в той же строке, что и соответствующий элемент матрицы α.

3. Элемент матрицы A_3 является произведением двух остальных элементов, стоящих в том же столбце, что и соответствующий элемент матрицы α.

4. Элемент матрицы A_4 представляет собой сумму попарных произведений взятых крест-накрест элементов, оставшихся после вычеркивания строки и столбца, в которые входит соответствующий элемент матрицы α.

Если преобразование системы координат, определяемое матрицей α, отвечает симметрии кристалла, то формула

$$M=AM\tilde{A} \tag{25}$$

позволяет уменьшить число независимых компонент.

Легко вернуться от обозначения M_p^q в пространстве D к обозначению m_{ij}^{kl} в пространстве d. Действительно, соотношения между индексами ij и p, kl и q дают возможность написать

$$11\sim 1,\quad 22\sim 2,\quad 33\sim 3,\quad 32\sim 4,\quad 31\sim 5,\quad 21\sim 6.$$

Пример. Для пояснения этого метода рассмотрим кубический кристалл и выберем те же оси, что и ранее (см. пример в п. 5.5.7).

Матрица α (поворот на 90° вокруг оси 3) в соответствии с правилами, перечисленными выше, дает для матрицы A:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Формула (25) приводит к равенству

$$\begin{bmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 & M_1^4 & M_1^5 & M_1^6 \\ M_2^1 & M_2^2 & M_2^3 & M_2^4 & M_2^5 & M_2^6 \\ M_3^1 & M_3^2 & M_3^3 & M_3^4 & M_3^5 & M_3^6 \\ M_4^1 & M_4^2 & M_4^3 & M_4^4 & M_4^5 & M_4^6 \\ M_5^1 & M_5^2 & M_5^3 & M_5^4 & M_5^5 & M_5^6 \\ M_6^1 & M_6^2 & M_6^3 & M_6^4 & M_6^5 & M_6^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2^2 & M_2^1 & M_2^3 & -M_2^5 & M_2^4 & -M_2^6 \\ M_1^2 & M_1^1 & M_1^3 & -M_1^5 & M_1^4 & -M_1^6 \\ M_3^2 & M_3^1 & M_3^3 & -M_3^5 & M_3^4 & -M_3^6 \\ -M_5^2 & -M_5^1 & -M_5^3 & M_5^5 & -M_5^4 & M_5^6 \\ M_4^2 & M_4^1 & M_4^3 & -M_4^5 & M_4^4 & -M_4^6 \\ -M_6^2 & -M_6^1 & -M_6^3 & M_6^5 & -M_6^4 & M_6^6 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем первое упрощение тензора M:

$$\begin{Vmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_1^1 & M_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^3 & M_1^3 & M_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_6^6 \end{Vmatrix}.$$

Заметим попутно, что этот тензор представляет собой в выбранной системе координат тензор модулей упругости для четырехугольного кристалла. Для этого класса кристаллов, если вернуться в пространство d, отличные от нуля компоненты тензора m равны

$$m_{11}^{11} = m_{22}^{22},\quad m_{11}^{22},\quad m_{11}^{33},\quad m_{33}^{33},\quad m_{32}^{32} = m_{31}^{31},\quad m_{21}^{21}.$$

Для кристаллов кубического типа мы должны воспользоваться свойством симметрии четвертого порядка относительно остальных двух осей.

Выберем за новую ось поворота ось 1. При повороте вокруг нее на 90° матрица A равна

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Применяя формулу (25) к тензору M, полученному после первого преобразования (поворота вокруг оси 3), будем иметь

$$\begin{Vmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_1^1 & M_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^3 & M_1^3 & M_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_6^6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M_1^1 & M_1^3 & M_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^3 & M_3^3 & M_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_1^3 & M_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_6^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_4^4 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда получим тензор M для кристалла кубического типа в виде

$$\begin{Vmatrix} M_1^1 & M_1^2 & M_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_1^1 & M_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ M_1^2 & M_1^2 & M_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_4^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_4^4 \end{Vmatrix}.$$

Остались только три независимые существенные компоненты: M_1^1, M_1^2, M_4^4. Использование условия симметрии относительно третьей оси — оси 2 — не дает дополнительных упрощений. Вернувшись к пространству d, находим

$$m_{11}^{11} = m_{22}^{22} = m_{33}^{33}, \quad m_{11}^{22} = m_{11}^{33} = m_{22}^{33}, \quad m_{32}^{32} = m_{31}^{31} = m_{21}^{21}.$$

Это уже известный нам результат.

5.5.9. Модуль Юнга. Рассмотрение модуля Юнга позволит нам проиллюстрировать нахождение некоторой характеристики, которая отвечает определенному направлению, заданному углами θ, φ. Для нити длины l, подверженной напряжению T, вызывающему приращение длины Δl, модуль Юнга Y определяется соотношением

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y} T.$$

В трехмерном пространстве модуль Юнга Y_1 для оси 1 будет определяться равенством

$$t_{11} = Y_1 s_{11} = m_{11}^{11} s_{11} = M_1^1 S_1 = T_1,$$

откуда

$$Y_1 = M_1^1 = m_{11}^{11}.$$

Если требуется найти модуль Юнга для направления, заданного углами θ, φ, достаточно проделать преобразование

$$\overline{M} = A' M \tilde{A}'.$$

Матрица A' получается на основании матрицы α', с помощью которой осуществляется преобразование при двух последовательных поворотах на углы φ и $\frac{\pi}{2} - \theta$. Модуль Юнга $Y_{\varphi, \theta}$ будет равен компоненте $\overline{M}_1^1$ матрицы $\overline{M}$. Если применить непосредственно тензорное преобразование, то для определения модуля Юнга $Y_{\varphi, \theta}$ получим формулу

$$Y_{\varphi, \theta} = \overline{m}_{11}^{11} = \sum_{ijkl} \alpha_1'^{i} \alpha_1'^{j} \beta_k'^{1} \beta_l'^{1} m_{ij}^{kl}.$$

Пьезоэлектричество

5.5.10. Электрическая поляризация. Механическая деформация может вызвать в кристалле электрическую поляризацию (пьезоэлектричество), которая в первом приближении пропорциональна этой деформации.

Если p — вектор поляризации, то три уравнения для его проекций на оси координат 1, 2, 3 запишутся в виде

$$p_i = \sum_{jk} e_i^{jk} s_{jk}.$$

Эта формула вводит тензор e третьей валентности, симметричный относительно индексов j и k, в силу чего число его независимых компонент сокращается с 27 до 18.

Используя линейные соотношения, связывающие напряжения с деформациями, можем написать

$$p_i = \sum_{jk} \delta_i^{jk} t_{jk}.$$

Это соотношение определяет новый тензор δ, который называется пьезоэлектрическим тензором. Как и тензор e, это тензор третьей валент-

ности, симметричный относительно индексов j и k с 18 независимыми компонентами.

Если поместить кристалл в электрическое поле $\boldsymbol{h}$, то деформации будут в первом приближении пропорциональны составляющим напряжения электрического поля по осям координат h_k; при этом получим шесть соотношений:

$$s_{ij} = \sum_k \delta_{ij}^k h_k.$$

Тензор (δ_{ij}^k), определяемый последним выражением, тот же, что и предыдущий, поскольку положение индексов в случае прямоугольной системы координат не имеет значения. Это можно показать, используя закон сохранения энергии.

Формулы преобразования компонент тензоров для случая преобразования прямоугольной системы координат, определяемого матрицей α, будут

$$\overline{e_l^{mn}} = \sum_{ijk} \beta_j^m \beta_k^n \alpha_l^i e_i^{jk}$$

и

$$\overline{\delta_{lm}^n} = \sum_{ijk} \beta_k^n \alpha_l^i \alpha_m^j \delta_{ij}^k = \sum_{ijk} \beta_i^l \beta_j^m \alpha_n^k \delta_k^{ij} = \overline{\delta_n^{lm}},$$

причем

$$\beta = \alpha^{-1} = \tilde{\alpha}.$$

Можно также, вместо того чтобы пользоваться формулами тензорного преобразования, использовать шестимерное пространство D. При этом тензор s_{ij} становится вектором $\boldsymbol{S}$ с шестью составляющими. Получим

$$p_k = \sum_q E_k^q S_q.$$

Тензор $\boldsymbol{e}$ третьей валентности будет представлен в пространстве D прямоугольной матрицей с 18 элементами. Так как последнее выражение связывает вектор $\boldsymbol{p}$ трехмерного пространства d с вектором $\boldsymbol{S}$ шестимерного пространства D, формула для преобразования компонент тензора E, отвечающего преобразованию координат, определяемому матрицей α, будет иметь вид

$$\overline{E} = \alpha E A^{-1} = \alpha E \tilde{A}.$$

Если использовать преобразование, соответствующее характеру симметрии кристалла, то матрицы $\overline{E}$ и E будут равны между собой. При этом число независимых компонент уменьшится. Для того чтобы вернуться к обозначениям, отвечающим первоначальному пространству d, следует использовать соответствие индексов, а именно

$$q \sim ij,$$

иначе говоря,

$$1 \sim 11, \quad 2 \sim 22, \quad 3 \sim 33, \quad 4 \sim 32, \quad 5 \sim 31, \quad 6 \sim 12.$$

Такое же вычисление можно проделать для тензора δ, который в пространстве D представляется прямоугольной матрицей Δ с 18 элементами.

Пример. Рассмотрим кристалл прямоугольно-ромбического типа, характеризуемого тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго

порядка. Примем оси симметрии кристалла за оси координат. Поворот на угол π вокруг оси 3 характеризуется матрицей

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ откуда } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применение формулы

$$\Delta = \alpha \Delta \tilde{A}$$

приводит к равенству

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^1 & \Delta_1^2 & \Delta_1^3 & \Delta_1^4 & \Delta_1^5 & \Delta_1^6 \\ \Delta_2^1 & \Delta_2^2 & \Delta_2^3 & \Delta_2^4 & \Delta_2^5 & \Delta_2^6 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 & \Delta_3^3 & \Delta_3^4 & \Delta_3^5 & \Delta_3^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_1^1 & -\Delta_1^2 & -\Delta_1^3 & \Delta_1^4 & \Delta_1^5 & -\Delta_1^6 \\ -\Delta_2^1 & -\Delta_2^2 & -\Delta_2^3 & \Delta_2^4 & \Delta_2^5 & -\Delta_2^6 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 & \Delta_3^3 & -\Delta_3^4 & -\Delta_3^5 & \Delta_3^6 \end{bmatrix},$$

откуда получается первое упрощение матрицы Δ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta_1^4 & \Delta_1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_2^4 & \Delta_2^5 & 0 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 & \Delta_3^3 & 0 & 0 & \Delta_3^6 \end{bmatrix}.$$

Поворот на угол π вокруг оси 2 осуществляется с помощью матриц

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Применение формулы

$$\Delta = \alpha \Delta \tilde{A}$$

к упрощенной после поворота вокруг оси 3 матрице Δ приводит к равенству

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta_1^4 & \Delta_1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_2^4 & \Delta_2^5 & 0 \\ \Delta_3^1 & \Delta_3^2 & \Delta_3^3 & 0 & 0 & \Delta_3^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta_1^4 & -\Delta_1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_2^4 & \Delta_2^5 & 0 \\ -\Delta_3^1 & -\Delta_3^2 & -\Delta_3^3 & 0 & 0 & \Delta_3^6 \end{bmatrix},$$

откуда получаем окончательный результат

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_3^6 \end{bmatrix}.$$

Единственные не равные нулю компоненты тензора δ в рассматриваемой системе координат в пространстве d — это

$$\delta_1^{32},\ \delta_2^{31},\ \delta_3^{12}.$$

Следует учесть, что в матрице Δ индекс строки отвечает пространству d, а индекс столбца — пространству D.

Такое же вычисление приводит к выводу, что не равными нулю компонентами тензора e являются

$$e_1^{32},\quad e_2^{31},\quad e_3^{12}.$$

Деформации, соответствующие компонентам s_{32}, s_{31}, s_{12}, представляют собой только деформации скольжения.

Итак, квадратная пластина сегнетовой соли (относящейся к кристаллам рассматриваемого типа), вырезанная параллельно двум осям симметрии второго порядка, не обнаружит никакой электрической поляризации при сжатии, за исключением случая сжатия вдоль направления диагонали квадрата. Если поместить эту пластину в электрическое поле, направление напряжения которого перпендикулярно плоскости пластины, то она не будет испытывать ни растяжения, ни сжатия, но примет форму ромба.

5.5.11. Закон Кюри. Кюри доказал, что кристалл, имеющий центр симметрии, не может быть пьезоэлектрическим. Такой кристалл по всем своим физическим свойствам совпадает с кристаллом, который с ним симметричен относительно центра. В частности, пьезоэлектрический тензор не должен меняться при преобразовании координат, состоящем в том, что направления всех трех осей меняются на противоположные. Такое преобразование координат определяется матрицей

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \beta.$$

Вследствие простоты этой матрицы из формул преобразования компонент тензоров исчезает символ суммы. Кроме того, так как α — диагональная матрица, то получим

$$\delta_{ij}^k = \alpha_k^k \beta_i^i \beta_j^j \delta_{ij}^k = (-1)(-1)(-1)\delta_{ij}^k = -\delta_{ij}^k.$$

Видим, что все компоненты тензора δ равны нулю, следовательно, кристалл не пьезоэлектрический.

5.5.12. Пьезоэлектрические свойства кварца. В кристалле кварца имеются следующие оси симметрии: ось третьего порядка — оптическая — и три оси второго порядка — электрические, расположенные в плоскости, перпендикулярной оптической оси, под углом в 120° друг к другу. Под механическими осями подразумевают три оси, каждая из которых перпендикулярна оптической и одной из электрических осей.

Примем оптическую ось за ось 3, а одну из электрических за ось 1. Осью 2 будет соответствующая механическая ось. Воспользуемся для определения независимых компонент пьезоэлектрического тензора формулами тензорного преобразования. Поворот на угол 180° вокруг оси 1 определяется матрицей

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \beta.$$

Единственный положительный член этой диагональной матрицы $\alpha_1^1 = \beta_1^1 = 1$. Мы уже отмечали, что для матриц преобразования координат, имеющих по одному члену в строке или столбце, символ суммы в формулах преобразования компонент тензоров исчезает. Поэтому

$$\delta_{ij}^k = \alpha_k^k \beta_i^i \beta_j^j \delta_{ij}^k.$$

Члены, не содержащие индекса 1 или содержащие его дважды, уничтожаются. Действительно, например,

$$\delta_{11}^2 = \alpha_2^2 \beta_1^1 \beta_1^1 \delta_{11}^2 = (-1)(1)(1)\delta_{11}^2,$$

откуда следует, что $\delta_{11}^2 = 0$. Следовательно, не равны нулю только члены

$$\delta_{11}^1, \quad \delta_{22}^1, \quad \delta_{33}^1, \quad \delta_{32}^1, \quad \delta_{31}^2, \quad \delta_{31}^3, \quad \delta_{12}^2, \quad \delta_{12}^3.$$

Осуществим поворот на угол 120° вокруг оси 3. Этот поворот определяется матрицей

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \alpha^{-1} = \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в матрицах α и β все элементы, содержащие индекс 3, равны нулю, за исключением $\alpha_3^3 = \beta_3^3 = 1$. Поэтому в формулах преобразования компонент тензора, если индекс 3 не содержится в преобразуемой компоненте, он не появится и в соответствующей компоненте после преобразования. Это соображение позволяет написать формулы преобразования координат сначала для δ_{11}^1, δ_{12}^2, δ_{22}^1:

$$\delta_{11}^1 = \beta_1^1\alpha_1^1\alpha_1^1\delta_{11}^1 + \beta_2^1\alpha_1^1\alpha_1^2\delta_{12}^2 + \beta_2^1\alpha_1^2\alpha_1^1\delta_{21}^2 + \beta_1^1\alpha_1^2\alpha_1^2\delta_{22}^1,$$
$$\delta_{12}^2 = \beta_1^2\alpha_1^1\alpha_2^1\delta_{11}^1 + \beta_2^2\alpha_1^1\alpha_2^2\delta_{12}^2 + \beta_2^2\alpha_1^2\alpha_2^1\delta_{21}^2 + \beta_1^2\alpha_1^2\alpha_2^2\delta_{22}^1,$$
$$\delta_{22}^1 = \beta_1^1\alpha_2^1\alpha_2^1\delta_{11}^1 + \beta_2^1\alpha_2^1\alpha_2^2\delta_{12}^2 + \beta_2^1\alpha_2^2\alpha_2^1\delta_{21}^2 + \beta_1^1\alpha_2^2\alpha_2^2\delta_{22}^1.$$

Заменяя элементы матриц α и β их значениями и заметив, что $\delta_{12}^2 = \delta_{21}^2$, получим

$$3\delta_{11}^1 + 2\delta_{12}^2 + \delta_{22}^1 = 0,$$
$$\delta_{11}^1 + 2\delta_{12}^2 - \delta_{22}^1 = 0,$$
$$\delta_{11}^1 - 2\delta_{12}^2 + 3\delta_{22}^1 = 0,$$

откуда

$$\delta_{22}^1 = \delta_{12}^2 = -\delta_{11}^1.$$

Рассмотрение формул преобразования компонент, содержащих индекс 3, приводит к трем соотношениям:

$$\delta_{33}^1 = \beta_1^1\alpha_3^3\alpha_3^3\beta_{33}^1 = -\frac{1}{2}\delta_{33}^1, \qquad \delta_{33}^1 = 0,$$
$$\delta_{31}^3 = \beta_3^3\alpha_3^3\alpha_1^3\delta_{31}^3 = -\frac{1}{2}\delta_{31}^3, \qquad \delta_{31}^3 = 0,$$
$$\delta_{12}^3 = [\beta_3^3\alpha_1^1\alpha_2^2 + \beta_3^3\alpha_1^2\alpha_2^1]\,\delta_{12}^3 = -\frac{1}{2}\delta_{12}^3, \qquad \delta_{12}^3 = 0,$$

и к системе уравнений

$$\delta^1_{32} = \beta^1_2\alpha^3_3\alpha^1_2\delta^2_{31} + \beta^1_1\alpha^3_3\alpha^2_2\delta^1_{32},$$
$$\delta^2_{31} = \beta^2_2\alpha^3_3\alpha^1_1\delta^2_{31} + \beta^2_1\alpha^3_3\alpha^2_1\delta^1_{32},$$

откуда получаем

$$\delta^1_{32} = -\delta^2_{31}.$$

Используя соответствие индексов для пространств d и D и заметив, что аналогичный расчет приводит к таким же результатам для тензора e, можно составить две следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} \Delta^1_1 & 0 & 0 \\ -\Delta^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta^1_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta^1_4 & 0 \\ 0 & -\Delta^1_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} E^1_1 & 0 & 0 \\ -E^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E^1_4 & 0 & 0 \\ 0 & -E^1_4 & 0 \\ 0 & -E^1_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если раскрыть соотношения между поляризацией, напряжением и деформацией, мы получим для кварца в выбранной системе координат:

$$p_1 = \delta^1_{11}t_{11} - \delta^1_{11}t_{22} + \delta^1_{32}t_{32}, \qquad p_1 = e^1_{11}s_{11} - e^1_{11}s_{22} + e^1_{32}s_{32},$$
$$p_2 = -\delta^1_{11}t_{12} - \delta^1_{32}t_{31}, \qquad p_2 = -e^1_{11}s_{12} - e^1_{32}s_{31},$$
$$p_3 = 0, \qquad p_3 = 0.$$

Эти системы позволяют сделать следующие выводы:

1. Любая деформация — сжатие или растяжение — вдоль оси 1 (s_{11}) или оси 2 (s_{22}) приводит к появлению поляризаций вдоль оси 1 (p_1) соответственно противоположных направлений.

2. Кручение вокруг осей 1 (s_{32}), 2 (s_{13}), 3 (s_{12}) создает поляризации соответственно вдоль осей 1 (p_1), 2 (p_2), 2 (p_2).

3. Любая деформация — сжатие или растяжение — вдоль оси 3 не создает никакой поляризации (p_3).

5.5.13. Распространение упругих волн в кристаллах. Рассмотрим в твердом теле плотности ρ элемент объема в виде параллелепипеда со сторонами dx^1, dx^2, dx^3. Уравнение его движения вдоль оси 1 мы получим, приравнивая друг другу силу инерции

$$\rho\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}$$

и совокупность сил, действующих на элемент объема в направлении оси 1, т. е.

$$dx^2\, dx^3\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x^1}dx^1\right) + dx^1\, dx^3\left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x^2}dx^2\right) + dx^1\, dx^2\left(\frac{\partial t_{13}}{\partial x^3}dx^3\right);$$

при этом получаем уравнение движения

$$\rho\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x^3}.$$

Поступая аналогичным образом для других осей, можем записать все три уравнения движения в виде

$$\rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^j} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Известно, что тензор напряжений t связан с тензором деформаций s соотношением (обобщенный закон Гука)

$$t_{ij} = \sum_{kl} m_{ij}^{kl} s_{kl},$$

где

$$s_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right),$$

откуда

$$t_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{kl} m_{ij}^{kl}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right) = \sum_{kl} m_{ij}^{kl}\frac{\partial u^k}{\partial x^l}$$

вследствие симметрии по индексам l и k в рассматриваемой сумме.

Таким образом, получаем общее уравнение движения

$$\rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \sum_{jkl} m_{ij}^{kl}\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^l\,\partial x^j}.$$

5.5.14. Плоские волны. Рассмотрим простой случай распространения плоских волн. Этот случай особенно важен практически. В самом деле, кристаллы кварца, употребляемые для определения частот или как фильтры, имеют почти всегда форму тонких пластин. А при такой форме упругие колебания сводятся главным образом к плоским волнам, параллельным плоскостям пластины.

Плоскость определяется компонентами n^1, n^2, n^3 единичного вектора $\boldsymbol{n}$, перпендикулярного к ней, и расстоянием p до плоскости от начала координат (нормальное уравнение плоскости). Все точки любой плоскости, содержащей рассматриваемую плоскую волну, движутся в одинаковой фазе, иначе говоря, их положение зависит только от переменной t (времени) и от переменной p (расстояния до плоскости от начала координат).

В этом случае

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^l} = \frac{\partial u^k}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x^l} = n^l\frac{\partial u^k}{\partial p}.$$

Уравнение движения принимает вид

$$\rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \sum_j n_{ij}\frac{\partial^2 u^j}{\partial p^2},$$

где n_{ij} — общая компонента симметричного тензора n, который получится, если обозначить

$$n_{ij} = \sum_{kl} m_{ij}^{kl} n_k n_l.$$

Если γ — одно из собственных значений матрицы n (в силу симметрии ее собственные значения вещественны, а собственные направления взаимно перпендикулярны), то

$$nu = \gamma u;$$

иными словами,

$$\sum_j n_{ij}u_j = \gamma u_i.$$

При этом уравнение движения приобретает форму уравнения колебаний упругой нити

$$\gamma\frac{\partial^2 u^l}{\partial p^2} = \rho\frac{\partial^2 u^l}{\partial t^2}.$$

Если определить направление перемещения u с помощью единичного вектора $\boldsymbol{w}$ этого направления (не зависящего от тензоров t и s и зависящего только от γ):

$$u = x\boldsymbol{w},$$

то получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \frac{\rho}{\gamma} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2};$$

при этом имеет место распространение плоской волны со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}.$$

Так как характеристическое уравнение, определяющее собственные значения матрицы n, представляет собой уравнение третьей степени

$$\begin{vmatrix} n_{11} - \gamma & n_{12} & n_{13} \\ n_{12} & n_{22} - \gamma & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} - \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

то в направлении вектора $\boldsymbol{n}$ с компонентами n^1, n^2, n^3 распространяются три плоские волны, соответствующие трем корням этого уравнения γ_1, γ_2, γ_3, со скоростями $v_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho}}$, $v_3 = \sqrt{\frac{\gamma_3}{\rho}}$. Каждая из этих волн создается движением частиц в направлении, определяемом вектором $\boldsymbol{w}$. Все три направления, отвечающие корням γ_1, γ_2, γ_3, взаимно перпендикулярны. Движение любой частицы рассматриваемой плоскости является результирующей трех движений, определенных указанным выше способом.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ V

1. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Гостехиздат, 1951.
2. Зоммерфельд А., Механика, ИЛ, 1947.
3. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. 2, Гостехиздат, 1952.
4. Широков П. А., Тензорный анализ, ч. 1, ГТТИ, 1934.
5. Кильчевский Н. А., Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике, Гостехиздат, 1954.
6. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения; Физматгиз, 1961.
7. Крон Г., Применение тензорного анализа в электротехнике, ГЭИ, 1955.

ГЛАВА VI

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1])

6.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Это дифференциальные уравнения вида

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Точные способы интегрирования существуют лишь для небольшого числа уравнений первого порядка. Ниже дается краткий обзор наиболее распространенных типов таких уравнений.

6.1.1. Уравнения вида $f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$, $f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$. Это уравнения, в которых y или x не входят в явной форме.

Рассмотрим два случая:

а) Уравнения разрешаются относительно $\frac{dy}{dx}$. Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\psi(y).$$

Решения уравнений получаются в квадратурах:

$$y=\int \varphi(x)\,dx+C \quad \text{или} \quad x=\int \frac{dy}{\psi(y)}+C.$$

Различные интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом по направлениям осей Oy или Ox. Если интегралы нельзя представить через известные функции, то их можно вычислить приближенно с помощью методов, изложенных в гл. X.

б) Уравнения разрешаются относительно x или y. Положим $\frac{dy}{dx}=p$. Для первого вида уравнений получаем

$$x=h(p),$$

$$y=\int ph'(p)\,dp+C,$$

а для второго

$$y=g(p),$$

$$x=\int \frac{g'(p)}{p}\,dp+C.$$

Эти выражения представляют собой уравнения интегральных кривых в параметрической форме.

---

[1]) В этой главе излагаются точные методы решения дифференциальных уравнений. Приближенные приемы указаны в гл. X, посвященной численным и графическим методам.

Замечание. Иногда удобнее параметр ввести другим способом. Для уравнения $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)=0$ положим, например, $x=\nu(t)$. Разрешая алгебраически это уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$, найдем

$$\frac{dy}{dx}=u(t).$$

Отсюда

$$y=\int u(t)\nu'(t)\,dt+C.$$

Точно так же для уравнения $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ имеем

$$y=\nu(t), \quad \frac{dy}{dx}=u(t),$$

$$x=\int \frac{\nu'(t)}{u(t)}\,dt+C.$$

Как и выше, мы получаем параметрические уравнения интегральных кривых

Пример. $y\sqrt{1+y'^2}=1$. Положим

$$y=\cos t.$$

Решая уравнение относительно y', получим

$$y'_x=\operatorname{tg} t.$$

Далее,

$$dx=\frac{dy}{y'_x}=\frac{-\sin t\,dt}{\operatorname{tg} t}=-\cos t\,dt,$$

т. е.

$$x=-\sin t+C.$$

Таким образом, уравнения интегральных кривых в параметрической форме имеют вид

$$\begin{cases} x=-\sin t+C, \\ y=\cos t. \end{cases}$$

Очевидно, это окружности единичного радиуса, центры которых находятся в точках $(C, 0)$.

6.1.2. Уравнения с разделяющимися переменными. Это уравнения вида $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, в которых функция $f(x, y)$ может быть представлена как

$$f(x, y)=\frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.$$

Отсюда следует

$$\psi(y)\,dy=\varphi(x)\,dx.$$

Общий интеграл этого уравнения $\Phi(x)-\Psi(y)=\text{const}$, где $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ — соответственно первообразные функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Пример. Решим уравнение

$$x^2\frac{dy}{dx}-y^2=x^2y\frac{dy}{dx}.$$

В нем легко разделить переменные:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{1-y}{y^2}\,dy.$$

Интегрируя, получим общее решение:

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ln y=C.$$

Замечание 1. К рассматриваемому типу уравнений сводится уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by).$$

Для этого достаточно ввести новую переменную

$$z=ax+by.$$

Тогда

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

Замечание 2. Уравнения, рассмотренные в п. 6.1.1,

$$f\left(\frac{dy}{dx},\ x\right)=0 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{dy}{dx},\ y\right)=0$$

также относятся к типу уравнений с разделяющимися переменными.

6.1.3. Однородные уравнения. Это уравнения вида $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, в которых функция $f(x, y)$ может быть представлена как

$$f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Имеем

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Положим

$$y=ux, \qquad dy=u\,dx+x\,du.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln Cx=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}.$$

Пример. Решим уравнение $x^2y\,dx-(x^3-y^3)\,dy=0$. Положим

$$y=ux, \qquad dy=u\,dx+x\,du.$$

Подставляем в уравнение:

$$x^4\,du\,(u^3-1)=-u^4x^3\,dx,$$

$$\frac{u^3-1}{u^4}\,du=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln u+\frac{1}{3u^3}+\ln x=C$$

и, возвращаясь к функции y, находим

$$\ln y+\frac{1}{3}\frac{x^3}{y^3}=C.$$

Замечание. Рассмотрим уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — постоянные. Если прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ пересекаются в точке (x_1, y_1), то, полагая

$$X = x - x_1, \quad Y = y - y_1,$$

приходим к однородному уравнению относительно X и Y:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right).$$

Если прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ параллельны, то, полагая $z = a_1x + b_1y$, получаем уравнение с разделяющими переменными:

$$\frac{dz}{dx} = b_1 f\left(\frac{a_1z + a_1c_1}{a_2z + a_1c_2}\right) + a_1.$$

Пример. Решим уравнение $2(x-2)\,dx + (2y - 5x)\,dy = 0$. Координаты точки пересечения прямых $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; заменяя переменные $x = X + 2$, $y = Y + 5$, приходим к однородному уравнению $2X\,dX + (2Y - 5X)\,dY = 0$.

6.1.4. Уравнение в полных дифференциалах. Пусть общее уравнение $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ написано в виде

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Если функции P и Q таковы, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то известно, что существует такая функция $F(x, y)$, для которой

$$dF \equiv P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Выражение $F(x, y) = \text{const}$ и будет интегралом изучаемого уравнения. Функцию F легко можно представить в виде

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right] dy.$$

Пример. Решим уравнение $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$. Вычислим $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$F(x, y) = \int \frac{y}{x}\,dx + \int \left[y^3 + \ln x - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{y}{x}\,dx\right] dy = y\ln x + \frac{y^4}{4}$$

и

$$y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$$

— общий интеграл уравнения.

6.1.5. Линейное уравнение. Это уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = y\varphi(x) + \psi(x). \tag{1}$$

Положим, что $y = uv$, где u и v — неизвестные функции x. Имеем

$$\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} = \varphi(x)\, uv + \psi(x).$$

Выберем функцию v так, чтобы

$$u \frac{dv}{dx} = \varphi(x)\, uv.$$

Имеем

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \varphi(x),$$

$$\ln v = \int_a^x \varphi(x)\, dx, \quad v = e^{\int_a^x \varphi(x)\, dx}$$

Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{\psi(x)}{v} = e^{-\int_a^x \varphi(x)\, dx} \psi(x)$$

и

$$u = \int_a^x e^{-\int_a^x \varphi(x)\, dx} \psi(x)\, dx + C,$$

$$y = e^{\int_a^x \varphi(x)\, dx} \int_a^x e^{-\int_a^x \varphi(x)\, dx} \psi(x)\, dx + Ce^{\int_a^x \varphi(x)\, dx}$$

Решение уравнения y представлено здесь как сумма двух функций. Первая при $x = a$ обращается в нуль, а вторая принимает значение C.

Применение интегрирующего множителя. Напишем линейное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} - \varphi(x)\, y = \psi(x).$$

Попробуем определить такую функцию $M(x)$, чтобы выражение

$$M \frac{dy}{dx} - M\varphi(x)\, y$$

представляло собой производную произведения y на некоторую функцию от x. Для этого нужно, чтобы

$$M\varphi(x) = -\frac{dM}{dx}$$

или

$$\ln M = -\int_a^x \varphi(x)\, dx.$$

Выражение

$$M = e^{-\int_a^x \varphi(x)\, dx}$$

является интегрирующим множителем для линейного уравнения. Подставляя в уравнение значение M, находим для y решение, полученное нами ранее.

6.1.6. Уравнение Бернулли. Это дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+f(x)\,y=\varphi(x)\,y^n. \qquad (2)$$

Оно сводится к линейному, если сделать замену $z=y^{1-n}$. Имеем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1-n}{y^n}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя в уравнение, находим

$$\frac{dz}{dx}-(n-1)\,zf(x)+(n-1)\,\varphi(x)=0.$$

6.1.7. Уравнение Риккати. Это дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p_1(x)\,y^2+p_2(x)\,y+p_3(x)=0,$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — произвольные функции от x.

Если известен частный интеграл y_1, то разыскание общего интеграла этого уравнения сводится к решению уравнения Бернулли. Действительно, полагая $z=y-y_1$, имеем

$$\frac{dz}{dx}+z\,[2y_1p_1(x)+p_2(x)]+z^2p_1(x)=0.$$

Если известны три частных интеграла уравнения Риккати $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ то легко показать, что общий интеграл этого уравнения $y(x)$ удовлетворяет условию: ангармоническое отношение

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=\text{const}.$$

Следовательно, $y(x)$ определяется без интегрирования.

6.1.8. Уравнение Лагранжа. Это уравнение вида

$$y=x\varphi(y')+\psi(y').$$

Продифференцируем по x и положим $y'=p$. Тогда

$$p=\varphi(p)+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

или

$$[\varphi(p)-p]\frac{dx}{dp}+x\varphi'(p)+\psi'(p)=0.$$

Мы получили линейное уравнение для функции $x(p)$. Пусть $x=f(p,\,C)$ — его общий интеграл. Заменяя в уравнении Лагранжа y' и x на p и $f(p,\,C)$, найдем интегральные кривые этого уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=f(p,\,C), \\ y=f(p,\,C)\,\varphi(p)+\psi(p). \end{cases}$$

6.1.9. Уравнение Клеро. Это частный случай уравнения Лагранжа в котором $\varphi(y')=y'$:

$$y=xy'+\psi(y').$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0. \tag{3}$$

Здесь возможны два решения:

1. $\frac{dp}{dx}=0$ или $p=C$. Подставляя это решение в уравнение Клеро, находим

$$y=Cx+\psi(C).$$

Следовательно, общий интеграл представляет собой семейство прямых.

2. $x+\psi'(p)=0$. Это уравнение в сочетании с уравнением Клеро $y=xp+\psi(p)$ дает параметрические уравнения огибающей к семейству найденных выше прямых. Эта огибающая является особым решением уравнения Клеро.

6.1.10. Общий случай $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$. Общего метода для решения такого уравнения не существует. Отметим два искусственных приема, которые могут оказаться полезными в некоторых случаях.

Дифференцирование. Рассмотрим уравнение $y=\varphi(x, y')$. Положим $y'=p$ и продифференцируем по x. Тогда

$$y'=p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

Если мы сможем решить это дифференциальное уравнение, рассматривая здесь x как функцию p, то получим искомые интегральные кривые в параметрической форме

$$\begin{cases} x=h(p, c), \\ y=\varphi[h(p, c), p]. \end{cases}$$

Отметим, что этим приемом решалось уравнение Лагранжа.

Преобразование Лежандра. Рассмотрим уравнение $f(x, y, y')=0$. Положим

$$z=-y+xy',$$
$$s=y',$$

здесь z — новая функция, а s — новая независимая переменная. Это преобразование называется преобразованием Лежандра. Получаем

$$dz=-y'\,dx+y'\,dx+x\,dy'=x\,dy'=x\,ds.$$

Отсюда

$$x=\frac{dz}{ds},$$
$$y=-z+s\frac{dz}{ds}.$$

Исходное уравнение переходит в уравнение

$$f\left(\frac{dz}{ds}, -z+s\frac{dz}{ds}, s\right)=0,$$

которое часто оказывается проще заданного. Если его решение имеет вид

$$z=F(s, C),$$

то переход к старым переменным осуществляется по формулам

$$x = \frac{dF}{ds},$$
$$y = -F + s\frac{dF}{ds}.$$

Не следует преувеличивать значения искусственных приемов. Они редко удаются. В инженерной практике основным является метод численного решения дифференциального уравнения (см. гл. X).

6.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

Общий вид дифференциального уравнения порядка выше первого

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \quad (4)$$

Решить это уравнение в квадратурах можно лишь в исключительно редких случаях. Иногда удается понизить порядок уравнения, что существенно облегчает решение.

Случаи понижения порядка уравнения

6.2.1. Уравнение не содержит явно функцию y. Достаточно ввести новую функцию $\frac{dy}{dx} = z$ и порядок уравнения понижается на единицу. Если, кроме того, в уравнении (4) отсутствуют производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$, то, полагая $\frac{d^ky}{dx^k} = z$, мы снизим порядок уравнения на k единиц.

6.2.2. Уравнение не содержит явно независимой переменной x. В этом случае примем y за новую независимую переменную, а $\frac{dy}{dx} = z$ — за новую функцию. Получим

$$\frac{dy}{dx} = z,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = z^2\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Дифференциальное уравнение (4) принимает вид

$$\varphi\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Порядок уравнения (4) снизился на единицу.

6.2.3. Уравнение, однородное относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Положим

$$y = e^z.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = e^z\frac{dz}{dx},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^z\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^z\left[\frac{d^3z}{dx^3} + 3\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^3\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставим эти выражения в уравнение (4). Вследствие однородности относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$ функция e^z будет общим множителем членов уравнения. После сокращения на e^z новое дифференциальное уравнение уже не будет содержать явно функцию z. Мы приходим, таким образом, к случаю, рассмотренному в п. 6.2.1.

6.2.4. Уравнение, однородное относительно x и dx. Положим

$$x = e^z.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = e^{-z}\frac{dy}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2z}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3z}\left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right],$$

. . . . . .

Подставим эти выражения в уравнение (4). Вследствие однородности относительно x и dx множители e^{-kz} исчезают. Поэтому новое дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной z, и мы приходим к случаю, рассмотренному в п. 6.2.2.

6.2.5. Уравнение, однородное относительно $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$. Положим $y = ux$, где $u = u(x)$ — новая функция. После этой замены уравнение (4) становится однородным относительно x и dx. Мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте.

6.2.6. Общий случай однородного уравнения. Будем считать x и dx величинами первого измерения, а $y, dy, d^2y, \ldots, d^ny$ — измерениями порядка k. Тогда $\frac{dy}{dx}$ будет порядка $k-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — порядка $k-2$ и т. д.

Так же как и в предыдущем случае, мы приходим к дифференциальному уравнению, рассмотренному в п. 6.2.4, путем следующей замены функции:

$$y = ux^k.$$

Пример. Решим уравнение

$$2x^4\frac{d^2y}{dx^2} - 6x^3\frac{dy}{dx} + y^2 = 0. \tag{5}$$

Оно, очевидно, принадлежит к рассмотренному типу при $k = 2$.

Положим

$$y = ux^2.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{du}{dx} + 2ux,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 4x\frac{du}{dx} + 2u.$$

Уравнение (5) принимает вид

$$2x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} + u^2 - 8u = 0, \tag{6}$$

т. е. становится однородным относительно x и dx (см. п. 6.2.4).

Полагаем

$$x = e^z,$$

отсюда

$$\frac{du}{dx} = e^{-z}\frac{du}{dz},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^{-2z}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz}\right).$$

Подставляя в уравнение (6), получаем

$$2\frac{d^2u}{dz^2} + u^2 - 8u = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) не содержит в явном виде переменной z. Положим

$$\frac{du}{dz} = w.$$

Тогда

$$\frac{d^2u}{dz^2} = w\frac{dw}{du},$$

и уравнение (7) принимает вид

$$2w\frac{dw}{du} + u^2 - 8u = 0.$$

Переменные разделяются, и z выражается с помощью эллиптического интеграла.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

6.2.7. Введение. Уравнение вида

$$\frac{d^ny}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n(z)\,y = f(z) \tag{8}$$

называется линейным неоднородным уравнением n-го порядка. Не существует никакого общего метода решения этого уравнения при $n > 1$. В большинстве случаев решения уравнения (8) не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций.

Если правая часть (8) тождественно равна нулю, то уравнение называется линейным однородным. Оно имеет вид

$$\frac{d^ny}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n(z)\,y = 0. \tag{9}$$

Пусть известны n частных интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения (9). Тогда общий интеграл этого уравнения

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n.$$

Если $u(z)$ — частный интеграл неоднородного линейного уравнения (8), то общий интеграл этого уравнения

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + u(z).$$

6.2.8. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Пусть известно n частных интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения (9). Покажем, как в этом случае определяется частный интеграл неоднородного линейного уравнения (8). Положим, что мы выбрали n таких функций

$$v_1(z),\ v_2(z),\ \ldots,\ v_n(z),$$

что

$$y = v_1(z)\,y_1 + v_2(z)\,y_2 + \ldots + v_n(z)\,y_n$$

представляет собой решение неоднородного уравнения (8). Вычислим

$$y' = v_1y_1' + v_2y_2' + \ldots + v_ny_n' + v_1'y_1 + v_2'y_2 + \ldots + v_n'y_n$$

и предположим, что функции v удовлетворяют условию

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 + \ldots + v_n'y_n = 0.$$

Найдем, далее,

$$y'' = v_1y_1'' + v_2y_2'' + \ldots + v_ny_n'' + v_1'y_1' + v_2'y_2' + \ldots + v_n'y_n'$$

и наложим на функции v второе условие:

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' + \ldots + v_n'y_n' = 0.$$

Повторяя эти рассуждения еще $n-3$ раза, мы придем к следующей системе $n-1$ линейных уравнений относительно v_1', v_2', ..., v_n':

$$\begin{aligned}
v_1'y_1 + v_2'y_2 + \ldots + v_n'y_n &= 0,\\
v_1'y_1' + v_2'y_2' + \ldots + v_n'y_n' &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_1'y_1^{(n-2)} + v_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n'y_n^{(n-2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Последовательные производные от y с учетом этих условий будут равны:

$$\begin{aligned}
y' &= v_1y_1' + v_2y_2' + \ldots + v_ny_n',\\
y'' &= v_1y_1'' + v_2y_2'' + \ldots + v_ny_n'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n-1)} &= v_1y_1^{(n-1)} + v_2y_2^{(n-1)} + \ldots + v_ny_n^{(n-1)},\\
y^{(n)} &= v_1y_1^{(n)} + v_2y_2^{(n)} + \ldots + v_ny_n^{(n)} + v_1'y_1^{(n-1)} + v_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'y_n^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Подставим эти производные в уравнение (8). Так как y_1, ..., y_n — решения однородного уравнения (9), то имеем

$$v_1'y_1^{(n-1)} + v_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n'y_n^{(n-1)} = f(z).$$

Это равенство — недостающее n-е условие, необходимое для определения v_1', v_2', ..., v_n'.

Полученная система из n уравнений будет совместна при условии, что определитель [1])

$$\begin{vmatrix}
y_1 & y_2 & \ldots & y_n\\
y_1' & y_2' & \ldots & y_n'\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}
\end{vmatrix}$$

не равен нулю. Это имеет место, если функции y_1, y_2, ..., y_n представляют собой линейно независимые частные решения однородного уравнения (9). Тогда по правилу Крамера можно однозначно определить v_1', v_2', ..., v_n'. Сами же функции v_1, v_2, ..., v_n получатся с помощью интегрирования.

[1]) Он называется определителем Вронского (вронскианом).

Пример. Решим уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{z}{1-z}\frac{dy}{dz}-\frac{1}{1-z}y=1-z.$$

Очевидно, что $y_1=e^z$ и $y_2=z$ — линейно независимые частные интегралы однородного уравнения. Нужно найти такие две функции $v_1(z)$ и $v_2(z)$, чтобы

$$v_1'e^z+v_2'z=0,$$
$$v_1'e^z+v_2'=1-z,$$

откуда

$$v_1=(1+z)e^{-z},\quad v_2=z.$$

Частный интеграл заданного неоднородного уравнения будет

$$1+z+z^2.$$

Следовательно, общий интеграл

$$y=C_1e^z+C_2z+1+z^2.$$

6.2.9. Уравнение Эйлера. Это уравнение вида

$$z^n\frac{d^ny}{dz^n}+A_1z^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}z\frac{dy}{dz}+A_ny=f(z),$$

где коэффициенты A — постоянные. Оно является частным случаем уравнения, однородного относительно z и dz, рассмотренного в п. 6.2.4.

Уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами путем замены независимой переменной

$$z=e^u.$$

Пример.

$$z^3\frac{d^3y}{dz^3}+z\frac{dy}{dz}-y=z\ln z.$$

Положим $z=e^u$. Имеем

$$\frac{dy}{dz}=e^{-u}\frac{dy}{du},\quad \frac{d^2y}{dz^2}=e^{-2u}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right),$$
$$\frac{d^3y}{dz^3}=e^{-3u}\left(\frac{d^3y}{du^3}-3\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{dy}{du}\right).$$

Уравнение приобретает вид

$$e^{3u}e^{-3u}(y'''-3y''+2y')+e^ue^{-u}y'-y=ue^u$$

или

$$y'''-3y''+3y'-y=ue^u.$$

6.2.10. Интегрирование при помощи степенных рядов. Ограничимся случаем линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y''+y'f_1(x)+yf_2(x)=0.$$

Весьма простая идея решения этого уравнения состоит в том, чтобы попытаться написать его общий или частный интеграл в виде обобщенного степенного ряда с неопределенными коэффициентами:

$$y=x^\nu\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^\lambda. \tag{10}$$

Подставим этот ряд в дифференциальное уравнение, приведем подобные члены и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x. При этом мы получим бесконечную систему алгебраических уравнений, связывающих показатель степени ν и коэффициенты a_λ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$). Первые (одно или два) уравнения позволяют определить ν. Уравнение, служащее для вычисления ν, называется определяющим уравнением. Остальные уравнения составляют систему рекуррентных соотношений, позволяющих последовательно вычислять коэффициенты разложения. Каждому корню определяющего уравнения соответствует свое разложение в ряд вида (10), удовлетворяющее исходному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим, например, уравнение

$$y'' + \frac{y}{x^3} = 0.$$

Попробуем найти его решение в виде ряда (10). Подставим этот ряд в дифференциальное уравнение и приравняем нулю коэффициенты при x степени $\nu + \lambda - 2$. Получим рекуррентное соотношение

$$a_\lambda(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1) + a_{\lambda+1} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Уравнение, соответствующее коэффициенту при x с наименьшей степенью, равной $\nu - 3$, дает

$$a_0 = 0.$$

Из рекуррентных соотношений, полученных выше, последовательно находим, что все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ равны нулю. Это означает, что рассмотренное дифференциальное уравнение не имеет решения в виде обобщенного степенного ряда.

Возьмем другой пример:

$$y'' + \frac{y'}{x^2} = 0.$$

Подстановка того же ряда дает (если приравнять нулю коэффициент при x в степени $\nu + \lambda - 2$) следующее рекуррентное соотношение:

$$a_\lambda(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1) + a_{\lambda+1}(\nu+\lambda+1) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Коэффициент при x с наименьшей степенью, равной $\nu - 3$, приводит к определяющему уравнению

$$\nu a_0 = 0.$$

Единственное подходящее решение — это $\nu = 0$; тогда a_0 неопределенно. Рекуррентное соотношение принимает вид

$$a_\lambda \lambda(\lambda - 1) + a_{\lambda+1}(\lambda + 1) = 0.$$

Остается проверить сходимость получающегося таким способом степенного ряда. Имеем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda}\right| x = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\lambda x\right] = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda x = \infty,$$

т. е. полученный ряд расходится при любом x. Это означает, что рассматриваемый способ снова оказывается несостоятельным или, точнее, что дифференциальное уравнение не имеет решения в виде обобщенного степенного ряда. Совершенно очевидно, что эти неудачи связаны с особенностями функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $x = 0$. В приведенных примерах точка $x = 0$ представляет собой полюс функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Однако наличие полюса у функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ само по себе не исключает возможности успешного

применения рассматриваемого метода. Например, уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

может быть решено рассмотренным методом, т. е. оно имеет решение в виде ряда (10). Действительно, подстановка ряда (10), если приравнять нулю коэффициент при x в степени $\nu + \lambda - 2$, дает

$$(\lambda + \nu)^2 a_\lambda + a_{\lambda-2} = 0 \quad (\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad a_{-2} = a_{-1} = 0).$$

Это рекуррентное соотношение при $\lambda = 0$ и 1 приводит к двум определяющим уравнениям:

$$\nu^2 a_0 = 0,$$
$$(\nu + 1)^2 a_1 = 0.$$

Первое решение: $\nu = 0$, a_0 неопределенно, $a_1 = 0$. В данном случае, обозначая $\lambda = 2r$, получим ряд, сходящийся при любом x:

$$y = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}.$$

С точностью до постоянного множителя это ряд для бесселевой функции $J_0(x)$ (см. п. 7.5.1).

Второе решение: $\nu = -1$, $a_0 = 0$, a_1 неопределенно. Обозначая $\lambda = 2r + 1$, получим ряд того же типа, в котором роль постоянного множителя играет a_1 *).

Класс уравнений, решаемых с помощью обобщенных степенных рядов, определяется теоремой Фукса. Приведем ее без доказательства.

Если дифференциальное уравнение

$$y'' + f_1(x)\, y' + f_2(x)\, y = 0 \tag{11}$$

таково, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют полюсы при $x = x_0$, то можно найти решение в виде сходящегося обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x - x_0)^\lambda$$

при условии, что произведения

$$(x - x_0) f_1(x), \quad (x - x_0)^2 f_2(x)$$

остаются конечными при $x = x_0$.

Ясно, что эти условия не выполняются для дифференциальных уравнений

$$y'' + \frac{y}{x^3} = 0, \quad y'' + \frac{y'}{x^2} = 0,$$

но выполняются для уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0.$$

Отметим, что при помощи замены переменной можно всегда перенести полюс в точку $x = 0$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (11) и предположим, что оно удовлетворяет условиям Фукса при $x = 0$. Тогда

*) Отметим, что и это решение, с точностью до постоянного множителя, равно функции $J_0(x)$. Второе, линейно независимое решение рассматриваемого уравнения представляет сумму обобщенного степенного ряда и $\ln x$ (см. п. 7.5.3).

функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно представить в виде:

$$f_1(x)=\frac{1}{x}(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{x^2}(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots).$$

Коэффициенты p_0, q_0, q_1 не равны нулю одновременно. В противном случае $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имели бы при $x=0$ особой точки, и определение общего решения уравнения в виде степенного ряда не представляло бы никакого затруднения.

Будем искать решение уравнения (11) в виде (10). Обозначим через $D(\nu)$ определяющее уравнение:

$$D(\nu)=\nu(\nu-1)+p_0\nu+q_0=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x, получим:

$x^{\nu-2}$: $a_0D(\nu)=0$,

$x^{\nu-1}$: $a_1D(\nu+1)+a_0(\nu p_1+q_1)=0$,

x^{ν}: $a_2D(\nu+2)+a_1[(\nu+1)p_1+q_1]+a_0(\nu p_2+q_2)=0$,

. . . . . .

$x^{\nu+\lambda-2}$: $a_\lambda D(\nu+\lambda)+a_{\lambda-1}[(\nu+\lambda-1)p_1+q_1]+\ldots+a_0(\nu p_\lambda+q_\lambda)=0$

. . . . . .

Из определяющего уравнения находим для ν два значения: ν_1 и ν_2. Предположим, что они отличны друг от друга и разность между ними — не целое число. В этом случае можно последовательно вычислить два ряда коэффициентов a_λ, соответствующих каждому корню определяющего уравнения. Таким образом, мы получим два обобщенных степенных ряда типа (10). Эти ряды представляют собой линейно независимые решения уравнения (11). Коэффициент a_0, входящий множителем во все члены рядов, остается произвольным, т. е. каждое решение определено с точностью до постоянного множителя. Общий интеграл уравнения получается в виде линейной комбинации этих двух решений.

Положим, что определяющее уравнение имеет двойной корень. В этом случае имеется только одно решение типа (10). Второе, линейно независимое с первым решение придется искать с помощью других искусственных приемов (см. п. 6.2.11). Определив его, мы сможем получить общий интеграл уравнения (11).

Положим, что определяющее уравнение имеет два корня, отличающихся друг от друга на целое число, т. е.

$$\nu_2=\nu_1+n\ (n\text{ — целое положительное число}).$$

Тогда нетрудно вычислить коэффициенты ряда, соответствующего корню ν_2, так как $D(\nu_2+1)$, $D(\nu_2+2)$, ... отличны от нуля. Для ряда, соответствующего корню ν_1, дело обстоит значительно хуже. Здесь процесс вычисления коэффициентов обрывается на $(n-1)$-м номере. Действительно, уравнение, определяющее коэффициент a_n как функцию a_0, a_1, ..., a_{n-1}, имеет вид

$$a_nD(\nu_1+n)+a_{n-1}[p_1(n+\nu_1-1)+q_1]+\ldots+a_0(p_n\nu_1+q_n)=0.$$

Коэффициент при a_n равен нулю, так как $\nu_1+n=\nu_2$ — корень уравнения $D(\nu)=0$. Рассматриваемое уравнение сводится к равенству

$$a_{n-1}[p_1(n+\nu_1-1)+q_1]+\ldots+a_0(p_n\nu_1+q_n)=0.$$

Если это линейное соотношение не удовлетворяется вычисленными ранее коэффициентами $a_0, \ldots, a_{n-1}$, что и бывает в большинстве случаев, то найти разложение в ряд типа (10), соответствующее корню ν_1, невозможно, т. е. рассматриваемый способ не позволяет получить общий интеграл. Если же соотношение выполняется, то можно выразить все коэффициенты a_{n+1}, $a_{n+2}, \ldots$ через a_n, который остается неопределенным. Это значит, что решение, соответствующее ν_1, содержит два произвольных параметра: коэффициент a_0, входящий общим множителем в решение, и коэффициент a_n, от которого зависят члены ряда a_{n+1}, $a_{n+2}, \ldots$

Пример. *Гипергеометрический ряд.* Рассмотрим уравнение

$$x(x-1)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0,$$

где параметры α, β, γ — постоянные величины. Для особых точек коэффициентов этого уравнения $x=0$ и $x=1$ условия Фукса выполняются.

Построим, например, решение уравнения в окрестности особой точки $x=0$. Полагаем

$$y = x^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda.$$

Приравняем нулю коэффициенты при $x^{\nu+\lambda}$:

$$a_\lambda(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1) - a_{\lambda+1}(\nu+\lambda+1)(\nu+\lambda) + \\ + a_\lambda(\nu+\lambda)(1+\alpha+\beta) - a_{\lambda+1}(\nu+\lambda+1)\gamma + a_\lambda\alpha\beta = 0.$$

Члену с наименьшей степенью x, равной $\nu-1$, соответствует определяющее уравнение

$$a_0\nu(\nu-1) + a_0\nu\gamma = 0,$$

т. е.

$$\nu(\nu+\gamma-1) = 0.$$

Его корни: $\nu=0$, $\nu=1-\gamma$. Будем предполагать, что γ — не нуль и не целое число, т. е. рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения в виде обобщенного степенного ряда (10).

1. Рассмотрим корень $\nu=0$. Рекуррентное соотношение дает

$$a_{\lambda+1} = \frac{(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+\gamma)}a_\lambda.$$

Отсюда получаем частное решение

$$y_1 = a_0\left[1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\lambda-1)}{\lambda!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\lambda-1)}x^\lambda + \ldots\right].$$

Этот ряд называется гипергеометрическим рядом Гаусса. Он сходится абсолютно для любых α, β, γ при $|x|<1$, а также при $|x|=1$, если $\gamma-\alpha-\beta>0$. Классическое обозначение такого ряда

$$y = a_0F(\alpha, \beta, \gamma; x),$$

причем $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ называется гипергеометрической функцией Гаусса.

2. Рассмотрим корень $\nu=1-\gamma$. Рекуррентное соотношение будет

$$a_{\lambda+1} = \frac{(\alpha-\gamma+\lambda+1)(\beta-\gamma+\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2-\gamma)}.$$

Оно совпадает с предыдущим выражением, в котором параметры α, β, γ заменены соответственно на $\alpha-\gamma+1$, $\beta-\gamma+1$, $2-\gamma$. Отсюда получаем второе, линейно независимое с первым решение

$$y_2 = a_0 x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1, 2-\gamma;\ x),$$

и общее решение имеет вид

$$y = Ay_1 + By_2.$$

Отметим некоторые частные случаи гипергеометрической функции:

$$(1+x)^n = F(-n,\ 1,\ 1;\ -x),$$
$$\ln(1+x) = xF(1,\ 1,\ 2;\ -x),$$
$$\arcsin x = xF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ x^2\right),$$
$$\operatorname{arctg} x = xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2};\ -x^2\right).$$

В п. 7.6.14 мы увидим, что функции Лежандра также являются частным случаем гипергеометрической функции. Нетрудно убедиться, что функция $F\left(n,\ -n,\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)$ является решением дифференциального уравнения Чебышева:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

При n целом это уравнение допускает в качестве решения обрывающийся гипергеометрический ряд — полином n-й степени. Он обозначается через $T_n(x)$ и называется полиномом Чебышева; с точностью до множителя, зависящего от n *),

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{n^2}{2!}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}x^6 + \ldots \\ \qquad\qquad (n \text{ — четное}), \\ x - \frac{n^2-1}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{5!}x^5 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{7!}x^7 + \ldots \\ \qquad\qquad (n \text{ — нечетное}). \end{cases}$$

6.2.11. Некоторые теоремы о свойствах решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y'f_1(x) + yf_2(x) = 0. \tag{11}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых решения (11). Подставим их в уравнение (11) и исключим $f_2(x)$ из обоих уравнений. Имеем

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 + (y_1'y_2 - y_2'y_1)f_1(x) = 0.$$

Выражение в левой части представляет собой, с точностью до множителя $e^{\int f_1(x)\,dx}$ *), производную произведения

$$(y_1'y_2 - y_2'y_1)e^{\int f_1(x)\,dx}.$$

Отсюда получаем соотношение, связывающее y_1, y_2, и их первые производные:

$$y_1'y_2 - y_2'y_1 = Ae^{-\int f_1(x)\,dx}.$$

*) Этот множитель определяется из условия $T_n(1) = 1$, которое равносильно требованию: коэффициент при x^n полинома $T_n(x)$ должен быть равен 2^{n-1}.

Разделив на y_2^2, найдем

$$\frac{y_1'y_2 - y_1'y_1}{y_2^2} = \frac{d}{dx}\frac{y_1}{y_2} = \frac{A}{y_2^2}e^{-\int f_1(x)\,dx},$$

откуда

$$y_1 = y_2\left(B + A\int \frac{dx}{y_2^2 e^{\int f_1(x)\,dx}}\right).$$

Эта формула позволяет по одному частному решению $y_2(x)$ найти второе, линейно независимое с первым решение

$$y_2\int \frac{e^{-\int f_1(x)\,dx}\,dx}{y_2^2}.$$

Относительно корней решений уравнения (11) мы можем сформулировать следующие три теоремы:

1. Пусть функция $y_1(x)$, не равная тождественно нулю, — решение уравнения (11), и корни $y_1(x)$ не являются полюсами $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда корни $y_1(x)$ — простые.

В самом деле, пусть α — двойной корень $y_1(x) = 0$. Тогда $y_1(\alpha) = y_1'(\alpha) = 0$. В силу уравнения (11) и предположения теоремы обращается в нуль также и $y_1''(\alpha)$. Последовательно дифференцируя уравнение (11) и подставляя затем значение $x = \alpha$, получим, что

$$y_1(\alpha) = y_1'(\alpha) = \ldots = y_1^{(n)}(\alpha) = \ldots = 0.$$

Разложим $y_1(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = \alpha$. Имеем

$$y_1(\alpha + h) = y_1(\alpha) + \frac{h}{1!}y_1'(\alpha) + \ldots + \frac{h^n}{n!}y_1^{(n)}(\alpha) + \ldots \equiv 0.$$

Следовательно, $y_1(x) \equiv 0$, что противоречит предположению.

2. Два линейно независимых решения уравнения (11) не могут иметь общих корней.

Положим в уравнении (11) $y = u(x)v(x)$. Тогда

$$v(u'' + u'f_1 + uf_2) + v'(2u' + uf_1) + v''u = 0.$$

Выберем u таким образом, чтобы коэффициент при v' обратился в нуль. Имеем

$$2u' + uf_1 = 0,$$

откуда

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)\,dx}.$$

Уравнение (11) примет вид

$$v'' + g(x)v = 0, \tag{12}$$

где *)

$$g(x) = f_2(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}f_1(x) - \frac{1}{4}[f_1(x)]^2.$$

---

*) Функция $g(x)$ называется инвариантом уравнения (11), так как все дифференциальные уравнения (11), решения которых отличаются множителем $u(x)$, не равным нулю, приводятся к одному и тому же виду (12) (см. [3], стр. 243).

Корни функций v и y совпадают, так как

$$v = \frac{y}{u}, \quad u \neq 0.$$

Пусть v_1 и v_2 — два линейно независимых решения (12). Имеем

$$v_1'' + g(x)\, v_1 = v_2'' + g(x)\, v_2 = 0.$$

Отсюда находим

$$v_1'' v_2 - v_2'' v_1 = \frac{d}{dx}(v_1' v_2 - v_2' v_1) = 0,$$

$$v_1' v_2 - v_2' v_1 = C.$$

Если $v_1(x)$ и $v_2(x)$ обращаются в нуль при одном и том же значении $x = \alpha$, то постоянная C должна быть равна нулю. Отсюда получаем

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{v_2'}{v_2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dv_1}{v_1} = \frac{dv_2}{v_2} \quad \text{и} \quad \frac{v_1}{v_2} = \text{const},$$

что противоречит предположению о линейной независимости v_1 и v_2. Следовательно, $v_1(x)$ и $v_2(x)$ не имеют общих корней, и это справедливо также и для обоих линейно независимых решений (11).

3. Нули двух линейно независимых решений уравнения (11) взаимно разделяют друг друга (теорема Штурма).

Из предыдущего вычисления имеем

$$\frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_2^2} = \frac{c}{v_2^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

Отсюда

$$\left[\frac{v_1}{v_2}\right]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \int_\alpha^\beta \frac{C}{v_2^2}\, dx.$$

Положим, что α и β — два последовательных корня $v_1(x)$. Покажем, что внутри интервала (α, β) лежит корень $v_2(x)$. Предположим противное. Тогда функция $\frac{v_1(x)}{v_2(x)}$ будет непрерывна при $\alpha \leqslant x < \beta$ и равна нулю на концах этого интервала, так как, согласно предыдущей теореме, числа α и β не будут корнями $v_2(x)$. Следовательно, $\left[\frac{v_1(x)}{v_2(x)}\right]_{x=\alpha}^{x=\beta} = 0$. Но $\int_\alpha^\beta \frac{C}{v_2^2}\, dv = 0$ не может быть равен нулю, так как $\frac{C}{v_2^2}$ сохраняет в промежутке интегрирования постоянный знак. Отсюда следует, что $v_2(x)$ должна обращаться в нуль внутри интервала (α, β). При этом $v_2(x)$ имеет внутри (α, β) только один корень. В противном случае, повторяя предыдущее рассуждение, но поменяв местами v_1 и v_2, мы могли бы показать, что $v_1(x)$ обращается между двумя корнями $v_2(x)$ в нуль. А это противоречит предположению, что α и β — последовательные корни $v_1(x)$.

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + A_n y = g(t), \tag{13}$$

где A_0, A_1, ..., A_n — коэффициенты, не зависящие от y и t. Можно получить общее решение уравнения (13), отыскав общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$A_0\frac{d^ny}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+A_ny=0 \tag{14}$$

и прибавив к этому общему интегралу частный интеграл неоднородного уравнения (13).

6.2.12. Интегрирование однородного дифференциального уравнения. Положим

$$y=e^{pt}.$$

Получим уравнение

$$(A_0p^n+A_1p^{n-1}+\ldots+A_n)\,e^{pt}=0.$$

Оно удовлетворяется, если p есть корень алгебраического уравнения

$$f(p)=A_0p^n+A_1p^{n-1}+\ldots+A_n=0, \tag{15}$$

которое называется характеристическим.

Пусть p_1, p_2, ..., p_n — корни уравнения (15). Предположим сначала, что они все различные. Общий интеграл в этом случае будет

$$y=C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+\ldots+C_ne^{p_nt}.$$

Коэффициенты C — произвольные постоянные.

6.2.13. Случай кратного корня. Положим, что уравнение (15)

$$A_0p^n+A_1p^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

имеет один кратный корень p_1 k-го порядка. Тогда у нас только $n-k+1$ различных корней, и

$$C_1e^{p_1t}+C_{k+1}e^{p_{k+1}t}+\ldots+C_ne^{p_nt}$$

— уже не общее решение, так как оно содержит только $n-k+1$ неопределенных постоянных.

Положим

$$y=ue^{p_1t}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt}=e^{p_1t}\left(\frac{du}{dt}+p_1u\right).$$

Введем следующие символические обозначения *):

$$\frac{du}{dt}=Du,\quad \frac{d^2u}{dt^2}=D^2u,\quad \ldots,\quad \frac{d^nu}{dt^n}=D^nu.$$

Имеем

$$\frac{dy}{dt}=e^{p_1t}\left(\frac{du}{dt}+p_1u\right)=e^{p_1t}(D+p_1)\,u,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^{p_1t}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+2p_1\frac{du}{dt}+p_1^2u\right)=e^{p_1t}(D+p_1)^2u,$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dt^n}=e^{p_1t}(D+p_1)^n\,u.$$

*) Ниже используется символический метод решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Более подробно этот метод описан, например, в [1], стр. 114—122, или [4], стр. 117—124.

Подставим в дифференциальное уравнение (14). Получим

$$e^{p_1 t}[A_0(D+p_1)^n + A_1(D+p_1)^{n-1} + \ldots + A_n]u = 0$$

или

$$[A_0(D+p_1)^n + A_1(D+p_1)^{n-1} + \ldots + A_n]u = 0. \qquad (16)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках равно $f(D+p)$, где $f(p)$ задано формулой (15).

Так как p_1 — кратный корень $f(p)$ порядка k, то можно написать

$$f(p) = \varphi(p)(p-p_1)^k, \quad \text{причем} \quad \varphi(p_1) \neq 0.$$

Подставляя вместо p выражение $D+p_1$ и умножая результат на u, получим, согласно (16),

$$\varphi(D+p_1)D^k u = 0.$$

Это символическое уравнение удовлетворяется, если $D^k u = 0$, т. е. $\frac{d^k u}{dt^k} = 0$.

Отсюда следует

$$u = C_1 + C_2 t + \ldots + C_k t^{k-1}.$$

Мы нашли недостающие $k-1$ произвольные постоянные. Таким образом, общий интеграл уравнения (14) в рассматриваемом случае равен

$$C_1 e^{p_1 t} + C_2 t e^{p_1 t} + \ldots + C_k t^{k-1} e^{p_1 t} + C_{k+1} e^{p_{k+1} t} + \ldots + C_n e^{p_n t}.$$

Полученный результат, очевидно, обобщается на случай нескольких кратных корней характеристического уравнения (15).

Пример. Решим уравнение

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение $p^3 - 3p + 2 = 0$ имеет двойной корень $p = 1$:

$$p^3 - 3p + 2 = (p-1)^2(p+2).$$

Отсюда общее решение:

$$y = Ae^{-2t} + (B+Ct)e^t.$$

6.2.14. Частный интеграл неоднородного уравнения. Обратимся теперь к неоднородному уравнению (13):

$$A_0\frac{d^n y}{dt^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + A_n y = g(t). \qquad (13)$$

В соответствии со сказанным выше, для определения общего решения (13) остается найти его частный интеграл. Во многих случаях вид частного интеграла продиктован видом функции $g(t)$. Но в общем случае заранее определить этот вид нельзя — нужно решать уравнение (13) непосредственно. Это удобно делать операционным методом, изложенным в п. 8.5.2.

Рассмотрим важный для электротехники частный случай, когда функция $g(t)$ равна

$$g_1(t) = Se^{-at}\cos(\omega t + \varphi).$$

Частный интеграл естественно искать в виде

$$e^{-at}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Коэффициенты A и B определяются путем подстановки. Удобно поступать так. Функция $g_1(t)$ есть вещественная часть следующего комплексного выражения:

$$Se^{-at}e^{j(\omega t+\varphi)}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$A_0\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+A_n y=g_1(t)+jg_2(t)=Se^{-at}e^{j(\omega t+\varphi)}. \tag{17}$$

Пусть y_1 — частное решение (17). Выделяя вещественную и мнимую части, мы запишем его в виде

$$y_1=\mathrm{R}(y_1)+j\mathrm{I}(y_1).$$

Так как постоянные $A_0, \ldots, A_n$ вещественны, то $\mathrm{R}(y_1)$ — частное решение уравнения (13) с правой частью, равной $g_1(t)$, а $\mathrm{I}(y_1)$ — частное решение вспомогательного уравнения

$$A_0\frac{d^n y}{dt^n}+\ldots+A_n y=Se^{-at}\sin(\omega t+\varphi).$$

Попытаемся найти частное решение (17) в виде

$$y_1=\xi e^{(-a+j\omega)t}.$$

Замена тригонометрической функции экспонентной очень упрощает вычисление, так как после подстановки y_1 в (17) обе части уравнения можно сократить на $e^{(-a+j\omega)t}$. Для ξ получаем

$$\xi=\frac{Se^{j\varphi}}{A_0(-a+j\omega)^n+\ldots+A_n}.$$

Отсюда

$$y_1=\frac{Se^{j\varphi}}{A_0(-a+j\omega)^n+\ldots+A_n}e^{(-a+j\omega)t},$$

т. е.

$$y_1=\frac{S}{f(j\omega-a)}e^{-at}e^{j(\omega t+\varphi)}. \tag{18}$$

Следовательно, вещественная часть (18) $\mathrm{R}(y_1)$ есть решение уравнения (13) с правой частью $g_1(t)$, если $j\omega-a$ не является корнем характеристического уравнения (15). В частном случае, когда отсутствует затухание, имеем

$$y_1=\frac{S}{f(j\omega)}e^{j(\omega t+\varphi)}. \tag{19}$$

Общий интеграл однородного уравнения (14), соответствующего неоднородному уравнению (13), представляет собой часть решения, описывающего переходный режим. Только что определенный частный интеграл (19) неоднородного уравнения (13) соответствует постоянному режиму (вынужденные колебания).

Пример. Решим уравнение

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+2y=\sin 2t.$$

1. Найдем общий интеграл однородного уравнения. Характеристическое уравнение $p^3+3p^2+4p+2=0$ имеет корни

$$p_1=-1,\quad p_{2,3}=-1\pm j.$$

Следовательно, решение однородного уравнения будет

$$e^{-t}(A+B\cos t+C\sin t).$$

2. В соответствии с (19), частный интеграл уравнения вида (17)

$$y_1 = \frac{e^{2jt}}{(2j)^3 + 3(2j)^2 + 4(2j) + 2} = -\frac{e^{2jt}}{10}$$

и частное решение предложенного уравнения равно $-\frac{\sin 2t}{10}$. Отсюда общее решение

$$y = e^{-t}(A + B\cos t + C\sin t) - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

Если предложенное уравнение относится к электрической или механической системе, подвергающейся воздействию периодической силы, пропорциональной $\sin 2t$, то переходный режим описывается выражением

$$e^{-t}(A + B\cos t + C\sin t),$$

а режим вынужденных колебаний — выражением

$$-\frac{1}{10}\sin 2t.$$

6.2.15. Случай резонанса. Рассмотрим уравнение

$$A_0\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + A_n y = Se^{j\omega t}e^{j\varphi}e^{-at}.$$

Предположим, что $j\omega - a$ — кратный корень k-го порядка характеристического уравнения $f(p) = 0$. В этом случае формула (18) неприменима. Будем искать частное решение в виде

$$ASt^k e^{j\omega t}e^{-at}.$$

Повторяя вычисления п. 6.2.13 для $y = ue^{p_1 t}$ при $u = ASt^k$ и $p_1 = j\omega - a$, получим

$$ASe^{(j\omega - a)t}[A_0(D + j\omega - a)^n + \ldots + A_n]t^k = Se^{j\omega t - at}e^{j\varphi}.$$

Используя формулу Тейлора для многочленов, перепишем это равенство в виде

$$A\left[f(j\omega - a) + f'(j\omega - a)\frac{D}{1!} + \ldots + f^{(k)}(j\omega - a)\frac{D^k}{k!} + \right.$$
$$\left. + \ldots + f^{(n)}(j\omega - a)\frac{D^n}{n!}\right]t^k = e^{j\varphi}.$$

Но

$$D^n t^k = \ldots = D^{k+1}t^k = 0$$

и, по предположению ($j\omega - a$ — кратный корень k-го порядка),

$$f(j\omega - a) = f'(j\omega - a) = \ldots = f^{(k-1)}(j\omega - a) = 0, \quad f^{(k)}(j\omega - a) \neq 0.$$

Таким образом, в левой части рассматриваемой формулы только один член не равен нулю. Учитывая, что $D^k t^k = k!$, находим

$$A = \frac{e^{j\varphi}}{f^{(k)}(j\omega - a)}$$

и частный интеграл y_1 будет

$$y_1 = t^k \frac{Se^{j(\omega t + \varphi)}e^{-at}}{f^{(k)}(j\omega - a)}.$$

Если коэффициент затухания a мал, то y_1 может принимать большие значения. Если нет затухания ($a=0$), то y_1 будет беспредельно возрастать. Речь идет о случае, когда частота вынужденных колебаний совпадает с собственной частотой электрической или механической системы. Это кончается пробоем для электрической и разрывом для механической системы, если только возрастающее затухание не изменит характера процесса. Соответствующим образом изменится тогда и дифференциальное уравнение задачи.

Пример. Решим уравнение $y''+a^2y=\sin at$. Частный интеграл представляет собой мнимую часть выражения

$$y_1=\frac{1}{2ja}te^{jat}$$

и равен

$$-\frac{t}{2a}\cos at.$$

Следовательно, общий интеграл будет

$$y=A\cos at+B\sin at-\frac{t}{2a}\cos at.$$

6.2.16. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{cases} a\dfrac{d^2x}{dt^2}+b\dfrac{dx}{dt}+cx+d\dfrac{d^2y}{dt^2}+e\dfrac{dy}{dt}+fy=0, \\ a'\dfrac{d^2x}{dt^2}+b'\dfrac{dx}{dt}+c'x+d'\dfrac{d^2y}{dt^2}+e'\dfrac{dy}{dt}+f'y=0. \end{cases} \tag{20}$$

Положим

$$x=Ae^{\gamma t},\quad y=Be^{\gamma t}.$$

Коэффициенты A и B определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A(a\gamma^2+b\gamma+c)+B(d\gamma^2+e\gamma+f)=0, \\ A(a'\gamma^2+b'\gamma+c)+B(d'\gamma^2+e'\gamma+f')=0. \end{cases} \tag{21}$$

Для того чтобы она имела решения, отличные от нуля, нужно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a\gamma^2+b\gamma+c & d\gamma^2+e\gamma+f \\ a'\gamma^2+b'\gamma+c' & d'\gamma^2+e'\gamma+f' \end{vmatrix}=0. \tag{*}$$

Это уравнение имеет четыре корня: γ_1, γ_2, γ_3, γ_4. Рассмотрим корень γ_1. Система (21) при $\gamma=\gamma_1$, согласно (*), сводится к одному уравнению, что дает для A и B значения, пропорциональные

$$d\gamma_1^2+e\gamma_1+f \quad \text{и} \quad -(a\gamma_1^2+b\gamma_1+c).$$

Отсюда получаем частное решение системы:

$$x_1=(d\gamma_1^2+e\gamma_1+f)e^{\gamma_1 t},$$
$$y_1=-(a\gamma_1^2+b\gamma_1+f)e^{\gamma_1 t}.$$

Таким же образом найдем решения x_2, y_2; x_3, y_3 и x_4, y_4, соответствующие корням γ_2, γ_3 и γ_4. Общее решение будет

$$x=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+C_4x_4,$$
$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4.$$

Очевидно, что рассмотренный метод распространяется на общий случай решения p линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами. Все p неизвестных функций оказываются зависящими от np произвольных постоянных.

Если рассматривается неоднородная система, то следует, так же как и в случае одного уравнения, сначала решить однородную систему, а затем прибавить к общему решению этой системы частное решение неоднородной системы.

6.3. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Если число независимых переменных больше единицы, то дифференциальные уравнения содержат частные производные. В случае, когда функция z зависит от двух переменных x и y, уравнение имеет вид

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \ldots\right)=0. \tag{22}$$

Аналитические методы решения уравнений в частных производных найдены только для некоторых случаев. Важнейшие из них следующие: уравнение, однородное и линейное относительно частных производных, с постоянными коэффициентами; уравнение колебаний струны; телеграфное уравнение; уравнение Лапласа; уравнение Пуассона; уравнения Максвелла. Эти уравнения разбираются нами ниже.

6.3.1. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами, однородное относительно частных производных. Рассмотрим сначала уравнение без правой части. Для случая двух независимых переменных это уравнение имеет вид

$$A_0\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}+\ \ldots\ +A_{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x\,\partial y^{n-1}}+A_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0. \tag{23}$$

Положим [1]) $\frac{\partial}{\partial x}=p$, $\frac{\partial}{\partial y}=q$. Тогда уравнение (23) принимает вид

$$(A_0p^n+A_1p^{n-1}q+\ \ldots\ +A_{n-1}pq^{n-1}+A_nq^n)\,z=0. \tag{24}$$

Разложим однородный многочлен в левой части (24) на линейные множители:

$$(\alpha_1p+\beta_1q)(\alpha_2p+\beta_2q)\ \ldots\ (\alpha_np+\beta_nq)\,z=0. \tag{25}$$

Уравнение (25) сводится к n уравнениям типа

$$(\alpha_jp+\beta_jq)\,z=0,$$

т. е.

$$\alpha_j\frac{\partial z}{\partial x}+\beta_j\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{26}$$

Каждое уравнение (26) удовлетворяется выражением (см., например, [5])

$$z=\Phi_j(\alpha_jy-\beta_jx),$$

где Φ_j обозначает любую функцию. Следовательно, общее решение уравнения (23) будет

$$z=\Phi_1(\alpha_1y-\beta_1x)+\Phi_2(\alpha_2y-\beta_2x)+\ \ldots\ +\Phi_n(\alpha_ny-\beta_nx). \tag{27}$$

---

[1]) Частные производные обозначаются также следующим образом: z_{xy} вместо $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, z_{xx} вместо $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и т. д.

Мы предполагали, что однородный многочлен уравнения (24) имеет только простые корни. Если он имеет корень k-го порядка, то общее решение уравнения типа

$$(\alpha_l p + \beta_l q)^k z = 0$$

будет

$$z = \Phi_l(\alpha_l y - \beta_l x) + x\Phi_{l+1}(\alpha_l y - \beta_l x) + \ldots + x^{k-1}\Phi_{l+k-1}(\alpha_l y - \beta_l x). \quad (28)$$

Это решение займет место суммы

$$\Phi_l(\alpha_l y - \beta_l x) + \Phi_{l+1}(\alpha_{l+1} y - \beta_{l+1} x) + \ldots + \Phi_{l+k-1}(\alpha_{l+k-1} y - \beta_{l+k-1})$$

в общем решении (27).

6.3.2. Уравнение с правой частью. Если уравнение (23) имеет правую часть, то оно легко решается для случая, когда эта правая часть — многочлен, однородный относительно x и y:

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} y + \ldots + a_p y^p.$$

Частное решение ищется в виде

$$b_0 x^{p+n} + b_1 x^{p+n-1} y + \ldots + b_{p+n} y^{p+n}.$$

Коэффициенты b определяются путем подстановки.

Пример. Найдем общее решение уравнения

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 3\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 240xy.$$

Разложим левую часть на множители:

$$(p - q)(p + q)(p + 2q)^2 z = 0.$$

Частное решение ищем в виде

$$z = b_0 x^6 + b_1 x^5 y + b_2 x^4 y^2 + b_3 x^3 y^3 + b_4 x^2 y^4 + b_5 x y^5 + b_6 y^6.$$

Подставим это выражение в уравнение и приравняем коэффициенты при x^2, xy, y^2. Получим три уравнения с 7 неизвестными:

$$\begin{aligned} 15b_0 + 10b_1 + 3b_2 - 3b_3 - 4b_4 &= 0, \\ 10b_1 + 16b_2 + 9b_3 - 16b_4 - 40b_5 &= 20, \\ b_2 + 3b_3 + 3b_4 - 10b_5 - 60b_6 &= 0. \end{aligned}$$

Так как нужно найти любое частное решение, примем $b_0 = b_2 = b_3 = b_6 = 0$. Тогда

$$b_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_4 = -\frac{5}{6}, \quad b_5 = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно, общее решение

$$z = \Phi_1(y + x) + \Phi_2(y - x) + \Phi_3(y - 2x) + x\Phi_4(y - 2x) - \frac{1}{12}(4x^5 y + 10x^2 y^4 + 3xy^5).$$

6.3.3. Уравнение колебаний струны. Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x),$$

а затем

$$z = \int f(x)\,dx + \varphi(y),$$

иначе говоря [1]),

$$z = \psi(x) + \varphi(y).$$

Здесь φ и ψ обозначают две произвольные функции.

Обратимся теперь к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Произведем замену переменных, положив $u = x + at$, $v = x - at$. Тогда нетрудно показать, что это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Отсюда

$$z = \psi(u) + \varphi(v)$$

и, возвращаясь к прежним переменным,

$$z = \psi(x + at) + \varphi(x - at).$$

Рассмотрим частный случай, полагая

$$\psi(x + at) = A \sin k(x + at),$$
$$\varphi(x - at) = A \sin k(x - at).$$

Соответствующее решение будет

$$z = 2A \cos kat \cdot \sin kx.$$

Покажем, как можно применить полученное решение к задачам из теории электричества.

Рассмотрим полностью изолированный линейный проводник, омическим сопротивлением которого будем пренебрегать (рис. 6.1). Положение произвольной точки M этого проводника определяем криволинейной абсциссой s. Пусть S — криволинейная абсцисса точки B.

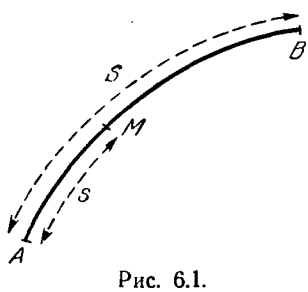


Рис. 6.1.

Обозначим через i и v соответственно силу тока и потенциал в точке M в момент времени t. Если переместиться по проводнику на единицу длины, то падение напряжения будет вызвано самоиндукцией рассматриваемого участка. Отсюда получаем

$$-L\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}. \qquad (29)$$

Точно так же изменение силы тока на единицу длины будет вызвано тем, что часть тока будет шунтирована емкостью рассматриваемого участка. Отсюда

$$-C\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial i}{\partial s}. \qquad (30)$$

---

[1]) Можно было бы получить этот результат, применяя соображения предыдущего пункта, но здесь проще прямое вычисление.

Дифференцируя уравнения (29) и (30) соответственно по t и s и исключив функцию v, получим

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial s^2}.$$

Будем считать, что для любого момента времени t сила тока $i = i(s, t)$ равна нулю на концах проводника:

$$i(0, t) = i(S, t) = 0,$$

а при $t = 0$

$$i(S, 0) = f(s),$$

где $f(s)$ — известная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(0) = f(S) = 0.$$

Легко видеть, что решение поставленной задачи может быть удовлетворено суперпозицией полученных выше частных решений волнового уравнения, т. е.

$$i(s, t) = \sum_n a_n \cos\frac{n\pi}{S}\frac{t}{\sqrt{LC}} \sin n\pi\frac{s}{S}.$$

Действительно, граничные условия удовлетворяются, так как $i = 0$ при $s = 0$ и $s = S$. При $t = 0$ получаем

$$f(s) = \sum_n a_n \sin n\pi\frac{s}{S}.$$

Решение удовлетворяет начальному условию, если коэффициенты a_n вычисляются по формуле

$$a_n = \frac{2}{S}\int_0^S f(s)\sin n\pi\frac{s}{S}\,ds,$$

т. е. являются коэффициентами Фурье для функции $f(s)$.

6.3.4. Телеграфное уравнение. Это уравнение вида

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (LG + CR)\frac{\partial E}{\partial t} + GRE.$$

Оно решается применением операционного исчисления (см. гл. VIII, п. 8.4.10 и последующие).

6.3.5. Уравнение Лапласа. Это уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta U = 0. \tag{31}$$

В задачах о распространении волн часто встречается уравнение вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

В этом случае, разлагая искомую функцию в ряд по синусоидальным функциям времени, члены которого имеют вид

$$U(x, y, z, t) = e^{jkct}U(x, y, z),$$

мы придем для функции $U(x, y, z)$ к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \quad \text{или} \quad \Delta U + k^2 U = 0. \tag{32}$$

Стоящая перед инженером задача заключается не в отыскании общего решения уравнения (31) или (32). Ему нужно найти такое конкретное решение, которое удовлетворяет на некоторых поверхностях определенным граничным условиям. В качестве граничных условий могут быть заданы значения функции (задача Дирихле) или ее производной по некоторому направлению (задача Неймана). Эти значения могут быть либо известными постоянными, либо, чаще всего, известными функциями координат.

Решение задачи существенно упрощается, если рассматривать ее в системе ортогональных криволинейных координат, для которой заданные поверхности входят в семейство (или в несколько семейств) координатных поверхностей.

Пусть ρ, φ, ϑ — координаты выбранной системы. Естественно частный интеграл уравнения (31) или (32) искать в виде

$$U(\rho, \varphi, \vartheta) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,\Theta(\vartheta),$$

в котором каждая из функций R, Φ, Θ зависит только от одной координаты ρ, φ, ϑ. Этот частный интеграл будем называть произведением Лапласа.

Функции R, Φ, Θ содержат произвольные постоянные. Линейный характер уравнений (31) и (32) показывает, что эти уравнения удовлетворяются некоторой конечной или бесконечной, дискретной или непрерывной суммой произведений Лапласа, в которых произвольные постоянные принимают все возможные значения. Кроме того, в этой сумме каждое произведение Лапласа может сопровождаться произвольным коэффициентом. Искомым решением будет такая сумма произведений Лапласа, в которой произвольные коэффициенты принимают значения, обеспечивающие выполнение граничных условий.

Таким образом, решение уравнений (31) и (32) сводится к следующей задаче: найти произведения Лапласа в рассматриваемой ортогональной системе криволинейных координат. Выражения для произведений Лапласа, полученные в следующих пунктах, позволяют также найти решение некоторых часто встречающихся дифференциальных уравнений, например дифференциального уравнения для функции U Бромвича (формула (87) п. 6.3.13).

Известно (п. 3.4.2), что в системе ортогональных криволинейных координат, где квадрат элемента длины равен

$$ds^2 = e_1^2\,dx_1^2 + e_2^2\,dx_2^2 + e_3^2\,dx_3^2,$$

лапласиан ΔU имеет вид

$$\Delta U = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right].$$

Здесь e_1, e_2, e_3 обозначают локальные единицы длины. В такой системе уравнения (31) и (32) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e_2 e_3}{e_1}\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3 e_1}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_1 e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) + k^2 e_1 e_2 e_3 U = 0. \tag{34}$$

В рассматриваемых ниже различных системах координат мы будем искать произведения Лапласа, удовлетворяющие уравнению (34). Из них, полагая $k = 0$, мы получим произведения Лапласа, удовлетворяющие уравнению (33). Для некоторых менее употребительных систем координат мы ограничимся рассмотрением одного только уравнения (33).

6.3.6. Прямоугольная система координат. Положим

$$U(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z).$$

После подстановки в уравнение (32) и деления на XYZ получаем

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0. \tag{35}$$

Первые три члена уравнения (35) зависят соответственно только от x, y, z. Следовательно, единственная возможность удовлетворить уравнению (35) — положить

$$\frac{d^2X}{dx^2} + m^2X = 0,$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + p^2Y = 0,$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + q^2Z = 0.$$

Постоянные m, p, q — это произвольные вещественные или комплексные числа, подчиняющиеся единственному условию

$$m^2 + p^2 + q^2 = k^2.$$

Отсюда произведение Лапласа [1]) имеет вид

$$U = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} mx \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz.$$

Граничные условия приводят к дополнительным соотношениям между числами m, p, q. Искомое решение будет суммой всех произведений Лапласа, каждое из которых удовлетворяет граничным условиям (см. п. 6.3.14).

6.3.7. Система цилиндрических координат. Если граничные условия для функции U заданы на цилиндре вращения с осью Oz, то нужно перейти к системе цилиндрических координат, описанной в п. 3.4.3 и изображенной на рис. 3.27. В этой системе уравнение (34) будет

$$\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2U}{\partial z^2} + k^2U = 0. \tag{36}$$

Будем искать решение в форме

$$U(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z).$$

После подстановки и деления на $R\Phi Z$ уравнение (36) приобретает вид

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right] + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0. \tag{37}$$

Первые два члена (37) не зависят от z, поэтому и третий член не должен зависеть от z.

Полагаем

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \mp q^2.$$

---

[1]) Обозначение $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} qz$ представляет собой сокращенную запись линейной комбинации $A\cos qz + B\sin qz$. В дальнейшем мы встретимся с подобными обозначениями: $R = \begin{matrix}J_\nu\\ Y_\nu\end{matrix}(a\rho)$ вместо $R = AJ_\nu(a\rho) + BY_\nu(a\rho)$; $Z = e^{\pm qz}$ вместо $Z = Ae^{qz} + Be^{-qz}$ и т. д.

Знаку минус соответствует решение

$$Z = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} qz, \tag{38}$$

а знаку плюс —

$$Z = e^{\pm qz} \quad \text{или} \quad Z = \begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \mathrm{sh}\end{matrix} qz. \tag{39}$$

Тогда уравнение (37) может быть написано в виде

$$\frac{\rho^2}{R}\left[\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right] + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (k^2 \mp q^2)\rho^2 = 0. \tag{40}$$

Рассуждение, подобное предыдущему, приводит к уравнению

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \mp \nu^2.$$

Знаку минус отвечает решение

$$\Phi = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \nu\varphi, \tag{41}$$

знаку плюс —

$$\Phi = e^{\pm \nu\varphi} \quad \text{или} \quad \Phi = \begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \mathrm{sh}\end{matrix} \nu\varphi.$$

Для функции $R(\rho)$ знак плюс приводит к бесселевым функциям с мнимым индексом. Этот случай встречается на практике очень редко, и мы не будем на нем останавливаться.

Если радиус-вектор может свободно вращаться в области существования функции U, то она должна принимать одинаковое значение при φ и $\varphi + 2\pi$, т. е. ν должно быть целым числом n. При этом говорят, что имеет место симметрия повторения порядка n. Особый случай представится, если, например, область является полым цилиндром с радиальной перегородкой.

Подставляя (41) в (40), получим

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 \mp q^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0.$$

Это уравнение решается в бесселевых функциях (см. § 7,5). Рассмотрим частные случаи:

1. Перед q^2 знак плюс или знак минус, но при условии, что $k^2 - q^2 > 0$. Обозначая для этого случая $k^2 \mp q^2 = a^2$, имеем

$$R = \begin{matrix}J_\nu\\ Y_\nu\end{matrix} (a\rho). \tag{42}$$

2. Перед q^2 знак минус, причем $k^2 - q^2 < 0$. Полагая $k^2 - q^2 = -a^2 < 0$, найдем

$$R = \begin{matrix}I_\nu\\ K_\nu\end{matrix} (a\rho). \tag{43}$$

Если ось Oz входит в область существования решения, то U должна принимать конечные значения при $\rho = 0$. Это исключает решения Y и K.

Таким образом, произведение Лапласа будет

$$U = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

где функции R, Φ, Z даются равенствами (38), (39), (41) — (43).

Замечание. Случаи, когда одна из постоянных q, ν, a равна нулю, следует рассматривать отдельно. Если $q = 0$, то решение (38) и (39) заменяется на

$$Z = Az + B.$$

Точно так же, если $\nu = 0$, решение (41) заменяется на

$$\Phi = A'\varphi + B'.$$

Функции Бесселя имеют тогда нулевой порядок. По причинам, указанным выше, при наличии симметрии вращения A' должно равняться нулю.

Если $a = 0$, то решение (42) заменяется на

$$R = A''\rho^{\nu} + B''\rho^{-\nu}.$$

Если, кроме того, ν равно нулю, то

$$R = A''' \ln \rho + B'''.$$

Если ось Oz входит в область существования U, то $B'' = 0$, $A''' = 0$.

6.3.8. Система сферических координат. Если граничные условия для функции U заданы на шаре с центром O или на конусе вращения с вершиной O, то следует перейти к системе сферических координат, описанной в п. 3.4.4 и изображенной на рис. 3.28. В этой системе уравнение (34) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0.$$

Будем искать решение в форме

$$U(\rho, \vartheta, \varphi) = R(\rho)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi).$$

После подстановки и деления на $R\Theta\Phi$ получим

$$\frac{1}{R}\left[\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + 2\rho\frac{dR}{d\rho}\right] + \frac{1}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2\rho^2 = 0. \quad (44)$$

Рассуждение, аналогичное рассуждению предыдущего пункта, приводит к

$$\frac{1}{R}\left[\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + 2\rho\frac{dR}{d\rho}\right] + k^2\rho^2 = p^2. \quad (45)$$

Отсюда (см. п. 7.5.36)

$$R = \rho^{-\frac{1}{2}}\begin{matrix} J_{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}} \\ -Y_{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}} \end{matrix}(k\rho). \quad (46)$$

Не будем останавливаться на случае, когда правая часть уравнения (45) равна $-p^2$. Это привело бы нас к бесселевым функциям с мнимым индексом.

Если $k = 0$, т. е. если требуется найти произведение Лапласа как решение уравнения (33), то (45) принимает вид

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{p^2}{\rho^2}R = 0. \quad (47)$$

Это уравнение Эйлера (п. 6.2.9). Имеем

$$R = \rho^{-\frac{1}{2}}\begin{matrix} \rho^{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}} \\ \rho^{-\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}} \end{matrix}. \quad (48)$$

Если точка O относится к области существования решения, то функции $Y_{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}$ и $\rho^{-\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}$ должны быть исключены из числа решений (46)

и (48). Функция $J_{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}$ подходит, так как $\sqrt{p^2+\frac{1}{4}} \geqslant \frac{1}{2}$, а значит, произведение $\rho^{-\frac{1}{2}} J_{\sqrt{p^2+\frac{1}{4}}}$ конечно при $\rho = 0$.

Подставляя выражение для $R(\rho)$ в уравнение (44), получим

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right] + p^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0. \tag{49}$$

Так же как и в п. 6.3.7, заключаем, что

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2 = 0.$$

Отсюда

$$\Phi = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \mu\varphi. \tag{50}$$

Если в области существования решения угол φ может принимать значения, превышающие 2π, то μ должно быть целым числом m (ср. п. 6.3.7). Исключение представляет собой задача для шара с полукруглой перегородкой.

Подставляя в (49) формулу (50) при $\mu = m$, получим

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta} + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0. \tag{51}$$

Если отрицательная полуось z ($\vartheta = -\pi$) входит в область существования решения, то единственным возможным решением будут функции (см. п. 7.6.22)

$$\Theta = \begin{matrix}P_n^m \\ Q_n^m\end{matrix}(\cos\vartheta), \tag{52}$$

где n — целое число, связанное с p соотношением $n(n+1) = p^2$. Это условие ограничивает произвол в выборе p. В частности, индекс бесселевых фуикций из (46) становится полуцелым, равным $n + \frac{1}{2}$.

Если полная ось z входит в область существования решения, то следует исключить функции Q_n^m (см. п. 7.6.22).

Таким образом, произведение Лапласа будет

$$U(\rho, \varphi, \vartheta) = R(\rho)\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta),$$

где функции R, Φ, Θ даются равенствами (46), (48), (50), (52).

6.3.9. Система эллиптических цилиндрических координат. Если граничные условия заданы на поверхности эллиптического или гиперболического цилиндра, то следует перейти к системе координат, описанной в (п. 3.4.7) и показанной на рис. 3.30. В этой системе уравнение (34) записывается в виде

$$\frac{1}{a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \tag{53}$$

Будем искать решение U в форме

$$U(\xi, \varphi, z) = \Xi(\xi)\Phi(\varphi)Z(z).$$

После подстановки и деления на U уравнение (53) приобретает вид

$$\frac{1}{a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)}\left[\frac{1}{\Xi}\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right] + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0. \tag{54}$$

Полагаем

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\mu^2=0.$$

Отсюда

$$Z=\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu z. \tag{55}$$

Если обозначить $p^2=(k^2-\mu^2)a^2$, то уравнение (54) примет вид

$$\frac{1}{\Xi}\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+p^2\operatorname{ch}^2\xi+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}-p^2\cos^2\varphi=0. \tag{56}$$

Это уравнение распадается на два следующих:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\left(r^2-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p^2\cos 2\varphi\right)\Phi=0,$$

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}-\left(r^2-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p^2\operatorname{ch}2\xi\right)\Xi=0.$$

Полагая $r^2-\frac{p^2}{2}=b$, а $p^2=4q$, получим

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+(b-2q\cos 2\varphi)\Phi=0. \tag{57}$$

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}-(b-2q\operatorname{ch}2\xi)\Xi=0. \tag{58}$$

Уравнение (57) называется дифференциальным уравнением Матье. Уравнение (58) сводится к предыдущему путем замены переменной $\xi=j\varphi$.

Для того чтобы функция U вернулась к первоначальному значению после полного оборота по поверхности эллиптического цилиндра, она обязана иметь по φ период 2π (ср. п. 6.3.7). Это должно иметь место, если по условиям задачи отсутствует радиальная перегородка, препятствующая изменению на угол, превосходящий 2π. В этом важном случае мы оставляем только те решения уравнения Матье (57), которые имеют период 2π. Они называются функциями Матье целого порядка *) и обозначаются (см. п. 7.7.1)

$$\operatorname{ce}_m(\varphi,\ q),\quad \operatorname{se}_m(\varphi,\ q). \tag{59}$$

Решения уравнения (58) в свою очередь представляют собой присоединенные функции Матье целого порядка (п. 7.7.4):

$$\operatorname{Ce}_m(\xi,\ q),\quad \operatorname{Se}_m(\xi,\ q).$$

6.3.10. Система параболических цилиндрических координат. Если граничные условия заданы на поверхности параболического цилиндра, то следует перейти к системе координат, описанной в п. 3.4.5 и изображенной на рис. 3.29. В этой системе уравнение (34) записывается в виде

$$\frac{1}{c^2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}\right]+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+k^2U=0. \tag{60}$$

Будем искать решение в форме

$$U(\alpha,\ \beta,\ z)=A(\alpha)B(\beta)Z(z).$$

После подстановки и деления на U уравнение (60) принимает вид

$$\frac{1}{c^2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\frac{1}{A}\frac{d^2A}{d\alpha^2}+\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\beta^2}\right]+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2=0. \tag{61}$$

*) Или функциями Матье первого рода.

Полагаем

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \mp m^2.$$

Отсюда

$$Z = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mz \quad \text{или} \quad \begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \mathrm{sh}\end{matrix} mz. \tag{62}$$

Если обозначить $p^2 = (\pm m^2 - k^2)c^2$, то уравнение (61) примет вид

$$\frac{1}{A}\frac{d^2A}{d\alpha^2} - p^2\alpha^2 + \frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\beta^2} - p^2\beta^2 = 0. \tag{63}$$

Уравнение (63) распадается на два следующих:

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} + (\pm q^2 - p^2\alpha^2)A = 0, \tag{64}$$

$$\frac{d^2B}{d\beta^2} - (\pm q^2 + p^2\beta^2)B = 0. \tag{65}$$

Эти уравнения переходят одно в другое путем замены переменной $\alpha = j\beta$. Они решаются с помощью функций Вебера — Эрмита (см. п. 7.8.1).

6.3.11. Другие системы координат. Ограничимся здесь определением произведений Лапласа для уравнения $\Delta U = 0$.

Рассмотрим следующие системы координат:

1. *Система вытянутых эллипсоидальных координат вращения* (см. пп. 3.4.8 и 7.6.22):

$$x = a\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\varphi \sin\psi, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,\xi \sin\varphi\cos\psi, \quad z = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi,$$

$$\Delta U = \frac{1}{a^2(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)}\left[\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\mathrm{th}\,\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \\ + \frac{1}{a^2\,\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\varphi}\frac{\partial^2U}{\partial\psi^2} = 0,$$

$$U = \sum \Psi\Phi\Xi,$$

$$\Psi = A_1\cos\mu\psi + A_2\sin\mu\psi,$$

$$\Phi = B_1P_\nu^\mu(\cos\varphi) + B_2Q_\nu^\mu(\cos\varphi),$$

$$\Xi = C_1\tilde{P}_\nu^\mu(\mathrm{ch}\,\xi) + C_2Q_\nu^\mu(\mathrm{ch}\,\xi).$$

2. *Система сплюснутых эллипсоидальных координат вращения* (см. п. 3.4.9):

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi\sin\psi, \quad y = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi\cos\psi, \quad z = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi,$$

$$\Delta U = \frac{1}{a^2(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)}\left[\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2} + \mathrm{th}\,\xi\frac{\partial U}{\partial\xi} - \mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right] + \\ + \frac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^2\xi\cos^2\varphi}\frac{\partial^2U}{\partial\psi^2} = 0,$$

$$U = \sum \Psi\Phi\Xi,$$

$$\Psi = A_1\cos\mu\psi + A_2\sin\mu\psi,$$

$$\Phi = B_1P_\nu^\mu(\sin\varphi) + B_2Q_\nu^\mu(\sin\varphi),$$

$$\Xi = C_1\tilde{P}_\nu^\mu(j\,\mathrm{sh}\,\xi) + C_2\tilde{Q}_\nu^\mu(j\,\mathrm{sh}\,\xi).$$

3. *Система параболических координат вращения (параболоидальные координаты)* (см. п. 3.4.6):

$$x = c\alpha\beta\cos\psi, \quad y = c\alpha\beta\sin\psi, \quad z = \frac{1}{2}c(\beta^2 - \alpha^2),$$

$$\Delta U = \frac{1}{c^2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial U}{\partial\beta}\right] + \frac{1}{c^2\alpha^2\beta^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} = 0,$$

$$U = \sum \Psi AB,$$

$$\Psi = A_1\cos\mu\psi + A_2\sin\mu\psi,$$

$$A = B_1 J_\mu(p\alpha) + B_2 Y_\mu(p\alpha),$$

$$B = C_1 I_\mu(p\beta) + C_2 K_\mu(p\beta).$$

4 *Система тороидальных координат* (см. п. 3.4.11):

$$x = a\frac{\operatorname{sh}\xi\sin\psi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad y = a\frac{\operatorname{sh}\xi\cos\psi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad z = a\frac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi},$$

$$\Delta U = \frac{(\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi)^2}{a^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right] +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}{a^2}\left[\frac{1+\cos\varphi\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} + \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right] = 0,$$

$$U = \sqrt{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}\sum \Psi\Phi\Xi,$$

$$\Psi = A_1\cos\mu\psi + A_2\sin\mu\psi,$$

$$\Phi = B_1\cos\nu\varphi + B_2\sin\nu\varphi,$$

$$\Xi = C_1\tilde{P}^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\xi) + C_2\tilde{Q}^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\xi).$$

5. *Система бисферических координат* (см. п. 3.4.11):

$$x = a\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad y = a\frac{\sin\varphi\cos\psi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}, \quad z = a\frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi},$$

$$\Delta U = \frac{(\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi)^2}{a^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right] +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}{a^2}\left[\frac{1+\cos\varphi\operatorname{ch}\xi}{\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \operatorname{sh}\xi\frac{\partial U}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$U = \sqrt{\operatorname{ch}\xi + \cos\varphi}\sum \Psi\Phi\Xi,$$

$$\Psi = A_1\cos\mu\psi + A_2\sin\mu\psi,$$

$$\Phi = B_1 P^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi) + B_2 Q^\mu_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

$$\Xi = C_1\operatorname{ch}\nu\xi + C_2\operatorname{sh}\nu\xi.$$

Замечание. Функции, входящие в приведенные выше произведения Лапласа, написаны в наиболее общем виде. Совершенно ясно, что условие существования функции U в определенной области приводит к ограничению общего набора функций, составляющих произведение Лапласа. Это было показано на примерах в предыдущих пунктах. В частности, нередко μ и ν являются целыми числами, и тогда следует отбросить функции Y, K, Q.

Следует также заметить, что определения функций P^μ_ν и Q^μ_ν различны в зависимости от того, заключается ли их аргумент между -1 и $+1$.

находится ли он вне этого интервала или, что бывает чаще всего, является комплексным числом (см. приложение к п. 7.6.25).

6.3.12. Уравнение Пуассона. Это дифференциальное уравнение вида

$$\Delta U = f(x, y, z).$$

Оно совпадает с формулой Пуассона (см. п. 3.3.10)

$$\Delta V + \frac{1}{\varepsilon}\rho(x, y, z) = 0,$$

если предположить, что электрические заряды распределены с плотностью $-\varepsilon f(x, y, z)$. Поэтому решение уравнения Пуассона естественно искать в виде скалярного потенциала непрерывной системы электрических зарядов.

Докажем, что действительно выражение

$$U_1 = -\int_\tau \frac{f(x, y, z)}{4\pi r}\, d\tau, \quad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \qquad (*)$$

дает частное решение уравнения Пуассона. Здесь x, y, z — текущие координаты точки, x_1, y_1, z_1 — координаты точки наблюдения, а $d\tau$ — элемент объема области τ.

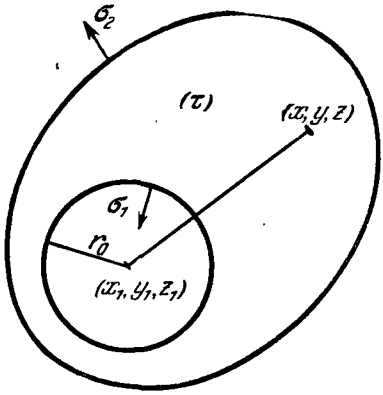


Рис. 6.2.

Согласно формуле Грина (см. п. 3.3.8)

$$\int_\tau \frac{\Delta U}{r}\, d\tau = \int_\sigma \left[\frac{\operatorname{grad} U}{r} - U \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\sigma, \qquad (66)$$

поскольку

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Поверхность σ состоит из внутренней стороны поверхности σ_1, ограничивающей сферическую полость с центром (x_1, y_1, z_1), и внешней стороны поверхности σ_2, ограничивающей область τ (рис. 6.2).

Будем предполагать, что U вместе со своими частными производными ограничена внутри τ и на σ_2. Устремим к нулю радиус r_0 сферической полости. Тогда $\int_{\sigma_1} \frac{\operatorname{grad} U}{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1$ тоже стремится к нулю, а пределом второго интеграла по поверхности σ_1: $\int_{\sigma_1} U \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}_1$ будет $4\pi U(x_1, y_1, z_1)$*). Пусть теперь U — решение уравнения Пуассона, т. е. $\Delta U = f(x, y, z)$. В силу (66) получаем

$$\int_\tau \frac{f(x, y, z)}{r}\, d\tau + 4\pi U(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma_2} \left[\frac{\operatorname{grad} U}{r} - U \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot d\sigma_2.$$

Правая часть этого выражения представляет собой вклад в функцию U интеграла по внешней поверхности области τ. Отметим, что эта часть, с точ-

*) Напомним, что $d\sigma_1$ направлена внутрь сферической полости.

ностью до множителя $\frac{1}{4\pi}$, дает решение уравнения Лапласа

$$\Delta U(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

которому соответствует $f = 0$.

Предположим, что в любой конечной области функция U и ее частные производные ограничены и при стремлении r к бесконечности U имеет порядок r^{-1}, а ее производные — r^{-2}. Будем называть такие функции U правильными. Для правильной функции выражение в квадратных скобках имеет порядок r^{-3} (при больших r), и при $r \to \infty$ интеграл справа стремится к нулю. Следовательно, выражение

$$U(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{1/2}}, \qquad (**)$$

где интеграл распространен на все пространство, представляет собой решение уравнения Пуассона.

Полагая в этой формуле $f = 0$ вне области τ, убедимся *), что U_1 из (*) является частным решением уравнения Пуассона внутри τ. Обозначим через U общее решение уравнения Пуассона и положим $U - U_1 = W$. Тогда $\Delta W = 0$, т. е. W — общее решение уравнения Лапласа.

Итак, общий интеграл уравнения Пуассона дается формулой

$$U = U_1 + W,$$

где U_1 — частный интеграл уравнения Пуассона (*), а W — общий интеграл уравнения Лапласа.

Отметим, что правильное решение уравнения Пуассона во всем пространстве единственно, оно дается формулой (**). Это следует из теоремы Лиувилля: гармоническая во всем пространстве функция, исчезающая на бесконечности, тождественно равна нулю **).

Замечание. Уравнение Пуассона играет основную роль не только в электростатике. Оно, наряду с уравнениями динамики, описывает законы электронной оптики.

6.3.13. Решение уравнений Максвелла методом Бромвича. Если выразить электрическое и магнитное поле в рационализированной системе МКСА, то уравнения Максвелла для среды с диэлектрической постоянной ε и магнитной проницаемостью μ получают вид:

$$\operatorname{rot} E = -\mu\frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} H = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} E = 0,$$

$$\operatorname{div} H = 0.$$

Запишем эти уравнения в ортогональной системе координат, квадрат элемента длины в которой равен

$$ds^2 = e_1^2\,dx_1^2 + e_2\,dx_2^2 + e_3\,dx_3^2.$$

*) Строгий вывод см. в [8], стр. 171—175.
**) См. там же.

Получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2E_2) = -\mu e_2 e_3 \frac{\partial H_1}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}(e_1E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3E_3) = -\mu e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1E_1) = -\mu e_1 e_2 \frac{\partial H_3}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2H_2) = \varepsilon e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}(e_1H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3H_3) = \varepsilon e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1H_1) = \varepsilon e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t},\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2e_3E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3e_1E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1e_2E_3) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2e_3H_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3e_1H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1e_2H_3) = 0.
\end{aligned} \tag{67}$$

Можно доказать, что общее решение системы (67) получается наложением двух частных решений этой системы. Первое решение соответствует предположению $H_1 = 0$. Это поперечная магнитная волна. Ее называют также электрической волной или волной (E). Второе решение соответствует предположению $E_1 = 0$. Это поперечная электрическая волна. Ее называют также магнитной волной или волной (H).

Отметим, что излагаемый метод применим только к таким системам ортогональных криволинейных координат, для которых локальная единица длины e_1 является функцией только одной координаты x_1, а отношение остальных локальных единиц длины не зависит от координаты x_1.

Не уменьшая общности, мы можем считать, что $e_1 = 1$. В противном случае можно ввести новую переменную x_1' с помощью соотношения $dx_1' = e_1\,dx_1$. Итак, предполагаем, что локальные единицы длины рассматриваемой системы координат удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&e_1 = 1,\\
&\frac{e_2}{e_3} \text{ не зависит от } x_1.
\end{aligned} \tag{68}$$

Поперечная магнитная волна, или волна (E). Если приравнять H_1 нулю, то первое уравнение (67) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3E_3) = \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2E_2). \tag{69}$$

Отсюда следует, что

$$e_2E_2 = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \tag{70}$$

$$e_3E_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3}, \tag{71}$$

где P — произвольная функция.

Так как локальные единицы длины не зависят от времени, то из пятого и шестого уравнений (67), в силу (70) и (71), следует

$$\varepsilon \frac{e_3e_1}{e_2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2\,\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_1}(e_3H_3), \tag{72}$$

$$\varepsilon \frac{e_1e_2}{e_3} \frac{\partial^2 P}{\partial x_3\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2H_2). \tag{73}$$

Согласно допущениям (68) эти уравнения можно переписать в виде

$$\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial t} = -\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 H_3) = -\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 H_3), \tag{74}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial t} = \frac{e_3}{e_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 H_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 H_2). \tag{75}$$

Положим $P = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}$. Отметим, что функцию U часто называют потенциалом электрических колебаний. С помощью U уравнения (74) и (75) можно записать так:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t} = -e_2 H_3, \tag{76}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t} = e_3 H_2. \tag{77}$$

Из уравнений (70), (71), (76), (77) получаем выражения для E_2, E_3, H_3, H_2 через потенциал U:

$$E_2 = \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}, \tag{78}$$

$$H_2 = \varepsilon \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t}, \tag{79}$$

$$E_3 = \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1}, \tag{80}$$

$$H_3 = -\varepsilon \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t}. \tag{81}$$

Подставим выражения (79) и (80) во второе или выражения (78) и (81) в третье уравнение (67). Тогда

$$E_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{82}$$

Точно так же, если подставить выражения (79) и (81) в четвертое уравнение (67), получаем

$$E_1 = -\frac{1}{e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{83}$$

Приравняв правые части выражений (82) и (83), находим дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция U:

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{84}$$

Если U — общее решение уравнения (84), то выражения составляющих электромагнитного поля для магнитной поперечной волны [волны (E)] будут

$$E_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad E_2 = \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad E_3 = \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3};$$
$$H_1 = 0, \quad H_2 = \varepsilon \frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial t}, \quad H_3 = -\varepsilon \frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial t}. \tag{85}$$

Поперечная электрическая волна, или волна (H). Повторяя предыдущие рассуждения в предположении $E_1 = 0$, получим следующие выражения

для составляющих электромагнитного поля волны (H):

$$E_1=0,\quad E_2=-\mu\frac{1}{e_3}\frac{\partial^2U}{\partial x_3\,\partial t},\quad E_3=\mu\frac{1}{e_2}\frac{\partial^2U}{\partial x_2\,\partial t};$$
$$H_1=\frac{\partial^2U}{\partial x_1^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\quad H_2=\frac{1}{e_2}\frac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_2},\quad H_3=\frac{1}{e_3}\frac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_3}, \tag{86}$$

где потенциал U определяется из того же самого уравнения (84).

Случай синусоидальной зависимости от времени. Будем считать (а это почти всегда имеет место), что электромагнитное поле является синусоидальной функцией времени. Так как уравнения Максвелла (67) линейны, то в этом случае следует заменить в них символ $\frac{\partial}{\partial t}$ на jkv. Нетрудно убедиться, что тогда U также должна быть синусоидальной функцией времени вида

$$U(x,\ y,\ z,\ t)=U(x,\ y,\ z)e^{jkvt},$$

где v обозначает скорость электромагнитной волны в среде, причем

$$v^2\mu\varepsilon=1\quad\text{и}\quad k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

Новая функция U, зависящая только от пространственных координат, определяется уравнением

$$\frac{\partial^2U}{\partial x_1^2}+\frac{1}{e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right]+k^2U=0. \tag{87}$$

Согласно (85) и (86) в рассматриваемом случае имеем (множитель e^{jkvt} при записи опускаем):

$$\begin{cases} E_1=\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1^2}+k^2U,\quad E_2=\dfrac{1}{e_2}\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_2},\quad E_3=\dfrac{1}{e_3}\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_3};\\ H_1=0,\quad H_2=\dfrac{jk}{e_3}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\dfrac{\partial U}{\partial x_3},\quad H_3=-\dfrac{jk}{e_2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\dfrac{\partial U}{\partial x_2}; \end{cases} \tag{88}$$

$$\begin{cases} E_1=0,\quad E_2=-\dfrac{jk}{e_3}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\dfrac{\partial U}{\partial x_3},\quad E_3=\dfrac{jk}{e_2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\dfrac{\partial U}{\partial x_2};\\ H_1=\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1^2}+k^2U,\quad H_2=\dfrac{1}{e_2}\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_2},\quad H_3=\dfrac{1}{e_3}\dfrac{\partial^2U}{\partial x_1\,\partial x_3}. \end{cases} \tag{89}$$

Замечание. Сравним уравнение Бромвича (87) с уравнением (34), в котором $e_1=1$. Легко заметить, что эти уравнения отличаются только первым членом: в уравнении (87) он равен $\frac{\partial^2U}{\partial x_1^2}$, а в уравнении (34) — $\frac{1}{e_2e_3}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_2e_3\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)$. Таким образом, все вычисления, проделанные при решении уравнения (34), могут быть перенесены на соответствующее уравнение Бромвича. При этом выкладки будут мало отличаться друг от друга и в случае уравнения Бромвича (более простого по форме) приведут к менее сложным функциям. Разумеется, эти соображения могут быть использованы только для тех систем координат, в которых соблюдены условия (68). К числу таких систем относятся: цилиндрические, параболические цилиндрические, эллиптические цилиндрические, бицилиндрические и сферические. Отметим, впрочем, что уравнение (84) будет особо рассмотрено в случае цилиндрической (п. 7.5.41) и сферической (п. 7.6.31) систем координат.

6.3.14. Пример. Электромагнитные колебания в прямоугольной полости. Предполагаем, что стенки сделаны из абсолютно проводящего материала (рис. 6.3).

Используем прямоугольные координаты, т. е. $e_1 = e_2 = e_3 = 1$. Если ограничиться синусоидальными функциями времени, то потенциал U Бромвича получается из уравнения (87), которое в этом случае совпадает с уравнением Гельмгольца (п. 6.3.6). Для этого уравнения произведение Лапласа будет

$$U = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz \quad \text{при} \quad k^2 = m^2 + p^2 + q^2.$$

(Обозначение $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \alpha$, как и выше, заменяет бином $A\cos\alpha + B\sin\alpha$.)

Решение для поперечных магнитных колебаний [1]):

$$\begin{aligned}
E_x &= (k^2 - m^2) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz,\\
E_y &= mp \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} mx \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz,\\
E_z &= mq \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} qz,\\
H_x &= 0,\\
H_y &= -jq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} qz,\\
H_z &= jp \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz.
\end{aligned} \tag{90}$$

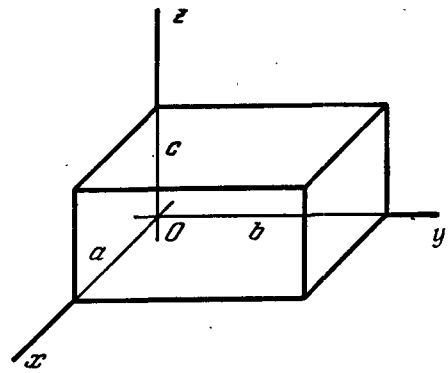


Рис. 6.3.

Решение для поперечных электрических колебаний [1]):

$$\begin{aligned}
E_x &= 0,\\
E_y &= -jq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} qz,\\
E_z &= jp \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz,\\
H_x &= (k^2 - m^2) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz,\\
H_y &= mp \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} mx \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} py \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qz,\\
H_z &= mq \begin{matrix}-\sin\\ \cos\end{matrix} mx \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} py \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} qz.
\end{aligned} \tag{91}$$

Граничные условия: тангенциальные составляющие электрического поля на стенках параллелепипеда равны нулю. Таким образом, параметры m, p, q (a, b, c — ребра параллелепипеда) таковы, что

$$\begin{aligned}
E_y = E_z = 0 \quad &\text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = a,\\
E_z = E_x = 0 \quad &\text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = b,\\
E_x = E_y = 0 \quad &\text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = c.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в произведение Лапласа $\cos mx \sin py \sin qz$, соответствующее решению для поперечных магнитных колебаний, и в произведение

[1]) Множитель e^{jkvt} при записи опускается.

Лапласа $\sin mx \cos py \cos qz$, соответствующее решению для поперечных электрических колебаний, могут входить только следующие величины m, p, q:

$$m = \frac{\alpha\pi}{a}, \quad p = \frac{\beta\pi}{b}, \quad q = \frac{\gamma\pi}{c}, \tag{92}$$

где α, β, γ — целые числа.

Теперь нетрудно написать окончательные выражения полей, зачеркнув в формулах (90) или (91) неподходящие тригонометрические функции (стоящие вверху или внизу), учитывая, что значения m, n, p определяются формулами (92). Соответствующая длина волны будет

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}}}.$$

Заметим, что для поперечных магнитных колебаний сочетания следующих целых чисел α, β, γ дают нулевое решение:

(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0).

Колебание с наибольшей длиной волны получается из сочетания (0, 1, 1). Если $b = c$, то эта максимальная длина волны равна диагонали квадрата.

Для поперечных электрических колебаний самые длинные волны даются сочетанием (1, 1, 0) или (1, 0, 1):

$$\lambda_{\max} = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1/2} \quad \text{или} \quad 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{-1/2}$$

в зависимости от того, будет ли c меньше или больше b.

Замечание 1. Отметим, что к полученному выше решению нужно добавить два других решения, которые находятся из предыдущего круговой перестановкой x, y, z. В нашем решении ось Ox играет предпочтительную роль. В действительности все три оси равноправны.

Замечание 2. Не следует забывать, что группы формул (90) и (91) определялись, исходя из функции U, иначе говоря, через произведение Лапласа, определенное с точностью до коэффициента. Этот коэффициент может оказаться различным для каждого вида колебаний, т. е. для каждой комбинации чисел m, p, q. Он зависит от других граничных условий, описывающих возбуждение электромагнитных колебаний полости.

Замечание 3. Рассмотрение резонирующих объемов более сложной формы, чем в примере этого пункта, будет сделано в пп. 7.5.41, 7.6.31. Там будут существенно использованы свойства бесселевых и сферических функций.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Физматгиз, 1962.
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1957.
3. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.
4. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1957.
5. Матвеев Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во ЛГУ, 1955.
6. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
7. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
8. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
9. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

ГЛАВА VII

НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

7.0.1. Асимптотическое разложение. Рассмотрим, вообще говоря, расходящийся ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$$

Сумму $n+1$ первых его членов обозначим $S_n(z)$ (частная сумма). Согласно Пуанкаре [1]), ряд представляет собой асимптотическое разложение функции $f(z)$ в определенной области изменения $\arg z$, если при таких z выражение

$$R_n(z) = z^n \{f(z) - S_n(z)\}$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{|z|\to\infty} R_n(z) = 0 \quad (n \text{ — фиксированное}),$$

даже если при этом

$$\lim_{n\to\infty} [f(z) - S_n(z)] \neq 0 \quad (z \text{ — фиксированное}).$$

Запишем эту связь между рядом и функцией в виде

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$$

Согласно определению асимптотического разложения, отсюда следует, что для любого положительного сколь угодно малого ε при достаточно больших z (при фиксированном n) имеет место

$$|z^n \{f(z) - S_n(z)\}| < \varepsilon.$$

Покажем на примере, как с помощью расходящегося асимптотического разложения функции можно приближенно подсчитать ее численные значения.

Пусть функция $f(x)$ определена равенством

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t}\, dt, \quad x > 0.$$

---

[1]) H. Poincaré, Acta mathematica, 8 (1886), p. 295.

Повторным интегрированием по частям найдем

$$f(x)=\left[-\frac{1}{t}\,e^{x-t}\right]_x^\infty-\int_x^\infty t^{-2}e^{x-t}\,dt=\frac{1}{x}-\int_x^\infty t^{-2}e^{x-t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+2!\int_x^\infty t^{-3}e^{x-t}\,dt,$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-3!\int_x^\infty t^{-4}e^{x-t}\,dt=\ \ldots,$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\frac{3!}{x^4}+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+$$

$$+(-1)^n n!\int_x^\infty t^{-n-1}e^{x-t}\,dt.$$

Рассмотрим ряд, частная сумма которого равна

$$S_n(x)=\frac{1}{x}-\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ \ldots\ +\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

В данном случае $a_0=0$. Имеем

$$0<n!\int_x^\infty t^{-n-1}e^{x-t}\,dt=\frac{n!}{x^{n+1}}-(n+1)!\int_x^\infty t^{-n-2}e^{x-t}\,dt<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

так как оба интеграла, входящие в эти соотношения, положительны. Значит,

$$|R_n(x)|=|x^n\{f(x)-S_n(x)\}|<\frac{n!}{x}.$$

Если x бесконечно возрастает, то $R_n(x)$ при фиксированном n стремится к нулю. Следовательно, $S_n(x)$ представляет собой частную сумму асимптотического разложения $f(x)$. Соответствующий ряд расходится при любом x, так как нарушается необходимый признак сходимости.

Используем этот расходящийся ряд для вычисления $f(10)$. Тогда общий член разложения равен $\frac{(-1)^n n!}{10^{n+1}}$; он убывает по абсолютной величине от $n=1$ до $n=10$, а затем растет до бесконечности. По доказанному выше,

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Поэтому за приближенное значение $f(10)$ выгодно принять S_{10}. Тогда соответствующая ошибка будет меньше

$$\frac{10!}{10^{11}}=0{,}0000362\ \ldots$$

Следующая таблица и рис. 7.1 показывают последовательное убывание и возрастание частных сумм рассматриваемого асимптотического разложения:

$S_1 = 0{,}1$	$S_{11} = 0.091782\ldots$
$S_2 = 0{,}09$	$S_{12} = 0{,}091743\ldots$
$S_3 = 0{,}092$	$S_{13} = 0{,}091791\ldots$
$S_4 = 0{,}0916$	$S_{14} = 0{,}091729\ldots$
$S_5 = 0.09184$	$S_{15} = 0{,}091816\ldots$
$S_6 = 0{,}091720$	$S_{16} = 0.091685\ldots$
$S_7 = 0{,}091792$	$S_{17} = 0{,}091895\ldots$
$S_8 = 0{,}091742\ldots$	$S_{18} = 0{,}091545\ldots$
$S_9 = 0{,}091782\ldots$	$S_{19} = 0{,}092185\ldots$
$S_{10} = 0{,}091746\ldots$	. . . . .

Если в определенной области изменения z функция допускает асимптотическое разложение, то это разложение определяется единственным образом.

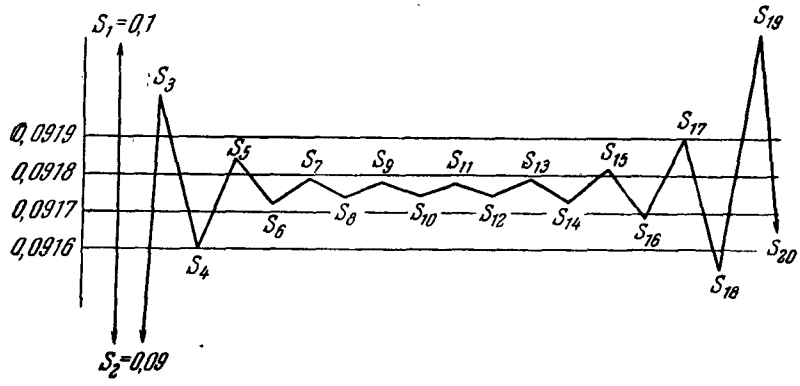


Рис. 7.1.

Действительно, полагая в условии существования асимптотического разложения последовательно $n = 1, 2, \ldots$, получаем

$$a_0 = \lim_{|z|\to\infty} f(z), \quad a_1 = \lim_{|z|\to\infty} z\{f(z) - a_0\},$$

$$a_2 = \lim_{|z|\to\infty} z^2\left\{f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right\}, \ldots$$

Напротив, две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение. Классический пример представляют собой две функции, отличающиеся на $e^{-\beta z}$ при $R(\beta) > 0$. Действительно, коэффициенты асимптотического разложения $e^{-\beta z}$ при $z > 0$, вычисленные с помощью полученных выше формул, тождественно равны нулю.

Пусть существуют асимптотические разложения функций $f(z)$ и $g(z)$:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Тогда справедливы следующие теоремы:

1. Общий член асимптотического разложения $\alpha f(z)+\beta g(z)$ равен

$$\frac{\alpha a_n+\beta b_n}{z^n}.$$

2. Общий член асимптотического разложения произведения функций $f(z)g(z)$ равен

$$\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Замечание. Если $b_0 \neq 0$, то можно делить на асимптотическое разложение $g(z)$.

3. Если функция $\psi(f)$ разложима в степенной ряд, сходящийся при $|f|<\rho$, то асимптотическое разложение функции

$$\varphi(z)=\psi(f(z))$$

получается непосредственной подстановкой в степенной ряд $\psi(f)$ асимптотического разложения $f(z)$ (при условии $|a_0|<\rho$).

4. Если $f(z)$ и $f'(z)$ допускают асимптотические разложения, то асимптотическое разложение $f'(z)$ получается почленным дифференцированием асимптотического разложения $f(z)$.

5. Если $f(z)\sim\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$ (т. е. $a_0=a_1=0$), то асимптотическое разложение $\int_z^{\infty} f(z)\,dz$ получается почленным интегрированием асимптотического разложения $f(z)$.

Замечание. Иногда функция $f(z)$ не имеет асимптотического разложения, однако существует такая функция $g(z)$, что отношение $\frac{f(z)}{g(z)}$ допускает асимптотическое разложение. Тогда можно написать

$$f(z)\sim g(z)\left\{a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right\}.$$

Произведение $a_0 g(z)$ называется главным членом асимптотического представления $f(z)$.

7.1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Гиперболические функции играют важную роль при расчете длинных линий.

7.1.1. Определения. Положим (ср. формулы, выражающие круговые функции через $e^{\pm jx}$, п. 1.1.10)

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \text{ (гиперболический косинус } x),$$

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \text{ (гиперболический синус } x),$$

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \text{ (гиперболическнй тангенс } x).$$

Полагая $\xi=\cos x$, $\zeta=\sin x$, имеем $\xi^2+\zeta^2=1$. Точно так же, полагая $\xi=\operatorname{ch} x$, $\zeta=\operatorname{sh} x$, имеем $\xi^2-\zeta^2=1$. Точка с координатами ξ, ζ расположена на окружности в случае круговых функций и на равносторонней гиперболе в случае гиперболических функций.

Еще более глубокая аналогия существует между круговыми и гиперболическими линиями. Рассмотрим окружность $\xi^2+\zeta^2=1$ (рис. 7.2) и гиперболу $\xi^2-\zeta^2=1$ (рис. 7.3). Пусть M — точки на этих кривых, P — основания ординат M, T — точки пересечения ординаты A с лучом OM, M' — точки,

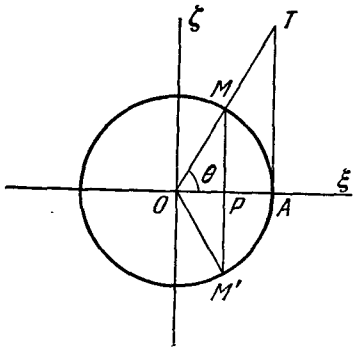


Рис. 7.2.

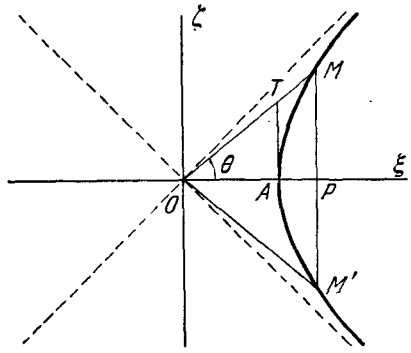


Рис. 7.3.

симметричные точкам M относительно оси абсцисс. Примем за независимую переменную криволинейную площадь $OMAM'$ и обозначим ее σ. Вычислим длины отрезков AT, OP и PM как функции σ.

Уравнение гиперболы в полярных координатах: $\rho^2\cos 2\theta=1$. Отсюда

$$\sigma=\frac{1}{4}\int_{-\theta}^{+\theta}\frac{d\,2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

Используя эту зависимость между σ и θ и уравнение гиперболы $\rho=(\cos 2\theta)^{-1/2}$, получим (см. рис. 7.3)

$$AT=\operatorname{tg}\theta=\frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}=\operatorname{th}\sigma,$$

$$OP=\rho\cos\theta=\frac{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}{2}=\operatorname{ch}\sigma,$$

$$PM=OP\operatorname{tg}\theta=\operatorname{sh}\sigma.$$

Для окружности $\sigma=\theta$, и потому непосредственно получаем аналогичный результат:

$$AT=\operatorname{tg}\sigma,\quad OP=\cos\sigma,\quad PM=\sin\sigma.$$

Используя определения гиперболических функций, нетрудно вывести следующие формулы:

$$\cos x=\operatorname{ch} jx,\qquad \operatorname{ch} x=\cos jx;$$

$$j\sin x=\operatorname{sh} jx,\qquad j\operatorname{sh} x=\sin jx;$$

$$j\operatorname{tg} x=\operatorname{th} jx,\qquad j\operatorname{th} x=\operatorname{tg} jx;$$

$$\begin{cases}\operatorname{sh}(a\pm b)=\operatorname{sh} a\operatorname{ch} b\pm\operatorname{ch} a\operatorname{sh} b,\\ \operatorname{ch}(a\pm b)=\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b\pm\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{sh} 2a=2\operatorname{sh} a\operatorname{ch} a,\\ \operatorname{ch} 2a=\operatorname{ch}^2 a+\operatorname{sh}^2 a=1+2\operatorname{sh}^2 a=2\operatorname{ch}^2 a-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\operatorname{ch} x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\\ \operatorname{sh} x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\end{cases}$$

Гиперболические функции имеют период $2\pi j$, совпадающий с периодом функции e^x:

$$\operatorname{sh}(x+2k\pi j)=\operatorname{sh}x, \quad \operatorname{ch}(x+2k\pi j)=\operatorname{ch}x.$$

7.1.2. Обратные гиперболические функции. Пусть $x=\operatorname{sh}u$, тогда через $\operatorname{Arsh}x$ обозначают аргумент гиперболического синуса, т. е. функцию

$$u=\operatorname{Arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Таким же образом формуле $x=\operatorname{ch}u$ соответствует

$$u=\operatorname{Arch}x=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)$$

и формуле $x=\operatorname{th}u$

$$u=\operatorname{Arth}x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Функции $\operatorname{Arsh}x$, $\operatorname{Arch}x$, $\operatorname{Arth}x$ читаются соответственно: ареасинус, ареакосинус, ареатангенс.

7.1.3. Приложение гиперболических функций к расчету длинных линий. Метод Броуна. Абаки Блонделя — Кеннели. Изучение распространения электрических сигналов вдоль линий передач часто приводит к необходимости вычисления выражений вида

$$\alpha\operatorname{ch}\gamma+\beta\operatorname{sh}\gamma,$$

где комплексные числа α, β, γ зависят от характеристик линии.

Разработан графический способ расчета этих выражений (метод Броуна). Положим $\frac{\beta}{\alpha}=\operatorname{th}\delta$. Тогда

$$\alpha\operatorname{ch}\gamma+\beta\operatorname{sh}\gamma=\alpha\frac{\operatorname{ch}(\delta+\gamma)}{\operatorname{ch}\delta}.$$

Очевидно, что

$$\delta=\operatorname{Arth}\frac{\beta}{\alpha}=a+jb.$$

Выразим вещественную и мнимую части δ (a и b) через x и y, представляющие собой вещественную и мнимую часть $z=\frac{\beta}{\alpha}$. Используя формулы пп. 7.1.2 и 1.1.11, получим

$$\delta=\operatorname{Arth}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+j(\varphi_1-\varphi_2+2k\pi)\right].$$

Так как $z=x+jy$, то

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=\sqrt{\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}},\quad \operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y}{1+x},\quad \operatorname{tg}\varphi_2=-\frac{y}{1-x}$$

и, значит,

$$\varphi_1-\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}.$$

Рассмотрим кривую, определяемую уравнением

$$a=\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}}\quad\text{(вещественная часть }\delta\text{)}.$$

Легко заметить, что это — окружность с центром на оси Ox. Кривая, определяемая уравнением

$$b=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}\ \text{(мнимая часть }\delta\text{)},$$

— тоже окружность, но с центром на оси Oy.

Пусть окружность первой системы, соответствующая параметру a, пересекается с окружностью второй системы, соответствующей параметру b, в точке с аффиксом $\frac{\beta}{\alpha}$. Тогда вещественная часть $\operatorname{Arth}\frac{\beta}{\alpha}$ равна a, так как

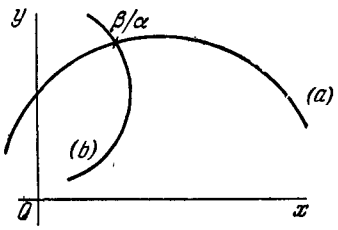


Рис. 7.4.

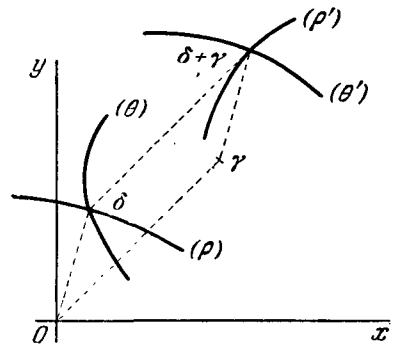


Рис. 7.5.

точка находится на первой окружности, а мнимая часть $\operatorname{Arth}\frac{\beta}{\alpha}$ равна b, так как точка находится и на второй окружности. Следовательно, для определения чисел a и b достаточно найти окружности рассмотренных семейств, пересекающихся в точке с аффиксом $\frac{\beta}{\alpha}$ (рис. 7.4).

После вычисления δ нужно определить $\operatorname{ch}\delta$ и $\operatorname{ch}(\delta+\gamma)$. Обратимся к вычислению $\operatorname{ch}\delta$. Модуль ρ и аргумент θ величины $\operatorname{ch}\delta$, где $\delta = x + jy$, соответственно равны

$$\rho = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}, \quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{th} x \operatorname{tg} y.$$

Каждое из этих выражений определяет семейство кривых в плоскости xy.

Рассмотрим две кривые, принадлежащие к двум разным семействам и пересекающиеся в точке с аффиксом δ. Значения параметров ρ и θ для каждой из этих кривых дают соответственно модуль и аргумент $\operatorname{ch}\delta$. Имея точку с аффиксом δ, можно по правилу параллелограмма

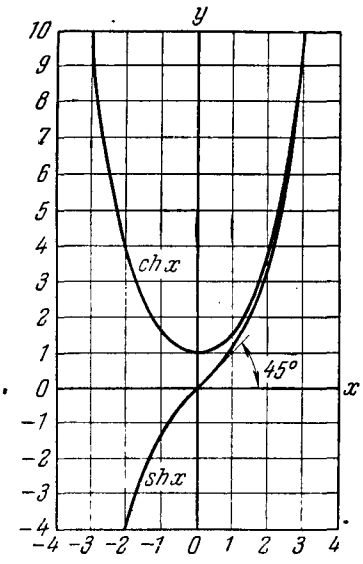


Рис. 7.6.

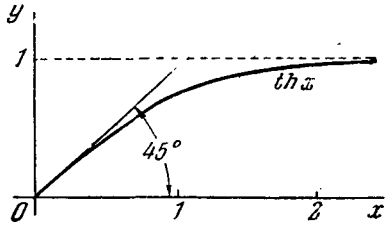


Рис. 7.7.

непосредственно построить точку с аффиксом $\delta+\gamma$ и затем найти модуль и аргумент ρ' и θ' для величины $\operatorname{ch}(\delta+\gamma)$ (рис. 7.5). В большинстве случаев на одной плоскости изображают обе системы окружностей рис. 7.4 и оба семейства кривых рис. 7.5. Эти графики называются абаками Блонделя — Кеннели.

7.1.4. Графики функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ (рис. 7.6 и 7.7).

7.1.5. Таблицы показательной и гиперболических функций.

x	e^x	e^{-x}	ch x	sh x
0,0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	0,000 0
0,2	1,221 4	0,818 7	1,020 07	0,201 34
0,4	1,491 8	0,670 3	1,081 07	0,410 75
0,6	1,822 1	0,548 8	1,185 47	0,636 65
0,8	2,225 5	0,449 3	1,337 43	0,888 11
1	2,718 3	0,367 9	1,543 08	1,175 20
1,2	3,320 1	0,301 2	1,810 66	1,509 46
1,4	4,055 2	0,246 6	2,150 90	1,904 30
1,6	4,953 0	0,201 9	2,577 46	2,375 57
1,8	6,049 6	0,165 3	3,107 47	2,942 17
2	7,389 1	0,135 3	3,762 20	3,626 86
2,2	9,025 0	0,110 8	4,567 91	4,457 11
2,4	11,023 2	0,090 7	5,556 95	5,466 25
2,6	13,463 4	0,074 27	6,769 01	6,694 73
2,8	16,444 6	0,060 81	8,252 73	8,191 93
3	20,085 5	0,049 79	10,067 7	10,017 9
3,2	24,532 5	0,040 76	12,286 6	12,245 9
3,4	29,964 1	0,033 37	14,998 7	14,965 4
3,6	36,598 3	0,027 32	18,312 8	18,285 5
3,8	44,701 2	0,022 37	22,361 8	22,339 4
4	54,598 1	0,018 32	27,308 2	27,289 9
4,2	66,686 3	0,015 00	33,350 7	33,335 7
4,4	81,450 9	0,012 28	40,731 6	40,719 3
4,6	99,484 3	0,010 05	49,747 2	49,737 1
4,8	121,510	0,008 23	60,759 3	60,751 1
5	148,413	0,006 74	74,209 9	74,203 2
5,2	181,274	0,005 52	90,639 7	90,634 2
5,4	221,406	0,004 52	110,705	110,701
5,6	270,426	0,003 70	135,215	135,211
5,8	331,061	0,003 03	165,532	165,529
6	403,429	0,002 48	201,716	201,713

7.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС И КОСИНУС

7.2.1. Определение. Формулы, определяющие интегральный синус и косинус, имеют следующий вид:

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{(интегральный сиинус } x\text{)};$$

$$\operatorname{Ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt \quad \text{(интегральный косинус } x\text{)}$$

Отметим, что данное определение $\operatorname{Ci} x$ пригодно только для положительных значений x *).

Часто интегральный синус определяют формулой

$$\operatorname{si} x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

*) Если переменную x считать вещественной.

Так как

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

то оба определения интегрального синуса отличаются на величину $\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{Si} x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si} x.$$

7.2.2. Разложение в степенной ряд. Интегрируя от нуля до x разложение в ряд функции $\frac{\sin t}{t}$, легко получить разложение в степенной ряд функции $\operatorname{Si} x$. Находим

$$\operatorname{Si} x = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

Разложение в степенной ряд функции $\operatorname{Ci} x$ будет рассматриваться в п. 8.3.19. Оно имеет вид

$$\operatorname{Ci} x = \ln x + \gamma - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n\,(2n)!} + \ldots$$

(γ обозначает постоянную Эйлера, см. п. 7.4.1). Заметив, что

$$\frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n\,(2n)!} + \ldots = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt,$$

можно написать

$$\operatorname{Ci} x = \ln x + \gamma - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt.$$

На основе полученных разложений в степенной ряд легко изучить поведение функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ при малых значениях переменной x. Функция $\operatorname{Si} x$ для таких x практически совпадает с функцией x, а функция $\operatorname{Ci} x$ — с функцией $\gamma + \ln x$.

7.2.3. Разложение в асимптотический ряд. Повторно интегрируя по частям линейную комбинацию

$$\operatorname{Ci} x + j \operatorname{si} x = -\int_x^\infty \frac{e^{jt}}{t}\,dt$$

и приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$\operatorname{Si} x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}},$$

$$\operatorname{Ci} x \sim \frac{\sin x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}.$$

Эти соотношения позволяют изучить поведение функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ при больших значениях x.

7.2.4. Графики функций Si x и Ci x (рис. 7.8).

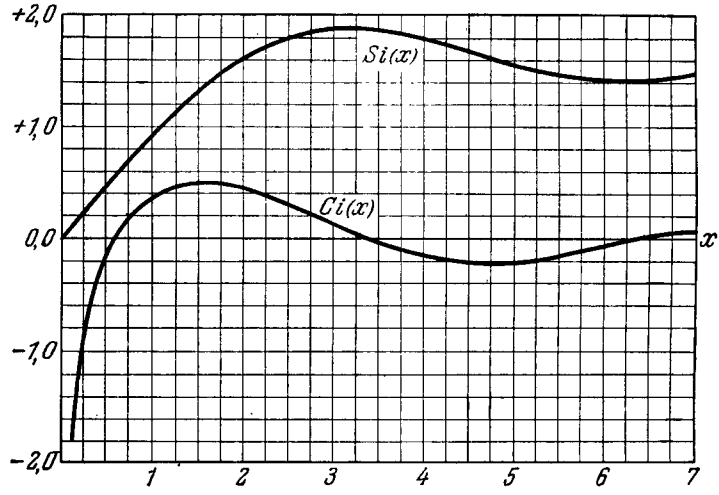


Рис. 7.8.

7.2.5. Таблицы функций Si x и Ci x.

x	Si x	Ci x	x	Si x	Ci x
0,00	+0,000 000	$-\infty$	0,30	+0,298 5	—0,649 2
0,01	+0,010 000	—4,028 0	0,31	+0,308 3	—0,617 9
0,02	+0,019 999	—3,334 9	0,32	+0,318 2	—0,587 7
0,03	+0,029 998	—2,929 6	0,33	+0,328 0	—0,558 5
0,04	+0,039 996	—2,642 1	0,34	+0,337 8	—0,530 4
0,05	+0,049 99	—2,419 1	0,35	+0,347 6	—0,503 1
0,06	+0,059 99	—2,237 1	0,36	+0,357 4	—0,476 7
0,07	+0,069 98	—2,083 3	0,37	+0,367 2	—0,451 1
0,08	+0,079 97	—1,950 1	0,38	+0,377 0	—0,426 3
0,09	+0,089 96	—1,832 8	0,39	+0,386 7	—0,402 2
0,10	+0,099 94	—1,727 9	0,40	+0,396 5	—0,378 8
0,11	+0,109 93	—1,633 1	0,41	+0,406 2	—0,356 1
0,12	+0,119 90	—1,546 6	0,42	+0,415 9	—0,334 1
0,13	+0,129 88	—1,467 2	0,43	+0,425 6	—0,312 6
0,14	+0,139 85	—1,393 8	0,44	+0,435 3	—0,291 8
0,15	+0,149 81	—1,325 5	0,45	+0,445 0	—0,271 5
0,16	+0,159 77	—1,261 8	0,46	+0,454 6	—0,251 7
0,17	+0,169 73	—1,202 0	0,47	+0,464 3	—0,232 5
0,18	+0,179 7	—1,145 7	0,48	+0,473 9	—0,213 8
0,19	+0,189 6	—1,092 5	0,49	+0,483 5	—0,195 6
0,20	+0,199 6	—1,042 2	0,50	+0,493 1	—0,177 78
0,21	+0,209 5	—0,994 4	0,51	+0,502 7	—0,160 45
0,22	+0,219 4	—0,949 0	0,52	+0,512 3	—0,143 55
0,23	+0,229 3	—0,905 7	0,53	+0,521 8	—0,127 07
0,24	+0,239 2	—0,864 3	0,54	+0,531 3	—0,110 99
0,25	+0,249 1	—0,824 7	0,55	+0,540 8	—0,095 30
0,26	+0,259 0	—0,786 7	0,56	+0,550 3	—0,079 99
0,27	+0,268 9	—0,750 3	0,57	+0,559 8	—0,065 04
0,28	+0,278 8	—0,715 3	0,58	+0,569 3	—0,050 44
0,29	+0,288 6	—0,681 6	0,59	+0,578 7	—0,036 19

Продолжение

x	Si x	Ci x	x	Si x	Ci x
0,60	+0,588 1	−0,022 27	2,1	+1,648 7	+0,400 5
0,61	+0,597 5	−0,008 675	2,2	+1,687 6	+0,375 1
0,62	+0,606 9	+0,004 606	2,3	+1,722 2	+0,347 2
0,63	+0,616 3	+0,017 58	2,4	+1,752 5	+0,317 3
0,64	+0,625 6	+0,030 26	2,5	+1,778 5	+0,285 9
0,65	+0,634 9	+0,042 65	2,6	+1,800 4	+0,253 3
0,66	+0,644 2	+0,054 76	2,7	+1,818 2	+0,220 1
0,67	+0,653 5	+0,066 59	2,8	+1,832 1	+0,186 5
0,68	+0,662 8	+0,078 16	2,9	+1,842 2	+0,152 9
0,69	+0,672 0	+0,089 46	3,0	+1,848 7	+0,119 6
0,70	+0,681 2	+0,100 51	3,1	+1,851 7	+0,086 99
0,71	+0,690 4	+0,111 32	3,2	+1,851 4	+0,055 26
0,72	+0,699 6	+0,121 88	3,3	+1,848 1	+0,024 68
0,73	+0,708 7	+0,132 20	3,4	+1,841 9	−0,004 518
0,74	+0,717 9	+0,142 30	3,5	+1,833 1	−0,032 13
0,75	+0,727 0	+0,152 16	3,6	+1,821 9	−0,057 97
0,76	+0,736 0	+0,161 81	3,7	+1,808 6	−0,081 90
0,77	+0,745 1	+0,171 24	3,8	+1,793 4	−0,103 8
0,78	+0,754 1	+0,180 5	3,9	+1,776 5	−0,123 5
0,79	+0,763 1	+0,189 5	4,0	+1,758 2	−0,141 0
0,80	+0,772 1	+0,198 3	4,1	+1,738 7	−0,156 2
0,81	+0,481 1	+0,206 9	4,2	+1,718 4	−0,169 0
0,82	+0,790 0	+0,215 3	4,3	+1,697 3	−0,179 5
0,83	+0,798 9	+0,223 5	4,4	+1,675 8	−0,187 7
0,84	+0,807 8	+0,231 6	4,5	+1,654 1	−0,193 5
0,85	+0,816 6	+0,239 4	4,6	+1,632 5	−0,197 0
0,86	+0,825 4	+0,247 1	4,7	+1,611 0	−0,198 4
0,87	+0,834 2	+0,254 6	4,8	+1,590 0	−0,197 6
0,88	+0,843 0	+0,261 9	4,9	+1,569 6	−0,194 8
0,89	+0,851 8	+0,269 1	5,0	+1,549 9	−0,190 0
0,90	+0,860 5	+0,276 1	6	+1,424 7	−0,068 06
0,91	+0,869 2	+0,282 9	7	+1,454 6	+0,076 70
0,92	+0,877 8	+0,289 6	8	+1,574 2	+0,122 4
0,93	+0,886 5	+0,296 1	9	+1,665 0	+0,055 35
0,94	+0,895 1	+0,302 4	10	+1,658 3	−0,045 46
0,95	+0,903 6	+0,308 6	11	+1,578 3	−0,089 56
0,96	+0,912 2	+0,314 7	12	+1,505 0	−0,049 78
0,97	+0,920 7	+0,320 6	13	+1,499 4	+0,026 76
0,98	+0,929 2	+0,326 3	14	+1,556 2	+0,069 40
0,99	+0,937 7	+0,331 9	15	+1,618 2	+0,046 28
1,00	+0,946 1	+0,337 4	20	+1,548 2	+0,044 42
1,1	+1,028 7	+0,384 9	25	+1,531 5	−0,006 85
1,2	+1,108 0	+0,420 5	30	+1,566 8	−0,033 03
1,3	+1,184 0	+0,445 7	35	+1,596 9	−0,011 48
1,4	+1,256 2	+0,462 0	40	+1,587 0	+0,019 02
1,5	+1,324 7	+0,470 4	45	+1,558 7	+0,018 63
1,6	+1,389 2	+0,471 7	50	+1,551 6	−0,005 63
1,7	+1,449 6	+0,467 0	55	+1,570 7	−0,018 17
1,8	+1,505 8	+0,456 8	60	+1,586 7	−0,004 81
1,9	+1,557 8	+0,441 9	65	+1,579 2	+0,012 85
2,0	+1,605 4	+0,423 0			

Продолжение

x	$\mathrm{Si}\,x$	$\mathrm{Ci}\,x$	x	$\mathrm{Si}\,x$	$\mathrm{Ci}\,x$
70	+1,551 6	+0,010 92	190	+1,570 4	+0,005 250
75	+1,558 6	−0,005 33	200	+1,568 4	−0,004 378
80	+1,572 3	−0,012 40	300	+1,570 9	−0,003 332
85	+1,582 4	−0,001 935	400	+1,572 1	−0,002 124
90	+1,575 7	+0,009 986	500	+1,572 6	−0,000 932 0
95	+1,563 0	+0,007 110	600	+1,572 5	+0,000 076 4
100	+1,562 2	−0,005 149	700	+1,572 0	+0,000 778 8
110	+1,579 9	−0,000 320	800	+1,571 4	+0,001 118
120	+1,564 0	+0,004 781	900	+1,570 7	+0,001 109
130	+1,573 7	−0,007 132	10^3	+1,570 2	+0,000 826
140	+1,572 2	+0,007 011	10^4	+1,570 9	−0,000 030 6
150	+1,566 2	−0,004 800	10^5	+1,570 8	+0,000 000 4
160	+1,576 9	+0,001 409	10^6	+1,570 8	−0,000 000 4
170	+1,565 3	+0,002 010	10^7	+1,570 8	+0,0
180	+1,574 1	−0,004 432	∞	$\pi/2$	0,0

7.2.6. Положение экстремумов функций $\mathrm{Ci}\,x$ и $\mathrm{Si}\,x$.

$\frac{x}{\pi}$	Max / Min $\mathrm{Ci}\,x$	$\frac{x}{\pi}$	Max / Min $\mathrm{Ci}\,x$
0,5	+0,472 00	8,5	+0,037 345
1,5	−0,198 41	9,5	−0,033 433
2,5	+0,123 77	10,5	+0,030 260
3,5	−0,089 554	11,5	−0,027 637
4,5	+0,070 035	12,5	+0,025 432
5,5	−0,057 501	13,5	−0,023 552
6,5	+0,048 742	14,5	+0,021 931
7,5	−0,042 292	15,5	−0,020 519

$\frac{x}{\pi}$	Max / Min $\mathrm{Si}\,x$	$\frac{x}{\pi}$	Max / Min $\mathrm{Si}\,x$
1	+1,851 94	9	+1,605 076
2	+1,418 16	10	+1,539 029
3	+1,674 76	11	+1,599 685
4	+1,492 161	12	+1,544 307
5	+1,633 964	13	+1,595 252
6	+1,518 034	14	+1,548 083
7	+1,616 085	15	+1,591 997
8	+1,531 131		

7.3. ФУНКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБОК

7.3.1. Определение. Функция вероятности ошибок $\Phi(x)$ [1]) определяется интегралом

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Рассмотрим функцию Гаусса

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Она изображается кривой, представленной на рис. 7.9. Площадь, заключенная между кривой $\Psi(x)$ и осью абсцисс, равна единице. Действительно,

[1]) Ее часто называют интегралом вероятности ошибок или, просто, интегралом вероятности. Функция $\Phi(x)$ обозначается также через $\mathrm{erf}\,x$ (error function).

полагая $x^2 = 2u$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du.$$

Согласно формуле (3) из п. 7.4.1, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

что и требовалось доказать.

Площадь между кривой $\Psi(x)$ и осью абсцисс слева от абсциссы x обозначается через $\Pi(x)$. Следовательно,

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Обе функции Φ и Π играют большую роль в теории вероятности. Первая из них часто используется при анализе возмущений, распространяющихся по линиям передачи. Полезно установить зависимость между функциями Φ и Π, так как функция Π подробно затабулирована.

Если положить $t\sqrt{2} = u$, то

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2},$$

то

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Pi(x).$$

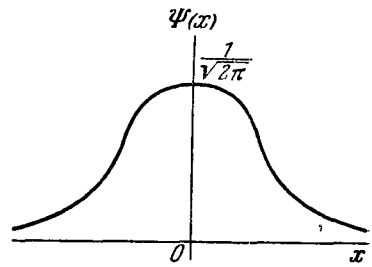


Рис. 7.9.

7.3.2. Разложение функции $\Phi(x)$ в степенной ряд. Достаточно проинтегрировать разложение в ряд e^{-t^2} от нуля до x, чтобы получить степенной ряд

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots \right],$$

сходящийся при любом x.

7.3.3. Разложение в асимптотический ряд функции $1 - \Phi(x)$ [1]. Имеем

$$1 - \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{x} e^{-t^2} dt \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

[1]) Функция $1 - \Phi(x)$ обозначается также через erfc x (complementary error function).

Положим $t^2 = u$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{x^2} u^{-\frac{1}{2}} d(e^{-u}).$$

Повторно интегрируя по частям, получаем

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \right]_{\infty}^{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{x^2} u^{-\frac{3}{2}} d(e^{-u}),$$

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-x^2} x^{-1} - \frac{e^{-x^2} x^{-3}}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \int_{\infty}^{x^2} u^{-\frac{5}{2}} d(e^{-u}) \right].$$

Отсюда

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2^{n-1} x^{2n-2}} + \ldots \right].$$

Отношение абсолютных величин двух последовательных членов равно $\frac{2n-1}{2x^2}$. Оно близко к единице, если n близко к x^2. Ясно, что член асимптотического разложения $1 - \Phi(x)$ *), соответствующий этому n, имеет наименьшую абсолютную величину. Именно на нем и следует остановиться, чтобы получить наименьшую ошибку при вычислении $1 - \Phi(x)$.

Замечание. В примере 3 п. 2.2.8 мы показали, что функция Гаусса $\Psi(x)$, представленная на рис. 7.9, обладает свойством быть своей собственной трансформантой Фурье. Поэтому понятна та важная роль, которую она играет при изучении спектра сигналов и диаграмм направленности источников радиоволн.

7.3.4. Выражение функции $1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$ через интеграл Коши. В разложении функции $\Phi(x)$ в степенной ряд заменим x на $\frac{x}{2}$. Получаем

$$1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\, 2^{2n+1} (2n+1)}.$$

Согласно результатам п. 7.4.3, имеем ($n > 0$, целое)

$$\frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{r}{2}\right)} = \begin{cases} 1 & \text{при } r = 0, \\ 0 & \text{при } r = 2n, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n} & \text{при } r = 2n+1. \end{cases}$$

Это дает возможность написать

$$1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!\, \Gamma\left(1 - \frac{r}{2}\right)}.$$

---

*) Нетрудно доказать, что полученное разложение $\frac{1 - \Phi(x)}{e^{-x^2}}$ действительно является асимптотическим (ср. п. 7.01, пример и замечание).

Согласно формуле (10) п. 7.4.5. (см. также рис. 7.12),

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^z\,dz}{z^{1-\frac{r}{2}}}.$$

Отсюда

$$1-\Phi\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^z}{z}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(x\sqrt{z})^r}{r!}\,dz$$

и

$$1-\Phi\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^{z-x\sqrt{z}}}{z}\,dz.$$

Функция $\frac{1}{z}e^{-x\sqrt{z}}$ $(x>0)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана (п. 1.3.14). Поэтому мы можем также написать

$$1-\Phi\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{z-x\sqrt{z}}}{z}\,dz.$$

7.3.5. Таблица функции $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ *).

x	$\Phi(x)$	Δ	x	$\Phi(x)$	Δ
0,05	0,056 37	0,056 37	1,05	0,862 44	0,019 74
0,10	0,112 46	0,056 09	1,10	0,880 20	0,017 76
0,15	0,167 99	0,055 53	1,15	0,896 12	0,015 92
0,20	0,222 70	0,054 71	1,20	0,910 31	0,014 19
0,25	0,276 32	0,053 62	1,25	0,922 90	0,012 59
0,30	0,328 62	0,052 30	1,30	0,934 01	0,011 11
0,35	0,379 38	0,050 76	1,35	0,943 76	0,009 75
0,40	0,428 39	0,049 01	1,40	0,952 28	0,008 52
0,45	0,475 48	0,047 09	1,45	0,959 69	0,007 41
0,50	0,520 50	0,045 02	1,50	0,966 10	0,006 41
0,55	0,563 32	0,042 82	1,55	0,971 62	0,005 52
0,60	0,603 85	0,040 53	1,60	0,976 35	0,004 73
0,65	0,642 03	0,038 18	1,65	0,980 37	0,004 02
0,70	0,677 80	0,035 77	1,70	0,983 79	0,003 42
0,75	0,711 15	0,033 35	1,75	0,986 67	0,002 88
0,80	0,742 10	0,030 95	1,80	0,989 09	0,002 42
0,85	0,770 66	0,028 56	1,85	0,991 11	0,002 02
0,90	0,796 91	0,026 25	1,90	0,992 79	0,001 68
0,95	0,820 89	0,023 98	1,95	0,994 18	0,001 39
1,00	0,842 70	0,021 81	2,00	0,995 32	0,001 14

*) В таблице указаны также первые разности Δ.

7.3.6. График функции $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ (рис. 7.10).

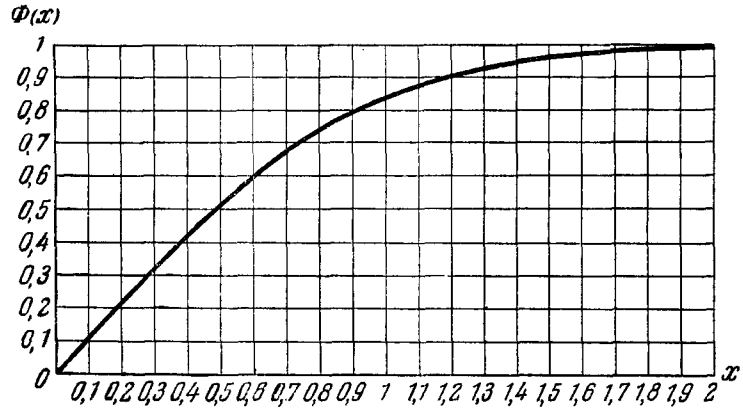


Рис. 7.10.

7.3.7. Интегралы Френеля. Интегралы Френеля — функции $C(\nu)$ и $S(\nu)$ — могут быть определены через функцию вероятности ошибок по формуле

$$C(\nu)-jS(\nu)=\frac{\Phi\left(\nu\sqrt{\frac{j\pi}{2}}\right)}{\sqrt{2j}}.$$

Отсюда следует $C(\nu)=\int_0^\nu \cos\frac{\pi t^2}{2}dt$, $S(\nu)=\int_0^\nu \sin\frac{\pi t^2}{2}dt$. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} C=C(\nu), \\ S=S(\nu) \end{cases}$$

изображают на плоскости CS (C — ось абсцисс и S — ось ординат) двойную спираль, симметричную относительно начала координат. Она называется клотоидой или спиралью Корню (рис. 7.11). Градуировка клотоиды как функции параметра ν легко осуществляется. В самом деле, длина дуги от начала координат до точки с координатами $C(\nu)$, $S(\nu)$ как раз равна ν:

$$\int_0^\nu \sqrt{C'^2(\nu)+S'^2(\nu)}\,d\nu=\nu.$$

Легко проверить, что кривизна клотоиды меняется пропорционально длине дуги, т. е. пропорционально ν. Координаты асимптотических точек клотоиды равны

$$C(\pm\infty)=S(\pm\infty)=\pm\frac{1}{2}.$$

Разложения функций $S(\nu)$ и $C(\nu)$ в степенной ряд легко получить, исходя из разложений синуса и косинуса. Имеем

$$C(\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}\frac{\nu^{4n+1}}{4n+1},\quad S(\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\nu^{4n+3}}{4n+3}.$$

Асимптотические разложения интегралов Френеля получаются многократным

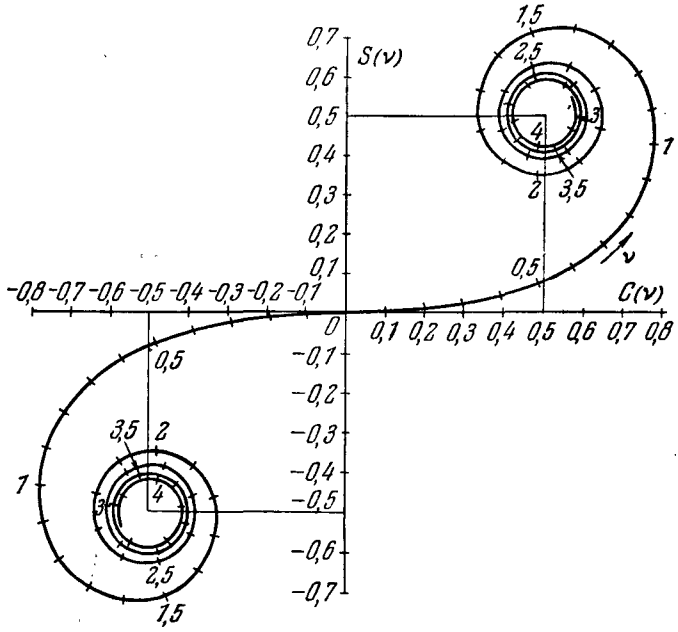


Рис. 7.11.

интегрированием по частям линейной комбинации

$$C(\nu)+jS(\nu)=\int_0^{\nu} e^{j\frac{\pi t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j-\int_{\nu}^{\infty} e^{j\frac{\pi t^2}{2}}\,dt$$

с последующим приравниванием вещественных и мнимых частей. Получаем

$$C(\nu)=\frac{1}{2}+A(\nu)\frac{\cos\frac{\pi\nu^2}{2}}{\pi\nu}-B(\nu)\frac{\sin\frac{\pi\nu^2}{2}}{\pi\nu},$$

$$S(\nu)=\frac{1}{2}+A(\nu)\frac{\sin\frac{\pi\nu^2}{2}}{\pi\nu}-B(\nu)\frac{\cos\frac{\pi\nu^2}{2}}{\pi\nu},$$

где асимптотические разложения функций $A(\nu)$ и $B(\nu)$ имеют вид

$$A(\nu)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot5\ldots(4n+1)}{(\pi\nu^2)^{2n+1}},\quad B(\nu)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot7\ldots(4n-1)}{(\pi\nu^2)^{2n}}.$$

7.4. ГАММА-ФУНКЦИЯ

7.4.1. Определение. Гамму-функцию $\Gamma(z)$ можно определить для всех вещественных или комплексных значений z с помощью бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}\right\}. \qquad (1)$$

В этой формуле γ обозначает постоянную Эйлера. Она определяется формулой

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{m}-\ln m\right\}.$$

Очень возможно, что постоянная Эйлера — трансцендентное число, хотя это еще не доказано строго. Первые цифры ее равны

$$\gamma = 0{,}57721566490\ \dots$$

Хорошее приближение к γ дается простой формулой

$$\gamma \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{10}-1\right) = 0{,}5772173\ \dots$$

Другое определение гамма-функции можно дать с помощью соотношения

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty}\frac{m!\,m^z}{z(z+1)\dots(z+m)}. \tag{2}$$

Действительно, формулу (2) можно записать в виде

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\lim_{m\to\infty}\left(m^z\,\frac{1}{z+1}\,\frac{2}{z+2}\dots\frac{m}{z+m}\right) = \frac{1}{z}\lim_{m\to\infty} m^z\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1},$$

откуда

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} m^{-z}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right).$$

Умножим правую часть этой формулы на следующий множитель, равный единице:

$$\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)z}\cdot\prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{m}} = 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}-\ln m\right)z}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}.$$

Заметив, что величина $1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{m}-\ln m$ стремится к γ, мы приходим к формуле (1). Отсюда вытекает справедливость формулы (2).

Можно также определить гамма-функцию через определенный интеграл:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt, \quad \text{если} \quad R(z)>0. \tag{3}$$

Для доказательства сначала вычислим

$$I = \int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt.$$

Положим $\frac{t}{n}=\tau$. Тогда

$$I = n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau = \left[\frac{(1-\tau)^n\tau^z}{z}\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1\tau^z(1-\tau)^{n-1}\,d\tau.$$

Если $R(z) > 0$, то внеинтегральный член равен нулю. Поэтому

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau = \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z\, d\tau,$$

$$\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z\, d\tau = \frac{n-1}{z+1}\int_0^1 (1-\tau)^{n-2}\tau^{z+1}\, d\tau,$$

. . . . . .

$$\int_0^1 (1-\tau)\tau^{z+n-2}\, d\tau = \frac{1}{z+n-1}\int_0^1 \tau^{z+n-1}\, d\tau = \frac{1}{(z+n-1)(z+n)},$$

т. е.

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\, d\tau = \frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$I \to \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dz.$$

7.4.2. Свойства гамма-функции. Согласно формуле (2), имеем

$$\Gamma(z+1) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^{z+1}\, m!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+m+1)},$$

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\ldots(z+m)}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \lim_{m\to\infty} \frac{mz}{z+m+1}.$$

Отсюда получаем формулу

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{4}$$

Эта формула, повторно примененная в предположении, что $z = n$ (n — целое положительное), дает

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1).$$

Но

$$\Gamma(1) = \lim_{m\to\infty} \frac{m\cdot m!}{1\cdot 2\ldots(m+1)} = 1,$$

поэтому

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{5}$$

Из-за этого свойства гамма-функцию иногда называют факториальной.

Докажем теперь следующую формулу:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{6}$$

Согласно формуле (1), имеем

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = (-z)\,ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}\right\}e^{-\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{m}\right)e^{\frac{z}{m}}\right\}.$$

По формуле (4)

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right).$$

В п. 2.1.4, была доказана формула

$$\sin z = z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right).$$

Сравнивая два последних выражения, получаем формулу (6). Заменив в формуле (6) z на $z+\frac{1}{2}$, найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}. \qquad (7)$$

7.4.3. Некоторые значения функции $\Gamma(z)$. Если в формуле (6) считать $z=\frac{1}{2}$, то

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = \pi,$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Из формулы (1) видно, что при z целых неположительных гамма-функция бесконечна: $\Gamma(-n) = \pm\infty$.

Формула (4), повторно примененная, дает

$$\Gamma(z+1) = z(z-1)\ldots(z-n+1)\Gamma(z-n+1),$$

где n — целое число. Положив $z=n+k$, имеем

$$\Gamma(n+k+1) = (n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)\Gamma(k+1).$$

При $k=-\frac{1}{2}$ получаем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \qquad (8)$$

Заменим в формуле (7) z на n. Тогда формула (8) позволяет написать

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

Весь этот набор частных значений гамма-функции с учетом формулы $\Gamma(n+1)=n!$ позволяет построить график функции $\Gamma(z+1)$ для вещественных z (см. рис. 7.13)[1]).

7.4.4. Логарифмическая производная гамма-функции. Эта производная равна, по определению *),

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}.$$

---

[1]) Асимптотическая формула для $n!$ дается формулой Стирлинга (п. 9.1.4).

*) Часто полагают $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$.

Используя формулы (1) и (4), найдем

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right\}.$$

Отсюда можно получить соотношения:

$$\psi(z) = \psi(z-1) + \frac{1}{z},$$

$$\psi(-z) = \psi(z-1) + \pi \operatorname{ctg} \pi z \text{ *)},$$

$$\psi\left(z - \frac{1}{2}\right) = \psi\left(-z - \frac{1}{2}\right) + \pi \operatorname{tg} \pi z$$

и частные значения $\psi(z)$:

$$\begin{gathered}\psi(0) = -\gamma,\\ \psi(n) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},\\ \psi(-n) = \infty,\\ \psi\left(-\frac{1}{2} \pm n\right) = \psi\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right),\\ \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 = -1{,}9635\ldots\end{gathered} \tag{9}$$

7.4.5. Представление гамма-функции через интеграл Коши. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^z\,dz}{z^{\nu+1}},$$

взятый по контуру C, изображенному на рис. 7.12. Контур C состоит из малой окружности и двух берегов разреза вдоль отрицательной вещественной полуоси. Интеграл по окружности ($z = re^{j\theta}$) равен

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{r(\cos\theta + j\sin\theta) - j\nu\theta} r^{-\nu}\,d\theta.$$

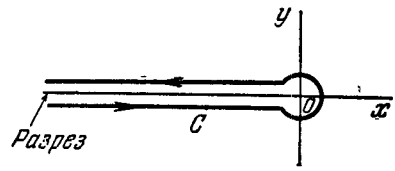


Рис. 7.12.

Если $\mathrm{R}(\nu) < 0$, то этот интеграл стремится к нулю вместе с r. На нижнем берегу разреза ($z = xe^{-j\pi}$)

$$I_2 = -\frac{e^{\nu\pi j}}{2\pi j}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\nu+1}}\,dx.$$

На верхнем берегу разреза ($z = xe^{j\pi}$)

$$I_3 = \frac{e^{-\nu\pi j}}{2\pi j}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\nu+1}}\,dx.$$

Отсюда

$$I = I_2 + I_3 = -\frac{\sin \pi\nu}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{-\nu-1}dx = -\frac{\sin \pi\nu}{\pi}\Gamma(-\nu).$$

*) Используем разложение $\operatorname{ctg} \pi z$ (п. 2.1.4.).

Так как по формуле (6)

$$-\frac{\sin \pi\nu}{\pi}\Gamma(-\nu)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},$$

то

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^z dz}{z^{\nu+1}}\ ^{*)}. \tag{10}$$

7.4.6. Связь между эйлеровыми интегралами первого и второго рода. Эйлеров интеграл первого рода (бета-функция) — это функция двух положительных переменных p и q вида

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

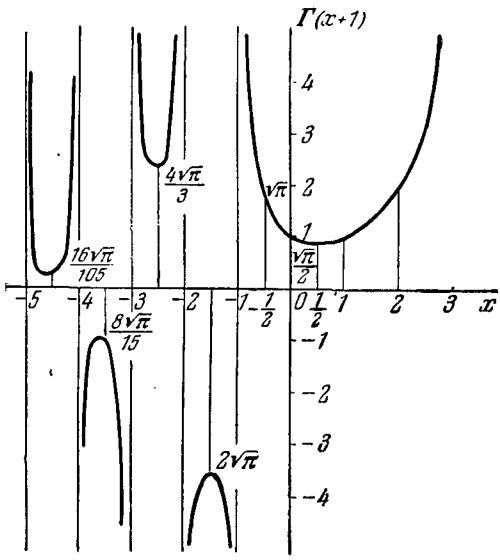


Рис. 7.13.

Эйлеровым интегралом второго рода называют гамма-функцию.

Полагая $x=\cos^2\theta$, можно бета-функцию записать в виде

$$B(p,\ q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta. \tag{11}$$

В формуле (3) заменим z на n и t на y^2, а затем z на m и t на x^2. Имеем

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy,$$

$$\Gamma(m)=2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx.$$

Перемножим эти формулы:

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

Получили двойной интеграл, распространенный на первый квадрант координатной плоскости xy.

Перейдем к полярным координатам:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad dx\,dy=ds=\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Имеем

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\times 2\int_0^\infty \rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho.$$

Согласно формуле (11), первый удвоенный интеграл равен $B(m,\ n)$; согласно формуле (3), второй удвоенный интеграл равен $\Gamma(m+n)$. Таким образом, получаем соотношение между функциями B и Γ:

$$B(m,\ n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \tag{12}$$

*) Правая часть этой формулы при любом контуре C ($r>0$) представляет целую функцию. Поэтому формула (10) верна при любом ν.

7.4.7. График функции $y=\Gamma(x+1)$ (рис. 7.13). Координаты единственного минимума с положительной абсциссой равны

$$x=0{,}46163\ldots, \qquad y=0{,}88560\ldots$$

7.4.8. Таблица функции $\Gamma(x+1)$.

x	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,9		943	888	835	784	735	687	642	597	555
1		514	474	436	399	364	330	298	267	237	209
2		182	156	131	108	085	064	044	025	007	*990
3	0,8	975	960	946	934	922	912	902	893	885	879
4		873	868	864	860	858	857	856	856	857	859
5		862	866	870	876	882	889	896	905	914	924
6		935	947	959	972	986	*001	*017	*033	*050	*068
7	0,9	086	106	126	147	168	191	214	238	262	288
8		314	341	368	397	426	456	487	518	551	584
9		618	652	688	724	761	799	837	877	917	958
1,0	1,0	000	043	086	131	176	222	269	316	365	415
1		465	516	568	621	675	730	786	842	900	959
2	1,1	018	078	140	202	266	330	395	462	529	598
3		667	738	809	882	956	*031	*107	*184	*262	*341
4	1,2	422	503	586	670	756	842	930	*019	*109	*201
5	1,3	293	388	483	580	678	777	878	981	*084	*190
6	1,4	296	404	514	625	738	852	968	*085	*204	*325
7	1,5	447	571	696	824	953	*084	*216	*351	*487	*625
8	1,6	765	907	*051	*196	*344	*494	*646	*799	*955	**113
9	1,8	274	436	600	767	936	*108	*281	*457	*636	*816
2,0	2	000	019	037	057	076	095	115	136	156	177
1		198	219	240	262	284	307	330	353	376	400
2		424	448	473	498	524	549	575	602	629	656
3		683	711	740	768	798	827	857	888	918	950
4		981	*013	*046	*079	*112	*146	*181	*216	*251	*287
5	3	323	360	398	436	474	513	553	593	634	675
6		717	760	803	846	891	936	981	*028	*075	*122
7	4	171	220	269	320	371	423	476	529	583	638
8		694	751	808	867	926	986	*047	*108	*171	*235
9	5	299	365	431	499	567	637	707	779	851	925
3,0	6	000	076	153	231	311	391	473	556	640	726
1		813	901	990	*081	*173	*267	*362	*458	*556	*656
2	7	757	859	963	*069	*176	*285	*396	*508	*622	*738
3	8	855	975	*095	*219	*344	*471	*600	*731	*864	*999
4	10	136	275	417	561	707	855	*005	*158	*314	*471
5	11	632	795	960	*128	*299	*472	*648	*827	**009	**194
6	13	381	572	766	962	*162	*366	*572	*782	*995	**211
7	15	431	655	882	*113	*348	*586	*829	**075	**325	**579
8	10×1	784	810	837	864	891	920	948	977	*005	*036
9	10×2	067	098	129	161	194	227	260	294	329	364

Столбец, помеченный буквой n, дает первую или две первые цифры искомого числа. Так, например, $\Gamma(1+1{,}23)=1{,}1\,|\,202$.

Значок * означает, что следует брать число n, увеличенное на единицу (для $x>2$) или на 0,1 (для $x<2$). Аналогично значок ** означает, что следует брать число n, увеличенное на две единицы (для $x>2$) или на 0,2 (для $x<2$).

Например, $\Gamma(1+3{,}72)=15,|882$, $\Gamma(1+3{,}73)=16,|113$ и $\Gamma(1+3{,}77)=17,|075$; $\Gamma(1+1{,}81)=1{,}6|907$, $\Gamma(1+1{,}82)=1{,}7|051$ и $\Gamma(1+1{,}89)=1{,}8|113$.

В последних двух строках таблицы число n равно 1 или 2, а цифра 10 является множителем. Так, например, $\Gamma(1+3{,}90)=10\times 2,|067=20{,}67$.

Замечание. Повторное применение формулы (4) позволяет производить вычисление $\Gamma(1+x)$ для любого x.

7.5. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Функцин Бесселя первого и второго рода

Функции Бесселя первого и второго рода порядка ν представляют собой частные решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0. \tag{13}$$

Если $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — два независимых решения уравнения (13), то общий интеграл уравнения запишется в виде

$$y=Z_\nu(z)=AJ_\nu(z)+BY_\nu(z). \tag{14}$$

Здесь A и B означают две произвольные постоянные.

7.5.1. Определение фуикции первого рода. Функции Бесселя первого рода, обозначаемые как $J_\nu(z)$, определяются с помощью следующего ряда (см. п. 6.2.10):

$$y=z^\rho\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda. \tag{15}$$

Если мы подставим этот ряд в дифференциальное уравнение (13) и приравняем нулю коэффициенты при $z^{\rho+\lambda}$, то получим, придавая λ последовательные значения 0, 1, 2, ..., $\lambda-2$,

$$\begin{aligned}(\rho^2-\nu^2)a_0&=0,\\ [(\rho+1)^2-\nu^2]a_1&=0,\\ [(\rho+2)^2-\nu^2]a_2+a_0&=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ [(\rho+\lambda)^2-\nu^2]a_\lambda+a_{\lambda-2}&=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Если число ν вещественное, то будем считать его положительным, если оно комплексное, то предположим, что $R(\nu)>0$. Пусть $a_0\neq 0$. Тогда из первого уравнения (16) находим $\rho=\pm\nu$.

Первый случай: $\rho=\nu$. Все нечетные коэффициенты равны нулю; четные коэффициенты вычисляются через a_0, который остается неопределенным. Обозначая $\lambda=2r$, имеем

$$a_{2r}=a_0\frac{(-1)^r}{2^{2r}r!\,(1+\nu)(2+\nu)\ldots(r+\nu)}.$$

Для функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ порядка ν произвольный коэффициент a_0 принято выбирать в виде

$$a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}.$$

Так как

$$\Gamma(1+r+\nu)=(1+\nu)(2+\nu)\ldots(r+\nu)\Gamma(1+\nu),$$

получим

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{17}$$

Если ν равно целому числу n, то имеем

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(r+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{18}$$

В частном случае при $n=0$

$$J_0(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{19}$$

Второй случай: $\rho=-\nu$. Четные коэффициенты a_{2r}, a_{2r-2} связаны формулой

$$2r\,(2r-2\nu)\,a_{2r}+a_{2r-2}=0,$$

а нечетные коэффициенты — формулой

$$(2r+1)(2r+1-2\nu)\,a_{2r+1}+a_{2r-1}=0.$$

Если ν не равно половине нечетного числа, то все нечетные коэффициенты равны нулю. Аналогично предыдущему находим

$$J_{-\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(r+1-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{20}$$

Если ν равно половине нечетного числа: $\nu=\frac{1}{2}(2m+1)$, то нечетные коэффициенты, начиная с индекса $r=m$, не равны нулю. Этот случай будет особо рассматриваться в п. 7.5.15.

Рассмотрим вариант $a_0=0$. Тогда при $a_1\neq 0$ второе уравнение (16) дает $\rho=\pm\nu-1$ и все четные коэффициенты в (16) равны нулю, а все нечетные выражаются через a_1. При соответствующем выборе a_1 мы приходим к результатам, не отличающимся от формул (17) и (20).

7.5.2. Соотношение между $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$. Рассмотрим, в каких случаях решение $J_\nu(z)$, представляемое формулой (17), и $J_{-\nu}(z)$, представленное соотношением (20), будут линейно независимы.

Предположим, что ν не равно целому числу. Тогда функция $\Gamma(r+1-\nu)$ конéчна при любых значениях r. Если стремить z к нулю, то функция $J_\nu(z)$ также будет стремиться к нулю. Напротив, функция $J_{-\nu}(z)$ будет при этом бесконечно возрастать из-за наличия членов вида $\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-\nu}$, показатель степени у которых отрицателен по крайней мере у одного или нескольких первых членов. В этом случае (ν — не целое число!) оба решения $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, очевидно, линейно независимы. Общий интеграл уравнения (13) может быть написан в виде

$$Z_\nu(z)=AJ_\nu(z)+BJ_{-\nu}(z). \tag{21}$$

Предположим теперь, что ν равно целому числу n. Тогда формула (20) принимает вид

$$J_{-n}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(r-n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}.$$

Первые члены этого ряда будут нули, пока $r-n$ равно целому отрицательному числу. Величина $(r-n)!$ станет конечной при

$$r=n,\quad n+1,\ \ldots,\ n+r',\ \ldots$$

Если опустить первые нулевые члены, то предыдущая формула будет выглядеть так:

$$J_{-n}=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{r'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r'+n}}{(n+r')!\,r'!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r'+2n}.$$

Отсюда

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z). \tag{22}$$

Теперь обе функции J_n и J_{-n} уже не будут линейно независимы, и общий интеграл уравнения (13) нельзя написать в виде

$$Z_n(z)=AJ_n(z)+BJ_{-n}(z).$$

Для целых значений индекса следует найти другой частный интеграл, который был бы линейно независим от $J_n(z)$.

7.5.3. Определение бесселевой функции второго рода. Рассмотрим функцию

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\pi\nu\,J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}. \tag{23}$$

Если ν — не целое число, то это выражение представляет собой частный интеграл дифференциального уравнения (13). Если устремить ν к целому числу n, то правая часть в (23) становится неопределенной. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя. Получим

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_n(z)}{\partial n}-(-1)^n\frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n}\right]. \tag{24}$$

Пользуясь разложением в ряд (17), вычислим производную функцию $J_\nu(z)$ по индексу ν:

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}=J_\nu(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}\,\frac{\Gamma'(r+\nu+1)}{\Gamma(r+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2r}.$$

Устремим ν к целому числу. Тогда, в силу формул (5) и (9), получим

$$\frac{\partial J_n(z)}{\partial n}=J_n(z)\left[\ln\frac{z}{2}+\gamma\right]-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(r+n)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r+n}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}. \tag{25}$$

Используя формулы (20) и (6), выражение для функции $J_{-\nu}(z)$ представим в виде

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+r)}{r!}\,\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r}+\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(-\nu+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r}, \tag{26}$$

где n — ближайшее целое число, большее ν.

Продифференцируем (26) по индексу ν:

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = -J_{-\nu}(z)\ln\frac{z}{2} + \sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{r!}\left[\Gamma'(\nu-r)\frac{\sin\pi\nu}{\pi} + \right.$$

$$\left. + \Gamma(\nu-r)\cos\pi\nu\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r} + \sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-\nu+r+1)}\cdot\frac{\Gamma'(-\nu+r+1)}{\Gamma(-\nu+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2r}. \tag{27}$$

Устремим ν к n. Тогда формула (27) примет вид

$$\frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n} = [\gamma - J_{-n}(z)]\ln\frac{z}{2} + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^n\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2r} +$$

$$+(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}\right). \tag{28}$$

Подставим выражения (25) и (28) в формулу (24). Учитывая соотношение (22), получим для $Y_n(z)$ следующее разложение в ряд, показывающее, что эта функция (она называется функцией Вебера) линейно независима от $J_n(z)$:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right)J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2r} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n}}{r!(n+r)!}\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+r}\right\}. \tag{29}$$

При $r=0$ под суммой в фигурных скобках надо понимать выражение

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Можно было действовать и другим способом. Принимая во внимание изложенное в п. 6.2.11, легко построить решение $y_1(z)$, линейно независимое от $y_2 = J_\nu(z)$, по формуле

$$y_1(z) = J_\nu(z)\left[B - A\int\frac{dz}{z[J_\nu(z)]^2}\right].$$

При любом ν модуль $y_1(z)$ бесконечно возрастает, если z стремится к нулю. Отсюда следует, что $y_1(z)$ и $J_\nu(z)$ линейно независимы.

Нетрудно показать, что можно подобрать числа A и B таким образом, чтобы $y_1(z)$ не отличалась от определенной выше функции $Y_\nu(z)$.

Замечание. В качестве второго решения дифференциального уравнения (13) используется также функция Неймана Y_ν, которая связана с функцией Вебера соотношением

$$\mathrm{Y}_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi Y_\nu(z) + (\ln 2 - \gamma)J_\nu(z). \tag{30}$$

7.5.4. Рекуррентные соотношения. Продифференцируем формулу (17) по z. Получим следующие выражения:

$$zJ'_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\nu+r+1)} (2r+\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\nu},$$

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\nu+r+1)} 2r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\nu},$$

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - z \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!\Gamma(r-1+\nu+1+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(r-1)+\nu+1}.$$

Отсюда найдем первую рекуррентную формулу:

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z). \tag{31}$$

Точно таким же образом получим

$$zJ'_\nu(z) = -\nu J_\nu(z) + zJ_{\nu-1}(z). \tag{32}$$

Вычитая и складывая (31) и (32), найдем

$$2\frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z), \tag{33}$$

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z). \tag{34}$$

Для $\nu = 0$ формула (31) примет вид

$$J'_0(z) = -J_1(z). \tag{35}$$

Нули функции $J_1(z)$ совпадают с максимумами и минимумами $J_0(z)$.

Применяя формулу (23), определяющую бесселеву функцию второго рода $Y_\nu(z)$, легко удостовериться, что эта функция удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и функция $J_\nu(z)$. Значит, так же будет обстоять дело со всеми линейными комбинациями вида $AJ_\nu(z) + BY_\nu(z)$, иначе говоря, с общим решением дифференциального уравнения (13). В частности, рекуррентным соотношениям (31)—(34) удовлетворяет функция Неймана $Y_\nu(z)$, определенная формулой (30), и функции Ханкеля, определенные ниже соотношениями (62).

7.5.5. Применение рекуррентных соотношений к вычислению некоторых интегралов. а) Рассмотрим интеграл

$$\int_{z_0}^{z} z^\nu J_{\nu-1}(z)\, dz.$$

Продифференцируем произведение $z^\nu J_\nu(z)$:

$$\frac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right] = z^\nu J'_\nu(z) + \nu z^{\nu-1} J_\nu(z).$$

Сравнив с формулой (32), мы можем записать правую часть в виде

$$z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

Отсюда, интегрируя от z_0 до z, находим формулу

$$\int_{z_0}^{z} z^\nu J_{\nu-1}(z)\, dz = \left[z^\nu J_\nu(z)\right]_{z_0}^{z}. \tag{36}$$

Таким же образом, но применяя на этот раз формулу (31), получаем

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)\,dz = -[z^{-\nu} J_{\nu}(z)]_{z_0}^{z}. \tag{37}$$

б) Рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{z} J_{\nu}(z)\,dz.$$

Интегрируя обе части формулы (34), в которой ν заменено на $\nu+1$, получим

$$2J_{\nu+1}(z) = \int_{0}^{z} J_{\nu}(z)\,dz - \int_{0}^{z} J_{\nu+2}(z)\,dz.$$

Аналогично

$$2J_{\nu+3}(z) = \int_{0}^{z} J_{\nu+2}(z)\,dz - \int_{0}^{z} J_{\nu+4}(z)\,dz$$

и т. д.

Складывая почленно всю эту цепочку равенств, найдем

$$\int_{0}^{z} J_{\nu}(z)\,dz = 2\,[J_{\nu+1}(z) + J_{\nu+3}(z) + \ldots].$$

Ряд, фигурирующий в правой части, очень быстро сходится. Соображения, излагаемые в конце п. 7.5.21, позволяют определить номер, начиная с которого члены этого ряда становятся пренебрежимо малыми.

в) Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{0}^{z} z^{m} J_{n}(z)\,dz \quad (m \text{ и } n \text{ — целые положительные числа, } m > n).$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$I = \int_{0}^{z} z^{m-n-1} z^{n+1} J_{n}(z)\,dz.$$

Проинтегрируем по частям, пользуясь формулой (36):

$$I = [z^{m-n-1} z^{n+1} J_{n+1}(z)]_{0}^{z} - (m-n-1) \int_{0}^{z} z^{m-n-2} z^{n+1} J_{n+1}(z)\,dz,$$

иначе говоря,

$$I = z^{m} J_{n+1}(z) - (m-n-1) \int_{0}^{z} z^{m-1} J_{n+1}(z)\,dz.$$

Таким же образом получим

$$\int_0^z z^{m-1}J_{n+1}(z)\,dz = z^{m-1}J_{n+2}(z) - (m-n-3)\int_0^z z^{m-2}J_{n+2}(z)\,dz,$$

$$\int_0^z z^{m-2}J_{n+2}(z)\,dz = z^{m-2}J_{n+3}(z) - (m-n-5)\int_0^z z^{m-3}J_{n+3}(z)\,dz,$$

. . . . . .

$$\int_0^z z^{m-k+1}J_{n+k-1}(z)\,dz =$$

$$= z^{m-k+1}J_{n+k}(z) - (m-n-2k+1)\int_0^z z^{m-k}J_{n+k}(z)\,dz.$$

Если можно найти такое целое число k, чтобы $m-k=n+k+1$, т. е. если $m-n$ — нечетное число, то мы снова приходим к интегралу, вычисленному в а). Но если $m-n$ — четное число, то мы вынуждены продолжить вычисление до такого номера k, чтобы $m-k=0$. При этом мы приходим к интегралу от $J_{m+n}(z)$, способ вычисления которого был показан в б).

7.5.6. Интегралы Ломмеля. Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$z^2\frac{d^2x}{dz^2} + z\frac{dx}{dz} + (l^2z^2 - \nu^2)\,x = 0,$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (k^2z^2 - \nu^2)\,y = 0.$$

Умножим первое на $\frac{y}{z}$, а второе на $\frac{x}{z}$. После вычитания получим

$$yz\frac{d^2x}{dz^2} - xz\frac{d^2y}{dz^2} + y\frac{dx}{dz} - x\frac{dy}{dz} = (k^2-l^2)\,xyz,$$

иначе говоря,

$$\frac{d}{dz}\left\{z\left(y\frac{dx}{dz} - x\frac{dy}{dz}\right)\right\} = (k^2-l^2)\,xyz.$$

Проинтегрируем обе стороны последнего равенства от нуля до z. Если в полученной формуле заменить y на $J_\nu(kz)$, а x на $J_\nu(lz)$, то найдем при $R(\nu) > -1$

$$(k^2-l^2)\int_0^z J_\nu(kz)J_\nu(lz)\,z\,dz = z\left\{J_\nu(kz)\frac{dJ_\nu(lz)}{dz} - J_\nu(lz)\frac{dJ_\nu(kz)}{dz}\right\}.$$

Но

$$\frac{dJ_\nu(lz)}{dz} = l\frac{dJ_\nu(lz)}{d(lz)} = lJ'_\nu(lz).$$

Отсюда

$$\int_0^z J_\nu(kz)J_\nu(lz)\,z\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\left\{lJ_\nu(kz)J'_\nu(lz) - kJ_\nu(lz)J'_\nu(kz)\right\}.$$

Согласно соотношению (31), имеем

$$J'_\nu(kz) = \frac{\nu}{kz}J_\nu(kz) - J_{\nu+1}(kz),$$

$$J'_\nu(lz) = \frac{\nu}{lz}J_\nu(lz) - J_{\nu+1}(lz),$$

откуда

$$\int_0^z J_\nu(kz)\,J_\nu(lz)\,z\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\{kJ_\nu(lz)\,J_{\nu+1}(kz) - lJ_\nu(kz)\,J_{\nu+1}(lz)\}. \quad (38)$$

Если бы мы выше подставили в полученную формулу выражения, вытекающие из соотношения (32):

$$J'_\nu(kz) = -\frac{\nu}{kz}J_\nu(kz) + J_{\nu-1}(kz),$$

$$J'_\nu(lz) = -\frac{\nu}{lz}J_\nu(lz) + J_{\nu-1}(lz),$$

то получили бы

$$\int_0^z J_\nu(kz)\,J_\nu(lz)\,z\,dz = \frac{z}{k^2-l^2}\{lJ_{\nu-1}(lz)\,J_\nu(kz) - kJ_{\nu-1}(kz)\,J_\nu(lz)\}. \quad (39)$$

Формулы (38) и (39) не годятся, если $k=l$. В этом случае непосредственное вычисление дает

$$\int_0^z z\,[J_\nu(kz)]^2\,dz = \frac{1}{k^2}\int_0^{kz} z\,[J_\nu(z)]^2\,dz, \qquad R(\nu) > -1.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{kz} z\,[J_\nu(z)]^2\,dz = \frac{k^2z^2}{2}[J_\nu(kz)]^2 - \int_0^{kz} z^2 J_\nu(z)\,J'_\nu(z)\,dz.$$

Учтем, что $J_\nu(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (13). Это дает

$$-z^2J_\nu(z) = z^2J''_\nu(z) + zJ'_\nu(z) - \nu^2J_\nu(z).$$

Исследуемый интеграл можно теперь записать в виде

$$\int_0^z z\,[J_\nu(kz)]^2\,dz = \frac{z^2}{2}[J_\nu(kz)]^2 + \frac{1}{2k^2}\int_0^{kz} d\left(z^2\,[J'_\nu(z)]^2\right) - \frac{\nu^2}{2k^2}\int_0^{kz} d\,[J_\nu(z)]^2,$$

иначе говоря,

$$\int_0^z z\,[J_\nu(kz)]^2\,dz = \frac{1}{2}z^2\left\{[J'_\nu(kz)]^2 + \left(1-\frac{\nu^2}{k^2z^2}\right)[J_\nu(kz)]^2\right\}. \quad (40)$$

Это и есть искомая формула.

Формулы (38)—(40) называются интегралами Ломмеля.

7.5.7. Соотношение между двумя функциями, индексы которых отличаются на целое число. Формула (37), которую можно написать в виде

$$z^{-\nu-1}J_{\nu+1}(z) = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)],$$

поможет установить важное соотношение между двумя бесселевыми функциями, порядок которых отличается на целое число n.

Действительно, если в предыдущей формуле заменить ν на $\nu+1$, получим

$$z^{-\nu-2}J_{\nu+2}(z) = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu-1}J_{\nu+1}(z)] = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu}J_\nu(z)]\right\},$$

или, в сокращенном виде,

$$z^{-\nu-2}J_{\nu+2}(z)=(-1)^2\frac{d^2}{(z\,dz)^2}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}$$

и т. д. Постепенно найдем

$$z^{-\nu-n}J_{\nu+n}(z)=(-1)^n\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}. \tag{41}$$

Это и есть искомое соотношение. Точно так же из формулы (36), которую напишем в виде

$$\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\}=z^\nu J_{\nu-1}(z),$$

получим

$$z^{\nu-n}J_{\nu-n}(z)=\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\{z^\nu J_\nu(z)\}. \tag{42}$$

7.5.8. Применение интегралов Ломмеля к разложению в ряд по бесселевым функциям. Последовательность функций

$$\sqrt{x}\,J_n(\lambda_1 x),\quad \sqrt{x}\,J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ \sqrt{x}\,J_n(\lambda_l x),\ \ldots,$$

в которых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \ldots$ — корни уравнения $J_n(x)=0$, представляет собой последовательность ортогональных функций в интервале $(0,1)$ (см. п. 2.1.2).

Действительно, формула (38) дает

$$(k^2-l^2)\int_0^x J_n(kz)J_n(lz)\,z\,dz=x\{kJ_n(lx)J_{n+1}(kx)-lJ_n(kx)J_{n+1}(lx)\}.$$

Если положить $x=1$, $l=\lambda_i$, $k=\lambda_j$, то

$$\int_0^1 \sqrt{z}\,J_n(\lambda_i z)\sqrt{z}\,J_n(\lambda_j z)\,dz=0,\quad \lambda_j\neq\lambda_i.$$

Из формулы (40) находим

$$\int_0^x z\{J_n(kz)\}^2\,dz=\frac{1}{2}x^2\left\{[J_n'(kx)]^2+\left(1-\frac{n^2}{k^2x^2}\right)[J_n(kx)]^2\right\}.$$

При $x=1$ и $k=\lambda_i$ получим

$$\int_0^1\{\sqrt{z}\,J_n(\lambda_i z)\}^2\,dz=\frac{1}{2}\{J_n'(\lambda_i)\}^2.$$

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$. Если нам нужно найти разложение ее в ряд вида *)

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iJ_n(\lambda_i x),$$

то коэффициенты a_i будут даны выражением

$$a_i=\frac{2\int_0^1 xf(x)J_n(\lambda_i x)\,dx}{\{J_n'(\lambda_i)\}^2}.$$

*) Этот ряд называется рядом Фурье — Бесселя. Об условиях, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ее можно было разложить в ряд Фурье — Бесселя, см. [19], гл. 18.

Пример. Требуется разложить в промежутке от 0 до 1 в ряд вида $\sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(\lambda_i x)$ функцию $f(x)=1$. Предыдущая формула дает

$$a_i = \frac{2\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)\,dx}{\{J_0'(\lambda_i)\}^2}.$$

Исходя из соотношений (35) и (36), получим

$$a_i = \frac{2\int_0^1 \lambda_i x J_0(\lambda_i x)\,d(\lambda_i x)}{\lambda_i^2\{J_1(\lambda_i)\}^2} = \frac{2\int_0^{\lambda_i} xJ_0(x)\,dx}{\lambda_i^2\{J_1(\lambda_i)\}^2} = \frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}.$$

Отсюда ряд будет

$$1 = \frac{2J_0(\lambda_1 x)}{\lambda_1 J_1(\lambda_1)} + \frac{2J_0(\lambda_2 x)}{\lambda_2 J_1(\lambda_2)} + \ldots + \frac{2J_0(\lambda_i x)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)} + \ldots$$

7.5.9. Бесселевы функции первого и второго рода с полуцелым индексом. Рассмотрим дифференциальное уравнение (13) для частного случая $\nu = 1/2$. Тогда это уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)y = 0.$$

Положим $y = uz^{-\frac{1}{2}}$. Подстановка дает

$$\frac{d^2u}{dz^2} + u = 0.$$

Отсюда

$$u(z) = A\cos z + B\sin z,$$

$$y(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}(A\cos z + B\sin z).$$

Попробуем определить коэффициенты A и B таким образом, чтобы y совпало с функцией $J_{\frac{1}{2}}$ или $J_{-\frac{1}{2}}$. Так как $J_{\frac{1}{2}}(0)=0$, то коэффициент A должен быть равен нулю. Сравнивая разложение в ряд $J_{\frac{1}{2}}(z)$ и $y(z)$, получим

$$\frac{B}{\sqrt{z}}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) = \sqrt{\frac{z}{2}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 + \ldots).$$

Отсюда

$$B = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \tag{43}$$

Точно такое же вычисление дает для $J_{-\frac{1}{2}}$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \tag{44}$$

Если в формуле (23), определяющей $Y_\nu(z)$, положим $\nu = 1/2$, то

$$Y_{\frac{1}{2}}(z) = -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \tag{45}$$

Точно так же

$$Y_{-\frac{1}{2}}(z) = J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \tag{46}$$

Если в рекуррентной формуле (33) приравнять $\nu = \pm 1/2$, то найдем

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right),$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z - \frac{\cos z}{z}\right).$$

Аналогично последовательным применением (33) получим:

$$J_{\frac{5}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right],$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{3}{z}\sin z + \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\cos z\right]\right.;$$

$$J_{\frac{7}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{15}{z^3} - \frac{6}{z}\right)\sin z - \left(\frac{15}{z^2} - 1\right)\cos z\right],$$

$$J_{-\frac{7}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[-\left(\frac{15}{z^2} - 1\right)\sin z - \left(\frac{15}{z^3} - \frac{6}{z}\right)\cos z\right];$$

$$J_{\frac{9}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{105}{z^4} - \frac{45}{z^2} + 1\right)\sin z - \left(\frac{105}{z^3} - \frac{10}{z}\right)\cos z\right],$$

$$J_{-\frac{9}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{105}{z^3} - \frac{10}{z}\right)\sin z + \left(\frac{105}{z^4} + \frac{45}{z^2} + 1\right)\cos z\right].$$

Пользуясь соотношениями (41) и (42), в которых ν соответственно придаются значения $1/2$ и $-1/2$, найдем

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left\{\frac{\sin z}{z}\right\}, \tag{47}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left\{\frac{\cos z}{z}\right\}. \tag{48}$$

Если в формуле (23), определяющей функцию $Y_\nu(z)$, придать ν значение $\pm(n + 1/2)$, то получим

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z), \tag{49}$$

$$Y_{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z). \tag{50}$$

7.5.10. Применение бесселевых функций к вычислению интегралов Френеля. Интегралы Френеля, особенно часто встречающиеся в задачах по дифракции, были определены в п. 7.3.7 следующими формулами:

$$C(\nu) = \int_0^\nu \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt, \qquad S(\nu) = \int_0^\nu \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

Положим $\frac{\pi t^2}{2} = z$. После подстановки, учитывая формулы (43) и (44), получим

$$C(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\nu} J_{-\frac{1}{2}}(z)\, dz,$$

$$S(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\nu} J_{\frac{1}{2}}(z)\, dz.$$

Принимая во внимание метод вычисления, указанный в п. 7.5.5, можно написать

$$\begin{aligned} C(\nu) &= J_{\frac{1}{2}}(\nu) + J_{\frac{5}{2}}(\nu) + J_{\frac{9}{2}}(\nu) + \ldots, \\ S(\nu) &= J_{\frac{3}{2}}(\nu) + J_{\frac{7}{2}}(\nu) + J_{\frac{11}{2}}(\nu) + \ldots \end{aligned} \tag{51}$$

Оба ряда очень быстро сходятся и особенно удобны при вычислении $C(\nu)$ и $S(\nu)$.

7.5.11. Случай, когда индекс равен целому числу $\nu = n$. Рассмотрим ряд для функции

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{zt}{2}} e^{-\frac{z}{2t}}.$$

Так как ряды

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 + \frac{zt}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{zt}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{zt}{2}\right)^n + \ldots,$$

$$e^{-\frac{z}{2t}} = 1 - \frac{z}{2t} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2t}\right)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2t}\right)^n + \ldots$$

сходятся абсолютно *), то ряд для произведения равен произведению рядов для сомножителей.

Соберем члены при одинаковой степени t. Легко заметить, что коэффициент при t^n представляет степенной ряд по z, который совпадает с рядом для функции $J_n(z)$, а коэффициент при t^{-n} совпадает с рядом для $J_{-n}(z)$. Мы можем, следовательно, написать

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = J_0(z) + tJ_1(z) + t^2 J_2(z) + \ldots + t^n J_n(z) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{t} J_{-1}(z) + \frac{1}{t^2} J_{-2}(z) + \ldots + \frac{1}{t^n} J_{-n}(z) + \ldots \end{aligned} \tag{52}$$

или же, в силу соотношения (22),

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\left[t^n + (-1)^n \frac{1}{t^n}\right].$$

Функция $e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$ называется производящей функцией для бесселевых функций первого рода целого порядка.

*) Ряды сходятся абсолютно для всех x и t, кроме $t = 0$, когда второй ряд расходится. Этот случай далее из рассмотрения исключается.

Ряд справа сходится при всех z и при всех $t \neq 0$. Положим $t = e^{j\theta}$. После подстановки получаем

$$e^{jz\sin\theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\left[e^{jn\theta} + (-1)^n e^{-\sin\theta}\right].$$

Группируем в сумме отдельно четные ($n = 2p$) и нечетные члены ($n = 2p' - 1$):

$$e^{jz\sin\theta} = J_0(z) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(z)\cos 2p\theta + 2j\sum_{p'=1}^{\infty} J_{2p'-1}(z)\sin(2p'-1)\theta.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, находим

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(z)\cos 2p\theta, \tag{53}$$

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{p'=1}^{\infty} J_{2p'-1}(z)\sin(2p'-1)\theta. \tag{54}$$

Заменяя θ на $\frac{\pi}{2} - \theta$, получаем

$$\cos(z\cos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{2p}(z)\cos 2p\theta, \tag{55}$$

$$\sin(z\cos\theta) = -2\sum_{p'=1}^{\infty} (-1)^{p'} J_{2p'-1}(z)\cos(2p'-1)\theta. \tag{56}$$

Эти формулы дают разложения в ряд Фурье функций, находящихся в левых частях равенств. Пользуясь классическим способом вычисления коэффициентов ряда Фурье, умножим обе части уравнения (53) на $\cos 2k\theta$ и проинтегрируем от 0 до π. Тогда, заметив, что все интегралы, содержащие произведение $\cos 2k\theta \cos 2p\theta$, равны нулю, если $k \neq p$, и равны $\frac{\pi}{2}$, если $p = k$, получим

$$J_{2k}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta)\cos 2k\theta\, d\theta.$$

Применим этот же способ к формуле (54). Тогда

$$J_{2k-1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\sin(2k-1)\theta\, d\theta.$$

Обе полученные формулы можно представить в виде одного соотношения

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\cos(z\sin\theta)\cos n\theta + \sin(z\sin\theta)\sin n\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta. \tag{57}$$

Действительно, если n — четное число, то второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю. Если же n — нечетное число, то равно нулю первое слагаемое *).

*) Интеграл в (57) называется интегралом Бесселя.

7.5.12. Представление $J_\nu(z)$ через определенный интеграл. Сравнивая формулы (11) и (12), получим

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{2}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta\,d\theta.$$

Положим $\alpha=r+\frac{1}{2}$, $\beta=\nu+\frac{1}{2}$. Тогда предыдущее выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(r+\nu+1)}=\frac{2}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2r}\theta\sin^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

Если ввести выражение для $\Gamma(r+\nu+1)$ в ряд для $J_\nu(r)$ (формулу (17)) и учесть выражение для $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)$ по формуле (8), то

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r}}{1\cdot3\ldots(2r-1)\cdot2\cdot4\ldots2r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2r}\theta\sin^{2\nu}\theta\,d\theta,$$

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin^{2\nu}\theta\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r}\cos^{2r}\theta}{(2r)!}\right]d\theta.$$

Сумма под знаком интеграла представляет собой разложение в степенной ряд функции $\cos(z\cos\theta)$. Отсюда

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\nu}\theta\cos(z\cos\theta)\,d\theta,$$

или

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\theta\cos(z\cos\theta)\,d\theta, \tag{58}$$

или

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi}e^{jz\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta. \tag{59}$$

Считая $u=\cos\theta$, получим

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos z\,u\,du. \tag{60}$$

Единственное ограничение относится к индексу ν, который должен быть таким, чтобы $R\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0$.

7.5.13. Представление $J_\nu(z)$ с помощью интеграла Коши. В формуле (17), дающей разложение в ряд функции $J_\nu(z)$, заменим $\Gamma(\nu+r+1)$ его выражением через интеграл Коши, указанным в п. 7.4.5 [формула (10)]. Получим

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2\pi j} \int_C \frac{\left(\frac{z^2}{4t}\right)^r}{r!} \frac{e^t\,dt}{t^{\nu+1}},$$

иначе говоря,

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{e^{t-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\nu+1}}\,dt.$$

Это и есть искомое выражение без какого-либо ограничения для ν и z. Контур интегрирования здесь тот же, что и на рис. 7.12, или любой эквивалентный ему. Это может быть контур Бромвича, если интегралы по дугам окружности бесконечного радиуса, расположенным слева от него, будут равны нулю, что справедливо при $R(\nu)>-1$. В этом случае имеем

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{t-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\nu+1}}\,dt.$$

7.5.14. Теорема сложения[1]**.** Положим, что в формуле (52) $z=x+y$. Тогда

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \cdot e^{\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x+y),$$

иначе говоря,

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} t^p J_p(x) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} t^q J_q(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x+y).$$

Если произвести умножение рядов и приравнять коэффициенты при t^n, то получим

$$J_n(x+y)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x) J_{n-p}(y).$$

Пользуясь формулой (22), можно в этом ряду использовать только функции с положительными индексами. Для $n=0$ имеем

$$J_0(x+y)=J_0(x)J_0(y)-2J_1(x)J_1(y)+\ldots+2(-1)^n J_n(x)J_n(y)+\ldots;$$

для $n=1$

$$J_1(x+y)=J_0(x)J_1(y)+J_1(x)J_0(y)-[J_2(x)J_1(y)+J_2(y)J_1(x)]+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n[J_n(x)J_{n+1}(y)+J_n(y)J_{n+1}(x)]+\ldots$$

Общая формула будет

$$J_n(x+y)=\sum_{p=0}^{n} J_p(x)J_{n-p}(y)+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p[J_p(x)J_{p+n}(y)+J_p(y)J_{p+n}(x)]. \tag{61}$$

[1]) Формула умножения аргументов дана в п. 8.5.7.

7.5.15. Бесселевы функции третьего рода или функции Ханкеля. Определение. Положим

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + jY_\nu(z) = j\frac{J_\nu(z)\,e^{-j\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu},$$
$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - jY_\nu(z) = -j\frac{J_\nu(z)\,e^{j\pi\nu} - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}. \qquad (62)$$

Функции $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ называются функциями Ханкеля соответственно первой и второй, или функциями Бесселя третьего рода *). Мы покажем целесообразность введения этих новых функций в последующих пунктах.

Непосредственно из определений функций Ханкеля — формул (62) — следует, что

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{j\pi\nu}H_\nu^{(1)}(z), \qquad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-j\pi\nu}H_\nu^{(2)}(z).$$

В частности, если ν равно целому n, то

$$H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z), \qquad H_{-n}^{(2)}(z) = (-1)^n H_n^{(2)}(z).$$

Если $\nu = \frac{1}{2}$, то прямо из (62) имеем

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -j\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{jz}, \qquad H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{jz},$$
$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = j\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-jz}, \qquad H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-jz}.$$

Из этих выражений с помощью рекуррентных формул (33), которые здесь также имеют место, можно вычислить функции Ханкеля для любого индекса ν вида $n+\frac{1}{2}$.

7.5.16. Асимптотические разложения. Можно показать, что для больших значений $|z|$ и для $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$ имеют место формулы:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[P_\nu(z)\cos\varphi - Q_\nu(z)\sin\varphi], \qquad (63)$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[P_\nu(z)\sin\varphi + Q_\nu(z)\cos\varphi], \qquad (64)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{j\varphi}\,[P_\nu(z) + jQ_\nu(z)], \qquad (65)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-j\varphi}\,[P_\nu(z) - jQ_\nu(z)], \qquad (66)$$

где

$$\varphi = z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \qquad (67)$$

$$P_\nu(z) \sim 1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)(4\nu^2-7^2)}{4!\,(8z)^4} - \ldots, \qquad (68)$$

$$Q_\nu(z) \sim \frac{4\nu^2-1^2}{1!\,8z} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8z)^3} + \ldots \qquad (69)$$

*) При целых ν правые части (62) становятся неопределенными. Эта неопределенность может быть раскрыта так же, как это было сделано в п. 7.5.3 для бесселевых функций второго рода.

Выражения для $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ представляют собой асимптотические ряды. Можно показать, что если в них ограничиться k-м членом, таким, что

$$k > \frac{2\nu - 5}{4} \quad \text{для} \quad P_\nu(z) \tag{70}$$

и

$$k > \frac{2\nu - 7}{4} \quad \text{для} \quad Q_\nu(z), \tag{71}$$

то погрешность будет меньше первого отброшенного члена. Вычисление производится следующим образом: отыскивается член ряда (68) и (69), наименьший из всех возможных, номер которого удовлетворяет условиям (70) и (71). Так как при этом погрешность меньше первого отбрасываемого члена, то, остановившись на предыдущем члене, мы проведем вычисление с максимальной точностью.

Замечание. Если $\nu = n + \frac{1}{2}$, то ряды (68) и (69) обрываются и приводятся к выражениям, совпадающим с указанными в п. 7.5.9. Формулы (63) — (66) при этом оказываются точными.

7.5.17. Нахождение численных значений бесселевых функций. Пример. Требуется вычислить $J_1(2)$ и $Y_1(2)$. Имеем

$$\varphi = z - \frac{\pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{2} = -20°,4, \quad \sin\varphi = -0{,}348, \quad \cos\varphi = 0{,}938,$$

$$P_1(2) = 1 + 0{,}0293 - 0{,}0090 + 0{,}0156 - \ldots,$$

$$Q_1(2) = 0{,}1875 - 0{,}0128 + 0{,}0086 - 0{,}0156 + \ldots$$

Здесь третий член наименьший. Так как условия (70) и (71) выполняются, то

$$P_1(2) = 1{,}0293 \text{ с погрешностью, меньшей } 0{,}009,$$

$$Q_1(2) = 0{,}1747 \text{ с погрешностью, меньшей } 0{,}0086.$$

Отсюда

$$J_1(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1{,}0293 \cdot 0{,}938 + 0{,}1747 \cdot 0{,}348) = 0{,}580,$$

$$Y_1(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-1{,}0293 \cdot 0{,}348 + 0{,}1747 \cdot 0{,}938) = -0{,}109$$

с погрешностью, меньшей 0,006.

Указанная оценка непосредственно подтверждается таблицами п. 7.5.46. Это показывает, что асимптотические разложения (68) и (69) дают хороший результат даже для не очень больших значений z.

7.5.18. Асимптотические выражения для бесселевых функций при больших значениях аргумента. Асимптотические разложения (63) — (66) легко позволяют определить предельные выражения для бесселевых функций при очень больших значениях аргумента z. Если z вещественно и бесконечно возрастает, то $P_\nu(z)$ стремится к единице, а $Q_\nu(z)$ — к нулю. Следовательно, бесселевы функции получат следующие асимптотические выражения:

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\varphi, \quad Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\varphi,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{j\varphi}, \quad H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-j\varphi}, \tag{72}$$

где $\varphi = z - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$. Эти формулы показывают, что имеется аналогия между бесселевыми и круговыми функциями, а также между функциями Ханкеля и экспоненциальными функциями от чисто мнимого аргумента.

Из формул (72) видно, что бесселевы функции стремятся к нулю, если z вещественно и бесконечно возрастает. Если же z — комплексное число и только его мнимая часть бесконечно возрастает, то дело обстоит иначе. Действительно, пусть $z = u + jv$. Тогда

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{\sqrt{2\pi z}},$$

где

$$j\varphi = -v + j\left[u - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right].$$

При очень большом v имеем

$$|J_\nu(u + jv)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{|v|}}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Это выражение бесконечно возрастает вместе с v. То же имеет место и для $|Y_\nu(z)|$. Для функций Ханкеля оказывается, что когда одна из них стремится к нулю, модуль другой бесконечно возрастает. Это объясняет, почему необходимо было дополнить бесселевы функции функциями Ханкеля. С помощью последних легко сформулировать граничные условия для общего интеграла уравнения (13), когда комплексная переменная z обладает бесконечно возрастающей мнимой частью.

7.5.19. Корни бесселевых функций. В силу общих соображений, доказанных в п. 6.2.11, решение уравнения Бесселя (13) может иметь лишь простые корни (за исключением случая $z = 0$, $\nu > 1$). Два линейно независимых решения уравнения (13) не могут иметь общих корней, и корни эти взаимно разделены.

Сейчас мы докажем несколько теорем, относящихся к корням бесселевых функций $J_\nu(x)$ для вещественных x и $\nu > -1$.

Теорема. Все корни $J_\nu(x)$ вещественны.

Действительно, пусть z_0 — комплексный корень. Он не может быть чисто мнимым, так как при этом все члены ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(r + \nu + 1)} \left(\frac{z_0}{2}\right)^{2r}$$

были бы положительны и функция $J_\nu(z_0)$ не могла бы быть равна нулю. Он не может быть и комплексным. Действительно, пусть z_0^* — сопряженное комплексное число, которое также является корнем, потому что $J_\nu(x)$ — функция вещественная. Из формулы (38) имеем тогда

$$\int_0^x z J_\nu(z_0 z) J_\nu(z_0^* z)\, dz = \frac{x}{z_0^{*2} - z_0^2}\left[z_0^* J_\nu(z_0 x) J_{\nu+1}(z_0^* x) - z_0 J_\nu(z_0^* x) J_{\nu+1}(z_0 x)\right],$$

что дает для $x = 1$

$$\int_0^1 z J_\nu(z_0 z) J_\nu(z_0^* z)\, dz = 0.$$

Это равенство не может иметь места, так как величина под знаком интеграла существенно положительна.

Теорема. Корни J_ν и $J_{\nu+1}$ взаимно разделены.

Из формул (36) и (37) получаем посредством дифференцирования

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)] = x^{\nu+1}J_\nu(x).$$

Первая формула показывает, что между двумя последовательными корнями $x^{-\nu}J_\nu(x)$ имеется по крайней мере один корень $x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

Вторая формула показывает, что между двумя последовательными корнями $x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)$ имеется по крайней мере один корень $x^{\nu+1}J_\nu(x)$.

Формула (31) показывает, что у функций J_ν и $J_{\nu+1}$ нет общих корней, так как все корни функции J_ν простые. Повторное применение рекуррентных формул и формул, из них вытекающих, позволяет показать, что корни J_ν и $J_{\nu+m}$ также взаимно разделены.

7.5.20. Кривые $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, ..., $J_5(x)$ (рис. 7.14).

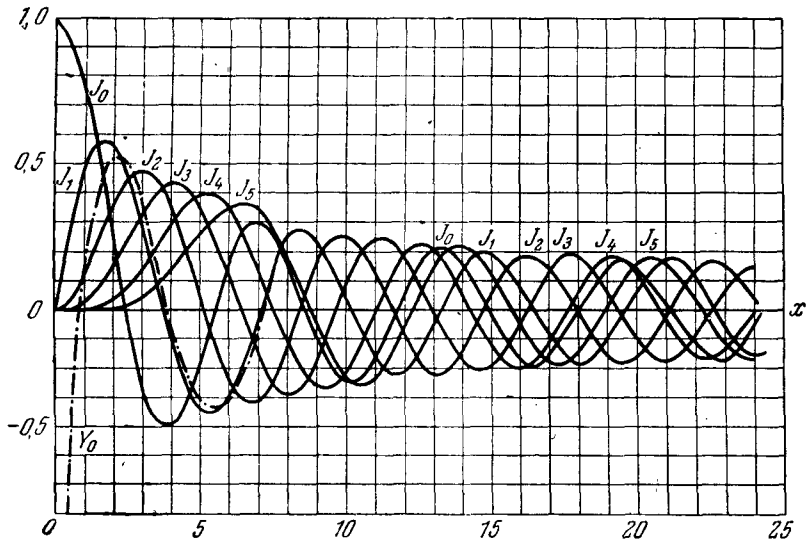


Рис. 7.14.

7.5.21. Поверхность $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$ (рис. 7.15).

Поверхность $z = J_\nu(x)$ показывает, как изменяются функции $J_\nu(x)$, если непрерывно изменять переменные x и ν. Для $\nu = 0$ функция $J_0(x)$ равна 1 при $x = 0$. Это единственная функция Бесселя, имеющая при $x = 0$ конечное значение, не равное нулю. Для $\nu > 0$ все функции $J_\nu(x)$ равны нулю при $x = 0$.

Формулу (31) можно записать в виде

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x).$$

Разложим правую часть в ряд по x и рассмотрим член с низшей степенью x. Для малых значений x можно написать

$$J'_\nu(x) \approx \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{2^\nu} \cdot x^{\nu-1}.$$

Если $\nu > 1$, то $J'_\nu(0) = 0$, т. е. касательная горизонтальна в начале координат.

Если $\nu < 1$, то $J'_\nu(0) = \infty$, т. е. касательная вертикальна в начале координат.

Если $\nu = 1$, то $J'_\nu(0) = \frac{1}{2}$, т. е. касательная наклонна в начале координат.

Это изменение наклона касательной ясно видно на рис. 7.16. Функция $J_1(x)$ и, конечно, функция $J_{-1}(x)$ — единственные бесселевы функции первого рода, имеющие наклонную касательную в начале координат.

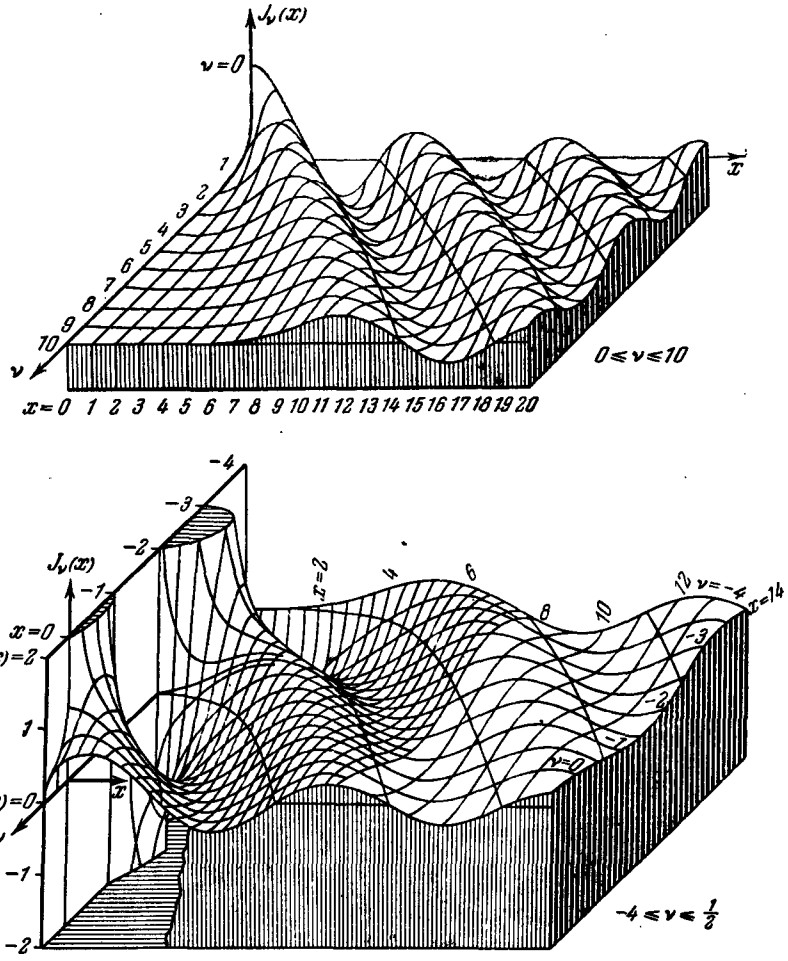


Рис. 7.15.

На рис. 7.16 подробно показана поверхность $J_\nu(x)$ для значений ν, заключенных между -1 и $+2$, и значений x, заключенных между 0 и $+2$. Поверхность проведена до кривой, соответствующей первым корням функции $J_\nu(x)$ при различных значениях ν.

Если ν отрицательно, то функции $J_\nu(x)$ при $x = 0$ равны $\pm\infty$ в зависимости от знака $(-1)^n$ (где n — ближайшее целое число, меньшее $-\nu$).

Это не относится к целым значениям ν ($\nu = -n$), когда мы, в соответствии с формулой (22), имеем функцию, только знаком $(-1)^n$ отличающуюся

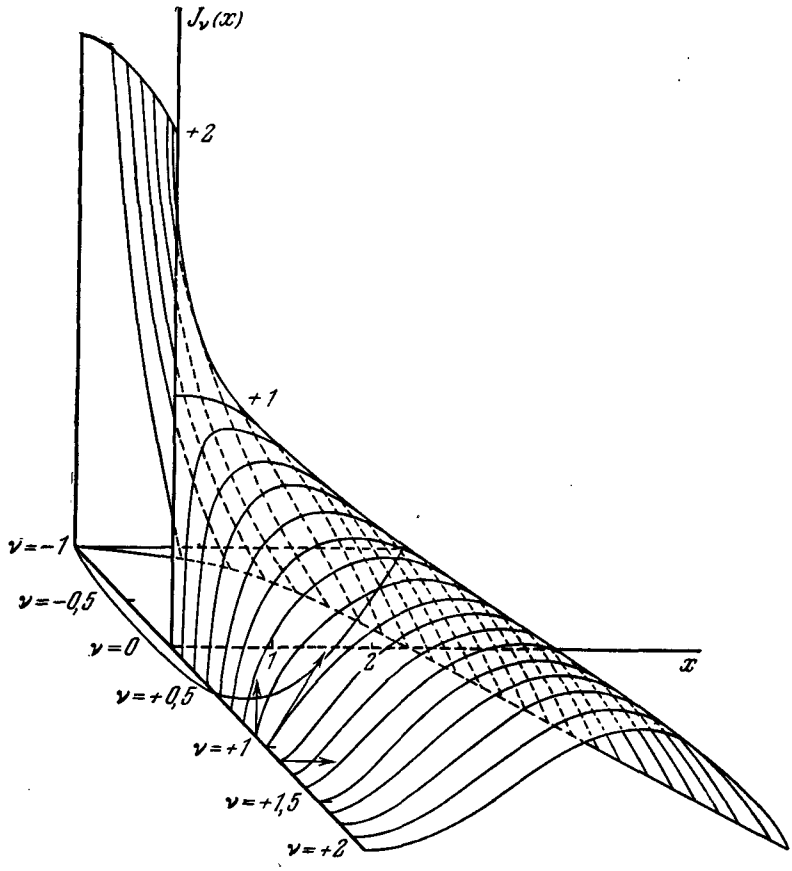


Рис. 7.16.

от $J_n(x)$. По мере того как ν принимает все бо́льшие положительные значения, кривые, представляющие функции, все более „лениво" отклоняются от оси абсцисс.

Рассмотрим, например, функцию $J_{18}(x)$. Имеем

$$J_{18}(1) = 0{,}0148 \cdot 10^{-15},$$
$$J_{18}(5) = 0{,}01631 \cdot 10^{-8},$$
$$J_{18}(10) = 0{,}01524 \cdot 10^{-3},$$
$$J_{18}(15) = 0{,}03463,$$
$$J_{18}(20) = 0{,}2511.$$

Функция $J_{18}(x)$ отчетливо отклоняется от оси Ox только при значениях x, близких к значению индекса.

Необходимо уточнить это важное свойство бесселевых функций, так как при разложении в ряд по бесселевым функциям бывает очень полезно определить номер, начиная с которого члены становятся пренебрежимо малыми.

Кривые на рис. 7.17 изображают наименьшие значения x_1 и x_2 величины x, для которых

$$J_\nu(x_1) = 0{,}005, \quad J_\nu(x_2) = 0{,}001.$$

Для удобства графического изображения вместо x_1 и x_2 отложены соответственно $2(\nu - x_1)$ и $\nu - x_2$.

Найдем, например, для каких значений x, заключенных между 0 и x_2, $J_{45}(x)$ будет меньше 0,001. График рис. 7.17 дает $\nu - x_2 = 9$, откуда $x_2 = 36$.

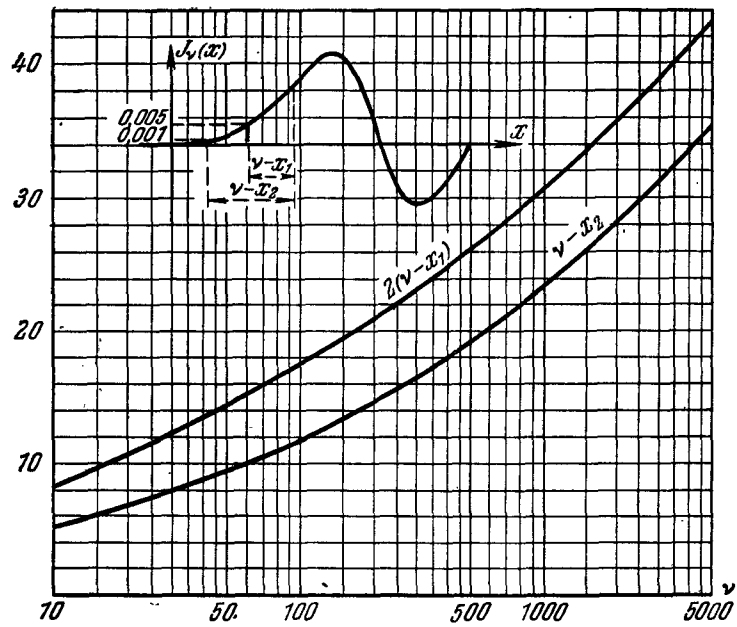


Рис. 7.17.

По мере возрастания x бесселевы функции колеблются вокруг оси Ox и их отклонения от оси убывают обратно пропорционально $\sqrt{x}$. Кривые рис. 7.18 дают абсолютные значения первых максимумов и минимумов в зависимости от порядка ν бесселевой функции.

7.5.22. Кривые $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{3}{2}}(x)$, ..., $J_{-\frac{9}{2}}(x)$ (рис. 7.19).

7.5.23. Кривые $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, $Y_4(x)$ (рис. 7.20).

7.5.24. Поверхность $z = f(x, \nu) = Y_\nu(x)$ (рис. 7.21).

Модифицированные бесселевы функции первого и второго рода

Заменив z на jz в дифференциальном уравнении (13), получим

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0. \tag{73}$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция $AJ_\nu(jz)$.

7.5.25. Модифицированная бесселева функция первого рода. Положим $A = j^{-\nu}$. Модифицированной бесселевой функцией первого рода называют функцию

$$I_\nu(z) = j^{-\nu} J_\nu(jz). \tag{74}$$

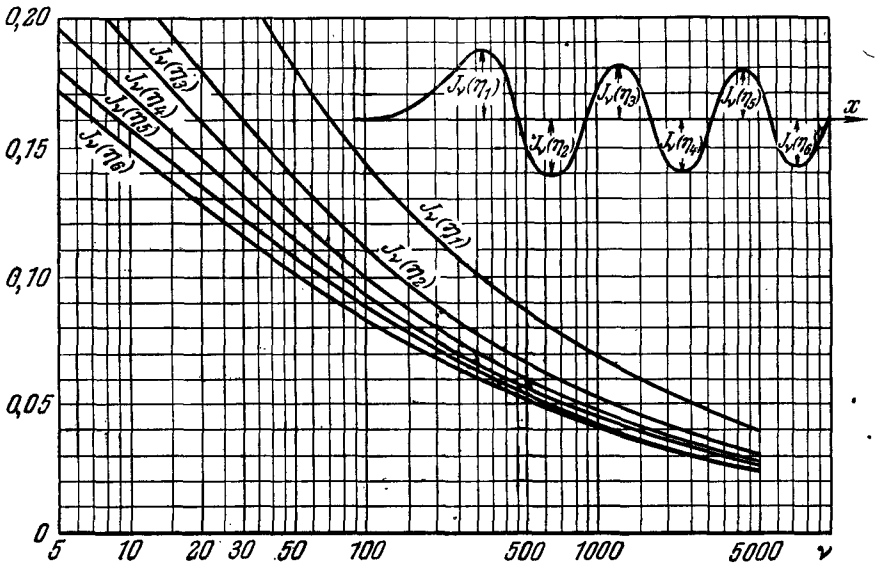


Рис. 7.18.

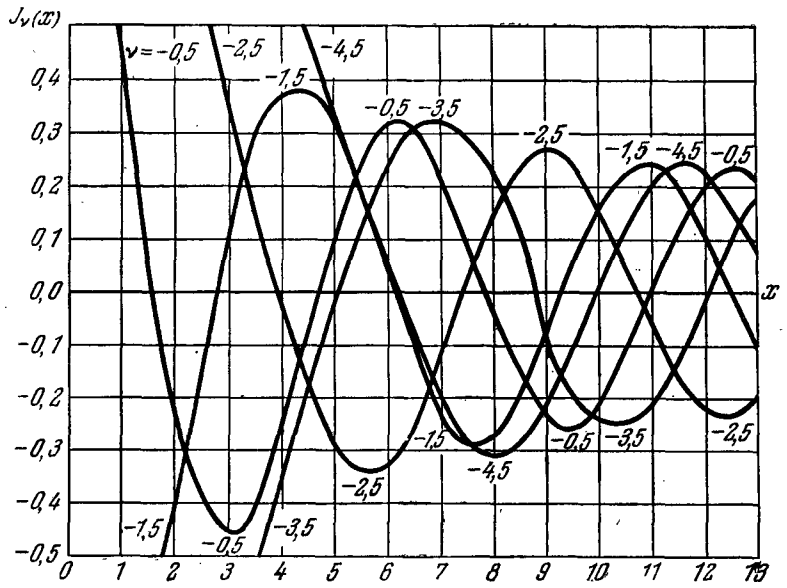


Рис. 7.19.

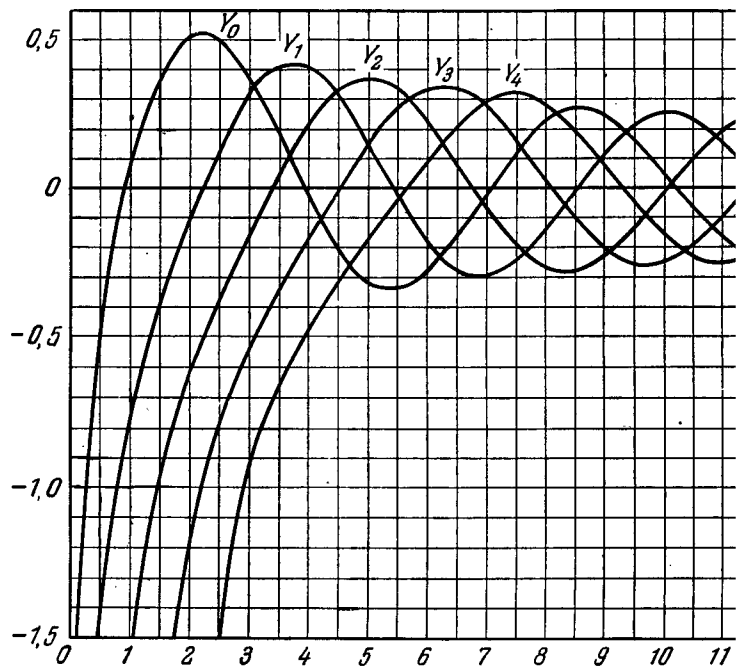


Рис. 7.20.

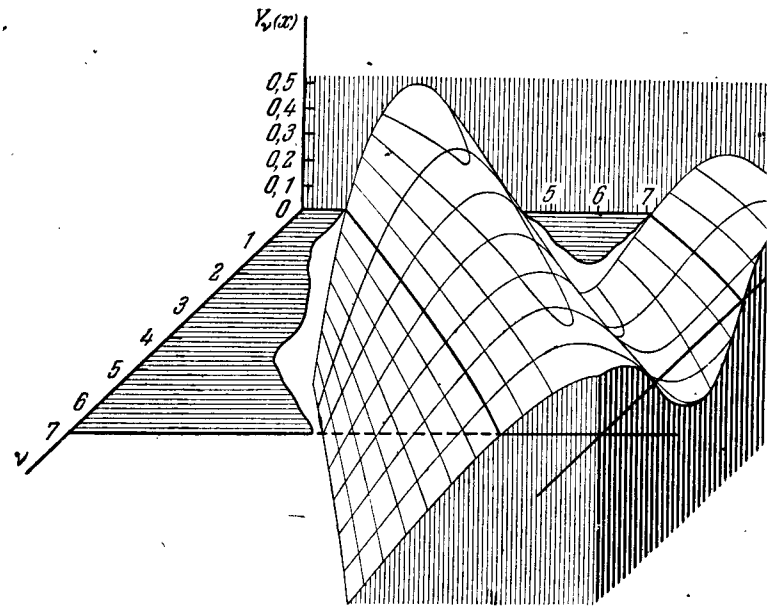


Рис. 7.21.

Ряд для нее будет

$$I_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,\Gamma(r+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}. \tag{75}$$

Если ν — не целое число, то в качестве второго частного решения уравнения (73) можно взять функцию $I_{-\nu}(z)$. Нетрудно доказать, что $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ линейно независимы.

Если ν равно целому числу n, то

$$I_{-n}(z)=j^n J_{-n}(jz)=j^n(-1)^n J_n(jz)=j^{-n}J_n(jz).$$

Отсюда

$$I_{-n}(z)=I_n(z).$$

Следовательно, для целых значений индекса необходимо ввести другой частный интеграл, который оказался бы линейно независимым от $I_\nu(z)$.

7.5.26. Модифицированная бесселева функция второго рода. Функция

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\pi\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu} \tag{76}$$

представляет собой решение уравнения (73). Можно показать, что если устремлять ν к целому числу n, то функция $K_\nu(z)$ будет стремиться к функции $K_n(z)$, линейно независимой от $I_n(z)$. Эта функция называется модифицированной бесселевой функцией второго рода или функцией Макдональда. Вычислением, подобным приведенному в п. 7.5.3, можно установить для $K_n(z)$ разложение в степенной ряд, очень похожий на разложение, полученное для $Y_n(z)$.

Функцию $K_\nu(z)$ можно легко выразить через функцию $H_\nu^{(1)}(z)$. Заменив z на jz в первой формуле (62), получим

$$H_\nu^{(1)}(jz)=j\frac{J_\nu(jz)\,e^{-j\pi\nu}-J_{-\nu}(jz)}{\sin\pi\nu}=j^{\nu+1}\frac{I_\nu(z)-I_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Отсюда

$$K_\nu(z)=j^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(jz). \tag{77}$$

7.5.27. Асимптотические разложения. Если $|z|$ велико, а аргумент z заключен между 0 и π, то

$$I_\nu(z)\approx\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1-\frac{4\nu^2-1^2}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}-\dots\right\}+$$
$$+\frac{e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)j\pi}}{\sqrt{2\pi z}}e^{-z}\left\{1+\frac{4\nu^2-1^2}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}+\dots\right\}.$$

Если $R(z)>0$, то вторым рядом можно пренебречь.

Если $|z|$ велико, а аргумент заключен между $-\pi$ и 0, то

$$I_\nu(z)\approx\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1-\frac{4\nu^2-1^2}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}-\dots\right\}+$$
$$+\frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)j\pi}}{\sqrt{2\pi z}}e^{-z}\left\{1+\frac{4\nu^2-1^2}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}+\dots\right\}.$$

Здесь также, если $R(z)>0$, вторым рядом можно пренебречь.

Если $|z|$ велико, а аргумент заключен между $-\pi$ и $+\pi$, то

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left\{1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} + \dots\right\}.$$

7.5.28. Рекурреитные формулы. Заменив z на jz в рекуррентной формуле (31), получим, умножая обе части на $j^{-\nu}$,

$$z\frac{d}{dz} j^{-\nu} J_\nu(jz) = \nu j^{-\nu} J_\nu(jz) - j^2 z j^{-\nu-1} J_{\nu+1}(jz).$$

Отсюда, применяя определение (74), имеем

$$z\frac{d}{dz} I_\nu(z) = \nu I_\nu(z) + z I_{\nu+1}(z). \tag{78}$$

То же вычисление, примененное к формуле (32), дает

$$z\frac{d}{dz} I_\nu(z) = -\nu I_\nu(z) + z I_{\nu-1}(z). \tag{79}$$

Складывая и вычитая формулы (78) и (79), получаем

$$2\frac{d}{dz} I_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) + I_{\nu-1}(z), \quad \frac{2\nu}{z} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z).$$

Эти выражения аналогичны формулам (34) и (33), но не тождественны им.

Полагая в формуле (78) $\nu = 0$, получим

$$I_0'(z) = I_1(z). \tag{80}$$

Функция $K_\nu(z)$ не удовлетворяет найденным выше рекуррентным соотношениям. Действительно, поскольку $H_\nu^{(1)}(z)$ удовлетворяет соотношениям (31) — (34), формула (77) приводит к выражениям

$$zK_\nu'(z) = -\nu K_\nu(z) - zK_{\nu-1}(z),$$
$$zK_\nu'(z) = \nu K_\nu(z) - zK_{\nu+1}(z).$$

Отсюда

$$-2K_\nu'(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z),$$
$$-\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z).$$

Поступая так, как это было сделано выше, можно, исходя из основных формул для функций $J_n(z)$, легко установить следующие соотношения для модифицированных функций:

$$\int_{z_0}^{z} z^{-\nu} I_{\nu+1}(z)\, dz = [z^{-\nu} I_\nu(z)]_{z_0}^{z},$$

$$\int_{z_0}^{z} z^{\nu} I_{\nu-1}(z)\, dz = [z^{\nu} I_\nu(z)]_{z_0}^{z},$$

$$I_n(z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{-z\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta,$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\operatorname{sh} z, \qquad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\operatorname{ch} z,$$

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\operatorname{ch} z - \frac{\operatorname{sh} z}{z}\right], \quad I_{-\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\operatorname{sh} z - \frac{\operatorname{ch} z}{z}\right],$$

$$K_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-z},\quad K_{\frac{3}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-z}\left[1+\frac{1}{z}\right],$$

$$I_\nu(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ch}(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi}e^{\pm z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta,$$

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(zu)\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{\pm zu}\,du.$$

7.5.29. Кривые $I_0(x)$, $I_1(x)$, ..., $I_{11}(x)$ (рис. 7.22 и 7.23).
7.5.30. Кривые $K_0(x)$ и $K_1(x)$ (рис. 7.24).

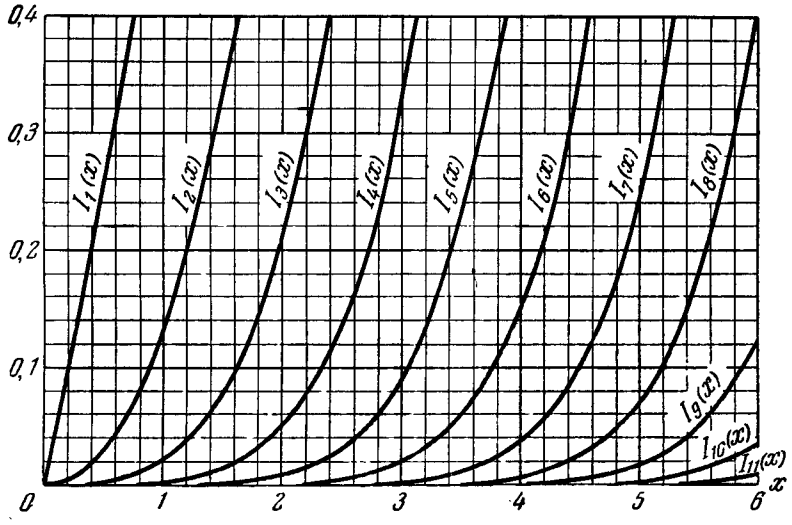


Рис. 7.22.

Функции Кельвина

7.5.31. Функции Кельвина нулевого порядка. В некоторых задачах требуется найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}-jk^2y=0. \tag{81}$$

Если принять $k_1^2=-jk^2$, мы снова придем к дифференциальному уравнению (13), в котором $\nu=0$, а z заменено на k_1z. Следовательно, общее решение уравнения (81) будет

$$y=AJ_0(k_1z)+BY_0(k_1z).$$

Параметр k_1 равен $\pm j^{3/2}k$. Возьмем положительный знак. Тогда общее решение получит вид

$$y = AJ_0(kzj^{3/2}) + BY_0(kzj^{3/2}).$$

Модули обеих функций $J_0(kzj^{3/2})$ и $Y_0(kzj^{3/2})$ бесконечно возрастают при бесконечно возрастающем z. Это обстоятельство затрудняет нахождение

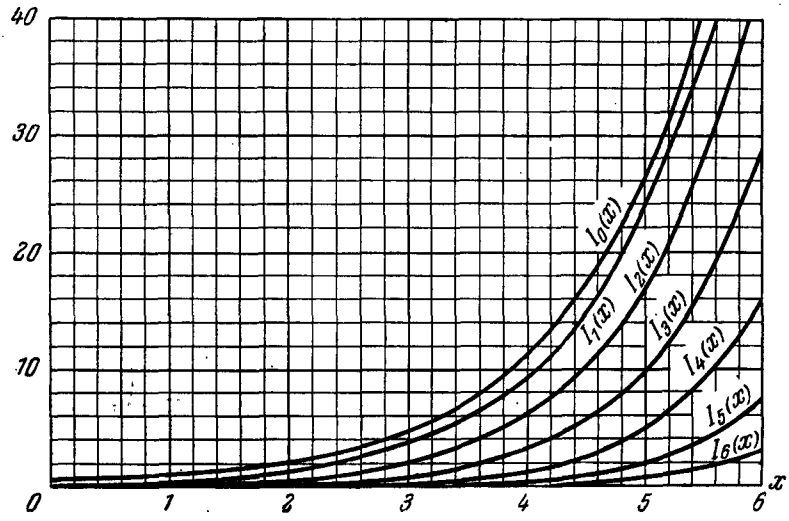


Рис. 7.23.

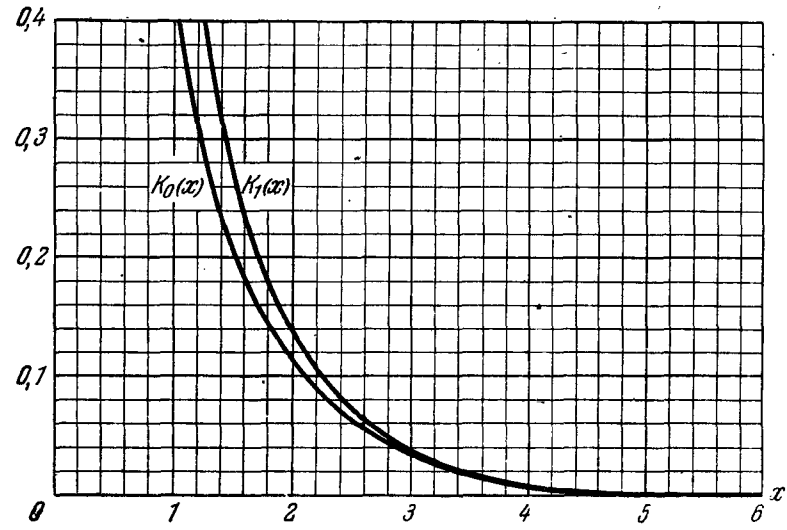


Рис. 7.24.

частного решения конкретных задач, в которых решение должно быть конечно на бесконечности. Чтобы избежать этого, мы возьмем в качестве второго решения функцию $K_0(kzj^{1/2})$. Покажем, что она является решением

уравнения (81). Действительно, заменив в формуле (77) z на $kzj^{1/2}$, получим

$$K_\nu(kzj^{1/2}) = j^{\nu+1}\frac{\pi}{2}H_\nu^{(1)}(kzj^{3/2}).$$

Функция $H_0^{(1)}(kzj^{3/2})$ представляет собой решение уравнения (81).

Очевидно, что решением будет и $K_0(kzj^{1/2})$. Общее решение (81) теперь можно представить в виде

$$y = AJ_0(kzj^{3/2}) + BK_0(kzj^{1/2}). \tag{82}$$

Если положить $k = 1$, то общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} - jy = 0$$

будет

$$y = AJ_0(zj^{3/2}) + BK_0(zj^{1/2}). \tag{83}$$

Разложение в ряд для функции $J_0(zj^{3/2})$ имеет вид

$$J_0(zj^{3/2}) = 1 + j\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} - j\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим

$$J_0(zj^{3/2}) = \operatorname{ber}(z) + j\operatorname{bei}(z) = 1 - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^8 - \frac{1}{(6!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{12} + \ldots$$
$$\ldots + j\left\{\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - \ldots\right\}. \tag{84}$$

Функции $\operatorname{ber}(z)$ (*Bessel réelle* — Бесселя вещественные) и $\operatorname{bei}(z)$ (*Bessel imaginaire* — Бесселя мнимые) представляют собой так называемые функции Кельвина, связанные с функцией J_0. Легко показать, что

$$J_0(zj^{-3/2}) = \operatorname{ber}(z) - j\operatorname{bei}(z).$$

Аналогично определяются функции Кельвина $\ker(z)$ и $\operatorname{kei}(z)$, связанные со вторым решением $K_0(zj^{1/2})$:

$$K_0(zj^{1/2}) = \ker(z) + j\operatorname{kei}(z), \quad K_0(zj^{-1/2}) = \ker(z) - j\operatorname{kei}(z). \tag{85}$$

Имеют место следующие разложения в ряды этих функций:

$$\ker(z) = -\left(\ln\frac{z}{2} + \gamma\right)\operatorname{ber}(z) + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}(z) - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4\left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^8\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \ldots. \tag{86}$$

$$\operatorname{kei}(z) = -\left(\ln\frac{z}{2} + \gamma\right)\operatorname{bei}(z) - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}(z) + \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 -$$
$$- \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots \tag{87}$$

7.5.32. Функция Кельвина ν-го порядка. Подобным же способом можно определить функцию Кельвина ν-го порядка с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} J_\nu\left(zj^{\frac{3}{2}}\right) &= \operatorname{ber}_\nu(z) + j\operatorname{bei}_\nu(z), \\ J_\nu\left(zj^{-\frac{3}{2}}\right) &= \operatorname{ber}_\nu(z) - j\operatorname{bei}_\nu(z), \\ j^{-\nu}K_\nu\left(zj^{\frac{1}{2}}\right) &= \operatorname{ker}_\nu(z) + j\operatorname{kei}_\nu(z), \\ j^{\nu}K_\nu\left(zj^{-\frac{1}{2}}\right) &= \operatorname{ker}_\nu(z) - j\operatorname{kei}_\nu(z). \end{aligned} \tag{88}$$

7.5.33. Представление функций Кельвина через модуль и аргумент. Кривые $\operatorname{ber}_\nu(z)$ и $\operatorname{bei}_\nu(z)$ (см. рис. 7.25) колеблются вокруг оси абсцисс. При интерполяции это представляет большое неудобство. Можно легко определить другие функции, ведущие себя более регулярно. Напишем

$$J_\nu\left(zj^{\frac{3}{2}}\right) = \operatorname{ber}_\nu(z) + j\operatorname{bei}_\nu(z) = M_\nu(z)\,e^{j\theta_\nu(z)},$$

положив

$$M_\nu(z) = \sqrt{\operatorname{ber}_\nu^2(z) + \operatorname{bei}_\nu^2(z)}, \quad \theta_\nu(z) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{bei}_\nu(z)}{\operatorname{ber}_\nu(z)};$$

отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{ber}_\nu(z) &= M_\nu(z)\cos\theta_\nu(z), \\ \operatorname{bei}_\nu(z) &= M_\nu(z)\sin\theta_\nu(z). \end{aligned}$$

Таким же образом можно написать

$$j^{-\nu}K_\nu\left(zj^{\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{ker}_\nu(z) + j\operatorname{kei}_\nu(z) = N_\nu(z)\,e^{j\varphi_\nu(z)},$$

положив

$$N_\nu(z) = \sqrt{\operatorname{ker}_\nu^2(z) + \operatorname{kei}_\nu^2(z)}, \quad \varphi_\nu(z) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{kei}_\nu(z)}{\operatorname{ker}_\nu(z)};$$

отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{ker}_\nu(z) &= N_\nu(z)\cos\varphi_\nu(z), \\ \operatorname{kei}_\nu(z) &= N_\nu(z)\sin\varphi_\nu(z). \end{aligned}$$

7.5.34. Производные функций Кельвина. Исходя из свойств $J'_\nu(z)$ и $K'_\nu(z)$, очень легко получить следующие формулы:

$$\operatorname{ber}' z = M_1(z)\cos\left(\theta_1(z) - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{bei}' z = M_1(z)\sin\left(\theta_1(z) - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{ber}'_\nu z = \frac{1}{2}\left\{M_{\nu+1}(z)\cos\left(\theta_{\nu+1}(z) - \frac{\pi}{4}\right) - M_{\nu-1}(z)\cos\left(\theta_{\nu-1}(z) - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$\operatorname{bei}'_\nu z = \frac{1}{2}\left\{M_{\nu+1}(z)\sin\left(\theta_{\nu+1}(z) - \frac{\pi}{4}\right) - M_{\nu-1}(z)\sin\left(\theta_{\nu-1}(z) - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$M_{-n}(z) = M_n(z), \quad \theta_{-n}(z) = \theta_n(z) + n\pi \qquad (n \text{ — целое число}),$$

$$\operatorname{ker}' z = N_1(z)\cos\left(\varphi_1(z) - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{kei}' z = N_1(z)\sin\left(\varphi_1(z) - \frac{\pi}{4}\right),$$

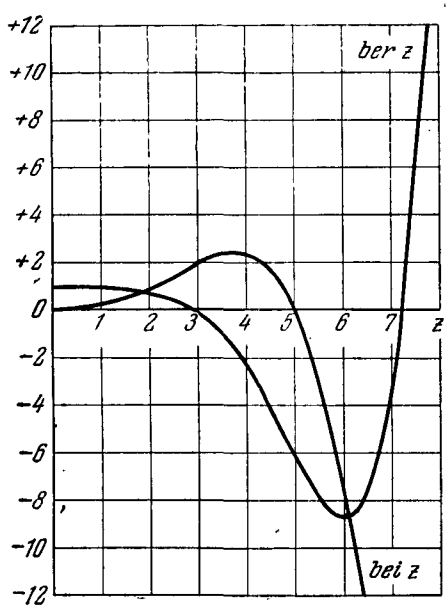


Рис. 7.25.

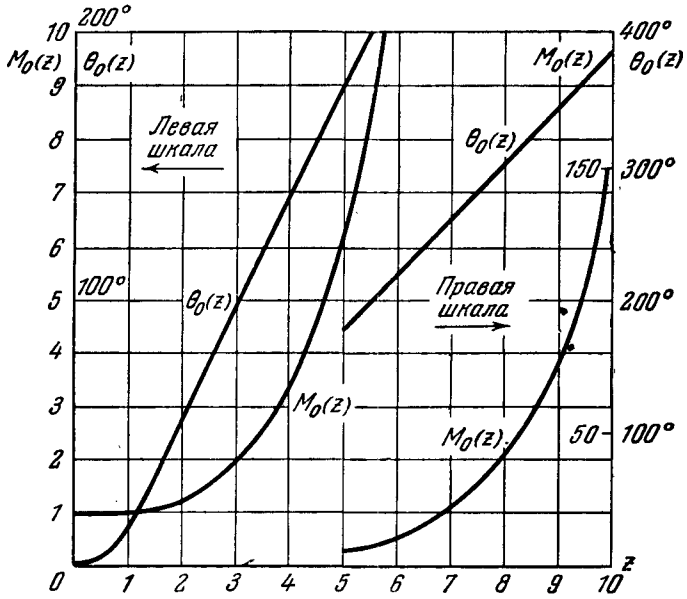


Рис. 7.26.

$$\ker_\nu' z = \frac{1}{2}\left\{N_{\nu+1}(z)\cos\left(\varphi_{\nu+1}(z)-\frac{\pi}{4}\right) - N_{\nu-1}(z)\sin\left(\varphi_{\nu-1}(z)-\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$\mathrm{kei}_\nu' z = \frac{1}{2}\left\{N_{\nu+1}(z)\sin\left(\varphi_{\nu+1}(z)-\frac{\pi}{4}\right) - N_{\nu-1}(z)\sin\left(\varphi_{\nu-1}(z)-\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$N_{-n}(z) = N_n(z), \quad \varphi_{-n}(z) = \varphi_n(z) + n\pi \qquad (n \text{ — целое число}).$$

7.5.35. Графики функций $\mathrm{ber}\, z$, $\mathrm{bei}\, z$, $M_0(z)$, $\theta_0(z)$ (рис. 7.25 и 7.26)

Дифференциальные уравнения, решение которых может быть выражено через решение дифференциального уравнения Бесселя

При решении различных задач уравнение Бесселя редко встречается в каноническом виде (13). Полезно уметь привести в тех случаях, когда это возможно, решение рассматриваемого уравнения к решению уравнения (13).

Для упрощения записи полагаем

$$AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) = Z_\nu(z),$$

обозначив тем самым через $Z_\nu(z)$ общее решение уравнения (13).

7.5.36. Основные типы. Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{89}$$

сводится к уравнению (13) путем замены переменных

$$kx = z.$$

Отсюда получаем общий интеграл $Z_\nu(kx)$.

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{a}{x}y' + by = 0. \tag{90}$$

Мы приведем его к типу (89) при помощи замены функции

$$y = x^\nu u.$$

Имеем

$$x^\nu u'' + (a + 2\nu)x^{\nu-1}u' + \{[(a-1)\nu + \nu^2]x^{\nu-2} + bx^\nu\}u = 0.$$

Если выбрать ν таким образом, чтобы $a + 2\nu = 1$, то предыдущее уравнение преобразуется к виду (89):

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Отсюда общее решение уравнения (90) будет

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\frac{1-a}{2}}(x\sqrt{b}).$$

Укажем несколько типов уравнений, общее решение которых строится при помощи бесселевых функций. Заменой переменной и функции их легко свести к каноническому виду (13). Для краткости мы ограничимся только приведением окончательных результатов.

Уравнение

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \left(bx^m + \frac{c}{x^2}\right)y = 0 \tag{91}$$

имеет общее решение

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right), \quad \nu = \frac{[(1-a)^2 - 4c]^{\frac{1}{2}}}{m+2}. \tag{92}$$

Уравнение (90) относится к типу (91) при $m = 0$, $c = 0$.

Положим в (91) параметр a равным нулю. Уравнение

$$y'' + \left(bx^m + \frac{c}{x^2}\right) y = 0$$

имеет общее решение

$$y = \sqrt{x}\, Z_\nu\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right). \quad \nu = \frac{(1-4c)^{\frac{1}{2}}}{m+2}. \tag{93}$$

Если, кроме того, мы приравняем $m = 0$ и напишем параметр c в виде $-p(p+1)$, то уравнение (91) принимает вид

$$y'' + \left(b - \frac{p(p+1)}{x^2}\right) y = 0.$$

Оно имеет общее решение

$$y = \sqrt{x}\, Z_{p+\frac{1}{2}}(x\sqrt{b}).$$

Если в уравнении (91) приравнять $a = 0$, $c = 0$, то мы получим уравнение

$$y'' + bx^m y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{m+2}}\left(2\frac{\sqrt{b}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right). \tag{94}$$

Если, кроме того, $m = 1$, то находим общий интеграл уравнения

$$y'' + bxy = 0,$$

который равен

$$y = \sqrt{x}\, Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{b}\, x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Если в уравнении (91) параметр c положить равным нулю, то получим

$$y'' + \frac{a}{x} y' + bx^m y = 0. \tag{95}$$

Это уравнение имеет общее решение

$$y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\frac{1-a}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}}\right). \tag{96}$$

Часто встречающееся дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(x^\alpha \frac{dy}{dx}\right) + bx^\beta y = 0$$

не что иное, как уравнение (95), в котором $m = \beta - \alpha$ и $a = \alpha$.

Всюду в предыдущем предполагается, что $m + 2 \neq 0$. В частности, общие решения (92)—(94), (96) не годятся, если $m + 2 = 0$. Если предположить $m = -2$, то уравнение (91) получает вид

$$x^2 y'' + axy' + ky = 0.$$

Это уравнение Эйлера (п. 6.2.9). Оно сводится, если положить $x = e^u$, к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a-1)\frac{dy}{du} + ky = 0.$$

Уравнение

$$y'' - \left(2a + \frac{1}{x}\right)y' + \left(b + \frac{a}{x} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

при $b \neq a^2$ имеет общее решение

$$y = e^{-ax} Z_\nu\left[(b-a^2)^{\frac{1}{2}} x\right].$$

Если $b = a^2$, то легко заметить, что

$$y_1 = x^\nu e^{-ax}, \quad y_2 = x^{-\nu} e^{-ax}$$

представляют собой при $\nu \neq 0$ два линейно независимых решения. Если $\nu = 0$, оба эти интеграла превращаются в один, но легко проверить, что тогда выражение $e^{-ax} \ln x$ будет решением. В этом случае получаем общий интеграл в виде

$$y = e^{-ax}(A + B \ln x).$$

Ниже указывается несколько видов дифференциальных уравнений, приводящих к особенно простым решениям. Они не входят в типы уравнений, приведенных выше.

Уравнение

$$y'' + \left[\frac{1}{x} - 2g(x)\right]y' + \left\{1 - \frac{\nu^2}{x^2} + [g(x)]^2 - g'(x) - \frac{g(x)}{x}\right\}y = 0$$

допускает в качестве общего решения

$$y = e^{\int g(x)\,dx} Z_\nu(x).$$

Отметим также следующие два частных случая предыдущего уравнения:

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2\operatorname{tg} x\right)y' - \left(\frac{\nu^2}{x^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)y = 0, \quad y = \frac{1}{\cos x} Z_\nu(x);$$

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 2\operatorname{ctg} x\right)y' - \left(\frac{\nu^2}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)y = 0, \quad y = \frac{1}{\sin x} Z_\nu(x).$$

Пример. Найдем общий интеграл

$$y'' + \frac{5}{x}y' - 16x^4 y = 0.$$

Сопоставление с уравнением (91) дает

$$a = 5, \quad c = 0, \quad b = -16, \quad m = 4.$$

Отсюда, подставляя эти значения в (92), получаем искомый общий интеграл

$$y = x^{-2} Z_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3} j x^3\right).$$

Некоторые примеры применения бесселевых функций

7.5.37. Колебание однородной тяжелой нити, подвешенной за один конец. В качестве первого применения бесселевых функций естественно привести именно этот пример, так как впервые бесселева функция J_0 была найдена Даниелем Бернулли в 1732 г. при изучении колебаний однородной

тяжелой нити. Разумеется, современное название и подробное описание обширное семейство бесселевых функций получило лишь много времени спустя, ибо только в 1824 г. Бессель, исследуя вопросы, связанные с возмущением движения планет, детально изучил свойства этих функций.

Итак, дана гибкая тяжелая нить длиной l единиц, подвешенная за конец A (рис. 7.27). В состоянии покоя она свободно висит вдоль вертикали AO. На практике модель совершенно гибкой нити можно осуществить, пользуясь цепью с достаточно мелкими звеньями. Выведем нить из положения равновесия, сместив конец ее B налево и попробуем найти закон, описывающий перемещения нити, ограничиваясь небольшими плоскими колебаниями. Примем AO за ось Ox, а прямую, которую конец B очертит при малом смещении, за ось Oy.

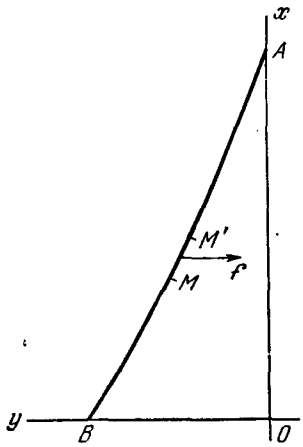


Рис. 7.27.

Пусть μ — масса нити на единицу длины, а M, M' — две бесконечно близкие точки. В каждой точке нити действует натяжение T, обусловленное весом, горизонтальная составляющая которого будет

$$T\frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (*)$$

Горизонтальная составляющая силы, действующей на элемент длины нити MM', будет равна приращению величины (*) при переходе от M к M'. На единицу длины нити эта сила будет равна

$$f=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

На высоте x приближенно имеем $T=\mu g x$, отсюда

$$f=g\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial y}{\partial x}\right]=g\mu\left[\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right].$$

Сила инерции на единицу длины равна $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Уравнение движения по горизонтали будет

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Ограничимся синусоидальными функциями времени вида $y=\varphi(x)e^{j\omega t}$. Тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\omega^2}{g}\cdot\frac{\varphi}{x}=0.$$

Чтобы вычислить общий интеграл этого уравнения, достаточно положить $2x=z^2$ или же, проще, сравнить его с уравнением (91). Решение (92) получает в этом частном случае вид

$$\varphi(x)=AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)+BY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

Так как решение должно иметь конечное значение для $x=0$, то

$$y=Ae^{j\omega t}J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

При $x=l$ (в точке подвеса) имеем $y=0$. Следовательно, величина $2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$ — корень функции $J_0(\alpha)$. Пусть α_p будет одним из корней уравнения $J_0(\alpha)=0$. Имеем

$$\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\alpha_p.$$

Так как корней бесчисленное множество, последнее равенство определяет бесконечное количество видов возможных нормальных колебаний нити.

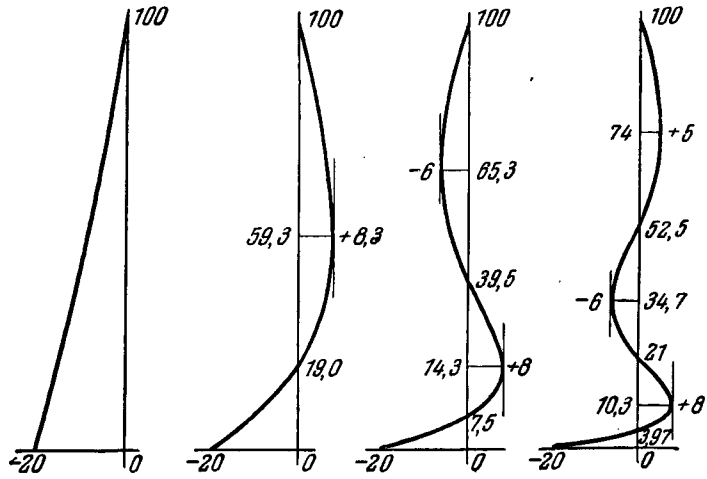


Рис. 7.28.

На рис. 7.28 изображены несколько первых видов этих колебаний. Смещения нарисованы с большим увеличением для того, чтобы с большей наглядностью показать формы, принимаемые нитью.

7.5.38. Исследование решения волнового уравнения в цилиндрических координатах. Рассмотрим произвольное поле, которое распространяется вдоль некоторого направления. Примем это направление за ось z. Поле характеризуется скалярной функцией времени и координат $F(x, y, z, t)$. Обычно при изучении явлений распространения функция F определяется как решение волнового уравнения

$$\Delta F = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Здесь c обозначает скорость распространения. Если ограничиться рассмотрением синусоидальных функций времени, то, как мы видели в п. 6.3.7, в цилиндрических координатах, которые часто оказываются естественно приспособленными к такого рода задачам, общий интеграл представляет собой сумму всех частных произведений Лапласа вида

$$F(\rho, \varphi, z, t) = e^{-jqz}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu\varphi\,[AJ_\nu(a\rho) + BY_\nu(a\rho)]\,e^{jkct}$$

при

$$a^2 = k^2 - q^2.$$

Мы уже видели, что если радиального ограничения не существует, иначе говоря, если φ может свободно возрастать на углы, бо́льшие чем 2π, то ν является целым числом. При этом говорят, что для функции F имеет место симметрия повторения порядка ν вокруг Oz. Если ось Oz является частью области существования функции, то коэффициент B должен быть равен нулю, так как из физических соображений функция F не может принимать бесконечные значения.

Если q — вещественное число, функция F представляет собой величину, периодически изменяющуюся вдоль оси Oz. Если же q — комплексное число

$\alpha - j\beta$, функция F имеет псевдопериод $\frac{2\pi}{\alpha}$ и экспоненциально затухает вдоль Oz.

7.5.39. Колебания равномерно натянутой мембраны. Рассмотрим мембрану, т. е. упругую тонкую пластинку, равномерно натянутую на плоскую раму. Исследуем свободные колебания этой мембраны, выведенной из положения равновесия, исходя из следующих упрощений:

1) затухание не происходит;

2) смещения достаточно малы, чтобы можно было считать натяжение неизменным, а перемещения каждой точки совершающимися по малым прямым, перпендикулярным плоскости, которую представляет собой мембрана в покое.

Теория поверхностного напряжения указывает, что каждая единица поверхности мембраны подвергается воздействию нормальной силы, равной

$$f = A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (*)$$

где A — поверхностное натяжение, а R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны *).

За ось z примем ось, перпендикулярную к плоской поверхности мембраны в состоянии покоя и к двум прямоугольным осям Ox и Oy на этой плоскости. Пусть μ — поверхностная плотность мембраны. Уравнение движения будет

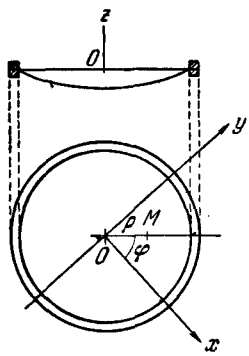


Рис. 7.29.

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Если деформации малы, то, пренебрегая квадратами малых величин, имеем

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta z.$$

Колебание мембраны определяется волновым уравнением

$$\frac{\mu}{A}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta z.$$

7.5.40. Случай круглой мембраны. Примем за ось z нормаль к поверхности круга в центре O (рис. 7.29). Если положить $\frac{\mu}{A} = k^2$, то уравнение движения в цилиндрических координатах будет

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

На рис. 7.29 указаны мембрана, закрепляющая ее рамка (кольцо) и координаты ρ и φ точки M мембраны. Если ограничиться только синусоидальными функциями времени, то частное решение примет вид

$$z(\rho, \varphi, t) = e^{j\omega t} \cos n\varphi J_n(k\omega\rho),$$

так как смещение центра O конечно. Общим решением будет сумма всех частных решений, в которых n принимает все возможные значения.

*) Формула (*) совпадает с известным выражением для силы поверхностного натяжения жидкостей — выводится аналогичными рассуждениями. Разумеется, между A и коэффициентом поверхностного натяжения вещества мембраны α нет ничего общего. Величина A зависит от упругих констант, от толщины мембраны и т. д.

Узловые линии представляют собой геометрическое место точек мембраны, для которых смещения постоянно равны нулю. Различают два сорта узловых линий:

1) диаметральные узловые линии, которые выражаются уравнением $\cos n\varphi = 0$, — это диаметры, разделяющие окружность на $2n$ секторов с углами при вершине, равными $\frac{\pi}{n}$ (рис. 7.30);

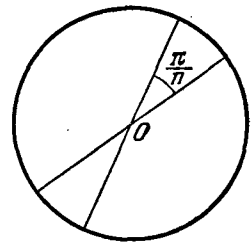


Рис. 7.30.

2) круговые узловые линии, представляющие собой концентрические окружности, радиус которых определяется соотношением $J_n(k\omega\rho) = 0$.

Круговая рамка радиуса R обязательно должна быть одной из таких узловых линий. Будем считать, что она соответствует p-му корню уравнения $J_n(\alpha) = 0$, иначе говоря, положим $k\omega R = \alpha_p$. Это выражение определяет частоту колебаний:

$$\omega = \frac{\alpha_p}{R}\sqrt{\frac{A}{\mu}}.$$

Имеется, следовательно, $p - 1$ узловых окружностей, соответствующих корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$.

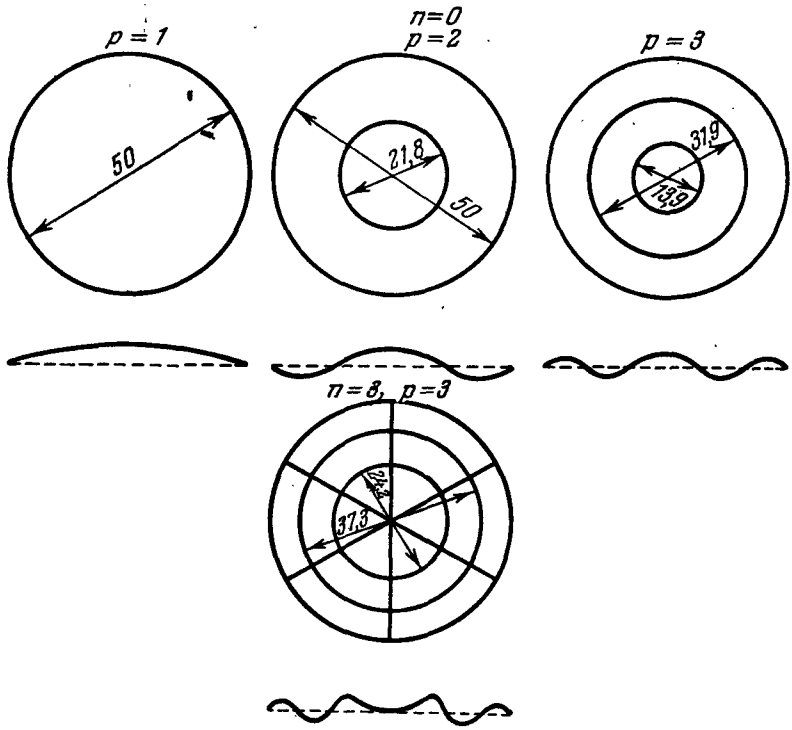


Рис. 7.31.

Если число n отлично от нуля, то центр O представляет собой узловую точку, так как $J_n(0) = 0$. Это совершенно очевидно — ведь некоторое количество узловых диаметров обязательно пересечется в этой точке. Если же $n = 0$, то узловых диаметров не существует, и мы имеем дело с симметрией вращения. Центр мембраны представляет собой пучность, так как $J_0(0) = 1$.

На рис. 7.31 даны примеры колебаний мембраны, равномерно натянутой на круговую рамку.

7.5.41. Собственные электромагнитные колебания резонатора, имеющего форму кругового цилиндра. Будем предполагать, что вещество, образующее стенки, имеет бесконечно большую проводимость и что резонатор замкнут двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на длину l. Ограничимся рассмотрением синусоидальных функций времени. В качестве системы отсчета возьмем систему цилиндрических координат, причем за ось Oz примем ось цилиндра. Положим $x_1 = z$, $x_2 = \rho$, $x_3 = \varphi$. При этом условия Бромвича (см. п. 6.3.13, формула (68)) выполняются, так как $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = \rho$. Функция U Бромвича (потенциал электрических колебаний) задается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0,$$

которое совпадает с уравнением (36) п. 6.3.7, т. е. с уравнением $\Delta U + k^2 U = 0$ в цилиндрических координатах. Соответствующее произведение Лапласа равно

$$U = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \nu\varphi \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} qz \begin{matrix}J_\nu \\ Y_\nu\end{matrix} (a\rho)\, e^{jkvt}$$

при

$$a^2 = k^2 - q^2, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Если внутренность цилиндрического резонатора пуста и, в частности, если малый коаксиальный проводящий цилиндр не изолирует ось Oz от области существования U, то поле должно иметь конечные значения при $\rho = 0$. Мы вынуждены тогда исключить функцию Y. Случай с коаксиальным проводником разбирается в п. 7.5.43.

Предположим, что радиус-вектор может свободно поворачиваться на целое число окружностей. (Случай радиальной перегородки рассматривается в конце данного пункта.) При этом поле должно снова получить исходное значение; следовательно, ν равно целому числу n. При таких условиях произведение Лапласа будет

$$U = J_n(a\rho) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} qz e^{jkvt}.$$

Электромагнитные поля типа поперечного электрического и поперечного магнитного даны уравнениями (85) и (86) п. 6.3.13. Обозначив через J_n' производную J_n по аргументу $a\rho$, получим для поперечной магнитной волны (волны E):

$$E_z = a^2 J_n(a\rho) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} qz e^{jkvt},$$

$$E_\rho = qaJ_n'(a\rho) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi \begin{matrix}-\sin \\ \cos\end{matrix} qz e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = \frac{nq}{\rho} J_n(a\rho) \begin{matrix}-\sin \\ \cos\end{matrix} n\varphi \begin{matrix}-\sin \\ \cos\end{matrix} qz e^{jkvt},$$

$$H_z = 0,$$

$$H_\rho = j\frac{nk}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, J_n(a\rho) \begin{matrix}-\sin \\ \cos\end{matrix} n\varphi \cos qz e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -jak\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, J_n'(a\rho) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} qz e^{jkvt};$$

для поперечной электрической волны (волны H):

$$E_z = 0,$$

$$E_\rho = j\frac{kn}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,J_n(a\rho)\begin{matrix}\sin\\-\cos\end{matrix} n\varphi\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} qze^{jkvt},$$

$$E_\varphi = jka\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,J_n'(a\rho)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} qze^{jkvt},$$

$$H_z = a^2 J_n(a\rho)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} qze^{jkvt},$$

$$H_\rho = aqJ_n'(a\rho)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\begin{matrix}-\sin\\\cos\end{matrix} qze^{jkvt},$$

$$H_\varphi = \frac{qn}{\rho}J_n(r\rho)\begin{matrix}-\sin\\\cos\end{matrix} n\varphi\begin{matrix}-\sin\\\cos\end{matrix} qze^{jkvt}.$$

Обозначим через R радиус цилиндра. Тогда требование равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на стенках цилиндра приводит к граничным условиям

$$E_\rho = E_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = l,$$
$$E_z = E_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Они вынуждают определять параметры a и q для волны E с помощью соотношений

$$J_n(aR) = 0, \quad q = \frac{m\pi}{l} \quad (m \text{ — целое число})$$

и за произведение Лапласа для этой волны принять выражение

$$J_n(a\rho)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\cos qze^{jkvt}.$$

Аналогично для волны H параметры a и q следует определить из соотношений

$$J_n'(aR) = 0, \quad q = \frac{m\pi}{l} \quad (m \text{ — целое число})$$

и принять за произведение Лапласа

$$J_n(a\rho)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\sin qze^{jkvt}.$$

Обозначив через λ_i не равный нулю i-й корень уравнения $J_n(x) = 0$, а через σ_i — не равный нулю i-й корень $J_n'(x) = 0$, получим следующие выражения для полей.

Поперечная магнитная волна (волна E):

$$E_z = \frac{\lambda_i^2}{R^2}J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\cos\frac{m\pi z}{l}e^{jkvt},$$

$$E_\rho = -\frac{m\pi\lambda_i}{lR}J_n'\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\sin\frac{m\pi z}{l}e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = -\frac{nm\pi}{l\rho}J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}-\sin\\\cos\end{matrix} n\varphi\sin\frac{m\pi z}{l}e^{jkvt},$$

$$H_z = 0,$$

$$H_\rho = -j\frac{nk}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\sin\\-\cos\end{matrix} n\varphi\cos\frac{m\pi z}{l}e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -j\frac{\lambda_i k}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,J_n'\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix} n\varphi\cos\frac{m\pi z}{l}e^{jkvt}.$$

Если полость внутри пустая, частота этого колебания будет равна

$$\frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\lambda_i^2}{\pi^2 R^2} + \frac{m^2}{l^2}}.$$

Самая низкая частота соответствует $m = 0$ и первому корню $J_0(x) = 0$. Она равна, следовательно,

$$\frac{2{,}40483 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\pi R} = \frac{72\,145}{2\pi R}\ Мгц,$$

если R выражено в сантиметрах.

Поперечная электрическая волна (волна H):

$$E_z = 0,$$

$$E_\rho = j\frac{kn}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\sin\\ -\cos\end{matrix} n\varphi \sin\frac{m\pi z}{l}\,e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = j\frac{k\sigma_i}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,J_n'\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi \sin\frac{m\pi z}{l}\,e^{jkvt},$$

$$H_z = \frac{\sigma_i^2}{R^2}J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi \sin\frac{m\pi z}{l}\,e^{jkvt},$$

$$H_\rho = \frac{m\pi\sigma_i}{lR}J_n'\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi \cos\frac{m\pi z}{l}\,e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -\frac{nm\pi}{l\rho}J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right)\begin{matrix}\sin\\ -\cos\end{matrix} n\varphi \cos\frac{m\pi z}{l}\,e^{jkvt}.$$

В пустой полости частота этого колебания равна

$$\frac{kc}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\sigma_i^2}{\pi^2 R^2} + \frac{m^2}{l^2}}.$$

Самая низкая частота соответствует $m = 1$. Первый неравный нулю корень $J_0'(x) = 0$ равен 3,8317, а первый неравный нулю корень $J_1'(x) = 0$ равен 1,8412 (см. таблицу в п. 7.5.49). Следовательно, самая низкая частота для волн H соответствует не $n = 0$, а $n = 1$.

Различные колебания, которые могут существовать внутри цилиндрического резонатора, определяются совокупностью допустимых значений чисел n, m, i.

Число m определяет периодичность вдоль направления, параллельного Oz (рис. 7.32). Число n определяет периодичность повторения, если радиус-вектор вращается вокруг Oz (рис. 7.33). Число i определяет число узловых окружностей, на которых некоторые составляющие поля становятся равными нулю (рис. 7.34). Самая низкая частота волн E соответствует группе из трех чисел (0, 0, 1). Самая низкая частота волн H соответствует группе (1, 1, 1). Например, при $i = 3$ для поперечной магнитной волны составляющие E_z, E_φ, H_ρ становятся равными нулю на утолщенных окружностях рис. 7.34, *а*, а составляющие E_ρ, H_φ становятся равными нулю на утолщенных окружностях рис. 7.34, *б*.

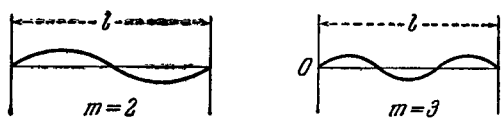


Рис. 7.32.

Ко всем указанным периодичностям прибавляется еще периодичность во времени, происходящая от множителя e^{jkvt}.

Замечание. В группы формул, написанных для поперечных магнитных и электрических волн, неявно входит постоянный коэффициент, зависящий

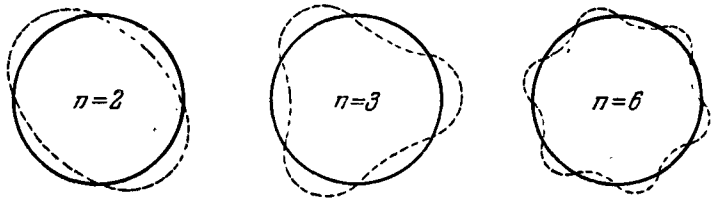


Рис. 7.33.

от выбора чисел m, n, l. Он зависит от других граничных требований, относящихся к условиям возбуждения колебаний в полости (см. замечание 2 к п. 6.3.14).

Рассмотрим случай наличия у цилиндра радиальных перегородок. Допустим, что в цилиндре имеются две радиальные перегородки, образующие между собой угол $\pi\alpha$. К уже написанным выше условиям равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля на границе цилиндра следует добавить аналогичные условия, касающиеся обеих перегородок:

$$E_\rho = E_z = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = 2\pi - \pi\alpha.$$

Нужно исключить $\cos \nu\varphi$ из формул, выражающих E_z и E_ρ, и добавить к соотношениям, определяющим параметры, вместо условия $\nu = n$ новое соотношение

$$\sin \nu(2\pi - \pi\alpha) = 0$$

или

$$\nu = \frac{s}{2-\alpha} \quad (s \text{ — целое число}).$$

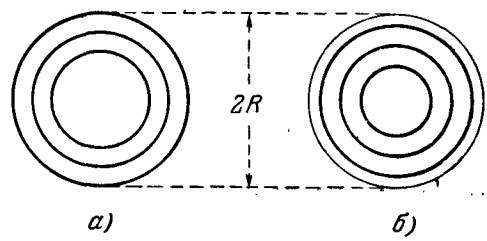


Рис. 7.34.

Число ν, следовательно, теперь может отличаться от целого числа. В частности, в случае, когда $\alpha = 0$, т. е. когда перегородки сливаются в одну, $\nu = \frac{s}{2}$. При четном s мы снова приходим к уже полученным решениям, но при нечетном s имеет место ряд других решений, в которые входят $J_{\frac{1}{2}}$, $J_{\frac{3}{2}}$, $J_{\frac{5}{2}}$, ...

7.5.42. Распространение электромагнитной волны внутри бесконечного кругового цилиндра. Вычисление здесь подобно вычислению, проведенному в предыдущем пункте. Так как речь идет о распространении вдоль оси Oz, то произведение Лапласа будет

$$U = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \nu\varphi J_\nu(a\rho)\, e^{-jqz} e^{jkvt}.$$

Граничные условия сводятся к требованиям

$$E_z = E_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Параметр a определяется из уравнений $J_n(a\rho) = 0$ для поперечной магнитной волны, и $J_n'(a\rho) = 0$ для поперечной электрической волны. Отсюда получаем следующие выражения для составляющих электромагнитного поля.

Поперечная магнитная волна (волна E):

$$E_z = \frac{\lambda_i^2}{R^2} J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$E_\rho = -j\frac{q\lambda_i}{R} J_n'\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = -j\frac{nq}{\rho} J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$H_z = 0,$$

$$H_\rho = j\frac{kn}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -j\frac{k\lambda_i}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_n'\left(\frac{\lambda_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt}.$$

Поперечная электрическая волна (волна H):

$$E_z = 0,$$

$$E_\rho = -j\frac{kn}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = j\frac{k\mu_i}{R}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} J_n'\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$H_z = \frac{\sigma_i^2}{R^2} J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$H_\rho = -j\frac{q\sigma_i}{R} J_n'\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -j\frac{nq}{\rho} J_n\left(\frac{\sigma_i}{R}\rho\right) \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} n\varphi e^{-jqz} e^{jkvt}.$$

Каждый тип волны определяется группой из двух целых чисел (l, n). Определенной частоте $f = \frac{kv}{2\pi}$ соответствует ряд возможных значений q:

$$q^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 - \frac{\lambda_i^2}{R^2} \quad \text{или} \quad q^2 = \left(\frac{2\pi f}{v}\right)^2 - \frac{\sigma_i^2}{R^2}.$$

Если дан волновод с определенным радиусом R, волна самой низкой частоты, способная распространяться внутри цилиндра, будет соответствовать $q = 0$. Для волн E она, кроме того, соответствует наименьшему не равному нулю корню λ_i. Мы знаем, что эта наименьшая частота связана с первым корнем $J_0(x)$, равным 2,40483. Отсюда в пустоте для $E_{0,1}$ имеем

$$f_{\min} = \frac{72\,145}{2\pi R}\ Мгц.$$

Для волн H наименьший не равный нулю корень σ_i соответствует первому корню $J_1'(x) = 0$, т. е. 1,8412. Отсюда в пустоте для $H_{1,1}$ получим

$$f_{\min} = \frac{55\,236}{2\pi R}\ Мгц.$$

Естественно, что наименьшие частоты, соответствующие $q = 0$, имеют бесконечную длину волны и бесконечную скорость распространения фазы в волноводе.

Можно спросить, почему решение $a=0$ не принимается за первый корень $J_n(x)$ $(n\neq 0)$ или $J'_n(x)$ $(n>1)$. Если $a=0$, то мы вынуждены принять за функцию $R(\rho)$ в произведении Лапласа выражение

$$A\rho^n+B\rho^{-n}.$$

Напишем E_φ, которая должна быть равна нулю при $\rho=R$ и при $\rho=0$ (волна E):

$$E_\varphi=-jnq\,[A\rho^{n-1}+B\rho^{-n-1}]\begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix}n\varphi e^{-jqz}e^{jkvt}.$$

Отсюда $A=-B$ и $n=0$. Это решение не подходит, так как оно приводит, с точностью до постоянного множителя, к выражению

$$E_\rho=\frac{1}{\rho}e^{-jqz}e^{jkvt},$$

которое бесконечно на оси Oz. В действительности нельзя приравнять E_φ к нулю, так как случай $n=0$ был с самого начала исключен. Решение не годится также для волн H.

7.5.43. Случай коаксиального проводника. Этим названием обозначают промежуток между двумя бесконечными цилиндрами, имеющими общую ось (рис. 7.35). Посмотрим, какие изменения следует внести в предыдущие вычисления. Функцию Y_n больше исключать не нужно, поэтому произведение Лапласа будет теперь иметь вид

$$R(\rho)=AJ_n(a\rho)+BY_n(a\rho).$$

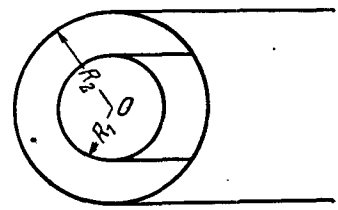


Рис. 7.35.

Коэффициенты A и B определяются граничными условиями, которые следует записать в виде

$$AJ_n(aR_1)+BY_n(aR_1)=0,$$
$$AJ_n(aR_2)+BY_n(aR_2)=0.$$

Эта однородная и линейная система будет иметь ненулевое решение, если определитель ее будет равен нулю:

$$J_n(aR_1)Y_n(aR_2)-J_n(aR_2)Y_n(aR_1)=0.$$

Если через λ_i обозначить один из корней этого уравнения, то мы получим для поперечных магнитных волн

$$R(\rho)=Y_n(\lambda_iR_1)J_n(\lambda_i\rho)-J_n(\lambda_iR_1)Y_n(\lambda_i\rho).$$

Это же относится и к поперечным электрическим волнам, но здесь граничные условия приводят к выражению

$$R(\rho)=Y'_n(\mu_iR_1)J_n(\mu_i\rho)-J'_n(\mu_iR_1)Y_n(\mu_i\rho),$$

где через μ_i обозначены корни уравнения

$$J'_n(aR_1)Y'_n(aR_2)-J'_n(aR_2)Y'_n(aR_1)=0.$$

Пользуясь формулами (88) и (89) п. 6.3.13, можно легко написать составляющие электромагнитного поля.

Если повторить рассуждения предыдущего пункта для наименьших не равных нулю корней λ_i и σ_i, то может показаться, что здесь также имеется наименьшая частота для заданного проводника (предельная частота).

На самом деле ничего подобного нет, так как решение

$$E_\rho = A\frac{1}{\rho}e^{-jqz}e^{jkvt}$$

здесь годится, поскольку ось Oz находится вне области распространения.

Решение $R(\rho) = A\rho^n + B\rho^{-n}$ по-прежнему не годится для волн H. Действительно, невозможно найти значения для A, B, n, которые приравняли бы нулю составляющие E_z и E_φ при $\rho = R_1$ или R_2.

Итак, мы имеем решение, не существовавшее в случае пустого цилиндра:

$$E_z = E_\varphi = H_z = H_\rho = 0,$$

$$q\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}H_\varphi = kE_\rho = A\frac{1}{\rho}e^{-jqz}e^{jkvt}.$$

Это решение может иметь произвольную частоту. Следовательно, для коаксиального проводника предельной частоты нет.

7.5.44. Скин-эффект переменных токов, проходящих по цилиндрическому проводнику круглого сечения. Дан бесконечный проводящий цилиндрический провод круглого сечения, по которому течет переменный электрический ток (рис. 7.36). Пусть σ будет плотность тока в точке, находящейся на расстоянии x от оси провода. Эта плотность будет функцией x и она одинакова для всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от оси. Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщиной dx и радиусом x. Сила тока, проходящего через оболочку, равна

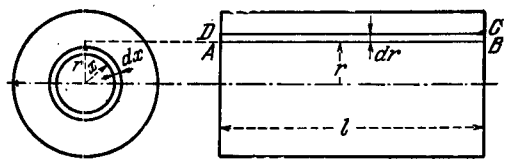


Рис. 7.36.

$$dI_x = 2\pi\sigma x\,dx.$$

Магнитное поле, вызванное этим током, в точке P, находящейся на расстоянии r от оси ($r > x$), равно

$$dH = \frac{dI_x}{2\pi r} = \frac{\sigma x\,dx}{r}.$$

Магнитное поле, вызванное всеми линиями тока, расположенными в точках $x < r$, будет

$$H = \frac{1}{r}\int_0^r \sigma x\,dx.$$

Это выражение, продифференцированное по r, дает

$$\frac{dH}{dr} = \sigma - \frac{1}{r^2}\int_0^r \sigma x\,dx = \sigma - \frac{H}{r},$$

что можно записать в виде

$$\frac{dH}{dr} + \frac{1}{r}H - \sigma = 0.$$

Если через ρ обозначить удельное сопротивление вещества, из которого состоит провод, то электродвижущая сила, приложенная к линии тока AB, будет

$$E = \rho\sigma l,$$

где l — расстояние между точками A и B. Электродвижущая сила вдоль линии тока DC на расстоянии $r+dr$ от оси будет

$$E+dE=(\rho\sigma+\rho\, d\sigma)\, l.$$

В плоском контуре $ABCD$ электродвижущая сила равна dE. Она равна электродвижущей силе, наведенной полем H. Поэтому можно написать

$$dE=\rho l\, d\sigma=\mu\frac{dH}{dt}\, l\, dr,$$

иначе говоря,

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\rho}{\mu}\frac{d\sigma}{dr}.$$

Продифференцируем по t уравнение

$$\frac{dH}{dr}+\frac{1}{r}H-\sigma=0.$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r\,\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0$$

или

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial r}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0.$$

Если предположить, что ток синусоидален, а частота его равна ω, то $\frac{\partial\sigma}{\partial t}=j\omega\sigma$ и дифференциальное уравнение для σ получит вид

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}-\frac{j\omega\mu\sigma}{\rho}=0.$$

Положив

$$k^2=\frac{\omega\mu}{\rho},$$

получим уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}-jk^2\sigma=0$$

общее решение которого равно

$$\sigma=AJ_0(krj^{3/2})+BK_0(krj^{1/2}).$$

Плотность σ при $\rho=0$ имеет конечное значение, поэтому постоянная интегрирования B должна быть принята равной нулю. Отсюда

$$\sigma=AJ_0(krj^{3/2})=AM_0(kr)\,e^{j\theta_0(kr)}.$$

Пусть a — радиус провода, а σ_0 — плотность тока на его поверхности. Она определяет значение коэффициента A. Можно написать

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}\,e^{j[\theta_0(kr)-\theta_0(ka)]}.$$

Приняв фазовый угол на поверхности провода за начало отсчета фаз, получим

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}\,e^{j\theta_0(kr)}.$$

Если kr велико, фазовый угол может быть намного больше 2π. Следовательно, внутри провода могут существовать области, в которых токи имеют противоположное направление. Величина $\sigma_0 M_0(kr)/M_0(ka)$ — это значение амплитуды плотности тока на расстоянии r от оси.

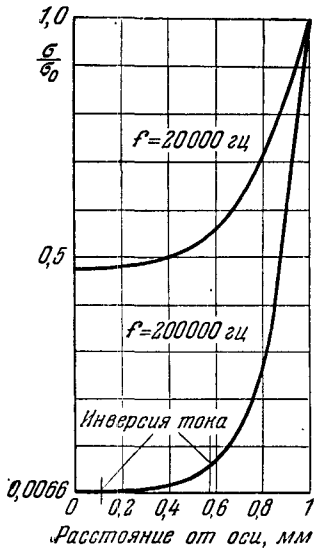


Рис. 7.37.

Рис. 7.37 дает представление о плотности тока как функции расстояния от оси для цилиндрического медного провода радиусом в 1 *мм* при частотах 20 000 и 200 000 *гц* $\left(\frac{1}{\rho} = 5{,}8 \cdot 10^{-7};\ \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\right)$.

7.5.45. Спектр волны, модулированной по частоте. Выражение для синусоидальной волны, модулированной по частоте, будет

$$u(t) = U \sin\left[\Omega_0 t + \beta \int_0^t \sigma(t)\, dt\right],$$

где U — постоянная, Ω_0 — также постоянная, называемая центральной круговой частотой; член $\beta\sigma(t)$ — производная фазы, вызванной низкочастотным сигналом $\sigma(t)$.

Если считать величину $\sigma(t)$ безразмерной, а ее наибольшее значение равным единице, что всегда возможно, то величина β будет обозначать наибольшее отклонение круговой частоты и будет зависеть только от амплитуды низкочастотного сигнала, а не от закона его изменения, целиком представленного функцией $\sigma(t)$.

Если модуляция наложена синусоидальным низкочастотным сигналом с круговой частотой α, то

$$\sigma(t) = \cos \alpha t.$$

В этом случае мы получим для волны, модулированной по частоте сигналом, выражение

$$u(t) = U \sin\left[\Omega_0 t + \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t\right].$$

Безразмерное выражение $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$ называется индексом модуляции. Оно вводит в рассмотрение две величины: α, характеризующую частоту модуляции, и β, характеризующую амплитуду модуляции или, скорее, отклонение частоты. При первом взгляде на механизм модуляции частоты, описанный выше, может показаться, что поскольку круговая частота изменяется от $\Omega_0 - \beta$ до $\Omega_0 + \beta$, то должна существовать очень узкая полоса частот, равная всего $\frac{2\beta}{2\pi}$. Если бы это было так, то модуляция частоты открыла бы почти безграничные возможности для сосредоточивания работы передатчиков в очень узкой полосе частот. Действительно, из всех физических измерений, которые сейчас умеют осуществлять, самое точное — это измерение частоты. Поэтому было бы очень легко выявлять модуляцию частоты, в которой отклонение частоты $\frac{\beta}{2\pi}$ очень мало — порядка 10^{-6} от центральной частоты $\frac{\Omega_0}{2\pi}$. Волна в 10 *Мгц* занимала бы тогда полосу всего в 20 *гц*. К сожале-

нию, предыдущее рассуждение весьма неточно. Действительно, рассмотрим выражение для волны, модулированной по частоте:

$$u(t) = U \sin\left[\Omega_0 t + \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t\right].$$

Используя формулу для синуса суммы двух углов, находим

$$u(t) = U\left[\sin \Omega_0 t \cos\left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t\right) + \cos \Omega_0 t \sin\left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t\right)\right].$$

Применяя формулы (53) и (54), дающие разложение в ряд $\cos(z \sin \theta)$ и $\sin(z \sin \theta)$, получаем

$$u(t) = U\,[J_0(\xi) \sin \Omega_0 t + J_1(\xi)\, 2 \sin \alpha t \cos \Omega_0 t + J_2(\xi)\, 2 \cos 2\alpha t \sin \Omega_0 t + J_3(\xi)\, 2 \sin 3\alpha t \cos \Omega_0 t + \ldots].$$

Эта формула показывает, что векторное представление комплексной волны содержит векторы модуляции, соответствующие частотам α, 2α, 3α, ..., — одни в фазе, другие сдвинутые по фазе на $\frac{\pi}{2}$ по отношению к несущей волне.

Используя формулу (22), простым преобразованием произведения тригонометрических функций получаем

$$u(t) = U \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\xi) \sin(\Omega_0 + n\alpha)\, t.$$

Из последней формулы вытекает, что спектр амплитуд — это линейчатый спектр, частоты которого равны

$$\ldots,\ \Omega_0 - n\alpha,\ \ldots,\ \Omega_0 - 2\alpha,\ \Omega_0 - \alpha,\ \Omega_0,\ \Omega_0 + \alpha,\ \Omega_0 + 2\alpha,\ \ldots,\ \Omega + n\alpha,\ \ldots$$

а амплитуды пропорциональны

$$\ldots, J_n(\xi),\ \ldots,\ J_2(\xi),\ J_1(\xi),\ J_0(\xi),\ J_1(\xi),\ J_2(\xi),\ \ldots,\ J_n(\xi),\ \ldots$$

Следовательно, при чисто синусоидальной модуляции спектр амплитуд составляющих колебаний симметричен и теоретически не ограничен. Фактически его можно считать ограниченным из-за свойства бесселевой функции становиться пренебрежимо малой, когда ее индекс n становится значительно больше аргумента z.

Можно легко оценить практическую полуширину спектра, подсчитав по таблицам пп. 7.5.47 и 7.5.48 для малых значений ξ и по рис. 7.17 для больших значений ξ величину n, начиная с которой амплитуды будут меньше 0,001 или 0,005 и могут, таким образом, считаться пренебрежимо малыми. Если это значение n обозначим через N, то практическая ширина спектра будет

$$\frac{2\alpha N}{2\pi}$$

или, если обозначить через f частоту модуляции,

$$2fN.$$

Можно также задаться вопросом, каково значение индекса модуляции, ниже которого спектр практически сводится к несущей частоте и двум первым боковым линиям. Для этого нужно ξ взять таким, чтобы $J_2(\xi)$ было пренебрежимо мало, например меньше 0,005. Рассмотрев значения функции $J_2(\xi)$, мы видим, что это имеет место при $\xi < 0{,}2$. Значит только при значениях индекса модуляции, существенно меньших единицы, компактность по частоте при частотной модуляции оказывается практически такой же, как при амплитудной модуляции [1]).

[1]) Здесь речь идет только о волне, модулированной по частоте чисто синусоидальным сигналом. В случае телеграфной модуляции решение существенно усложняется из-за переходных явлений.

Следует заметить, что по своему строению такой сокращенный спектр, несмотря на внешнее сходство, отличен от спектра при амплитудной модуляции, так как между частотой боковых линий и несущей частотой имеется сдвиг по фазе в $\frac{\pi}{2}$.

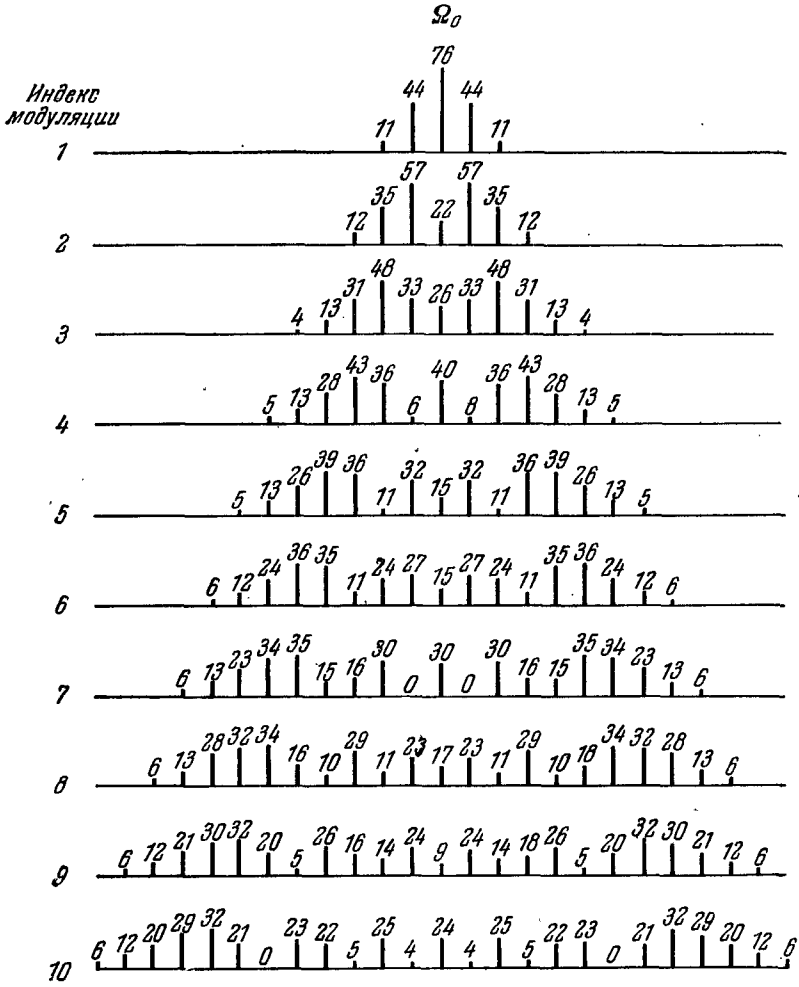


Рис. 7.38.

Для некоторых значений индекса модуляции может иметь место исчезновение несущей частоты или линий, правильно расположенных относительно этой частоты. Линии $\Omega_0 - \alpha n$ и $\Omega_0 + \alpha n$ исчезают, если ξ является корнем $J_n(\xi) = 0$. Эти корни даны в таблице п. 7.5.49. В частности, несущая частота исчезает при

$$\xi = 2{,}40;\quad 5{,}52;\quad 8{,}65;\quad 11{,}79;\ \ldots$$

— корнях функции $J_0(\xi) = 0$. Это свойство очень ценно при некоторых измерениях.

Рис. 7.38 показывает, как возрастает сложность спектра волны, модулированной по частоте, если увеличивать индекс модуляции. Цифры у вертикальных черточек характеризуют величину амплитуд различных гармоник.

Модуляция по нескольким частотам. Мы уже видели, что спектр амплитуд волны, модулированной по частоте чисто синусоидальным сигналом, всегда симметричен по отношению к несущей частоте. Однако это не так, если модуляция наложена суммой некоторого числа синусоидальных функций, когда между соответствующими круговыми частотами существуют простые линейные соотношения.

Рассмотрим сигнал модуляции

$$\beta\sigma(t) = \beta\alpha_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta\alpha_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

Члены $\frac{\beta\alpha_1}{\omega_1}$, $\frac{\beta\alpha_2}{\omega_2}$ будут частными индексами модуляции ξ_1, ξ_2, ... Функция $u(t)$ в комплексном обозначении будет иметь вид

$$u(t) = Ue^{j\Omega_0 t} e^{j\xi_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)} e^{j\xi_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)} \dots$$

Формула $e^{jz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\, e^{jn\theta}$ позволяет записать $u(t)$ в виде

$$u(t) = U \sum_{n_1,\, n_2, \dots = -\infty}^{+\infty} J_{n_1}(\xi_1) J_{n_2}(\xi_2) \dots e^{j[t(\Omega_0 + n_1\omega_1 + \dots) + n_1\varphi_1 \dots]}.$$

Это выражение делает очевидным присутствие в сигнале круговых частот

$$\Omega_0 + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots$$

с амплитудами, пропорциональными

$$J_{n_1}(\xi_1) J_{n_2}(\xi_2) J_{n_3}(\xi_3) \dots$$

Для противоположных по знаку значений n_1, n_2, ... произведение под знаком суммы будет, с точностью до знака, иметь одно и то же значение. Амплитуды будут равны; следовательно, спектр симметричен.

Иначе обстоит дело в часто встречающемся случае, когда модулирующий сигнал вместо того, чтобы содержать синусоидальные функции с несоизмеримыми круговыми частотами, содержит две или несколько синусоидальных функций, круговые частоты которых находятся в простом соотношении. В частности, это будет в случае модуляции периодическим сигналом, разложенным в ряд Фурье.

Например, если между круговыми частотами ω_1 и ω_2 имеется соотношение

$$\omega_2 = 2\omega_1;$$

мы получим одну и ту же частоту, иначе говоря, одну и ту же линию

$$\Omega_0 + \omega_1(n_1 + 2n_2) + \dots$$

для значений $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ и для значений $n_1 = 3$, $n_2 = 2$. Результирующая амплитуда будет иметь вид

$$J_1(\xi_1) J_3(\xi_2) + J_3(\xi_1) J_2(\xi_2).$$

Значения, противоположные по знаку предыдущим, т. е. $n_1 = -1$, $n_2 = -3$, и $n_1 = -3$, $n_2 = -2$, приведут к частоте, симметричной ранее полученной по отношению к несущей частоте. Но результирующая амплитуда в этом случае будет

$$J_1(\xi_1) J_3(\xi_2) - J_3(\xi_1) J_2(\xi_2).$$

Это выражение не равно предыдущему, так как суммы индексов обоих произведений разной четности (см. формулу (22)). Спектр в этом случае не будет симметричен.

Таблицы бесселевых функций

7.5.46. Функции J_0, J_1, Y_0, Y_1.

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	$Y_0(z)$	$Y_1(z)$
0,0	1,000 0	0,000 0	$-\infty$	$-\infty$
0,1	0,997 5	0,049 9	—1,534	—6,459
0,2	0,990 0	0,099 5	—1,081	—3,324
0,3	0,977 6	0,148 3	—0,807 3	—2,293
0,4	0,960 4	0,196 0	—0,606 0	—1,781
0,5	0,938 5	0,242 3	—0,444 5	—1,471
0,6	0,912 0	0,286 7	—0,308 5	—1,260
0,7	0,881 2	0,329 0	—0,190 7	—1,103
0,8	0,846 3	0,368 8	—0,086 8	—0,978 1
0,9	0,807 5	0,405 9	+0,005 6	—0,873 1
1,0	0,765 2	0,440 1	0,088 3	—0,781 2
1,1	0,719 6	0,470 9	0,162 2	—0,698 1
1,2	0,671 1	0,498 3	0,228 1	—0,621 1
1,3	0,620 1	0,522 0	0,286 5	—0,548 5
1,4	0,566 9	0,541 9	0,337 9	—0,479 1
1,5	0,511 8	0,557 9	0,382 4	—0,412 3
1,6	0,455 4	0,569 9	0,420 4	—0,347 6
1,7	0,398 0	0,577 8	0,452 0	—0,284 7
1,8	0,340 0	0,581 5	0,477 4	—0,223 7
1,9	0,281 8	0,581 2	0,495 8	—0,164 4
2,0	0,223 9	0,576 7	0,510 4	—0,107 0
2,1	0,166 6	0,568 3	0,518 3	—0,051 7
2,2	0,110 4	0,556 0	0,520 8	+0,001 5
2,3	0,055 5	0,539 9	0,518 1	0,052 3
2,4	0,002 5	0,520 2	0,510 4	0,100 5
2,5	—0,048 4	0,497 1	0,498 1	0,145 9
2,6	—0,096 8	0,470 8	0,481 3	0,188 4
2,7	—0,142 4	0,441 6	0,460 5	0,227 6
2,8	—0,185 0	0,409 7	0,435 9	0,263 5
2,9	—0,224 3	0,375 4	0,407 9	0,295 9
3,0	—0,260 1	0,339 1	0,376 9	0,324 7
3,1	—0,292 1	0,300 9	0,343 1	0,349 6
3,2	—0,320 2	0,261 3	0,307 1	0,370 7
3,3	—0,344 3	0,220 7	0,269 1	0,387 9
3,4	—0,364 3	0,179 2	0,229 6	0,401 0
3,5	—0,380 1	0,137 4	0,189 0	0,410 2
3,6	—0,391 8	0,095 5	0,147 7	0,415 4
3,7	—0,399 2	0,053 8	0,106 1	0,416 7
3,8	—0,402 6	0,012 8	0,064 5	0,414 1
3,9	—0,401 8	—0,027 2	0,023 4	0,407 8
4,0	—0,397 1	—0,066 0	—0,016 9	0,397 9
4,1	—0,388 7	—0,103 3	—0,056 1	0,384 6
4,2	—0,376 6	—0,138 6	—0,093 8	0,368 0
4,3	—0,361 0	—0,171 9	—0,129 6	0,348 4
4,4	—0,342 3	—0,202 8	—0,163 3	0,326 0
4,5	—0,320 5	—0,231 1	—0,194 7	0,301 0
4,6	—0,296 1	—0,256 6	—0,223 5	0,273 7
4,7	—0,269 3	—0,279 1	—0,249 4	0,244 5
4,8	—0,240 4	—0,298 5	—0,272 3	0,213 6
4,9	—0,209 7	—0,314 7	—0,292 1	0,181 2
5,0	—0,177 6	—0,327 6	—0,308 5	0,147 9
5,1	—0,144 3	—0,337 1	—0,321 6	0,113 7
5,2	—0,110 3	—0,343 2	—0,331 3	0,079 2
5,3	—0,075 8	—0,346 0	—0,337 4	0,044 5

Продолжение

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	$Y_0(z)$	$Y_1(z)$
5,4	—0,041 2	—0,345 3	—0,340 2	0,010 1
5,5	—0,006 8	—0,341 4	—0,339 5	—0,023 8
5,6	+0,027 0	—0,334 3	—0,335 4	—0,056 8
5,7	0,059 9	—0,324 1	—0,328 2	—0,088 7
5,8	0,091 7	—0,311 0	—0,317 7	—0,119 2
5,9	0,122 0	—0,295 1	—0,304 4	—0,148 1
6,0	0,150 6	—0,276 7	—0,288 2	—0,175 0
6,1	0,177 3	—0,255 9	—0,269 4	—0,199 8
6,2	0,201 7	—0,232 9	—0,248 3	—0,222 3
6,3	0,223 8	—0,208 1	—0,225 1	—0,242 2
6,4	0,243 3	—0,181 6	—0,199 9	—0,259 6
6,5	0,260 1	—0,153 8	—0,173 2	—0,274 1
6,6	0,274 0	—0,125 0	—0,145 2	—0,285 7
6,7	0,285 1	—0,095 3	—0,116 2	—0,294 5
6,8	0,293 1	—0,065 2	—0,086 4	—0,300 2
6,9	0,298 1	—0,034 9	—0,056 3	—0,302 9
7,0	0,300 1	—0,004 7	—0,025 9	—0,302 7
7,1	0,299 1	+0,025 2	+0,004 2	—0,299 5
7,2	0,295 1	0,054 3	0,033 9	—0,293 4
7,3	0,288 2	0,082 6	0,062 8	—0,284 6
7,4	0,278 6	0,109 6	0,090 7	—0,273 1
7,5	0,266 3	0,135 2	0,117 3	—0,259 1
7,6	0,251 6	0,159 2	0,142 4	—0,242 8
7,7	0,234 6	0,181 3	0,165 8	—0,224 3
7,8	0,215 4	0,201 4	0,187 2	—0,203 9
7,9	0,194 4	0,219 2	0,206 5	—0,181 7
8,0	0,171 7	0,234 6	0,223 5	—0,158 1
8,1	0,147 5	0,247 6	0,238 1	—0,133 1
8,2	0,122 2	0,258 0	0,250 1	—0,107 2
8,3	0,096 0	0,265 7	0,259 5	—0,080 6
8,4	0,069 2	0,270 8	0,266 2	—0,053 5
8,5	0,041 9	0,273 1	0,270 2	—0,026 2
8,6	0,014 6	0,272 8	0,271 5	+0,001 1
8,7	—0,012 5	0,269 7	0,270 0	0,028 0
8,8	—0,039 2	0,264 1	0,265 9	0,054 4
8,9	—0,065 3	0,255 9	0,259 2	0,079 9
9,0	—0,090 3	0,245 3	0,249 9	0,104 3
9,1	—0,114 2	0,232 4	0,238 3	0,127 5
9,2	—0,136 7	0,217 4	0,224 5	0,149 1
9,3	—0,157 7	0,200 4	0,208 6	0,169 1
9,4	—0,176 8	0,181 6	0,190 7	0,187 1
9,5	—0,193 9	0,161 3	0,171 2	0,203 2
9,6	—0,209 0	0,139 5	0,150 2	0,217 1
9,7	—0,221 8	0,116 6	0,127 9	0,228 7
9,8	—0,232 3	0,092 8	0,104 5	0,237 9
9,9	—0,240 3	0,068 4	0,080 4	0,244 7
10,0	—0,245 9	0,043 5	0,055 7	0,249 0
10,1	—0,249 0	0,018 4	0,030 7	0,250 8
10,2	—0,249 6	—0,006 6	0,005 6	0,250 2
10,3	—0,247 7	—0,031 3	—0,019 3	0,247 1
10,4	—0,243 4	—0,055 5	—0,043 7	0,241 6
10,5	—0,236 6	—0,078 9	—0,067 5	0,233 7
10,6	—0,227 6	—0,101 2	—0,090 4	0,223 6
10,7	—0,216 4	—0,122 4	—0,112 2	0,211 4
10,8	—0,203 2	—0,142 2	—0,132 6	0,197 3
10,9	—0,188 1	—0,160 3	—0,151 6	0,181 3

Продолжение

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	$Y_0(z)$	$Y_1(z)$
11,0	—0,171 2	—0,176 8	—0,168 8	0,163 7
11,1	—0,152 8	—0,191 3	—0,184 3	0,144 6
11,2	—0,133 0	—0,203 9	—0,197 7	0,124 3
11,3	—0,112 1	—0,214 3	—0,209 1	0,102 9
11,4	—0,090 2	—0,222 5	—0,218 3	0,080 7
11,5	—0,067 7	—0,228 4	—0,225 2	0,057 9
11,6	—0,044 6	—0,232 0	—0,229 9	0,034 8
11,7	—0,021 3	—0,233 3	—0,232 2	0,011 4
11,8	+0,002 0	—0,232 3	—0,232 2	—0,011 8
11,9	0,025 0	—0,229 0	—0,229 8	—0,034 7
12,0	0,047 7	—0,223 4	—0,225 2	—0,057 1
12,1	0,069 7	—0,215 7	—0,218 4	—0,078 7
12,2	0,090 8	—0,206 0	—0,209 5	—0,099 4
12,3	0,110 8	—0,194 3	—0,198 6	—0,118 9
12,4	0,129 6	—0,180 7	—0,185 8	—0,137 1
12,5	0,146 9	—0,165 5	—0,171 2	—0,153 8
12,6	0,162 6	—0,148 7	—0,155 1	—0,168 9
12,7	0,176 6	—0,130 7	—0,137 5	—0,182 1
12,8	0,188 7	—0,111 4	—0,118 7	—0,193 5
12,9	0,198 8	—0,091 2	—0,098 9	—0,202 8
13,0	0,206 9	—0,070 3	—0,078 2	—0,210 1
13,1	0,212 9	—0,048 9	—0,056 9	—0,215 2
13,2	0,216 7	—0,027 1	—0,035 2	—0,218 2
13,3	0,218 3	—0,005 2	—0,013 4	—0,219 0
13,4	0,217 7	+0,016 6	+0,008 5	—0,217 6
13,5	0,215 0	0,038 0	0,030 1	—0,214 0
13,6	0,210 1	0,059 0	0,051 2	—0,208 4
13,7	0,203 2	0,079 1	0,071 7	—0,200 7
13,8	0,194 3	0,098 4	0,091 3	—0,191 2
13,9	0,183 6	0,116 5	0,109 9	—0,179 8
14,0	0,171 1	0,133 4	0,127 2	—0,166 6
14,1	0,157 0	0,148 8	0,143 1	—0,152 0
14,2	0,141 4	0,162 6	0,157 5	—0,135 9
14,3	0,124 5	0,174 7	0,170 3	—0,118 6
14,4	0,106 5	0,185 0	0,181 2	—0,100 3
14,5	0,087 5	0,193 4	0,190 3	—0,081 0
14,6	0,067 9	0,199 9	0,197 4	—0,061 2
14,7	0,047 6	0,204 3	0,202 5	—0,040 8
14,8	0,027 1	0,206 6	0,205 6	—0,020 2
14,9	0,006 4	0,206 9	0,206 5	+0,000 5
15,0	—0,014 2	0,205 1	0,205 5	0,021 1
15,1	—0,034 6	0,201 3	0,202 3	0,041 3
15,2	—0,054 4	0,195 5	0,197 2	0,060 9
15,3	—0,073 6	0,187 9	0,190 2	0,079 9
15,4	—0,091 9	0,178 4	0,181 3	0,097 9
15,5	—0,109 2	0,167 2	0,170 6	0,114 8
15,6	—0,125 3	0,154 4	0,158 4	0,130 5
15,7	—0,140 1	0,140 2	0,144 6	0,144 7
15,8	—0,153 3	0,124 7	0,129 5	0,157 5
15,9	—0,165 0	0,108 0	0,113 2	0,168 6
16,0	—0,174 9	0,090 4	0,113 2	0,168 6

Замечание. Эту таблицу можно легко распространить на бесселевы функции с любым целым индексом, отличным от нуля и единицы. Для этого достаточно применить рекуррентное соотношение (33):

$$J_{n+1} = 2\frac{n}{z}J_n - J_{n-1}.$$

Например, требуется вычислить J_3 (1,1). Имеем

$$J_2 = \frac{2}{1{,}1}J_1 - J_0 = 0{,}1366,$$

$$J_3 = 2\frac{2}{1{,}1}J_2 - J_1 = 0{,}0258.$$

7.5.47. Бесселевы функцнн J_2, J_3, ..., J_9.

z	$J_2(z)$	$J_3(z)$	$J_4(z)$	$J_5(z)$	$J_6(z)$	$J_7(z)$	$J_8(z)$	$J_9(z)$
0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0
1	+0,114 9	+0,019 5	+0,002 5	+0,000 2	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0
2	+0,352 8	+0,128 9	+0,034 0	+0,007 0	+0,001 2	+0,000 2	0,000 0	0,000 0
3	+0,486 1	+0,309 1	+0,132 0	+0,043 0	+0,011 4	+0,002 5	+0,000 5	+0,000 1
4	+0,364 1	+0,430 2	+0,281 1	+0,132 1	+0,049 1	+0,015 2	+0,004 0	+0,000 9
5	+0,046 6	+0,364 8	+0,391 2	+0,261 1	+0,131 0	+0,053 4	+0,018 4	+0,005 5
6	−0,242 9	+0,114 8	+0,357 6	+0,362 1	+0,245 8	+0,129 6	+0,056 5	+0,021 2
7	−0,301 4	−0,167 6	+0,157 8	+0,347 9	+0,339 2	+0,233 6	+0,128 0	+0,058 9
8	−0,113 0	−0,291 1	−0,105 4	+0,185 8	+0,337 6	+0,320 6	+0,223 5	+0,126 3
9	+0,144 8	−0,180 9	−0,265 5	−0,055 0	+0,204 3	+0,327 5	+0,305 1	+0,214 9
10	+0,254 6	+0,058 4	−0,219 6	−0,234 1	−0,014 5	+0,216 7	+0,317 9	+0,291 9
11	+0,139 0	+0,227 3	−0,015 0	−0,238 3	−0,201 6	+0,018 4	+0,225 0	+0,308 9
12	−0,084 9	+0,195 1	+0,182 5	−0,073 5	−0,243 7	−0,170 3	+0,045 1	+0,230 4
13	−0,217 7	+0,003 3	+0,219 3	+0,131 6	−0,118 0	−0,240 6	−0,141 0	+0,067 0
14	−0,152 0	−0,176 8	+0,076 2	+0,220 4	+0,081 2	−0,150 8	−0,232 0	−0,114 3
15	+0,041 6	−0,194 0	−0,119 2	+0,130 5	+0,206 1	+0,034 5	−0,174 0	−0,220 0
16	+0,186 2	−0,043 8	−0,202 6	−0,057 5	+0,166 7	+0,182 5	−0,007 0	−0,189 5
17	+0,158 4	+0,134 9	−0,110 7	−0,187 0	+0,000 7	+0,187 5	+0,153 7	−0,042 9
18	−0,007 5	+0,186 3	+0,069 6	−0,155 4	−0,156 0	+0,051 4	+0,195 9	+0,122 8
19	−0,157 8	+0,072 5	+0,180 6	+0,003 6	−0,178 8	−0,116 5	+0,092 9	+0,194 7
20	−0,160 3	−0,098 9	+0,130 7	+0,151 2	−0,055 1	−0,184 2	−0,073 9	+0,125 1
21	−0,020 3	−0,175 0	−0,029 7	+0,163 7	+0,107 6	−0,102 2	−0,175 7	−0,031 7
22	+0,131 3	−0,093 3	−0,156 8	+0,036 3	+0,173 3	+0,058 2	−0,136 2	−0,157 3
23	+0,159 0	+0,067 2	−0,141 5	−0,116 4	+0,090 9	+0,163 8	+0,008 8	−0,157 6
24	+0,043 4	+0,161 3	−0,003 1	−0,162 3	−0,064 5	+0,130 0	+0,140 4	−0,036 4

7.5.48. Бесселевы функцин J_{10}, J_{11}, ..., J_{17}.

z	$J_{10}(z)$	$J_{11}(z)$	$J_{12}(z)$	$J_{13}(z)$	$J_{14}(z)$	$J_{15}(z)$	$J_{16}(z)$	$J_{17}(z)$
4	+0,000 2	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0
5	+0,001 5	+0,000 3	+0,000 1	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0
6	+0,007 0	+0,002 0	+0,000 5	+0,000 1	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0
7	+0,023 5	+0,008 3	+0,002 6	+0,000 8	+0,000 2	0,000 0	0,000 0	0,000 0
8	+0,060 8	+0,025 6	+0,009 6	+0,003 3	+0,001 0	+0,000 3	+0,000 1	0,000 0
9	+0,124 7	+0,062 2	+0,027 4	+0,010 8	+0,003 9	+0,001 3	+0,000 4	+0,000 1

Продолжение

z	$J_{10}(z)$	$J_{11}(z)$	$J_{12}(z)$	$J_{13}(z)$	$J_{14}(z)$	$J_{15}(z)$	$J_{16}(z)$	$J_{17}(z)$
10	+0,207 5	+0,123 1	+0,063 4	+0,029 0	+0,012 0	+0,004 5	+0,001 6	+0,000 5
11	+0,280 4	+0,201 0	+0,121 6	+0,064 3	+0,030 4	+0,013 0	+0,005 1	+0,001 8
12	+0,300 5	+0,270 4	+0,195 3	+0,120 1	+0,065 0	+0,031 6	+0,014 0	+0,005 7
13	+0,233 8	+0,292 7	+0,261 5	+0,190 1	+0,118 8	+0,065 6	+0,032 7	+0,014 9
14	+0,085 0	+0,235 7	+0,285 5	+0,253 6	+0,185 5	+0,117 4	+0,066 1	+0,033 7
15	−0,090 0	+0,099 9	+0,236 7	+0,278 7	+0,246 4	+0,181 3	+0,116 2	+0,066 5
16	−0,206 2	−0,068 2	+0,112 4	+0,236 8	+0,272 4	+0,239 9	+0,177 5	+0,115 0
17	−0,199 1	−0,191 4	−0,048 6	+0,122 8	+0,236 4	+0,266 6	+0,234 0	+0,173 9
18	−0,073 2	−0,204 1	−0,176 2	−0,030 9	+0,131 6	+0,235 6	+0,261 1	+0,228 6
19	+0,091 5	−0,098 4	−0,205 5	−0,161 2	−0,015 1	+0,138 9	+0,234 5	+0,255 9
20	+0,186 5	+0,061 4	−0,119 0	−0,204 1	−0,146 4	−0,000 8	+0,145 2	+0,233 1
21	+0,148 5	+0,173 2	+0,032 9	−0,135 6	−0,200 8	−0,132 1	+0,012 0	+0,150 5
22	+0,007 5	+0,164 1	+0,156 6	+0,006 7	−0,148 7	−0,195 9	−0,118 5	+0,023 6
23	−0,132 2	+0,042 7	+0,173 0	+0,137 9	−0,017 2	−0,158 8	−0,189 9	−0,105 5
24	−0,167 7	−0,103 3	+0,073 0	+0,176 3	+0,118 0	−0,038 6	−0,166 3	−0,183 1
25	−0,075 2	−0,168 2	−0,072 9	+0,098 3	+0,175 1	+0,097 8	−0,057 7	−0,171 7
26	+0,071 2	−0,106 3	−0,161 1	−0,042 4	+0,118 7	+0,170 2	+0,077 7	−0,074 5
27	+0,156 4	+0,033 0	−0,129 5	−0,148 1	−0,013 1	+0,134 5	+0,162 5	+0,058 2
28	+0,115 2	+0,141 8	−0,003 8	−0,145 0	−0,130 9	+0,014 2	+0,146 1	+0,152 7
29	−0,016 1	+0,136 9	+0,120 0	−0,037 6	−0,153 7	−0,110 8	+0,039 1	+0,153 9

7.5.49. Таблицы первых корней функций $J_n(z)$, $J_n'(z)$ (рис. 7.39)



Рис. 7.39.

$J_n'(z) = 0$.

n	Номер корня								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	22,7601	25,9037
1	1,8412	5,3314	8,5363	11,7060	14,8636	18,0155	21,1644	24,3113	
2	3,0542	6,7061	9,9695	13,1704	16,3475	19,5129	22,6721		
3	4,2012	8,0152	11,3459	14,5859	17,7888	20,9724	24,1469		
4	5,3175	9,2824	12,6819	15,9641	19,1960	22,4010			
5	6,4156	10,5199	13,9872	17,3128	20,5755	23,8033			
6	7,5013	11,7349	15,2682	18,6374	21,9318				
7	8,5778	12,9324	16,5294	19,9419	23,2681				
8	9,6474	14,1156	17,7740	21,2291	24,5872				
9	10,7114	15,2868	19,0045	22,5014					
10	11,7709	16,4479	20,2230	23,7608					
11	12,8265	17,6003	21,4309						
12	13,8788	18,7451	22,6293						
13	14,9284	19,8832	23,8194						
14	15,9754	21,0154							
15	17,0203	22,1423							
16	18,0633	23,2644							
17	19,1045	24,3819							
18	20,1441								
19	21,1823								
20	22,2191								
21	23,2548								
22	24,2894								

Продолжение

$J_n(z) = 0.$

n	Номер корня							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2,40483	5,52008	8,65373	11,79153	14,93092	18,07106	21,21164	24,35247
1	3,83171	7,01559	10,17347	13,32369	16,47063	19,61586	22,76008	
2	5,13562	8,41724	11,61984	14,79595	17,95982	21,11700	24,27112	
3	6,38016	9,76102	13,01520	16,22347	19,40942	22,58273		
4	7,58834	11,06471	14,37254	17,6160	20,8269	24,1990		
5	8,77142	12,33860	15,70017	18,9801	22,2178			
6	9,93611	13,58929	17,0038	20,3208	23,5861			
7	11,08637	14,82127	18,2876	21,6416	24,9349			
8	12,22509	16,0378	19,5545	22,9452				
9	13,35430	17,2412	20,8070	24,2339				
10	14,47550	18,4335	22,0470					
11	15,58985	19,6160	23,2759					
12	16,6983	20,7899	24,4949					
13	17,8014	21,9562						
14	18,9000	23,1158						
15	19,9944	24,2692						
16	21,0851							
17	22,1725							
18	23,2568							
19	24,3383							

7.5.50. Бесселевы функции $J_{\frac{1}{2}}$, $J_{\frac{3}{2}}$, ..., $J_{\frac{13}{2}}$.

z	$J_{\frac{1}{2}}(z)$	$J_{\frac{3}{2}}(z)$	$J_{\frac{5}{2}}(z)$	$J_{\frac{7}{2}}(z)$	$J_{\frac{9}{2}}(z)$	$J_{\frac{11}{2}}(z)$	$J_{\frac{13}{2}}(z)$
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	+0,6714	+0,2403	+0,0495	+0,0072	+0,0008	+0,0001	0,0000
2	+0,5130	+0,4913	+0,2239	+0,0685	+0,0159	+0,0030	+0,0005
3	+0,0650	+0,4777	+0,4127	+0,2101	+0,0776	+0,0226	+0,0055
4	−0,3019	+0,1853	+0,4409	+0,3658	+0,1993	+0,0826	+0,0279
5	−0,3422	−0,1697	+0,2404	+0,4100	+0,3337	+0,1906	+0,0856
6	−0,0910	−0,3279	−0,0729	+0,2671	+0,3846	+0,3098	+0,1833
7	+0,1981	−0,1991	−0,2834	−0,0034	+0,2800	+0,3634	+0,2911
8	+0,2791	+0,0759	−0,2506	−0,2326	+0,0471	+0,2856	+0,3456
9	+0,1096	+0,2545	−0,0248	−0,2683	−0,1839	+0,0844	+0,2870
10	−0,1373	+0,1980	+0,1967	−0,0996	−0,2664	−0,1401	+0,1123
11	−0,2406	−0,0229	+0,2343	+0,1294	−0,1519	−0,2538	−0,1018
12	−0,1236	−0,2047	+0,0724	+0,2348	+0,0646	−0,1864	−0,2354
13	+0,0930	−0,1937	−0,1377	+0,1407	+0,2134	+0,0070	−0,2075
14	+0,2112	−0,0141	−0,2143	−0,0624	+0,1830	+0,1801	−0,0415
15	+0,1340	+0,1654	−0,1009	−0,1991	+0,0080	+0,2039	+0,1415
16	−0,0574	+0,1874	+0,0926	−0,1585	−0,1619	+0,0674	+0,2083
17	−0,1860	+0,0423	+0,1935	+0,0146	−0,1875	−0,1139	+0,1138
18	−0,1412	−0,1320	+0,1192	+0,1651	−0,0550	−0,1926	−0,0627
19	+0,0274	−0,1795	−0,0558	+0,1649	+0,1165	−0,1097	−0,1800
20	+0,1629	−0,0646	−0,1726	+0,0215	+0,1801	+0,0595	−0,1474
21	+0,1457	+0,1023	−0,1311	−0,1335	+0,0866	+0,1706	+0,0028
22	−0,0015	+0,1700	+0,0247	−0,1644	−0,0770	+0,1329	+0,1435
23	−0,1408	+0,0825	+0,1516	−0,0496	−0,1666	−0,0156	+0,1592
24	−0,1475	−0,0752	+0,1381	+0,1040	−0,1078	−0,1444	+0,0416

7.5.51. Бесселевы функции $J_{-\frac{1}{2}}$, $J_{-\frac{3}{2}}$, ..., $J_{-\frac{13}{2}}$.

z	$J_{-\frac{1}{2}}(z)$	$J_{-\frac{3}{2}}(z)$	$J_{-\frac{5}{2}}(z)$	$J_{-\frac{7}{2}}(z)$	$J_{-\frac{9}{2}}(z)$	$J_{-\frac{11}{2}}(z)$	$J_{-\frac{13}{2}}(z)$
0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	+0,4311	−1,1025	+2,8764	−13,279	+90,079	−797,44	+8681,7
2	−0,2348	−0,3956	+0,8282	−1,6749	+5,0340	−20,978	+110,35
3	−0,4560	+0,0870	+0,3690	−0,7021	+1,2691	−3,1053	+10,117
4	−0,2608	+0,3671	−0,0146	−0,3489	+0,6251	−1,0577	+2,2834
5	+0,1012	+0,3219	−0,2944	−0,0275	+0,3329	−0,5718	+0,9249
6	+0,3128	+0,0389	−0,3322	+0,2379	+0,0546	−0,3198	+0,5318
7	+0,2274	−0,2306	−0,1285	+0,3224	−0,1939	−0,0731	+0,3088
8	−0,0410	−0,2740	+0,1438	+0,1841	−0,3049	+0,1589	+0,0864
9	−0,2423	−0,0827	+0,2699	−0,0672	−0,2176	+0,2848	−0,1306
10	−0,2117	+0,1584	+0,1642	−0,2405	+0,0042	+0,2368	−0,2646
11	+0,0011	+0,2405	−0,0666	−0,2102	+0,2004	+0,0462	−0,2466
12	+0,1944	+0,1074	−0,2212	−0,0152	+0,2301	−0,1573	−0,0858
13	+0,2008	−0,1084	−0,1758	+0,1760	+0,0810	−0,2321	+0,1154
14	+0,0292	−0,2133	+0,0165	+0,2074	−0,1203	−0,1301	+0,2225
15	−0,1565	−0,1235	+0,1812	+0,0631	−0,2107	+0,0633	+0,1643
16	−0,1910	+0,0694	+0,1780	−0,1250	−0,1233	+0,1944	−0,0103
17	−0,0532	+0,1892	+0,0199	−0,1950	+0,0604	+0,1630	−0,1659
18	+0,1242	+0,1343	−0,1466	−0,0936	+0,1830	+0,0021	−0,1843
19	+0,1810	−0,0370	−0,1751	+0,0830	+0,1445	−0,1515	−0,0568
20	+0,0728	−0,1665	−0,0478	+0,1785	−0,0146	−0,1719	+0,1092
21	−0,0954	−0,1411	+0,1155	+0,1136	−0,1534	−0,0479	+0,1785
22	−0,1701	+0,0092	+0,1688	−0,0476	−0,1537	+0,1105	+0,0984
23	−0,0886	+0,1446	+0,0698	−0,1598	−0,0211	+0,1681	−0,0592
24	+0,0691	+0,1446	−0,0872	−0,1265	+0,1240	+0,0799	−0,1607

7.5.52. Функции ber, bei, ker, kei и их пронзводные.

z	ber z	$\frac{d \operatorname{ber} z}{dz}$	bei z	$\frac{d \operatorname{bei} z}{dz}$	ker z	$\frac{d \operatorname{ker} z}{dz}$	kei z	$\frac{d \operatorname{kei} z}{dz}$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	$+\infty$	$-\infty$	−0,7854	0,0000
0,1	1,0000	0,0000	0,0025	0,0500	2,420	−9,961	−0,7769	0,1460
0,2	1,0000	−0,0005	0,0100	0,1000	1,733	−4,923	−0,7581	0,2229
0,3	0,9999	−0,0017	0,0225	0,1500	1,337	−3,220	−0,7331	0,2743
0,4	0,9996	−0,0040	0,0400	0,2000	1,063	−2,352	−0,7038	0,3095
0,5	0,9990	−0,0078	0,0625	0,2499	0,8559	−1,820	−0,6716	0,3332
0,6	0,9980	−0,0135	0,0900	0,2998	0,6931	−1,457	−0,6374	0,3482
0,7	0,9962	−0,0214	0,1224	0,3496	0,5614	−1,191	−0,6022	0,3563
0,8	0,9936	−0,0320	0,1599	0,3991	0,4529	−0,9873	−0,5664	0,3590
0,9	0,9898	−0,0455	0,2023	0,4485	0,3625	−0,8259	−0,5305	0,3574
1,0	0,9844	−0,0624	0,2496	0,4974	0,2867	−0,6946	−0,4950	0,3524
1,1	0,9771	−0,0831	0,3017	0,5458	0,2228	−0,5859	−0,4601	0,3445
1,2	0,9676	−0,1078	0,3587	0,5935	0,1689	−0,4946	−0,4262	0,3345
1,3	0,9554	−0,1370	0,4204	0,6403	0,1235	−0,4172	−0,3938	0,3227
1,4	0,9401	−0,1709	0,4867	0,6860	0,0851	−0,3511	−0,3617	0,3096
1,5	0,9211	−0,2100	0,5576	0,7303	0,0529	−0,2942	−0,3314	0,2956
1,6	0,8979	−0,2545	0,6327	0,7727	0,0260	−0,2451	−0,3026	0,2809
1,7	0,8700	−0,3048	0,7120	0,8131	0,0037	−0,2027	−0,2752	0,2658
1,8	0,8367	−0,3612	0,7953	0,8509	−0,0147	−0,1639	−0,2494	0,2504
1,9	0,7975	−0,4238	0,8821	0,8857	−0,0297	−0,1341	−0,2251	0,2351

Продолжение

z	ber z	$\frac{d \text{ ber } z}{dz}$	bei z	$\frac{d \text{ bei } z}{dz}$	ker z	$\frac{d \text{ ker } z}{dz}$	kei z	$\frac{d \text{ kei } z}{dz}$
2,0	0,751 7	—0,493 1	0,972 3	0,917 0	—0,041 7	—1066 [1]	—0,202 4	0,219 8
2,1	0,698 7	—0,569 1	1,065	0,944 2	—0,051 1	—828,2 [1]	—0,181 2	0,204 8
2,2	0,637 7	—0,652 0	1,161	0,966 6	—0,058 3	—623,4 [1]	—0,161 4	0,190 1
2,3	0,568 0	—0,742 0	1,259	0,983 6	—0,063 7	—447,5 [1]	—0,143 1	0,175 9
2,4	0,489 0	—0,839 2	1,357	0,994 4	—0,067 4	—297,1 [1]	—0,126 2	0,162 1
2,5	0,400 0	—0,943 6	1,457	0,998 3	—0,069 7	—169,3 [1]	—0,110 7	0,148 9
2,6	0,300 1	—1,055	1,557	0,994 3	—0,070 8	—61,36 [1]	—0,096 4	0,136 3
2,7	0,188 7	—1,174	1,656	0,981 5	—0,071 0	+29,04 [1]	—0,083 4	0,124 3
2,8	0,065 1	—1,299	1,753	0,959 0	—0,070 3	+104,0 [1]	—0,071 6	0,112 9
2,9	—0,071 4	—1,431	1,847	0,925 7	—0,068 9	165,3 [1]	—0,060 8	0,102 1
3,0	—0,221 4	—1,570	1,938	0,880 5	—0,067 0	214,8 [1]	—5112 [2]	9204 [2]
3,1	—0,385 5	—1,714	2,023	0,822 3	—0,064 7	253,7 [1]	—4240 [2]	8259 [2]
3,2	—0,564 4	—1,864	2,102	0,749 9	—0,062 0	283,6 [1]	—3458 [2]	7378 [2]
3,3	—0,758 4	—2,018	2,172	0,662 1	—0,059 0	305,6 [1]	—2762 [2]	6558 [2]
3,4	—0,968 0	—2,175	2,203	0,557 7	—0,055 9	320,7 [1]	—2145 [2]	5799 [2]
3,5	—1,194	—2,336	2,283	0,435 3	—0,052 6	329,9 [1]	—1600 [2]	5098 [2]
3,6	—1,435	—2,498	2,320	0,293 7	—0,049 3	334,1 [1]	—1123 [2]	4454 [2]
3,7	—1,693	—2,661	2,341	0,131 5	—0,046 0	334,0 [1]	—707,7 [2]	2664 [2]
3,8	—1,967	—2,822	2,345	—0,052 5	—0,042 6	330,4 [1]	—348,7 [2]	3325 [2]
3,9	—2,258	—2,981	2,330	—0,259 7	—0,039 4	323,8 [1]	—41,08 [2]	2835 [2]
4,0	—2,563	—3,135	2,293	—0,491 1	—3618 [2]	314,8 [1]	+2198 [3]	2391 [2]
4,1	—2,884	—3,282	2,231	—0,748 1	—3308 [2]	303,8 [1]	4386 [3]	1991 [2]
4,2	—3,219	—3,420	2,142	—1,032	—3011 [2]	291,3 [1]	6194 [3]	1631 [2]
4,3	—3,568	—3,547	2,024	—1,343	—2726 [2]	277,7 [1]	7661 [3]	1310 [2]
4,4	—3,928	—3,659	1,873	—1,683	—2456 [2]	263,2 [1]	8826 [3]	1024 [2]
4,5	—4,299	—3,754	1,686	—2,053	—2200 [2]	248,1 [1]	9721 [3]	771,5 [2]
4,6	—4,678	—3,828	1,461	—2,452	—1960 [2]	232,8 [1]	1038 [2]	549,2 [2]
4,7	—5,064	—3,878	1,195	—2,882	—1734 [2]	217,3 [1]	1083 [2]	355,0 [2]
4,8	—5,453	—3,901	0,883 7	—3,342	—1525 [2]	201,9 [1]	1110 [2]	186,5 [2]
4,9	—5,843	—3,891	0,525 1	—3,833	—1330 [2]	186,8 [1]	1121 [2]	41,52 [2]
5,0	—6,230	—3,845	0,116 0	—4,354	—1151 [2]	171,9 [1]	1119 [2]	—820,0 [3]
5,1	—6,611	—3,759	—0,346 7	—4,903	—986,5 [2]	157,9 [1]	1105 [2]	—1861 [3]
5,2	—6,980	—3,627	—0,865 8	—5,484	—835,9 [2]	143,7 [1]	1082 [2]	—2726 [3]
5,3	—7,334	—3,445	—1,444	—6,089	—698,9 [2]	130,4 [1]	1051 [2]	—3433 [3]
5,4	—7,667	—3,206	—2,085	—6,720	—574,9 [2]	117,7 [1]	1014 [2]	—4000 [3]
5,5	—7,974	—2,907	—2,789	—7,373	—463,2 [2]	105,8 [1]	9716 [3]	—4440 [3]
5,6	—8,247	—2,541	—3,560	—8,045	—363,2 [2]	94,47 [1]	9255 [3]	—4769 [3]
5,7	—8,479	—2,102	—4,399	—8,734	—274,0 [2]	83,88 [1]	8766 [3]	—5000 [3]
5,8	—8,664	—1,586	—5,307	—9,433	—195,2 [2]	74,00 [1]	8258 [3]	—5146 [3]
5,9	—8,794	—0,984 4	—6,285	—10,14	—125,8 [2]	64,81 [1]	7739 [3]	—5217 [3]
6,0	—8,858	—0,293 1	—7,335	—10,85	—653,0 [3]	56,32 [1]	7216 [3]	—5224 [3]
6,1	—8,849	+0,494 3	—8,454	—11,55	—129,5 [3]	48,50 [1]	6696 [3]	—5176 [3]
6,2	—8,756	1,384	—9,644	—12,23	+319,1 [3]	41,33 [1]	6183 [3]	—5082 [3]
6,3	—8,569	2,380	—10,90	—12,90	699,1 [3]	34,79 [1]	5681 [3]	—4951 [3]
6,4	—8,276	3,490	—12,22	—13,54	1017 [3]	28,85 [1]	5194 [3]	—4788 [3]
6,5	—7,867	4,717	—13,61	—14,13	1278 [3]	23,49 [1]	4724 [3]	—4600 [3]
6,6	—7,329	6,067	—15,05	—14,67	1488 [3]	18,67 [1]	4274 [3]	—4393 [3]
6,7	—6,649	7,544	—16,34	—15,15	1653 [3]	14,36 [1]	3846 [3]	—4170 [3]
6,8	—5,816	9,151	—18,07	—15,54	1777 [3]	10,54 [1]	3440 [3]	—3939 [3]
6,9	—4,815	10,89	—19,64	—15,85	1866 [3]	7,164 [1]	3058 [3]	—3701 [3]
7,0	—3,633	12,76	—21,24	—16,04	1922 [3]	420,5 [3]	2700 [3]	—3460 [3]
7,1	—2,257	14,77	—22,85	—16,11	1951 [3]	163,3 [3]	2366 [3]	—3218 [3]
7,2	—0,673 7	16,92	—24,46	—16,03	1956 [3]	—58,39 [3]	2057 [3]	—2979 [3]
7,3	+1,131	19,19	—26,05	—15,79	1940 [3]	—247,4 [3]	1770 [3]	—2745 [3]
7,4	3,169	21,60	—27,61	—15,37	1907 [3]	—406,6 [3]	1507 [3]	—2517 [3]
7,5	5,455	24,13	—29,12	—14,74	1860 [3]	—538,8 [3]	1267 [3]	—2296 [3]

Продолжение

z	ber z	$\frac{d\,\mathrm{ber}\,z}{dz}$	bei z	$\frac{d\,\mathrm{bei}\,z}{dz}$	ker z	$\frac{d\,\mathrm{ker}\,z}{dz}$	kei z	$\frac{d\,\mathrm{kei}\,z}{dz}$
7,6	7,999	26,78	—30,55	—13,88	1800 [3]	—646,5 [3]	1043 [3]	—2084 [3]
7,7	10,81	29,53	—31,88	—12,76	1731 [3]	—732,2 [3]	849,8 [3]	—1881 [3]
7,8	13,91	32,38	—33,09	—11,37	1655 [3]	—798,2 [3]	671,4 [3]	—1689 [3]
7,9	17,29	35,31	—34,15	—9,681	1572 [3]	—846,7 [3]	511,7 [3]	—1507 [3]
8,0	20,97	38,31	—35,02	—7,660	1486 [3]	—879,7 [3]	369,6 [3]	—1336 [3]
8,1	24,96	41,35	—35,67	—5,285	1397 [3]	—899,2 [3]	244,0 [3]	—1177 [3]
8,2	29,25	44,42	—36,06	—2,530	1306 [3]	—906,9 [3]	133,9 [3]	—1028 [3]
8,3	33,84	47,47	—36,16	+0,634 1	1216 [3]	—904,4 [3]	+38,09 [3]	—890,2 [3]
8,4	38,74	50,49	—35,92	4,232	1126 [3]	—893,2 [3]	—44,49 [3]	—763,2 [3]
8,5	43,94	53,44	—35,30	8,290	1037 [3]	—874,7 [3]	—114,9 [3]	—646,7 [3]
8,6	49,42	56,28	—34,25	12,83	951,1 [3]	—850,0 [3]	—174,1 [3]	—540,4 [3]
8,7	55,19	58,97	—32,71	17,88	867,5 [3]	—820,4 [3]	—223,3 [3]	—443,8 [3]
8,8	61,21	61,45	—30,65	23,47	787,1 [3]	—786,8 [3]	—263,2 [3]	—356,5 [3]
8,9	67,47	63,68	—28,00	29,60	710,2 [3]	—750,2 [3]	—294,9 [3]	—278,1 [3]
9,0	73,94	65,60	—24,71	36,30	637,2 [3]	—711,2 [3]	—319,2 [3]	—208,1 [3]
9,1	80,58	67,14	—20,72	43,58	568,1 [3]	—670,7 [3]	—336,8 [3]	—145,9 [3]
9,2	87,35	68,25	—15,98	51,46	503,0 [3]	—629,3 [3]	—348,6 [3]	—91,09 [3]
9,3	94,21	68,83	—10,41	59,94	442,2 [3]	—587,5 [3]	—355,2 [3]	—43,15 [3]
9,4	101,1	68,82	—3,969	69,01	385,5 [3]	—545,8 [3]	—357,4 [3]	—1,559 [3]
9,5	108,0	68,13	3,411	78,68	333,0 [3]	—504,5 [3]	—355,7 [3]	+34,16 [3]
9,6	114,7	66,67	11,79	88,94	284,6 [3]	—464,1 [3]	—350,8 [3]	64,49 [3]
9,7	121,3	64,35	21,22	99,76	240,2 [3]	—424,8 [3]	—343,0 [3]	89,89 [3]
9,8	127,5	61,07	31,76	111,1	199,6 [3]	—386,8 [3]	—332,9 [3]	110,8 [3]
9,9	133,4	56,72	43,46	123,0	162,8 [3]	—350,4 [3]	—321,0 [3]	127,7 [3]
10,0	138,8	51,20	56,37	135,3	129,5 [3]	—315,6 [3]	—307,5 [3]	140,9 [3]

Замечание. Числа, за которыми следует индекс 1, нужно умножить на 10^{-4}.
Числа, за которыми следует индекс 2, нужно умножить на 10^{-5}.
Числа, за которыми следует индекс 3, нужно умножить на 10^{-6}.

7.5.53. Функции $M_0(z)\,e^{j\theta_0(z)} = \mathrm{ber}\,z + j\,\mathrm{bei}\,z$, $M_1(z)\,e^{j\theta_1(z)} = \mathrm{ber}_1 z + j\,\mathrm{bei}_1 z$.

z	$M_0(z)$	$\theta_0(z)$	$M_1(z)$	$\theta_1(z)$
0,00	1,000	0,00	0,00	135,00
0,05	1,000	0,04	0,025	135,02
0,10	1,000	0,14	0,050	135,07
0,15	1,000	0,32	0,075	135,16
0,20	1,000	0,57	0,100	135,29
0,25	1,000	0,90	0,125	135,45
0,30	1,000	1,29	0,150	135,64
0,35	1,000	1,75	0,175	135,88
0,40	1,000	2,29	0,200	136,15
0,45	1,001	2,90	0,225	136,45
0,50	1,001	3,58	0,250	136,79
0,55	1,001	4,33	0,275	137,17
0,60	1,002	5,15	0,300	137,58
0,65	1,003	6,04	0,325	138,03
0,70	1,004	7,01	0,350	138,51
0,75	1,005	8,04	0,375	139,03
0,80	1,006	9,14	0,400	139,58

Продолжение

z	$M_0(z)$	$\theta_0(z)$	$M_1(z)$	$\theta_1(z)$
0,85	1,008	10,31	0,425	140,17
0,90	1,010	11,55	0,450	140,80
0,95	1,013	12,86	0,476	141,46
1,00	1,016	14,23	0,501	142,16
1,05	1,019	15,66	0,526	142,89
1,10	1,023	17,16	0,552	143,66
1,15	1,027	18,72	0,577	144,46
1,20	1,032	20,34	0,603	145,29
1,25	1,038	22,02	0,629	146,17
1,30	1,044	23,75	0,654	147,07
1,35	1,051	25,54	0,680	148,02
1,40	1,059	27,37	0,707	148,99
1,45	1,067	29,26	0,733	150,00
1,50	1,077	31,19	0,759	151,04
1,55	1,087	33,16	0,786	152,12
1,60	1,098	35,17	0,813	153,23
1,65	1,111	37,22	0,840	154,38
1,70	1,124	39,30	0,868	155,55
1,80	1,154	43,54	0,924	158,00
1,90	1,189	47,88	0,981	160,57
2,00	1,229	52,29	1,041	163,27
2,10	1,274	56,74	1,102	166,08
2,20	1,325	61,22	1,166	169,00
2,30	1,381	65,71	1,232	172,03
2,40	1,443	70,19	1,301	175,16
2,50	1,511	74,65	1,374	178,39
2,60	1,586	79,09	1,450	181,70
2,70	1,666	83,50	1,530	185,10
2,80	1,754	87,87	1,615	188,57
2,90	1,849	92,21	1,705	192,11
3,00	1,950	96,52	1,800	195,71
3,20	2,176	105,03	2,009	203,08
3,40	2,434	113,43	2,246	210,62
3,60	2,728	121,75	2,515	218,30
3,80	3,061	129,99	2,823	226,07
4,00	3,439	138,19	3,173	233,90
4,50	4,618	158,59	4,278	253,67
5,00	6,231	178,95	5,809	273,55
5,50	8,447	199,28	7,925	293,48
6,00	11,50	219,62	10,85	313,45
7,00	21,55	260,29	20,50	353,51
8,00	40,82	300,92	39,07	393,69
9,00	77,96	341,52	74,97	433,96
10,00	149,8	382,10	144,7	474,28
11,00	289,5	422,66	280,4	514,63
12,00	561,8	463,22	545,6	555,02
14,00	2 137	544,32	2 084	635,84
16,00	8 217	625,40	8 038	716,72
18,00	31 850	705,46	31 230	797,63
20,00	$1{,}242 \cdot 10^5$	787,52	$1{,}220 \cdot 10^5$	878,57
25,00	$3{,}809 \cdot 10^6$	990,15	$3{,}755 \cdot 10^6$	1 080,98
30,00	$1{,}192 \cdot 10^8$	1 192,75	$1{,}178 \cdot 10^8$	1 283,45
35,00	$3{,}786 \cdot 10^9$	1 395,35	$3{,}748 \cdot 10^9$	1 485,94
40,00	$1{,}215 \cdot 10^{11}$	1 597,94	$1{,}204 \cdot 10^{11}$	1 688,46
45,00	$3{,}929 \cdot 10^{12}$	1 800,53	$3{,}899 \cdot 10^{12}$	1 890,98

Замечание. θ_0 и θ_1 выражены в градусах.

7.6. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

7.6.1. Введение. Мы уже встречали (пп. 6.3.8 и 6.3.11) следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0,$$

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+\frac{1}{\operatorname{th}\xi}\frac{d\Xi}{d\xi}-\left[n(n+1)+\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\xi}\right]\Xi=0,$$

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+\operatorname{th}\xi\frac{d\Xi}{d\xi}-\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2\xi}\right]\Xi=0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}-\operatorname{tg}\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\cos^2\varphi}\right]\Phi=0.$$

Заменой переменных $z=\cos\theta$, $z=\operatorname{ch}\xi$, $z=i\operatorname{sh}\xi$, $z=\sin\varphi$ эти уравнения сводятся к виду

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2}-2z\frac{df}{dz}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]f=0 \tag{97}$$

или, в более общей форме,

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2}-2z\frac{df}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]f=0, \tag{98}$$

где постоянные ν и μ могут быть отличны от целого числа.

При $\mu=0$ дифференциальное уравнение (98) сведется к

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2}-2z\frac{df}{dz}+\nu(\nu+1)f=0. \tag{99}$$

Это дифференциальное уравнение Лежандра. Его решения называются функциями Лежандра (сферическими функциями Лежандра). Решения более общего уравнения (98) называются присоединенными функциями Лежандра (присоединенными сферическими функциями). Рассмотрим сначала сферические функции Лежандра.

Замечание. Если f_ν^μ — решение уравнения (98), то функции $f_{-1-\nu}^\mu$, $f_\nu^{-\mu}$, $f_{-1-\nu}^{-\mu}$ также являются его решениями. Если f_ν — решение (99), то $f_{-\nu-1}$ — также его решение. Это замечание позволяет уменьшить диапазон изменения параметров.

7.6.2. Разложения в степенные ряды. Попробуем найти решение уравнения (99) в виде обобщенного степенного ряда по возрастающим степеням переменной z:

$$f(z)=z^k\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda.$$

Подставим этот ряд в (99) и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях z. Так как λ неотрицательно, то наименьший показатель степени z равен $k-2$. Имеем

$$a_0k(k-1)=0,\quad a_1k(k+1)=0, \tag{100}$$

$$a_{\lambda+2}=\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)-\nu(\nu+1)}{(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}a_\lambda,\quad \lambda\geqslant 0.$$

Пусть $k=0$. Тогда коэффициенты a_0 и a_1 становятся произвольными и

$$a_{\lambda+2}=-\frac{(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}a_\lambda,\quad \lambda\geqslant 0.$$

Отсюда

$$f(z)=a_0\left\{1-\frac{\nu(\nu+1)}{2!}z^2+\frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}z^4-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^\lambda\frac{\nu(\nu-2)\ldots(\nu-2\lambda+2)(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+2\lambda-1)}{(2\lambda)!}z^{2\lambda}+\ldots\right\}+ \tag{101}$$
$$+a_1z\left\{1-\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}z^2+\frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!}z^4-\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^\lambda\frac{(\nu-1)(\nu-3)\ldots(\nu-2\lambda+1)(\nu+2)(\nu+4)\ldots(\nu+2\lambda)}{(2\lambda+1)!}z^{2\lambda}+\ldots\right\}. \tag{102}$$

Перепишем разложения (101) и (102), используя обозначения для гипергеометрических рядов (см. пример п. 6.2.10). Тогда общее решение уравнения (99) примет вид

$$f(z)=a_0F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2};z^2\right)+a_1zF\left(-\frac{\nu-1}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2};z^2\right).$$

Отношение двух последовательных членов каждого из рядов (101) и (102) равно

$$\frac{a_{\lambda+2}}{a_\lambda}z^2.$$

Выражение, связывающее $a_{\lambda+2}$ с a_λ, показывает, что отношение $\frac{a_{\lambda+2}}{a_\lambda}$ при бесконечно возрастающем λ стремится к единице. Значит, ряды (101) и (102) сходятся в интервале $(-1, +1)$ и дают в нем решения уравнения (99). Этот интервал особенно важен, так как часто переменная z представляет косинус полюсного углового расстояния между точками в сферических координатах:

$$z=\cos\theta.$$

Вернемся к соотношениям (100). Они удовлетворяются также при $k=1$, $a_1=0$ (a_0 произвольно) и $k=-1$, $a_0=0$ (a_1 произвольно). Легко заметить, что эти условия приводят к разложениям, полученным выше.

Попробуем теперь представить решение дифференциального уравнения (99) с помощью разложения в ряд по убывающим степеням переменной. Подставим для этого в (99) ряд

$$z^k\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda z^{-\lambda}$$

и приравняем нулю коэффициенты при различных степенях z. Учитывая, что наивысший показатель степени z равен k, получаем

$$b_0(k-\nu)(k+\nu+1)=0,\quad b_1(k-\nu-1)(k+\nu)=0,$$
$$b_\lambda(k-\lambda-\nu)(k-\lambda+\nu+1)=b_{\lambda-2}(k-\lambda+2)(k-\lambda+1),\quad \lambda\geqslant 2.$$

Возьмем $k=\nu$, $b_1=0$ и произвольное b_0. Получаем ряд

$$f(z)=b_0z^\nu\left\{1-\frac{\nu(\nu-1)}{2(2\nu-1)}z^{-2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot4\cdot(2\nu-1)(2\nu-3)}z^{-4}-\ldots\right\}=$$
$$=b_0z^\nu F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1-\nu}{2},\frac{1}{2}-\nu;z^{-2}\right). \tag{103}$$

Возьмем $k=-\nu-1$, $b_1=0$ и произвольное b_0. Получаем ряд

$$f(z)=b_0z^{-\nu-1}\left\{1+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2(2\nu+3)}z^{-2}+\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{2\cdot4(2\nu+3)(2\nu+5)}z^{-4}+\ldots\right\}=$$
$$=b_0z^{-\nu-1}F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2}+\nu;z^{-2}\right). \tag{104}$$

Ряды (103) и (104) определяют частные решения (99), сходящиеся при $|z|>1$.

7.6.3. Полиномы Лежандра. Если параметр ν равен целому неотрицательному числу n, то все коэффициенты одного из рядов (101) или (102), начиная с определенного номера, будут равны нулю и, значит, этот ряд сведется к полиному. Если n четное число, то ряд (101) оборвется на члене n-й степени; если же n — нечетное число, то ряд (102) оборвется на члене $(n-1)$-й степени. Если положить

$$a_0=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots n},\quad a_1=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots n}{2\cdot4\cdot6\ldots(n-1)},$$

то при $z=1$ оба полинома будут принимать значения, равные единице.

Полученные таким образом полиномы называются полиномами Лежандра $P_n(z)$. Расположенные по возрастающим степеням z, они имеют вид (n — любое):

$$P_n(z)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!}\left\{z^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-4}-\ldots\right\}. \qquad (105)$$

7.6.4. Производящая функция полиномов Лежандра. Пусть A и M — две точки, расположенные соответственно на расстоянии r и r' от начала координат O (рис. 7.40). Расстояние AM равно $(r^2-2rr'\cos\theta+r'^2)^{1/2}$, т. е.

$$AM=r'(h^2-2h\cos\theta+1)^{1/2}$$

или

$$AM=r(h^2-2h\cos\theta+1)^{1/2},$$

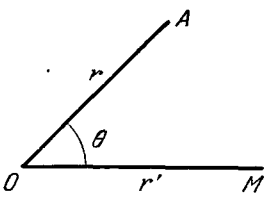


Рис. 7.40.

где через h обозначается отношение $\frac{r}{r'}$ при $r'>r$ и отношение $\frac{r'}{r}$ при $r'<r$. Следовательно, величина h в обоих случаях меньше единицы. Ньютоновский потенциал в точке A, находящейся на расстоянии r от начала координат, вызванный единичной массой, помещенной в точку M на расстоянии r' от начала координат, выражается формулой

$$\frac{1}{AM}=\begin{cases}\frac{1}{r}(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{1}{2}}, & h=\frac{r'}{r}\text{ при }r'<r,\\ \frac{1}{r'}(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{1}{2}}, & h=\frac{r}{r'}\text{ при }r'>r.\end{cases}$$

Разложим $(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд по возрастающим степеням h. Тогда коэффициент при h^n дается разложением (105), в котором z заменено на $\cos\theta$, т. е.

$$(1-2h\cos\theta+h^2)^{-1/2}=P_0(\cos\theta)+hP_1(\cos\theta)+\ldots+h^nP_n(\cos\theta)+\ldots \qquad (106)$$

Это выражение оправдывает название коэффициентов Лежандра, данное полиномам $P_n(\cos\theta)$.

Итак, коэффициенты Лежандра входят в распределение ньютоновских потенциалов на шаре (п. 7.6.26). Они входят также в выражение для потенциала электрического диполя. В самом деле, пусть даны два электриче-

ских заряда, равных по величине и противоположных по знаку, отстоящих друг от друга на расстоянии $2r'$. Потенциал в точке M (рис. 7.41) равен

$$V = q\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right).$$

Эта формула, согласно предыдущему расчету, может быть написана в виде

$$V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(-\cos\theta)\right].$$

Предположим сначала, что $r > r'$; тогда $h = \frac{r'}{r}$. Так как $P_n(x)$ в соответствии со своим индексом — функция четная или нечетная, то потенциал в окончательном виде равен

$$V = \frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty} h^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

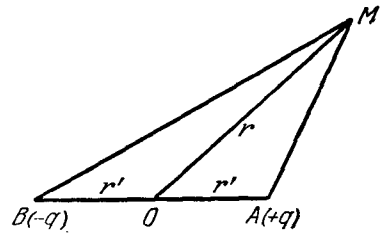


Рис. 7.41.

Для перехода к случаю $r < r'$ достаточно в полученной формуле заменить r на r', обозначив через h отношение $\frac{r}{r'}$.

Функция $(1 - 2hz + h^2)^{-1/2}$ называется производящей функцией полиномов Лежандра.

С помощью разложения в ряд Тейлора по r' при $r' = 0$, учитывая, что

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{AM}}{\partial r'}\right|_{r'=0} = -\left.\frac{\partial \frac{1}{AM}}{\partial z}\right|_{r'=0},$$

и полагая $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, находим

$$\frac{1}{AM} = \{(z - r')^2 + x^2 + y^2\}^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r'^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

и, сравнив с выражением (106), получаем

$$P_n(z) = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Иногда может оказаться удобным разложить $P_n(\cos\theta)$ по косинусам углов, кратных θ. Для этого запишем производящую функцию в виде

$$(1 - he^{j\theta})^{-\frac{1}{2}}(1 - he^{-j\theta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Биномиальные ряды для обоих двучленов абсолютно сходятся. Поэтому искомое разложение можно получить непосредственным перемножением биномиальных рядов. Вычисления дают

$$P_n(\cos\theta) = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\left\{\cos n\theta + \frac{1\cdot n}{1\cdot(2n-1)}\cos(n-2)\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + \ldots\right\}. \quad (107)$$

7.6.5. Примеры полиномов Лежандра. Если в выражениях (105) и (107) последовательно приравнять $n=0, 1, 2, \ldots, 7$, то найдем:

$$P_0(z)=1,$$
$$P_1(z)=z,$$
$$P_2(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1),$$
$$P_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z),$$
$$P_4(z)=\frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3),$$
$$P_5(z)=\frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z),$$
$$P_6(z)=\frac{1}{16}(231z^6-315z^4+105z^2-5),$$
$$P_7(z)=\frac{1}{16}(429z^7-693z^5+315z^3-35z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_0(\cos\theta)=1,$$
$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$
$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1),$$
$$P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta),$$
$$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9),$$
$$P_5(\cos\theta)=\frac{1}{128}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta),$$
$$P_6(\cos\theta)=\frac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50),$$
$$P_7(\cos\theta)=\frac{1}{1024}(429\cos 7\theta+231\cos 5\theta+189\cos 3\theta+175\cos\theta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.6.6. Представление полиномов Лежандра через определенный интеграл. Формула Лапласа. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

В этой формуле положим

$$a=1-hz,\quad b=\mp h\sqrt{z^2-1},$$

предполагая h таким, что $\left|h\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)\right|<1$. Разложим обе части полученного тождества по возрастающим степеням h, используя разложение (106) (считаем здесь, что $|z|<1$). Приравняв в обеих частях тождества коэффициенты при h^n, получим формулу Лапласа

$$P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \qquad (108)$$

Введенное выше ограничение $|z|<1$ можно отбросить. В самом деле, формула (108) представляет равенство между полиномами, так как интегралы от нечетных степеней $\cos\varphi$ равны нулю. Следовательно, (108) справедлива для всех комплексных z.

Если h таково, что $|h(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)|>1$, то обе части исходного тождества можно разложить по возрастающим степеням $\frac{1}{h}$. Приравнивая в обеих частях тождества коэффициенты при $\frac{1}{h^n}$, получим

$$P_n(z)=\pm\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}. \tag{109}$$

Знак перед интегралом совпадает со знаком $\mathrm{R}(z)$.

7.6.7. Рекуррентные формулы. Продифференцируем по h обе части равенства

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(z). \tag{110}$$

Тогда

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}(z-h)=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(z) \tag{111}$$

или

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}(z-h)=(1-2hz+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(z).$$

Используем в левой части этого равенства формулу (110). Имеем

$$(z-h)\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(z)=(1-2hz+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(z).$$

Приравнивая коэффициенты при h^n, получаем рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0. \tag{112}$$

Продифференцируем уравнение (110) по z. Тогда

$$h(1-2hz+h^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\frac{d}{dz}P_n(z).$$

Если учесть равенство (111), то

$$\sum_{n=0}^{\infty}nh^nP_n(z)=(z-h)\sum_{n=0}^{\infty}h^n\frac{d}{dz}P_n(z),$$

и, приравнивая коэффициенты при h^n, получаем рекуррентное соотношение

$$z\frac{d}{dz}P_n(z)-\frac{d}{dz}P_{n-1}(z)=nP_n(z). \tag{113}$$

Продифференцируем формулу (112):

$$(n+1)\frac{d}{dz}P_{n+1}(z)-(2n+1)P_n(z)-(2n+1)z\frac{d}{dz}P_n(z)+$$
$$+n\frac{d}{dz}P_{n-1}(z)=0. \tag{114}$$

Исключая $\frac{d}{dz}P_{n-1}(z)$ из (113) и (114), получаем рекуррентную формулу

$$\frac{d}{dz}P_{n+1}(z) - z\frac{d}{dz}P_n(z) = (n+1)P_n(z). \tag{115}$$

7.6.8. Формула Родрига. Функция

$$y = (z^2-1)^n$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(z^2-1)y'' + 2z(1-n)y' - 2ny = 0. \tag{116}$$

Продифференцируем это уравнение n раз по z:

$$(z^2-1)\frac{d^n}{dz^n}y'' + 2nz\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}y'' + n(n-1)\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}y'' +$$

$$+ 2(1-n)z\frac{d^n}{dz^n}y' - 2(n-1)n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}y' - 2n\frac{d^n}{dz^n}y = 0.$$

Положим

$$\frac{d^n y}{dz^n} = w.$$

Тогда предыдущее соотношение принимает вид

$$(z^2-1)w'' + 2zw' - n(n+1)w = 0,$$

а это — дифференциальное уравнение Лежандра.

Но $w(z)$ — полином n-й степени. Значит, он, с точностью до постоянного множителя, равен полиному Лежандра $P_n(z)$:

$$P_n(z) = kw(z) = k\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

В результате n-кратного дифференцирования получится $2^n n!\, z^n$, а также слагаемые, содержащие множитель z^2-1. Поэтому

$$P_n(1) = k2^n n! = 1.$$

Отсюда получаем формулу Родрига

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n. \tag{117}$$

7.6.9. Ортогональность полиномов Лежандра. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-1}^{+1} P_n(z)\, z^m\, dz \qquad (m \text{ — целое число } < n).$$

Согласно формуле (117), имеем

$$2^n n!\, I = \int_{-1}^{+1} z^m \frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n\, dz.$$

Интегрируя по частям:

$$2^n n!\, I = \left[z^m \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n\right]_{-1}^{+1} - m\int_{-1}^{+1} z^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^2-1)^n\, dz.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как производная $(n-1)$-го порядка $(z^2-1)^n$ содержит множитель z^2-1. Продолжая интегрирование по частям, получим выражение

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(z^2-1)^n\,dz = \left[\frac{d^{n-m-1}}{dz^{n-m-1}}(z^2-1)^n\right]_{-1}^{+1} = 0.$$

Следовательно, $I=0$. Отсюда вытекает, что интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(z)P_n(z)\,dz$$

равен нулю, если $\varphi(z)$ — полином степени, меньшей n. Если, в частности, $\varphi(z)$ — полином Лежандра, то

$$\int_{-1}^{+1} P_m(z)P_n(z)\,dz = 0 \qquad (m \neq n), \tag{118}$$

что и доказывает ортогональность полиномов Лежандра.

Вычислим

$$J = \int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2\,dz.$$

Формула (117) позволяет написать

$$J = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1} \frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}\,\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}\,dz.$$

Интегрируем n раз по частям. Заметив, что все внеинтегральные члены равны нулю, получим

$$J = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n\,\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^n\,dz.$$

Но

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^n = (2n)!$$

и

$$\int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n\,dz = 2\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}.$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(z)]^2\,dz = \frac{2}{2n+1}. \tag{119}$$

Функции, удовлетворяющие условиям Дирихле (п. 2.1.2), можно разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(z) = a_0 + a_1P_1(z) + \ldots + a_kP_k(z) + \ldots$$

Коэффициенты a_k, очевидно, равны

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(z)P_k(z)\,dz. \tag{120}$$

7.6.10. Некоторые значения полиномов Лежандра. Как указано в п. 7.6.3, полином (105) равен единице при $z=1$. Это легко проверяется с помощью формулы (110). Положим в (110) $z=1$. Учитывая, что

$$(1-2h+h^2)^{-\frac{1}{2}}=(1-h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n,$$

получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\,h^n=\sum_{n=0}^{\infty}h^n,$$

из которого сразу следует $P_n(1)=1$.

Заменим в (110) z на $-z$. Это можно сделать двумя способами:

$$[1-2h(-z)+h^2]^{-1/2}=[1-2(-h)z+h^2]^{-1/2}.$$

Приравнивая соответствующие правые части разложений, получим

$$P_n(-z)=(-1)^nP_n(z). \tag{121}$$

Отсюда, в частности,

$$P_n(-1)=(-1)^n.$$

Положим в (110) $z=0$, затем разложим левую часть в ряд и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях h. В результате получим

$$P_{2p+1}(0)=0,\quad P_{2p}(0)=(-1)^p\frac{1\cdot3\ldots(2p-1)}{2\cdot4\ldots2p}. \tag{122}$$

7.6.11. Корни полиномов Лежандра. В п. 6.2.11 мы показали, что корни решений дифференциального линейного уравнения просты. Следовательно, корни полиномов Лежандра просты. Функция $g(z)=(z^2-1)^n$ имеет n корней, равных $+1$, и n корней, равных -1. Функция $g'(z)$, очевидно, имеет $n-1$ корней, равных $+1$, $n-1$ корней, равных -1, и, как следует из теоремы Ролля, один корень между -1 и $+1$. Продолжая это рассуждение, получим, что полином n-й степени $g^{(n)}(z)$ имеет n корней, заключенных между -1 и $+1$, и, естественно, ни одного корня, равного -1 или $+1$. В силу формулы Родрига (117), это — корни $P_n(z)=0$. Следовательно, все корни $P_n(z)$ простые и находятся между -1 и $+1$.

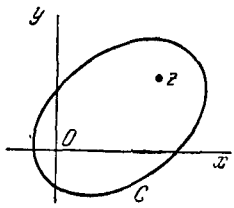


Рис. 7.42.

7.6.12. Интеграл Шлефли. Пусть z — аффикс точки комплексной плоскости переменной t. Рассмотрим интеграл, взятый по контуру C (рис. 7.42):

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}\,dt. \tag{123}$$

Если $\nu=n$ — целое положительное число или нуль, то этот интеграл представляет собой полином Лежандра $P_n(z)$. Действительно, интеграл (123) равен вычету кратного полюса порядка $n+1$ при $t=z$, т. е. (п. 1.3.13)

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\right]_{t=z},$$

который, в свою очередь, согласно формуле (117), равен $P_n(z)$. Интеграл (123) называется интегралом Шлефли.

7.6.13. Обобщение полиномов Лежандра. Полиномы Гегенбауера. Мы установили, что полиномы Лежандра могут рассматриваться как коэффициенты при различных степенях h в степенном ряде функции

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (h<1).$$

Полином Гегенбауера n-й степени с индексом p определяется как коэффициент при h^n в степенном ряде функции

$$(1-2hz+h^2)^{-p}=\sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^p(z).$$

Случай $p=1/2$, очевидно, соответствует полиномам Лежандра:

$$C_n^{\frac{1}{2}}(z)=P_n(z).$$

Способом, аналогичным способу установления рекуррентных формул для полиномов Лежандра, получаем соотношения

$$2zC_n^{p+1}(z)-2C_{n-1}^{p+1}(z)=\frac{n+1}{p}C_{n+1}^p(z),$$

$$\frac{d}{dz}C_n^p(z)=2pC_{n-1}^{p+1}(z).$$

Полиномы Гегенбауера представляют собой решение дифференциального уравнения

$$(z^2-1)y''+(2p+1)zy'-n(n+2p)y=0$$

и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^{p-\frac{1}{2}}C_n^p(z)\,C_m^p(z)\,dz=0 \qquad (m\neq n).$$

Замечание. При $p=0$ полиномы Гегенбауера C_n^0 определяются разложением в степенной ряд функции

$$\ln(1-2hz+h^2)=\sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^0(z).$$

7.6.14. Функции Лежандра первого рода. По определению, функция Лежандра первого рода $P_\nu(z)$ представляет собой решение дифференциального уравнения (99), принимающее при $z=1$ значение 1.

Если в уравнении (99) произвести замену переменной $\zeta=\frac{1-z}{2}$, то оно принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2f}{d\zeta^2}+(1-2\zeta)\frac{df}{d\zeta}+\nu(\nu+1)f=0. \qquad (124)$$

Это частный случай дифференциального уравнения, определяющего гипергеометрическую функцию Гаусса (см. пример из п. 6.2.10), при $\alpha=-\nu$, $\beta=\nu+1$, $\gamma=1$, $x=\frac{1-z}{2}$.

Придадим постоянной a_0 значение 1, тогда

$$P_\nu(z)=F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

или, в виде ряда,

$$P_\nu(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu-n+1)(\nu-n+2)\dots(\nu+n)}{(n!)^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n. \qquad (125)$$

Если ν равно целому положительному числу n или целому отрицательному числу $-n-1$, то ряд обрывается на члене, содержащем $(1-z)^n$. Располагая этот полином по степеням z, мы опять получаем полином Лежандра $P_n(z)$, определяемый формулой (105).

Если $P_\nu(z)$ — решение (99), то $P_\nu(-z)$ также будет его решением. Предположим, что $P_\nu(z)$ и $P_\nu(-z)$ линейно независимы. В этом случае общий интеграл (99) будет

$$f(z)=AP_\nu(z)+BP_\nu(-z).$$

Рассмотрим вопрос о линейной независимости $P_\nu(-z)$ и $P_\nu(z)$. Для этого изучим поведение $P_\nu(z)$, когда z стремится к -1, или, при замене переменной $z=\cos\theta$, поведение $P_\nu(\cos\theta)$, когда θ стремится к π. При этой замене переменной уравнение (99) приобретает вид

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{df}{d\theta}+\nu(\nu+1)f=0. \qquad (126)$$

Если ограничиться рассмотрением значений θ, очень близких к нулю, то общее решение уравнения (126) будет очень близким к общему решению уравнения

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+\frac{1}{\theta}\frac{df}{d\theta}+\nu(\nu+1)f=0,$$

равному

$$CJ_0\left(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)}\right)+DY_0\left(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)}\right).$$

Это решение бесконечно возрастает, если θ приближается к нулю. Так как при $\theta\to 0$ функция $P_\nu(\cos\theta)$ стремится к $+1$, то $P_\nu(z)$ и $P_\nu(-z)$ линейно независимы только в случае, если $P_\nu(-z)$ бесконечно возрастает при $z\to 1$. Согласно (125), это имеет место при ν нецелых, и, как нетрудно убедиться, порядок возрастания $P_\nu(z)$ при $z\to -1$ тот же, что и у функции

$$\ln\frac{1+z}{2}=\frac{1}{2}\ln\cos\frac{\theta}{2}. \qquad (127)$$

Так как обе функции $P_\nu(\cos\theta)$ и $J_0\left(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)}\right)$ принимают одинаковое значение $+1$ при $\theta=0$, то $J_0\left(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)}\right)$ можно рассматривать как апроксимацию $P_\nu(\cos\theta)$ при малых значениях θ.

Если ν равно целому числу n, то дело обстоит иначе. Действительно, в силу формулы (121),

$$P_n(-z)=(-1)^nP_n(z),$$

и общее решение уже не будет равно

$$AP_n(z)+BP_n(-z),$$

так как $P_n(z)$ не возрастает бесконечно, если z стремится к -1, а принимает значение $(-1)^n$. Следует ввести другое решение $Q_n(z)$, линейно независимое от $P_n(z)$. При этом общее решение будет

$$AP_n(z)+BQ_n(z).$$

Это решение $Q_n(z)$, называемое функцией Лежандра второго рода, определяется в конце п. 7.6.19.

Ряд (125) достаточно быстро сходится только при $z > 0$. При $z < 0$ им неудобно пользоваться для вычисления $P_\nu(z)$, особенно при z, близких к -1. Гобсон нашел разложение $P_\nu(z)$, быстро сходящееся при $-1 < z < 0$, для значений индекса ν, не слишком больших по сравнению с единицей:

$$P_\nu(z) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi}\left\{\left[\ln\frac{1+z}{2} + 2\gamma + \psi(\nu) + \psi(-\nu-1)\right]P_\nu(-z) + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma(\nu+r+1)}{\Gamma(\nu-r+1)(r!)^2}\varphi(\nu, r)\left(\frac{1+z}{2}\right)^r\right\}, \quad (128)$$

где

$$\varphi(\nu, r) = \left[\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{\nu+r}\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{-\nu} + \frac{1}{-\nu+1} + \ldots + \frac{1}{-\nu+r+1}\right] - 2\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right]. \quad (129)$$

Здесь $\psi(\nu)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(1+\nu)$, а γ — постоянная Эйлера (см. п. 7.4.1 и последующие).

Если индекс близок к нулю или единице, иначе говоря, равен ε или $1+\varepsilon$ (ε мало), то можно написать

$$P_\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon \ln\frac{z+1}{2}, \quad (130)$$

$$P_{\varepsilon+1}(z) = z + \varepsilon\left[z - 1 + z\ln\frac{z+1}{2}\right] \quad (131)$$

с погрешностью, меньшей ε^2 при $-1 < z < +1$. Функции, соответствующие индексу $\nu = n + \varepsilon$, можно получить из двух предыдущих, если несколько раз применить рекуррентную формулу (134).

7.6.15. Описание поверхности $y = P_\nu(\cos\theta)$. Поверхность $y = P_\nu(\cos\theta)$ (рис. 7.43) проходит через прямую $y = 1$, $\theta = 0$. Плоскость, касающаяся поверхности по этой прямой, параллельна плоскости координат $\theta\nu$. Кривые — сечения поверхности $y = P_\nu(\cos\theta)$ плоскостями $\nu = \text{const}$ — удаляются от касательной плоскости тем скорее, чем больше ν. Обозначим через n ближайшее целое число, меньшее ν. Если θ стремится к π, эти кривые стремятся после n колебаний к $(-1)^{n+1}\infty$, за исключением случая, когда ν равно целому числу n, — тогда они стремятся к $(-1)^{n+1}$. Скорость бесконечного возрастания кривой тем больше, чем ближе ν к целому числу, и, при прочих равных условиях, чем ν больше.

В заключение отметим, что рассматриваемую поверхность можно представить в виде полуполосы шириной π, бесконечной в направлении возрастающих ν. Эта поверхность по мере удаления от оси θ разделяется на ленты шириной в единицу. Каждая из лент образует тем большее число складок, чем больше ν; ленты попеременно стремятся к $+\infty$ и $-\infty$ вдоль плоскости $\theta = \pi$.

7.6.16. Корни функций Лежандра первого рода. При решении в сферических координатах задач теории потенциала обычно применяются функции Лежандра $P_\nu(\cos\theta)$. В этих задачах часто приходится вводить следующее граничное условие: потенциальная функция обращается в нуль на поверхности конуса с вершиной в начале координат, образующая которого составляет с осью (прямой $\theta = \pi$) угол θ_0. Произведения Лапласа, образующие потенциальную функцию, содержат $P_\nu(\cos\theta)$, где ν принимает такие значения, что $P_\nu(\cos\theta_0) = 0$.

На рис. 7.44 по оси абсцисс отложены значения $z_0 = \cos\theta_0$, а по оси ординат — значения индексов ν. Кривые на этом рисунке устанавливают связь между z_0 и значениями $\nu = \nu_k (\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots)$, для которых $P_\nu(z_0) = 0$,

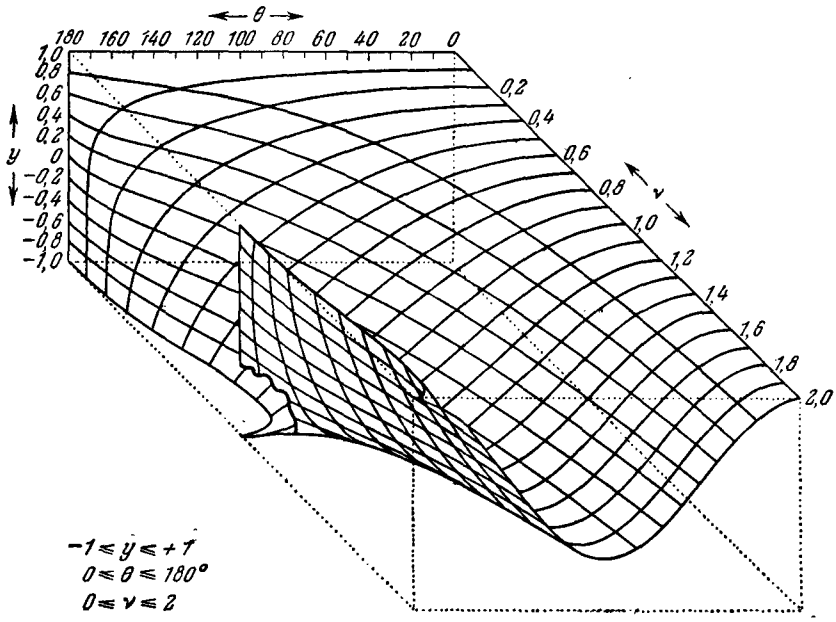


Рис. 7.43.

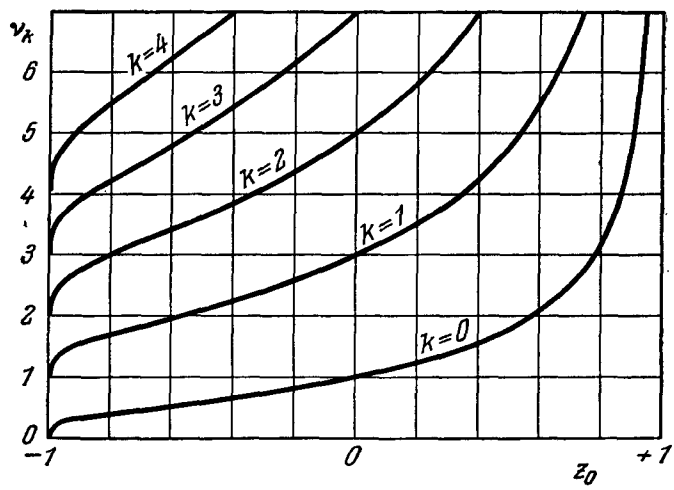


Рис. 7.44.

т. е. рисунок позволяет при любом фиксированном z_0 определить $\nu = \nu_k$ — последовательные корни $P_\nu(z_0) = 0$. Рисунок недостаточно точен для z_0, близких к —1, т. е. для очень острых конусов. Это важный для приложений случай, так как часто возможно отождествлять с такими конусами тонкие провода. Здесь можно использовать приближенную формулу, которую

мы получим из (128). В самом деле, при z_0+1, близких к нулю, в (128) можно пренебречь суммой и, пользуясь известными свойствами функции ψ (п. 7.4.4), для ν и z_0, удовлетворяющих уравнению $P_\nu(z_0)=0$, находим

$$\ln\frac{z_0+1}{2}+2\gamma+2\psi(\nu)+\pi\operatorname{ctg}\pi\nu=0. \tag{132}$$

Это уравнение нетрудно решить графически.

Для очень малых z_0+1 (меньше 1/100) можно вывести приближенную формулу, определяющую разность между значением индекса ν_n и его порядковым номером n:

$$\frac{1}{\nu_n-n}=\ln\frac{2}{1+z_0}-2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \tag{133}$$

7.6.17. Рекурреитные формулы. Выражение

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)P_\nu(z)+\nu P_{\nu-1}(z),$$

согласно ряду (125), равно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu-n+1)\ldots(\nu+n)}{(n!)^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\frac{2n^2(2\nu+1)}{(\nu-n+1)(\nu+n)}$$

или

$$(z-1)(2\nu+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu-n+2)\ldots(\nu+n-1)}{[(n-1)!]^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}=(z-1)(2\nu+1)P_\nu(z).$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zP_\nu(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=0, \tag{134}$$

обобщающую формулу (112), которая была выведена для полиномов Лежандра.

Составим выражение $\frac{d}{dz}P_{\nu+1}(z)-\frac{d}{dz}P_{\nu-1}(z)$. Оно равно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu-n+2)\ldots(\nu+n-1)}{(n!)^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}n^2(2\nu+1).$$

Отсюда получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\frac{d}{dz}P_{\nu+1}(z)-\frac{d}{dz}P_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)P_\nu(z). \tag{135}$$

Продифференцировав по z тождество (134), определим выражение $\frac{d}{dz}P_{\nu-1}(z)$. Подставив его в (135), имеем

$$\frac{d}{dz}P_{\nu+1}(z)-z\frac{d}{dz}P_\nu(z)=(\nu+1)P_\nu(z) \tag{136}$$

— рекуррентное соотношение, обобщающее (115).

Вычтем равенство (136) из (135). Получаем формулу, обобщающую (113):

$$z\frac{d}{dz}P_\nu(z)-\frac{d}{dz}P_{\nu-1}(z)=\nu P_\nu(z). \tag{137}$$

Умножив уравнение (137) на z и вычтя из него уравнение (136), в котором предварительно ν заменено на $\nu-1$, получаем формулу

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}P_\nu(z)=\nu zP_\nu(z)-\nu P_{\nu-1}(z),$$

которая, конечно, справедлива и для полиномов Лежандра.

7.6.18. Определение функции Лежандра первого рода через интеграл Коши. Рассмотрим интеграл Шлефли (123). Подставив его в дифференциальное уравнение Лежандра, получим после несложных преобразований *)

$$\frac{\nu+1}{2\pi j}\frac{1}{2^\nu}\int_C \frac{d}{dt}\left\{\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right\}dt=0.$$

Если ν — целое положительное число, то полученное равенство удовлетворяется. Это подтверждает то, что уже нам известно: интеграл Шлефли представляет собой решение дифференциального уравнения Лежандра. Функция

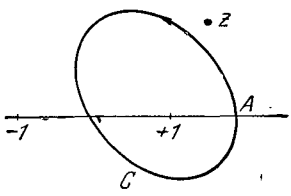


Рис. 7.45.

$$W=\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}, \tag{138}$$

если ν — целое положительное, при полном обходе контура C принимает первоначальное значение. В этом случае интеграл Шлефли, как показано в п. 7.6.12, совпадает с полиномом Лежандра $P_n(z)$.

Пусть ν — не целое число. Тогда интеграл Шлефли позволяет дать другое определение функции Лежандра первого рода.

Рассмотрим функцию (138). Она имеет три особые точки (точки разветвления): $t=1$, $t=-1$, $t=z$. Предположим, что контур C окружает

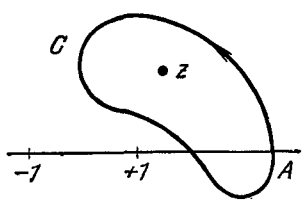


Рис. 7.46.

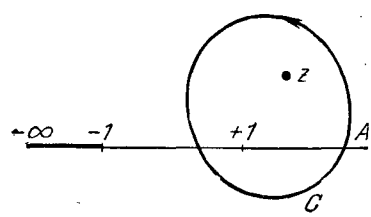


Рис. 7.47.

только точку $t=1$. Если, исходя из точки A (рис. 7.45), обойти этот контур в положительном направлении, то новое значение функции w в точке A равно первоначальному, умноженному на

$$e^{2\pi j(\nu+1)}.$$

Если же контур C окружает только точку $t=z$ (рис. 7.46), то при обходе этого контура в положительном направлении функция w приобретает множитель

$$e^{-2\pi j(\nu+2)}.$$

Значит, если контур C окружает две особые точки $t=1$ и $t=z$ (рис. 7.47), то при полном обходе контура функция w принимает первоначальное значение.

Следовательно, функция

$$u(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}\,dt$$

*) Ср. [1], п 141.

представляет собой решение дифференциального уравнения Лежандра, которое совпадает с полиномом Лежандра, если число ν — целое положительное. При произвольном ν эта функция определяет функцию Лежандра первого рода $P_\nu(z)$.

Чтобы добиться однозначности такого определения сферической функции, принимают, что в исходной точке A (точке пересечения контура C с осью абсцисс при $t > 1$) равны нулю аргументы $t+1$ и $t-1$, абсолютное значение аргумента $t-z$ меньше π и в плоскости t осуществлен разрез от точки $t=-1$ до точки $t=-\infty$ (рис. 7.47).

7.6.19. Функция Лежандра второго рода. Определения. Используем вычисления п. 6.2.11. Решением (99), линейно независимым от $P_n(z)$, будет

$$P_n(z)\int \frac{dz}{(1-z^2)\{P_n(z)\}^2}.$$

Поэтому общее решение (99) для целых и положительных n имеет вид

$$f(z)=AP_n(z)+BP_n(z)\int \frac{dz}{(1-z^2)\{P_n(z)\}^2}.$$

Полином Лежандра $P_n(z)$ имеет только простые вещественные корни $\alpha_r\,(r=1,\ \ldots,\ n)$, лежащие внутри интервала $(-1,\ 1)$. Поэтому можно написать

$$\frac{1}{(1-z^2)\{P_n(z)\}^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right]+\sum_{r=1}^{n}\frac{a_r}{z-\alpha_r}+\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{(z-\alpha_r)^2}.$$

Коэффициенты a_r вычисляются по формулам

$$a_r=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\alpha_r)^2}{(1-z^2)\{P_n(z)\}^2}\right]_{z=\alpha_r}=\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z^2)\{L(z)\}^2}\right]_{z=\alpha_r},$$

где

$$P_n(z)=(z-\alpha_r)L(z). \tag{139}$$

Отсюда

$$a_r=2\,\frac{\alpha_r L(\alpha_r)-(1-\alpha_r^2)L'(\alpha_r)}{(1-\alpha_r^2)^2\{L(\alpha_r)\}^3}.$$

Подставим (139) в уравнение (99) и положим затем $z=\alpha_r$. Тогда

$$(1-\alpha_r^2)L'(\alpha_r)-\alpha_r L(\alpha_r)=0.$$

Следовательно,

$$a_r=0.$$

и можно написать

$$f(z)=AP_n(z)+BP_n(z)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}-\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{z-\alpha_r}\right). \tag{140}$$

Функция Лежандра второго рода, в соответствии с формулой (140), определяется следующим образом: для вещественных z, заключенных внутри интервала $(-1,\ +1)$, по формуле

$$Q_n(z)=P_n(z)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}-\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{z-\alpha_r}\right); \tag{141}$$

для комплексных z, а также для вещественных z, находящихся вне интервала $(-1, +1)$, по формуле

$$\tilde{Q}_n(z) = P_n(z)\left(\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - \sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{z-\alpha_r}\right). \tag{142}$$

При таком определении функция Лежандра второго рода $\tilde{Q}_n(z)$ вещественна при вещественных значениях z.

Функция Лежандра второго рода имеет две точки разветвления $z=-1$ и $z=+1$. Соединяя разрезом точки $z=-1$ и $z=+1$, выделяем однозначную ветвь этой функции.

Если последовательно придавать n значения 0, 1, 2, ..., то, согласно формуле (141), находим

$$Q_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

$$Q_1(z) = \frac{z}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} - 1,$$

$$Q_2(z) = \left(\frac{3z^2}{4} - \frac{1}{4}\right)\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{3}{2}z,$$

$$Q_3(z) = \left(\frac{5z^3}{4} - \frac{3}{4}z\right)\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{5}{2}z^2 + \frac{2}{3},$$

$$Q_4(z) = \left(\frac{35}{16}z^4 - \frac{30}{16}z^2 + \frac{3}{16}\right)\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{35}{8}z^3 + \frac{55}{24}z,$$

$$Q_5(z) = \left(\frac{63}{16}z^5 - \frac{70}{16}z^3 + \frac{15}{16}z\right)\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{63}{8}z^4 + \frac{49}{8}z^2 - \frac{8}{15},$$

. . . . . .

Общая формула имеет вид

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{1+z}{1-z} - W_{n-1}(z), \tag{143}$$

где

$$W_{n-1}(z) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\ldots n}\left\{z^{n-1} + z^{n-3}\left[\frac{1}{3} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\right] + \right.$$

$$\left. + z^{n-5}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\right] - \ldots\right\} \tag{144}$$

или

$$W_{n-1}(z) = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}P_{r-1}(z)P_{n-r}(z).$$

Переход к формуле (142) при любом фиксированном n осуществляется заменой в (143) $\ln\frac{1+z}{1-z}$ на $\ln\frac{z+1}{z-1}$.

Рассмотрим ряд (104), определяющий решение (99) для всех значений z, удовлетворяющих условию $|z|>1$. Легко убедиться, что функция, заданная рядом (104), при $\nu=n$, где n — целое положительное число, совпадает с функцией $\tilde{Q}_n(z)$ с точностью до постоянного коэффициента

$$b_0 = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}.$$

Ряд (104) можно взять в качестве определения функции $\tilde{Q}_\nu(z)$ при произвольном ν, полагая множитель b_0 равным

$$\frac{1}{2^{\nu+1}} B\left(\frac{1}{2}, \nu+1\right).$$

B — эйлерова функция первого рода, определенная в п. 7.4.6.

Пусть ν — целое положительное число и $-1 < z < +1$. Тогда можно показать, что функция Лежандра второго рода (141) совпадает с функцией, определенной тем рядом (101) или (102), который не вырождается в полином Лежандра, если положить

$$a_0 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots (n-1)}{1 \cdot 3 \ldots n} \quad (n \text{ — нечетное число}),$$

$$a_1 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots n}{1 \cdot 3 \ldots (n-1)} \quad (n \text{ — четное число}).$$

Аналогично тому, как это было сделано для бесселевых функций, можно определить функцию Лежандра второго рода с помощью пределов:

$$Q_n(z) = \lim_{\nu \to n} \frac{P_\nu(z) \cos \pi\nu - P_\nu(-z)}{\sin \pi\nu},$$

$$\tilde{Q}_n(z) = \lim_{\nu \to n} \frac{P_\nu(z) e^{-j\pi\nu} - P_\nu(-z)}{\sin \pi\nu}.$$

Используя ряд (104) и повторяя рассуждения п. 7.6.17, можно показать, что функция $Q_\nu(z)$ подчиняется тем же рекуррентным соотношениям, что и $P_\nu(z)$. Следовательно, эти соотношения справедливы для любого интеграла (99). С помощью указанных выше формул определения нетрудно установить, что функции Q принимают следующие значения:

$$Q_{2p}(0) = 0, \qquad Q_{2p+1}(0) = (-1)^{p+1} \frac{2 \cdot 4 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \ldots (2p+1)};$$

$$Q_{2p}(+1) = Q_{2p+1}(+1) = +\infty;$$

$$Q_{2p}(-1) = -\infty, \qquad Q_{2p+1}(-1) = +\infty;$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \tilde{Q}_n(z) = 0.$$

7.6.20. Определение функции Лежандра второго рода через интеграл Коши. Мы видели в п. 7.6.18, что дифференциальное уравнение Лежандра (99) допускает в качестве решения криволинейный интеграл от функции

$$\frac{1}{2^\nu} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}},$$

взятый по такому контуру (комплексной плоскости t), что при его обходе функция (138) остается однозначной. Можно определить контур, отличный от контура, приведенного на рис. 7.45, который обладал бы тем же свойством. Мы видели, что при полном обходе в положительном направлении вокруг точки разветвления $t = +1$ функция (138) умножается на $e^{2\pi j(\nu+1)}$. Ясно, что при обходе точки разветвления $t = -1$ в отрицательном направлении та же функция (138) умножается на $e^{-2\pi j(\nu+1)}$. Следовательно, если в качестве контура Γ взять любую кривую, имеющую форму восьмерки

и окружающую точки $t=+1$ и $t=-1$ (но не $t=z$), как показано на рис. 7.48, то криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{(t^2-1)^{\nu}}{2^{\nu}(t-z)^{\nu+1}}\,dt \tag{145}$$

будет удовлетворять дифференциальному уравнению Лежандра. Это позволит определить функцию Лежандра второго рода $\tilde{Q}_{\nu}(z)$ для любых значений индекса ν и (за счет выбора допустимого контура) произвольных значений аргумента z вне отрезка $[-1, +1]$.

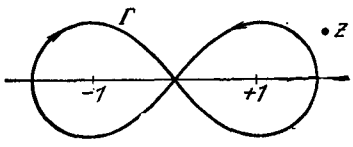


Рис. 7.48.

Замечание. Из рассуждений предыдущих пунктов следует, что из всех уравнений Лежандра (99) только уравнение с ν, равным целому числу n, допускает ограниченное решение в замкнутом интервале $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Это решение единственное, оно совпадает с полиномом Лежандра $P_n(z)$.

Если значение $z=-1$ исключено, то при произвольном ν существует единственное конечное решение, совпадающее с $P_{\nu}(z)$.

Решение уравнения Лежандра, стремящееся к нулю при бесконечно возрастающем $|z|$, дают только функции Лежандра второго рода.

7.6.21. Присоединенные функции Лежандра. Рассмотрим дифференциальное уравнение (98). Подставив в него

$$f(z)=(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}\,y(z),$$

получим

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2(\mu+1)\,z\frac{dy}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\,y=0. \tag{146}$$

Положим $\zeta=\frac{1-z}{2}$, тогда

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2y}{d\zeta^2}+[(\mu+1)-2(1+\mu)\zeta]\frac{dy}{d\zeta}-(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)\,y=0.$$

Это гипергеометрическое уравнение Гаусса. Возьмем его второе решение (пример п. 6.2.10) в качестве определения присоединенной функции Лежандра первого рода. Имеем

$$P_{\nu}^{\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)$$

при $-1<z<+1$ и

$$\tilde{P}_{\nu}^{\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\ \nu+1,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right)$$

при z, лежащем вне отрезка $[-1, +1]$.

Из вида уравнения (98) следует, что $P_{\nu}^{\mu}(-z)$ также является его решением. Если $\nu+\mu$ — не целое число, то это решение линейно независимо от $P_{\nu}^{\mu}(z)$. Предположим, что это так. Тогда общий интеграл (98) будет

$$f(z)=AP_{\nu}^{\mu}(z)+BP_{\nu}^{\mu}(-z). \tag{147}$$

В приложениях переменная z обычно вещественна и заключена между -1 и $+1$; тогда можно положить, что

$$z=\cos\theta.$$

Дифференциальное уравнение (98) относительно новой переменной θ имеет вид

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{df}{d\theta}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]f=0.$$

Если значения θ близки к 0, то общий интеграл этого уравнения

$$AP_\nu^\mu(\cos\theta)+BP_\nu^\mu(-\cos\theta)$$

будет близок к общему интегралу уравнения

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+\frac{1}{\theta}\frac{df}{d\theta}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{\theta^2}\right]f=0,$$

равному $CJ_\mu(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)})+DY_\mu(\theta\sqrt{\nu(\nu+1)})$.

Если $\nu+\mu$ — целое число, то решения $P_\nu^\mu(\cos\theta)$ и $P_\nu^\mu(-\cos\theta)$ линейно зависимы, так как эти функции связаны равенством

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=(-1)^{\nu+\mu}P_\nu^\mu(-\cos\theta),$$

и выражение (147) уже не дает общего интеграла уравнения (98).

Определим присоединенную функцию Лежандра второго рода $Q_\nu^\mu(z)$ как предел выражения

$$\frac{\pi}{2}\frac{P_\nu^\mu(\cos\theta)\cos(\nu+\mu)\pi-P_\nu^\mu(-\cos\theta)}{\sin(\nu+\mu)\pi}$$

при $\nu+\mu$, стремящемся к целому числу. Легко заметить, что введенная функция $Q_\nu^\mu(z)$ бесконечна на обоих концах промежутка $[-1, +1]$. Следовательно, не существует индексов, для которых уравнение (98) имеет конечное решение в промежутке

$$-1\leqslant z\leqslant+1.$$

Можно также определить присоединенную функцию Лежандра второго рода при любых индексах с помощью разложения в ряд по убывающим степеням переменной.

Положим в уравнении (146) $\zeta=z^2$. Тогда оно принимает вид

$$4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2y}{d\zeta^2}+[2-(4\mu+6)\zeta]\frac{dy}{d\zeta}-(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)y=0.$$

Это уравнение гипергеометрического типа, допускающее в качестве частного решения следующее выражение, которое мы возьмем за определение присоединенной функции Лежандра второго рода $\tilde{Q}_\nu^\mu$ при $|z|>1$:

$$\tilde{Q}_\nu^\mu(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{z^{\nu+\mu+1}}F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\ \frac{\nu+\mu+2}{2},\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right).$$

Обычно условия регулярности, которым должны удовлетворять решения уравнения (98), автоматически выполняются при целых индексах ν и μ. Соответствующие функции имеют важное значение, и в дальнейшем мы будем рассматривать только такие функции.

7.6.22. Присоединенные функции Лежандра для целых положительных индексов. Предположим сначала, что z вещественное $(-1\leqslant z\leqslant+1)$ или соответственно $z=\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. Сделаем подстановку

$$f(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}y(z)$$

в дифференциальное уравнение (97). Функция $y(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2(m+1)z\frac{dy}{dz}+(n-m)(m+n+1)y=0.$$

Оно совпадает с дифференциальным уравнением Лежандра, продифференцированным m раз, в котором производная m-го порядка взята за новую функцию. Отсюда

$$y(z)=\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) \quad \text{или} \quad y(z)=\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z).$$

Первая из этих функций — m-я производная полинома Лежандра $P_n(z)$ — это полином $(n-m)$-й степени, известный под названием функции Гельмгольца. Конечно, если $m>n$, то функция Гельмгольца равна нулю. Таким образом, получены частные решения[1]) дифференциального уравнения (97):

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z), \tag{148}$$

$$Q_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z). \tag{149}$$

Используя (105), находим

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\left\{z^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}z^{n-m-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-m-4}\ldots\right\}. \tag{150}$$

Отсюда получаем таблицу присоединенных функций:

$P_1^1(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$	$P_1^1(\cos\theta)=\sin\theta$
$P_2^1(z)=3(1-z^2)^{\frac{1}{2}}z$	$P_2^1(\cos\theta)=\frac{3}{2}\sin 2\theta$
$P_2^2(z)=3(1-z^2)$	$P_2^2(\cos\theta)=\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$
$P_3^1(z)=\frac{3}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(5z^2-1)$	$P_3^1(\cos\theta)=\frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin 3\theta)$
$P_3^2(z)=15(1-z^2)z$	$P_3^2(\cos\theta)=\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)$
$P_3^3(z)=15(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$	$P_3^3(\cos\theta)=\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)$
$P_4^1(z)=\frac{5}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(7z^3-3z)$	$P_4^1(\cos\theta)=\frac{5}{16}(2\sin 2\theta+7\sin 4\theta)$
$P_4^2(z)=\frac{15}{2}(1-z^2)(7z^2-1)$	$P_4^2(\cos\theta)=\frac{15}{16}(3+4\cos 2\theta-7\cos 4\theta)$
$P_4^3(z)=105(1-z^2)^{\frac{3}{2}}z$	$P_4^3(\cos\theta)=\frac{105}{8}(2\sin 2\theta-\sin 4\theta)$
$P_4^4(z)=105(1-z^2)^2$	$P_4^4(\cos\theta)=\frac{105}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$

[1]) Для сохранения непрерывности, при определении этих функций для комплексных и нецелых значений индексов, Гобсон ввел в формулы (148) и (149) множитель $(-1)^m$.

Используя формулы (149), (143) и (144), получаем

$$Q_1^1 = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{z}{1-z^2}\right],$$

$$Q_2^1 = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{2}z\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{3z^2-2}{1-z^2}\right],$$

$$Q_2^2 = (1-z^2)\left[\frac{3}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} - \frac{3z^3-5z}{1-z^2}\right],$$

$$Q_3^1 = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{15z^2-3}{4}\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{15z^3-13z}{1-z^2}\right].$$

Единственные конечные решения (97) в интервале $-1 \leqslant z \leqslant +1$ дают функции $P_n^m(z)$.

Определим функции P_n^m и Q_n^m (см. вычисления из п. 6.3.11) для комплексных z и для вещественных z, расположенных вне промежутка $[-1, +1]$, с помощью равенств:

$$\tilde{P}_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z), \tag{151}$$

$$\tilde{Q}_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}\tilde{Q}_n(z) \tag{152}$$

(ср. с (142)). Если m — нечетное число, то, чтобы сделать функцию $\tilde{P}_n^m$ однозначной, следует в плоскости z точки -1 и $+1$ соединить разрезом. Что касается функции $\tilde{Q}_n^m$, то этот разрез уже был сделан в силу ее определения.

При больших $|z|$ имеем

$$\tilde{P}_n^m(z) \sim \frac{n!}{(n-m)!}\frac{(2z)^n}{\sqrt{n\pi}},$$

$$\tilde{Q}_n^m(z) \sim \frac{(n+m)!}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{(-1)^m}{n(2z)^{n+1}}.$$

Полезно заметить, что выражения

$$e^{-jn\pi/2}\tilde{P}_n^m(jy), \quad je^{jn\pi/2}\tilde{Q}_n^m(jy)$$

вещественны.

Свойства функций $P_n^m(z)$ аналогичны свойствам полиномов Лежандра. Равенство

$$P_n^m(z) = \frac{1}{2^n(n-m)!}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^n}{dz^n}[(z-1)^{n+m}(z+1)^{n-m}]$$

соответствует формуле Родрига, к которой оно и сводится при $m=0$. Продифференцировав m раз соотношение (106), мы убедимся, что коэффициент при h^{n-m} в разложении $(1-2hz+h^2)^{-m-\frac{1}{2}}$ равен

$$\frac{2^m m!}{(2m)!}(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}P_n^m(z).$$

Отсюда получается производящая функция для $P_n^m(z)$.

Используя функцию

$$\frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m+1}},$$

можно определить $P_n^m(z)$ через интеграл Коши, обобщающий интеграл Шлефли (123). Точно так же можно определить $P_n^m(z)$ через определенный интеграл, обобщающий интеграл Лапласа, из п. 7.6.6:

$$P_n^m(z)=(\pm 1)^m\frac{(n+m)!}{n!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right]^n\cos m\varphi\,d\varphi,$$

$$P_n^m(z)=(\mp 1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos m\varphi\,d\varphi}{\left[z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi\right]^{n+1}}.$$

Рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра выводятся в п. 7.6.23, а вопрос об ортогональности этих функций рассматривается в п. 7.6.24.

7.6.23. Рекуррентные соотношения. Функции $P_n^m(z)$ и полином $\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$ представляют собой соответственно частные решения дифференциального уравнения (97) и уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2f}{dz^2}-2(m+1)z\frac{df}{dz}+[n(n+1)-m(m+1)]f=0. \quad (153)$$

Если умножить уравнение (153) на $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$, то, в силу (148), можно написать равенство

$$P_n^{m+2}(z)-2(m+1)\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}P_n^{m+1}(z)+(n-m)(n+m+1)P_n^m=0, \quad (154)$$

представляющее собой рекуррентное соотношение между функциями

$$P_n^{m+2},\quad P_n^{m+1},\quad P_n^m.$$

Рассмотрим рекуррентную формулу (135), написанную для $\nu=n$. Это соотношение, продифференцированное $m-1$ раз, дает

$$P_{n+1}^{(m)}(z)-P_{n-1}^{(m)}(z)=(2n+1)P_n^{(m-1)}(z). \quad (155)$$

Продифференцировав m раз формулу (112), получаем

$$(n+1)P_{n+1}^{(m)}(z)-(2n+1)zP_n^{(m)}(z)-(2n+1)mP_n^{(m-1)}(z)+nP_{n-1}^{(m)}(z)=0.$$

Исключив $P_n^{(m-1)}$ из двух последних соотношений, находим

$$(2n+1)zP_n^{(m)}(z)=(n+m)P_{n-1}^{(m)}(z)+(n-m+1)P_{n+1}^{(m)}(z). \quad (156)$$

Соотношение (156), умноженное на $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$, дает рекуррентную формулу между

$$P_n^m,\quad P_{n-1}^m,\quad P_{n+1}^m$$

вида

$$(2n+1)zP_n^m(z)=(n+m)P_{n-1}^m(z)+(n-m+1)P_{n+1}^m(z). \quad (157)$$

Если в соотношении (155) заменить m на $m+1$ и результат замены умножить на $(1-z^2)^{\frac{m+1}{2}}$, то получим

$$(2n+1)\sqrt{1-z^2}P_n^m(z)=P_{n+1}^{m+1}(z)-P_{n-1}^{m+1}(z) \quad (158)$$

— рекуррентное соотношение между P_n^m, P_{n+1}^{m+1}, P_{n-1}^{m+1}.

Заменив в (154) m на $m-1$ и исключив $zP_n^m(z)$ с помощью соотношения (157), получим

$$P_n^{m+1}(z)=\frac{2m}{(2n+1)\sqrt{1-z^2}}\left[(n+m)P_{n-1}^m(z)+(n-m+1)P_{n+1}^m(z)\right]\times$$
$$\times(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1}(z) \qquad (159)$$

— рекуррентное соотношение между P_n^{m+1}, P_{n-1}^m, P_{n+1}^m, P_n^{m-1}.

Заменив в (159) $P_n^{m-1}(z)$ его выражением, полученным из (158), где $m+1$ заменено на m, найдем

$$(2n+1)\sqrt{1-z^2}P_n^{m+1}(z)=(n+m)(n+m+1)P_{n-1}^m(z)-$$
$$-(n-m)(n-m+1)P_{n+1}^m(z) \qquad (160)$$

— рекуррентное соотношение между P_n^{m+1}, P_{n-1}^m, P_{n+1}^m.

7.6.24. Ортогональность присоединенных функций Лежандра. Покажем, что функции $P_n^m(z)$ ортогональны в промежутке $[-1, +1]$, если n и m — целые положительные числа. Помножим на $P_n^m(z)$ дифференциальное уравнение (97), где f заменено на $P_s^m(z)$. Точно так же помножим на $P_s^m(z)$ дифференциальное уравнение (97), где f заменена на $P_n^m(z)$. Разность полученных выражений дает

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\left[P_s^m(z)\frac{d}{dz}P_n^m(z)-P_n^m(z)\frac{d}{dz}P_s^m(z)\right]\right\}+$$
$$+(n-s)(n+s+1)P_n^m(z)P_s^m(z)=0.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(z)P_s^m(z)=0, \qquad \text{если } n\neq s. \qquad (161)$$

На основании (148)

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}P_n^{m-1}(z)+(m-1)z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}P_n^{m-1}(z),$$

отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(z)\right]^2dz=-\int_{-1}^{+1}P_n^{m-1}(z)\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n^{m-1}(z)\right]dz-$$
$$-(m-1)\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{m-1}(z)\right]^2dz+\int_{-1}^{+1}\frac{(m-1)^2z^2}{1-z^2}\left[P_n^{m-1}(z)\right]^2dz.$$

Если учесть дифференциальное уравнение (97), которому удовлетворяет функция $P_n^m(z)$, то получим последовательно

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(z)\right]^2dz=(n-m+1)(n+m)\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{m-1}(z)\right]^2dz,$$

. . . . . .

$$\int_{-1}^{+1}\left[P_n^m(z)\right]^2dz=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{+1}\left[P_n(z)\right]^2dz$$

и, наконец,

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^m(z)]^2\, dz = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{162}$$

Из формул (161) и (162) вытекает, что функции в промежутке $[-1, +1]$ можно разлагать в ряд по присоединенным функциям Лежандра первого рода.

Чтобы получить ортонормальную [1]) систему функций, мы должны ввести нормированные присоединенные функции Лежандра первого рода (см. рис. 7.51—7.54):

$$\bar{P}_n^m(z) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(z).$$

Отметим, что при разложении в ряд по полиномам Лежандра часто используются нормированные полиномы Лежандра

$$\bar{P}_n(z) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(z).$$

7.6.25. Некоторые значения присоединенных функций Лежандра. Приложение присоединенных функций. Если n и m — целые положительные числа ($n > m$), то можно написать

$$P_n^m(-z) = (-1)^{n+m} P_n^m(z),$$

$$Q_n^m(-z) = (-1)^{n+m+1} Q_n^m(z);$$

$$P_n^{-m}(z) = \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} P_n^m(z), \qquad Q_n^{-m}(z) = \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} Q_n^m(z);$$

$$P_{-n-1}^{-m}(z) = P_n^m(z), \qquad Q_{-n-1}^{-m}(z) = Q_n^m(z),$$

а также соответствующие формулы для

$$\tilde{P}_n^m \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_n^m.$$

При $z = \pm 1$ имеем

$$P_n^m(\pm 1) = 0, \quad Q_n^m(\pm 1) = \infty.$$

Если $n - m$ — нечетное число, то

$$P_n^m(0) = 0, \quad Q_n^m(0) = (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \ldots (n+m-1)}{1 \cdot 3 \ldots (n+m)}.$$

Если $n - m$ — четное число, то

$$P_n^m(0) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n+m-1)}{2 \cdot 4 \ldots (n-m)}, \qquad Q_n^m(0) = 0.$$

Если $m = n$, то можно написать

$$P_n^n(z) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(1-z^2)^{\frac{n}{2}},$$

$$P_n^n(0) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1).$$

В качестве примера на приложение функций Лежандра рассмотрим электростатическое поле сплюснутого эллипсоида вращения с потенциалом V_0.

[1]) См. п. 2.1.2.

Этот простой пример может пояснить замечание, приведенное в конце п. 6.3.11. Действительно, регулярность, которой должен обладать потенциал U, ограничивает класс функций, входящих в произведения Лапласа. На данном примере мы покажем, что выбор этих функций может быть сделан лишь после достаточно глубокого изучения их свойств.

Координаты x, y, z, оператор Лапласа ΔU и множители Ψ, Φ, Ξ, входящие в произведение Лапласа, как функции сплюснутых эллипсоидальных координат вращения даны в п. 6.3.11.

Совершенно очевидно, что потенциал обладает симметрией вращения, следовательно, $\mu = 0$. Потенциал должен быть конечным на оси Ox, т. е. при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Отсюда $\nu = n$ (целому числу), а $B_2 = 0$.

Если заменить C_1 на $C_1 e^{-jn\pi/2}$, а C_2 на $jC_2 e^{jn\pi/2}$, то оба слагаемых функции Ξ будут вещественны. Потенциал равен нулю на бесконечности, т. е. при $\xi = +\infty$. Так как $C_1 e^{-jn\pi/2} P_n(j\,\mathrm{sh}\,\xi)$ и $jC_2 e^{jn\pi/2}\tilde{Q}_n(j\,\mathrm{sh}\,\xi)$ при бесконечном возрастании ξ стремятся соответственно к бесконечности и к нулю, то $C_1 = 0$.

Таким образом, потенциал U сводится к выражению

$$U = jC_2 B_1 \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\pi/2} P_n(\sin\varphi)\,\tilde{Q}_n(j\,\mathrm{sh}\,\xi).$$

Уравнение заданного эллипсоида $\xi = \xi_0$; потенциал на нем постоянен. Он не должен зависеть от φ, поэтому $P_n(\sin\varphi)$ сводится к постоянной; значит, возможно только $n = 0$. Если V_0 — заданный потенциал, то в окончательном виде имеем

$$U = V_0 \frac{\tilde{Q}_0(j\,\mathrm{sh}\,\xi)}{\tilde{Q}_0(j\,\mathrm{sh}\,\xi_0)} = V_0 \frac{\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi)}{\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi_0)} = V_0 \frac{\mathrm{arctg}\,e^{-\xi}}{\mathrm{arctg}\,e^{-\xi_0}}.$$

7.6.26. Сферические гармоники. Вернемся к концу п. 6.3.8, где мы решали уравнение $\Delta U + k^2 U = 0$ в системе сферических координат. Допустим, что нужно найти функцию U на сфере заданного радиуса. Мы уже видели, что эта функция зависит от множителя

$$[A\cos\mu\varphi + B\sin\mu\varphi]\left[CP_\nu^\mu(\cos\theta) + DQ_\nu^\mu(\cos\theta)\right],$$

который называется сферической гармоникой. Здесь μ обязательно равно целому числу m, так как функция после полного оборота должна остаться неизменной. Кроме того, $D = 0$ и $\nu = n$ — целому, чтобы исключить функции, которые становятся бесконечными на полюсах сферы. Итак, имеем

$$[A\cos m\varphi + B\sin m\varphi]\,P_n^m(\cos\theta). \tag{163}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи (163):

1) $m = 0$. Функция U становится равной нулю одновременно с $P_n(\cos\theta)$, иначе говоря, на n параллелях сферы, симметрично расположенных по обеим сторонам экватора. $P_n(\cos\theta)$ называется зональной гармоникой.

2) $0 < m < n$. Функция U становится равной нулю на меридианах, соответствующих корням $\mathrm{tg}\,m\varphi = -\frac{A}{B}$, и на $n - m$ параллелях, симметричных относительно экватора. В этом случае выражение (163) называется тессеральной гармоникой.

3) $m = n$. Функция U становится равной нулю на m меридианах, а следовательно, и на полюсах. Выражение (163) сводится к $(A\cos m\varphi + B\sin m\varphi)\sin^m\theta$. В этом случае оно называется секториальной гармоникой.

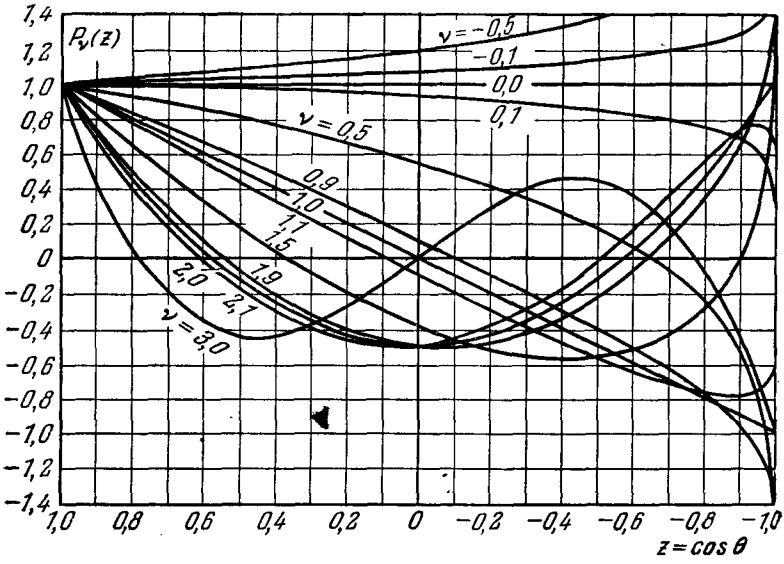


Рис. 7.49

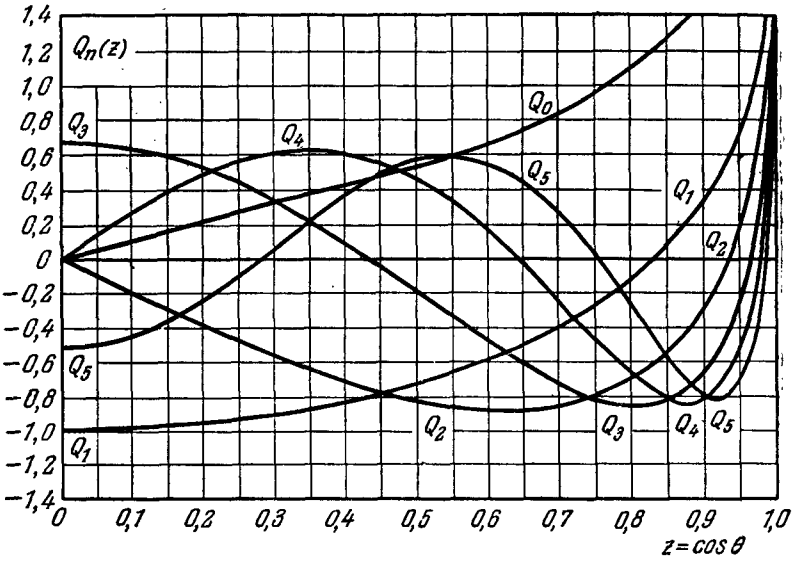


Рис. 7.50.

Доказано, что произвольную функцию от θ и φ можно разложить в ряд по сферическим гармоникам. Такая возможность объясняет важность этих понятий.

7.6.27. Графики функций Лежандра первого рода (рис. 7.49).

7.6.28. Графики функций Лежандра второго рода (рис. 7.50).

7.6.29. Таблица значений первых семи полиномов Лежандра.

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	0,000 0	—0,500 0	0,000 0	0,375 0	0,000 0	—0,312 5	0,000 0
0,01	0,010 0	—0,499 8	—0,015 0	0,374 6	0,018 7	—0,311 8	—0,021 9
0,02	0,020 0	—0,499 4	—0,030 0	0,373 5	0,037 4	—0,309 9	—0,043 6
0,03	0,030 0	—0,498 6	—0,044 9	0,371 6	0,056 0	—0,306 6	—0,065 1
0,04	0,040 0	—0,497 6	—0,059 8	0,369 0	0,074 4	—0,302 1	—0,086 2
0,05	0,050 0	—0,496 2	—0,074 7	0,365 7	0,092 7	—0,296 2	—0,106 9
0,06	0,060 0	—0,494 6	—0,089 5	0,361 6	0,110 6	—0,289 1	—0,127 0
0,07	0,070 0	—0,492 6	—0,104 1	0,356 7	0,128 3	—0,280 8	—0,146 4
0,08	0,080 0	—0,490 4	—0,118 7	0,351 2	0,145 5	—0,271 3	—0,165 1
0,09	0,090 0	—0,487 8	—0,133 2	0,344 9	0,162 4	—0,260 6	—0,182 8
0,10	0,100 0	—0,485 0	—0,147 2	0,337 9	0,178 8	—0,248 8	—0,199 5
0,11	0,110 0	—0,481 8	—0,161 7	0,330 3	0,194 7	—0,236 0	—0,215 1
0,12	0,120 0	—0,478 4	—0,175 7	0,321 9	0,210 1	—0,222 0	—0,229 5
0,13	0,130 0	—0,474 6	—0,189 5	0,312 9	0,224 8	—0,207 1	—0,242 7
0,14	0,140 0	—0,470 6	—0,203 1	0,303 2	0,238 9	—0,191 3	—0,254 5
0,15	0,150 0	—0,466 2	—0,216 6	0,292 8	0,252 3	—0,174 6	—0,264 9
0,16	0,160 0	—0,461 6	—0,229 8	0,281 9	0,265 0	—0,157 2	—0,273 8
0,17	0,170 0	—0,456 6	—0,242 7	0,270 3	0,276 9	—0,138 9	—0,281 2
0,18	0,180 0	—0,451 4	—0,255 4	0,258 1	0,288 0	—0,120 1	—0,287 0
0,19	0,190 0	—0,445 8	—0,267 9	0,245 3	0,298 2	—0,100 6	—0,291 1
0,20	0,200 0	—0,440 0	—0,280 0	0,232 0	0,307 5	—0,080 1	—0,293 5
0,21	0,210 0	—0,433 8	—0,291 8	0,218 1	0,315 9	—0,060 1	—0,294 3
0,22	0,220 0	—0,427 4	—0,303 4	0,203 7	0,323 4	—0,039 4	—0,293 3
0,23	0,230 0	—0,420 6	—0,314 6	0,188 9	0,329 9	—0,018 3	—0,290 6
0,24	0,240 0	—0,413 6	—0,325 4	0,173 5	0,335 3	+0,002 9	—0,286 1
0,25	0,250 0	—0,406 2	—0,335 9	0,157 7	0,339 7	0,024 3	—0,279 9
0,26	0,260 0	—0,398 6	—0,346 1	0,141 5	0,343 1	0,045 6	—0,272 0
0,27	0,270 0	—0,390 6	—0,355 8	0,124 9	0,345 3	0,066 9	—0,262 5
0,28	0,280 0	—0,382 4	—0,365 1	0,107 9	0,346 5	0,087 9	—0,251 2
0,29	0,290 0	—0,373 8	—0,374 0	0,090 6	0,346 5	0,108 7	—0,238 4
0,30	0,300 0	—0,365 0	—0,382 5	0,072 9	0,345 4	0,129 2	—0,224 1
0,31	0,310 0	—0,355 8	—0,390 5	0,055 0	0,343 1	0,149 2	—0,208 2
0,32	0,320 0	—0,346 4	—0,398 1	0,036 9	0,339 7	0,168 6	—0,191 0
0,33	0,330 0	—0,336 6	—0,405 2	0,018 5	0,335 1	0,187 3	—0,172 4
0,34	0,340 0	—0,326 6	—0,411 7	0,000 0	0,329 4	0,205 3	—0,152 7
0,35	0,350 0	—0,316 2	—0,417 8	—0,018 7	0,322 5	0,222 5	—0,131 8
0,36	0,360 0	—0,305 6	—0,423 4	—0,037 5	0,314 4	0,238 8	—0,109 8
0,37	0,370 0	—0,294 6	—0,428 4	—0,056 4	0,305 1	0,254 0	—0,087 0
0,38	0,380 0	—0,283 4	—0,432 8	—0,075 3	0,294 8	0,268 1	—0,063 5
0,39	0,390 0	—0,271 8	—0,436 7	—0,094 2	0,283 3	0,281 0	—0,039 3
0,40	0,400 0	—0,260 0	—0,440 0	—0,113 0	0,270 6	0,292 6	—0,014 6
0,41	0,410 0	—0,247 8	—0,442 7	—0,131 7	0,256 9	0,302 9	+0,010 4
0,42	0,420 0	—0,235 4	—0,444 8	—0,150 4	0,242 1	0,311 8	0,035 6
0,43	0,430 0	—0,222 6	—0,446 2	—0,168 8	0,226 3	0,319 1	0,060 8
0,44	0,440 0	—0,209 3	—0,447 0	—0,187 0	0,209 5	0,324 9	0,085 9
0,45	0,450 0	—0,196 2	—0,447 2	—0,205 0	0,191 7	0,329 0	0,110 6
0,46	0,460 0	—0,182 6	—0,446 7	—0,222 6	0,173 0	0,331 4	0,134 8
0,47	0,470 0	—0,168 6	—0,445 4	—0,239 9	0,153 4	0,332 1	0,158 4
0,48	0,480 0	—0,154 4	—0,443 5	—0,256 8	0,133 0	0,331 0	0,181 1
0,49	0,490 0	—0,139 8	—0,440 9	—0,273 2	0,111 8	0,328 0	0,202 7
0,50	0,500 0	—0,125 0	—0,437 5	—0,289 1	0,089 8	0,323 2	0,223 1
0,51	0,510 0	—0,109 8	—0,433 4	—0,304 4	0,067 3	0,316 6	0,242 2
0,52	0,520 0	—0,094 4	—0,428 5	—0,319 1	0,044 1	0,308 0	0,259 6
0,53	0,530 0	—0,078 6	—0,422 8	—0,333 2	0,020 4	0,297 5	0,275 3
0,54	0,540 0	—0,062 6	—0,416 3	—0,346 5	—0,003 7	0,285 1	0,289 1
0,55	0,550 0	—0,046 2	—0,409 1	—0,359 0	—0,028 2	0,270 8	0,300 7

Продолжение

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,56	0,560 0	—0,029 6	—0,401 0	—0,370 7	—0,052 9	0,254 6	0,310 2
0,57	0,570 0	—0,012 6	—0,392 0	—0,381 5	—0,077 9	0,236 6	0,317 2
0,58	0,580 0	+0,004 6	—0,382 2	—0,391 4	—0,102 8	0,216 8	0,321 7
0,59	0,590 0	0,022 2	—0,371 6	—0,400 2	—0,127 8	0,195 3	0,323 5
0,60	0,600 0	0,040 0	—0,360 0	—0,408 0	—0,152 6	0,172 1	0,322 6
0,61	0,610 0	0,058 2	—0,347 5	—0,414 6	—0,177 2	0,147 3	0,318 8
0,62	0,620 0	0,076 6	—0,334 2	—0,420 0	—0,201 4	0,121 1	0,312 1
0,63	0,630 0	0,095 4	—0,319 9	—0,424 2	—0,225 1	0,093 5	0,302 3
0,64	0,640 0	0,114 4	—0,304 6	—0,427 0	—0,248 2	0,064 6	0,289 5
0,65	0,650 0	0,133 8	—0,288 4	—0,428 4	—0,270 5	0,034 7	0,273 7
0,66	0,660 0	0,153 4	—0,271 3	—0,428 4	—0,291 9	0,003 8	0,254 8
0,67	0,670 0	0,173 4	—0,253 1	—0,426 8	—0,312 2	—0,027 8	0,232 9
0,68	0,680 0	0,193 6	—0,233 9	—0,423 6	—0,331 3	—0,060 1	0,208 1
0,69	0,690 0	0,214 2	—0,213 7	—0,418 7	—0,349 0	—0,092 6	0,180 5
0,70	0,700 0	0,235 0	—0,192 5	—0,412 1	—0,365 2	—0,125 3	0,150 2
0,71	0,710 0	0,256 2	—0,170 2	—0,405 6	—0,379 6	—0,157 8	0,117 3
0,72	0,720 0	0,277 6	—0,146 9	—0,393 3	—0,392 2	—0,189 9	0,082 2
0,73	0,730 0	0,299 4	—0,122 5	—0,381 0	—0,402 6	—0,221 4	0,045 0
0,74	0,740 0	0,321 4	—0,096 9	—0,366 6	—0,410 7	—0,251 8	0,006 1
0,75	0,750 0	0,343 8	—0,070 3	—0,350 1	—0,416 4	—0,280 8	—0,034 2
0,76	0,760 0	0,366 4	—0,042 6	—0,331 4	—0,419 3	—0,308 1	—0,075 4
0,77	0,770 0	0,389 4	—0,013 7	—0,310 4	—0,419 3	—0,333 3	—0,117 1
0,78	0,780 0	0,412 6	+0,016 4	—0,287 1	—0,416 2	—0,355 9	—0,158 8
0,79	0,790 0	0,436 2	0,047 6	—0,261 3	—0,409 7	—0,375 6	—0,199 9
0,80	0,800 0	0,460 0	0,080 0	—0,233 0	—0,399 5	—0,391 8	—0,239 7
0,81	0,810 0	0,484 2	0,113 6	—0,202 1	—0,385 5	—0,404 1	—0,277 4
0,82	0,820 0	0,508 6	0,148 4	—0,168 5	—0,367 4	—0,411 9	—0,312 4
0,83	0,830 0	0,533 4	0,184 5	—0,132 1	—0,344 9	—0,414 7	—0,343 7
0,84	0,840 0	0,558 4	0,221 8	—0,092 8	—0,317 7	—0,412 0	—0,370 3
0,85	0,850 0	0,583 8	0,260 3	—0,050 6	—0,285 7	—0,403 0	—0,391 3
0,86	0,860 0	0,609 4	0 300 1	—0,005 3	—0,248 4	—0,387 2	—0,405 5
0,87	0,870 0	0,635 4	0,341 3	+0,043 1	—0,205 6	—0,363 8	—0,411 6
0,88	0,880 0	0,661 6	0,383 7	0,094 7	—0,157 0	—0,332 2	—0,408 3
0,89	0,890 0	0,688 2	0,427 4	0,149 6	—0,102 3	—0,291 6	—0,394 2
0,90	0,900 0	0,715 0	0,472 5	0,207 9	—0,041 1	—0,241 2	—0,367 8
0,91	0,910 0	0,742 2	0,518 9	0,269 8	+0,026 8	—0,180 2	—0,327 4
0,92	0,920 0	0,769 6	0,566 7	0,335 2	0,101 7	—0,107 7	—0,271 3
0,93	0,930 0	0,797 4	0,615 9	0,404 4	0,184 2	—0,022 9	—0,197 5
0,94	0,940 0	0,825 4	0,666 5	0,477 3	0,274 4	+0,075 1	—0,104 0
0,95	0,950 0	0,853 8	0,718 4	0,554 1	0,372 7	0,187 5	+0,011 2
0,96	0,960 0	0,882 4	0,771 8	0,634 9	0,479 6	0,315 1	0,150 6
0,97	0,970 0	0,911 4	0,826 7	0,719 8	0,595 4	0,459 0	0,316 5
0,98	0,980 0	0,940 6	0,883 0	0,808 9	0,720 4	0,620 4	0,511 5
0,99	0,990 0	0,970 2	0,940 7	0,902 2	0,855 2	0,800 3	0,738 4
1,00	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0	1,000 0

7.6.30. Графики нормированных присоединенных фуикций Лежандра первого рода (рис. 7.51—7.54).

7.6.31. Приложение функций Лежандра. Решение задачи об электромагнитных колебаниях сферического резонатора. Предположим, что стенки сферы сделаны из абсолютно проводящего вещества. Введем сферическую систему координат. В этой системе $e_1 = 1$, $e_2 = \rho$, $e_3 = \rho \sin\theta$. Применим к рассматриваемой задаче способ Бромвича (см. п. 6.3.13). Если ограничиться синусоидальными функциями времени, т. е. функциями вида $e^{jkvt}U(\rho, \theta, \varphi)$,

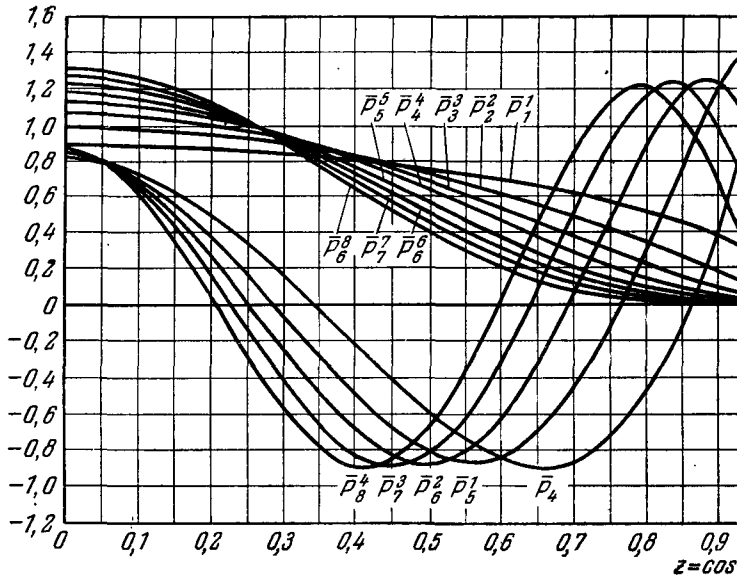


Рис. 7.51.

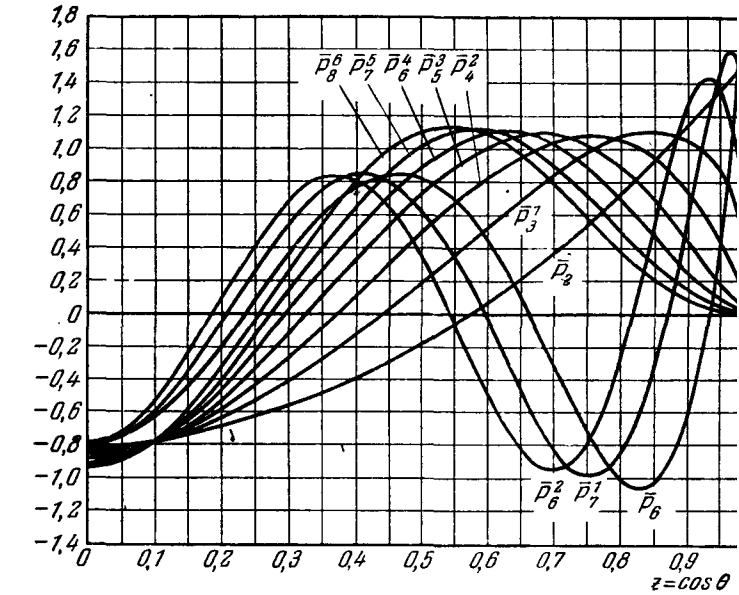


Рис. 7.52.

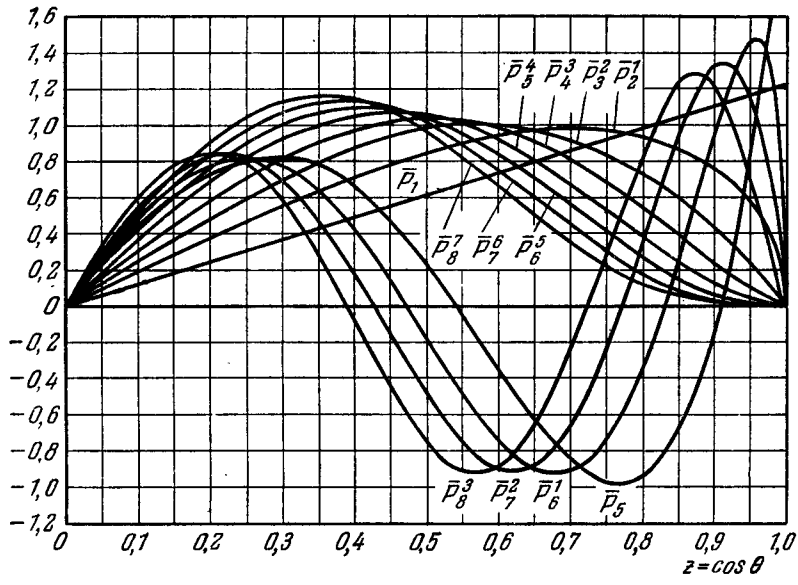


Рис. 7.53.

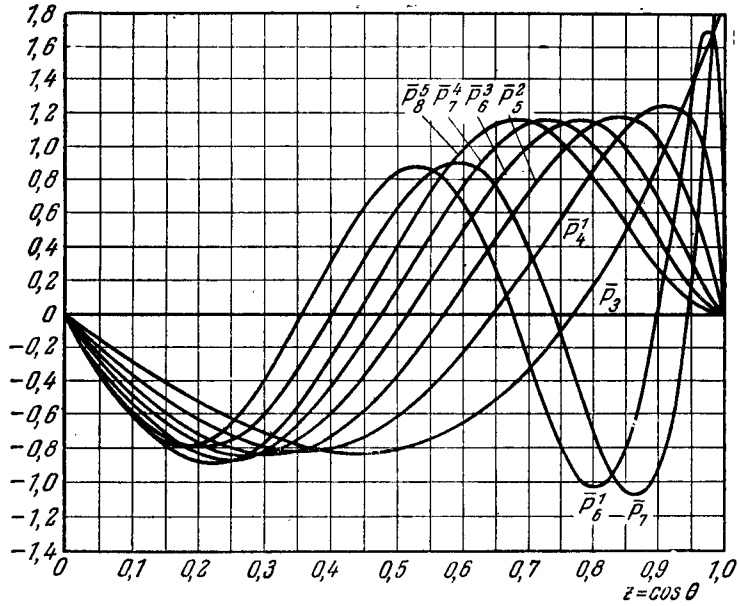


Рис. 7.54.

то U будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\right]+k^2U=0.$$

Положим

$$U=\sqrt{\rho}\,F(\rho,\ \theta,\ \varphi).$$

Тогда предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho}-\frac{1}{4}\frac{F}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+k^2F=0.$$

Будем искать частное решение в виде произведения Лапласа

$$F(\rho,\ \theta,\ \varphi)=R(\rho)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

Подставим его в уравнение и затем разделим на $R\Theta\Phi$. Имеем

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right]+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+k^2-\frac{1}{4\rho^2}=0.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\mu^2=0.$$

Решение этого уравнения должно иметь период 2π. Следовательно, $\mu=m$ (целое число) и

$$\Phi=\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi.$$

Далее,

$$\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+q^2=0.$$

Единственное решение этого уравнения, однозначное внутри сферы и конечное на оси Oz, дают присоединенные функции Лежандра первого рода, индексы которых — целые положительные числа. Поэтому нужно считать

$$q^2=n(n+1)\qquad (n\text{ — целое число}).$$

Отсюда

$$\Theta=P_n^m(\cos\theta).$$

Функция R определяется из уравнения

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right]-\frac{n(n+1)+\frac{1}{4}}{\rho^2}+k^2=0,$$

единственным решением которого, конечным в центре сферы, будет

$$R=J_{n+1/2}(k\rho).$$

Если центр сферы исключен из области существования функции, то отбрасывать функцию $Y_{n+1/2}$ не следует.

Искомое частное решение — функция $U(\rho,\ \theta,\ \varphi,\ t)$ — равно

$$U(\rho,\ \theta,\ \varphi,\ t)=\sqrt{\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\,P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi e^{j\omega t}.$$

Формулы (88) и (89) п. 6.3.13 позволяют написать следующие выражения:

а) для поперечной магнитной волны (E-волна):

$$E_\rho = \frac{n(n+1)}{\rho^2}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\,P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt},$$

$$E_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\right]\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = \frac{m}{\rho\sin\theta}\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\right]P_n^m(\cos\theta)^{\cos}_{-\sin} m\varphi e^{jkvt},$$

$$H_\rho = 0,$$

$$H_\theta = j\frac{km}{\rho\sin\theta}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\,P_n^m(\cos\theta)^{\cos}_{-\sin} m\varphi e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = -j\frac{k}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt};$$

б) для поперечной электрической волны (H-волна):

$$E_\rho = 0,$$

$$E_\theta = -j\frac{km}{\rho\sin\theta}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\,P_n^m(\cos\theta)^{\cos}_{-\sin} m\varphi e^{jkvt},$$

$$E_\varphi = j\frac{k}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt},$$

$$H_\rho = \frac{n(n+1)}{\rho^2}\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\,P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt},$$

$$H_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\right]\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)^{\sin}_{\cos} m\varphi e^{jkvt},$$

$$H_\varphi = \frac{m}{\rho\sin\theta}\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\right]P_n^m(\cos\theta)^{\cos}_{-\sin} m\varphi e^{jkvt}.$$

Если обозначить радиус сферы через R, то граничные условия — равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля — имеют вид

$$E_\varphi = E_\theta = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Отсюда получаем условия для поперечных магнитных волн:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\sqrt{k\rho}\,J_{n+1/2}(k\rho)\right]_{\rho=R} = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}J_{n+1/2}(kR) + kRJ'_{n+1/2}(kR) = 0.$$

Но так как, согласно (32),

$$kRJ'_{n+1/2}(kR) = kRJ_{n-1/2}(kR) - (n+1/2)J_{n+1/2}(kR),$$

то граничные условия принимают вид

$$\frac{J_{n+1/2}(kR)}{J_{n-1/2}(kR)} = \frac{kR}{n}.$$

Это уравнение дает для kR последовательность корней

$$kR = \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_i, \quad \ldots$$

Круговая частота возможных электрических колебаний внутри сферической полости будет зависеть от n и номера i выбранного корня. Наиболее низкая круговая частота будет соответствовать $n = 1$ и $i = 1$. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{kR} - \frac{1}{\operatorname{tg}(kR)} = kR \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(kR) = \frac{kR}{1-(kR)^2}.$$

Отсюда

$$\alpha_1 = 2{,}744,\ \alpha_2 = 6{,}117,\ \alpha_3 = 9{,}317,\ \alpha_4 = 12.48,\ \ldots$$

Следовательно, в пустоте длина поперечной магнитной волны наиболее низкой частоты равна

$$\lambda = \frac{2\pi R}{2{,}744} = 2{,}289R.$$

Для электрических поперечных волн граничные условия дают

$$J_{n+1/2}(kR) = 0.$$

Из этого уравнения вытекает ряд допустимых значений kR:

$$kR = \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_l,\ \ldots$$

Круговая частота электромагнитных колебаний зависит от n и номера l выбранного корня. Наиболее низкая частота будет при $n = 1$ и $l = 1$. При этом предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{\sin(kR)}{kR} = \cos(kR) \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(kR) = kR,$$

откуда

$$\beta_1 = 4{,}4934,\ \beta_2 = 7{,}7253,\ \beta_3 = 10{,}904,\ \beta_4 = 14{,}066,\ \ldots$$

Следовательно, в пустоте длина поперечной электрической волны наиболее низкой частоты равна

$$\lambda = \frac{2\pi R}{4{,}4934} = 1{,}398R.$$

7.7. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Будем искать решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a - 2q\cos 2z)\,y = 0, \tag{164}$$

ограничиваясь случаем, когда переменная z и параметры a и q вещественны.

7.7.1. Функции Матье первого рода. Соображения, изложенные в конце п. 6.3.9, показывают особое значение периодических решений с периодом 2π уравнения (164). Эти решения называются функциями Матье первого рода или функциями Матье с целым индексом. Они существуют только при строго определенных значениях параметров a и q, причем возможные значения пар a и q связаны зависимостью весьма сложного вида (см. пп. 7.7.3 и 7.7.4).

Предположим, что функции Матье первого рода существуют для значений q, стремящихся к нулю. Разумеется, параметр a при этом соответствующим образом изменяется. Пусть $q = 0$. Тогда уравнение (164) сводится к уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + a(0)\,y = 0,$$

которое имеет периодические решения с периодом 2π, если $a(0)$ равно квадрату целого числа m. Эти решения суть

$$\cos mz,\quad \sin mz.$$

Функциями Матье целого порядка m называются 2π-периодические относительно переменной z решения (164), стремящиеся соответственно к $\cos mz$ и $\sin mz$ при q, стремящемся к нулю. Ясно, что функции Матье целого порядка зависят от двух переменных z и q и индекса m, определенного выше.

Обычно эти функции обозначают с помощью символов $\mathrm{ce}_m(z, q)$, $\mathrm{se}_m(z, q)$ или сокращенно ce_m, se_m.

Формула, связывающая возможные значения параметров a и q при фиксированном m, называется характеристическим уравнением, а соответствующий график — характеристической кривой. Для ce_m характеристическое уравнение можно записать в виде

$$F_m(a, q) = 0, \quad \text{причем} \quad F_m(m^2, 0) = 0; \tag{165}$$

для se_m

$$\Phi_m(a, q) = 0, \quad \text{причем} \quad \Phi_m(m^2, 0) = 0. \tag{166}$$

Графики зависимостей (165) и (166) для различных m приведены на рис. 7.55. Они дают сеть характеристических кривых функций Матье целого порядка. Можно показать, что эти кривые не имеют общих точек (разумеется, кроме точек $(m^2, 0)$ на оси a, через которые проходят кривые $F_m(a, q) = 0$ и $\Phi_m(a, q) = 0$). Отсюда следует, что ни при каких значениях a и q, кроме отмеченного выше тривиального случая, не существует двух линейно независимых функций Матье первого рода. Поэтому для получения общего решения уравнения (164) приходится вводить функции Матье второго рода (см. п. 7.7.9).

7.7.2. Ортогональность функций Матье первого рода. Для каждого q имеется бесконечный набор значений a таких, что им соответствуют функции Матье первого рода. Другими словами, совокупность всех функций Матье целого порядка при фиксированном q дает бесконечное множество функций Матье первого рода с различными a, соответствующими различным m (см. рис. 7.55). Пусть параметрам q, a_1 и q, a_2 соответствуют y_1 и y_2 — решения (164), являющиеся функциями Матье первого рода. Имеем

$$\frac{d^2y_1}{dz^2} + (a_1 - 2q\cos 2z)\, y_1 = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dz^2} + (a_2 - 2q\cos 2z)\, y_2 = 0;$$

отсюда

$$\frac{d^2y_1}{dz^2}\, y_2 - \frac{d^2y_2}{dz^2}\, y_1 = (a_2 - a_1)\, y_1 y_2.$$

Интегрируем от 0 до 2π:

$$\left[\frac{dy_1}{dz}\, y_2 - \frac{dy_2}{dz}\, y_1\right]_0^{2\pi} = (a_2 - a_1) \int_0^{2\pi} y_1 y_2\, dz.$$

Так как функции y_1, y_2 2π-периодичны, то

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m \mathrm{ce}_p\, dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{se}_m \mathrm{se}_p\, dz = 0, \qquad m \neq p;$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_m \mathrm{se}_p\, dz = 0.$$

7.7.3. Разложение в ряд Фурье. Функции Матье первого рода — 2π периодичные решения (164) — естественно искать с помощью разложения их в ряд Фурье:

$$y = B_0 + \sum_{r=1}^{\infty} [A_r \sin rz + B_r \cos rz].$$

Подставим это разложение в уравнение (164). Тогда получим два рекуррентных соотношения одинакового вида: одно, связывающее три коэффициента A, другое — три коэффициента B, индексы которых отличаются на две единицы. Например, для коэффициентов A имеем *)

$$(a - r^2) A_r - q(A_{r+2} + A_{r-2}) = 0. \tag{167}$$

Отсюда находим четыре возможных разложения для функций ce_m и se_m. Коэффициенты этих разложений, очевидно, зависят от значений m, поэтому они снабжены верхними индексами. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{ce}_{2n}(z, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r}^{2n} \cos 2rz, \\
\mathrm{ce}_{2n+1}(z, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1} \cos(2r+1)z, \\
\mathrm{se}_{2n+1}(z, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1} \sin(2r+1)z, \\
\mathrm{se}_{2n+2}(z, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+2}^{2n+2} \sin(2r+2)z.
\end{aligned} \tag{168}$$

Теперь решения ce и se определены с точностью до постоянного множителя. Чтобы фиксировать этот множитель, положим, по определению,

$$\int_0^{2\pi} [\mathrm{ce}_m(z)]^2 dz = \int_0^{2\pi} [\mathrm{se}_m(z)]^2 dz = \pi.$$

Эти условия аналогичны формулам, справедливым для круговых функций:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \pi.$$

Отсюда получаем дополнительные соотношения

$$\frac{1}{(B_0^{2n})^2} = 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2r}^{2n}}{B_0^{2n}}\right)^2;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{2n+1})^2 = 1$$

и

$$\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{2n+1})^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+2}^{2n+2})^2 = 1.$$

Замечание. Коэффициенты A и B зависят от q. Если устремить q к нулю, то из определений функций $\mathrm{ce}_m(z)$ и $\mathrm{se}_m(z)$ непосредственно следует

$$A_{2r}^{2n}(0) = A_{2r+1}^{2n+1}(0) = B_{2r}^{2n}(0) = B_{2r+1}^{2n+1}(0) = \delta_r^n,$$

где δ_r^n — символ Кронекера.

*) Рекуррентные формулы относительно A и B приведены в [8] на стр. 383, 384 отдельно для каждого из разложений (168).

7.7.4. Характеристическое уравнение. Применение рекуррентной формулы (167) позволяет написать характеристические уравнения (165) и (166) в виде сходящихся непрерывных дробей [1]). Мы приведем только окончательные результаты:

$$0 = -\frac{a}{2} - \frac{q^2}{|4-a} - \ldots - \frac{q^2}{|4r^2-a} - \ldots, \quad \{F_{2n}(a, q)=0\}, \tag{169}$$

$$a = q+1 - \frac{q^2}{|9-a} - \ldots - \frac{q^2}{|(2r+1)^2-a} - \ldots, \quad \{F_{2n+1}(a, q)=0\}, \tag{170}$$

$$0 = 4-a - \frac{q^2}{|16-a} - \ldots - \frac{q^2}{|(2r+2)^2-a} - \ldots, \quad \{\Phi_{2n+2}(a, q)=0\}, \tag{171}$$

$$a = -q+1 - \frac{q^2}{|9-a} - \ldots - \frac{q^2}{|(2r+1)^2-a} - \ldots, \quad \{\Phi_{2n+1}(a, q)=0\}. \tag{172}$$

Пример. Приведем пример использования предыдущих формул для вычисления пары возможных значений a, q.

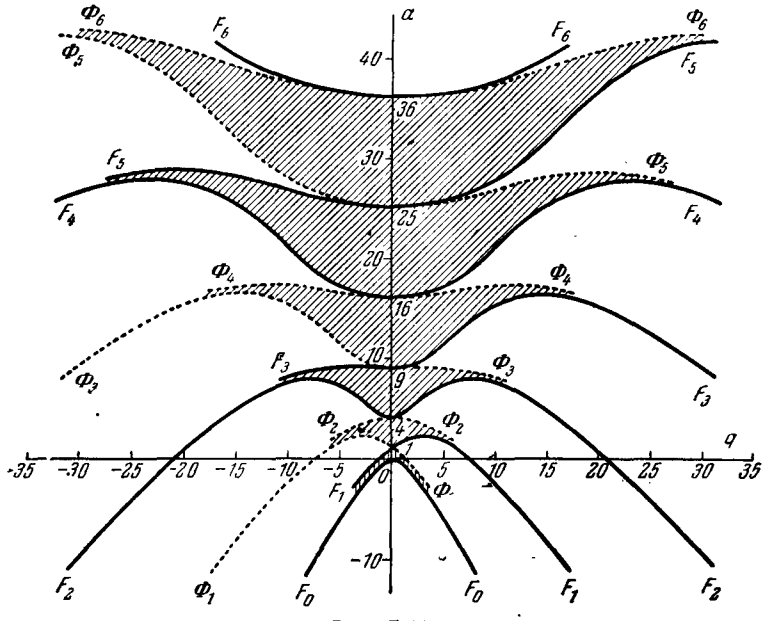


Рис. 7.55.

Пусть требуется вычислить значение a, соответствующее $q=2$, чтобы уравнение (164) допускало в качестве решения $\mathrm{ce}_3(z)$. Это значение a представляет собой ординату точки пересечения прямой $q=2$ с кривой $F_3(a, q)=0$. Кривая $F_3(a, q)=0$ (рис. 7.55) пересекает ось a в точке $a=9$. Поэтому искомое значение a близко к 9. Уточним его с помощью (170).

---

[1]) По типографским соображениям непрерывная бесконечная дробь

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}$$

записывается в виде $b_0 + \frac{a_1}{|b_1} + \frac{a_2}{|b_2} + \frac{a_3}{|b_3} + \ldots$.

В правую часть равенства (170), оборванного при $r=2$, подставим $q=2$, $a=9{,}4$ и $q=2$, $a=9{,}3$. Тогда левая часть (170) соответственно равна $a_1=9{,}1$ и $a_2=10{,}21$ и линейная интерполяция приближенно дает $a_3=9{,}37$.

Подставим теперь в правую часть (170), оборванного при $r=3$, значения $q=2$, $a=9{,}37$ и $q=2$, $a=9{,}38$. Тогда левая часть дает соответственно $a_1'=9{,}373$ и $a_2'=9{,}272$. С помощью линейной интерполяции получаем $a_3'=9{,}3731$. Значение 9,373 дает хорошее приближение величины a.

Рассмотренным выше способом можно по точкам построить кривую $F_3(a, q)=0$.

7.7.5. Поведение функций $\mathrm{ce}_m(z, q)$, $\mathrm{se}_m(z, q)$. 1) *Симметрия относительно z.* Функции $\mathrm{ce}_m(z, q)$, $\mathrm{se}_m(z, q)$ имеют период и характер симметрии такие же, как функции $\cos z$, $\sin z$, если m — нечетное число, и $\cos 2z$; $\sin 2z$, если m — четное число.

2) *Симметрия относительно q.* Если в уравнении (164) заменить q на $-q$, а z на $\frac{\pi}{2}-z$, то оно сохраняет первоначальный вид

$$\frac{d^2y}{dz^2}+[a-2q\cos 2z]\,y=0.$$

В силу симметрии функций F_m и Φ_m относительно q имеем

$$\mathrm{ce}_{2n}(z, -q)=(-1)^n\,\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}-z, q\right),$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(z, -q)=(-1)^n\,\mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}-z, q\right),$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z, -q)=(-1)^n\,\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z, q\right),$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z, -q)=(-1)^n\,\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z, q\right).$$

3) *Корни.* Функция se_m обращается в нуль при $z=0$, функции se_{2n} и ce_{2n+1} равны нулю при $z=\frac{\pi}{2}$. Функции se_{2n+1}, se_{2n+2}, ce_{2n}, ce_{2n+1} имеют, кроме того, n корней в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Эти корни приближаются к $\frac{\pi}{2}$ по мере роста q[1]). Наконец, функции $\mathrm{se}_m(z)$ и $\mathrm{ce}_m(z)$ между 0 и π имеют такое же количество корней, как $\sin mz$ и $\cos mz$.

7.7.6. Присоединенные функции Матье первого рода. Если в (164) заменить z на jz, то это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2y}{dz^2}-(a-2q\operatorname{ch}2z)\,y=0.$$

Для значений a, удовлетворяющих равенствам (169) — (172), существуют решения с периодом $2\pi j$. Они называются присоединенными функциями Матье первого рода и обозначаются Ce_m и Se_m. Эти функции, очевидно, связаны с ce_m и se_m соотношениями

$$\begin{aligned}\mathrm{Ce}_m(z)&=\mathrm{ce}_m(jz),\\ \mathrm{Se}_m(z)&=-j\,\mathrm{se}_m(jz).\end{aligned}\qquad(173)$$

---

[1]) В [8] на стр. 386 и последующих приведены рельефы функций $y=\mathrm{ce}_0$, ce_1, se_1, ce_2, se_2 (x, q) в системе координат x, q, y. В книге [28] имеются графики первых функций ce_m, se_m для различных пар q и a.

Изменение знака q у Ce_m и Se_m сводится к замене z на $z+j\frac{\pi}{2}$ (ср. п. 7. 7. 5). Нетрудно написать разложения в ряд, подобные (168), используя гиперболические функции и соотношения (173).

7.7.7. Функции Матье для произвольных a и q. Уравнение Матье представляет собой частный случай уравнения Хилла. Из вычислений 4.2.21 следует: если $y(z)$ — частное решение уравнения Матье, то существует μ такое, что

$$y(z+\pi)=e^{\mu\pi}y(z).$$

Рассмотрим функцию $G(z)=e^{-\mu z}y(z)$. Имеем

$$G(z+\pi)=e^{-\mu(z+\pi)}y(z+\pi)=e^{-\mu z}y(z)=G(z).$$

Следовательно, функция $G(z)$ имеет период π и допускает разложение в ряд Фурье вида

$$G(z)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_{2r}e^{2jrz}$$

Частное решение $y(z)$ равно

$$y(z)=e^{\mu z}G(z).$$

Другое частное решение, линейно независимое от $y(z)$ (при $\mu\neq 0$), будет

$$y(-z)=e^{-\mu z}G(-z).$$

Следовательно, общее решение уравнения Матье имеет вид

$$Ae^{\mu z}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_{2r}e^{2jrz}+Be^{-\mu z}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_{2r}e^{-2jrz}. \qquad (174)$$

Решение называется устойчивым, если оно остается конечным при бесконечном возрастании z, и неустойчивым в противном случае. Характер устойчивости решения (174) определяется значением параметра μ.

Мы видели в п. 4.2.21, что число μ либо вещественное, либо чисто мнимое. При вещественном μ решение неустойчиво. При чисто мнимом $\mu=j\beta$ решение устойчиво. Если, кроме того, β — рациональная дробь, $\beta=m+\frac{p}{s}$ (m — целое число, p и s — взаимно простые, $p<s$), то решение будет периодично с периодом $2\pi s$. Эти решения называются функциями Матье с дробным индексом. Если $p=0$, мы снова приходим к функциям Матье первого рода. В последнем случае частные решения из (174) линейно зависимы, т. е. (174) не есть общий интеграл. Отсюда возникает необходимость наряду с функциями Матье первого рода рассматривать функции Матье второго рода (это уже отмечалось нами). Если $\mu=j\beta$, а β — не рациональная дробь, то решение устойчиво, но не периодично. Можно показать, что случай устойчивости соответствует таким значениям a и q, что изображающая их точка на рис. 7.55 находится в одной из заштрихованных зон. Напомним, что линии на рис. 7.55 (кривые $F_m(a, q)=0$, $\Phi_m(a, q)=0$) соответствуют функциям Матье первого рода. Эти кривые представляют собой границы, отделяющие зоны устойчивости от зон неустойчивости.

Рассмотрим более подробно решение с дробным индексом. Изменяя индекс суммирования, можно добиться выполнения условия $0<\beta<1$. Тогда общее решение (174) перепишется в виде

$$y(z)=A\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_{2r}e^{j(2r+\beta)z}+B\sum_{r=-\infty}^{+\infty}c_{2r}e^{-j(2r+\beta)z}.$$

Мы можем рассматривать $y(z)$ как линейную комбинацию двух частных решений:

$$y_1 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} \cos(2r+\beta) z,$$

$$y_2 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r} \sin(2r+\beta) z.$$

При помощи формул, аналогичных формулам (168), можно, с точностью до постоянного множителя, определить функции Матье с дробным индексом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ce}_{2n+\beta}(z, q) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{2r}^{2n+\beta} \cos(2r+\beta) z, \\
\mathrm{se}_{2n+\beta}(z, q) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{2r}^{2n+\beta} \sin(2r+\beta) z, \\
\mathrm{ce}_{2n+1+\beta}(z, q) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{2r}^{2n+\beta+1} \cos(2r+\beta+1) z, \\
\mathrm{se}_{2n+1+\beta}(z, q) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{2r}^{2n+\beta+1} \sin(2r+\beta+1) z.
\end{aligned} \tag{175}$$

Как и в п. 7.7.2, легко показать, что функции Матье с дробным индексом, соответствующие одному и тому же значению q (здесь функции se и ce могут одновременно существовать при одинаковых a и q), ортогональны. Неопределенный постоянный множитель, содержащийся в формулах (175), будем находить из условий:

$$\frac{1}{\pi s} \int_0^{2\pi s} [\mathrm{ce}_{m+\beta}(z)]^2 dz = \frac{1}{\pi s} \int_0^{2\pi s} [\mathrm{se}_{m+\beta}(z)]^2 dz = 1,$$

из которых следует

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} (A_{2r}^{2n+\beta})^2 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (A_{2r}^{2n+\beta+1})^2 = 1.$$

Присоединенные функции Матье с дробным индексом определяются выражениями

$$\mathrm{Ce}_{m+\beta}(z, \pm q) = \mathrm{ce}_{m+\beta}(jz, \pm q),$$

$$\mathrm{Se}_{m+\beta}(z, \pm q) = -j\,\mathrm{se}_{m+\beta}(jz, \pm q).$$

Свойства этих функций выводятся из свойств $\mathrm{ce}_{m+\beta}$ и $\mathrm{se}_{m+\beta}$ (начиная с формул определения).

7.7.8. Разложение в ряды по бесселевым функциям. Предполагая $q = k^2 > 0$, произведем в уравнении (164) замену переменной $u = 2k \cos z$. Имеем

$$(u^2 - 4k^2) \frac{d^2y}{du^2} + u \frac{dy}{du} + (u^2 - p^2) y = 0,$$

где

$$p^2 = a + 2q. \tag{176}$$

Будем искать решение вида $y(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c_{2r}J_{2r}(u)$. Подставим это выражение в (176). Принимая во внимание известные соотношения

$$\begin{aligned} u^2J''_{2r}+uJ'_{2r}+u^2J_{2r}&=4r^2J_{2r}\\ 4J''_{2r}&=J_{2r-2}-2J_{2r}+J_{2r+2}, \end{aligned} \tag{177}$$

получаем

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r c_{2r}\left[(4r^2-a)J_{2r}-k^2(J_{2r-2}+J_{2r+2})\right]=0.$$

Приравняем нулю коэффициенты при J_{2r}. Тогда получаем рекуррентное соотношение между коэффициентами c_{2r}, c_{2r+2}, c_{2r-2}:

$$(a-4r^2)c_{2r}-q(c_{2r-2}+c_{2r+2})=0.$$

Это рекуррентная формула вида (167). Следовательно, коэффициенты c и A пропорциональны. Функция, определенная рядом

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2n}J_{2r}(2k\cos z), \tag{178}$$

представляет собой решение (164). Это функция ce_{2n} с точностью до постоянного множителя. Если придать z значение $\frac{\pi}{2}$, то все члены ряда (178), кроме первого, становятся равными нулю. Это позволяет определить постоянный множитель и написать

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,\ q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},\ q\right)}{A_0^{2n}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2n}J_{2r}(2k\cos z).$$

Можно выписать подобные разложения в ряд по бесселевым функциям для

$$\mathrm{ce}_{2n+1},\ \mathrm{se}_{2n},\ \mathrm{se}_{2n+1},\ \mathrm{Ce}_{2n+1},\ \mathrm{Ce}_{2n},\ \mathrm{Se}_{2n+1},\ \mathrm{Se}_{2n}.$$

7.7.9. Функции Матье второго рода. Мы видели, что функции Матье с целым индексом (т. е. функции Матье первого рода) ce_m и se_m, в отличие от функций Матье с нецелым индексом, не могут одновременно существовать при одних и тех же $q\neq 0$ и a.

Чтобы получить общий интеграл дифференциального уравнения (164) в случае, когда известна функция Матье первого рода, следует найти линейно не зависящее от нее решение этого уравнения.

Функцией Матье второго рода (например, для ce_m) называют, в соответствии с общим результатом п. 6.2.11, решение (164) вида

$$y(z)=\mathrm{ce}_m(z)\int\frac{dz}{[\mathrm{ce}_m(z)]^2}.$$

Решение, линейно независимое от функции Матье первого рода, можно также определить, исходя из разложения (178). Действительно, бесселева функция второго рода $Y_n(z)$ удовлетворяет соотношениям (177). Значит, разложение

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{2n}Y_{2r}(2k\cos z) \tag{179}$$

является линейно независимым от $\mathrm{ce}_{2n}(z, q)$ решением (164). Можно принять функцию, определенную рядом (179), за присоединенную функцию Матье второго рода для ce_{2n} и действовать подобным же образом в случае аналогичных разложений в ряд по бесселевым функциям других решений уравнения Матье.

7.8. ФУНКЦИИ ВЕБЕРА — ЭРМИТА. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

7.8.1. Функции Вебера — Эрмита, или функции параболического цилиндра. Так называются частные решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0. \tag{180}$$

Положим

$$y=e^{-\frac{z^2}{4}}Y.$$

Тогда дифференциальное уравнение (180) приобретает вид

$$\frac{d^2Y}{dz^2}-z\frac{dY}{dz}+\nu Y=0. \tag{181}$$

Найдем разложение Y в степенной ряд

$$Y=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda.$$

Имеем

$$a_{2p}=(-1)^p a_0\frac{\nu(\nu-2)\dots(\nu-2p+2)}{(2p)!},$$

$$a_{2p+1}=(-1)^p a_1\frac{(\nu-1)(\nu-3)\dots(\nu-2p+1)}{(2p+1)!}.$$

Отсюда получаем искомое разложение

$$y=e^{-\frac{z^2}{4}}\left\{a_0\left[1+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{\nu(\nu-2)\dots(\nu-2p+2)}{(2p)!}z^{2p}\right]+\right.$$
$$\left.+a_1z\left[1+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(\nu-1)(\nu-3)\dots(\nu-2p+1)}{(2p+1)!}z^{2p}\right]\right\}, \tag{182}$$

где a_0 и a_1 — два неопределенных коэффициента.

По определению, функция Вебера — Эрмита $D_\nu(z)$ получится из формулы (182), если принять

$$a_0=2^{\frac{\nu}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}, \tag{183}$$

$$a_1=-2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}. \tag{184}$$

Если $D_\nu(z)$ — решение уравнения (180), то $D_\nu(-z)$, $D_{-\nu-1}(jz)$, $D_{-\nu-1}(-jz)$ — также решения. Они, естественно, не все линейно независимы. С помощью

формул (182)—(184) можно показать, что между ними существуют следующие соотношения:

$$D_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{\frac{j\nu\pi}{2}}D_{-\nu-1}(jz)+e^{-j\nu\pi/2}D_{-\nu-1}(-jz)\right\},$$

$$D_\nu(z)=e^{-j\nu\pi}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{-j(\nu+1)\pi/2}D_{-\nu-1}(jz), \qquad (185)$$

$$D_\nu(z)=e^{j\nu\pi}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{j(\nu+1)\pi/2}D_{-\nu-1}(-jz).$$

Если ν отлично от целого числа, то общий интеграл уравнения (180) будет

$$y=AD_\nu(z)+BD_\nu(-z). \qquad (186)$$

Если ν равно четному положительному числу $2p$, то первое разложение в формуле (182) обрывается на члене z^{2p}, а коэффициент a_1 второго разложения равен нулю.

Если ν равно нечетному положительному числу $2p+1$, то второе разложение в формуле (182) обрывается на члене z^{2p+1}, а коэффициент a_0 равен нулю.

Следовательно, для $\nu=n$ (целое положительное число) можно написать

$$D_n(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}H_n(z). \qquad (187)$$

$H_n(z)$ — полином n-й степени, называемый полиномом Эрмита. Он является четной функцией при четном n и нечетной функцией при n нечетном. Поэтому выражение (186) уже не является общим интегралом (180). В качестве общего интеграла при любом ν можно принять выражение

$$y=AD_\nu(z)+BD_{-\nu-1}(\pm jz). \qquad (188)$$

Итак, решение уравнений (64) и (65) п. 6.3.10 описывается общими интегралами (186), (188), в которых $z=\alpha\sqrt{2p}$ для первого случая и $z=j\beta\sqrt{2p}$ для второго. При этом $\nu=\pm\frac{q^2}{2p}-\frac{1}{2}$. Величины A, B, ν определяются граничными условиями.

Из формул (182)—(184) получаем при $z=0$

$$D_\nu(0)=2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}=\frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\cos\frac{\nu\pi}{2}, \qquad (189)$$

$$D'_\nu(0)=-2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}=\frac{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\nu\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sin\frac{\nu\pi}{2}. \qquad (190)$$

Отсюда

$$D_{2p}(0)=(-1)^p\,1\cdot3\ldots(2p-1),\quad D_{2p+1}(0)=0, \qquad (191)$$

$$D'_{2p}(0)=0,\quad D'_{2p+1}(0)=(-1)^p\,1\cdot3\ldots(2p+1). \qquad (192)$$

Если z лежит внутри угла

$$-\frac{3\pi}{4}<\arg z<+\frac{3\pi}{4},$$

то для функции $D_\nu(z)$ имеет место следующий асимптотический ряд

$$D_\nu(z)\sim z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}\left[1-\frac{\nu(\nu-1)}{2z^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 4z^4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^p\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-2p+1)}{2^p p!\,z^{2p}}+\ldots\right]. \quad (193)$$

Если ν равно целому положительному числу n, то этот ряд сводится к

$$e^{-\frac{z^2}{4}}H_n(z).$$

Исходя из формул (182)—(184), можно проверить, что имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0. \quad (194)$$
$$2D'_\nu(z)+zD_\nu(z)-2\nu D_{\nu-1}(z)=0. \quad (195)$$

Точно так же нетрудно показать, что

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{\frac{z^2}{4}}D_\nu(z)\right]=\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1)e^{-\frac{z^2}{4}}D_{\nu-m}(z), \quad (\nu>m),$$
$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{-\frac{z^2}{4}}D_\nu(z)\right]=(-1)^m e^{-\frac{z^2}{4}}D_{\nu+m}(z).$$

7.8.2. Полиномы Эрмита. Функция $y_1=e^{-\frac{z^2}{2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y_1'+zy_1=0.$$

Продифференцируем это уравнение $n+1$ раз. Тогда

$$y_1^{(n+2)}+zy_1^{(n+1)}+(n+1)y_1^{(n)}=0.$$

Следовательно, функция $y_2=\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$y_2''+zy_2'+(n+1)y_2=0. \quad (196)$$

Положим $y_2=e^{-\frac{z^2}{4}}y$. При этом уравнение (196) приобретает вид

$$y''+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)y=0,$$

иначе говоря, становится уравнением (180) при $\nu=n$. Известно, что решение этого уравнения будет

$$D_n(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}H_n(z).$$

Полином $H_n(z)$ и полином $e^{\frac{z^2}{2}}\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (181). Следовательно, они пропорциональны *). Коэффициент пропорциональности равен $(-1)^n$. Отсюда получается очень важная формула, которая может служить определением для полиномов Эрмита:

$$H_n(z)=(-1)^n e^{\frac{z^2}{2}}\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (197)$$

*) Из формулы (182) видно, что второе линейно-независимое частотное решение (181) не является полиномом.

Мы видели выше, что y_2 удовлетворяет дифференциальному уравнению (196). Умножая все члены этого уравнения на $e^{\frac{z^2}{2}}$, получаем в силу формулы (197):

$$H_{n+2}(z) - zH_{n+1}(z) + (n+1)H_n(z) = 0. \tag{198}$$

Продифференцируем теперь формулу (197), написав ее для $H_{n+1}(z)$. Тогда

$$H'_{n+1}(z) = zH_{n+1}(z) - H_{n+2}(z). \tag{199}$$

Сравнивая формулы (198) и (199), получаем

$$H'_{n+1}(z) = (n+1)H_n(z). \tag{200}$$

Так как $e^{\frac{z^2}{4}}$ равно единице при $z = 0$, то значения полиномов Эрмита и их первых производных при $z = 0$ не отличаются от значений, найденных для соответствующих функций $D_n(0)$ (формулы (191), (192)).

Первые двенадцать полиномов Эрмита следующие:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 1,\\
H_1 &= z,\\
H_2 &= z^2 - 1,\\
H_3 &= z^3 - 3z,\\
H_4 &= z^4 - 6z^2 + 3,\\
H_5 &= z^5 - 10z^3 + 15z,\\
H_6 &= z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15,\\
H_7 &= z^7 - 21z^5 + 105z^3 - 105z,\\
H_8 &= z^8 - 28z^6 + 210z^4 - 420z^2 + 105,\\
H_9 &= z^9 - 36z^7 + 378z^5 - 1260z^3 + 945z,\\
H_{10} &= z^{10} - 45z^8 + 630z^6 - 3150z^4 + 4725z^2 - 945,\\
H_{11} &= z^{11} - 55z^9 + 990z^7 - 6930z^5 + 17325z^3 - 10395z,\\
H_{12} &= z^{12} - 66z^{10} + 1485z^8 - 13860z^6 + 51975z^4 - 62370z^2 + 10395.
\end{aligned} \tag{201}$$

Они отвечают общей формуле

$$H_n = z^n - \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} z^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p} z^{n-2p} + \ldots \tag{202}$$

7.8.3. Производящая функция и ортогональность полиномов Эрмита. Рассмотрим функцию $\varphi(z, t) = e^{zt - t^2/2}$ и разложим ее в ряд по возрастающим степеням t:

$$\varphi(z, t) = h_0(z) + h_1(z)t + h_2(z)\frac{t^2}{2!} + \ldots + h_n(z)\frac{t^n}{n!} + \ldots \tag{203}$$

Можно сразу заметить, что $h_0(z) = 1$, а $h_1(z) = z$. Функция $\varphi(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (z - t)\varphi. \tag{204}$$

В (204) заменим φ на ряд (203). Приравняв нулю коэффициент при члене, содержащем t^n, получим

$$h_{n+1}(z) - zh_n(z) + nh_{n-1}(z) = 0.$$

Это рекуррентная формула, совпадающая с (198). Так как, кроме того, $h_0(z)=H_0(z)$, а $h_1(z)=H_1(z)$, то

$$h_n(z)=H_n(z).$$

Отсюда получаем

$$e^{zt-\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(z)\frac{t^n}{n!}. \tag{205}$$

Функция, стоящая слева, называется производящей функцией для полиномов Эрмита.

Если умножить обе части (205) на $e^{-\frac{z^2}{4}}$, то, в силу формулы (187), найдем производящую функцию для функций Вебера — Эрмита

$$e^{-\frac{z^2}{4}+zt-\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

Исследуем ортогональность функций Вебера — Эрмита. Вычислим интеграл

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}D_n(z)D_m(z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}H_n(z)H_m(z)\,dz.$$

Положим $n>m$ и применим формулу (197). Имеем

$$I=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(z)\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I=(-1)^n\left[H_m(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}H'_m(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Внеинтегральный член является произведением полинома на $e^{-\frac{z^2}{2}}$. Он равен нулю при $z=\pm\infty$. Интегрирование по частям, повторенное m раз, дает

$$I=(-1)^{m+n}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(m)}(z)\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \tag{206}$$

Но $H_m^{(m)}(z)=m!$, следовательно,

$$I=(-1)^{m+n}m!\left[\frac{d^{n-m-1}}{dz^{n-m-1}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

Если $n=m$, формула (206) дает

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^{(n)}(z)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=n!\sqrt{2\pi}.$$

Все это показывает, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям п. 2.1.0 (условиям Дирихле), то ее можно разложить в ряд по полиномам Эрмита:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kH_k(x), \tag{207}$$

где

$$c_k = \frac{1}{k!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\, dx.$$

Если предпочесть разложение в ряд вида

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} d_k H_k(x), \tag{208}$$

то коэффициенты определяются еще проще:

$$d_k = \frac{1}{k!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_k(x)\, dx.$$

Вычисления упрощаются, если взять функции Вебера — Эрмита сразу в ортонормированной форме:

$$\overline{D_n(z)} = \frac{D_n(z)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}. \tag{209}$$

То же относится и к полиномам Эрмита:

$$\overline{H_n(z)} = \frac{H_n(z)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}. \tag{210}$$

Замечание. Часто встречается определение полиномов Эрмита, отличающееся от только что рассмотренного, а именно

$$\mathrm{H}_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}. \tag{211}$$

Между этими двумя видами полиномов существует простое соотношение

$$H_n(z) = 2^{+\frac{n}{2}} \mathrm{H}_n\left(z/\sqrt{2}\right). \tag{212}$$

7.9. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

7.9.1. Определение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1-\omega^2)\frac{d^2y}{d\omega^2} - \omega\frac{dy}{d\omega} + n^2 y = 0 \quad (n \text{ — целое число}). \tag{213}$$

Положим $\omega = \cos t$ или $\omega = \operatorname{ch} t$. Получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dt^2} - n^2 y = 0.$$

Эти уравнения допускают соответственно следующие два линейно независимых решения:

$$y = \cos nt, \quad y = \sin nt;$$
$$y = \operatorname{ch} nt, \quad y = \operatorname{sh} nt.$$

Отсюда находим линейно независимые решения уравнения (213):

$$T_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega) \quad \text{при} \quad |\omega| < 1, \tag{214}$$
$$T_n(\omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} \omega) \quad \text{при} \quad |\omega| > 1, \tag{215}$$
$$U_n(\omega) = \sin(n \arccos \omega) \quad \text{при} \quad |\omega| < 1, \tag{216}$$
$$U_n(\omega) = \operatorname{sh}(n \operatorname{arch} \omega) \quad \text{при} \quad |\omega| > 1. \tag{217}$$

Функции T_n и U_n называются соответственно функциями Чебышева первого и второго рода n-го порядка.

Функция $T_n(\omega)$ представляет собой полином. Действительно, при $|\omega| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} T_n(\omega) + jU_n(\omega) &= (\cos t + j \sin t)^n = \left(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n, \\ T_n(\omega) - jU_n(\omega) &= (\cos t - j \sin t)^n = \left(\omega \mp \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n. \end{aligned} \tag{218}$$

Отсюда

$$T_n(\omega) = \frac{1}{2}\left[\left(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n + \left(\omega \mp \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n\right]. \tag{218а}$$

При $|\omega| > 1$ имеем

$$\begin{aligned} T_n(\omega) + U_n(\omega) &= e^{nt} = \left(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n, \\ T_n(\omega) - U_n(\omega) &= e^{-nt} = \left(\omega \mp \sqrt{\omega^2 - 1}\right)^n, \end{aligned}$$

что приводит для $T_n(\omega)$ к тому же соотношению (218а).

Полином $T_n(\omega)$ называется полиномом Чебышева первого рода.

Если при помощи формулы бинома разложить выражение (218а), то найдем

$$T_n(\omega) = 2^{n-1}\left[\omega^n - \frac{n}{1!2^2}\omega^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!2^4}\omega^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!2^6}\omega^{n-6} + \ldots\right].$$

Последний член в квадратных скобках равен

$$\frac{1}{2^{2k-1}}, \quad \text{если} \quad n = 2k;$$

$$\frac{(2k+1)\omega}{2^{2k}}, \quad \text{если} \quad n = 2k+1.$$

Функции Чебышева второго рода U_n могут быть представлены следующими формулами:

$$\begin{aligned} U_n(\omega) &= \pm\sqrt{1 - \omega^2}\, p_n(\omega), \quad \text{если} \quad |\omega| < 1; \\ U_n(\omega) &= \pm\sqrt{\omega^2 - 1}\, p_n(\omega), \quad \text{если} \quad |\omega| > 1, \end{aligned}$$

где $p_n(\omega)$ — полином $(n-1)$-й степени от ω. Выражение для $p_n(\omega)$ будет

$$p_n(\omega) = 2^{n-1}\left[\omega^{n-1} - \frac{n-2}{1!2^2}\omega^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-3)(n-4)}{2!2^4}\omega^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!2^6}\omega^{n-7} + \ldots\right].$$

Последний член в квадратных скобках равен

$$\frac{2k}{2^{2k-1}}\omega, \quad \text{если} \quad n = 2k;$$

$$\frac{1}{2^{2k}}, \quad \text{если} \quad n = 2k+1.$$

Полином $P_n(\omega)$, равный $p_{n+1}(\omega)$, называется полиномом Чебышева второго рода.

Отметим, что эти же результаты можно легко получить, если применить к дифференциальному уравнению метод, указанный в п. 6.2.10 (искать

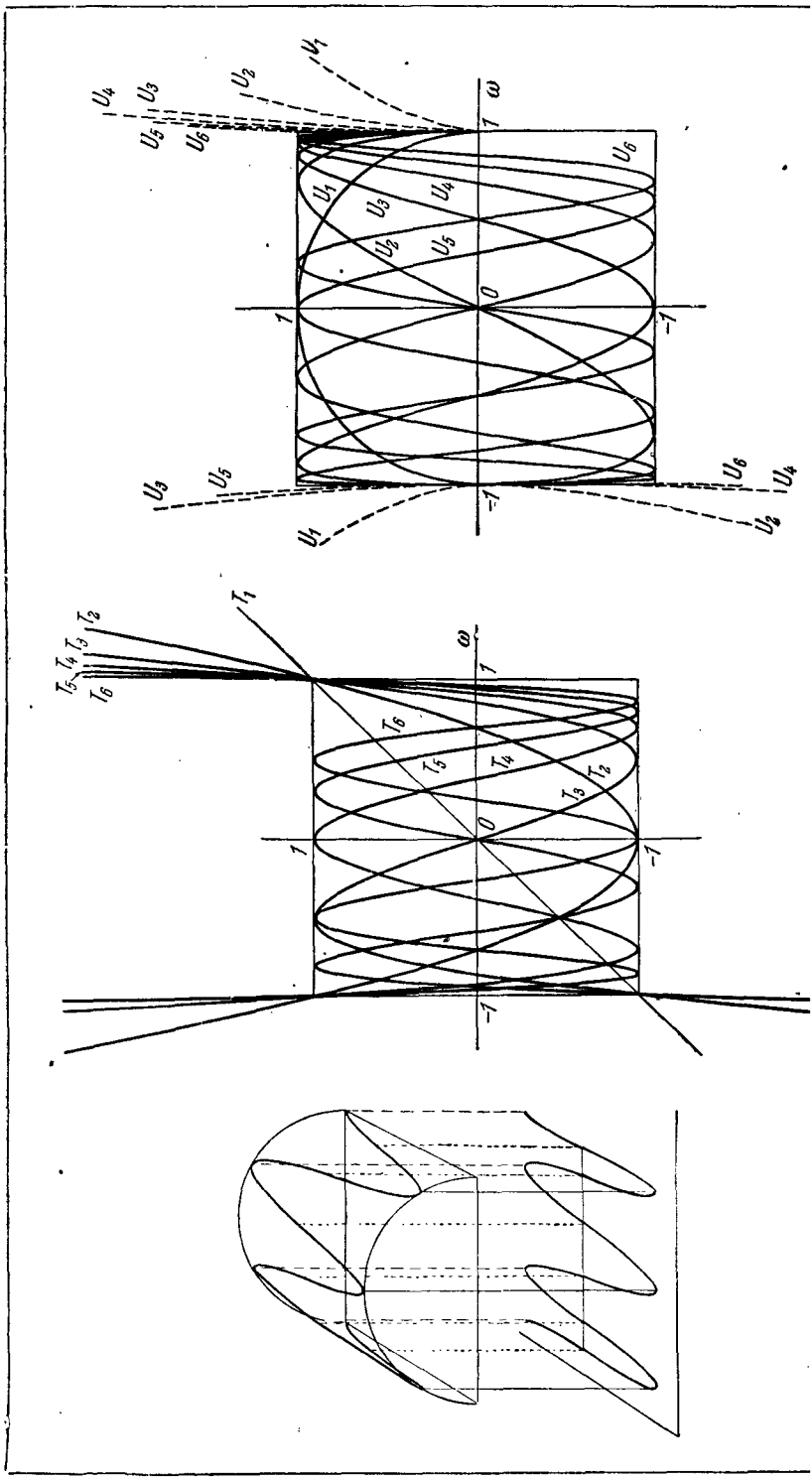
решение в виде обобщенного степенного ряда). Первые одиннадцать полиномов T_n и p_n следующие:

$$
\begin{aligned}
T_0(\omega) &= 1,\\
T_1(\omega) &= \omega,\\
T_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1,\\
T_3(\omega) &= 4\omega^3 - 3\omega,\\
T_4(\omega) &= 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1,\\
T_5(\omega) &= 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega,\\
T_6(\omega) &= 32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1,\\
T_7(\omega) &= 64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega,\\
T_8(\omega) &= 128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1,\\
T_9(\omega) &= 256\omega^9 - 576\omega^7 + 432\omega^5 - 120\omega^3 + 9\omega,\\
T_{10}(\omega) &= 512\omega^{10} - 1280\omega^8 + 1120\omega^6 - 400\omega^4 + 50\omega^2 - 1.
\end{aligned}
\tag{219}
$$

$$
\begin{aligned}
p_0(\omega) &= 0,\\
p_1(\omega) &= 1,\\
p_2(\omega) &= 2\omega,\\
p_3(\omega) &= 4\omega^2 - 1,\\
p_4(\omega) &= 8\omega^3 - 4\omega,\\
p_5(\omega) &= 16\omega^4 - 12\omega^2 + 1,\\
p_6(\omega) &= 32\omega^5 - 32\omega^3 + 6\omega,\\
p_7(\omega) &= 64\omega^6 - 80\omega^4 + 24\omega^2 - 1,\\
p_8(\omega) &= 128\omega^7 - 192\omega^5 + 80\omega^3 - 8\omega,\\
p_9(\omega) &= 256\omega^8 - 448\omega^6 + 240\omega^4 - 40\omega^2 + 1,\\
p_{10}(\omega) &= 512\omega^9 - 1024\omega^7 + 672\omega^5 - 160\omega^3 + 10\omega.
\end{aligned}
\tag{220}
$$

7.9.2. Графики $T_n(\omega)$ и $U_n(\omega)$. Если мы вернемся к формуле (214), то легко увидим, что график полинома Чебышева $T_n(\omega)$ в интервале $(-1, +1)$ представляет собой проекцию синусоиды с периодом $\frac{2\pi}{n}$ и амплитудой единица, обвитой вокруг цилиндра вращения с радиусом единица, на плоскость, параллельную оси цилиндра (см. рис. 7.56). Один из максимумов или минимумов синусоиды находится в плоскости, параллельной плоскости проекции и проходящей через ось цилиндра. Изучаемая проекция представляет собой частный случай кривых Лиссажу. Каждая точка кривой является проекцией двух точек, симметрично расположенных на цилиндре. Это соответствует тому, что согласно (218а) функцию $T_n(\omega)$ можно представить как полусумму проекций двух комплексно сопряженных точек. На рис. 7.56 изображен полином T_6, представляющий собой проекцию шести периодов синусоиды, обвитой вокруг цилиндра.

На рис. 7.57 приведены графики шести первых полиномов Чебышева. Они выходят из $(-1)^n \infty$ для отрицательных и очень больших ω, колеблются $n-1$ раз между абсциссами и ординатами -1 и $+1$ и быстро возрастают к $+\infty$ для $\omega > 1$.


ω
1
0
-1
U_1
U_2
U_3
U_4
U_5
U_6
T_1
T_2
T_3
T_4
T_5
T_6

Если синусоида, обвитая вокруг цилиндра, помещена на нем таким образом, что одна из ее нулевых точек находится на плоскости, проходящей через ось цилиндра параллельно плоскости проекции, то ее проекцией будет кривая $U_n(\omega)$. В области внешней по отношению к интервалу $|\omega| < 1$ функция будет вещественна, только если произвести здесь замену определения, перейдя от $\pm\sqrt{1-\omega^2}$ внутри к $\pm\sqrt{\omega^2-1}$ вне интервала $(-1, +1)$. Первые шесть функций U_n представлены на рис. 7.58.

7.9.3. Основные свойства полиномов Чебышева. *Корни.* Все корни $T_n(\omega)$ вещественны и заключены между -1 и $+1$. Корень ω_i номера i дается формулой

$$\omega_i = \cos(2i-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Эти значения ω_i попарно симметричны, поэтому мы можем написать

$$T_{2k}(\omega) = 2^{2k-1}(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)\ldots(\omega^2-\omega_i^2)\ldots(\omega^2-\omega_k^2),$$
$$T_{2k+1}(\omega) = 2^{2k}\omega(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)\ldots(\omega^2-\omega_i^2)\ldots(\omega^2-\omega_k^2).$$

Корни $U_n(\omega)$ даются выражением

$$\omega_i = \cos i\pi/n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

и здесь мы можем также написать

$$p_{2k}(\omega) = 2^{2k+1}\omega(\omega^2-\omega_1^2)\ldots(\omega^2-\omega_i^2)\ldots(\omega^2-\omega_{k-1}^2),$$
$$p_{2k+1}(\omega) = 2^{2k}(\omega^2-\omega_1^2)\ldots(\omega^2-\omega_i^2)\ldots(\omega^2-\omega_k^2).$$

Корни $T_n(\omega)$ — это значения ω, при которых $U_n(\omega)$ имеет максимум или минимум, и наоборот.

Исходя из дифференциального уравнения (213), нетрудно проверить, что имеют место соотношения, аналогичные формуле Родрига для полиномов Лежандра *):

$$T_n(\omega) = \frac{(-1)^{n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\sqrt{1-\omega^2}\,\frac{d^n}{d\omega^n}(1-\omega^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$U_n(\omega) = \frac{n(-1)^{n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\,\frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}}(1-\omega^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Если $|\omega| > 1$, то во втором уравнении нужно $\sqrt{1-\omega^2}$ заменить на $\sqrt{\omega^2-1}$.

Ортогональность. Если в интеграле

$$\int_0^{\pi}\cos nt\cos mt\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{при } m = n = 0 \end{cases}$$

положить $\cos t = \omega$, то получим

$$\int_{-1}^{+1} T_n(\omega)T_m(\omega)\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{при } m = n = 0. \end{cases}$$

*) Подобные соотношения верны для любой системы ортогональных многочленов с произвольным весом ([4], стр. 570).

Та же подстановка в интеграле

$$\int_0^{\pi} \sin nt \sin mt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \end{cases}$$

приводит к формуле

$$\int_{-1}^{+1} U_n(\omega)\, U_m(\omega) \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Из этих формул видно, что функции $U_n(\omega)$ и $T_n(\omega)$ ортогональны в интервале $(-1, +1)$ с весовой функцией $(1-\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Связь с бесселевыми функциями. Функции Бесселя $J_n(t)$ связаны с полиномами и функциями Чебышева следующими формулами [1]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} J_n(t)\, dt = \begin{cases} 2(-j)^n \frac{T_n(\omega)}{\sqrt{1-\omega^2}} & \text{при } |\omega| < 1, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 1; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} J_n(t) \frac{dt}{t} = \begin{cases} 2(-j)^n \frac{U_n(\omega)}{n} & \text{при } |\omega| < 1, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 1. \end{cases}$$

Эти формулы показывают, что при анализе спектра частот сигналов вида $J_n(t)$ и $\frac{J_n(t)}{t}$ мы должны вводить функции Чебышева и что в этом спектре отсутствуют круговые частоты больше единицы.

Мы видели, что проекция кривых $\cos n\omega$, $\sin n\omega$, обвитых вокруг круглого цилиндра с радиусом единица, на плоскость, параллельную оси цилиндра, — это кривые $T_n(\omega)$ и $U_n(\omega)$. Если обвить вокруг того же цилиндра график периодической функции с периодом 2π, представленной разложением в ряд Фурье:

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega + b_n \cos n\omega),$$

то проекция его на ту же плоскость будет представлена разложением вида

$$b_0 T_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n U_n(\omega) + b_n T_n(\omega)].$$

При практическом применении полиномов Чебышева часто необходимо решать уравнение n-й степени

$$T_n(\omega) = c, \qquad (*)$$

где c — численная константа.

Если $|c| < 1$, уравнение $(*)$ имеет n вещественных корней. Положив $\cos\alpha = \omega$, $\cos\gamma = c$, имеем $\alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}$. Обозначив через $\omega_0 = \cos\frac{\gamma}{n}$, находим следующую формулу для корней $(*)$:

$$\omega = \omega_0 \cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{1-\omega_0^2} \sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

[1]) См. Van der Pol B., Weijers Th., Tchebycheff polynomials and their relation to circular Bessel functions and Lissajous figures, Physica, 1, 1, pp. 78—96.

Если $|c| > 1$, уравнение (*) имеет только один вещественный положительный корень:

$$\omega = \frac{1}{2}\left[(c+\sqrt{c^2-1})^{\frac{1}{n}} + (c-\sqrt{c^2-1})^{\frac{1}{n}}\right]. \tag{221}$$

Производящая функция. Из ряда

$$\frac{1}{1-te^{jx}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{jnx} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos nx + j\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin nx,$$

если положить $\cos x = \omega$, получим

$$\frac{1-t\omega+jt\sqrt{1-\omega^2}}{1-2t\omega+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(\omega) + j\sum_{n=1}^{\infty} t^n U_n(\omega).$$

Отсюда находим две производящие функции:

$$\frac{1-t\omega}{1-2t\omega+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(\omega),$$

$$\frac{t\sqrt{1-\omega^2}}{1-2t\omega+t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n U_n(\omega).$$

Если будем исходить из ряда

$$e^{te^{jx}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{jnx}$$

и обозначим $\cos x = \omega$, то найдем

$$e^{t\omega}\left[\cos\left(t\sqrt{1-\omega^2}\right) + j\sin\left(t\sqrt{1-\omega^2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos(n\arccos\omega) + j\sin(n\arccos\omega)\right]\frac{t^n}{n!}.$$

Отсюда получим две другие производящие функции:

$$e^{t\omega}\cos\left(t\sqrt{1-\omega^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T_n(\omega),$$

$$e^{t\omega}\sin\left(t\sqrt{1-\omega^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U_n(\omega).$$

Рекуррентные соотношения. Если исходить из формул для $\cos(a+b)$ и $\sin(a+b)$ и положить $a = mx$, $b = nx$, $\cos x = \omega$, то легко найдем

$$T_{m+n}(\omega) = T_m(\omega)\,T_n(\omega) - U_m(\omega)\,U_n(\omega),$$
$$U_{m+n}(\omega) = U_m(\omega)\,T_n(\omega) + U_n(\omega)\,T_m(\omega).$$

Точно так же, исходя из формул для $\cos(a-b)$ и $\sin(a-b)$, получим

$$T_{m-n}(\omega) = T_n(\omega)\,T_m(\omega) + U_n(\omega)\,U_m(\omega),$$
$$U_{m-n}(\omega) = U_m(\omega)\,T_n(\omega) - U_n(\omega)\,T_m(\omega).$$

Это дает

$$T_n(\omega)\,T_m(\omega)=\frac{1}{2}[T_{m+n}(\omega)+T_{m-n}(\omega)],$$

$$U_n(\omega)\,U_m(\omega)=\frac{1}{2}[T_{m-n}(\omega)-T_{m+n}(\omega)],$$

$$U_m(\omega)\,T_n(\omega)=\frac{1}{2}[U_{m+n}(\omega)+U_{m-n}(\omega)].$$

Положив $n=1$ в первой и последней формуле, получим рекуррентные соотношения:

$$T_{m+1}(\omega)-2\omega T_m(\omega)+T_{m-1}(\omega)=0,$$
$$U_{m+1}(\omega)-2\omega U_m(\omega)+U_{m-1}(\omega)=0.$$

Формула умножения. Имеем

$$T_n[T_m(\omega)]=T_m[T_n(\omega)]=\cos(nm\arccos\omega)=T_{mn}(\omega).$$

Если $m=2$, то

$$T_n(2\omega^2-1)=2T_n^2(\omega)-1=T_{2n}(\omega);$$

полагая здесь $\omega^2=x$, получим

$$T_n(2x-1)=T_{2n}(\sqrt{x}).$$

7.9.4. Фундаментальное свойство полиномов Чебышева. Для этих полиномов имеет место следующая важная теорема.

Теорема. Пусть $p_n(x)$ — совокупность многочленов степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, заданных на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Рассмотрим

$$M_{p_n}=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_n(x)|.$$

Наименьшее значение M_{p_n} доставляет

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева *).

Полином $T_n(x)$ называется наименее уклоняющимся от нуля.

Доказательство. На отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$ полином $T_n(x)$ имеет экстремумы в $n+1$ точках

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{n}\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

причем

$$T_n(x_k)=\cos k\pi=(-1)^k.$$

Все значения $T_n(x)$ в экстремальных точках равны по модулю, а знаки последовательно чередуются.

Для доказательства теоремы предположим противное. Пусть среди совокупности $p_n(x)$ есть некий многочлен $p_n^*(x)$, который менее уклоняется от нуля, чем $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. Многочлен

$$p_{n-1}^*(x)=p_n^*(x)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

*) Напомним, что $T_n(x)=2^{n-1}x^n+\ldots$

имеет степень $n-1$. По предположению, в $n+1$ точках x_k $|p_n^*(x)| < \left|\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right|$. Поскольку знаки $T_n(x)$ в этих точках чередуются, то многочлен $p_{n-1}^*(x)$ в этих $n+1$ точках последовательно меняет знаки (он положителен там, где $T_n(x_k) < 0$, и отрицателен там, где $T_n(x_k) > 0$). Значит, по теореме Коши многочлен $p_{n-1}^*(x)$ имеет не менее n корней, а это невозможно.

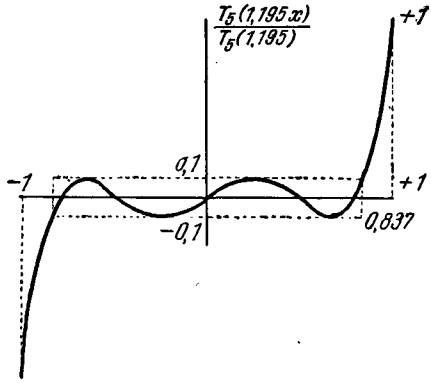


Рис. 7.59.

Из теоремы вытекает, что полином n-й степени

$$Q_n(x) = \frac{T_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{T_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

равный 1 при $x=1$, в промежутке $[-\alpha, \alpha]$ дает наименьшее отклонение от нуля, равное $\pm \frac{1}{T_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$.

Пример. Определим промежуток изменения x, в котором $Q_5(x) \leqslant \frac{1}{10}$. Это означает, что нужно найти α из уравнения $T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 10$. По формуле (221) находим

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}\left[(10+\sqrt{99})^{\frac{1}{5}} + (10-\sqrt{99})^{\frac{1}{5}}\right] = 1{,}195, \quad \alpha = 0{,}837.$$

Функция $Q_5(x)$ изображена на рис. 7.59.

Апроксимация, состоящая в том, чтобы заменять функцию другой, аналитически более простой (этот вопрос подробно разбирается в гл. X), определяемая из условия, чтобы максимальное отклонение было меньше некоторого предела, называется апроксимацией в смысле Чебышева.

7.9.5. Приложение. Если некоторая величина может быть представлена полиномом и если желательно, чтобы изменения ее были наименьшими или, в крайнем случае, в заданном интервале не превосходили определенный предел и, напротив, быстро росли вне этого интервала, то всегда удобно так скомбинировать физические переменные, чтобы исследуемый полином оказался полиномом Чебышева.

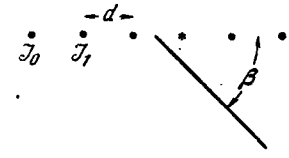


Рис. 7.60.

Пример [1]). Рассмотрим совокупность четного числа электромагнитных излучателей, расставленных по прямой на расстоянии d друг от друга. Они питаются токами $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_n$ (рис. 7.60). Предположим, что цепь симметрична ($\mathcal{J}_p = \mathcal{J}_{n-p}$) и что фаза токов растет в арифметической прогрессии:

$$\mathcal{J}_{p-1} = \mathcal{J}_p e^{j\delta}.$$

Обозначим $\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\beta - \delta$. Рассмотрим поле в направлении β в плоскости, нормальной к плоскости цепи. Оно равно полю, вызванному отдельным

[1]) См. Dolph C. L., Proc. Inst. Rad. Eng., № 6, 1946, p. 335.

излучателем, умноженному на полином

$$P_{n-1}(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

при

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{\mathcal{J}_p}{\mathcal{J}_0} e^{jp\delta}, \quad z = e^{j\Phi}.$$

Если нас интересует только амплитуда поля, то достаточно рассмотреть модуль $P_{n-1}(z)$, который для четного n равен

$$\left|P_{n-1}\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)\right| = \left|2\left[a_0 \cos(n-1)\frac{\Phi}{2} + a_1 \cos(n-3)\frac{\Phi}{2} + \ldots + a_{\frac{n}{2}-1} \cos\frac{\Phi}{2}\right]\right|.$$

Можно легко раскрыть этот полином и расположить его по степеням $\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)$, поскольку каждое слагаемое вида $\cos\left(m\frac{\Phi}{2}\right)$ выражается через $\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)$ формулой

$$T_m\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right).$$

Отождествим $P_{n-1}\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right)$ с полиномом Q степени $n-1$, т. е. с выражением

$$\frac{T_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\Phi}{2}\right)}{T_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Тогда вторичные лепестки излучения будут все одинаковы и равны

$$\frac{1}{T_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}, \qquad (*)$$

в то время как главный лепесток будет равен единице. Если предел (*) будет нам задан, то он определяет величину α, а следовательно, коэффициенты a_n и позволяет найти соотношение между питающими токами. Раствор главного лепестка при этом будет равен

$$\alpha \cos\frac{\pi}{2(n-1)};$$

он наименьший из возможных.

Если же будет задан раствор главного лепестка, то последняя формула определяет α и, следовательно, токи. При этом уровень вторичных лепестков оказывается наиболее низким.

Рассмотрим численный пример. Дана цепь из шести диполей, питаемых токами в одной фазе. Они находятся на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга $\left(n=4,\ \delta=0,\ d=\frac{\lambda}{2}\right)$. Требуется определить соотношения токов $\frac{I_1}{I_0}$, $\frac{I_2}{I_0}$ таким образом, чтобы отношение главного лепестка ко вторичным было равно 10.

Имеем $T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 10$. Отсюда по формуле (221) находим

$$\frac{1}{\alpha} = 1{,}195$$

и, далее,

$$P_5\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right) = 2a_0\cos 5\frac{\Phi}{2} + 2a_1\cos 3\frac{\Phi}{2} + 2a_2\cos\frac{\Phi}{2} =$$
$$= 2a_0T_5\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right) + 2a_1T_3\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right) + 2a_2T_1\left(\cos\frac{\Phi}{2}\right) =$$
$$= 32a_0\cos^5\frac{\Phi}{2} - (40a_0 - 8a_1)\cos^3\frac{\Phi}{2} + (10a_0 - 6a_1 + 2a_2)\cos\frac{\Phi}{2}.$$

Это выражение отождествляем с

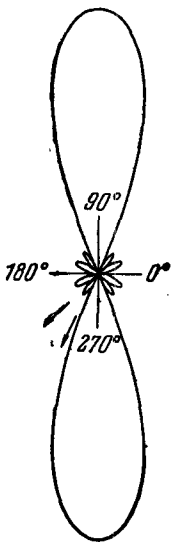


Рис. 7.61.

$$\frac{T_5\left(\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\Phi}{2}\right)}{T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = 2{,}907\cos^5\frac{\Phi}{2} - 2{,}95\cos^3\frac{\Phi}{2} + 0{,}597\cos\frac{\Phi}{2}.$$

Отсюда

$$a_0 = 0{,}0908,$$
$$a_1 = 0{,}0857,$$
$$a_2 = 0{,}101.$$

Следовательно,

$$\frac{I_1}{I_0} = 0{,}944,$$
$$\frac{I_2}{I_0} = 1{,}113.$$

Диаграмма излучения здесь — это график функции $Q_5(x)$ (рис. 7.61), где в качестве переменной взят угол β, так что

$$x = \cos\frac{\Phi}{2} = \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\beta\right).$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

Общая литература

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1957.
2. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
3. Уиттекер Е. и Ватсон Г., Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, 1963.
4. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
5. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
6. Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ. 1948.
7. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
8. Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
9. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
12. Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.

а) Асимптотические разложения

13. Эрдейи А., Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
14. Брейд Н. Г., Асимптотические методы в анализе, ИЛ, 1961.
15. Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.

б) Гиперболические функции

16. Янпольский А. Р., Гиперболические функции, Физматгиз, 1960.
17. Шерватов В. Г., Гиперболические функции, Гостехиздат, 1954.

в) Гамма-функция

18. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1962.

г) Бесселевы функции

19. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
20. Грей Э. и Метьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложение к физике и механике, ИЛ, 1949.
21. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.
22. Фок В. А., Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1946.
23. Mc Lachlan, Bessel functions for engineers, Clarendon Press, Oxford.
24. Petian G., La théorie des fonctions de Bessel, C. N. R. S., 1955.

д) Функции Лежандра

25. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
26. Левин В. И. и Гросберг Ю. И., Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.

е) Функции Матье

27. Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
28. Campbell R., Théorie generale de l'equation de Mathieu, Masson éd., 1955.

ж) Полиномы Чебышева

29. Чебышев П. Л., Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, Изд-во АН СССР, 1949.
30. Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций, Изд-во АН СССР, 1947.
31. Штагер В. В., Чебышевские приближения, применяемые в расчетах электрических схем, Связьиздат, 1960.
32. Никольский С. М., Квадратурные формулы, Физматгиз, 1958.

ГЛАВА VIII

СИМВОЛИЧЕСКОЕ, ИЛИ ОПЕРАЦИОННОЕ, ИСЧИСЛЕНИЕ

8.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе рассматривается символическое, или операционное, исчисление и его приложения к изучению переходных режимов электрических цепей.

8.1.1. Ограничение области применения. Необходимо оговорить условия, ограничивающие множество электрических цепей, к которым можно применять операционный метод.

Следует исключить цепи, параметры и конфигурация которых меняются во времени.

Следует также исключить нелинейные электрические цепи. Для линейных цепей справедлив принцип суперпозиции: если две электродвижущие силы e_1 и e_2, поочередно включенные между двумя точками цепи, вызывают во взятой наугад ветви соответственно токи i_1 и i_2, то электродвижущая сила e_1+e_2, включенная между этими же двумя точками, вызовет в той же ветви ток i_1+i_2.

Это основное свойство линейных дифференциальных уравнений, которыми описываются линейные цепи: сумма двух частных интегралов представляет собой также частный интеграл.

Поэтому нельзя применять операционное исчисление к цепям, содержащим индукционные катушки с железными сердечниками (явление гистерезиса) или вакуумные лампы, работающие за прямолинейной частью характеристик.

Короче говоря, оба предыдущих ограничения требуют от электрических цепей, к которым применим аппарат операционного исчисления, режима, описываемого линейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных) с постоянными коэффициентами.

Кроме того, будем считать, что рассматриваемые электрические цепи диссипативны. Такие цепи стремятся к состоянию покоя, если устранена причина, нарушившая равновесие. Иными словами, показатель степени у экспонент, фигурирующих в выражениях для переходных токов, должен иметь отрицательную вещественную часть:

$$e^{(\alpha+j\beta)t},\ \alpha<0.$$

8.1.2. Расчет установившихся режимов. Мы уже рассмотрели в гл. I (п. 1.2.1 и последующие), как рассчитать установившийся синусоидальный режим электрической цепи.

Предположим, что синусоидальная электродвижущая сила $u(t)=\mathcal{U}e^{j\omega t}$ приложена в течение очень длительного времени. При этом возмущение, внесенное внезапным приложением этой э. д. с., успело экспоненциально

затухнуть и остался только ток, соответствующий установившемуся режиму.

Рассмотрим сначала простую цепь (ветвь, звено, узел). Электродвижущая сила $u(t)$ создает в этой цепи с комплексным сопротивлением $Z(j\omega)$, или комплексной проводимостью $A(j\omega)=\frac{1}{Z(j\omega)}$, установившийся ток

$$i(t)=\mathcal{J}e^{j\omega t},$$

где

$$\mathcal{J}=\frac{\mathcal{U}}{Z(j\omega)} \text{ или } \mathcal{J}=\mathcal{U}A(j\omega).$$

Если требуется найти установившийся ток, вызванный вещественной электродвижущей силой

$$u(t)=U\cos(\omega t+\varphi),$$

то достаточно взять вещественную часть $i(t)$.

Положим, что мы имеем дело со сложной цепью и требуется найти ток, соответствующий установившемуся режиму в контуре m при включении электродвижущей силы $u(t)$ в контур l. Все сказанное выше остается в силе при условии замены $Z(j\omega)$ на взаимное комплексное сопротивление контуров l и m, определенное в п. 1.2.8.

Если электродвижущая сила не синусоидальна, а только периодична, то разложение в ряд Фурье легко приведет к предыдущему случаю. Действительно, если T — период, то, как мы видели в п. 2.1.8,

$$u(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m e^{mj\omega t},$$

где

$$c_m=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T}u(t)\,e^{-mj\omega t}\,dt.$$

Поэтому ток $i(t)$ будет

$$i(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m\frac{e^{mj\omega t}}{Z(mj\omega)}$$

или

$$i(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m A(mj\omega)\,e^{mj\omega t}.$$

Здесь через $Z(mj\omega)$ и $A(mj\omega)$ обозначены комплексное сопротивление и комплексная проводимость простой цепи на круговой частоте $m\omega$ или же, если речь идет о сложной цепи, комплексное взаимное сопротивление и комплексная взаимная проводимость.

8.1.3. Расчет переходных режимов. Если электродвижущая сила не периодична, то достаточно представить ее интегралом Фурье. Разложение на сумму гармоник с одинаковыми интервалами по частоте можно заменить суммой гармоник, непрерывно пробегающих интервал частот от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда

$$i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(j\omega)\,G(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

или

$$i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\omega)}{Z(j\omega)}e^{j\omega t}\,d\omega,$$

где

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau,$$

причем функции $A(j\omega)$ и $Z(j\omega)$ имеют смысл, указанный выше.

Таким образом, задача расчета переходных режимов полностью решена, по крайней мере теоретически. На практике эта задача приводит к сложным вычислениям. Действительно, требуется вычислить $G(\omega)$ с помощью определенного интеграла. Этот интеграл в большинстве случаев легко найти, так как соответствующий неопределенный интеграл часто выражается с помощью элементарных функций. Но вычисление $i(t)$ более затруднительно, потому что неопределенный интеграл от $\frac{G(\omega)}{Z(j\omega)}e^{j\omega t}$ большей частью нельзя выразить через элементарные функции.

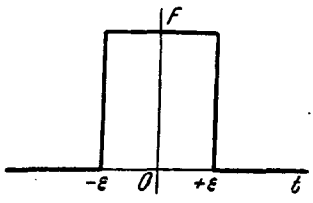


Рис. 8.1.

Попробуем показать это на очень простом примере. Приложим к цепи, состоящей из последовательно включенных самоиндукции, сопротивления и емкости, электродвижущую силу, изображенную на рис. 8.1. Найдем теперь ток как функцию времени. Имеем

$$G(\omega)=\frac{F}{\pi}\,\frac{\sin\omega\varepsilon}{\omega}.$$

Отсюда

$$i(t)=j\,\frac{CF}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\varepsilon e^{j\omega t}\,d\omega}{j\omega RC+(1-LC\omega^2)}.$$

Найти $i(t)$ весьма затруднительно.

Следует, однако, заметить, что применение теоремы вычетов и интегрирования по контуру в комплексной плоскости при вычислении определенных интегралов приводит к приемам, подобным приемам, вытекающим из применения формулы обращения Меллина—Фурье, рассмотренной дальше (п. 8.3.22).

Примечание. До сих пор мы находили токи, вызванные электродвижущей силой, заданной как функция времени. Это привело нас к определению комплексного сопротивления и комплексной проводимости. В более общих случаях, когда нужно найти реакцию (до сих пор это был ток) на воздействие (до сих пор это была электродвижущая сила) в установившемся режиме, мы вынуждены ввести понятие обобщенного полного сопротивления или полной проводимости. Тогда

$$\text{реакция} = \text{воздействие} \times \text{обобщенная полная проводимость} = \frac{\text{воздействие}}{\text{обобщенное полное сопротивление}}.$$

В дальнейшем воздействия будут напряжениями, а реакции — токами, но они могут быть заменены другими воздействиями, например силами, и реакциями, которые могут быть тогда скоростями, или всякой другой парой „воздействие — реакция“

8.1.4. Единичная ступень. Так как разложение непериодической электродвижущей силы на синусоидальные составляющие приводит к весьма трудоемким расчетам, мы можем спросить себя, действительно ли это разложение так хорошо отвечает задаче нахождения реакции на внезапно приложенное воздействие и не лучше ли подошло бы разложение на сумму других простейших функций. Простейшая выбранная нами функция — это так называемая единичная функция Хевисайда $\Upsilon(t)$, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 0$. Чтобы напомнить о форме графика этой функции, назовем ее единичной ступенью (рис. 8.2). Электродвижущие силы, или, более общо, воздействия, внезапно приложенные в момент времени $t = 0$, представлены функциями, равными нулю при $t < 0$ и равными непрерывной функции времени $h(t)$ при $t > 0$ (рис. 8.3). Такие функции можно записать в виде

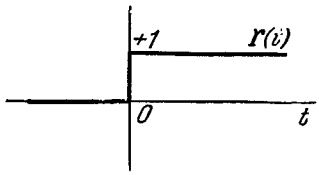


Рис. 8.2.

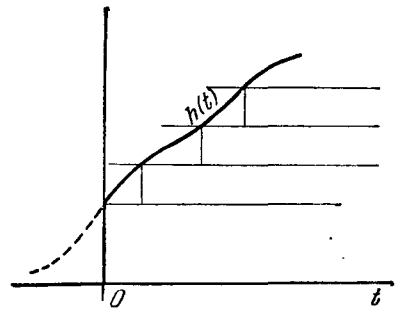


Рис. 8.3.

$$h(t)\,\Upsilon(t).$$

Обычно мы будем вместо $h(t)\,\Upsilon(t)$ писать $h(t)$, но не следует никогда забывать, что, за исключением специально оговоренных случаев, функция $h(t)$ равна нулю при $t < 0$.

Функция $h(t)\,\Upsilon(t)$ может быть разложена на ступени, как показано на рис. 8.3. Это разложение приводит к гораздо более простым, а главное, к более автоматическим расчетам при помощи операционного исчисления.

8.2. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ХЕВИСАЙДА

Для цепи, находящейся в равновесии, основная задача — это отыскание токов и потенциалов при приложении некоторой электродвижущей силы в момент времени $t = 0$. Цепь должна находиться в равновесии до приложения электродвижущей силы, иначе говоря, токи и заряды тождественно равны нулю от $t = -\infty$ до $t = 0$. Это основное предположение.

8.2.1. Определение переходной реакции. Дана цепь, находящаяся в равновесии. Введем внезапно в контур l цепи воздействие (в данном случае электродвижущую силу), равное единичной ступени $\Upsilon(t)$.

Пусть $A_{m,\,l}(t)$ — ток в контуре m этой цепи. Тогда принято говорить, что $A_{m,\,l}(t)$ — переходная реакция контура m относительно контура l. Можно показать с помощью обобщенной теоремы взаимности, что

$$A_{l,\,m}(t) = A_{m,\,l}(t).$$

Очевидно, что знание всех таких функций, как $A_{m,\,l}(t)$, решает поставленную вначале задачу для электродвижущей силы $\Upsilon(t)$. Мы покажем, что знание $A_{m,\,l}(t)$ достаточно также для решения основной задачи при любой электродвижущей силе, если только она приложена в момент времени $t = 0$.

Если приложить постоянную электродвижущую силу E в момент $t=0$, то ток равен $EA(t)$ (для простоты записи опускаем индексы). Если ту же электродвижущую силу E приложить не в момент $t=0$, а в момент τ, то ток будет равен $EA(t-\tau)$. Рассмотрим теперь электродвижущую силу любого вида, приложенную в момент $t=0$, например $E(t)$. Если разделить промежуток времени от 0 до t на n отрезков Δt, как это показано на рис. 8.4, то можно рассматривать воздействие этой электродвижущей силы как результат воздействия постоянной электродвижущей силы $E(0)$, приложенной в момент $t=0$, затем электродвижущей силы $\Delta_1 E$, приложенной в момент времени Δt, и т. д. до $\Delta_n E$, приложенной в момент $n\Delta t = t$. Ток можно рассматривать как сумму токов

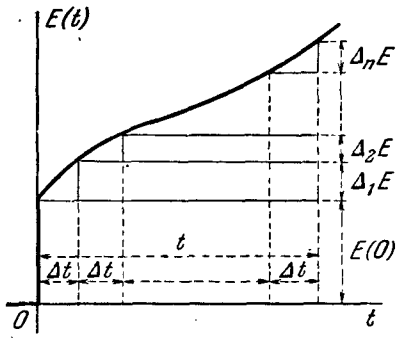


Рис. 8.4.

$$E(0)\,A(t),\ \Delta_1 EA(t-\Delta t),\ \Delta_2 EA(t-2\Delta t),\ \ldots,\ \Delta_n EA(0).$$

Если увеличивать до бесконечности число n, то пределом ломаной, изображенной на рис. 8.4, будет кривая $E(t)$. Заменяя ΔE дифференциалом $dE = E'(\tau)\,d\tau$ и переходя от суммы к интегралу, получим

$$i(t) = E(0)\,A(t) + \int_0^t A(t-\tau)\,E'(\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

Так как $E(t)$ задана, то достаточно знать $A(t)$ (переходную реакцию), чтобы найти $i(t)$.

Предыдущее выражение может иметь несколько видов. Заменим в равенстве (1) τ на $t-\theta$. Тогда интеграл принимает вид

$$\int_t^0 E'(t-\theta)\,A(\theta)(-d\theta).$$

Приняв снова прежние обозначения, получаем равенство

$$i(t) = E(0)\,A(t) + \int_0^t A(\tau)\,E'(t-\tau)\,d\tau, \qquad (2)$$

которое эквивалентно (1).

Если интегрировать по частям, то

$$\int_0^t A(t-\tau)\,E'(\tau)\,d\tau = [A(t-\tau)\,E(\tau)]_0^t + \int_0^t E(\tau)\,A'(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^t A(t-\tau)\,E'(\tau)\,d\tau + A(t)\,E(0) = A(0)\,E(t) + \int_0^t E(\tau)\,A'(t-\tau)\,d\tau,$$

поэтому

$$i(t) = A(0)\,E(t) + \int_0^t E(\tau)\,A'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

Сделав в этом выражении замену переменной $\tau = t - \theta$, получим

$$i(t) = A(0)E(t) + \int_0^t E(t-\tau)A'(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Можно заметить, что формулы (1) — (4) являются результатом операции дифференцирования[1]) по t либо $\int_0^t E(t-\tau)A(\tau)\,d\tau$, либо $\int_0^t E(\tau)A(t-\tau)\,d\tau$. Поэтому имеем также

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)E(t-\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)E(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Формулы (1) — (6) показывают, что знание переходной реакции достаточно для вычисления $i(t)$.

8.2.2. Вычисление переходной реакции. Рассмотрим в цепи два контура m и l. Мы видели (п. 1.2.8), что если приложить напряжение $e^{j\omega t}$ в контуре l, то установившийся ток, идущий в контуре m, будет равен

$$I_m = \frac{e^{j\omega t}}{Z_{lm}(j\omega)}.$$

---

[1]) Припомним здесь формулу дифференцирования под знаком интеграла для случая, когда пределы интегрирования переменны. Требуется продифференцировать по t

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau)\,d\tau.$$

Дадим t приращение h. Мы легко получим

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_{a(t+h)}^{a(t)} f(t+h, \tau)\,d\tau + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{f(t+h, \tau)-f(t, \tau)}{h}\,d\tau + \frac{1}{h}\int_{b(t)}^{b(t+h)} f(t+h, \tau)\,d\tau.$$

Для вычисления первого и третьего интегралов воспользуемся теоремой о среднем значении:

$$\int_a^t f(\tau)\,d\tau = (b-a)f(\mu), \quad a < \mu < b.$$

Если устремить h к нулю, то в пределе получим

$$F'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t}\,d\tau + b'(t)f[t, b(t)] - a'(t)f[t, a(t)].$$

Это выражение, примененное к формулам (5) и (6), дает, как легко заметить, формулы (1) — (4).

Приложим напряжение e^{pt} в том же контуре (p — вещественное или комплексное число, причем $R(p) > 0$). Тогда ток установившегося режима, текущий в контуре m, будет равен

$$i_m = \frac{e^{pt}}{Z_{lm}(p)}. \tag{7}$$

Выражение $Z_{lm}(p)$ представляет собой обобщенное взаимное сопротивление контуров l и m:

$$Z_{lm} = \frac{D(p)}{M_{lm}(p)}.$$

$D(p)$ — симметричный определитель:

$$D(p) = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix},$$

$M_{lm}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента z_{lm}.

Элементы $z_{11}, \dots, z_{nn}$ — это собственные и взаимные обобщенные сопротивления контуров. Имеем

$$z_{lm} = pL_{lm} + R_{lm} + \frac{1}{pC_{lm}}.$$

Символы L_{lm}, R_{lm}, C_{lm} были определены в п. 1.2.8.

Рассмотрим формулу (7). Если положить

$$y_{lm}(p) = \frac{1}{Z_{lm}(p)},$$

получаем

$$i_m = y_{lm}(p)\, e^{pt}.$$

Функция i_m имеет ту же форму, что и воздействие e^{pt}. Это очевидно, поскольку речь идет об установившемся токе. В соответствии с выражением „переходная реакция" назовем i_m „изоморфной реакцией". Коэффициент $y_{lm}(p)$, который можно было бы назвать обобщенной переходной проводимостью, будет называться здесь коэффициентом изоморфной реакции.

Если требуется записать общий ток I_m, идущий в контуре m при внезапном включении электродвижущей силы e^{pt} в контуре l, нужно прибавить к установившемуся току i_m свободный ток $x_m(t)$:

$$I_m(t) = \frac{e^{pt}}{Z_{lm}(p)} + x_m(t). \tag{8}$$

Мы знаем также другое выражение для тока $I_m(t)$; оно дается формулой (5), где $E(t) = e^{pt}$. Тогда

$$\begin{aligned} I_m(t) &= \frac{d}{dt}\left[e^{pt} \int_0^t A_{lm}(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau \right], \\ I_m(t) &= pe^{pt} \int_0^t A_{lm}(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau + A_{lm}(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Приравняем выражения (8) и (9):

$$y_{lm}(p) = \frac{1}{Z_{lm}(p)} = p \int_0^t A_{lm}(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau + [A_{lm}(t) - x_m(t)]\, e^{-pt}.$$

Если устремить t к бесконечности, то

$$y_{lm}(p) = \frac{1}{Z_{lm}(p)} = p\int_0^\infty A_{lm}(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau. \qquad (10)$$

Мы видим, что переходная реакция, знать которую необходимо и достаточно для определения тока, соответствующего приложенной электродвижущей силе любого вида, связана с величиной, обратной обобщенному полному сопротивлению, или с коэффициентом изоморфной реакции $y(p)$, интегральным уравнением. Эта формула соответствия между функцией $y(p)$ и функцией $A(t)$ называется „интегральным уравнением Карсона". Такое функциональное соотношение позволяет, зная коэффициент изоморфной реакции (его можно получить простым вычислением), узнать переходную реакцию, а следовательно, и реакцию на совершенно произвольное воздействие. Поэтому интегральное уравнение Карсона — это мостик, позволяющий перейти от установившихся токов к переходным.

Изучение пар функций $f(p)$ и $h(t)$, связанных соотношением

$$f(p) = p\int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

является целью операционного исчисления. Для того чтобы коротко выразить, что $f(p)$ и $h(t)$ связаны таким соотношением, принято пользоваться особым значком, соединяющим эти функции. Так как функции, образующие пару, не равноправны, то значок не симметричен. Например,

$$f(p) \subset h(t),$$
$$h(t) \supset f(p).$$

В интересующем нас случае мы видим, что, вычислив $y_{lm}(p) = \frac{1}{Z_{lm}(p)}$ уже описанным способом, можно получить $A_{lm}(t)$ из соотношения

$$A_{lm}(t) \supset \frac{1}{Z_{lm}(p)}.$$

Дальнейшее рассуждение позволит осуществить это вычисление. Тогда легко будет вычислить и ток.

Ток, идущий в контуре m при включении в контур l электродвижущей силы $E(t)$ в момент $t = 0$, равен

$$i_m(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A_{lm}(\tau)\, E(t-\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t A_{lm}(t-\tau)\, E(\tau)\, d\tau.$$

Только теперь становится существенной форма электродвижущей силы. Дальше (п. 8.3.10) мы увидим, что если

$$E(t) \supset U(p),$$

т. е. если $U(p)$ — функция, выраженная интегралом

$$U(p) = p\int_0^\infty E(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

и, как мы уже имеем,

$$A_{lm}(t) \supset \frac{1}{Z_{lm}(p)},$$

то соотношение

$$i_m(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A_{tm}(\tau)\,E(t-\tau)\,d\tau$$

можно заменить на

$$i_m(t) \supset \frac{U(p)}{Z_{tm}(p)} = y_{tm}(p)\,U(p). \qquad (11)$$

Здесь мы снова встречаем закон Ома, но уже в операционной форме. Это обобщение закона Ома для установившихся синусоидальных режимов:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{U}}{Z} = A\mathcal{U},$$

которое само являлось обобщением классического закона постоянных токов

$$I = \frac{U}{R}.$$

8.3. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8.3.1. Преобразование Лапласа. Преобразование Карсона. Операционное исчисление рассматривает либо функции, связанные интегральным преобразованием Карсона

$$f(p) = p\int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

либо функции, связанные преобразованием Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Можно заметить, что между обеими функциями $f(p)$ и $F(p)$, связанными с $h(t)$ этими формулами, имеется соотношение

$$pF(p) = f(p).$$

Интегральное уравнение Карсона естественно входит в изучение электрических цепей. Мы, однако, будем пользоваться преобразованием Лапласа, согласно общему направлению, намечающемуся в международной технической литературе.

Мы записывали функциональное соотношение, определенное интегральным уравнением Карсона, в виде

$$f(p) \subset h(t),$$
$$h(t) \supset f(p).$$

В функциональном соотношении, определенном преобразованием Лапласа, следует пользоваться другим значком:

$$F(p) \sqsubset h(t),$$
$$h(t) \sqsupset F(p).$$

Говорят, что $F(p)$ — „изображение" $h(t)$ и, наоборот, $h(t)$ — это „оригинал" $F(p)$. Следует отметить, что p — комплексная, а t — вещественная переменные.

Если пользоваться преобразованием Лапласа, то соотношение (11) сохранится. Оно будет иметь вид

$$i_m(t) \sqsupset \frac{U(p)}{Z_{lm}(p)} = y_{lm}(p)\,U(p). \tag{12}$$

Но здесь $U(p) \sqsupset E(t)$ (преобразование Лапласа).

Формула (12) показывает, что в случае преобразования Лапласа переходная реакция имеет вид

$$A_{lm}(t) = A_{ml}(t) \sqsupset \frac{1}{pZ_{ml}(p)}.$$

Теперь следует ответить на такой существенный вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция $h(t)$, чтобы существовало изображение $F(p)$.

Для сходимости интеграла

$$\int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}\,dt \tag{13}$$

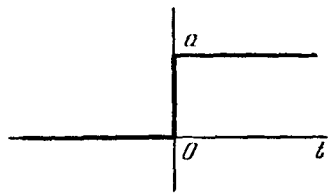


Рис. 8.5.

необходимо и достаточно, чтобы

1) интеграл $\int_0^A h(t)\,dt$ существовал при любом конечном $A > 0$;

2) существовало такое число $\sigma > 0$, что

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\sigma t} \int_0^t h(t)\,dt = 0.$$

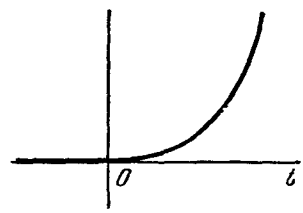


Рис. 8.6.

Ввиду того что проверка существования изображения по необходимому и достаточному условию, как правило, оказывается затруднительной, приведем достаточное условие, более удобное практически:

Если $h(t)$ кусочно-непрерывна в любом конечном промежутке и существуют такие положительные числа M и σ, что

$$|h(t)| < Me^{\sigma t},$$

то $h(t)$ имеет изображение.

На протяжении гл. VIII мы все время будем предполагать, что все рассматриваемые функции вещественной переменной имеют изображения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $h(t) \equiv a$. Найдем изображение функции (рис. 8.5)

$$a\Upsilon(t).$$

Имеем

$$a \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{a}{p}.$$

Отсюда

$$\frac{a}{p} \sqsubset a\Upsilon(t).$$

Найдем изображение функции $h(t) = \frac{t^n}{n!}$ (множитель — единичная ступень — подразумевается). Эта функция представлена на рис. 8.6. Изображение

имеет вид

$$F(p)=\int_0^\infty \frac{t^n}{n!}e^{-pt}\,dt.$$

Этот интеграл легко вычисляется по частям:

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{n!}e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-pt}\,dt=\ldots=\frac{1}{p^{n+1}}.$$

Отсюда

$$p^{-(n+1)}\sqsubset\frac{t^n}{n!}. \tag{14}$$

Правила операционного исчисления

8.3.2. Сложение. Так как преобразование Лапласа — операция линейная, то очевидно, что из

$$F_1(p)\sqsubset h_1(t),\ F_2(p)\sqsubset h_2(t),\ \ldots,\ F_n(p)\sqsubset h_n(t)$$

следует

$$F_1(p)+F_2(p)+\ldots+F_n(p)\sqsubset h_1(t)+h_2(t)+\ldots+h_n(t).$$

Изображение суммы равно сумме изображений. Оригинал суммы равен сумме оригиналов. Это верно при любом числе слагаемых. Отсюда вытекает следствие. Рассмотрим разложение в степенной ряд функции $h(t)$:

$$h(t)=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{t^n}{n!}+\ldots$$

Согласно правилу сложения и соотношению (14), получаем разложение функции $F(p)$ в ряд по возрастающим степеням $1/p$:

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

Если же, зная функцию $F(p)$, мы хотим определить функцию $h(t)$, то обратная операция позволит нам получить разложение $h(t)$ в степенной ряд из разложения $F(p)$ по убывающим степеням $1/p$. Может показаться, что если сделать оговорку о существовании и сходимости рассмотренных выше рядов, то этот прием можно считать общим, но, к сожалению, редко оказывается возможным суммировать степенные ряды. Даже если не требуется аналитическое выражение искомой функции, сходимость может оказаться не достаточно быстрой для численных методов. Однако в некоторых случаях этот способ можно с успехом применять.

Пример 1. Найдем оригинал функции $F(p)=\frac{1}{p+a}$. Разложим $\frac{1}{p+a}$ в ряд по возрастающим степеням $\frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p+a}=\frac{1}{p}\,\frac{1}{1+\frac{a}{p}}=\frac{1}{p}-\frac{a}{p^2}+\frac{a^2}{p^3}-\ldots+(-1)^n\frac{a^n}{p^{n+1}}+\ldots$$

Заменим в этом разложении $\frac{1}{p^{n+1}}$ на $\frac{t^n}{n!}$. Тогда

$$h(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^nt^n}{n!}.$$

Это разложение в степенной ряд e^{-at}. Следовательно,

$$\frac{1}{p+a} \sqsubset e^{-at}. \tag{15}$$

Приложение. Рассмотрим электрический контур R, L, C (рис. 8.7). Включим в момент $t=0$ постоянную электродвижущую силу E. Найдем ток $i(t)$. Формула (12) дает

$$i(t) \sqsupset \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

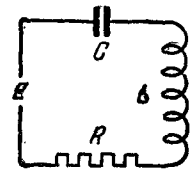


Рис. 8.7.

Здесь

$$U(p)=\frac{E}{p},$$

а

$$Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp}.$$

Тогда

$$i(t) \sqsupset \frac{E}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}} = \frac{E}{L(p_2-p_1)}\left(\frac{1}{p-p_2}-\frac{1}{p-p_1}\right),$$

где

$$p_1=-\frac{R}{2L}+j\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}},$$

$$p_2=-\frac{R}{2L}-j\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$$

Оригиналы $\frac{1}{p-p_1}$ и $\frac{1}{p-p_2}$ соответственно равны $e^{p_1 t}$ и $e^{p_2 t}$. Поэтому

$$i(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Пример 2. Найдем изображение $J_0(t)$. Известно, что

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Заменим в этом разложении t^{2n} на $\frac{(2n)!}{p^{2n+1}}$. Тогда

$$F(p)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{p^{2n}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\frac{1}{p^{2n}}.$$

Можно узнать здесь разложение $\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно,

$$J_0(t) \sqsupset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{16}$$

Пример 3. Докажем следующее соответствие:

$$\frac{x^n}{p^{n+1}}e^{-\frac{x}{p}} \sqsubset (xt)^{\frac{n}{2}}J_n\left(2\sqrt{xt}\right), \tag{17}$$

где x — параметр.

Разлагая обе части в ряд, убедимся, что

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^{r+n}}{p^{r+n+1}}\frac{1}{r!}\sqsubset\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(r+n)!}x^{r+n}t^{r+n}.$$

Сравнивая общие члены

$$(-1)^r\frac{x^{r+n}}{p^{r+n+1}}\frac{1}{r!}\sqsubset(-1)^r\frac{x^{r+n}t^{r+n}}{r!\,(r+n)!},$$

получаем

$$\frac{1}{p^{r+n+1}}\sqsubset\frac{t^{r+n}}{(r+n)!},$$

что уже известно.

Если в общей формуле положить $n=0$, а затем $n=1$, то получаем

$$\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}}\sqsubset J_0(2\sqrt{xt}), \tag{18}$$

$$\frac{x}{p^2}e^{-\frac{x}{p}}\sqsubset\sqrt{xt}\,J_1(2\sqrt{xt}). \tag{19}$$

Таблица, помещенная в пп. 8.3.28—8.3.30, — нечто вроде операционного словаря — дает большое число преобразований. Приведем быстрый и удобный способ вычислений с использованием этого словаря.

Решение физической или математической задачи ведет к отысканию функции $h(t)$ — оригинала известной функции $F(p)$. Просмотрев словарь, мы найдем соответствие между некоторой функцией $g(t)$ и $\Phi(p)$, близкой к функции $F(p)$. Простыми преобразованиями можно добиться совпадения ее с $F(p)$. Применение правил соответствия, которые устанавливаются ниже, даст коррективы, касающиеся одновременно и функции $g(t)$, и задача будет решена.

Во всем последующем мы будем предполагать, что функции $F(p)$ и $h(t)$ связаны преобразованием Лапласа:

$$F(p)\sqsubset h(t), \tag{20}$$

иначе говоря,

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}h(t)\,dt. \tag{21}$$

8.3.3. Изменение масштаба. Если заменить в преобразовании Лапласа (21) p на kp (k — положительное вещественное число), то

$$F(kp)=\int_0^{\infty}e^{-kpt}h(t)\,dt.$$

Заменив t на $\frac{t}{k}$, получаем

$$F(kp)=\frac{1}{k}\int_0^{\infty}e^{-pt}h\left(\frac{t}{k}\right)dt.$$

Это равенство дает

$$kF(kp)\sqsubset h\left(\frac{t}{k}\right).$$

Продифференцируем соотношение (22) по k. Это допустимо [1]), потому что k — параметр, не зависящий ни от p, ни от t. Получаем

$$F(kp)+kpF'(kp)\sqsubset -\frac{t}{k^2}h'\left(\frac{t}{k}\right).$$

Если положить $k=1$, то

$$\frac{d}{dp}[pF(p)]\sqsubset -th'(t). \tag{23}$$

Разделим выражение (22) на k:

$$F(kp)\sqsubset \frac{1}{k}h\left(\frac{t}{k}\right).$$

Проинтегрируем [2]) обе части по k от 0 до 1:

$$\int_0^1 F(kp)\,dk\sqsubset \int_0^1 \frac{h\left(\frac{t}{k}\right)}{k}\,dk.$$

Положим $s=kp$, а $x=\frac{t}{k}$. Тогда

$$\frac{1}{p}\int_0^p F(s)\,ds\sqsubset \int_t^\infty \frac{h(x)}{x}\,dx. \tag{24}$$

Произведем предыдущее интегрирование от 1 до бесконечности. При той же замене переменных находим

$$\frac{1}{p}\int_p^\infty F(s)\,ds\sqsubset \int_0^t \frac{h(x)}{x}\,dx. \tag{25}$$

Проинтегрируем по p от нуля до бесконечности обе части равенства (21). Так как

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dp=\frac{1}{t},$$

получаем равенство

$$\int_0^\infty F(p)\,dp=\int_0^\infty \frac{h(t)\,dt}{t}. \tag{26}$$

---

[1]) Дифференцирование по параметру k обеих частей

$$F(p,k)\sqsubset h(t,k)$$

сводится, исходя из определяющей формулы (21), к дифференцированию под знаком интеграла. Новый интеграл сходится, т. е. $\partial h/\partial k$ имеет изображение, если только условия, оговоренные в п. 8.3.1, выполняются.

[2]) Интегрирование по параметру k обеих частей равенства

$$F(p,k)\sqsubset h(t,k)$$

сводится, исходя из формулы (21), к изменению порядка интегрирования

$$\int_{k_1}^{k_2} dk\int_0^\infty e^{-pt}h(t,k)\,dt,$$

что возможно, если интеграл $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_{k_1}^{k_2} h(t,k)\,dk$ существует.

8.3.4. Дифференцирование функции $h(t)$. Умножим на p обе части преобразования Лапласа и проинтегрируем по частям. Получим

$$pF(p)=\int_0^\infty pe^{-pt}h(t)\,dt=[-e^{-pt}h(t)]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-pt}h'(t)\,dt,$$

т. е.

$$pF(p)-h(0)\sqsubset h'(t). \tag{27}$$

Повторив n раз тот же прием, получаем последовательным интегрированием по частям

$$p^nF(p)-p^{n-1}h(0)-p^{n-2}h'(0)-\ldots-ph^{(n-2)}(0)-h^{(n-1)}(0)\sqsubset h^{(n)}(t). \tag{28}$$

Если $h(0)=0$, то выражение (27) принимает вид

$$pF(p)\sqsubset h'(t). \tag{29}$$

Если $h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(n-1)}(0)=0$, то выражение (28) преобразуется в

$$p^nF(p)\sqsubset h^{(n)}(t). \tag{30}$$

8.3.5. Интегрирование функции $h(t)$. Найдем изображение функции $\int_0^t h(t)\,dt$. Согласно формуле преобразования Лапласа, это изображение равно

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t h(t)\,dt\right]dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t h(t)\,dt\right]dt=\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\int_0^t h(t)\,dt\right]_0^\infty+$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}h(t)\,dt^*)=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}h(t)\,dt=\frac{F(p)}{p}.$$

Следовательно,

$$\frac{F(p)}{p}\sqsubset\int_0^t h(t)\,dt. \tag{31}$$

Тот же прием, повторенный n раз, дает

$$\frac{F(p)}{p^n}\sqsubset\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t h(t)\,dt. \tag{32}$$

Формулы (30) и (32) показывают, что дифференцирование и интегрирование функции $h(t)$ приводит соответственно к умножению и делению изображения $F(p)$ на p.

*) Здесь следует учесть, что

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-pt}\int_0^t h(t)\,dt=0.$$

Аналитические операции над $h(t)$ приводят к алгебраическим операциям над $F(p)$. Этим объясняется громадное упрощение, которое вносят в анализ приемы операционного исчисления.

8.3.6. Теорема смещения. Дадим переменной p приращение λ. Тогда преобразование Лапласа примет вид

$$F(p+\lambda)=\int_0^\infty e^{-pt-\lambda t}h(t)\,dt,$$

$$F(p+\lambda)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{-\lambda t}h(t)\,dt.$$

Отсюда

$$F(p+\lambda)\sqsubset e^{-\lambda t}h(t). \qquad (33)$$

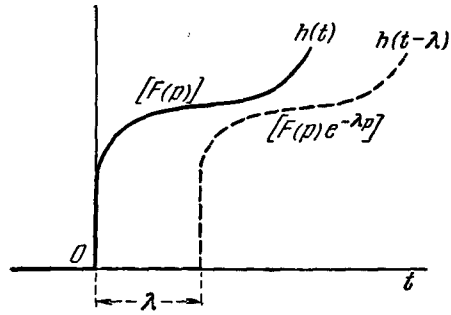


Рис. 8.8.

8.3.7. Теорема запаздывания. Вычтем из аргумента t положительное число λ. Функция $h(t)$, или, точнее, функция $h(t)\Upsilon(t)$ (так как $\Upsilon(t)$ всегда подразумевается), преобразуется в $h(t-\lambda)\Upsilon(t-\lambda)$ (рис. 8.8).

Заменим t на $t-\lambda$ в преобразовании Лапласа:

$$F(p)=\int_\lambda^\infty h(t-\lambda)\,e^{-pt}e^{\lambda p}\,dt$$

или, введя множитель $\Upsilon(t-\lambda)$ и разделив на $e^{\lambda p}$,

$$e^{-\lambda p}F(p)=\int_\lambda^\infty h(t-\lambda)\,\Upsilon(t-\lambda)\,e^{-pt}\,dt.$$

Нижний предел интегрирования может быть взят равным нулю, так как из-за присутствия $\Upsilon(t-\lambda)$ вклад интервала $(0, \lambda)$ равен нулю. Отсюда

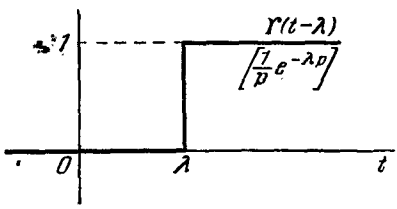


Рис. 8.9.

$$e^{-\lambda p}F(p)=\int_0^\infty h(t-\lambda)\,\Upsilon(t-\lambda)\,e^{-pt}\,dt$$

и, следовательно,

$$e^{-\lambda p}F(p)\sqsubset h(t-\lambda)\,\Upsilon(t-\lambda). \qquad (34)$$

В случае, когда $h(t)$ равна единичной ступени, мы имеем (рис. 8.9)

$$\frac{1}{p}e^{-\lambda p}\sqsubset\Upsilon(t-\lambda). \qquad (35)$$

8.3.8. Дифференцирование функции $F(p)$. Продифференцируем по p обе части формулы преобразования Лапласа. Получаем

$$F'(p)=\int_0^\infty -th(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Отсюда

$$F'(p)\sqsubset -th(t). \qquad (36)$$

Продифференцировав n раз, получаем

$$F^{(n)}(p)\sqsubset(-1)^n t^n h(t) \qquad (n\text{ — целое положительное}). \qquad (37)$$

8.3.9. Интегрирование функции $F(p)$. Проинтегрируем по p от p до бесконечности обе части формулы преобразования Лапласа. Получаем

$$\int_p^\infty F(p)\,dp = \int_0^\infty [-e^{-pt}]_p^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt.$$

Отсюда

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \sqsubset \frac{h(t)}{t}. \tag{38}$$

Проинтегрировав n раз в тех же пределах, получаем

$$\int_p^\infty dp \int_p^\infty dp \ldots \int_p^\infty F(p)\,dp \sqsubset \frac{h(t)}{t^n}. \tag{39}$$

8.3.10. Теорема свертывания, или теорема Бореля. Даны две функции $h_1(t)$, $h_2(t)$, имеющие соответственно изображения $F_1(p)$, $F_2(p)$. Найдем оригинал для произведения $F_1(p)F_2(p)$. Рассмотрим формулу преобразования Лапласа, относящуюся к функции $h_1(\tau)$:

$$F_1(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} h_1(\tau)\,d\tau.$$

Умножим обе части на $F_2(p)$:

$$F_1(p)F_2(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} F_2(p)\,h_1(\tau)\,d\tau.$$

В силу формулы (34) получаем

$$e^{-p\tau}F_2(p) \sqsubset h_2(t-\tau)\,\Upsilon(t-\tau).$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-p\tau}F_2(p)\,h_1(\tau)\,d\tau \sqsubset \int_0^\infty h_1(\tau)\,h_2(t-\tau)\,\Upsilon(t-\tau)\,d\tau.$$

Ввиду наличия $\Upsilon(t-\tau)$ вклад интервала $t<\tau<+\infty$ в интеграл равен нулю, и можно написать

$$\int_0^\infty h_1(\tau)\,h_2(t-\tau)\,\Upsilon(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t h_1(\tau)\,h_2(t-\tau)\,d\tau.$$

Итак, теорема свертывания может быть сформулирована следующим образом:

Если

$$F_1(p) \sqsubset h_1(t), \qquad F_2(p) \sqsubset h_2(t),$$

то

$$F_1(p)F_2(p) \sqsubset \int_0^t h_1(\tau)\,h_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t h_1(t-\tau)\,h_2(\tau)\,d\tau. \tag{40}$$

Примечание. Теория электрических цепей Хевисайда показала, что переходная реакция связана с обобщенным сопротивлением уравнением

$$\frac{1}{Z(p)} = p\int_0^\infty e^{-pt}A(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{pZ(p)} \sqsubset A(t).$$

Если приложить электродвижущую силу $E(t)$, то получим выражения для тока в виде

$$t(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)E(t-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)E(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

Пусть $U(p)$ — такая функция, что

$$U(p) \sqsubset E(t).$$

Теорема свертывания дает

$$\frac{U(p)}{pZ(p)} \sqsubset \int_0^t A(\tau)E(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t A(t-\tau)E(\tau)\,d\tau$$

или

$$\frac{U(p)}{Z(p)} \sqsubset \frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)E(t-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)E(\tau)\,d\tau. \tag{42}$$

Сравнив формулы (41) и (42), получаем

$$i(t) \sqsupset \frac{U(p)}{Z(p)}. \tag{43}$$

Это замечательное обобщение закона Ома для переходных режимов.

8.3.11. Различные формулы. Докажем формулу

$$\frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{p}\right) \sqsubset \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{\tau t}\right)h(\tau)\,d\tau.$$

Она может быть полезной, если, зная оригинал $F(p)$, мы хотим найти оригинал $F\left(\frac{1}{p}\right)$.

Заменим p на $\frac{1}{p}$ в формуле преобразования Лапласа:

$$F\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{p}}h(\tau)\,d\tau.$$

Разделим на p^{n+1}:

$$\frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{p}}}{p^{n+1}}h(\tau)\,d\tau. \tag{44}$$

Тогда, исходя из формулы (17), можно написать

$$\frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{p}\right) \sqsubset \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{\tau t}\right)h(\tau)\,d\tau. \tag{45}$$

Если $n=0$, то

$$\frac{1}{p}F\left(\frac{1}{p}\right)\sqsubset\int_0^\infty J_0(2\sqrt{\tau t})\,h(\tau)\,d\tau. \tag{46}$$

Докажем формулу

$$F(\sqrt{p})\sqsubset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\frac{\tau}{2t}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}h(\tau)\,d\tau. \tag{47}$$

Для этого будем исходить из формулы

$$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}}\sqsubset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}, \tag{48}$$

которая доказывается ниже (п. 8.9.20, формула (78)).

Продифференцируем обе части (48) по τ:

$$e^{-\tau\sqrt{p}}\sqsubset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\frac{\tau}{2t}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \tag{49}$$

Заменив p на $\sqrt{p}$ в формуле преобразования Лапласа, получаем

$$F(\sqrt{p})=\int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{p}}h(\tau)\,d\tau.$$

Пользуясь соотношением (49), найдем

$$F(\sqrt{p})\sqsubset\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\frac{\tau}{2t}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}h(\tau)\,d\tau.$$

Докажем формулу

$$h(t^2)\sqsupset\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty F(x^2)e^{-\frac{p^2}{4x^2}}\,dx.$$

При доказательстве формулы (77) мы придем к выводу, что

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Заменим в этом равенстве u на βx. Тогда

$$\beta e^{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{\beta^2x^2}-\beta^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Считая, что

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{p^2}{4},\quad\text{а}\quad\beta^2=t,$$

получаем из предыдущего выражения

$$\frac{e^{-p\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4x^2}-tx^2}dx. \tag{*}$$

Установив это, обозначим через $\varphi(p)$ изображение $h(t^2)$. Имеем

$$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} h(t^2)\, dt.$$

Если в этом выражении заменить t^2 на t, то

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, h(t)\, dt.$$

Подставив (*), получим

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4x^2} - tx^2} h(t)\, dx\, dt$$

или

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4x^2}}\, dx \int_0^\infty e^{-tx^2} h(t)\, dt.$$

Заменив p на x^2 в формуле преобразования Лапласа, получаем

$$F(x^2) = \int_0^\infty e^{-tx^2} h(t)\, dt,$$

тогда

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty F(x^2)\, e^{-\frac{p^2}{4x^2}}\, dx.$$

Мы получили выражение, которое поможет вычислить изображение $h(t^2)$, если известно изображение $h(t)$:

$$h(t^2) \sqsupset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty F(x^2)\, e^{-\frac{p^2}{4x^2}}\, dx.$$

8.3.12. Теорема разложения Хевисайда. Теория разложения рациональных функций на простые дроби показывает, что если $F(p)$ — полином m-й степени, имеющий лишь простые корни a_n, а $f(p)$ — любой полином низшей степени, то имеет место тождество

$$\frac{f(p)}{pF(p)} \equiv \frac{f(0)}{pF(0)} + \sum_{n=1}^{m} \frac{f(a_n)}{a_n F'(a_n)} \frac{1}{p - a_n}.$$

В силу соотношения (15)

$$\frac{1}{p - a_n} \sqsubset e^{a_n t}.$$

Обозначим через $h(t)$ такую функцию, что

$$h(t) \sqsupset \frac{f(p)}{pF(p)}. \tag{50}$$

Тогда

$$h(t) = \frac{f(0)}{F(0)} + \sum_{n=1}^{m} \frac{f(a_n)}{a_n F'(a_n)}\, e^{a_n t}.$$

Формулы (50) и (51) представляют собой теорему разложения Хевисайда.

8.3.13. Приложение теоремы разложения к электрическим цепям. Случай постоянного напряжения. Дана цепь, находящаяся в момент $t=0$ в равновесии. В этот момент прикладывают в одной ее точке постоянную электродвижущую силу E_0. Найдем ток, который будет течь в определенном контуре. Пусть $Z(p)$ — обобщенное взаимное сопротивление. Величина, обратная ему, всегда представляется в виде отношения двух полиномов $f(p)/F(p)$. Степень $f(p)$ меньше степени $F(p)$. Ток $i(t)$ таков, что

$$i(t) \supset \frac{E_0}{pZ(p)} = \frac{E_0 f(p)}{pF(p)}.$$

Если применить к этому выражению теорему разложения, то

$$i(t) = \frac{E_0}{Z(0)} + \sum_{n=1}^{m} \frac{E_0 f(a_n)}{a_n F'(a_n)} e^{a_n t}. \tag{52}$$

Ток $i(t)$ можно рассматривать как сумму двух токов:

1) установившийся ток

$$\frac{E_0}{Z(0)};$$

2) свободный ток

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{E_0 f(a_n)}{a_n F'(a_n)} e^{a_n t}.$$

Пример 1. Найдем ток, вызванный приложением в момент $t=0$ постоянной электродвижущей силы E к дросселю с самоиндукцией L и сопротивлением R.

Обобщенное сопротивление равно

$$Z(p) = Lp + R.$$

Отсюда

$$i(t) = \frac{E}{R} + \frac{E}{-L\frac{R}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Пример 2. Приложим ту же электродвижущую силу к цепи, состоящей из самоиндукции L, емкости C и сопротивления R, соединенных последовательно.

Обобщенное сопротивление равно

$$Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}.$$

Применим теорему разложения к дроби

$$\frac{ECp}{p(CLp^2 + RCp + 1)}.$$

Установившийся ток отсутствует. Свободный ток равен

$$i(t) = Ee^{-\alpha t}\left[\frac{e^{j\beta t}}{2L(-\alpha + j\beta) + R} + \frac{e^{-j\beta t}}{2L(-\alpha - j\beta) + R}\right],$$

иначе говоря,

$$i(t) = \frac{E}{L\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

если считать, что

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

8.3.14. Случай переменного напряжения. Дано напряжение $E_0 e^{j\omega t}$. Имеем

$$E_0 e^{j\omega t} \sqsupset \frac{E_0}{p - j\omega}$$

и

$$i(t) \sqsupset \frac{E_0}{(p - j\omega) Z(p)} = \frac{E_0 f(p)}{(p - j\omega) F(p)}.$$

Достаточно применить теорему разложения к дроби

$$\frac{E_0 p f(p)}{p (p - j\omega) F(p)},$$

чтобы получить

$$i(t) = \frac{E_0}{Z(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{n=1}^{m} \frac{E_0 f(a_n)}{(a_n - j\omega) F'(a_n)} e^{a_n t}. \tag{53}$$

Ток $i(t)$ также можно рассматривать как сумму двух токов:

1) установившийся ток

$$E_0 \frac{e^{j\omega t}}{Z(j\omega)},$$

что является уже известным результатом;

2) свободный ток

$$E_0 \sum_{n=1}^{m} \frac{f(a_n)}{(a_n - j\omega) F'(a_n)} e^{a_n t}.$$

Конечно, если нужно узнать токи, соответствующие электродвижущей силе $E_0 \cos \omega t$, то достаточно взять вещественную часть результата.

Пример. Рассмотрим ток, вызванный приложением электродвижущей силы $E_0 \cos \omega t$ к цепи, состоящей из дросселя с сопротивлением.

Обобщенное сопротивление равно

$$Z(p) = Lp + R.$$

Применим формулу (53). Тогда

$$i(t) = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{j\omega L + R} + \frac{E_0 e^{-\frac{R}{L} t}}{\left(-\frac{R}{L} - j\omega\right) L} = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L} - \frac{E_0 e^{-\frac{R}{L} t}}{R + j\omega L}.$$

Вещественная часть равна

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi e^{-\frac{R}{L} t}\right],$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

Примечание. Рассмотрим рациональную дробь $\frac{f(p)}{F(p)}$. Пусть полином m-й степени $F(p)$ имеет только простые корни a_n. Тогда имеет место тождество

$$\frac{f(p)}{F(p)} \equiv \sum_{n=1}^{m} \frac{f(a_n)}{F'(a_n)} \frac{1}{p - a_n}.$$

Отсюда вытекает формула, несколько отличающаяся от теоремы разложения:

$$\frac{f(p)}{F(p)} \sqsubset \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a_n)}{F'(a_n)} e^{a_n t}. \tag{54}$$

8.3.15. Случай кратных корней. Случай, когда полином $F(p)$ имеет кратные корни, приводит к более сложной формуле. Рассмотрим отношение двух полиномов

$$\frac{f(p)}{F(p)}$$

и предположим, что степень числителя меньше степени m знаменателя.

Если знаменатель имеет кратные корни, то его можно записать в виде

$$F(p) = (p-a_1)^{n_1}(p-a_2)^{n_2} \dots (p-a_k)^{n_k} \dots (p-a_r)^{n_r},$$

где

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots + n_r = m.$$

Тогда

$$\frac{f(p)}{F(p)} = \frac{A_{11}}{(p-a_1)^{n_1}} + \frac{A_{12}}{(p-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{1j}}{(p-a_1)^{n_1-j+1}} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{p-a_1} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{A_{k1}}{(p-a_k)^{n_k}} + \frac{A_{k2}}{(p-a_k)^{a_k-1}} + \dots + \frac{A_{kj}}{(p-a_k)^{n_k-j+1}} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{p-a_k} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

или

$$\frac{f(p)}{F(p)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(p-a_k)^{n_k-j+1}}. \tag{*}$$

Вычислим коэффициенты $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn_k}$. Умножим (*) на $(p-a_k)^{n_k}$. Имеем

$$\frac{(p-a_k)^{n_k} f(p)}{F(p)} = A_{k1} + A_{k2}(p-a_k) + \dots + A_{kn_k}(p-a_k)^{n_k-1} +$$
$$+ (p-a_k)^{n_k}\Phi(p),$$

где функция $\Phi(p)$ сохраняет конечное значение при $p = a_k$. Поэтому

$$A_{k1} = \left[\frac{(p-a_k)^{n_k} f(p)}{F(p)}\right]_{p=a_k}.$$

Дифференцируя предыдущее выражение, получим тем же способом

$$A_{k2} = \left[\frac{d}{dp}\frac{(p-a_k)^{n_k} f(p)}{F(p)}\right]_{p=a_k}$$

Осуществляя дифференцирование $j-1$ раз, находим

$$A_{kj} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}}\frac{(p-a_k)^{n_k} f(p)}{F(p)}\right]_{p=a_k}$$

С другой стороны, известно, что

$$\frac{1}{(p-a_k)^{n_k-j+1}} \sqsubset \frac{t^{n_k-j}}{(n_k-j)!} e^{a_k t}.$$

Отсюда

$$\frac{f(p)}{F(p)} \sqsubset \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(n_k-j)!} t^{n_k-j} e^{a_k t}, \tag{55}$$

где

$$A_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \frac{(p-a_k)^{n_k} f(p)}{F(p)} \right]_{p=a_k}.$$

Примечание. На практике всегда полезно проделать непосредственно предыдущее вычисление, а не применять формулу (55), так как она довольно сложна.

Пример. Требуется найти оригинал для

$$\frac{p+1}{(p-1)^3(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{(p-1)^3} + \frac{D}{p+2}.$$

Умножим обе части на $p+2$ и подставим $p=-2$. Тогда

$$D = \frac{1}{27}.$$

Умножим обе части на $(p-1)^3$. Тогда

$$\frac{p+1}{p+2} = A(p-1)^2 + B(p-1) + C + D\frac{(p-1)^3}{p+2}.$$

Если положить в предыдущем равенстве и равенствах, полученных его однократным и двукратным дифференцированием, $p=1$, то найдем

$$C = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{1}{9}, \qquad A = -\frac{1}{27}.$$

Отсюда искомый оригинал

$$\frac{p+1}{(p-1)^3(p+2)} \sqsubset \frac{1}{27} e^{-2t} + e^t \left[\frac{t^2}{3} + \frac{t}{9} - \frac{1}{27} \right].$$

Преобразование некоторых употребительных функций

8.3.16. Оригиналы некоторых рациональных функций. Мы уже получили формулу (14):

$$\frac{1}{p^{n+1}} \sqsubset \frac{t^n}{n!}.$$

Найдем оригинал функции $\frac{1}{p^{\nu+1}}$ для случая, когда ν — любое комплексное число, но с вещественной частью, большей чем -1.

Известно, что одно из определений эйлеровой функции второго рода (п. 7.4.1) — это

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^\nu \, dx, \qquad R(\nu) > -1.$$

Положим $x = pt$. Тогда

$$\Gamma(\nu+1) = p \int_0^\infty e^{-pt} p^\nu t^\nu \, dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{p^{\nu+1}} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, dt$$

и

$$\frac{1}{p^{\nu+1}} \sqsubset \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{56}$$

Формула (56) совпадает с формулой (14), если ν равно целому числу n, так как $\Gamma(n+1) = n!$

Придадим ν значение 1/2. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \sqsubset \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad \text{так как} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{57}$$

Применим формулу (33) к равенству (56). Получаем

$$e^{-\lambda t} \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \rightrightarrows \frac{1}{(p+\lambda)^{\nu+1}}. \tag{58}$$

Если положить в этом соотношении $\nu = 0$, то мы получим уже известную формулу (15):

$$\frac{1}{p+\lambda} \sqsubset e^{-\lambda t}.$$

Если придать λ значение $-j$, то $\frac{1}{p-j} \sqsubset e^{jt}$,

или

$$\frac{p+j}{p^2+1} \sqsubset \cos t + j \sin t.$$

Отделим вещественные части от мнимых:

$$\begin{cases} \cos t \rightrightarrows \dfrac{p}{p^2+1}, & \cos \omega t \rightrightarrows \dfrac{p}{p^2+\omega^2}; \\ \sin t \rightrightarrows \dfrac{1}{p^2+1}, & \sin \omega t \rightrightarrows \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}. \end{cases} \tag{59}$$

Придадим λ значение $\lambda - j\omega$. Тогда

$$\frac{1}{p+\lambda-j\omega} \sqsubset e^{-\lambda t} e^{j\omega t},$$

т. е.

$$\frac{p+\lambda+j\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \sqsubset e^{-\lambda t}(\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Отсюда, приравняв вещественные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \sqsubset e^{-\lambda t} \cos \omega t, \\ \dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \sqsubset e^{-\lambda t} \sin \omega t. \end{cases} \tag{60}$$

Если в формулах (59) заменить t на jt, применив формулу изменения масштаба (22), то

$$\begin{cases} \operatorname{sh} t \rightrightarrows \dfrac{1}{p^2-1}, & \operatorname{sh} \omega t \rightrightarrows \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}; \\ \operatorname{ch} t \rightrightarrows \dfrac{p}{p^2-1}, & \operatorname{ch} \omega t \rightrightarrows \dfrac{p}{p^2-\omega^2}. \end{cases} \tag{61}$$

8.3.17. Изображения бесселевых функций целого порядка. Будем исходить из классического определения бесселевой функции первого рода (n — целое число) (п. 7.5.11):

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - t\sin\theta)\,d\theta$$

или

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n\theta - t\sin\theta)}\,d\theta.$$

Изображение этой функции дается формулой преобразования Лапласа:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n\theta - t\sin\theta)}\,d\theta\right] e^{-pt}\,dt.$$

Проинтегрируем сначала по t:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{-e^{j(n\theta - t\sin\theta) - pt}}{p + j\sin\theta}\right]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{jn\theta}}{p + j\sin\theta}\,d\theta.$$

Положим $e^{j\theta} = z$, откуда $d\theta = \frac{1}{j}\frac{dz}{z}$, $\sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}$. Если обозначить через C окружность единичного радиуса с центром в начале координат, то интеграл принимает такой вид:

$$F(p) = \frac{1}{\pi j}\int_C \frac{z^n\,dz}{z^2 + 2pz - 1}.$$

Интегрируемая функция имеет только один полюс, находящийся внутри окружности C, а именно

$$z = -p + \sqrt{p^2 + 1}.$$

Следовательно, интеграл равен удвоенному вычету относительно этого полюса:

$$F(p) = 2\left[\frac{z^n}{z + p + \sqrt{p^2+1}}\right]_{z = -p + \sqrt{p^2+1}}.$$

Отсюда

$$J_n(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^n. \qquad (62)$$

Если в соотношении (62) заменить t на jt, пользуясь формулой (22) изменения масштаба, и принять во внимание определение бесселевых функций мнимого аргумента (п. 7.5.25), то

$$I_n(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(p - \sqrt{p^2-1}\right)^n. \qquad (63)$$

Далее мы увидим (п. 8.5.3), что формулы (62) и (63) имеют общий характер и применяются в случае, когда индекс n — не целое число. Способом, подобным предыдущему, можно легко вывести формулу

$$e^{-t} I_n(t) \supset 2^n \frac{\left(\sqrt{p+2} + \sqrt{p}\right)^{-2n}}{\sqrt{p(p+2)}}. \qquad (64)$$

Сейчас мы установим некоторые соотношения, полезные при изучении распространения электрических возмущений вдоль линии передач:

$$I_0\left[\sqrt{t(t+2b)}\right] \supset \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\, e^{bp-b\sqrt{p^2-1}}; \tag{65}$$

$$I_0\left[\sqrt{t^2-b^2}\right] \supset \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\, e^{-b\sqrt{p^2-1}}, \quad t>b, \tag{66}$$

$$e^{-(b+a)t} I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] + 2a\int_{\mu}^{t} e^{-(b+a)t} I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] dt \supset$$

$$\supset \frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+2a}{p+2b}}\, e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}, \qquad t>\mu. \tag{67}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$. Дадим x приращение h и произведем разложение в ряд Тейлора:

$$f(x+h)=x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{h}{1}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]+\ldots.$$

Вычислим последовательные производные $f(x)$. Для этого положим $z=x^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]=\frac{d}{dz}\left[z^{-m} I_m(z)\right]\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-m} I_m(z)\right]=-mz^{-(m+1)} I_m(z)+z^{-m}\frac{d}{dz} I_m(z).$$

Но, согласно свойствам бесселевых функций, мы имеем рекуррентное соотношение (п. 7.5.28)

$$\frac{d}{dz} I_m(z)=\frac{m}{z} I_m(z)+I_{m+1}(z).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-m} I_m(z)\right]=z^{-m} I_{m+1}(z).$$

Возвращаясь к переменной x, находим

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]=\frac{1}{2}\, x^{-\frac{m+1}{2}} I_{m+1}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда делается совершенно очевидной формула

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{-\frac{1}{2}m} I_m\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]=\frac{1}{2^n}\, x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Поэтому

$$f(x+h)=(x+h)^{-\frac{1}{2}m} I_m\left[(x+h)^{\frac{1}{2}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{1}{2^n}\, x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Если положить $h=2bt$, $x=t^2$, а $m=0$, получим

$$I_0\left[\sqrt{t(t+2b)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!} I_n(t).$$

Введя в это выражение изображение $I_n(t)$, полученное из (63), находим

$$I_0\left[\sqrt{t(t+2b)}\right] \supset \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bp - b\sqrt{p^2-1})^n}{n!}. \qquad (*)$$

Отсюда вытекает и формула (65). Если к выражению (*) применить теорему запаздывания (формула (34)), получим формулу (66).

Заменим в (66) b на δ, а t на αt. Тогда

$$I_0\left[\alpha\sqrt{t^2-\delta^2/\alpha^2}\right] \supset \frac{1/\alpha}{\sqrt{p^2/\alpha^2-1}}\, e^{-\delta\sqrt{p^2/\alpha^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\, e^{-\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{p^2-\alpha^2}}.$$

Положим, что $\frac{\delta}{\alpha} = \mu$, и применим теорему смещения. Имеем

$$e^{-\beta t} I_0\left[\alpha\sqrt{t^2-\mu^2}\right] \supset \frac{1}{\sqrt{(p+\beta-\alpha)(p+\beta+\alpha)}}\, e^{-\mu\sqrt{(p+\beta-\alpha)(p+\beta+\alpha)}}.$$

Положим

$$\beta - \alpha = 2a, \qquad \beta + \alpha = 2b.$$

Отсюда

$$\beta = a + b, \qquad \alpha = b - a,$$

и мы имеем

$$e^{-(a+b)t} I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] \supset \frac{e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}, \qquad t > \mu. \qquad (68)$$

Разделим правую часть (68) на p. Тогда

$$\int_{\mu}^{t} e^{-(a+b)t} I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] dt \supset \frac{1}{p}\frac{e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}, \qquad t > \mu. \qquad (69)$$

Умножив формулу (69) на $2a$ и сложив ее почленно с (68), получим искомую формулу (67).

8.3.18. Изображение $\ln t$. Продифференцируем формулу (56) по ν. Тогда

$$\frac{1}{p^{\nu+1}}\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu} + \frac{1}{p^{\nu+1}}\ln\frac{1}{p}\,\Gamma(\nu+1) \sqsubset t^{\nu}\ln t,$$

т. е.

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\left[\frac{\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right] \sqsubset t^{\nu}\ln t. \qquad (70)$$

Но известно, что

$$\Gamma(\nu+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!\,k^{\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k+1)}.$$

Поэтому

$$\frac{\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \lim_{k\to\infty}\left[\ln k - \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} - \ldots - \frac{1}{\nu+k+1}\right].$$

Если придать ν нулевое значение, то

$$\left[\frac{\frac{d}{d\nu}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right]_{\nu=0} = \lim_{k\to\infty}\left[\ln k - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{k+1}\right] = -\gamma\ ^{*}). \qquad (71)$$

*) Здесь $\gamma = 0{,}57721566490\ldots$ — постоянная Эйлера.

Подставив выражение (71) в равенство (70) и считая $\nu = 0$, получаем

$$\ln t \rightrightarrows -\frac{\ln p + \gamma}{p}. \tag{72}$$

8.3.19. Изображение интегральных косинуса и синуса. По определению, имеем

$$\mathrm{Si}(t) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(t) = \frac{\pi}{2} - \int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

$$\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx$$

и

$$h(t) = \sin t \rightrightarrows \frac{1}{p^2+1} = F(p), \tag{73}$$

$$h(t) = \cos t \rightrightarrows \frac{p}{p^2+1} = F(p). \tag{74}$$

Поэтому, применяя последовательно к соотношениям (73) и (74) формулу (24), получим

$$\mathrm{si}(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \rightrightarrows -\frac{1}{p}\int_0^p \frac{ds}{s^2+1} = -\frac{1}{p}\operatorname{arctg} p, \tag{75}$$

$$\mathrm{Ci}(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \rightrightarrows -\frac{1}{p}\int_0^p \frac{s\, ds}{s^2+1} = -\frac{1}{p}\ln\sqrt{p^2+1}. \tag{76}$$

Можно воспользоваться изображением $\mathrm{Ci}(t)$, чтобы найти разложение этой функции в ряд. Имеем

$$\ln\sqrt{p^2+1} = \frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right) + \ln p =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^6} - \ldots\right) + \ln p.$$

Отсюда, так как

$$\frac{1}{p^{n+1}} \sqsubset \frac{t^n}{n!}, \qquad \frac{\gamma + \ln p}{p} \sqsubset -\ln t,$$

получаем разложение $\mathrm{Ci}(t)$:

$$\mathrm{Ci}(t) = \ln t + \gamma - \frac{t^2}{2\cdot 2!} + \frac{t^4}{4\cdot 4!} - \frac{t^6}{6\cdot 6!} + \ldots$$

8.3.20. Изображение функции ошибок. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du.$$

Заменив u на $\frac{\alpha}{u}$, получаем

$$I = \int_0^\infty \frac{\alpha}{u^2} e^{-\left(u-\frac{\alpha}{u}\right)^2} du.$$

Складываем оба эти выражения. Считая, что $v = \frac{\alpha}{u} - u$, получаем

$$2I = \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{u^2}\right) e^{-\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2} e^{-\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}. \tag{77}$$

Установив это, попробуем найти изображение функции

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Формула преобразования Лапласа дает

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-pt - \frac{x^2}{4t}} dt =$$

$$= e^{-x\sqrt{p}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-pt + x\sqrt{p} - \frac{x^2}{4t}} dt = e^{-x\sqrt{p}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\left(\sqrt{pt} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dt.$$

Считая, что $-\frac{x}{2\sqrt{t}} = u$, получаем $dt = \frac{4t\sqrt{t}}{x} du$. В силу соотношения (77), где приравниваем $\alpha = \frac{x\sqrt{p}}{2}$, получаем

$$F(p) = e^{-x\sqrt{p}} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \frac{1}{x\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \supset \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}}. \tag{78}$$

Проинтегрировав по x обе части от 0 до x, имеем

$$\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \supset \frac{1 - e^{-x\sqrt{p}}}{p}. \tag{79}$$

8.3.21. Изображение единичного импульса [1]**.** Рассмотрим единичную ступень $\Upsilon(t) \supset \frac{1}{p}$ и функцию времени, изображенную на рис. 8.10, *а*. Она представляет собой прямоугольный импульс длиной в θ с амплитудой $\frac{1}{\theta}$. Площадь прямоугольника равна единице. Изображение рассматриваемой функции равно:

$$\frac{\Upsilon(t) - \Upsilon(t-\theta)}{\theta} \supset \frac{1 - e^{-p\theta}}{p\theta} = 1 - \frac{p\theta}{2} + \frac{p^2\theta^2}{6} - \ldots \tag{80}$$

Если θ стремится к нулю, то в пределе функция времени представляет собой импульс (бесконечная амплитуда, действующая бесконечно малое время),

[1]) Или единичного толчка.

но площадь прямоугольника остается все время равной единице. Предельная функция [1]) называется единичным импульсом. Левая часть равенства (90) стремится к производной $\Upsilon(t)$, а правая часть — к единице. Поэтому можно написать

$$\Upsilon'(t) \supset\!\subset 1.$$

Функцию $\Upsilon'(t)$ иногда называют функцией Дирака $\delta(t)$. Она обладает следующим важным свойством. Если $f(t)$ — любая функция, то

$$f(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)\,\Upsilon'(t-\tau)\,d\tau, \qquad \tau_1 < t < \tau_2. \tag{81}$$

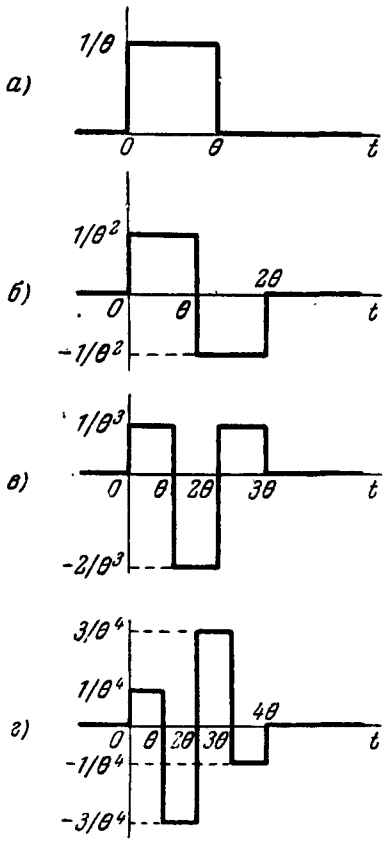


Рис. 8.10.

На практике не существует явлений, следующих закону, описанному функцией $\Upsilon'(t)$. Имеются лишь явления, описываемые функциями, равными нулю всюду, кроме промежутка очень малой длины θ, а в этом промежутке принимающими очень большие значения $\frac{A}{\theta}$. Если пренебречь бесконечно малыми первого порядка, то изображение такой функции будет равно A.

Рассмотрим теперь два последовательных прямоугольных импульса противоположного направления с продолжительностью θ и амплитудой $\frac{1}{\theta^2}$ (рис. 8.10, *б*). Эта функция времени и ее изображение будут иметь вид

$$\frac{\Upsilon(t) - 2\Upsilon(t-\theta) + \Upsilon(t-2\theta)}{\theta^2} \supset\!\subset p - p^2\theta + \ldots$$

Если θ стремится к нулю, мы получим в пределе два импульса [2]), следующих друг за другом в течение бесконечно малого времени. Их можно рассматривать как вторую производную $\Upsilon(t)$:

$$\Upsilon''(t) \supset\!\subset p.$$

Точно так же при $\theta = 0$ пределы функций, изображенных на рис. 8.10, *в* и 8.10, *г*, будут соответственно

$$\Upsilon'''(t) \supset\!\subset p^2, \quad \Upsilon^{IV}(t) \supset\!\subset p^3$$

и т. д.

Примечание. Введем в контур l находящейся в равновесии цепи электродвижущую силу, равную единичному импульсу $\Upsilon'(t)$. Этот импульс

[1]) Теория импульсной функции изложена в кн.: Б. ван дер Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952 г. (гл. V).

[2]) Это не единичные импульсы, так как ограниченная ими площадь равна $\frac{1}{\theta}$, а не 1.

создаст в контуре m ток $R_{lm}(t)$. По примеру п. 8.2.1 можно показать, что достаточно знать функцию R, иначе говоря, импульсную реакцию контура m на контур l, чтобы определить ток $i_m(t)$, текущий в m в результате приложения к l любой электродвижущей силы, равной нулю при $t < 0$.

Вместо того чтобы разлагать функцию $E(t)$ на ступеньки, как на рис. 8.4, разложим ее на вертикальные полосы (рис. 8.11). Каждая часть $E(t)$ будет при этом заключена между двумя импульсами шириной в Δt. Обе определенные таким образом ступенчатые функции будут стремиться к $E(t)$ при Δt, стремящемся к нулю, при условии, если $E(t)$ не имеет резких скачков.

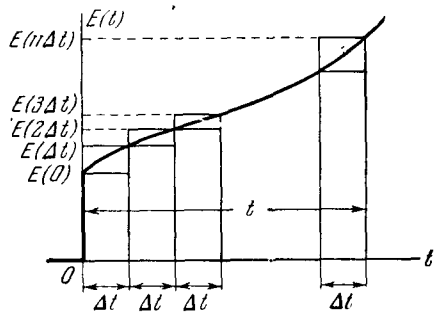


Рис. 8.11.

Каждая элементарная реакция будет равна

$$E(0)R(t),\quad E(\Delta t)R(t-\Delta t),$$
$$E(2\Delta t)R(t-2\Delta t),\ \ldots$$

Ток $i(t)$ будет представлять собой сумму этих элементарных реакций. Поэтому

$$i(t)=\int_0^t E(\tau)R(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t E(t-\tau)R(\tau)\,d\tau.$$

Формула (12) показывает, что импульсная реакция контура m на контур l связана с обобщенным взаимным сопротивлением соотношением

$$R_{lm}(t)=R_{ml}(t)\rightrightarrows\frac{1}{Z_{ml}(p)}.$$

Применение формулы обращения

8.3.22. Теорема Меллина — Фурье. Мы видели (п. 1.3.15), что единичная ступень может быть выражена интегралом

$$\Upsilon(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\omega}\,d\omega.$$

Контур интегрирования представляет собой

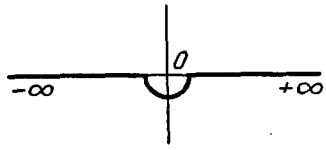


Рис. 8.12.

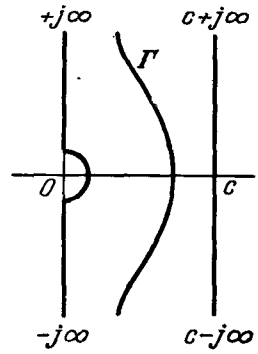


Рис. 8.13.

вещественную ось с маленькой полуокружностью (рис. 8.12). Положим $j\omega = p$. Тогда

$$\Upsilon(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp.$$

При этом контур интегрирования представляет собой мнимую ось с маленькой полуокружностью, как показано на рис. 8.13. Он может быть заменен любым другим контуром Γ, соединяющим точки $-j\infty$ и $+j\infty$ и расположенным справа от мнимой оси. Действительно, согласно теореме Коши, так как между мнимой осью и Γ функция $\frac{e^{pt}}{p}$ не имеет особых точек, мы можем написать

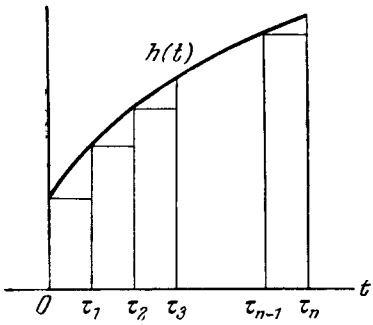


Рис. 8.14.

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = \int_{(\Gamma)} \frac{e^{pt}}{p}\,dp.$$

Контур Γ может быть, в частности, прямой, параллельной мнимой оси с положительной абсциссой c (контур Бромвича). Следовательно,

$$\Upsilon(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp. \qquad (82)$$

Установив это, рассмотрим функцию $h(t)$, изображенную на рис. 8.14. Повторив рассуждения, сделанные при выводе формул (1)—(6), мы можем разложить эту функцию на ступеньки:

$$h(0)\,\Upsilon(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [h(\tau_n) - h(\tau_{n-1})]\,\Upsilon(t-\tau_n).$$

Если устремить это выражение к пределу, бесконечно уменьшая промежутки $\tau_n - \tau_{n-1}$, ступенчатая кривая будет стремиться к кривой $h(t)$, и тогда

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \Upsilon(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau.$$

Заменим в этой формуле $\Upsilon(t-\tau)$ выражением (82). Получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p}\,dp\,h(\tau)\,d\tau,$$

или

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \frac{d}{dt} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} h(\tau)\,d\tau\,dp.$$

Отсюда, пользуясь формулой преобразования Лапласа, найдем

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \frac{d}{dt} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt} F(p)}{p}\,dp,$$

т. е.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p)\,dp. \qquad (83)$$

Мы получили формулу обращения. Ее называют формулой Меллина — Фурье.

Рассмотрим функцию $f(p)$. Это изображение $h(t)$, определенное формулой преобразования Карсона. Имеем

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt} f(p)}{p}\, dp.$$

Таким образом, $h(t)$, неявно выраженная интегральным уравнением

$$F(p) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{84}$$

дается в явном виде формулой (83) через интеграл по простому контуру в плоскости комплексной переменной p. Если этот интеграл равен нулю вдоль бесконечной полуокружности, находящейся слева от контура (п. 1.3.19), то его вычисление сведется к простому вычислению вычетов при условии, что особые точки являются полюсами или существенно особыми точками. Если же особые точки являются точками разветвления, то это вычисление сведется к интегрированию по эквивалентному контуру.

Формулы (83) и (84) эквивалентны. Можно применять любую из них. Нужно, однако, заметить, что формула (83) более общая, чем формула (84), и может дать результат, даже если формула Лапласа приводит к расходящемуся интегралу.

В качестве примера найдем с помощью формулы (83) некоторые выражения, уже полученные раньше с помощью формулы Лапласа.

Пример 1. Найдем оригинал $\frac{1}{p^{n+1}}$ (n — целое положительное число). Формула обращения (83) дает

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}}\, dp.$$

Из первого примера п. 1.3.19 известно, что значение этого интеграла $\frac{t^n}{n!}$. Мы снова находим уже известное выражение

$$\frac{1}{p^{n+1}} \sqsubset \frac{t^n}{n!}.$$

Пример 2. Требуется найти оригинал $\frac{1}{p^2+a^2}$. Применим теорему обращения. Искомый оригинал $h(t)$ имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p^2+a^2}\, dp.$$

Вычисление (см. п. 1.3.12) дает $h(t) = \frac{\sin at}{a}$, а это приводит к уже известному выражению $\frac{1}{a}\sin at \sqsupset \frac{1}{p^2+a^2}$.

8.3.23. Замечания о применении формулы обращения. Мы доказали с помощью преобразования Лапласа формулу (56):

$$\frac{1}{p^{\nu+1}} \sqsubset \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Эта формула, где ν — вещественное число, была доказана для случая, когда $\nu > -1$. Если $\nu < -1$, интеграл Лапласа не сходится. Докажем теперь формулу (56), применяя теорему обращения.

Рассмотрим сначала случай, когда $-1 < \nu < 0$. Функция $\frac{e^{pt}}{p^{\nu+1}}$ многозначна в плоскости p, и нетрудно заметить, что в интересующем нас случае контур Бромвича эквивалентен контуру C на рис. 7.12. При этом достаточно заменить z на pt в формуле (10) п. 7.4.5, чтобы получить искомое выражение (56).

Здесь следует сделать одно существенное замечание. Функция $\frac{e^{pt}}{p^{\nu+1}}$ имеет в начале координат точку разветвления. Формулу (56) можно получить из теоремы обращения, если из всех ветвей функции ограничиться рассмотрением только первой ветви. Если выбрать вторую ветвь, то вместо правой части формулы (56) мы получим выражение

$$e^{-2\pi\nu j}\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

К многозначным функциям, имеющим точку разветвления, теорему обращения следует применять, пользуясь только первой ветвью, т. е. такой, для которой

$$-\pi \leqslant \arg p \leqslant +\pi.$$

Это замечание будет учтено в дальнейшем.

Рассмотрим теперь случай, когда $\nu > 0$. Достаточно приравнять $\nu = k + \mu$, обозначив через k целое число, а через μ такое число, чтобы

$$-1 < \mu < 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{p^{k+\mu+1}} = \frac{t}{k+\mu}\,\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{p^{k+\mu}},$$

и т. д., повторяя k раз это интегрирование по частям, имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{p^{k+\mu+1}} = \frac{t^k}{(k+\mu)(k+\mu-1)\ldots(\mu+1)}\,\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}}{p^{\mu+1}}\,dp.$$

Отсюда и получается искомая формула (56).

Итак, мы нашли формулу (56), применяя теорему обращения в случае, когда $\nu > -1$, т. е. при тех же условиях, что и применяя преобразование Лапласа. Было бы желательно распространить формулу (56) на случай, когда $\nu < -1$. Действительно, если ν — не целое отрицательное число, обе части формулы имеют смысл. Однако интегралы Лапласа и Меллина — Фурье не сходятся. Тем не менее можно применить интеграл, аналогичный интегралу Меллина — Фурье, пользуясь вместо контура Бромвича контуром, изображенным на рис. 7.12, что приведет к сходящемуся интегралу. Формула (10) п. 7.4.5 позволяет тогда написать, считая $\nu = -\mu$,

$$p^{\mu-1} \sqsubset \frac{1}{t^{\mu}\,\Gamma(1-\mu)} \quad (\mu \text{ — не целое положительное число}), \tag{85}$$

но при соотношении

$$\frac{1}{t^{\mu}\Gamma(1-\mu)} = \frac{1}{2\pi j}\int_{(C)} p^{\mu-1}e^{pt}\,dp.$$

Итак, мы обобщили формулу (56) для всех значений ν, пользуясь то контуром Бромвича, то контуром C, так как оба они эквивалентны

в области $-1 < \nu < 0$. Нужно заметить, что основное свойство операционного равенства заключается в том, что некоторые преобразования одной функции отражаются известным образом на другой функции, и наоборот. Переход от функций t к функциям p и обратно не обязательно ограничивается формулами преобразования Лапласа — Карсона или Меллина — Фурье. Поясним это примером, так как развитие теории вышло бы за рамки настоящей книги. Контур, который можно свести к контуру C в случае, когда имеется только одна особая точка в начале координат, был предложен Лоури[1]). Этот контур соединяет $-\infty - j0$, $-\infty + j0$ и охватывает особые точки функции.

Пример. Требуется найти функцию $h(t)$ — оригинал для

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1+p^{\frac{3}{2}}}.$$

Применяем теорему обращения.

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{p^{\frac{1}{2}}e^{pt}}{1+p^{\frac{3}{2}}}\,dp.$$

Особые точки подынтегральной функции — это

1) точка разветвления при $p=0$;

2) полюсы при значениях p, обращающих в нуль $p^{\frac{3}{2}}+1$.

Мы должны провести разрез от 0 до $-\infty$, чтобы сделать функцию однозначной в плоскости p.

Если придать p значение p_0, то мы будем иметь два значения для $p_0^{\frac{1}{2}}$. Одно соответствует значению аргумента p_0, заключенному между $-\pi$ и π, второе — значению аргумента p_0, заключенному между $+\pi$ и $+3\pi$.

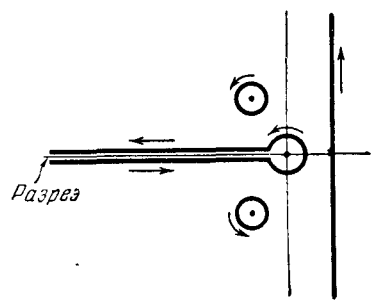


Рис. 8.15.

Полюсы определяются значениями p, являющимися корнями уравнения $p^{\frac{3}{2}}+1=0$, т. е. такими значениями p, аргументы которых соответственно равны

$$-\frac{2}{3}\pi,\quad +\frac{2}{3}\pi,\quad 2\pi.$$

Для первой ветви следует рассматривать только два первых значения. В случае второй ветви следует оставить только третье значение.

Мы уже видели, что при нахождении оригинала с помощью теоремы обращения следует оставлять только такое значение p, аргумент которого заключен между $-\pi$ и π. Поэтому нам нужно исследовать только два полюса:

$$p=\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{3})\quad\text{и}\quad p=-\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}).$$

Контур, эквивалентный контуру Бромвича, будет, следовательно, таким, как изображено на рис. 8.15, так как вклад бесконечной полуокружности, находящейся слева, равен нулю.

[1]) H. V. Lowry, Operational calculus, Philos. Mag. (1932), 7 série, t. 13.

Легко заметить, что вклад малой окружности с центром в начале координат равен нулю. Действительно, положим, что $p = re^{j\theta}$. Тогда интеграл

$$\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{rt(\cos\theta+j\sin\theta)}e^{j\frac{\theta}{2}}\sqrt{r}\,e^{j\theta}\,d\theta}{1+r^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3\theta}{2}j}}$$

стремится к нулю вместе с r. Поэтому искомый интеграл будет состоять из вычетов, относящихся к обоим полюсам, и интегралов вдоль верхнего и нижнего края разреза.

1. Вычеты. В полюсе $p=\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{3})$ вычет равен

$$\left[\frac{e^{pt}p^{\frac{1}{2}}}{\frac{d}{dp}\left(1+p^{\frac{3}{2}}\right)}\right]_{p=\frac{1}{2}(-1+j\sqrt{3})}=\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}(-1+j\sqrt{3})}.$$

Точно так же вычет в полюсе $p=-\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})$ равен $\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}(1+j\sqrt{3})}$. Отсюда сумма вычетов равна

$$\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

2. Интеграл вдоль нижнего края разреза, если считать $p=xe^{-j\pi}$, равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-xt}x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+jx^{\frac{3}{2}}}.$$

Вдоль верхнего края разреза, если считать $p=xe^{j\pi}$, интеграл равен

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1-jx^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда в сумме получаем

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^3},$$

и в результате

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1+p^{\frac{3}{2}}}\sqsubset\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^3}.$$

В случае численного вычисления может оказаться интересным разложить последний интеграл в асимптотический ряд. Напишем для этого

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+\ldots+(-1)^{n-1}x^{3(n-1)}+(-1)^n\frac{x^{3n}}{1+x^3}. \quad (*)$$

Если обратиться к определению факториальной функции, данному в формуле (3) п. 7.4.1, и подставить (*) в искомый интеграл, то мы получим разложение в ряд, общий член которого равен

$$(-1)^{n-1}\int_0^\infty e^{-xt}x^{3n-\frac{5}{2}}\,dx =$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{t^{3n-\frac{3}{2}}}\int_0^\infty e^{-xt}(xt)^{3n-\frac{5}{2}}\,d(xt)=(-1)^{n-1}\frac{\Gamma\left(3n-\frac{3}{2}\right)}{t^{3n-\frac{3}{2}}}.$$

Остается показать, что этот ряд асимптотичен, т. е. что R_n стремится к нулю, когда n постоянно, а t стремится к бесконечности. Имеем

$$R_n=(-1)^n\int_0^\infty \frac{e^{-xt}x^{3n+\frac{1}{2}}}{1+x^3}\,dx,$$

$$|R_n|\leqslant\int_0^\infty e^{-xt}x^{3n-\frac{5}{2}}\,dx=\frac{\Gamma\left(3n-\frac{3}{2}\right)}{t^{3n-\frac{3}{2}}}.$$

Значит, ряд действительно асимптотичен.

8.3.24. Обобщение теоремы разложения Хевисайда. Дана функция $h(t)$, изображение которой имеет вид $\frac{f(p)}{F(p)}$. Функции $f(p)$ и $F(p)$ могут быть любыми, но частное должно иметь лишь простые полюсы (конечное или бесконечное число). Другие особые точки отсутствуют. Итак,

$$h(t)\supset\frac{f(p)}{F(p)},$$

иначе говоря,

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}f(p)}{F(p)}\,dp.$$

Рассмотрим ряд значений p, представляющих собой простые полюсы:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots$$

Функция $h(t)$ равна сумме вычетов в этих полюсах при условии, что вклад бесконечной полуокружности, находящейся слева от прямой с абсциссой c, равен нулю. Эта сумма вычетов записывается, согласно формуле п. 1.3.12, в виде

$$h(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(a_m)}{F'(a_m)}\,e^{a_mt}.$$

Последнее выражение представляет собой обобщение формулы (54), которая была справедлива только для отношения двух полиномов.

Если изображение функции $h(t)$ имеет вид

$$h(t)\supset\frac{f(p)}{pF(p)},$$

то

$$h(t)=\frac{f(0)}{F(0)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(a_m)}{a_mF'(a_m)}\,e^{a_mt}.$$

Это обобщение формулы (51), называемой формулой разложения Хевисайда. Она применялась только к отношению двух полиномов $f(p)$ и $pF(p)$.

Изображения разрывных функций. Приложения

8.3.25. Введение. Из формулы (34) следует

$$e^{-\lambda p}F(p) \sqsubset g(t), \quad g(t)=\begin{cases} h(t-\lambda) & \text{при } t>\lambda, \\ 0 & \text{при } t<\lambda. \end{cases}$$

Выражение $e^{-\lambda p}F(p)$ представляет собой изображение функции времени, график которой представлен на рис. 8.8 (пунктир). Эта функция получается из $h(t)\Upsilon(t)$ сдвигом вдоль оси t на λ.

Формула обращения (83) придает формуле (34) такой вид:

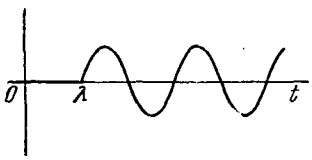


Рис. 8.16.

$$g(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{p(t-\lambda)}F(p)\,dp,$$

где

$$g(t)=\begin{cases} h(t-\lambda) & \text{при } t>\lambda, \\ 0 & \text{при } t<\lambda. \end{cases}$$

Пример. Найдем изображение функции $g(t)$, равной $\sin\omega(t-\lambda)$ при $t>\lambda$ и нулю при $t<\lambda$ (рис. 8.16). Изображение $\sin\omega t$ равно $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Значит, искомое изображение равно

$$\frac{\omega e^{-\lambda p}}{p^2+\omega^2}.$$

8.3.26. Изображения непериодических разрывных функций. Найдем, для примера, изображение функции $g(t)$, которая равна нулю при $-\infty<t<\lambda$, $\sin\omega(t-\lambda)$ при $\lambda<t<\lambda+\frac{2\pi}{\omega}$ и снова равна нулю при $\lambda+\frac{2\pi}{\omega}<t<+\infty$ (рис. 8.17).

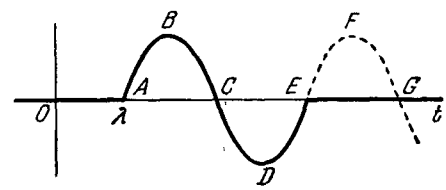


Рис. 8.17.

Синусоида $ABCDEFG\ldots$, начинающаяся в момент $t=\lambda$, имеет, как мы только что видели, своим изображением

$$\frac{\omega e^{-\lambda p}}{p^2+\omega^2}.$$

Поэтому синусоида $EFG\ldots$, начинающаяся в момент $t=\lambda+\frac{2\pi}{\omega}$, имеет своим изображением

$$e^{-\frac{2\pi}{\omega}p}\,\frac{\omega e^{-p\lambda}}{p^2+\omega^2}.$$

Функция $g(t)$, которая представляет собой разность между обеими синусоидами, имеет изображение

$$\frac{\omega e^{-p\lambda}}{p^2+\omega^2}\left[1-e^{-\frac{2\pi}{\omega}p}\right].$$

Пример 1. Найдем изображение функции, представленной на рис. 8.18 утолщенной линией.

Изображение функции, представленной полупрямой Ox, равно

$$\frac{E}{\lambda}\frac{1}{p^2}.$$

Рассмотрим полупрямую Ax'', проходящую через точку A с координатами $(0, -E)$ и имеющую угловой коэффициент, равный по абсолютному значению угловому коэффициенту Ox, но противоположный ему по знаку. Изображение функции, представленной этой полупрямой, равно

$$-\frac{E}{p}-\frac{E}{\lambda}\frac{1}{p^2}.$$

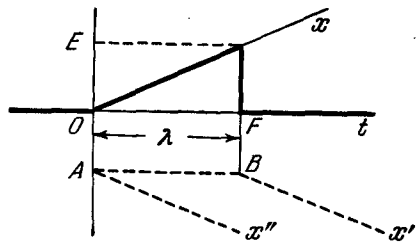


Рис. 8.18.

Полупрямая Bx' параллельна Ax'' (рис. 8.18). Представленная ею функция имеет изображение

$$-Ee^{-\lambda p}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{\lambda}\frac{1}{p^2}\right].$$

Искомую функцию $g(t)$ можно получить сложением обеих функций представленных линиями $-\infty Ox$ и $-\infty OFBx'$. Следовательно, изображение функции $g(t)$ будет

$$\frac{E}{p}\left[\frac{1}{\lambda p}-\left(1+\frac{1}{\lambda p}\right)e^{-\lambda p}\right].$$

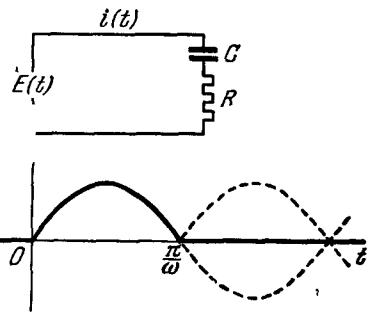


Рис. 8.19.

Пример 2. Импульс, имеющий вид полупериода синусоиды $E_0 \sin \omega t$, приложен в момент $t=0$ к цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления и емкости (рис. 8.19). Требуется найти ток, текущий в момент времени $t > \frac{\pi}{\omega}$.

Изображение синусоиды, начинающейся в момент $t=0$, равно $E_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Изображение синусоиды, начинающейся в момент $\frac{\pi}{\omega}$, равно $E_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2} e^{-\frac{\pi}{\omega}p}$.

Функция, представленная на рис. 8.19 утолщенной линией, будет иметь своим изображением сумму этих двух изображений. Следовательно,

$$E(t) \supset E_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right) = \mathcal{E}(p).$$

Обобщенное сопротивление цепи равно

$$Z(p) = \frac{1}{Cp} + R.$$

Тогда

$$i(t) \supset \frac{\mathcal{E}(p)}{Z(p)} = E_0 \frac{\omega p\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right)}{(p^2+\omega^2)\left(Rp+\frac{1}{C}\right)}.$$

Применяем формулу обращения

$$i(t)=\frac{E_0C\omega}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}p\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)(RCp+1)}dp.$$

Вычеты, соответствующие полюсам $p=\pm j\omega$, равны нулю, так как $1+e^{-j\pi}=0$. Вычет, соответствующий полюсу $p=-\frac{1}{RC}$, дает искомый ток

$$i(t)=-\frac{E_0C\omega}{1+R^2C^2\omega^2}\left(1+e^{\frac{\pi}{RC\omega}}\right)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Примечание. Если бы требовалось найти выражение $i(t)$ при $t<\frac{\pi}{\omega}$, то функция $\mathcal{E}(p)$ была бы изображением бесконечной синусоиды $E_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, так как при $t<\frac{\pi}{\omega}$ цепь „не знает", что эта синусоида будет прервана в момент $t=\frac{\pi}{\omega}$.

8.3.27. Изображение периодических разрывных функций. Пусть $h(t)$ — однозначная функция с периодом λ, начинающаяся в момент $t=0$, не принимающая бесконечных значений и имеющая конечное число разрывов, максимумов и минимумов в периоде (рис. 8.20),

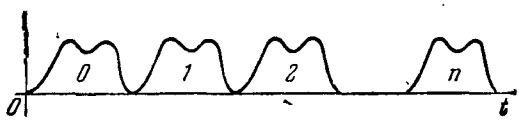


Рис. 8.20.

Пусть $F(p)$ — изображение функции $h(t)$, а $F_0(p)$ — изображение одного периода этой функции, начинающегося в $t=0$, т. е. нулевого периода. Тогда изображение первого периода равно $F_0(p)e^{\lambda p}$, изображение второго периода равно $F_0(p)e^{-2\lambda p}$, ..., изображение n-го периода равно $F_0(p)e^{-n\lambda p}$. Отсюда

$$F(p)=F_0(p)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\lambda p},$$

или

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-\lambda p}}. \qquad (86)$$

Примечание. Применяем теорему обращения:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\omega}^{c+j\omega}\frac{e^{pt}F_0(p)}{1-e^{-\lambda p}}dp.$$

Это выражение дает разложение в ряд Фурье функции $h(t)$.

Пример 1. Требуется найти изображение и разложение в ряд Фурье функции (рис. 8.21)

$$h(t)=|\sin t|.$$

Найдем изображение нулевого периода этой функции. Изображение синусоиды $1(t)\sin t$ равно $\frac{1}{p^2+1}$. Изображение синусоиды $1(t-\pi)\sin(t-\pi)$ равно $\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}$. Следовательно, изображение нулевого периода функции $h(t)$ равно

$$\frac{1}{p^2+1}(1+e^{-\pi p}).$$

По формуле (86) изображение функции $h(t)$ равно

$$\frac{1}{p^2+1}\,\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}.$$

Разложение в ряд Фурье функции $h(t)$ будет иметь вид

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}}{p^2+1}\,\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\,dp.$$

Вычеты, соответствующие полюсам $p=\pm j$, равны нулю, так как $1+e^{-j\pi}=0$.

Имеется бесконечное число простых полюсов, удовлетворяющих уравнению

$$1-e^{-\pi p}=0,$$

иначе говоря, полюсами будут точки $p=2nj$, где n принимает целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для полюса $p=0$ имеем

$$\left[\frac{e^{pt}(1+e^{-p\pi})}{(p^2+1)\,\frac{d}{dp}(1-e^{-p\pi})}\right]_{p=0}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{pt}(1+e^{-p\pi})}{(p^2+1)\,e^{-p\pi}}\right]_{p=0}=\frac{2}{\pi}.$$

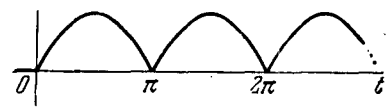


Рис. 8.21.

Для полюсов, соответствующих всем целым положительным и отрицательным значениям n, кроме нуля, имеем

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2jnt}}{1-4n^2}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}.$$

Отсюда получаем разложение в ряд Фурье:

$$|\sin t|=\frac{2}{\pi}\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}\right].$$

Пример 2. К катушке самоиндукции с сопротивлением прикладывают напряжение, равное попеременно $+E$ или $-E$ в течение промежутков времени, равных T (рис. 8.22). При $t>nT$ это напряжение остается равным $\pm E$

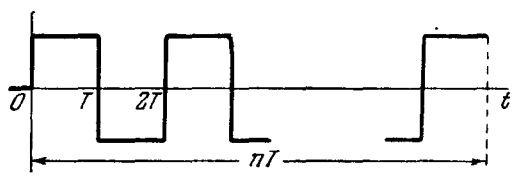


Рис. 8.22.

в зависимости от четности или нечетности n. Требуется вычислить ток, проходящий по катушке в момент t, более поздний, чем nT.

Изображение напряжения равно

$$\frac{2E}{p}\left[\frac{1}{2}-e^{-pT}+e^{-2pT}-e^{-3pT}+\ldots+(-1)^n e^{-npT}\right],$$

т. е.

$$\frac{2E}{p}\left[\frac{1}{2}-e^{-pT}\,\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-npT}}{1+e^{-pT}}\right].$$

Обобщенное сопротивление катушки с сопротивлением равно

$$Z(p)=Lp+R.$$

Поэтому искомый ток будет

$$i(t)=\frac{E}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}}{p(Lp+R)}\,dp-\frac{2E}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{e^{pt}e^{-pT}\left[1+(-1)^{n+1}e^{-npT}\right]dp}{p(1+e^{-pT})(Lp+R)}.$$

Для второго интеграла должны быть рассмотрены полюсы

$$p=\frac{(2k+1)\pi j}{T},\quad p=-\frac{R}{L},\quad p=0,$$

а для первого интеграла — только два последних.

Так как

$$\left[\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-npT}}{-Te^{-pT}}\right]_{p=\frac{(2k+1)\pi j}{T}}=0,$$

то следует принимать во внимание только полюсы $p=-\frac{R}{L}$ и $p=0$. Ток $i(t)$ может быть написан в виде

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}+2e^{-\frac{R}{L}(t-T)}\frac{1+(-1)^{n+1}e^{n\frac{R}{L}T}}{1+e^{\frac{R}{L}T}}\right],\quad t>nT.$$

Примечание. Если число зубцов кривой напряжения бесконечно, то это выражение справедливо при

$$nT<t<(n+1)T.$$

При $n=0$ мы приходим, естественно, к примеру 1 п. 8.3.13.

Таблица соответствия

8.3.28. Введение. Решение физических или математических задач с помощью операционного исчисления, как уже говорилось, содержит три фазы.

Первая состоит в переходе от реальных данных (переменная t) к операционной записи (переменная p) при помощи формулы преобразования Лапласа

$$h(t)\sqsupset F(p).$$

Вторая представляет собой ряд вычислений, приводящих к решению поставленной задачи в операционной форме:

$$F(p)\to\Phi(p).$$

Третья состоит в переходе от операционной записи к реальной (переменная t). Общая формула, применимая к такому переходу, — это, очевидно, формула обращения

$$\Phi(p)\sqsubset\eta(t).$$

Первая и третья фазы сильно облегчаются существованием таблицы, содержащей преобразования наиболее часто встречающихся математических выражений, и применением правил операционной алгебры, если искомые функции не находятся в таблице соответствия. Это помогает избежать вторичного выполнения вычислений, которые были сделаны по крайней мере уже один раз.

Так как третья фаза вычислений (переход от переменной p к переменной t) всегда наиболее затруднительна, то нам показалось разумным сгруппировать непрерывные функции по семействам переменной p. Напротив, разрывные функции*), которые входят чаще всего в первую фазу исчисления, были сгруппированы по семействам функций переменной t.

*) Имеются в виду случаи, когда функция или ее производная терпят разрыв.

8.3.29. Непрерывные функции.

$F(p)$	$h(t)$ [1]
1	$\Upsilon'(t)$
$\frac{1}{p}$	$\Upsilon(t)$
$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{p-\ln a}$	a^t
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
$\frac{1}{p^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$
$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{ch}\omega t$
$\frac{p+k}{(p+\alpha)^2}$	$[(k-\alpha)t+1]e^{-\alpha t}$
$\frac{p+k}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sqrt{k^2+\omega^2}\sin(\omega t+\varphi),\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega}{k}$
$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$
$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\sin\omega t$
$\frac{\omega\cos\varphi\mp(p+\lambda)\sin\varphi}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\sin(\omega t\pm\varphi)$
$\frac{(p+\lambda)\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\cos(\omega t\pm\varphi)$
$\frac{p+k}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{(k-\alpha)e^{-\alpha t}-(k-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$
$\frac{1}{p(p+\alpha)^2}$	$\frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t}}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}$
$\frac{1}{p^2(p+\alpha)}$	$\frac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$

[1]) Начиная с третьей строки, умножение на $\Upsilon(t)$ подразумевается. Умножение на $\Upsilon(t-\lambda)$ будет обозначено через $t>\lambda$.

Продолжение

$F(p)$	$h(t)$
$\frac{1}{(p+\alpha)^2(p+\beta)}$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\beta t}+\frac{(\beta-\alpha)t-1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
$\frac{p+k}{p(p+\alpha)^2}$	$\frac{k}{\alpha^2}+\left[\frac{\alpha-k}{\alpha}t-\frac{k}{\alpha^2}\right]e^{-\alpha t}$
$\frac{p+k}{(p+\alpha)^2(p+\beta)}$	$\frac{k-\beta}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}+\left[\frac{k-\alpha}{\beta-\alpha}t+\frac{\beta-k}{(\beta-\alpha)^2}\right]e^{-\alpha t}$
$\frac{p+k}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{k}{\alpha\beta}+\frac{k-\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}+\frac{k-\beta}{\beta(\beta-\alpha)}e^{-\beta t}$
$\frac{p+k}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)}$	$\frac{(k-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(k-\beta)e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+\frac{(k-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{p^2+fp+k}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)}$	$\frac{(\alpha^2-f\alpha+k)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\beta^2-f\beta+k)e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}+$ $+\frac{(\gamma^2-f\gamma+k)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{2}{p(p^2+4)}$	$\sin^2 t$
$\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$	$\cos^2 t$
$\frac{1}{p^2(p^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$
$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$
$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$
$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$t\cos\omega t$
$\frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\nu^2)}$	$\frac{\cos\omega t-\cos\nu t}{\nu^2-\omega^2}$
$\frac{4\omega^3}{p^4+4\omega^4}$	$\sin\omega t\,\mathrm{ch}\,\omega t-\cos\omega t\,\mathrm{sh}\,\omega t$
$\frac{p}{p^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t\,\mathrm{sh}\,\omega t$
$\frac{1}{p^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\mathrm{sh}\,\omega t-\sin\omega t)$
$\frac{p}{p^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}(\mathrm{ch}\,\omega t-\cos\omega t)$

Продолжение

$F(p)$	$h(t)$
$\dfrac{p}{[p^2+(\omega+\nu)^2][p^2+(\omega-\nu)^2]}$	$\dfrac{1}{2\omega\nu}\sin\nu t\sin\omega t$
$\dfrac{1}{p^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n целое >0)
$\dfrac{p^n}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t}\sum\limits_{s=0}^{n}(-1)^s\dfrac{n!\,\alpha^s}{(n-s)!\,(s!)^2}t^s$ (n целое >0)
$\dfrac{1}{p^{\nu+1}}$	$\dfrac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$, $R(\nu)>0$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}+\alpha}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-\alpha e^{\alpha^2 t}[1-\Phi(\alpha\sqrt{t})]$
$\dfrac{\sqrt{p}}{p-\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}+\alpha e^{\alpha^2 t}\Phi(\alpha\sqrt{t})$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}(p-\alpha^2)}$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha^2 t}\Phi(\alpha\sqrt{t})$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\alpha)}$	$e^{\alpha^2 t}[1-\Phi(\alpha\sqrt{t})]$
$\dfrac{1}{(p+\alpha)\sqrt{p+\beta}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}}e^{-\alpha t}\Phi(\sqrt{\beta-\alpha}\sqrt{t})$
$\dfrac{\sqrt{p+2\alpha}-\sqrt{p}}{\sqrt{p+2\alpha}+\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{t}e^{-\alpha t}I_1(\alpha t)$
$(\sqrt{p+2\alpha}+\sqrt{p+2\beta})^{-2\nu}$	$\dfrac{\nu}{2^\nu(\alpha-\beta)^\nu t}e^{-(\alpha+\beta)t}I_\nu[(\alpha-\beta)t]$, $\nu>0$
$\dfrac{(\sqrt{p}+\sqrt{p+2\alpha})^{-2\nu}}{\sqrt{p}\sqrt{p+2\alpha}}$	$\dfrac{1}{2^\nu\alpha^\nu}e^{-\alpha t}I_\nu(\alpha t)$, $\nu>-1$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}}$	$e^{-(\alpha+\beta)t}J_0[(\alpha-\beta)t]$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$
$\dfrac{1}{(p^2+\alpha^2)^\nu}$, $\nu>0$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{t}{2\alpha}\right)^{\nu-1/2}J_{\nu-1/2}(\alpha t)$
$\dfrac{1}{(p^2-\alpha^2)^\nu}$, $\nu>0$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{t}{2\alpha}\right)^{\nu-1/2}I_{\nu-1/2}(\alpha t)$
$\dfrac{1}{(\sqrt{p^2+\alpha^2}+p)^\nu}$, $\nu>0$	$\dfrac{\nu}{\alpha^\nu}\dfrac{J_\nu(\alpha t)}{t}$

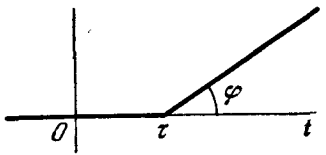
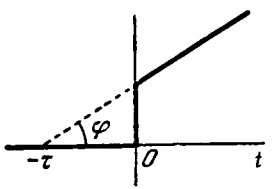
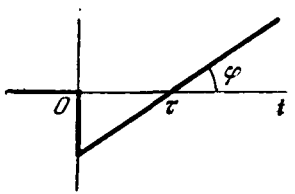
Продолжение

$F(p)$	$h(t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}\,(\sqrt{p^2+\alpha^2}+p)^{\nu}}, \quad \nu>0$	$\dfrac{1}{\alpha^{\nu}} J_{\nu}(\alpha t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}\,(\sqrt{p^2-\alpha^2}+p)^{\nu}}, \quad \nu>0$	$\dfrac{1}{\alpha^{\nu}} I_{\nu}(\alpha t)$
$\dfrac{1}{p} e^{-\alpha/p}$	$J_0(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha/p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{\alpha/p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch}(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\alpha/p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \sin(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{p\sqrt{p}} e^{\alpha/p}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \operatorname{sh}(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{p^{\nu}} e^{-\alpha/p}, \quad \nu>0$	$(t/\alpha)^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{\alpha t})$
$\dfrac{1}{p^{\nu}} e^{\alpha/p}, \quad \nu>0$	$(t/\alpha)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}(2\sqrt{\alpha t})$
$e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \alpha>0$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\alpha^2/4t}$
$\dfrac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \alpha\geqslant 0$	$1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}} e^{-\alpha\sqrt{p}}, \quad \alpha\geqslant 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2/4t}$
$\dfrac{[p+\alpha-\sqrt{p\,(p+2\alpha)}]^{\nu}}{\sqrt{p\,(p+2\alpha)}} e^{-\lambda\sqrt{p(p+2\alpha)}}$	$e^{-\alpha t}\alpha^{\nu}\left(\dfrac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} I_{\nu}(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad t>\lambda$
$\dfrac{(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p)^{\nu}}{\sqrt{p^2+\alpha^2}} e^{-\lambda\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\alpha^{\nu}\left(\dfrac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} J_{\nu}(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad t>\lambda$
$\dfrac{(p-\sqrt{p^2-\alpha^2})^{\nu}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}} e^{-\lambda\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$\alpha^{\nu}\left(\dfrac{t-\lambda}{t+\lambda}\right)^{\nu/2} I_{\nu}(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad t>\lambda$
$e^{-\lambda p}-e^{-\lambda\sqrt{p^2+\omega^2}}$	$\dfrac{\alpha\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} J_1(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad t>\lambda$
$e^{-\lambda\sqrt{p^2-\alpha^2}}-e^{-\lambda p}$	$\dfrac{\alpha\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} I_1(\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}), \quad t>\lambda$
$-\dfrac{1}{p}\ln p$	$\gamma+\ln t$
$\dfrac{1}{p^2+1}\ln p$	$\cos t\,\operatorname{Si} t-\sin t\,\operatorname{Ci} t$
$\dfrac{p}{p^2+1}\ln p$	$-\sin t\,\operatorname{Si} t-\cos t\,\operatorname{Ci} t$

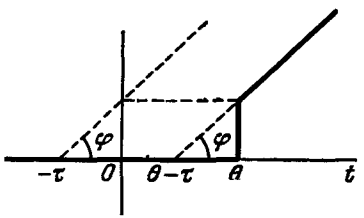
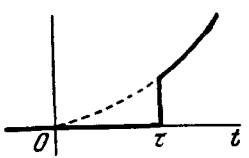
Пр

$F(p)$	$h(t)$
$\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t}$
$\frac{1}{p}\ln(k^2p^2+\alpha^2),\quad \alpha>0$	$2\ln\alpha-2\,\mathrm{Ci}\,\frac{\alpha t}{k}$
$\frac{1}{p^2}\ln(p^2+\alpha^2),\quad \alpha>0$	$\frac{2}{\alpha}[\alpha t\ln\alpha+\sin\alpha t-\alpha t\,\mathrm{Ci}\,\alpha t]$
$\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1-\cos\alpha t)$
$\ln\frac{p^2-\alpha^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1-\mathrm{ch}\,\alpha t)$
$\frac{1}{p}\left[(\ln p+\gamma)^2+\frac{\pi^2}{6}\right]$	$\ln^2 t$
$-\frac{2}{\pi\sqrt{p^2+\alpha^2}}\ln\frac{p+\sqrt{p^2+\alpha^2}}{\alpha}$	$Y_0(\alpha t)$
$\frac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\ln\frac{p+\sqrt{p^2-\alpha^2}}{\alpha}$	$K_0(\alpha t)$
$\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{p}$	$\frac{1}{t}\sin\omega t$
$\frac{1}{p}\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{p}$	$\mathrm{Si}\,\alpha t$
$\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$	$\mathrm{ber}\,2\sqrt{t}$
$\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$	$\mathrm{bei}\,2\sqrt{t}$
$e^{\alpha^2p^2}[1-\Phi(\alpha p)],\quad \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4\alpha^2}$
$\frac{1}{p}e^{\alpha^2p^2}[1-\Phi(\alpha p)],\quad \alpha>0$	$\Phi\left(\frac{t}{2\alpha}\right)$
$e^{\alpha p}[1-\Phi(\sqrt{\alpha p})],\quad \alpha>0$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\frac{1}{(t+\alpha)\sqrt{t}}$
$\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{p}}\right)$	$\frac{1}{\pi t}\sin(2\alpha\sqrt{t})$
$K_0(\alpha\sqrt{p})$	$\frac{1}{2t}e^{-\alpha^2/4t}$
$\frac{1}{p}e^{\alpha p}K_1(\alpha p)$	$\frac{1}{\alpha}\sqrt{t(t+2\alpha)}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}K_1(\alpha\sqrt{p})$	$\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha^2/4t}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\alpha/p}K_0(\alpha/p)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}}K_0(2\sqrt{2\alpha t})$
$-\frac{1}{p}(\cos p\,\mathrm{Ci}\,p+\sin p\,\mathrm{si}\,p)$	$\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$
$\frac{1}{p}(\sin p\,\mathrm{Ci}\,p-\cos p\,\mathrm{si}\,p)$	$\mathrm{arctg}\,t$

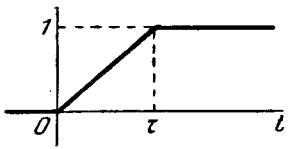
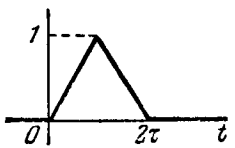
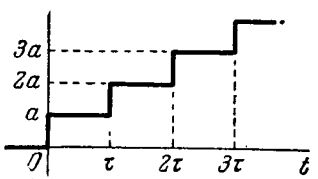
8.3.30. Разрывные функции.

График	$h(t)$	$F(p)$
 Рис. 8.23.	$(t-\tau)\,1(t-\tau)\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{p^2}\,e^{-\tau p}$
 Рис. 8.24.	$(t+\tau)\,1(t)\operatorname{tg}\varphi$	$\left(\frac{1}{p^2}+\frac{\tau}{p}\right)\operatorname{tg}\varphi$
 Рис. 8.25.	$(t-\tau)\,1(t)\operatorname{tg}\varphi$	$\left(\frac{1}{p^2}-\frac{\tau}{p}\right)\operatorname{tg}\varphi$

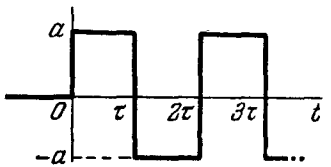
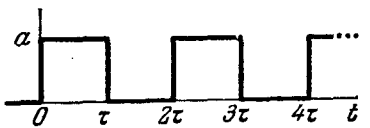
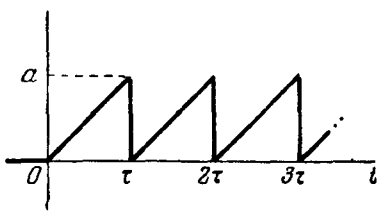
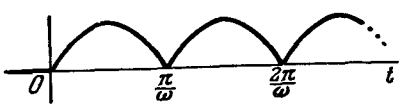
Продолжение

График	$h(t)$	$F(p)$
 Рис. 8.26.	$(t-\theta+\tau)\,\Upsilon(t-\theta)\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{1}{p^2}+\frac{\tau}{p}\right)e^{-p\theta}$
 Рис. 8.27.	$t^2\Upsilon(t-\tau)$	$\left(\frac{1}{p^3}+\frac{2\tau}{p^2}+\frac{\tau^2}{p}\right)e^{-p\tau}$
	$\Upsilon(t-a)-\Upsilon(t-b)$	$\frac{1}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})$

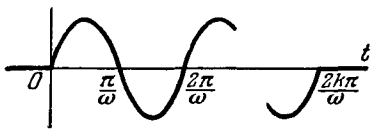
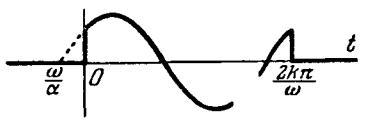
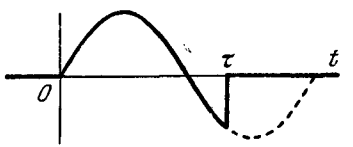
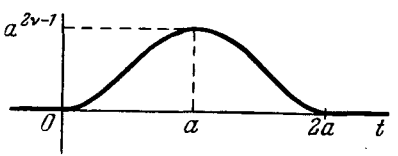
Продолжение

График	$h(t)$	$F(p)$
 Рис. 8.29.	$\frac{t}{\tau}$, $0 < t < \tau$ 1, $\tau < t < +\infty$	$\frac{1-e^{-p\tau}}{p^2\tau}$
 Рис. 8.30.	$\frac{t}{\tau}$, $0 < t < \tau$ $-\frac{t}{\tau}+2$, $\tau < t < 2\tau$ 0, $2\tau < t < +\infty$	$\frac{(1-e^{-p\tau})^2}{p^2\tau}$
 Рис. 8.31	$a\sum_{k=0}^{\infty}\Upsilon(t-k\tau)$	$\frac{a}{p}\frac{1}{1-e^{-p\tau}}$

Продолжение

График	$h(t)$	$F(p)$
 Рис. 8.32.	$a\Upsilon(t)+2a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\Upsilon(t-k\tau)$	$\frac{a}{p}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}$
 Рис. 8.33	$a\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\Upsilon(t-k\tau)$	$\frac{a}{p}\,\frac{1}{1+e^{-p\tau}}$
 Рис. 8.34.	$\frac{a}{\tau}\left[t\Upsilon(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\Upsilon(t-k\tau)\right]$	$\frac{a}{\tau}\,\frac{e^{p\tau}-p\tau-1}{p^2(e^{p\tau}-1)}$
 Рис. 8.35.	$\lvert\sin\omega t\rvert$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,\frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}{1-e^{-\frac{\pi}{\omega}p}}$

Продолжение

График	$h(t)$	$F(p)$
 Рис. 8.36.	$\sin \omega t, \quad 0 < t < \frac{2k\pi}{\omega}$ $0, \quad \frac{2k\pi}{\omega} < t < \infty$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1 - e^{-\frac{2k\pi}{\omega} p}\right)$
 Рис. 8.37.	$\sin(\omega t + \alpha), \quad 0 < t < \frac{2k\pi}{\omega}$ $0, \quad \frac{2k\pi}{\omega} < t < \infty$	$\frac{1}{p^2+\omega^2}\left(1 - e^{-\frac{2k\pi}{\omega} p}\right)(\omega \cos \alpha + p \sin \alpha)$
 Рис. 8.38.	$\sin t, \quad 0 < t < \tau$ $0, \quad \tau < t < \infty$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - e^{-p\tau}\cos(\tau + \operatorname{arctg} p)\right]$
 Рис. 8.39.	$[a^2 - (t-a)^2]^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad 0 < t < 2a$ $0, \quad 2a < t < \infty$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2a)^{\nu} p^{-\nu} e^{-ap} I_{\nu}(ap)$

8.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦЕПЯМ

8.4.1. Колебательные контуры. Рассмотрим колебательный контур R, L, C. В этот контур в момент $t=0$ включают некую электродвижущую силу $E(t)$. Пусть $\mathcal{E}(p)$ — изображение $E(t)$, а $\mathcal{J}(p)$ — изображение тока $i(t)$, идущего по контуру. Требуется найти напряжение на зажимах катушки. Это напряжение $v(t)$ имеет изображением $\mathcal{V}(p)$.

Имеем

$$\mathcal{J}(p)=\frac{\mathcal{E}(p)}{Z(p)}=\frac{\mathcal{E}(p)}{Lp+R+\frac{1}{Cp}}.$$

Кроме того,

$$v(t)=L\frac{di}{dt}\supset Lp\,\mathcal{J}(p)=\mathcal{V}(p).$$

Мы имеем право написать это соотношение, так как $i(0)=0$. Отсюда

$$\mathcal{V}(p)=\frac{p^2\mathcal{E}(p)}{p^2+2ap+\omega^2},$$

где

$$a=\frac{R}{2L},\quad \omega^2=\frac{1}{LC}.$$

Положим, что R достаточно мало, чтобы можно было пренебречь a^2 по сравнению с ω^2. Тогда можно написать знаменатель в виде $(p+a)^2+\omega^2$, и корни его будут равны

$$-a-j\omega,\quad -a+j\omega.$$

Найдем реакцию контура на некоторые внешние электродвижущие силы.

1. Электродвижущая сила $E(t)$ равна $E_0\sin\nu t\,\Upsilon(t)$. В этом случае

$$\mathcal{E}(p)=\frac{E_0\nu}{p^2+\nu^2},$$

$$v(t)\supset\frac{E_0\nu p^2}{(p^2+\nu^2)[(p+a)^2+\omega^2]}.$$

Полученное соотношение можно записать в виде

$$v(t)\supset\frac{E_0\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+4a^2\nu^2}\left[\frac{2a\nu^2 p}{p^2+\nu^2}-\frac{\nu^2(\omega^2-\nu^2)}{p^2+\nu^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2a\nu^2(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}+\frac{\omega^2(\omega^2-\nu^2)+2a^2\nu^2}{(p+a)^2+\omega^2}\right].$$

Отсюда, пользуясь элементарными соответствиями, непосредственно получаем

$$v(t)=\frac{E_0\nu\Upsilon(t)}{(\omega^2-\nu^2)^2+4a^2\nu^2}\left\{2a\nu^2\cos\nu t-\nu(\omega^2-\nu^2)\sin\nu t+\right.$$
$$\left.+e^{-at}\left[-2a\nu^2\cos\omega t+\frac{\omega^2(\omega^2-\nu^2)+2a^2\nu^2}{\omega}\sin\omega t\right]\right\}.$$

Положим, что $\omega=\nu$, т. е. частота электродвижущей силы равна частоте собственных колебаний контура. Тогда

$$v(t)=\frac{\omega E_0}{2a}\left\{\cos\omega t-e^{-at}\left[\cos\omega t-\frac{a}{\omega}\sin\omega t\right]\right\}\Upsilon(t).$$

Если, кроме того, мы можем пренебречь a по сравнению с ω, то предыдущее выражение может быть написано в виде

$$v(t)=\frac{\omega E_0}{2a}\cos\omega t\,(1-e^{-at})\,\Upsilon(t).$$

Если $R=0$, а $\omega \neq \nu$, то

$$v(t)=\frac{E_0\nu}{\omega^2-\nu^2}[\omega \sin \omega t - \nu \sin \nu t]\,\Upsilon(t).$$

2. Электродвижущая сила равна единичной ступени: $E(t)=E_0\Upsilon(t)$, тогда $\mathcal{E}(p)=\frac{E_0}{p}$.

Пренебрегая a^2 по сравнению с ω^2, получаем

$$v(t) \supset \frac{pE_0}{(p+a)^2+\omega^2}=\frac{E_0(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}-\frac{aE_0}{(p+a)^2+\omega^2}.$$

Отсюда непосредственно имеем

$$v(t)=E_0e^{-at}\left[\cos \omega t-\frac{a}{\omega}\sin \omega t\right]\Upsilon(t)$$

и, пренебрегая a по сравнению с ω, получаем

$$v(t)=E_0e^{-at}\cos \omega t\,\Upsilon(t).$$

3. Электродвижущая сила E_0 приложена в течение очень короткого времени δt. В этом случае $\mathcal{E}(p)=E_0\,\delta t$. С тем же приближением, что и раньше, получаем

$$v(t) \supset \frac{E_0\,\delta t p^2}{(p+a)^2+\omega^2}$$

или

$$v(t) \supset E_0\,\delta t\left[1-\frac{2a(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}+\frac{\omega^2-a^2}{(p+a)^2+\omega^2}\right].$$

Отсюда непосредственно имеем

$$v(t)=E_0\,\delta t\left\{\Upsilon'(t)-e^{-at}\left[2a\cos \omega t-\frac{\omega^2-a^2}{\omega}\sin \omega t\right]\Upsilon(t)\right\}$$

и с теми же упрощающими предположениями

$$v(t)=E_0\,\delta t\,[\Upsilon'(t)+\omega\Upsilon(t)\sin \omega t].$$

8.4.2. Пример применения к системе двух связанных контуров. Применив к простому колебательному контуру методы операционного исчисления и получив таким образом известные результаты (которые, впрочем, легко найти и другим способом), мы рассмотрим один пример. Покажем, что применение к решению этого примера классических методов приводит к гораздо более сложным вычислениям, чем применение операционного исчисления, где расчеты делаются почти автоматически, так как различные граничные условия оказываются с самого начала включенными в вычисления.

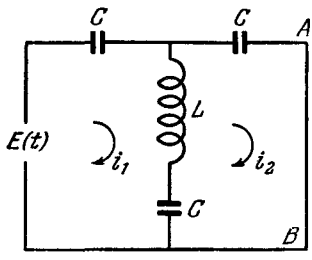


Рис. 8.40.

Дана цепь, изображенная на рис. 8.40. Пусть $E(t)$ — электродвижущая сила источника, внутреннее сопротивление которого равно нулю, приложенная в момент $t=0$. Мы хотим найти ток $i_2(t)$, текущий в ветви AB этой цепи.

Дифференциальные уравнения системы имеют вид

$$\frac{2}{C}\int i_1\,dt+L\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C}\int i_2\,dt-L\frac{di_2}{dt}=E(t),$$

$$-\frac{1}{C}\int i_1\,dt-L\frac{di_1}{dt}+\frac{2}{C}\int i_2\,dt+L\frac{di_2}{dt}=0.$$

Пусть $\mathcal{J}_1(p)$, $\mathcal{J}_2(p)$, $\mathcal{E}(p)$ — соответственно изображения $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $E(t)$. Тогда система дифференциальных уравнений может быть записана при помощи формулы (30) (так как $i_1(0)=0$, $i_2(0)=0$) и формулы (31) в виде

$$\mathcal{J}_1\left(\frac{2}{Cp}+Lp\right)-\mathcal{J}_2\left(\frac{1}{Cp}+Lp\right)=\mathcal{E}(p),$$
$$-\mathcal{J}_1\left(\frac{1}{Cp}+Lp\right)+\mathcal{J}_2\left(\frac{2}{Cp}+Lp\right)=0.$$

Отсюда

$$i_2(t) \rightrightarrows \mathcal{J}_2(p)=\frac{Cp(LCp^2+1)}{2LCp^2+3}\mathcal{E}(p).$$

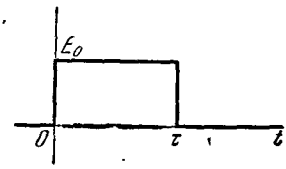


Рис. 8.41.

Вычислим $i_2(t)$ для случая, когда электродвижущая сила $E(t)$ имеет форму импульса, изображенного на рис. 8.41:

$$E(t)=E_0\Upsilon(t)-E_0\Upsilon(t-\tau).$$

В этом случае

$$\mathcal{E}(p)=\frac{E_0}{p}-\frac{E_0}{p}e^{-p\tau}.$$

Ток $i_2(t)$ представляет тогда собой сумму двух токов:

$$i_2(t)=i_2'(t)+i_2''(t),$$
$$i_2'(t) \rightrightarrows E_0C\frac{LCp^2+1}{2LCp^2+3},$$
$$i_2''(t) \rightrightarrows -E_0C\frac{LCp^2+1}{2LCp^2+3}e^{-p\tau}.$$

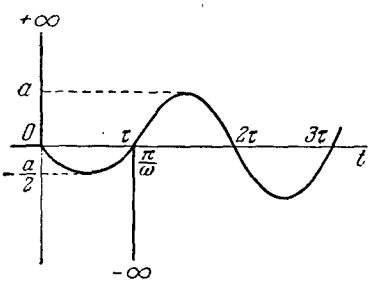


Рис. 8.42.

Следовательно,

$$i_2''(t)=-i_2'(t-\tau)\Upsilon(t-\tau).$$

Так как

$$E_0C\frac{LCp^2+1}{2LCp^2+3}=\frac{E_0C}{2}\left[1-\frac{1}{2LCp^2+3}\right],$$

то получаем

$$i_2'(t)=\frac{E_0C}{2}\Upsilon'(t)-\frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{C}{6L}}\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,t\Upsilon(t),$$
$$i_2''(t)=-\frac{E_0C}{2}\Upsilon'(t-\tau)+\frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{C}{6L}}\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,(t-\tau)\Upsilon(t-\tau).$$

Вычертим график $i_2(t)$ для случая, когда ширина τ импульса равна $\pi\sqrt{\frac{2LC}{3}}=\frac{\pi}{\omega}$. Тогда

$$i_2(t)=\frac{E_0C}{2}[\Upsilon'(t)-\Upsilon'(t-\tau)]-\frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{C}{6L}}\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,t[\Upsilon(t)+\Upsilon(t-\tau)].$$

Отсюда получаем график, изображенный на рис. 8.42, если считать

$$a=E_0\sqrt{\frac{C}{6L}}.$$

Рассмотрим случай, когда $\tau=2\pi\sqrt{\frac{2LC}{3}}=\frac{2\pi}{\omega}$. Тогда в формуле, дающей $i_2(t)$, синус исчезает при $t>\tau$, так как выражение для $i_2(t)$ принимает

вид

$$i_2(t)=\frac{E_0C}{2}[\Upsilon'(t)-\Upsilon'(t-\tau)]-\frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{C}{6L}}\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,t\,[\Upsilon(t)-\Upsilon(t-\tau)],$$

и мы получаем график, изображенный на рис. 8.43.

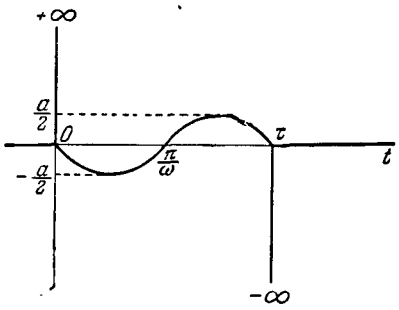


Рис. 8.43.

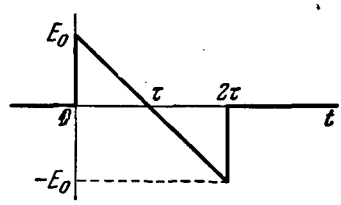


Рис. 8.44.

Величины $\frac{E_0C}{2}\Upsilon'(t)$ и $\frac{E_0C}{2}\Upsilon'(t-\tau)$ представляют собой зарядный и разрядный ток емкостей.

Возьмем теперь случай, немного более сложный, когда $E(t)$ имеет график, изображенный на рис. 8.44. Вычислим изображение этой функции. Имеем

$$E(t)=\left[E_0-\frac{E_0t}{\tau}\right]\Upsilon(t)+\left[E_0+E_0\frac{t-2\tau}{\tau}\right]\Upsilon(t-2\tau).$$

Отсюда

$$\mathcal{E}(p)=\frac{E_0}{\tau}\left\{\frac{\tau p-1}{p^2}+\frac{\tau p+1}{p^2}e^{-2p\tau}\right\}.$$

Как и ранее,

$$i_2(t)=i_2'(t)+i_2''(t),$$

где

$$i_2'(t)\supset\frac{CE_0}{\tau}\frac{(\tau p-1)(LCp^2+1)}{p(2LCp^2+3)}=\frac{CE_0}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{3p}-\frac{\frac{LC}{3}p}{2LCp^2+3}-\frac{\frac{\tau}{2}}{2LCp^2+3}\right),$$

$$i_2''(t)\supset\frac{CE_0}{\tau}\frac{(\tau p+1)(LCp^2+1)}{p(2LCp^2+3)}e^{-2p\tau}=$$

$$\frac{CE_0}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{1}{3p}+\frac{\frac{LC}{3}p}{2LCp^2+3}-\frac{\frac{\tau}{2}}{2LCp^2+3}\right)e^{-2p\tau}.$$

Отсюда

$$i_2(t)=\frac{CE_0}{2}[\Upsilon'(t)-\Upsilon'(t-2\tau)]-\frac{CE_0}{3\tau}[\Upsilon(\tau)-\Upsilon(t-2\tau)]-$$

$$-\frac{CE_0}{6\tau}\left[\Upsilon(t)\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,t-\Upsilon(t-2\tau)\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}(t-2\tau)\right]-$$

$$-\frac{CE_0}{2\sqrt{6LC}}\left[\Upsilon(t)\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}\,t+\Upsilon(t-2\tau)\sin\sqrt{\frac{3}{2LC}}(t-2\tau)\right].$$

Если взять $\tau = \pi\sqrt{\frac{2LC}{3}}$, положив $\omega = \sqrt{\frac{3}{2LC}}$ и $a = E_0\sqrt{\frac{C}{6L}}$, то

$$i_2(t) = \frac{CE_0}{2}[\Upsilon'(t) - \Upsilon'(t-2\tau)] - \frac{a}{\pi}[\Upsilon(t) - \Upsilon(t-2\tau)] -$$
$$- \frac{a}{2\pi}\cos\omega t\,[\Upsilon(t) - \Upsilon(t-2\tau)] - \frac{a}{2}\sin\omega t\,[\Upsilon(t) + \Upsilon(t-2\tau)].$$

График тока $i_2(t)$ изображен на рис. 8.45.

Примечание. Вычисления в пп. 8.4.1 и 8.4.2 были выполнены с помощью разложения рациональных дробей на простейшие, а не с помощью формулы обращения. Дело в том, что рациональные дроби $\frac{p^2}{(p+a)^2+\omega^2}$ (п. 8.4.1) и $\frac{LCp^2+1}{2LCp^2+3}$ (п. 8.4.2) не удовлетворяют условиям Жордана (показатели степеней числителя и знаменателя равны). Применение к этим дробям формулы обращения привело бы к неверному результату, так как интеграл по бесконечной полуокружности, расположенной слева от контура Бромвича, не равен в этом случае нулю.

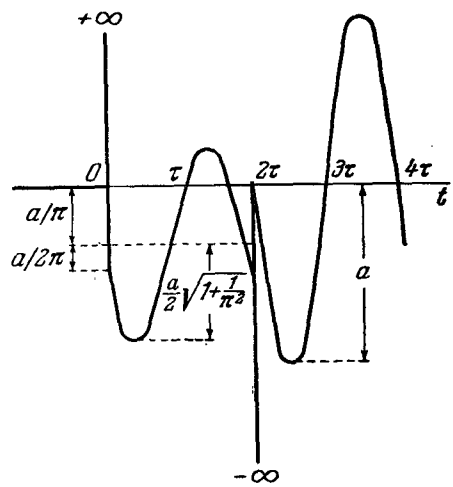


Рис. 8.45.

8.4.3. Случай, когда цепь не находится в равновесии в начальный момент времени. Имеются случаи, когда полезно было бы рассмотреть электрическую цепь, не находящуюся в равновесии при $t < 0$, и, в частности, предположить, что заряды емкостей не равны нулю в момент $t = 0$. Приведем очень простой пример, который покажет, каким образом поступать в этом случае.

Дана емкость с зарядом Q. Ее подключают в момент $t = 0$ к зажимам катушки L. Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0.$$

Найдем изменение заряда $q(t)$ на емкости во времени. Имеем

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Пусть $\mathcal{Q}(p)$ — изображение $q(t)$. Тогда предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$L[p^2\mathcal{Q}(p) - pq(0) - q'(0)] + \frac{1}{C}\mathcal{Q}(p) = 0.$$

Здесь вместо формулы (30) использована формула (28), потому что теперь цепь не находится в равновесии в момент $t = 0$.

Имеем $q(0) = Q$ и $q'(0) = i(0) = 0$. Отсюда

$$\mathcal{Q}(p) = \frac{pQ}{p^2 + \frac{1}{LC}}$$

и

$$q(t) = Q\cos\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t\,\Upsilon(t).$$

Изображение $\mathcal{J}(p)$ тока $i(t)$ будет, если применить формулу (27), равно

$$\mathcal{J}(p) = p\mathcal{Q}(p) - q(0).$$

Отсюда

$$\mathcal{J}(p) = -\frac{Q}{LC}\frac{1}{p^2 + \frac{1}{LC}}$$

и

$$i(t) = -\frac{Q}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}\,\Upsilon(t).$$

8.4.4. Электрические фильтры. Рассмотрим электрический фильтр, схематически изображенный на рис. 8.46. Это цепной фильтр, состоящий из n звеньев. В нулевое звено в момент $t = 0$ включают электродвижущую

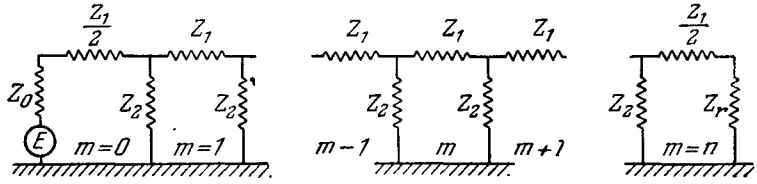


Рис. 8.46.

силу $E(t)$. Оба концевых звена отличаются от всех остальных. Нулевое звено состоит из полных сопротивлений Z_0 и $\frac{Z_1}{2}$. Последнее n-е звено состоит из полных сопротивлений Z_r и $\frac{Z_1}{2}$. Пусть i_{m-1}, i_m, i_{m+1} — соответственно токи в полных сопротивлениях Z_1 $(m-1)$-, m- и $(m+1)$-го звеньев. Законы Кирхгофа дают

$$i_m(Z_1 + 2Z_2) = i_{m-1}Z_2 + i_{m+1}Z_2. \tag{87}$$

Предположим, что полное сопротивление Z_r таково, что на конце фильтра нет отражения возмущений, и положим

$$i_m = Ae^{-m\Gamma}, \tag{88}$$

где Γ и A — величины, которые мы сейчас определим. Заменим в (87) токи на их выражение из (88). Тогда

$$1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = \operatorname{ch}\Gamma. \tag{89}$$

В нулевом звене имеем

$$E(t) - i_0Z_0 = \frac{1}{2}i_0Z_1 + Z_2(i_0 - i_1).$$

Если заменить в этом выражении i_0 на Ae^0, а i_1 на $Ae^{-\Gamma}$, то

$$A = \frac{E(t)}{Z_2 \operatorname{sh}\Gamma + Z_0}.$$

Ток i_m может быть написан в виде

$$i_m = Ae^{-m\Gamma} = \frac{E(t)}{(Z_2 \operatorname{sh}\Gamma + Z_0)(\operatorname{ch} m\Gamma + \operatorname{sh} m\Gamma)}.$$

Точно так же в последнем n-м звене имеем

$$i_n Z_r + i_n \frac{Z_1}{2} + (i_n - i_{n-1}) Z_2 = 0,$$

откуда

$$Z_r + \frac{Z_1}{2} + Z_2 = Z_2 e^{\Gamma}.$$

Соотношение (89) позволяет написать

$$Z_r = Z_2 \operatorname{sh} \Gamma = \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}.$$

Выражение для Z_r дает условия отсутствия отражения. Это сопротивление называют характеристическим сопротивлением фильтра.

Рассмотрим выражение для тока i_m. Полное взаимное сопротивление нулевого и m-го звеньев равно

$$(Z_2 \operatorname{sh} \Gamma + Z_0)(\operatorname{ch} m\Gamma + \operatorname{sh} m\Gamma).$$

Положив

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4\alpha^2,$$

получаем

$$\operatorname{ch} \Gamma = 1 + 2\alpha^2, \quad \operatorname{sh} \Gamma = 2\alpha \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Если $\mathcal{E}(p)$ представляет собой изображение $E(t)$, то

$$i_m(t) \supset \frac{\mathcal{E}(p)}{(Z_0 + \sqrt{Z_1 Z_2}\sqrt{\alpha^2 + 1})(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})^{2m}}. \tag{90}$$

Если Γ — чисто мнимое число, то фильтр не внесет затухания, а лишь вызовет изменение фазы. Положим

$$\Gamma = j\nu.$$

Формула (89) принимает вид

$$\cos \nu = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}.$$

Отсюда получаем условия для полосы пропускания фильтра

$$-1 < 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} < +1$$

или

$$0 < -\frac{Z_1}{2Z_2} < 2. \tag{91}$$

8.4.5. Фильтр нижних частот. Рассмотрим фильтрующую схему, изображенную на рис. 8.47. В этом случае

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = Lp, \quad Z_2 = \frac{1}{Cp}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = LCp^2, \quad \alpha = \frac{p\sqrt{LC}}{2}.$$

Отсюда, обозначив через $\mathcal{E}(p)$ изображение внешней электродвижущей силы $E(t)$, получим ток в m-м звене:

$$i_m(t) \supset \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\mathcal{E}(p)}{\sqrt{p^2a^2 + 1}\,(pa + \sqrt{p^2a^2 + 1})^{2m}},$$

где

$$\frac{\sqrt{LC}}{2} = a.$$

Формула (91) дает условия для полосы пропускания, если p заменить на $j\omega$, иначе говоря, если на мгновение перейти к расчету установившихся режимов:

$$0 < \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_c,$$

где $\frac{\omega_c}{2\pi}$ — отсекающая частота.

Итак, наша фильтрующая схема передает без затухания круговые частоты ниже ω_c. Отсюда и ее название — фильтр нижних частот.

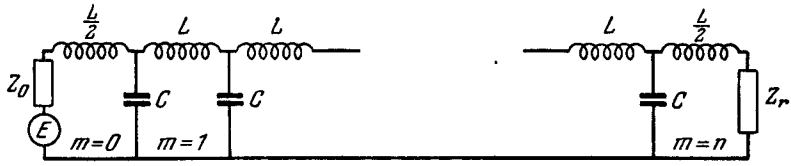


Рис. 8.47.

1. Внешняя электродвижущая сила равна единичной ступени:

$$E(t) = \Upsilon(t) \supset \mathcal{E}(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$i_m(t) \supset \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{p^2a^2+1}\,(pa+\sqrt{p^2a^2+1})^{2m}}$$

или, согласно формуле (62),

$$i_m(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^t J_{2m}\left(\frac{t}{a}\right) d\left(\frac{t}{a}\right).$$

Отсюда

$$i_m(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^{\omega_c t} J_{2m}(\theta)\, d\theta. \tag{92}$$

Значения функции Бесселя $J_{2m}(t)$ очень малы при $t < 2m$. Поэтому величина тока $i_m(t)$ становится заметно отличной от нуля лишь при $\omega_c t \geqslant 2m$, и можно говорить о скорости распространения фронта волны, равной $\frac{m}{t} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ „звеньев в секунду". Возмущение, которое в нулевом звене имело форму единичной ступени, будет в m-м звене выглядеть приблизительно так, как изображено на рис. 8.48.

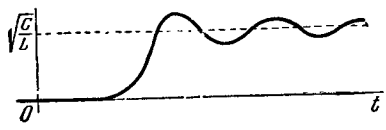


Рис. 8.48.

2. Случай электродвижущей силы произвольной формы. Положим

$$E(t) \supset \mathcal{E}(p).$$

Тогда

$$i_m(t) \supset \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\mathcal{E}(p)}{\sqrt{p^2a^2+1}\,(\sqrt{p^2a^2+1}+pa)^{2m}}. \tag{93}$$

Теорема свертывания дает

$$i_m(t) = \frac{2}{L} \int_0^t E(t-\tau)\, J_{2m}\left(\frac{2\tau}{\sqrt{LC}}\right) d\tau.$$

Эта формула неудобна для вычислений. Найдем другое выражение для $i_m(t)$. Положим в формуле (93) $\sqrt{p^2a^2+1}-pa=s$, откуда

$$p=\frac{1-s^2}{2as}.$$

Если сделать в $\mathcal{E}(p)$ подстановку, то получим функцию s. Пусть этой функцией будет $\mathcal{U}(s)$. Тогда формула (93) принимает вид

$$i_m(t)\supset\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\mathcal{U}(s)\,s^{2m}}{\sqrt{p^2a^2+1}}.$$

Предположим, что $\mathcal{U}(s)$ можно разложить по возрастающим степеням s:

$$\mathcal{U}(s)=b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_ns^n+\ldots$$

Имеем

$$i_m(t)\supset\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{p^2a^2+1}}\sum_{n=0}^{\infty}b_ns^{n+2m}.$$

Отсюда

$$i_m(t)=\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}b_nJ_{n+2m}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Этот способ имеет общий характер, и им можно пользоваться всегда при разложении в ряд бесселевых функций, изображение которых—функция p — имеет множителем

$$(a^2p^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Положим, что в нашем примере $E(t)=e^{j\omega t}$, тогда

$$\mathcal{E}(p)=\frac{1}{p-j\omega}\quad\text{и}\quad\mathcal{U}(s)=\frac{2as}{1-2asj\omega-s^2}.$$

Разложение в ряд по возрастающим степеням s будет иметь вид

$$\mathcal{U}(s)=2as\,[1+2ja\omega s+(1-4a^2\omega^2)\,s^2+2ja\omega\,(2-4a^2\omega^2)\,s^3+$$
$$+(1-12a^2\omega^2+16a^4\omega^4)\,s^4+2ja\omega\,(3-16a^2\omega^2+16a^4\omega^4)\,s^5+\ldots].$$

Отделив вещественную часть от мнимой, получим

$$i_m(t)=2\sqrt{\frac{C}{L}}\left[J_{2m+1}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+(1-4a^2\omega^2)\,J_{2m+3}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+\right.$$
$$\left.+(1-12a^2\omega^2+16a^4\omega^4)\,J_{2m+5}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+\ldots\right]+$$
$$+4j\sqrt{\frac{C}{L}}\,a\omega\left[J_{2m+2}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+(2-4a^2\omega^2)\,J_{2m+4}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+\right.$$
$$\left.+(3-16a^2\omega^2+16a^4\omega^4)\,J_{2m+6}\left(\frac{2t}{\sqrt{LC}}\right)+\ldots\right].$$

Вещественная и мнимая части представляют собой реакции, соответствующие $E(t)=\cos\omega t$ и $E(t)=\sin\omega t$.

8.4.6. Фильтр верхних частот. Рассмотрим электрический фильтр, схематически изображенный на рис. 8.49. Легко заметить, что частоты выше $\omega_C=\frac{1}{2\sqrt{LC}}$ передаются без затухания.

Имеем

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = \frac{1}{pC}, \quad Z_2 = pL, \quad \alpha = \frac{1}{2p\sqrt{LC}}.$$

Формула (90) дает

$$i_m(t) \supset \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\mathcal{E}(p)}{\sqrt{\left(\frac{b}{p}\right)^2 + 1}\left[\frac{b}{p} + \sqrt{\left(\frac{b}{p}\right)^2 + 1}\right]^{2m}}$$

при

$$b = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Приложим в начальный момент времени электродвижущую силу, равную

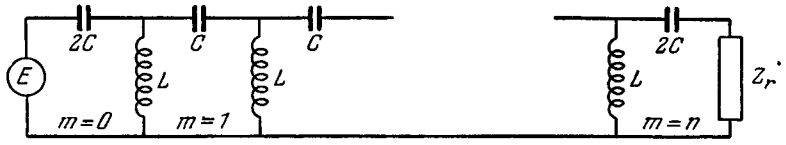


Рис. 8.49.

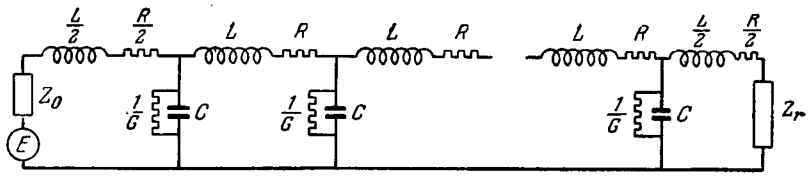


Рис. 8.50.

единичной ступени. Тогда

$$i_m(t) \supset \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{p}\right)^2 + 1}\left[\frac{b}{p} + \sqrt{\left(\frac{b}{p}\right)^2 + 1}\right]^{2m}} = \mathcal{J}_m(p).$$

Применяя формулы (62), (22) и (45), получаем

$$i_m(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{bt\tau}\right) J_{2m}(\tau)\, d\tau. \tag{94}$$

8.4.7. Фильтр нижних частот без искажений. Рассмотрим фильтрующую цепь, схематически изображенную на рис. 8.50. Имеем в этом случае

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = Lp + R, \quad Z_2 = \frac{1}{pC + G}, \quad \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp + G}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}, \quad a = \frac{\sqrt{LC}}{2}.$$

Фильтр нижних частот без искажений определяется условием

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = b.$$

Приложим в начальный момент времени электродвижущую силу, равную единичной ступени. Ток в m-м звене определяется из формулы (90), в которой Z_0, Z_1, Z_2 и α заменены приведенными выше значениями:

$$i_m(t) \sqsupset \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{a^2(p+b)^2+1}\,[a(p+b)+\sqrt{a^2(p+b)^2+1}]^{2m}}.$$

Имеем

$$h(t)=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{C}{L}}J_{2m}\left(\frac{t}{a}\right)\sqsupset\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{a^2p^2+1}\,[ap+\sqrt{a^2p^2+1}]^{2m}}.$$

Пользуясь теоремой смещения, найдем

$$e^{-bt}h(t)\sqsupset\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\sqrt{a^2(p+b)^2+1}\,[a(p+b)+\sqrt{a^2(p+b)^2+1}]^{2m}}.$$

Отсюда

$$\int_0^t e^{-bt}h(t)\,dt\sqsupset\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{a^2(p+b)^2+1}\,[a(p+b)+\sqrt{a^2(p+b)^2+1}]^{2m}}.$$

Следовательно,

$$i_m(t)=\int_0^t e^{-bt}h(t)\,dt$$

или

$$i_m(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}t}J_{2m}\left(\frac{t}{a}\right)d\left(\frac{t}{a}\right). \tag{95}$$

Мы получили формулу, подобную полученной раньше для фильтра нижних частот без потерь, но содержащую экспоненциальный множитель.

8.4.8. Усилители. Отрицательная обратная связь. Критерий Найквиста. Рассмотрим усилитель A (рис. 8.51). Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — напряжения на входе и выходе. При установившемся синусоидальном режиме между этими напряжениями имеется соотношение

$$y(t)=x(t)\,A(j\omega).$$

$A(j\omega)$—это комплексный коэффициент усиления, определяющий одновременно изменение и амплитуды, и фазы. Если теперь $x(t)$ и $y(t)$ означают любые функции времени, а не только синусоидальные, то

$$\mathcal{Y}(p)=\mathcal{X}(p)\,A(p)$$

при

$$\mathcal{Y}(p)\sqsubset y(t),$$
$$\mathcal{X}(p)\sqsubset x(t).$$

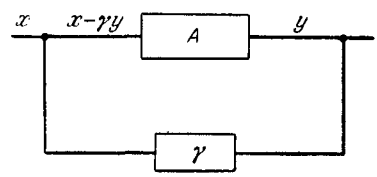


Рис. 8.51.

Соединим вход и выход усилителя посредством элемента γ (часто это бывает аттенюатор). Если $\gamma(j\omega)$ представляет собой коэффициент ослабления в синусоидальном режиме и если на входе усилителя выявить разность между x и γy, то

$$\mathcal{Y}(p)=A(p)\,[\mathcal{X}(p)-\gamma(p)\,\mathcal{Y}(p)].$$

Отсюда

$$\mathcal{Y}(p)=\frac{\mathcal{X}(p)\,A(p)}{1+\gamma(p)\,A(p)}.$$

Мы определили таким образом, усилитель с отрицательной обратной связью. Функцию $y(t)$ можно получить, применяя теорему обращения, а в более простых случаях — теорему разложения. Применение обеих этих теорем с очевидностью показывает, что система будет устойчива, если нули функции $1+\gamma(p)A(p)$ будут все расположены слева от мнимой оси. Действительно, если бы это было не так, то функция $y(t)$ имела бы по крайней мере один член вида $e^{p_1 t}$ при $R(p_1)>0$. Следовательно, она бесконечно возрастала бы во времени; в большинстве случаев происходило бы возбуждение колебаний.

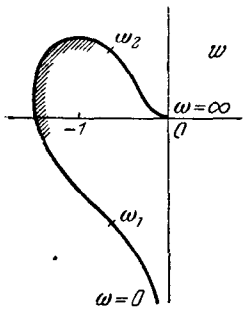


Рис. 8.52.

Преобразуем плоскость p в плоскость w при помощи преобразования

$$w=\gamma(p)A(p).$$

В результате такого преобразования все нули функции $1+\gamma(p)A(p)$ переходят в точку $w=-1$. Мнимая ось плоскости p становится в плоскости w кривой

$$w=\gamma(j\omega)A(j\omega),$$

иначе говоря, графиком полного усиления прямой и обратной цепи как функции ω. Полуплоскость вправо от мнимой оси становится внутренней областью этой кривой (рис. 8.52). Следовательно, для устойчивости системы нужно, чтобы предыдущий график не окружал точку -1. Это условие называется критерием Найквиста.

Рассматриваемая система (рис. 8.51) может быть электромеханической или полностью механической. Все предыдущие соображения остаются в силе. Величины x и y представляют тогда собой перемещения или угловые скорости. В этом случае название „усилитель с отрицательной обратной связью" заменяется названием „следящая система", а название „отрицательная обратная связь" — названием „автоматическое управление".

8.4.9. Расчет переходных явлений, вызванных размыканием или замыканием выключателя. До сих пор мы рассматривали переходные явления в электрических цепях, в которых конфигурация схемы и свойства

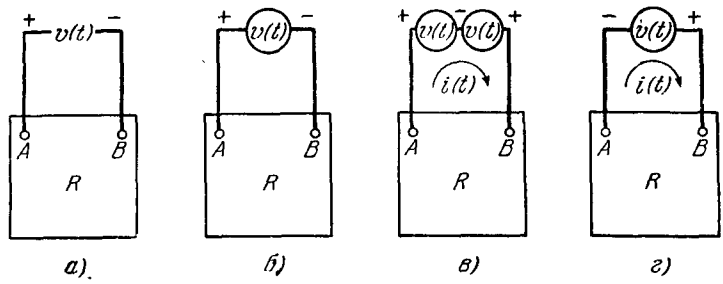


Рис. 8.53.

составляющих ее элементов не зависят от времени. Можно, однако, легко представить себе достаточно важный для практики случай, когда внезапно замыкают или размыкают выключатель, оставляя в цепи или вне цепи часть общей схемы.

Пусть R — линейная цепь, A и B — два зажима. В момент $t=0$ мы соединяем оба зажима посредством проводника без сопротивления. Требуется найти ток $i(t)$, идущий по соединению AB. Перед тем как мы замкнули зажимы A и B, между ними имелась разность потенциалов $v(t)$ (рис. 8.53, *а*).

Поместим между A и B генератор с полным внутренним сопротивлением, равным нулю, и с электродвижущей силой, равной $v(t)$ (рис. 8.53, *б*). Совершенно очевидно, что работа системы остается без изменений. Соединим последовательно с первым генератором точно такой же второй, но с обратной полярностью (рис. 8.53, *в*). Все будет происходить так же, как если бы мы закоротили AB. Между A и B больше не будет разности потенциалов, и по AB пойдет ток $i(t)$, равный току короткого замыкания. Сделаем цепь R пассивной, замыкая накоротко источники напряжения и размыкая источники тока. Уберем также первую электродвижущую силу, которая выражала собой активность цепи (рис. 8.53, *г*) — ничто не изменится, по AB будет идти тот же самый ток $i(t)$.

Обозначим через $Z(p)$ обобщенное сопротивление между зажимами A и B цепи, ставшей пассивной. Тогда

$$\mathcal{J}(p)=\frac{\mathcal{V}(p)}{Z(p)},$$

где через $\mathcal{J}(p)$ и $\mathcal{V}(p)$ обозначены соответственно изображения $i(t)$ и $v(t)$.

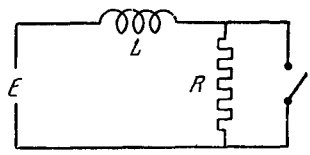


Рис. 8.54.

Пример. Для пояснения рассмотренного способа приведем очень простой пример, решение которого очевидно заранее. Дана катушка L, соединенная последовательно с сопротивлением R. В момент $t=0$ к входным зажимам подключают постоянное напряжение E. В момент $t=t_1$ накоротко замыкают сопротивление R. Требуется найти ток, текущий в катушке при $t>t_1$ (рис. 8.54).

Напряжение на важимах R равно

$$v(t)=E\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Положим $\tau=t-t_1$. Имеем

$$v(\tau)=E\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t_1+\tau)}\right).$$

Отсюда

$$\mathcal{V}(p)=E\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-\frac{R}{L}t_1}}{p+\frac{R}{L}}\right).$$

Обобщенная проводимость между зажимами R, когда цепь пассивна, т. е. когда источник напряжения закорочен, равна

$$\frac{1}{Z(p)}=\frac{1}{R}+\frac{1}{Lp}.$$

Отсюда

$$\mathcal{J}(p)=\frac{E}{Rp}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_1}\right)+\frac{E}{Lp^2},$$

$$i(\tau)=\frac{E}{L}\tau+\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_1}\right), \qquad \tau\geqslant 0.$$

Возвращаясь к переменной t, имеем при $t\geqslant t_1$

$$i(t)=(t-t_1)\frac{E}{L}+\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t_1}\right);$$

результат очевиден.

В случае, когда быстро размыкают соединения активной цепи, задача решается совершенно таким же образом.

Пусть R — активная линейная цепь, а AB — быстро разомкнутое в момент $t=0$ соединение. Такое размыкание создает между зажимами A и B напряжение $v(t)$. Перед размыканием по соединению AB идет ток $i(t)$ (рис. 8.55, *а*). Заменим соединение AB источником тока, дающим тот же ток $i(t)$ (рис. 8.55, *б*). В работе системы ничего не изменится. Если параллельно первому источнику тока включить такой же, но обратной полярности, то от A к B ток идти не будет (рис. 8.55, *в*). Мы осуществили условия, одинаковые с теми, которые создаются при размыкании соединения AB. Если убрать, как уже говорилось, все реальные источники тока и напряжения, а также первый

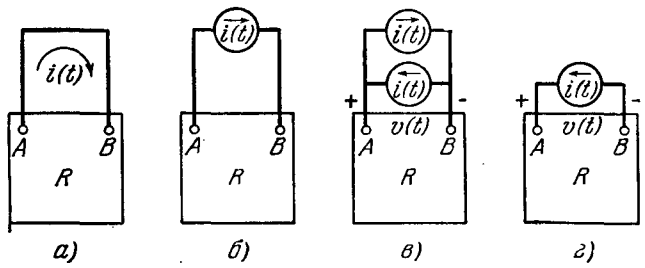


Рис. 8.55.

условный источник тока, показывавший активность цепи, мы получим пассивную цепь, создающую на зажимах A и B искомое напряжение $v(t)$ (рис. 8.55, *г*). Обозначив опять через $Z(p)$ обобщенное сопротивление этой пассивной цепи между зажимами A и B, получим так же, как раньше,

$$\mathcal{V}(p)=Z(p)\,\mathcal{J}(p).$$

Пример. Для пояснения этого способа, возьмем предыдущий пример. В момент $t=0$ прилагается постоянное напряжение E, в момент $t=t_1$ убирается короткое замыкание сопротивления R.

При $t<t_1$ ток $i(t)$ равен

$$i(t)=\frac{E}{L}t.$$

Положим

$$t-t_1=\tau,$$

тогда

$$i(\tau)=\frac{E}{L}(\tau+t_1),$$

откуда

$$\mathcal{J}(p)=\frac{Et_1}{Lp}+\frac{E}{Lp^2}.$$

Если сделать цепь пассивной коротким замыканием E, то

$$Z(p)=\frac{RLp}{Lp+R}.$$

Отсюда

$$\mathcal{V}(p)=\frac{ERt_1}{Lp+R}+\frac{ER}{p(Lp+R)},$$

$$v(\tau)=\frac{ER}{L}t_1e^{-\frac{R}{L}\tau}-Ee^{-\frac{R}{L}\tau}+E,$$

$$v(t)=E\left[e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}\left(\frac{Rt_1}{L}-1\right)+1\right].$$

Распространение электрических возмущений вдоль линий передач

8.4.10. Общие соображения. Дана однородная электрическая линия передач длиной l. На одном конце приложена электродвижущая сила $E_0(t)$. Другой конец замкнут на обобщенное сопротивление $Z(p)$. Обозначим через L, C, R соответственно коэффициент самоиндукции, емкость и сопротивление единицы длины этой линии. Изоляция линии несовершенна, поэтому через G обозначим величину, обратную сопротивлению изоляции на единицу длины (проводимость изоляции).

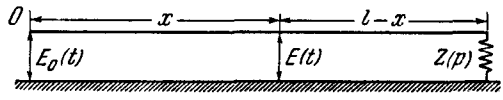


Рис. 8.56.

Рассмотрим точку с абсциссой x (начало координат совмещено с началом линии) и обозначим через $E(t)$ разность потенциалов между этой точкой и землей, а через $i(t)$ — ток, идущий в этой точке (рис. 8.56).

Изменение напряжения $\frac{\partial E}{\partial x}$ при перемещении на единицу длины равно сумме изменения напряжения $-L\frac{\partial i}{\partial t}$, создаваемого самоиндукцией, и омического падения напряжения $-Ri$. Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} - Ri. \tag{96}$$

Изменение тока $\frac{\partial i}{\partial x}$ при перемещении на единицу длины равно сумме тока утечки через емкость $-C\frac{\partial E}{\partial t}$ и тока утечки через изоляцию $-GE$. Отсюда

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial E}{\partial t} - GE. \tag{97}$$

Функции E и i следовало бы писать в виде $E(t, x)$, $i(t, x)$, а электродвижущую силу, приложенную к началу, в виде $E(t, 0)$. Для упрощения записи переменные x и t подразумеваются.

Если исключить функцию i из уравнений (96) и (97), получаем уравнение в частных производных, определяющее функцию E:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial E}{\partial t} + RGE. \tag{98}$$

Оно называется телеграфным уравнением.

Пусть $\mathcal{E}(p)$ и $\mathcal{J}(p)$ — такие функции, что

$$\mathcal{E}(p) \sqsubset E(t),$$
$$\mathcal{J}(p) \sqsubset i(t).$$

Эти две новые функции p и x определяются следующей системой уравнений, полученной из уравнений (96) и (97) с помощью преобразования Лапласа:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -(Lp + R)\mathcal{J}, \tag{99}$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx} = -(Cp + G)\mathcal{E}. \tag{100}$$

Эта система уравнений приводит к

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dx^2} - \lambda^2\mathcal{E} = 0 \tag{101}$$

или

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dx^2} - \lambda^2\mathcal{J} = 0, \tag{102}$$

если считать что

$$\lambda^2 = (Cp + G)(Lp + R). \tag{103}$$

Решение уравнения (101) получается сразу. Имеем

$$\mathcal{E}(p) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}. \tag{104}$$

Тогда уравнение (99) дает

$$\mathcal{J}(p) = \sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\left(Be^{-\lambda x} - Ae^{\lambda x}\right). \tag{105}$$

Постоянные A и B определяются граничными условиями. Если считать

$$\mathcal{E}_0(p) \sqsubset E_0(t),$$

то при $x = 0$ имеем

$$A + B = \mathcal{E}_0(p),$$

а при $x = l$

$$\mathcal{E}_l(p) = Z(p)\,\mathcal{J}_l(p).$$

Отсюда

$$Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = Z(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\left(Be^{-\lambda l} - Ae^{\lambda l}\right).$$

Если считать

$$\gamma = Z(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}, \tag{106}$$

то для определения A и B имеем два уравнения:

$$A + B = \mathcal{E}_0(p), \tag{107}$$

$$A(\gamma + 1)e^{\lambda l} = B(\gamma - 1)e^{-\lambda l}. \tag{108}$$

Отсюда

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\frac{(\gamma-1)e^{-\lambda(l-x)} + (\gamma+1)e^{\lambda(l-x)}}{2(\gamma \operatorname{ch}\lambda l + \operatorname{sh}\lambda l)}$$

или

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\frac{\gamma \operatorname{ch}\lambda(l-x) + \operatorname{sh}\lambda(l-x)}{\gamma \operatorname{ch}\lambda l + \operatorname{sh}\lambda l}. \tag{109}$$

В этой формуле

$$\gamma = Z(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}$$

и

$$\lambda = \sqrt{(Cp+G)(Lp+R)}.$$

Функция $\mathcal{J}(p)$ равна

$$\mathcal{J}(p) = \mathcal{E}_0(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\,\frac{\gamma \operatorname{sh}\lambda(l-x) + \operatorname{ch}\lambda(l-x)}{\gamma \operatorname{ch}\lambda l + \operatorname{sh}\lambda l}. \tag{110}$$

Дальнейшее вычисление состоит в нахождении таких функций $i(t)$ и $E(t)$, чтобы

$$i(t) \sqsupset \mathcal{J}(p),$$

$$E(t) \sqsupset \mathcal{E}(p).$$

Эта задача представляет в общем случае незначительный интерес, так как приводит к крайне сложным расчетам. Перед тем как рассмотреть несколько простых частных случаев, сделаем замечание общего порядка.

Положим, что в наиболее общем случае мы нашли напряжение и ток в любой точке линии передачи, приложив к началу линии электродвижущую силу, равную единичной ступени. Пусть

$$E_1(t) \sqsupset \mathcal{E}_1(p),$$
$$i_1(t) \sqsupset \mathcal{J}_1(p)$$

— токи и напряжения при $E_0(t) = \Upsilon(t) \sqsupset \frac{1}{p}$. Положим теперь, что в начале линии приложена любая электродвижущая сила

$$E_0(t) \sqsupset \mathcal{E}_0(p).$$

Мы можем написать формулы (109) и (110) в упрощенном виде

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p) M(p),$$
$$\mathcal{J}(p) = \mathcal{E}_0(p) N(p).$$

В случае электродвижущей силы, равной единичной ступени, имеем

$$\mathcal{E}_1(p) = \frac{1}{p} M(p),$$
$$\mathcal{J}_1(p) = \frac{1}{p} N(p).$$

Отсюда

$$\mathcal{E}(p) = p\,\mathcal{E}_0(p)\,\mathcal{E}_1(p),$$
$$\mathcal{J}(p) = p\,\mathcal{E}_0(p)\,\mathcal{J}_1(p).$$

Применяя теорему свертывания и формулу дифференцирования, получаем

$$E(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t E_0(\tau) E_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t E_0(t-\tau) E_1(\tau)\,d\tau,$$

$$i(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t E_0(\tau) i_1(t-\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t E_0(t-\tau) i_1(\tau)\,d\tau$$

или, дифференцируя,

$$\left.\begin{aligned}
E(t) &= E_0(0) E_1(t) + \int_0^t E_0'(\tau) E_1(t-\tau)\,d\tau,\\
E(t) &= E_0(0) E_1(t) + \int_0^t E_0'(t-\tau) E_1(\tau)\,d\tau,\\
E(t) &= E_1(0) E_0(t) + \int_0^t E_0(\tau) E_1'(t-\tau)\,d\tau,\\
E(t) &= E_1(0) E_0(t) + \int_0^t E_0(t-\tau) E_1'(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= E_0(0)\,i_1(t) + \int_0^t E_0'(\tau)\,i_1(t-\tau)\,d\tau, \\ i(t) &= E_0(0)\,i_1(t) + \int_0^t E_0'(t-\tau)\,i_1(\tau)\,d\tau, \\ i(t) &= i_1(0)\,E_0(t) + \int_0^t E_0(\tau)\,i_1'(t-\tau)\,d\tau, \\ i(t) &= i_1(0)\,E_0(t) + \int_0^t E_0(t-\tau)\,i_1'(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

Как и следовало ожидать, мы снова находим формулы, полученные непосредственно из соотношений (1), (6).

8.4.11. Бесконечная или замкнутая на волновое сопротивление линия. Замкнем конец линии на обобщенное сопротивление, равное $Z_c(p)$ — волновому сопротивлению линии

$$Z_c(p) = \sqrt{\frac{Lp+R}{Cp+G}}.$$

Тогда, согласно формуле (106),

$$\gamma = 1.$$

Уравнение (108) дает в этом случае $A = 0$, а уравнение (107) дает

$$B = \mathcal{E}_0(p).$$

Функции $\mathcal{E}(p)$ и $\mathcal{J}(p)$ принимают вид

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\,e^{-x\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}}, \quad (112)$$

$$\mathcal{J}(p) = \mathcal{E}_0(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\,e^{-x\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}}. \quad (113)$$

Это как раз и есть случай бесконечной линии: на конце, замкнутом на обобщенное сопротивление Z_c, нет отражения. Действительно, выражение (104) показывает, что если абсцисса x бесконечно возрастает, то для того, чтобы $\mathcal{E}(p)$ сохраняла физический смысл, нужно, чтобы постоянная A была равна нулю.

8.4.12. Линия без потерь. В этом случае $R = G = 0$. Тогда формула (112) принимает вид

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\,e^{-px\sqrt{LC}}.$$

Оригинал этого изображения представляет собой функцию $E(t)$, равную нулю при $t < x\sqrt{LC}$ и равную $E_0(t - x\sqrt{LC})$ при $t > x\sqrt{LC}$.

Волна напряжения, приложенная в начале линии, перемещается без искажения со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ток равен напряжению, умноженному на $\sqrt{\frac{C}{L}}$:

$$i(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,E_0(t - x\sqrt{LC}),\ t > x\sqrt{LC}. \quad (114)$$

8.4.13. Линия без искажений. Такая линия определяется условием

$$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}=\sigma.$$

Уравнение (112) дает в этом случае

$$\mathcal{E}(p)=\mathcal{E}_0(p)\,e^{-(p+\sigma)x\sqrt{LC}},$$

иначе говоря,

$$\mathcal{E}(p)=\mathcal{E}_0(p)\,e^{-px\sqrt{LC}}\,e^{-\sigma x\sqrt{LC}}.$$

Согласно вычислениям предыдущего пункта,

$$\begin{cases} E(t)=e^{-\sigma x\sqrt{LC}}E_0\left(t-x\sqrt{LC}\right) \text{ при } t>x\sqrt{LC}, \\ E(t)=0 \quad \text{при } t<x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{115}$$

Волна сохраняет форму, но распространяется с экспоненциальным ослаблением при скорости $v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Формула (113) дает

$$\mathcal{J}(p)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathcal{E}_0(p)\,e^{-(p+\sigma)x\sqrt{LC}}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} i(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\sigma x\sqrt{LC}}\,E_0\left(t-x\sqrt{LC}\right) \quad \text{при } t>x\sqrt{LC}, \\ i(t)=0 \quad \text{при } t<x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{116}$$

8.4.14. Подземный кабель. В подземном кабеле емкость велика по отношению к самоиндукции, а изоляция превосходна. Поэтому положим $L=G=0$. Приложим к началу линии электродвижущую силу, равную единичной ступени. Тогда формула (112) дает

$$\mathcal{E}(p)=\frac{1}{p}\,e^{-\sqrt{p}x\sqrt{RC}}.$$

Из (79) получаем непосредственно

$$E(t)=1-\Phi\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right). \tag{117}$$

Формула (113) дает выражение для $\mathcal{J}(p)$:

$$\mathcal{J}(p)=\sqrt{\frac{C}{R}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-\sqrt{p}\,x\sqrt{RC}},$$

а формула (78) — выражение для $i(t)$:

$$i(t)=\sqrt{\frac{C}{R}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{RCx^2}{4t}}. \tag{118}$$

Выражения для $E(t)$ и $i(t)$ показывают, что напряжение и ток в каждой точке кабеля возникают в момент $t=0$. В действительности же, если при вычислении функций E и t можно пренебречь L, то пренебречь этой величиной, рассматривая скорость распространения, нельзя.

Скорость распространения фронта волны конечна, так как самоиндукция линии не равна точно нулю.

8.4.15. Линия с идеальной изоляцией. Предположим, что электродвижущая сила $E_0(t)$ приложена к началу и равна единичной ступени $\Upsilon(t)$. Тогда, если $G=0$, $\frac{R}{2L}=\alpha$, а $\mathcal{E}_0(p)=\frac{1}{p}$, формула (113) дает

$$\mathcal{J}(p)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{e^{-x\sqrt{LC}\sqrt{p(p+2\alpha)}}}{\sqrt{(p+2\alpha)\,p}},$$

а формула (68) —

$$i(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\alpha t}I_0\left(\alpha\sqrt{t^2-x^2LC}\right),$$

иначе говоря,

$$\begin{cases} i(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{2L}t}I_0\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right) & \text{при} \quad t>x\sqrt{LC}, \\ i(t)=0 & \text{при} \quad t<x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{119}$$

Из соотношения (100) получаем

$$\frac{d\mathcal{J}}{dx}=-Cp\,\mathcal{E}$$

или

$$\mathcal{E}(p)=-\frac{1}{C}\,\frac{1}{p}\,\frac{d\mathcal{J}(p)}{dx},$$

откуда

$$E(t)=-\frac{1}{C}\int_0^t\frac{di(t)}{dx}\,dt.$$

Для дифференцирования разрывной функции $i(t)$ запишем ее в виде

$$i(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{2L}t}I_0\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right)\Upsilon\left(t-x\sqrt{LC}\right),$$

т. е. объединяем в одной формуле два выражения для $i(t)$. Выполняя дифференцирование, получаем

$$E(t)=\frac{R}{2}\,x\sqrt{\frac{C}{L}}\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}t}\,\frac{I_0'\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right)}{\sqrt{t^2-x^2LC}}\,\Upsilon\left(t-x\sqrt{LC}\right)dt+$$

$$+\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}t}I_0\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right)\Upsilon'\left(t-x\sqrt{LC}\right)dt.$$

Наличие $\Upsilon\left(t-x\sqrt{LC}\right)$ в первом интеграле позволяет исключить эту функцию при условии замены нижнего предела интегрирования на $x\sqrt{LC}$. Кроме того, согласно (81),

$$\int_{t_0}^{t_2}f(t)\,\Upsilon'(t-t_1)\,dt=f(t_1), \qquad t_0<t_1<t_2,$$

и второй интеграл заменяется на

$$\left[e^{-\frac{R}{2L}t}I_0\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right)\right]_{t=x\sqrt{LC}}=e^{-\frac{xR}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}},$$

потому что $I_0(0)=1$.

Если к тому же заметить, что $I_0'(y) = I_1(y)$, то выражение для $E(t)$ принимает вид

$$\begin{cases} E(t) = \dfrac{Rx}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}\displaystyle\int_{x\sqrt{LC}}^{t} e^{-\frac{R}{2L}t}\,\frac{I_1\left(\frac{R}{2L}\sqrt{t^2-x^2LC}\right)}{\sqrt{t^2-x^2LC}}\,dt + e^{-\frac{x}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t > x\sqrt{LC}, \\ E(t) = 0 \text{ при } t < x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{120}$$

Вид выражений для $i(t)$ и $E(t)$ показывает, что ток и напряжение равны нулю при $t < x\sqrt{LC}$ и внезапно принимают конечное значение при $t \geqslant x\sqrt{LC}$. Тем не менее нельзя говорить о распространении волны в точном смысле слова, так как форма единичной ступени сильно меняется при перемещении. Можно говорить только о распространении фронта волны, которое происходит со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

8.4.16. Общий случай. Произвольная линия. Опять прилагаем к началу напряжение

$$E_0(t) = \Upsilon(t).$$

Уравнение (113) дает в этом случае

$$\mathcal{J}(p) = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\,e^{-x\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}}.$$

Положим

$$\frac{R}{2L} = b,\quad \frac{G}{2C} = a,\quad \mu = x\sqrt{LC}.$$

Тогда

$$\mathcal{J}(p) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+2a}{p+2b}}\,e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}.$$

Формула (67) дает возможность сразу написать

$$\begin{cases} i(t) = \sqrt{\dfrac{C}{L}}\,e^{-(b+a)t}I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] + \\ + \dfrac{G}{\sqrt{LC}}\displaystyle\int_{\mu}^{t} e^{-(b+a)t}I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right]dt \text{ при } t > \mu = x\sqrt{LC}, \\ i(t) = 0 \text{ при } t < \mu = x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{121}$$

Из уравнения (112) получаем

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{p}\,e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}.$$

Соотношение (68) дает

$$f(t) = e^{-(a+b)t}I_0\left[(b-a)\sqrt{t^2-\mu^2}\right] \supset \frac{e^{-\mu\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}.$$

Продифференцируем обе части по μ:

$$\frac{df}{d\mu} \supset -p\mathcal{E}(p),$$

откуда

$$E(t) = -\int_0^t \frac{df}{d\mu}\,dt.$$

Как и в предыдущем случае, продифференцируем функцию $f(t)\,\Upsilon(t-\mu)$. Получим

$$E(t) = -\int_0^t \frac{df}{d\mu}\,\Upsilon(t-\mu)\,dt + \int_0^t f(t)\,\Upsilon'(t-\mu)\,dt.$$

Принимая во внимание свойства функций $\Upsilon(t-\mu)$ и $\Upsilon'(t-\mu)$, это выражение можно написать в виде

$$E(t) = -\int_\mu^t \frac{df}{d\mu}\,dt + f(\mu).$$

Так как $I_0' = I_1$, а $I_0(0) = 1$, то

$$\begin{cases} E(t) = x\sqrt{LC}\,(b-a)\displaystyle\int_{x\sqrt{LC}}^{t} e^{-(b+a)t}\,\frac{I_1\left[(b-a)\sqrt{t^2-x^2LC}\right]}{\sqrt{t^2-x^2LC}}\,dt + e^{-(a+b)x\sqrt{LC}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t > x\sqrt{LC}, \\ E(t) = 0 \text{ при } t < x\sqrt{LC}. \end{cases} \tag{122}$$

В этом случае фронт волны также распространяется со скоростью $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

8.4.17. Линия передачи конечной длины. Основные формулы, дающие выражения для $\mathcal{E}(p)$ и $\mathcal{J}(p)$, — это (109), (110), (106) и (103).

Рассмотрев формулы (109) и (110), видим, что несколько упростим их, если примем за начало отсчета абсцисс правый конец линии передачи, схематически изображенной на рис. 8.57. При этом формулы принимают вид

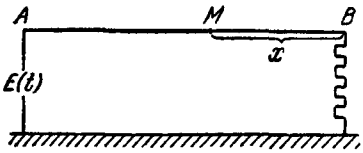


Рис. 8.57.

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\,\frac{\gamma\,\mathrm{ch}\,\lambda x + \mathrm{sh}\,\lambda x}{\gamma\,\mathrm{ch}\,\lambda l + \mathrm{sh}\,\lambda l}, \tag{123}$$

$$\mathcal{J}(p) = \mathcal{E}_0(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}\,\frac{\gamma\,\mathrm{sh}\,\lambda x + \mathrm{ch}\,\lambda x}{\gamma\,\mathrm{ch}\,\lambda l + \mathrm{sh}\,\lambda l}, \tag{124}$$

где

$$\gamma = Z(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}}, \tag{125}$$

$$\lambda = \sqrt{(Cp+G)(Lp+R)}. \tag{126}$$

Ограничимся нахождением функций $E(t) \supset\!\subset \mathcal{E}(p)$, $i(t) \supset\!\subset \mathcal{J}(p)$ в нескольких частных случаях.

8.4.18. Закороченная с одного конца линия с пренебрежимо малыми проводимостью изоляции и индуктивностью (подземный кабель). Имеем $G = L = 0$, $Z(p) = 0$. Отсюда $\gamma = 0$ и $\lambda = \sqrt{p}\sqrt{RC}$. Формула (123) принимает при этом вид

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\,\frac{\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,x\sqrt{RC})}{\mathrm{sh}\,(\sqrt{p}\,l\sqrt{RC})}.$$

Положим, что $E_0(t) = \Upsilon(t)$. Тогда $\mathcal{E}_0(p) = \frac{1}{p}$. Следовательно,

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{p} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{p}\, x \sqrt{RC})}{\operatorname{sh}(\sqrt{p}\, l \sqrt{RC})}.$$

Мы получим функцию $E(t)$, применяя теорему обращения. Если считать, что $\alpha = x\sqrt{RC}$ и $\beta = l\sqrt{RC}$, то

$$E(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{zt} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{z}}{z \operatorname{sh} \beta \sqrt{z}}\, dz.$$

Начало координат не является точкой разветвления для функции $\frac{\operatorname{sh} \alpha \sqrt{z}}{\operatorname{sh} \beta \sqrt{z}}$, так как эта функция сохраняет одинаковое значение при обоих определениях $\sqrt{z}$. Следовательно, функция $E(t)$ будет равна сумме вычетов относительно полюсов, которые являются нулями функции $g(z) = \operatorname{sh} \beta \sqrt{z}$. При этом сумма вычетов дается формулой $\sum \frac{f(a_m)}{g'(a_m)}$, где a_m определяется из уравнения

$$\beta \sqrt{z} = \pm jm\pi.$$

Отсюда

$$E(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{e^{zt} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{z}}{\frac{\beta}{2} \sqrt{z} \operatorname{ch} \beta \sqrt{z}} \right]_{\beta \sqrt{z} = \pm jm\pi} + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Член $\frac{\alpha}{\beta}$ появляется из-за вычета относительно полюса $z = 0$.

Заметив, что $\operatorname{ch} jm\pi = \cos m\pi = (-1)^m$, получаем

$$E(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m\pi} e^{-\frac{m^2\pi^2}{l^2RC} t} + \frac{x}{l}. \tag{127}$$

Уравнение (96) дает

$$i(t) = -\frac{1}{R} \frac{\partial E(t)}{\partial x},$$

откуда

$$-Ri(t) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{l} e^{-\frac{m^2\pi^2}{l^2RC} t} + \frac{1}{l}. \tag{128}$$

Проделаем те же вычисления, но будем предполагать, что к началу линии приложена электродвижущая сила

$$E_0(t) = \cos \omega t.$$

Если положить

$$\alpha = -\frac{m^2\pi^2}{l^2RC},$$

то третье равенство (111) дает

$$E(t) = \frac{x}{l} \cos \omega t + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{m\pi} \left(\cos \omega t + \alpha \int_0^t \cos \omega \tau e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau \right),$$

где

$$\int_0^t \cos\omega\tau e^{\alpha(t-\tau)}\,d\tau = \frac{\omega\sin\omega t - \alpha\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}e^{\alpha t}.$$

Экспоненциальная часть последней формулы, подставленная в функцию $E(t)$, дает при замене α ее значением выражение переходной составляющей $E_\theta(t)$:

$$E_\theta(t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3\pi^3}{\omega^2 l^4 R^2 C^2 + m^4\pi^4}(-1)^m \sin\frac{m\pi x}{l}\, e^{-\frac{m^2\pi^2}{l^2RC}t}.$$

Точно так же составляющая, соответствующая установившемуся режиму, будет

$$E_\pi(t) = \cos\omega t\left[\frac{x}{l} + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\frac{\omega^2 l^4 R^2 C^2}{m\pi}}{\omega^2 l^4 R^2 C^2 + m^4\pi^4}\sin\frac{m\pi x}{l}\right] -$$

$$- 2\omega l^2 RC\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{m\pi}{\omega^2 l^4 R^2 C^2 + m^4\pi^4}\sin\frac{m\pi x}{l}.$$

При $x = l$ мы опять находим $E_\pi(t) = \cos\omega t$, т. е. возбуждение, приложенное ко входу линии.

8.4.19. Линия конечной длины без потерь, замкнутая на сопротивление. Пусть этим сопротивлением будет ρ. Основные формулы (123), (125), (126) преобразуются в предположении $G = R = 0$ к виду

$$\gamma = \rho\sqrt{\frac{C}{L}},\quad \lambda = p\sqrt{LC},$$

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\frac{\gamma\operatorname{ch}\lambda x + \operatorname{sh}\lambda x}{\gamma\operatorname{ch}\lambda l + \operatorname{sh}\lambda l}.$$

Последнее равенство, если положить

$$\delta = \frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

можно написать в виде

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\frac{e^{-p(l-x)\sqrt{LC}} - \delta e^{-p(l+x)\sqrt{LC}}}{1-\delta e^{-2pl\sqrt{LC}}}.$$

Если подставить сюда

$$\frac{1}{1-\delta e^{-2pl\sqrt{LC}}} = 1 + \delta e^{-2pl\sqrt{LC}} + \ldots + \delta^n e^{-2pnl\sqrt{LC}} + \ldots,$$

то

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}_0(p)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n e^{-p[(2n+1)l-x]\sqrt{LC}} - \sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n+1}e^{-p[(2n+1)l+x]\sqrt{LC}}\right].$$

Но известно, что

$$\mathcal{E}_0(p)\,e^{-ps} \sqsubset E_0(t-s),\quad t > s.$$

Принимая во внимание это соотношение, получаем решение

$$E(t) = \sum_{n=0}^{N}\delta^n\{E_0(t-[(2n+1)l-x]\sqrt{LC}) - \delta E_0(t-[(2n+1)l+x]\sqrt{LC})\}.$$

Мы обозначили через N наибольшее из целых чисел n, при которых величины

$$t-[(2n+1)l-x]\sqrt{LC}=t-\theta+x\sqrt{LC},$$
$$t-[(2n+1)l+x]\sqrt{LC}=t-\theta-x\sqrt{LC}$$

положительны. Если при $n=N$ первое выражение положительно, а второе отрицательно, то второе суммирование может быть сделано только до $N-1$.

Полная картина распределения напряжений на линии складывается из суммы N элементарных волн. Каждая из них состоит из двух волн (с точностью до коэффициента δ^n):

$$E_0(t-\theta+x\sqrt{LC}),$$
$$-\delta E_0(t-\theta-x\sqrt{LC}).$$

Первая соответствует волне, перемещающейся слева направо (заставляя x расти, мы пойдем ей навстречу) (см. рис. 8.57). Вторая соответствует волне, перемещающейся справа налево (уменьшая x, мы пойдем ей навстречу) и отразившейся на один раз больше, чем первая, от конца B.

Рассмотрим последнюю из этих пар волн ($n=N$). Если $t-\theta-x\sqrt{LC}$ отрицательно, то вторая волна не успела достигнуть точки с абсциссой x.

Коэффициент отражения конца линии B равен

$$\delta=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Если $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$, то γ равняется единице, а δ — нулю. Тогда перед нами случай бесконечной линии, и решение сводится к первому члену ряда

$$E_0[t-(l-x)\sqrt{LC}].$$

Если $\rho<\sqrt{\frac{L}{C}}$, то δ положительна, и отражение происходит с переменой знака. Это, например, случай закороченной линии.

Если $\rho>\sqrt{\frac{L}{C}}$, то δ отрицательна, и отражение происходит без перемены знака. Это, например, случай разомкнутой линии.

Примечание. Можно было бы легко увеличить количество примеров распространения электрических возмущений вдоль линии передач. Небольшое число рассмотренных задач дает основные приемы, которые операционное исчисление предоставляет в распоряжение инженеров. Самые сложные случаи могут быть легко сведены к случаю линии конечной (формулы (109), (110), (123) и (124)) или бесконечной (формулы (112) и (113)) длины.

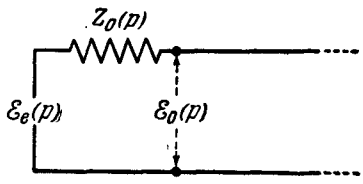


Рис. 8.58.

Приведем два существенных примера.

8.4.20. Сопротивление, сосредоточенное в начале линии. Пусть $\mathcal{E}_e(p)$ — изображение входного напряжения и пусть $Z_0(p)$ — обобщенное сопротивление, находящееся между точкой приложения этого напряжения и началом линии (рис. 8.58). Изображение начального напряжения равно

$$\mathcal{E}_0(p)=\mathcal{E}_e(p)-\mathcal{J}_0(p)Z_0(p).$$

Если считать, что

$$\gamma_0=Z_0(p)\sqrt{\frac{Cp+G}{Lp+R}},$$

то уравнения для определения постоянных A и B, выведенные в п. 8.4.10, имеют вид

$$A(1-\gamma_0)+B(1+\gamma_0)=\mathcal{E}_e(p), \tag{129}$$

$$A(1+\gamma)e^{\lambda l}+B(1-\gamma)e^{-\lambda l}=0. \tag{130}$$

Они приводят к формулам, подобным (109) и (110), но несколько более сложным.

8.4.21. Повреждение на линии. Предположим, что повреждение представлено обобщенным сопротивлением $Z'(p)$, включенным параллельно на расстоянии l_1 от начала линии *1* (рис. 8.59). Характеристики участка *1* — это L_1, C_1, R_1, G_1. Для большей общности положим также, что, начиная с точки включения $Z'(p)$, линия имеет другие характеристики L_2, C_2, R_2, G_2 и замкнута на обобщенное сопротивление $Z_2(p)$ на расстоянии l_2. Тогда обобщенное входное сопротивление линии *2* равно

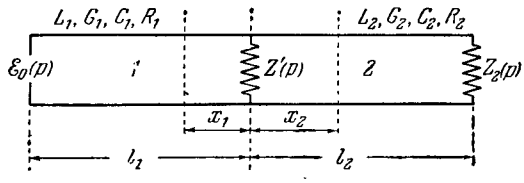


Рис. 8.59.

$$(Z_2)_0=\left[\frac{\mathcal{E}_2(p)}{\mathcal{J}_2(p)}\right]_{x=0}=$$

$$=\sqrt{\frac{L_2p+R_2}{C_2p+G_2}}\,\frac{\gamma_2\operatorname{ch}\lambda_2l_2+\operatorname{sh}\lambda_2l_2}{\gamma_2\operatorname{sh}\lambda_2l_2+\operatorname{ch}\lambda_2l_2}.$$

При этом линия *1* замкнута на обобщенное сопротивление

$$Z_1(p)=\frac{(Z_2)_0\,Z'}{(Z_2)_0+Z'}.$$

Формулы (123) и (124) дадут $\mathcal{E}_1(p)$ и $\mathcal{J}_1(p)$ в каждой точке с абсциссой x_1, находящейся между l_1 и 0. Напряжение $\mathcal{E}_1(p)$ в точке с абсциссой 0 будет равно напряжению в начале линии *2*. Формулы (109) и (110) дадут тогда $\mathcal{E}_2(p)$ и $\mathcal{J}_2(p)$ в каждой точке с абсциссой x_2, находящейся между 0 и l_2.

Если повреждение характеризуется обобщенным сопротивлением $Z'(p)$, подключенным последовательно, то в этом случае мы будем иметь

$$Z_1(p)=(Z_2)_0+Z'.$$

8.5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

8.5.1. Применение операционного исчисления к вычислению определенных интегралов вида $\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt$, $\int_0^\infty t^n h(t)\,dt$. Из формулы (26) непосредственно имеем

$$\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt=\int_0^\infty F(p)\,dp. \tag{131}$$

По формуле (37)

$$(-1)^{n+1}F^{(n+1)}(p)\sqsubset t^{n+1}h(t).$$

Поэтому формула (26) дает возможность написать

$$\int_0^\infty t^n h(t)\,dt=(-1)^{n+1}\int_0^\infty F^{(n+1)}(p)\,dp, \tag{132}$$

иначе говоря,

$$\int_0^\infty t^n h(t)\,dt = (-1)^{n+1}\left[\frac{d^n}{dp^n}F(p)\right]_0^\infty. \qquad (133)$$

Пример 1. Требуется вычислить $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\,dt$. По формуле (131)

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{a\,dp}{a^2+p^2} = \left[\operatorname{arctg}\frac{p}{a}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Требуется вычислить $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ (интеграл Фруллани).

Известно, что

$$e^{-at}-e^{-bt} \supset \frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp = \left[\ln\frac{p+a}{p+b}\right]_0^\infty = -\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}.$$

Пример 3. Требуется вычислить

$$\int_0^\infty \frac{J_0(t)-\cos t}{t}\,dt.$$

Известно, что

$$J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \quad \cos t \supset \frac{p}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{J_0(t)-\cos t}{t}\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{p}{p^2+1}\right)dp = \left[\ln\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}\right]_0^\infty = \ln 2.$$

Пример 4. Требуется вычислить $I = \int_0^\infty \frac{J_\nu(x)\,dx}{x^{\nu-\mu+1}}$. Положим $x = 2\sqrt{\tau}$.

Тогда

$$I = \frac{1}{2^{\nu-\mu+1}}\int_0^\infty \frac{\tau^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{\tau})\,d\tau}{\tau^{\nu+1-\frac{\mu}{2}}}.$$

Но известно (формула (44)), что

$$\frac{1}{p^{\nu+1}}F\left(\frac{1}{p}\right) \sqsubset \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t\tau})\,h(\tau)\,d\tau.$$

Если приравнять

$$h(\tau) = \frac{1}{\tau^{1-\frac{\mu}{2}}} \quad \text{и} \quad F(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{p^{\frac{\mu}{2}}},$$

то

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{p^{\nu+1-\frac{\mu}{2}}} \sqsubset \int_0^\infty \frac{(t\tau)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t\tau})\, d\tau}{\tau^{\nu+1-\frac{\mu}{2}}}.$$

Следовательнс, найдя оригинал левой части, получаем

$$\int_0^\infty \frac{(t\tau)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t\tau})\, d\tau}{\tau^{\nu+1-\frac{\mu}{2}}} = t^{\nu-\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\mu}{2}\right)}.$$

Если положить $t=1$, то

$$I = \frac{1}{2^{\nu-\mu+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\mu}{2}\right)}.$$

Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений

8.5.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Дано дифференциальное уравнение

$$A_0 \frac{d^n}{dt^n} h(t) + A_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} h(t) + \ldots + A_{n-1} \frac{d}{dt} h(t) + A_n h(t) = g(t). \quad (134)$$

Применим преобразование Лапласа к функциям $h(t)$ и $g(t)$ и обозначим через $F(p)$ и $\Phi(p)$ их изображения. Тогда применение формулы (28) дифференцирования функции переменной t преобразует дифференциальное уравнение (134) в алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned} F(p)[A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1} p + A_n] = \\ = \Phi(p) + h(0)[A_0 p^{n-1} + A_1 p^{n-2} + \ldots + A_{n-1}] + \\ + h'(0)[A_0 p^{n-2} + A_1 p^{n-3} + \ldots + A_{n-2}] + \ldots + h^{(n-1)}(0)[A_0]. \end{aligned} \quad (135)$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{\Psi(p)}{D(p)},$$

где через $\Psi(p)$ обозначена функция, стоящая в правой части соотношения (135), а через $D(p)$ — характеристический полином

$$D(p) = A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \ldots + A_n.$$

В весьма важном частном случае, когда функция $h(t)$ и ее $n-1$ первых производных равны нулю при $t=0$, имеем

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{D(p)}$$

Применение формулы (54) к $\frac{1}{D(p)}$ дает

$$\frac{1}{D(p)} \sqsubset \sum_{m=1}^{n} \frac{e^{a_m t}}{D'(a_m)},$$

если считать, что полином $D(p)$ степени n имеет только простые корни a_m. Применение теоремы свертывания (формула (40)) дает

$$h(t)=\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{a_m t}}{D'(a_m)}\int_0^t g(\tau)\,e^{-a_m\tau}d\tau. \tag{136}$$

Такой способ решения линейных дифференциальных уравнений имеет то громадное преимущество, что вводит начальные условия в начале вычислений. Это помогает избежать отыскания общего решения, когда нужно найти, а это почти всегда так и бывает, частное решение.

Найдем, для примера, решение уравнения $\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=12$ при начальных условиях $y(0)=2$, $y'(0)=0$. Имеем

$$D(p)=p^2+5p+6;\quad \Phi(p)=\frac{12}{p};\quad \Psi(p)=\frac{12}{p}+2(p+5).$$

Отсюда

$$F(p)=\frac{2p^2+10p+12}{p(p^2+5p+6)}=\frac{2}{p}.$$

Следовательно,

$$y(t)=2.$$

Совершенно очевидно, что отыскание классическим способом общего решения и введение начальных условий в конце вычислений заняло бы гораздо больше времени.

Пример 1. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+3x=e^{-2t},$$

равное нулю при $t=0$. Имеем

$$D(p)=p+3,$$

$$\Phi(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)}=\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}$$

и

$$x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}.$$

Пример 2. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=t^2e^{-2t},$$

равное нулю вместе с производной при $t=0$. Имеем

$$D(p)=p^2+4p+4=(p+2)^2.$$

Формула (37) дифференцирования функции переменной p дает

$$e^{-2t}\supset\frac{1}{p+2},\quad t^2e^{-2t}\supset(-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\frac{1}{p+2}=\frac{2}{(p+2)^3}=\Phi(p).$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{2}{(p+2)^5}.$$

Из равенства

$$t^4e^{-2t} \rightrightarrows (-1)^4 \frac{d^4}{dp^4}(p+2)^{-1} = \frac{24}{(p+2)^5}$$

следует

$$y(t) = \frac{t^4e^{-2t}}{12}.$$

8.5.3. Линейное дифференциальное уравнение с переменными алгебраическими коэффициентами (метод ван дер Поля). Такое уравнение имеет члены вида

$$\begin{aligned} &h(t), \quad th(t), \quad t^2h(t), \ldots, \\ &h'(t), \quad th'(t), \quad t^2h'(t), \ldots, \\ &h''(t), \quad th''(t), \quad t^2h''(t), \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Найдем изображения этих членов. По формуле (28) имеем

$$\begin{aligned} &h(t) \rightrightarrows F(p), \quad h'(t) \rightrightarrows pF(p) - h(0), \\ &h''(t) \rightrightarrows p^2F(p) - ph(0) - h'(0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Применяя к предыдущим выражениям формулу (37), составляем таблицу:

$$\begin{aligned} &h(t) \rightrightarrows F(p), \\ &th(t) \rightrightarrows -F'(p), \\ &t^2h(t) \rightrightarrows F''(p), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &h'(t) \rightrightarrows -h(0) + pF(p), \\ &th'(t) \rightrightarrows -pF'(p) - F(p), \\ &t^2h'(t) \rightrightarrows pF''(p) + 2F'(p), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &h''(t) \rightrightarrows -h'(0) - ph(0) + p^2F(p), \\ &th''(t) \rightrightarrows h(0) - 2pF(p) - p^2F'(p), \\ &t^2h''(t) \rightrightarrows 2F(p) + 4pF'(p) + p^2F''(p), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{137}$$

Если в интересующем нас уравнении заменить каждый член левой части его изображением и то же сделать для функции, фигурирующей в правой части, то дифференциальное уравнение для $h(t)$ оказывается замененным дифференциальным уравнением для $F(p)$. Если это последнее уравнение решить легче, чем исходное, то можно определить $h(t)$ по его изображению. Пойти дальше этого бывает трудно, так как функции $h(t)$ часто не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций.

Пример. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)y = 0.$$

Известно, что частное решение этого уравнения, имеющее конечное значение при $t = 0$, представляет собой бесселеву функцию первого рода.

Мы уже находили изображение бесселевой функции для целых значений индекса (формула (62)). Поставим перед собой ту же задачу для любых положительных значений индекса ν.

Умножаем дифференциальное уравнение на t^2 и применяем формулы преобразования (137). Получаем

$$(p^2+1)x''+3px'+(1-\nu^2)x=0,$$

где

$$x(p)\sqsubset y(t)$$

без каких-либо предположений о начальных значениях $y(t)$ и ее производных.

Для решения полученного уравнения положим

$$p=\operatorname{sh} u,$$

$$x=\frac{\Omega}{\operatorname{ch} u},$$

что дает

$$\frac{dx}{dp}=\frac{dx}{du}\frac{du}{dp}=\frac{1}{\operatorname{ch} u}\left[\frac{d\Omega}{du}\frac{1}{\operatorname{ch} u}-\Omega\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}\right],$$

$$\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dp}\right)\frac{du}{dp}=\frac{d^2\Omega}{du^2}\frac{1}{\operatorname{ch}^3 u}-3\frac{d\Omega}{du}\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^4 u}-\Omega\frac{\operatorname{ch}^2 u-3\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^5 u}.$$

Уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2\Omega}{du^2}-\nu^2\Omega=0.$$

Отсюда получаем общий интеграл

$$\Omega=Ae^{\nu u}+Be^{-\nu u}.$$

Так как

$$e^u=p+\sqrt{p^2+1},$$

то

$$y(t)\sqsupset x(p)=\frac{A(p+\sqrt{p^2+1})^{\nu}+B(p+\sqrt{p^2+1})^{-\nu}}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Остается определить постоянные A и B так, чтобы функция $y(t)$ была именно функцией $J_\nu(t)$.

Если приравнять $\nu=0$, то

$$J_0(t)\sqsupset\frac{A+B}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Так как известно (формула (16)), что

$$J_0(t)\sqsupset\frac{1}{\sqrt{p^2+1}},$$

то получаем

$$A+B=1.$$

Положим $\nu=1$. Известно, что ряд для $J_1(t)$ начинается с t, поэтому ряд для $x(p)$ должен начинаться с $\frac{1}{p^2}$. Следовательно,

$$1+A-B=0,$$

откуда

$$A=0,\quad B=1.$$

Таким образом, имеем соотношение

$$J_\nu(t) \rightrightarrows \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{(\sqrt{p^2+1}+p)^\nu}.$$

Это показывает, что формула (62), установленная для целого индекса, действительна для любого положительного индекса.

Примененне операционного исчисления к решенню некоторых интегральных уравнений

8.5.4. Линейные интегральные уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ah(t) + B\int_0^t h(\tau) K(t-\tau)\, d\tau = Cg(t).$$

Неизвестная функция — это $h(t)$. Функция $g(t)$ известна, так же как и функция $K(t)$, которую называют ядром. A, B, C — постоянные.

Рассматриваемый тип интегральных уравнений относится к группе так называемого замкнутого цикла. Если $A \neq 0$, уравнение называется уравнением второго рода; если $A = 0$, оно называется уравнением первого рода.

Введем в рассмотрение изображения функций:

$$h(t) \rightrightarrows F(p), \quad K(t) \rightrightarrows \Psi(p), \quad g(t) \rightrightarrows \Phi(p).$$

Теорема свертывания дает

$$\int_0^t K(t-\tau) h(\tau)\, d\tau \rightrightarrows F(p)\Psi(p).$$

Отсюда получим соотношение

$$AF(p) + BF(p)\Psi(p) = C\Phi(p)$$

и изображение неизвестной функции

$$F(p) = \frac{C\Phi(p)}{A + B\Psi(p)}.$$

Пример 1. Решим уравнение Абеля

$$\int_0^t \frac{h(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = g(t), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь мы имеем

$$K(t) = \frac{1}{t^\alpha} \rightrightarrows \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} = \Psi(p),$$

откуда

$$F(p) = \frac{p^{1-\alpha}\Phi(p)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Напишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{p^\alpha} [g(0) + p\Phi(p) - g(0)].$$

Известно, что

$$p\Phi(p) - g(0) \sqsubset g'(t),$$

$$\frac{1}{p^{\alpha}} \sqsubset \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{t^{1-\alpha}},$$

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Отсюда, пользуясь теоремой свертывания, получаем неизвестную функцию $h(t)$:

$$h(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{g(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{g'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau\right].$$

Пример 2. Решим интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром:

$$\int_0^t h(\tau) \ln(t-\tau)\, d\tau = g(t).$$

Воспользуемся формулой (72). Тогда уравнение может быть написано в виде

$$-F(p)\frac{1}{p}(\ln p - \gamma) = \Phi(p).$$

Отсюда

$$F(p) = -\frac{p\Phi(p)}{\ln p + \gamma}.$$

Пользуясь способом, уже применявшимся в предыдущем примере, напишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = -\frac{p^2\Phi(p) - g'(0)}{p(\ln p + \gamma)} - \frac{g'(0)}{p(\ln p + \gamma)}.$$

Если положить $g(0) = 0$, то

$$p^2\Phi(p) - g'(0) \sqsubset g''(t).$$

Мы получим неизвестную функцию $h(t)$, применяя теорему свертывания, если будем знать оригинал для

$$\frac{1}{p(\ln p + \gamma)}.$$

Будем исходить из формулы (56). Проинтегрируем обе части этого выражения от 0 до бесконечности по параметру ν. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\nu}\, d\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sqsupset \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \left[-\frac{1}{p^{\nu+1}}\frac{1}{\ln p}\right]_{\nu=0}^{\infty} = \frac{1}{p \ln p}.$$

Применяем формулу (22):

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\nu}a^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \sqsupset \frac{1}{p \ln(ap)} = \frac{1}{p(\ln p + \ln a)}.$$

Если положить $a = e^{\gamma}$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\nu}e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \sqsupset \frac{1}{p(\ln p + \gamma)}.$$

Отсюда получаем неизвестную функцию $h(t)$:

$$h(t) = -\int_0^t g''(\tau)\,d\tau \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^\nu e^{-\tau}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu - g'(0)\int_0^\infty \frac{t^\nu e^{-\tau}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

8.5.5. Нелинейные интегральные уравнения. Рассмотренный в предыдущем пункте способ можно применить к решению нелинейных интегральных уравнений, где ядро равно неизвестной функции:

$$Ah(t) + B\int_0^t h(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = Cg(t).$$

При тех же обозначениях получаем

$$AF(p) + B[F(p)]^2 = C\Phi(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4BC\Phi(p)}}{2B}.$$

Пример. Требуется найти решение уравнения

$$2h(t) - \int_0^t h(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \sin t.$$

Имеем

$$C\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1}, \quad B = -1, \quad A = 2.$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1} \mp p\right).$$

Решением будет

$$h(t) = J_1(t).$$

8.5.6. Интегродифференциальные уравнения. Тот же способ позволяет решать некоторые интегральные уравнения, в которых неизвестная функция $h(t)$ содержится также и под знаком производной. Это интегродифференциальные уравнения.

Выражения (28) и (37), дающие изображения $h^{(n)}(t)$ и $t^n h(t)$, позволяют преобразовать интегродифференциальное уравнение в дифференциальное, где $F(p)$ — изображение $h(t)$ — представляет собой неизвестную функцию. Начальные условия даны значениями $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, ..., фигурирующими в соотношениях (28).

Пример. При начальных условиях $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ требуется найти решение $h(t)$ уравнения

$$\int_0^t [th(\tau) + h'(\tau)\,h''(t-\tau)]\,d\tau + ah(t) + bh'''(t) = g(t).$$

Имеем

$$\int_0^t th(\tau)\,d\tau = t\int_0^t h(\tau)\,d\tau \sqsupset -\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}F(p)\right].$$

Так как

$$h'(t) \sqsupset pF(p),$$
$$h''(t) \sqsupset p^2F(p),$$

то теорема свертывания дает

$$\int_0^t h'(\tau)\,h''(t-\tau)\,d\tau \sqsupset p^3[F(p)]^2.$$

Так как

$$h'''(t) \sqsupset p^3F(p),$$

то, положив

$$g(t) \sqsupset \Phi(p),$$

определим изображение $F(p)$ уравнением

$$-\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}F(p)\right]+p^3[F(p)]^2+aF(p)+bp^3F(p)=\Phi(p),$$

иначе говоря, уравнением Риккати

$$F'(p)=p^4[F(p)]^2+\left[\frac{1}{p}+ap+bp^4\right]F(p)-p\Phi(p).$$

8.5.7. Применение операционного исчисления к исследованию функций. Некоторые свойства трансцендентных функций можно наглядно показать с помощью операционного исчисления.

Пример 1. Даны две функции

$$F_1(p)=\frac{1}{p^x} \sqsubset \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}, \quad F_2(p)=\frac{1}{p^y} \sqsubset \frac{t^{y-1}}{\Gamma(y)}.$$

Теорема свертывания дает

$$F_1(p)\,F_2(p)=\frac{1}{p^{x+y}} \sqsubset \frac{1}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^t (t-\tau)^{y-1}\tau^{x-1}\,d\tau.$$

Если положить $\frac{\tau}{t}=\lambda$, то

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}=\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}\int_0^t \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{y-1}\,d\lambda,$$

иначе говоря, мы получили определение эйлеровой функции первого рода (п. 7.4.6):

$$B(x,\,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Можно заметить также, что некоторые трансцендентные функции имеют простые и даже алгебраические изображения. Вспомним в качестве примера $\mathrm{Ci}(t)$, $J_\nu(t)$. Поэтому есть основание думать, что изучение свойств функции переменной t значительно упростится, если исходить из изображения этой функции.

Пример 2. Рассмотрим функцию Бесселя $J_\nu(t)$ и найдем несколько уже установленных ранее формул, а также несколько новых. Имеем

$$J_\nu(t) \sqsupset \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^\nu = F_1(p),$$

$$J_{-\nu}(t)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{-\nu} = F_2(p).$$

Одновременная запись обоих этих соотношений налагает условие

$$-1<\nu<1.$$

Имеем

$$F_1(p)\,F_2(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Отсюда, применяя теорему свертывания, получаем

$$\int_0^t J_\nu(t-\tau)\,J_{-\nu}(\tau)\,d\tau = \sin t.$$

Положим

$$\sqrt{p^2+1} - p = \lambda,$$

тогда

$$J_n(t) \supset \frac{\lambda^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Сумма

$$J_1(t) - J_3(t) + J_5(t) - J_7(t) + \ldots$$

имеет изображение

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(\lambda - \lambda^3 + \lambda^5 - \lambda^7 + \ldots) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+p^2}.$$

Отсюда

$$J_1(t) - J_3(t) + J_5(t) - J_7(t) + \ldots = \frac{1}{2}\sin t.$$

Имеем также

$$\int_0^t J_n(t)\,dt \supset \frac{1}{p}\,\frac{\lambda^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Но мы можем написать

$$\frac{1}{p}\,\frac{\lambda^n}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{p^2+1}}\,\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} = \frac{2}{\sqrt{p^2+1}}\,\lambda^{n+1}(1+\lambda^2+\lambda^4+\ldots).$$

Отсюда

$$\int_0^t J_n(t)\,dt = 2\sum_{r=0}^{\infty} J_{n+1+2r}(t).$$

Известно, что $J_\nu(t)$ равна сумме ряда:

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2r}.$$

Заменив в этом выражении t на $2\sqrt{t}$, получим

$$J_\nu(2\sqrt{t}) = t^{\frac{\nu}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{t^r}{\Gamma(r+\nu+1)}$$

и, умножив обе части на $t^{\frac{\nu}{2}}$,

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\,\frac{t^{r+\nu}}{\Gamma(r+\nu+1)}.$$

Учитывая, что $\frac{t^{r+\nu}}{\Gamma(r+\nu+1)}$ имеет изображением $\frac{1}{p^{r+\nu+1}}$, получаем

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t}) \supset \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{1}{p^{r+\nu+1}}.$$

Отсюда

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{p^{\nu+1}} e^{-\frac{1}{p}}. \tag{138}$$

Эта формула легко позволяет установить большое количество свойств бесселевой функции J_ν. Продифференцируем левую часть (138) и умножим правую на p. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t})\right] \supset \frac{1}{p^\nu} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, заменив в (138) ν на $\nu-1$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t})\right] = t^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{t}),$$

иначе говоря,

$$\frac{\nu}{2\sqrt{t}} J_\nu(2\sqrt{t}) + J_\nu'(2\sqrt{t}) = J_{\nu-1}(2\sqrt{t}).$$

Если заменить $2\sqrt{t}$ на t, то получим хорошо известную рекуррентную формулу

$$\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J_\nu'(t) = J_{\nu-1}(t).$$

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{p^{\nu+1}} e^{-\frac{a+1}{p}} = \frac{1}{p^{\nu+1}}\left(1 - \frac{a}{p} + \frac{1}{2!}\frac{a^2}{p^2} - \ldots\right) e^{-\frac{1}{p}}.$$

Формула (138) преобразует это тождество по p в тождество по t:

$$\frac{1}{(1+a)^{\frac{\nu}{2}}} J_\nu\left(2\sqrt{t(1+a)}\right) =$$

$$= J_\nu(2\sqrt{t}) - a\sqrt{t} J_{\nu+1}(2\sqrt{t}) + \frac{(a\sqrt{t})^2}{2!} J_{\nu+2}(2\sqrt{t}) - \ldots$$

Если заменить $2\sqrt{t}$ на t, а $\sqrt{1+a}$ на τ, то

$$J_\nu(t\tau) = \tau^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r!}\left[\frac{t(1-\tau^2)}{2}\right]^r J_{\nu+r}(t) \right\}, \qquad \nu > -1.$$

Это формула умножения аргументов для функции Бесселя.

Формула (138) легко позволяет написать соотношение между двумя функциями Бесселя с любыми индексами $J_\nu(t)$ и $J_\mu(t)$ при $\nu > \mu > -1$. Имеем

$$\frac{t^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu)} \supset \frac{1}{p^{\nu-\mu}},$$

$$t^{\frac{\mu}{2}} J_\mu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{p^{\mu+1}} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Применив теорему свертывания, получаем

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu)}\,\tau^{\frac{\mu}{2}} J_\mu(2\sqrt{\tau})\,d\tau \supset \frac{1}{p^{\nu+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t}) = \frac{1}{\Gamma(\nu-\mu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-\mu-1}\,\tau^{\frac{\mu}{2}} J_\mu(2\sqrt{\tau})\,d\tau.$$

Если заменить в этом выражении $2\sqrt{t}$ на t, а $2\sqrt{\tau}$ на τ, получим искомое выражение

$$t^\nu J_\nu(t) = \frac{1}{2^{\nu-\mu-1}\Gamma(\nu-\mu)}\int_0^t (t^2-\tau^2)^{\nu-\mu-1}\,\tau^{\mu+1} J_\mu(\tau)\,d\tau.$$

Пример 3. Полиномы, определенные равенством

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}),$$

называют полиномами Лагерра. Формула (14) при применении формулы (33), где $\lambda = 1$, дает

$$h(t) = t^n e^{-t} \supset \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Так как $h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(n-1)}(0) = 0$, то по формуле (30)

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \supset \frac{n!\,p^n}{(p+1)^{n+1}},$$

и применяя формулу (33), где $\lambda = -1$, получаем

$$e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) = L_n(t) \supset n!\,\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n,$$

т. е. получаем изображение полинома Лагерра $L_n(t)$.

Если переменную обозначить через x, то, согласно последнему соотношению, можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\frac{x^n}{n!} \supset \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n x^n = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{p+\frac{x}{1-x}}.$$

Отсюда, применяя формулу (15), где $a = \frac{x}{1-x}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}\,e^{-t\frac{x}{1-x}}.$$

Следовательно, полиномы Лагерра являются коэффициентами при $\frac{x^n}{n!}$ в разложении в ряд функции

$$\frac{1}{1-x}\,e^{-t\frac{x}{1-x}}.$$

Эту функцию называют производящей функцией полиномов Лагерра.

Можно написать

$$L_{n+1}(t)+n^2L_{n-1}(t) \supset (2n+1)\,n!\,\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n - n!\,\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{p-n-1}{p(p-1)}.$$

Согласно формуле (37), где $n=1$,

$$tL_n(t) \supset -n!\,\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right] = n!\,\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{p-n-1}{p(p-1)}.$$

Отсюда

$$L_{n+1}(t)-(2n+1-t)\,L_n(t)+n^2L_{n-1}(t)=0,$$

что представляет собой полезную рекуррентную формулу.

8.5.8. Применение операционного исчисления к разложению в асимптотический ряд. Рассмотрим функцию $h(t)$ и ее изображение $F(p)$. Между этими двумя функциями имеется соотношение

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp.$$

Предположим, что функция $F(p)$ голоморфна в полуплоскости p, находящейся справа от вертикальной прямой с абсциссой $x=b$, за исключением некоторого числа особых точек, находящихся на вертикали с абсциссой $x=a$:

$$b<a<c.$$

Пусть $p_1=a+jy_1$, ..., $p_i=a+jy_i$, ..., $p_k=a+jy_k$ — эти особые точки. Если они являются точками разветвления, то можно написать вблизи них

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{ni}(p-p_i)^{n-1}+(p-p_i)^{\beta_i}\sum_{n=0}^{\infty} b_{ni}(p-p_i)^{n-1} \qquad (139)$$

при

$$0<\beta_i<1.$$

Если ρ обозначает радиус сходимости рядов, входящих в (139), то следует предполагать условие

$$|p-p_i|<\rho.$$

Если $F(p)$ стремится к нулю при y, стремящемся к бесконечности по своим положительным или отрицательным значениям между двумя абсциссами $x=b$ и $x=c$, таким образом, что интеграл $\int |F(p)|\,dp$ сходится, то можно показать [1]), что при $t>0$

$$h(t)\approx\sum_{i=1}^{k} e^{p_it}\left(a_{0i}+\frac{\sin\pi\beta_i}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_{ni}\frac{\Gamma(\beta_i+n)}{t^{n+\beta_i}}\right). \qquad (140)$$

Формула (140) дает искомый асимптотический ряд.

Примечания. Коэффициенты a_{ni} не входят в окончательную формулу (140), кроме первого a_{0i}. Если точка p_i — простой полюс, а не точка разветвления, в формуле (139) второй ряд исчезает, а коэффициент a_{0i} равен вычету, относящемуся к точке p_i.

[1]) W. G. L. Sutton, The asymptotic expansion of a function whose operational equivalent is known, J. London Math. Soc., 9, 1934, p. 131.

Если все точки разветвления $F(p)$ сводятся к единственной точке, находящейся в начале и вызванной наличием $\sqrt{p}$, то

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n p^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n p^{n-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получим асимптотический ряд

$$h(t)\approx a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(2t)^n}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \tag{141}$$

Эта формула была предложена Хевисайдом и называется иногда „третьим правилом Хевисайда".

Пример. Вернемся снова к примеру II. 8.3.23. Найдем асимптотический ряд функции t, изображением которой будет

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1+p^{\frac{3}{2}}}. \tag{142}$$

В этом примере мы сначала находили оригинал функции (142) и из него выводили асимптотический ряд. Воспользуемся только что найденными результатами, чтобы получить этот ряд непосредственно.

Можно написать

$$F(p)=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1+p^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{1-p^3}-\frac{p^2}{1-p^3}.$$

Отсюда

$$F(p)=p^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}p^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}p^{3n+2}$$

и

$$\beta=\frac{1}{2},\quad b=1.$$

Получаем ряд

$$h(t)-\frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\approx-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(3n+\frac{3}{2}\right)}{t^{3n+\frac{3}{2}}}.$$

8.6. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

8.6.1. Замечания об операционном исчислении Хевисайда. В 1893 г. английский физик О. Хевисайд в первый раз предложил способ вычисления, который назвал операционным. Сейчас мы покажем, что операционное исчисление, как его понимал Хевисайд, не отличается от только что изложенного способа, основанного на преобразовании Лапласа — Карсона. Точка зрения Хевисайда, который скорее руководствовался интуицией и физическим смыслом явлений, чем математической строгостью, состояла в следующем.

Хевисайд рассматривал знак дифференцирования $\frac{d}{dt}$ как оператор p. Операция дифференцирования функции $f(t)$ записывалась как $pf(t)$; n-я произ-

водная писалась как $p^n f(t)$ — оператор p прилагался n раз к функции $f(t)$. Оператор $\frac{1}{p}$ или p^{-1} представлял операцию интегрирования, так как оператор p, приложенный к $p^{-1}f(t)$, снова давал $f(t)$:

$$pp^{-1}f(t) = f(t).$$

Формула, содержащая интегралы или дифференциалы, сводилась при рассмотрении p в качестве алгебраической переменной к алгебраической форме. Это Хевисайд называл „алгебраизацией" задачи.

Особенно подробно Хевисайд рассматривал функцию $\Upsilon(t)$; функции $h(t)$ всегда были равны нулю при $t < 0$.

Можно заметить, что формулы (29) и (31) являются оправданием приема, состоящего в том, чтобы рассматривать p и p^{-1} соответственно как операторы дифференцирования и интегрирования. Можно показать, что, например, отождествление p с оператором дифференцирования приводит к уже известным формулам.

Применив к $h(t)$ оператор $e^{-\lambda p}$, получим

$$e^{-\lambda p}\{h(t)\} = \left(1 - \lambda p + \frac{\lambda^2 p^2}{2!} - \frac{\lambda^3 p^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n p^n}{n!} + \ldots\right)\{h(t)\},$$

но $p^n h(t)$ — то же самое, что $h^{(n)}(t)$, поэтому

$$e^{-\lambda p}\{h(t)\} = h(t) - \lambda h'(t) + \frac{\lambda^2}{2!} h''(t) - \ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} h^{(n)}(t) + \ldots,$$

$$e^{-\lambda p}\{h(t)\} = h(t - \lambda).$$

Эту формулу можно сопоставить с полученной ранее формулой (34).

Для Хевисайда формула $f(p) \subset h(t)$ (преобразование Карсона) означала, что оператор $f(p)$, примененный к $\Upsilon(t)$, дает в результате

$$f(p)\{\Upsilon(t)\} = h(t). \tag{143}$$

Мы увидим, что точки зрения Карсона и Хевисайда совпадают. Рассмотрим формулу (143). Если допустить, что $h(t)$ разлагается в целый ряд по t, а $f(p)$ — в целый ряд по $\frac{1}{p}$:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{p^n},$$

то эти ряды совпадают, так как

$$p^{-n}\{\Upsilon(t)\} = \frac{t^n}{n!} \text{ при } t > 0.$$

Покажем, что полученные таким образом функции $h(t)$ и $f(p)$ удовлетворяют интегральному уравнению Карсона. Требуется установить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\right) e^{-pt}\, dt. \tag{*}$$

Рассмотрим общий член правой части

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-pt}\, dt.$$

Последовательное интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pt}\,dt = \ldots = \frac{1}{p^n}\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Значит, равенство (*) подтверждается, и точка зрения Хевисайда, выраженная равенством (143), совпадает с точкой зрения Карсона.

Нужно сознаться, что операционное исчисление до работ Карсона и П. Леви, которые дали ему незыблемое математическое основание, таило в себе множество ловушек. Небезопасно было обращаться с p как с алгебраическим числом, и только гениальная интуиция Хевисайда позволяла ему обходиться без ошибок при вычислениях.

8.6.2. Обозначения в операционном исчислении. В работах, посвященных операционному исчислению, для обозначения функционального соотношения между функциями $f(p)$ и $h(t)$ применяются следующие обозначения.

Преобразование Лапласа:

1) $F(p) = L\{h(t)\}$, $h(t) = L^{-1}\{F(p)\}$

(А. И. Лурье, Г. Дёч, Ян Микусинский, В. А. Диткин и А. П. Прудников, Н. С. Пискунов).

2) $F(p) \div\!\!\rightarrow f(t)$, $f(t) \leftarrow\!\!\div F(p)$

(Н. С. Пискунов).

3) $F(p) \sqsubset h(t)$, $h(t) \sqsupset F(p)$

(А. Анго).

Преобразование Карсона:

1) $f(p) \doteqdot h(t)$, $h(t) \doteqdot f(p)$

(Б. ван дер Поль).

2) $F(p) = pL\{h(t)\}$

(А. И. Лурье).

3) $F(p) \subset h(t)$, $h(t) \supset F(p)$

(А. Анго).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

1. Конторович М. И., Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1953.
2. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
3. Пискунов Н. С., Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, Физматгиз, 1963.
4. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, 1960.
5. Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление (СМБ), Физматгиз, 1961.
6. Диткин В. А. и Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.
7. Эфрос А. М., Данилевский А. М., Операционное исчисление и контурные интегралы, ДНТВУ, 1937.
8. Ван дер Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
9. Микусинский Я., Операторное исчисление, ИЛ, 1956.
10. Теумин И. И., Справочник по переходным электрическим процессам, Связьиздат, 1951.

ГЛАВА IX

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

9.1.1. Определение вероятности. Рассмотрим некоторое событие A, т. е. факт, который может произойти или не произойти в результате опыта. Пусть из общего числа N равновозможных случаев имеется n благоприятствующих этому событию, т. е. таких случаев, когда событие происходит. Тогда вероятность p совершения события A определяется формулой

$$p = \frac{n}{N} \text{ *).}$$

Если событие A не происходит, то имеет место событие не A, которое мы назовем противоположным событием и обозначим через B. Число случаев, благоприятствующих совершению события B, равно, очевидно, $N - n$. Вероятность B будет, следовательно, равна

$$q = \frac{N-n}{N} = 1 - p.$$

Если событие A достоверно, то $n = N$, а следовательно, и $p = 1$.

Если событие A невозможно, то и $n = 0$, и, следовательно, $p = 0$.

Пример. Какова вероятность извлечь наудачу 5 белых шаров из урны, в которой лежит 12 белых шаров и 7 черных?

Общее число возможных случаев равно числу способов извлекать 5 шаров из 19, т. е. числу сочетаний из 19 предметов по 5. Следовательно,

$$N = C_{19}^5 = \frac{19!}{5!\,14!}.$$

Число благоприятных случаев равно числу способов извлекать 5 белых шаров из 12, т. е.

$$n = \frac{12!}{5!\,7!}.$$

Значит, искомая вероятность равна

$$p = \frac{n}{N} = \frac{22}{323}.$$

---

*) Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события. Формула для непосредственного подсчета вероятностей, введенная автором:

$$p = \frac{n}{N}$$

имеет место лишь для „схемы случаев". При этом, помимо равновозможности всех случаев, необходимо, чтобы они составляли полную группу, т. е. чтобы в результате опыта непременно произошел хотя бы один из случаев, а также чтобы они были несовместными, т. е. чтобы никакие два из них не могли появиться одновременно в данном опыте.

9.1.2. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Говорят, что события независимы, если на осуществление одного из них не влияет осуществление остальных.

Если обозначить вероятности независимых событий A_1, A_2, A_3, ..., A_s через p_1, p_2, p_3, ..., p_s, то возможность совместного осуществления всех событий A_1, ..., A_s будет равна произведению вероятностей p_1, $p_2 \dots p_s$. В этом состоит теорема умножения вероятностей. Поясним для двух независимых событий A_1, A_2. Пусть N_1, N_2 — соответственно числа равновозможных случаев, n_1, n_2 — числа случаев, благоприятствующих осуществлению событий A_1 и A_2, а p_1, p_2 — их вероятности. Имеем

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1}, \quad p_2 = \frac{n_2}{N_2}.$$

Общее число случаев, благоприятствующих совместному осуществлению обоих событий A_1, A_2, равно $n_1 n_2$, общее число возможных случаев равно $N_1 N_2$, поэтому

$$p = p_1 p_2,$$

где p обозначает вероятность совместного осуществления обоих событий A_1 и A_2. Эту теорему легко обобщить на любое число событий.

Пусть p_1 — вероятность осуществления событий A_1, а p_2 — вероятность осуществления события A_2 после того, как событие A_1 произошло. Вероятность того, что события A_1 и A_2 осуществятся последовательно, будет равна $p_1 p_2$. Доказательство этой теоремы проводится подобно доказательству предыдущей. Она легко обобщается на любое число событий *).

Пример. Рассмотрим снова предыдущий пример. Вероятность в первый же раз извлечь белый шар равна $\frac{12}{19}$. Как только мы произвели эту операцию, вероятность во второй раз извлечь белый шар равна уже $\frac{12-1}{19-1} = \frac{11}{18}$; аналогично при третьем, четвертом и пятом извлечениях вероятности извлечения белого шара будут соответственно равны

$$\frac{10}{17}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{8}{15}.$$

Следовательно, вероятность извлечения пяти белых шаров при пяти последовательных извлечениях равна

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} = \frac{22}{323}.$$

9.1.3. Несовместные события. Теорема сложения вероятностей. Говорят, что события A_1, A_2, ..., A_s несовместны, если осуществление одного из них исключает возможность осуществления остальных. При этом условии вероятность того, что одно из группы событий A_1, ..., A_s осуществится, равна сумме вероятностей осуществления каждого из этих событий в отдельности.

Действительно, пусть вероятности событий A_1, ..., A_s равны соответственно $p_1 = \frac{n_1}{N}$, ..., $p_s = \frac{n_s}{N}$. Вероятность того, что какое-либо из

*) Теорема умножения вероятностей обычно формулируется так: вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место. При этом произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. В случае независимости событий условная вероятность появления события равна его безусловной вероятности.

событий $A_1, \ldots, A_s$ осуществится, равна

$$\frac{n_1+n_2+\ldots+n_s}{N}=p_1+p_2+\ldots+p_s.$$

В этом состоит теорема сложения вероятностей.

Пример. Вернемся к первому примеру с урной. Какова вероятность при извлечении за один раз двух шаров получить один черный и один белый шар?

Безразлично, извлечены ли оба шара из девятнадцати за один раз или один шар из девятнадцати в первый раз и потом еще один из восемнадцати во второй раз. При этом могут произойти два благоприятных несовместных события:

1) в первый раз извлечен белый шар, во второй раз черный;

2) в первый раз извлечен черный шар, во второй раз белый.

Вероятность первого события на основании теоремы умножения вероятностей равна

$$\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}.$$

Вероятность второго события по аналогии равна

$$\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}.$$

Искомая вероятность будет на основании теоремы сложения вероятностей равна

$$\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}+\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18}=\frac{28}{57}\ *).$$

9.1.4. Формула Стирлинга. В полученные выше формулы часто входит величина $n!$, прямое вычисление которой при больших значениях n требует больших затрат труда и времени. Для упрощения этих вычислений часто пользуются приближенной формулой Стирлинга, точность которой возрастает с возрастанием числа n (асимптотическая формула).

Для вывода этой формулы рассмотрим площадь, заключенную между осью x, кривой $y=\ln x$ и прямой, параллельной оси y в точке с абсциссой $x=n$ (рис. 9.1). Эта площадь выражается интегралом

$$\int_1^n \ln x\,dx.$$

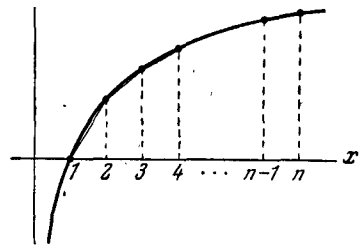


Рис. 9.1.

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_1^n \ln x\,dx=n\ln n-n+1.$$

С другой стороны, вычисляя этот интеграл приближенно по формуле трапеций, получим

$$\int_1^n \ln x\,dx=\frac{\ln 1+\ln n}{2}+\ln 2+\ldots+\ln(n-1)=\ln n!-\frac{1}{2}\ln n.$$

*) Теорема сложения вероятностей обычно формулируется так: вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. При этом суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий (в случае несовместных событий суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении одного из этих событий).

Учитывая выпуклость кривой $y = \ln x$, заключаем, что формула трапеций позволяет вычислить искомую площадь с недостатком, т. е

$$n \ln n - n + 1 > \ln n! - \frac{1}{2} \ln n.$$

Приближенно можно принять

$$n \ln n - n \approx \ln n! - \frac{1}{2} \ln n$$

или

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n,$$

откуда для $n!$ получаем приближенное выражение

$$n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Таким образом, можем написать

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} \varphi(n). \tag{1}$$

Покажем, что функция $\varphi(n)$, компенсирующая ошибки приближенной формулы, при n, стремящемся к бесконечности, имеет предел и предел этот равен $\sqrt{2\pi}$.

Действительно, рассмотрим соотношение

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = e \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Имеем

$$\ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} - \ldots,$$

откуда следует, что ряд, общий член которого равен $\ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}$, сходится. Следовательно, сумма S_n первых n членов этого ряда имеет предел при $n \to \infty$. Эта сумма равна

$$S_n = \ln \varphi(n) - \ln \varphi(1).$$

Поскольку последовательность $\ln \varphi(n)$ имеет конечный предел, то и последовательность $\varphi(n)$ также имеет конечный предел.

Мы уже знакомы (п. 2.1.4) с формулой Валлиса, которая имеет вид

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.$$

Если заменить в этом выражении величину $n!$ на основании формулы (1), то получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{[\varphi(n)]^2}{4},$$

откуда следует равенство

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{\varepsilon_n},$$

где ε_n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Можно показать, что

$$\varepsilon_n = \frac{B_1}{1 \cdot 2n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4n^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6n^5} - \frac{B_4}{7 \cdot 8n^7} + \ldots,$$

где B_1, B_2, B_3, ... — числа Бернулли (п. 10.5.1):

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\ldots$$

$$B_n=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}.$$

На практике пользуются следующей приближенной асимптотической формулой Стирлинга:

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{2}$$

или, если требуется большая точность,

$$n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right).$$

Последняя формула делает ошибку пренебрежимо малой даже при малых значениях n.

Законы распределения случайных величин

9.1.5. Дискретные случайные величины. Пусть имеется некоторая группа событий

$$A_1,\ A_2\ \ldots,\ A_s,$$

вероятности осуществления которых равны соответственно

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s.$$

Условия опыта таковы, что в каждом опыте осуществляется одно и только одно событие (т. е. мы имеем полную группу несовместных событий). Поэтому

$$p_1+p_2+\ \ldots\ +p_s=1.$$

Рассмотрим переменную x, которая может принимать значения

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_l,\ \ldots,\ x_s$$

в зависимости от происходящего события. Такая величина называется дискретной (прерывной) случайной величиной. Совокупность значений случайной величины вместе с их вероятностями определяет ее закон распределения.

Выражение

$$\bar{x}=p_1x_1+p_2x_2+\ \ldots\ +p_sx_s=\sum_{l=1}^{s}p_lx_l \tag{3}$$

называется математическим ожиданием случайной величины x *). Таким образом, математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений [1]).

---

*) В советской литературе, помимо обозначения математического ожидания чертой сверху (как это принято в настоящей книге) применяется обозначение $M[x]$, которое удобнее в случае, когда рассматривается математическое ожидание сложного выражения. Мы будем использовать, как правило, обозначение математического ожидания, принятое автором. Дисперсия случайной величины x обозначается $D[x]$, или просто D.

[1]) Если x — выигрыш в азартной игре, то игра может считаться справедливой, если математическое ожидание $\bar{x}$ равно ставке.

Разность между значением случайной величины x и ее математическим ожиданием $\overline{x}$ обозначается через δ и называется отклонением (или центрированной случайной величиной):

$$\delta = x - \overline{x}. \tag{4}$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$\overline{\delta} = 0.$$

Средним арифметическим отклонением называется математическое ожидание абсолютных значений случайной величины δ:

$$\delta_m = \overline{|\delta|}. \tag{5}$$

Дисперсией случайной величины x называется величина D, определяемая формулой

$$D = \sum_i (x_i - \overline{x})^2 p_i = \sigma^2, \tag{6}$$

а величина σ, представляющая собой квадратный корень из дисперсии, называется средним квадратическим отклонением или стандартом случайной величины x. Дисперсия случайной величины характеризует рассеивание, разбросанность значений случайной величины около ее математического ожидания.

Легко заметить, что для величин δ_m и σ справедливо следующее неравенство:

$$\sigma \geqslant \delta_m.$$

Если $f(x)$ — функция случайной величины x, определенная для всех значений x_i, то математическое ожидание этой функции относительно рассматриваемого закона распределения случайной величины x определится формулой

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{s} f(x_i)\, p_i. \tag{7}$$

Дисперсия функции $f(x)$ будет равна

$$D[f] = \sum_{i=1}^{s} [f(x_i) - \overline{f}]^2 p_i. \tag{8}$$

Величина $\overline{x^r}$, определяемая формулой

$$\overline{x^r} = \sum_{i=1}^{s} x_i^r p_i, \tag{9}$$

называется начальным моментом порядка r случайной величины x. Если математическое значение случайной величины x равно нулю, то величина

$$\overline{x^r} = \sum_{i=1}^{s} x_i^r p_i$$

называется центральным моментом порядка r случайной величины x; при этом $\overline{x} = \overline{x^1} = 0$.

Можно предложить следующую механическую интерпретацию закона распределения, которая поясняет введение термина момент.

Рассмотрим ось x с началом в точке O и поместим в точках с абсциссами $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_s$ массы, равные $p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_s$ (распределение общей массы, равной единице).

Начальный момент первого порядка—математическое ожидание x — есть абсцисса центра тяжести этих масс или статический момент этих масс относительно точки O. Если перенести начало отсчета в эту точку, то $\bar{x}=0$. В этом случае величина $\bar{x^2}$ — центральный момент второго порядка, или, что то же самое, дисперсия случайной величины x — представляет собой момент инерции масс p_i относительно математического ожидания случайной величины x.

9.1.6. Непрерывные случайные величины. Если через $P(x)$ обозначить вероятность того, что значение случайной величины находится между $-\infty$ и x, то $P(x)$ будет монотонной неубывающей функцией переменной x, которая, очевидно, будет равна нулю при $x=-\infty$ и единице при $x=+\infty$.

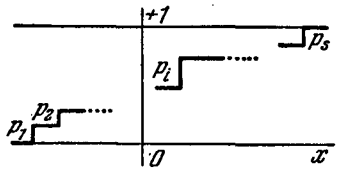


Рис. 9.2.

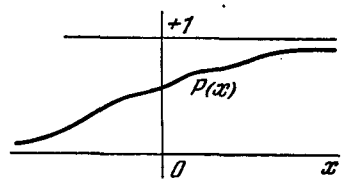


Рис. 9.3.

В случае дискретной случайной величины $P(x)$ — ступенчатая функция, у которой высоты ступеней равны вероятностям p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_s (рис. 9.2). В случае непрерывной случайной величины характер изменения функции $P(x)$ представлен на рис. 9.3. Может существовать и промежуточный случай, когда функция $P(x)$ имеет точки разрыва первого рода (рис. 9.4). Функция $P(x)$ называется функцией распределения случайной величины x.

Если для простоты считать, что в случае непрерывной случайной величины функция распределения непрерывна, то можно определить ее формулой

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)\,d\xi=1.$$

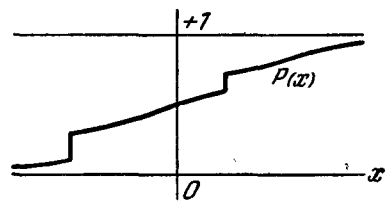


Рис. 9.4.

Обращаясь опять к механической интерпретации и рассматривая распределение массы, равной единице, можно сказать, что $p(x)$ — линейная плотность. Величина $p(x)$ называется плотностью вероятности (плотностью распределения). Математическое ожидание непрерывной случайной величины x определяется формулой

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx. \tag{10}$$

Отклонение δ равно, как и раньше, $x-\bar{x}$. Дисперсия непрерывной случайной величины x равна

$$D=\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 p(x)\,dx. \tag{11}$$

Величина σ, как и ранее, представляет собой среднее квадратическое отклонение, или стандарт случайной величины x.

Обозначим через $f(x)$ функцию, определенную для всех значений x. Математическое ожидание функции f и ее дисперсия определяются соответственно формулами

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\, dx, \tag{12}$$

$$D[f] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - \bar{f}]^2\, p(x)\, dx. \tag{13}$$

Можно считать, что функция $P(x)$ определяет на оси x распределение общей массы, равной единице. Математическое ожидание $\bar{x}$ представляет собой статический момент относительно точки O; одновременно это абсцисса центра тяжести.

Математическое ожидание отклонения δ равно нулю, так как это есть статический момент относительно центра тяжести:

$$\bar{\delta} = 0.$$

Начальный момент порядка r непрерывной случайной величины определяется выражением

$$\overline{x^r} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x)\, dx. \tag{14}$$

Если выбрать за начало координат абсциссу математического ожидания $\bar{x}$, то центральный момент второго порядка, или дисперсия непрерывной случайной величины x, будет представлять собой момент инерции рассматриваемой массы относительно центра тяжести. Если математическое ожидание $\bar{x}$ не выбрано за начало координат, то можно выразить дисперсию D через два первых начальных момента с помощью равенства

$$D = \overline{x^2} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \tag{15}$$

9.1.7. Характеристическая функция. Пусть дана непрерывная случайная величина x и соответствующая ей плотность вероятности $p(x)$.

Для ряда задач удобно ввести функцию от переменной u, которая представляет собой математическое ожидание величины e^{jux}. Она называется характеристической функцией случайной величины x *). По определению, эта функция $\varphi(u)$ равна

$$\varphi(u) = \overline{e^{jux}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p(x)\, dx. \tag{16}$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Из свойств интеграла Фурье (п. 2.2.2, формула (21)) следует обратная формула

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, e^{-jux}\, du. \tag{17}$$

Введение характеристической функции связано с тем, что ее последовательные производные, в которых положено $u = 0$, представляют собой,

*) Метод характеристических функций был создан А. М. Ляпуновым.

с точностью до коэффициента $\pm j$, начальные моменты того же порядка. Действительно,

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1,$$

$$\varphi'(0) = j\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = j\bar{x},$$

. . . . . .

$$\varphi^{(r)}(0) = j^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x)\,dx = j^r \overline{x^r}.$$

Поэтому, если разложить функцию $\varphi(u)$ в ряд Маклорена

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + \ldots + \frac{u^r}{r!}\varphi^{(r)}(0) + \ldots,$$

то

$$\varphi(u) = 1 + ju\bar{x} + \ldots + \frac{(ju)^r}{r!}\,\overline{x^r} + \ldots \tag{18}$$

Если этот ряд сходится, то знание начальных моментов различных порядков определяет при некоторых условиях характеристическую функцию, а следовательно, и функцию $p(x)$.

Пример. Рассмотрим переменную x, для которой плотность вероятности равна нулю вне интервала (0, 1) и равна единице внутри этого интервала:

$$p(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0 \text{ и } x \geqslant 1,$$
$$p(x) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1.$$

Функция распределения равна

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ x & \text{для } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{для } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Математическое ожидание $\bar{x}$ равно

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2},$$

что было очевидно à priori.

Дисперсия равна

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)\,dx = \int_{0}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

а характеристическая функция

$$\varphi(u) = \int_{0}^{1} e^{jux}\,dx = \left[\frac{e^{jux}}{ju}\right]_0^1 = \frac{e^{ju} - 1}{ju}.$$

Если перенести начало координат в точку $x = \bar{x} = \frac{1}{2}$, иначе говоря, если заменить x на $x - \frac{1}{2}$, то для $\varphi(u)$ получим

$$\varphi(u) = \frac{e^{ju} - 1}{ju} \cdot e^{-\frac{ju}{2}} = \frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}.$$

9.1.8. Распределение системы двух случайных величин. Рассмотрим случай системы двух случайных величин x и y. Функция распределения системы двух случайных величин $P(x, y)$ представляет собой вероятность того, что обе случайные величины будут соответственно меньше x и y. Функция распределения должна удовлетворять следующим условиям:

$$0 \leqslant P(x, y) \leqslant 1,$$
$$P(-\infty, -\infty) = P(-\infty, y) = P(x, -\infty) = 0,$$
$$P(+\infty, +\infty) = 1.$$

Условие монотонности функции распределения, поведение которой для одной случайной величины характеризовалось графиком, приведенным на рис. 9.3, для системы двух случайных величин характеризуется неравенствами

$$P(x+h, y) - P(x, y) \geqslant 0,$$
$$P(x, y+k) - P(x, y) \geqslant 0,$$
$$P(x+h, y+k) - P(x+h, y) \geqslant P(x, y+k) - P(x, y),$$

где через h и k обозначены положительные приращения величин x и y соответственно. Плотность вероятности системы двух случайных величин определяется формулой

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \, \partial y},$$

откуда

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x, y) \, dx \, dy.$$

Мы рассмотрели случай непрерывной функции распределения системы двух непрерывных случайных величин. Легко представить себе функцию распределения для случая системы двух дискретных случайных величин, аналогичную функции распределения одной дискретной случайной величины, представленной на рис. 9.2, а также разрывную функцию распределения для случая системы двух непрерывных случайных величин, аналогичную представленной на рис. 9.4 для одной непрерывной случайной величины.

Определим начальные моменты различных порядков для системы двух случайных величин. Имеется $n+1$ момент n-го порядка:

$$\overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x, y) \, dx \, dy,$$

. . . . . .

$$\overline{x^{n-k} y^k} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-k} y^k p(x, y) \, dx \, dy,$$

. . . . . .

$$\overline{y^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^n p(x, y) \, dx \, dy.$$

Если рассматривать $p(x, y)$ как величину, определяющую плотность единичной массы, распределенной на плоскости Oxy, в точке (x, y), то оба момента первого порядка $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определят абсциссу и ординату центра тяжести этой массы. Это будут моменты первого порядка системы случайных величин (x, y), спроектированные соответственно на оси x и y.

Если выбрать начало координат в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, то получим центральные моменты второго порядка $\overline{x^2}$ и $\overline{y^2}$, которые примут вид

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2 p(x, y)\,dx\,dy = (\sigma^2)_x,$$

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\bar{y})^2 p(x, y)\,dx\,dy = (\sigma^2)_y.$$

Характеристическая функция представляет собой математическое ожидание функции

$$e^{j(ux+vy)},$$

т. е.

$$\varphi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(ux+vy)} p(x, y)\,dx\,dy.$$

Если разложить характеристическую функцию в ряд Маклорена по двум переменным u и v, то получим

$$\varphi(u, v) = 1 + \left[u\frac{\partial}{\partial u}\varphi(0, 0) + v\frac{\partial}{\partial v}\varphi(0, 0)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[u\frac{\partial}{\partial u}\varphi(0, 0) + v\frac{\partial}{\partial v}\varphi(0, 0)\right]^n + \ldots =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 + j(ux+vy) + \ldots + \frac{1}{n!}j^n(ux+vy)^n + \ldots\right] p(x, y)\,dx\,dy.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменных u и v, будем иметь

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(0, 0) = j\bar{x}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\varphi(0, 0) = j\bar{y}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(0, 0) = -\overline{x^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\varphi(0, 0) = -\overline{xy}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial v^2}\varphi(0, 0) = -\overline{y^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^n}{\partial u^{n-k}\,\partial v^k}\varphi(0, 0) = j^n\overline{x^{n-k}y^k}.\end{gathered}\right\} \quad (19)$$

Все рассмотренные выше понятия легко обобщить на системы любого числа случайных величин.

9.1.9. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин. Пусть имеется случайная величина x, которая в процессе опыта принимает значения $x_1, x_2, \ldots$, и другая случайная величина, независимая от первой, которая в процессе опыта принимает значения $y_1, y_2, \ldots$ Определим случайную величину $x+y$. В процессе опыта она принимает значения

$$x_1+y_1, \quad x_1+y_2, \quad x_2+y_1, \quad x_2+y_2, \ldots$$

Для характеристической функции суммы $x+y$ имеем

$$\varphi_{x+y} = \overline{e^{ju(x+y)}} = \overline{e^{jux}e^{juy}}.$$

Учитывая, что случайные величины x и y независимы, заключаем, что двойной интеграл от правой части сводится к двум простым интегралам. Следовательно, правая часть равна произведению характеристических функций слагаемых, т. е.

$$\varphi_{x+y} = \varphi_x \cdot \varphi_y, \tag{20}$$

где через φ_α обозначается характеристическая функция для случайной величины α. Итак, характеристическая функция суммы величин $x+y$ равна произведению характеристических функций величины x и величины y. Это правило легко обобщается на любое число независимых случайных величин.

Основные законы распределения случайных величин

9.1.10. Биномиальный закон распределения. Пусть некоторое событие A может осуществиться в ходе испытаний. Если A не осуществится, то осуществится противоположное событие B. Пусть p — вероятность осуществления события A. Очевидно, что вероятность осуществления противоположного события будет $q=1-p$. Если проделать n последовательных независимых опытов, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A осуществится в точности k раз, событие B, следовательно, $n-k$ раз, будет, если не учитывается порядок событий,

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k p^k q^{n-k}, \\ P_n(k) &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}. \end{aligned} \tag{21}$$

В связи с тем, что вероятности $P_n(k)$ по форме представляют собой члены разложения бинома $(p+q)^n$, распределение вероятностей вида (21) называется биномиальным законом распределения. Числа p и q определяются условиями эксперимента, а число опытов n устанавливается заранее. Найдем при этих условиях значение k, при котором вероятность $P_n(k)$ оказывается наибольшей.

Сравнивая значения $P_n(k)$ и $P_n(k+1)$, имеем

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Следовательно, $P_n(k)$ возрастает вместе с k до тех пор, пока значение k меньше или равно $np-q$. Если $np-q$ — целое число, то наибольшее значение вероятности достигается при двух значениях k:

$$k = np-q \qquad \text{и} \qquad k = np+p.$$

Если $np-q$ — не целое число, то наибольшая вероятность достигается при одном значении k, которое равно ближайшему целому числу, большему чем $np-q$, или, что то же самое, целой части числа $np+p$. Так как в дальнейшем мы будем предполагать, что число n опытов велико, то можно без заметной ошибки сказать, что наиболее вероятное число осуществлений события A равно np (оно отличается от точного значения меньше, чем на единицу). Если через $\frac{k}{n}$ обозначить частоту *) осуществления события A, то

*) Вместо термина частота иногда используют термины частость или статистическая вероятность.

можно сказать, что наиболее вероятное значение частоты будет приближенно равно вероятности p.

Найдем вероятность того, что событие A осуществится в n опытах по крайней мере k раз. Эта вероятность будет равна сумме

$$p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^{n-k} q^k,$$

т. е. сумме $k+1$ первых членов разложения бинома $(p+q)^n$.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию переменной k биномиального закона. Для этого будем исходить из тождества

$$(py+q)^n = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)\, y^k. \qquad (*)$$

Продифференцируем обе части тождества по y. Тогда

$$np\,(py+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kP_n(k)\, y^{k-1}.$$

Полагая $y=1$ в обеих частях последнего равенства, получим

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} kP_n(k) = np. \qquad (22)$$

Продифференцируем еще раз обе части тождества (*) и в полученном выражении снова положим $y=1$. При этом будем иметь

$$n(n-1)\,p^2 = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,P_n(k) = \bar{k^2} - \bar{k}. \qquad (23)$$

Согласно формуле (15), дисперсия равна

$$D = \bar{k^2} - (\bar{k})^2$$

или

$$D = \bar{k^2} - \bar{k} + [\bar{k} - (\bar{k})^2].$$

На основании формул (22) и (23) имеем

$$D = n(n-1)\,p^2 + np - n^2p^2$$

или

$$D = npq,$$

откуда

$$\sigma = \sqrt{npq}.$$

9.1.11. Характеристическая функция биномиального закона. Рассмотрим случайную величину x, которая принимает значение 1 в случае осуществления события A и значение 0 в противоположном случае. Биномиальный закон распределения характеризует распределение массы, равной единице, при котором масса q находится в точке 0, а масса p — в точке 1. Следовательно,

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ q & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Плотность вероятности $p(x)$ равна нулю во всех точках, кроме точек $x=0$, $x=1$, где она принимает соответственно значения q и p.

Характеристическая функция $\varphi(u)$ в случае одного испытания будет, следовательно, иметь вид

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\,dP(x)=q+pe^{ju}.$$

В случае n испытаний характеристическая функция $\varphi(u)$ равна

$$\varphi(u)=(q+pe^{ju})^n.$$

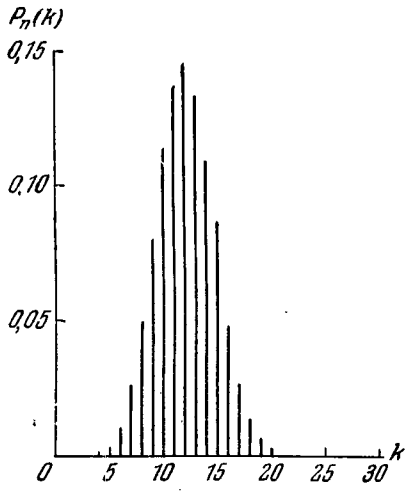


Рис. 9.5.

Раскроем скобки в правой части:

$$\varphi(u)=q^n+\ \ldots\ +C_n^k q^{n-k}p^k e^{jku}+\ \ldots\ +p^n e^{jnu}. \quad (24)$$

Переменная k в случае n испытаний может принимать $n+1$ возможных значений

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

вероятности которых равны

$$P_n(0),\ P_n(1),\ P_n(2),\ \ldots,\ P_n(n).$$

Приравнивая друг другу оба выражения для математического ожидания функции e^{jux}, будем иметь

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\,dP(x)=P_n(0)+\ \ldots\ +P_n(k)\,e^{jku}+\ \ldots\ +P_n(n)\,e^{jnu}. \quad (25)$$

Сравнивая выражения (24) и (25) для $\varphi(u)$, найдем

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Таким образом, мы снова получили биномиальный закон распределения.

Пример. Рассмотрим событие, вероятность осуществления которого $p=\frac{2}{5}$. Вычислим вероятности того, что событие осуществится 0, 1, 2, 3, ..., 29, 30 раз при 30 повторных испытаниях.

Биномиальный закон позволяет составить такую таблицу:

$P(4)=0{,}001\ldots$	$P(10)=0{,}115\ldots$	$P(16)=0{,}049\ldots$
$P(5)=0{,}003\ldots$	$P(11)=0{,}139\ldots$	$P(17)=0{,}027\ldots$
$P(6)=0{,}011\ldots$	$P(12)=0{,}147\ldots$	$P(18)=0{,}013\ldots$
$P(7)=0{,}026\ldots$	$P(13)=0{,}136\ldots$	$P(19)=0{,}005\ldots$
$P(8)=0{,}050\ldots$	$P(14)=0{,}110\ldots$	$P(20)=0{,}002\ldots$
$P(9)=0{,}082\ldots$	$P(15)=0{,}078\ldots$	$P(21)=0{,}000\ldots$

Если в точках с абсциссами 0, 1, 2, ..., 29, 30 провести ординаты, длины которых пропорциональны $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(29), P(30)$, то получим схему, представленную на рис. 9.5. Когда число n становится очень большим, схема деформируется: она сдвигается вправо и становится все более пологой. Действительно, сумма ординат остается все время равной единице, так как эти ординаты представляют собой сумму членов бинома $(p+q)^n=1$.

Целесообразно рассмотреть такую схему в случае, когда за начало отсчета на оси абсцисс принимается точка, соответствующая максимуму орди-

наты, т. е. значению k, при котором достигается наибольшая величина $P_n(k)$. Известно, что это значение k тем ближе к np, чем больше n. Так как нас интересуют главным образом большие значения n, то производим замену переменной:

$$k = np + x.$$

Новая переменная x представляет собой отклонение

$$x = k - \bar{k}.$$

При этом биномиальный закон распределения принимает вид

$$P_n(k) = \frac{n!}{(np+x)!\,(nq-x)!}\, p^{np+x} q^{nq-x}. \tag{26}$$

Вычисление $P_n(k)$ по формуле (26) при больших x довольно неудобно. Кроме того, вероятность $P_n(k)$ дана здесь как функция трех параметров: k, n, p. Покажем, как можно получить более простую формулу, приближенно представляющую биномиальный закон распределения.

9.1.12. Формула Лапласа. Нормальный закон распределения (закон Лапласа — Гаусса). Если использовать формулу Стирлинга для факториалов, то выражение (26) запишется в виде

$$P_n(k) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{np}\right)^{np+x}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{nq-x}\sqrt{2\pi\left(p+\frac{x}{n}\right)\left(q-\frac{x}{n}\right)n}}.$$

Имеем

$$(np+x)\ln\left(1+\frac{x}{np}\right) = (np+x)\left[\frac{x}{np} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2p^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{n^3p^3} - \ldots\right],$$

$$(nq-x)\ln\left(1-\frac{x}{nq}\right) = -(nq-x)\left[\frac{x}{nq} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2q^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{n^3q^3} + \ldots\right].$$

Отсюда

$$P_n(k) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{npq} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{n^2}\frac{p-q}{pq} - \ldots}}{\sqrt{2\pi n\left[pq - \frac{x}{n}(p-q) - \frac{x^2}{n^2}\right]}}. \tag{27}$$

Формула (27) при сделанных допущениях позволяет приближенно найти вероятность того, что отклонение x имеет определенное значение (отличающееся от $\bar{k}$ на целое число). Эта формула не симметрична относительно x, что происходит из-за членов, содержащих x в нечетных степенях. Заметив, что все эти члены содержат множитель $p - q$, можно сделать вывод, что если p не слишком отличается от q и если x не очень велико по сравнению с npq, то эта формула приближенно симметрична.

При больших n, если учитывать только члены первого порядка малости относительно $\frac{1}{n}$, формула (27) примет вид

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{npq}}. \tag{28}$$

Можно ввести в эту формулу математическое ожидание $\bar{k} = np$ или среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{npq}$, в результате чего получаем две эквивалентные формулы:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q\bar{k}}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-\bar{k})^2}{q\bar{k}}} \tag{29}$$

или

$$P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma^2}}. \tag{30}$$

Величину $\xi = \frac{x}{\sqrt{2npq}} = \frac{k-np}{\sqrt{2npq}} = \frac{k-\bar{k}}{\sigma\sqrt{2}}$ называют приведенным или относительным отклонением (она безразмерна). Величина $h = \frac{1}{\sqrt{2npq}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ называется мерой точности. Она по размерности обратна случайной величине x *):

$$x = \frac{\xi}{h}.$$

Придадим k или x, что одно и то же, два близких значения, отличающиеся на несколько единиц. Пусть эти два значения будут k_1, k_2, x_1, x_2. Разность между двумя соответствующими приведенными отклонениями ξ_1 и ξ_2 очень мала, если n велико. Ее можно без заметной ошибки принять за дифференциал:

$$d\xi = h(k_1 - k_2) = h(x_1 - x_2).$$

Вероятность того, что случайное значение приведенного отклонения заключается между ξ и $\xi + d\xi$, будет равна вероятности того, что значение k заключается между k_1 и k_2. Иначе говоря,

$$p(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} d\xi. \tag{31}$$

Мы получили один из основных законов распределения, закон Лапласа — Гаусса, или нормальный закон, который представляет собой асимптотическую форму биномиального закона распределения для случая очень больших n, когда

$$\xi = \frac{k-np}{\sqrt{2npq}}.$$

Примечательно, что нормальный закон распределения зависит только от относительной переменной ξ.

Вероятность того, что случайное значение k заключается между сильно отличающимися друг от друга значениями k_1 и k_2, будет

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\xi^2} d\xi, \tag{32}$$

где $\xi_1 = h(k_1 - np)$, $\xi_2 = h(k_2 - np)$.

Биномиальный закон распределения, характеризуемый тремя параметрами, при помощи некоторых упрощающих допущений, к исследованию которых мы еще вернемся, заменен законом распределения с одной относительной переменной.

---

*) В работах зарубежных авторов вместо меры точности используется величина $u = \frac{1}{h}$, которая называется единичным отклонением. В советской литературе этой величиной не пользуются.

Кривая $y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2}$, называемая кривой Гаусса, изображена на рис. 9.6. Вероятность того, что приведенное отклонение заключается между двумя любыми значениями ξ_1 и ξ_2, равна площади криволинейной трапеции, заключенной между этой кривой, осью ξ и двумя прямыми, параллельными оси Oy, пересекающими ось абсцисс в точках ξ_1 и ξ_2. Если разность $\xi_2-\xi_1$ постоянна, то эта вероятность будет наибольшей в том случае, когда значения ξ_1 и ξ_2 равны по величине и противоположны по знаку. Наибольшую вероятность имеет нулевое отклонение. Вероятность того, что приведенное отклонение примет любое значение, очевидно, равна единице. Но эта вероятность равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi.$$

Как известно (п. 7.3.1), данный интеграл — интеграл Пуассона — равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; это хорошо согласуется со всем изложенным выше.

Функция Лапласа (или интеграл вероятностей)

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\xi}^{\xi}e^{-\xi^2}d\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\xi}e^{-\xi^2}d\xi$$

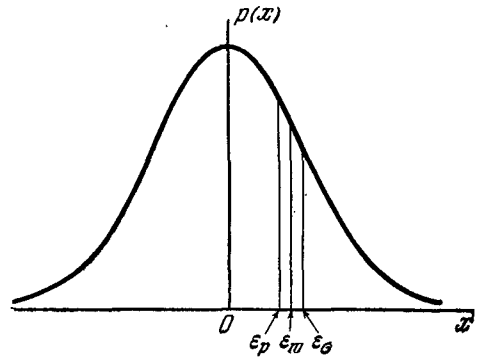


Рис. 9.6.

рассматривалась в п. 7.3.1 и последующих. К приведенной там числовой таблице следует добавить следующие значения, играющие особую роль в теории вероятностей:

ξ	$\Phi(\xi)$
1,163	0,9 $=1-10^{-1}$
1,821	0,99 $=1-10^{-2}$
2,327	0,999 $=1-10^{-3}$
2,751	0,9999 $=1-10^{-4}$
3,123	0,99999 $=1-10^{-5}$
3,459	0,999999 $=1-10^{-6}$
3,763	0,9999999 $=1-10^{-7}$

Если случайная величина представляет собой не приведенное отклонение ξ, а абсолютное отклонение x, то нормальный закон распределения принимает вид

$$p(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx. \tag{33}$$

Так как нормальный закон распределения симметричен, то

$$\overline{\xi}=0.$$

Среднее квадратическое отклонение в этом случае совпадает с корнем квадратным из момента второго порядка. Вычислим в общем виде момент

порядка $2r$ (все моменты нечетных порядков в силу симметрии равны нулю). Интегрируя от нуля до бесконечности обе части тождества

$$\frac{d}{d\xi}(\xi^{2r-1}e^{-\xi^2}) = (2r-1)\xi^{2r-2}e^{-\xi^2} - 2\xi^{2r}e^{-\xi^2},$$

получим

$$(2r-1)\overline{\xi^{2r-2}} = 2\overline{\xi^{2r}}.$$

Отсюда при $r=1$ находим

$$1 = 2\sigma^2, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\overline{\xi^{2r}} = \frac{1\cdot 3\ldots(2r-1)}{2^r}.$$

Если бы мы взяли нормальный закон распределения в виде (33), то получили бы

$$\overline{x^{2r}} = 1\cdot 3\ldots(2r-1)\sigma^{2r}.$$

9.1.13. Характеристическая функция нормального закона распределения. По определению, характеристическая функция $\varphi(u)$ равна

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Вычисление ее легко сводится к вычислению интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-jy)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Отсюда, считая, что $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ и $y = u\sigma^2$, получаем выражение

$$\varphi(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2},$$

которое имеет ту же аналитическую форму, что и плотность вероятности.

Вычисление производных от функции $\varphi(u)$ позволяет легко найти

$$\overline{x^{2r}} = (-1)^r\varphi^{(2r)}(0) = 1\cdot 3\ldots(2r-1)\sigma^{2r},$$

$$\overline{x^{2r+1}} = 0.$$

9.1.14. Теорема Бернулли. Пусть дано сколь угодно малое число η. Вероятность того, что разность между частотой появления события и вероятностью этого события окажется меньше η, стремится к единице, когда число n опытов бесконечно возрастает. Иначе говоря, когда n бесконечно возрастает, частоты осуществлений события A и противоположного события B неограниченно приближаются к вероятностям p и q.

Высказанное выше предложение называется законом больших чисел.

Пусть η — сколь угодно малое положительное число. Покажем, что вероятность выполнения неравенства

$$\left|\frac{k}{n} - p\right| < \eta \tag{34}$$

при бесконечно возрастающем n стремится к единице. Другими словами, частота появления события A стремится к вероятности p.

Неравенство (34) можно написать в виде

$$\left|\xi \sqrt{\frac{2pq}{n}}\right| < \eta.$$

Если положить

$$\eta = \lambda \sqrt{\frac{2pq}{n}},$$

то вероятность того, что неравенство (34) будет удовлетворяться, стремится к $\Phi(\lambda)$ при условии, что n бесконечно возрастает, т. е. к

$$\Phi\left(\eta \sqrt{\frac{n}{2pq}}\right).$$

При любом заданном η можно всегда выбрать n достаточно большим, чтобы эта величина была сколь угодно близка к единице. Следовательно, вероятность того, что $\frac{k}{n}$ стремится к p при бесконечно возрастающем n, стремится к единице. Возьмем например, $p = q = 0{,}5$. Из таблиц функции $\Phi(\xi)$ находим, что если $n > 7{,}6 \cdot 10^6$, то вероятность того, что $\frac{k}{n}$ отличается от p меньше, чем на 10^{-3}, больше, чем $1 - 10^{-7}$.

9.1.15. Замечания о переходе от биномиального закона распределения к нормальному. Вернемся к рассмотрению условий, позволяющих заменить биномиальный закон распределения, представленный формулами (21) или (26), нормальным законом, определяемым формулой (31).

При этом переходе мы допускаем несколько ошибок, а именно:

1) при замене истинного значения факториала его приближенным значением по формуле Стирлинга (при переходе от формулы (26) к формуле (27));

2) за счет пренебрежения бесконечно малыми высшего порядка при переходе от формулы (27) к формуле (28) или к формуле (31);

3) при замене дискретной случайной величины непрерывной.

Можно показать, что основная часть этих ошибок пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{npq}}$, если p отлично от q, и пропорционально $\frac{1}{npq}$, если p равно q. Если n не слишком велико, а p близко к q, то кривая, представляющая нормальный закон распределения, пройдет очень близко от точек, изображающих биномиальный закон, кроме случаев очень больших значений отклонения.

Рассмотрим, например, случай $n = 30$, а $p = \frac{2}{5}$ (см. схему на рис. 9.5. и таблицу в примере п. 9.1.11). Ординаты при этом были вычислены по биномиальному закону. Сравним их значения со значениями, полученными по формуле (28).

При малом отклонении $x = 1$ имеем

$$P_{30}(11) = 0{,}1396 \text{ (биномиальный закон)},$$
$$P_{30}(11) = 0{,}1389 \text{ (нормальный закон)};$$

ошибка составляет 0,5%.

При большом отклонении $x = 7$ имеем

$$P_{30}(5) = 0{,}002634 \text{ (биномиальный закон)},$$
$$P_{30}(5) = 0{,}004970 \text{ (нормальный закон)};$$

ошибка составляет 88%.

Если исследователь-статистик не располагает статистическими таблицами, содержащими очень большое количество результатов измерений, ему следует с большой осторожностью пользоваться нормальным законом распределения

и только для малых значений отклонений в случае, когда вероятности p и q не слишком отличаются друг от друга. Следует также помнить, что „хвосты" кривой Гаусса, соответствующие большим отклонениям, вовсе не представляют собой в этом случае биномиальный закон. Напротив, физик, который исследует столкновения молекул или электронные флюктуации, будет все время иметь дело с очень большими числами n и сможет всегда отождествлять биномиальный закон распределения с нормальным законом, за исключением, однако, случая очень малой вероятности p.

Действительно, рассмотрим случай, когда p значительно отличается от q. При этом точки, изображающие биномиальный закон распределения, не находятся на кривой Гаусса на любом участке этой кривой. Отличие будет тем больше, чем больше p будет отличаться от q и чем меньше будет n. Однако, если даже n — большое число, нельзя отождествить оба эти закона в случае крайне малой вероятности, как это встречается в физике.

Если, например, $p=10^{-6}$, а $q=0{,}999999$, то пренебречь величиной $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ можно, только если n будет порядка 10^{12}.

Полезно было бы найти промежуточный закон распределения для случая очень малых вероятностей p. Конечно, закон этот должен приближаться к нормальному закону распределения, если n бесконечно возрастает.

9.1.16. Закон распределения Пуассона. Пусть p — вероятность осуществления события A. Предполагаем, что эта вероятность очень мала. Наивероятнейшее число осуществлений события A равно, как мы уже видели, $np+p$ или, приближенно, np.

Биномиальный закон распределения

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

может быть написан, если положить $\alpha=np$, в виде

$$P_n(k)=C_n^k\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$$

или

$$P_n(k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n}\frac{\alpha^k}{k!}.$$

Так как p очень мало, то следует принимать во внимание только числа k, малые по сравнению с n.

Произведение $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ весьма близко к единице. Это же относится к величине $\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k}$. Величина $\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n}$ очень близка к $e^{-\alpha}$. Отсюда получаем формулу

$$P_n(k)=\frac{e^{-np}(np)^k}{k!}. \tag{35}$$

Эта формула представляет собой закон распределения Пуассона.

В случае, если n бесконечно возрастает, формула (35) имеет своим пределом нормальный закон распределения. Введя математическое ожидание чисел k, можно написать эту формулу в виде

$$P_n(k)=\frac{e^{-\bar{k}}(\bar{k})^k}{k!}. \tag{36}$$

9.1.17. Характеристическая функция и моменты закона распределения Пуассона. Характеристическая функция равна, по определению,

$$\varphi(u)=\sum_{x=0}^{\infty} e^{jux}\frac{e^{-\bar{x}}(\bar{x})^x}{x!}=e^{-\bar{x}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\bar{x}e^{ju})^x}{x!}=e^{\bar{x}(e^{ju}-1)},$$

$$\varphi(0)=1.$$

Имеем

$$\varphi'(u)=\bar{x}je^{ju}\varphi(u),$$

откуда $\varphi'(0)=j\bar{x}$, что было очевидно;

$$\varphi''(u)=-\bar{x}e^{ju}\varphi(u)+\bar{x}je^{ju}\varphi'(u),$$

откуда $\varphi''(0)=-\bar{x}-(\bar{x})^2$, или $\overline{x^2}=(\bar{x})^2+\bar{x}$.

Дисперсия вычисляется как функция двух первых начальных моментов по формуле (15):

$$D=\sigma^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=\bar{x}.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение σ равно квадратному корню из математического ожидания $\bar{x}$.

Этот весьма существенный вывод можно получить и прямым путем, исходя из определения дисперсии (формула (11)):

$$D=\sigma^2=\sum(x-\bar{x})^2\frac{e^{-\bar{x}}(\bar{x})^x}{x!}.$$

Раскрывая скобки, можно написать

$$D=\sigma^2=e^{-\bar{x}}\left\{(\bar{x})^2\sum\frac{(\bar{x})^{x-2}}{(x-2)!}+\bar{x}\sum\frac{(\bar{x})^{x-1}}{(x-1)!}-\right.$$

$$\left.-2(\bar{x})^2\sum\frac{(\bar{x})^{x-1}}{(x-1)!}+(\bar{x})^2\sum\frac{(\bar{x})^x}{x!}\right\},$$

откуда

$$D=\sigma^2=\bar{x}.$$

9.1.18. Приложение к задачам автоматической телефонии. Когда абонент автоматической телефонной сети снимает трубку, то через какое-то время — обычно довольно короткое — гудок указывает ему момент, когда он может набрать нужный номер: он оказался соединенным с коммутатором. Очевидно, идеальным было бы снабдить каждого абонента коммутатором. Но такое решение было бы весьма неэкономичным по причине высокой стоимости коммутаторов, а также потому, что они бы очень плохо использовались, простаивая без дела большую часть времени. Поэтому каждого абонента снабжают (например, в системе Строуджера) искателем, назначение которого — отыскивать свободный коммутатор, так как число коммутаторов гораздо меньше, чем число абонентов в группе. В действительности имеет место двойной поиск, но для упрощения мы ограничимся простым. Если все коммутаторы, обслуживающие группу абонентов, заняты уже начатыми ранее разговорами, искатель продолжает вращаться до тех пор, пока не заканчивается один из разговоров, после чего абонент соединяется с требуемым номером. Здесь основным является следующий вопрос: если в распоряжение группы, состоящей из a абонентов, предоставлены s коммутаторов ($s\ll a$), то какова вероятность того, что один из абонентов найдет все коммутаторы занятыми; если это произошло, то какова вероятность того, что время

ожидания освобождения какого-либо коммутатора будет не больше заданного значения τ. Пусть y — среднее число вызовов за единицу времени в группе из a абонентов. Это означает, что если N — число вызовов за длительный промежуток времени T, то отношение $\frac{N}{T}$ при бесконечно возрастающих N и T стремится к y. Пусть θ — небольшой отрезок промежутка T. Примем

$$\alpha\theta = T.$$

Тогда вероятность того, что любой вызов произойдет в промежуток времени θ, равна $\frac{1}{\alpha}$.

Найдем вероятность того, что определенные n вызовов, отобранных из N, произойдут за время θ. Эта вероятность равна

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{N-n}.$$

Вероятность P_n того, что за время θ произойдет n любых вызовов, отобранных из N, больше в C_N^n раз:

$$P_n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{N-n}.$$

Заменим $N!$ и $(N-n)!$ их приближенными значениями по формуле Стирлинга. Если N бесконечно возрастает вместе с T так, что отношение $\frac{N}{T}$ стремится к y, то отношение $\frac{N}{\alpha}$ стремится к $y\theta$, где $y\theta$ — среднее число вызовов за время θ, иначе говоря, $\bar{n}$. Заменив $\frac{N}{\alpha}$ на $y\theta = \bar{n}$, получаем предыдущую формулу в окончательном виде

$$P_n = \frac{e^{-n}}{n!} \cdot \frac{N^{N+\frac{1}{2}}}{(N-n)^{N-n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{\bar{n}} - 1\right)^{N-n}}{\left(\frac{N}{\bar{n}}\right)^N}$$

или

$$P_n = \frac{\bar{n}^n e^{-n}}{n!} \cdot \frac{(N-\bar{n})^{N-n}}{(N-n)^{N-n}} \sqrt{\frac{N}{N-n}} = \frac{\bar{n}^n e^{-n}}{n!} \left(1 + \frac{n-\bar{n}}{N-n}\right)^{N-n} \sqrt{\frac{N}{N-n}}.$$

При бесконечно возрастающем N имеем

$$P_n = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

или

$$P_n = \frac{(y\theta)^n e^{-y\theta}}{n!}.$$

Видим, что вероятности P_n подчиняются закону распределения Пуассона. Тот же закон распределения дает вероятность того, что состоится n одновременных разговоров одинаковой продолжительности θ. Действительно, эта вероятность равна вероятности того, что произойдет n вызовов за время θ.

Если продолжительность разговоров неодинакова, а именно имеется в среднем y_1 разговоров продолжительности θ_1, y_2 — продолжительности θ_2 и т. д., то n одновременных разговоров могут состоять из n_1 разговоров первого рода, n_2 второго рода и т. д, причем

$$n_1 + n_2 + \ldots = n.$$

Легко показать, что формула, представляющая вероятность P_n, останется справедливой, если положить

$$y\theta = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \ldots$$

Если взять за единицу времени среднюю продолжительность θ разговоров, то формула для вероятности P_n принимает вид

$$P_n = \frac{y^n e^{-y}}{n!}.$$

В дальнейших расчетах мы примем эту среднюю продолжительность θ за единицу времени.

Необходимо принять гипотезу о законе распределения продолжительностей разговоров. Это не нормальный закон. Действительно, на основании нормального закона получилась бы вероятность, не равная нулю для отрицательных продолжительностей разговоров. Кроме того, статистическая проверка показывает, что этот закон очень несимметричен, так как коротких разговоров бывает гораздо больше, чем длинных.

Пусть $P(t)$ — вероятность того, что разговор продолжается меньше t. Вероятность того, что разговор длится больше t, будет $1 - P(t)$. Вероятность того, что разговор, длящийся уже время t, закончится между t и $t + dt$, равна отношению числа благоприятных случаев к числу возможных, т. е.

$$\frac{P'(t)\,dt}{1 - P(t)}.$$

Логично сделать предположение, что эта вероятность не зависит от t. Тогда

$$1 - P(t) = e^{-t}.$$

Следовательно, вероятность того, что разговор, длящийся уже время t, закончится между t и dt, равна dt. Эти гипотезы о продолжительности разговоров и сделанное из них заключение используются в приводимом ниже расчете.

Пусть имеется группа, состоящая из a абонентов, располагающих s коммутаторами. Найдем вероятность того, что в момент t имеется i занятых коммутаторов. Обозначим эту вероятность через P_i. Это событие (занятость i коммутаторов в момент t) может произойти следующим образом.

Предположим, что в момент $t - dt$ имеется i занятых коммутаторов (вероятность P_i). В момент t их все еще будет i, если только не произошло вызова (вероятность $y\,dt$) или если какой-нибудь коммутатор не освободился (вероятность $i\,dt$). При нашей гипотезе это единственно возможные случаи, если пренебречь вероятностями, имеющими порядок малости выше первого: $(dt)^2$, $(dt)^3$, ... Действительно, вероятность того, что произойдет α вызовов, равна $(y\,dt)^\alpha$, а вероятность того, что освободятся β коммутаторов, равна $i(i-1)\ldots(i-\beta+1)(dt)^\beta$. Следовательно, общая вероятность того, что число занятых коммутаторов не меняется за время dt, равна

$$P_i(1 - y\,dt - i\,dt).$$

Это же событие может произойти еще двумя способами:

1. Если число коммутаторов, занятых в момент $t - dt$, равно $i - 1$ (вероятность P_{i-1}), то в момент t их будет i, если произойдет вызов за время dt (вероятность $y\,dt$). Это единственный случай, если пренебречь величинами порядка выше dt. Следовательно, общая вероятность будет

$$P_{i-1}(y\,dt).$$

2. Если число занятых коммутаторов в момент $t-dt$ равно $i+1$ (вероятность P_{i+1}), то в момент t их будет i, если один коммутатор освободится (вероятность $(i+1)\,dt$). Это также единственно возможный случай, если пренебречь величинами порядка выше dt. Следовательно, общая вероятность будет

$$P_{i+1}(i+1)\,dt.$$

Все другие варианты, при которых происходит переход от числа j коммутаторов, занятых в момент $t-dt$, к числу i коммутаторов, занятых в момент t, причем i и j отличаются больше, чем на одну единицу, приводят к вероятностям, которые имеют величины порядка более высокого, чем dt. Ограничиваясь бесконечно малыми первого порядка, можем написать

$$P_i = P_i(1 - y\,dt - i\,dt) + P_{i-1}y\,dt + P_{i+1}(i+1)\,dt$$

или

$$(y+i)P_i = yP_{i-1} + (i+1)P_{i+1}.$$

Так как число занятых коммутаторов не может быть отрицательным, то первое уравнение ($i=0$) имеет вид

$$yP_0 = P_1.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
yP_0 &= P_1,\\
(y+1)P_1 &= yP_0 + 2P_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(y+i)P_i &= yP_{i-1} + (i+1)P_{i+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(y+s-1)P_{s-1} &= yP_{s-2} + sP_s.
\end{aligned}$$

Если заменить i-е уравнение суммой первых i уравнений, то система упростится и примет вид

$$\begin{aligned}
yP_0 &= P_1,\\
yP_1 &= 2P_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
yP_i &= (i+1)P_{i+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
yP_{s-1} &= sP_s.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, можем выразить все P_i через P_0:

$$P_1 = yP_0,\quad P_2 = \frac{y^2}{2!}P_0,\quad \ldots,\quad P_i = \frac{y^i}{i!}P_0,\quad \ldots,\quad P_s = \frac{y^s}{s!}P_0.$$

Предполагаем, что у нас нет ожидающего устройства, тогда единственно возможные случаи это — занятость 0, 1, 2, ..., s коммутаторов. При этом

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_s = 1.$$

Если положить

$$\frac{1}{D} = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^s}{s!},$$

то

$$P_0 = D,$$
$$P_1 = D\frac{y}{1!},$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_i = D\frac{y^i}{i!},$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_s = D\frac{y^s}{s!}.$$

Эти формулы называются формулами Эрланга. Так как P_s — вероятность того, что абонент найдет все коммутаторы уже занятыми, то в среднем имеется yP_s напрасных вызовов.

Положим теперь, что имеется ожидающее устройство. При этом пусть P'_j — вероятность того, что накопилось j вызовов в ожидании. Вычисление, аналогичное вычислению P_i, дает, если опять пренебречь бесконечно малыми порядка выше первого:

$$yP'_0 = sP'_1, \qquad P'_1 = \frac{y}{s}P'_0,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$yP'_j = sP'_{j+1}, \qquad P'_j = \left(\frac{y}{s}\right)^j P'_0.$$
$$\cdots\cdots$$

Индекс j в действительности не может возрастать до бесконечности; его наибольшее значение равно числу a абонентов. Вероятность P'_0 того, что имеется нуль вызовов в ожидании, равна, очевидно, вероятности P_s того, что все коммутаторы заняты. Сложив вероятности для всех возможных случаев, имеем

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_s + P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_j + \ldots = 1.$$

Если ввести в это равенство найденные выше значения P_i и P'_j и воспользоваться условием $P'_0 = P_s$, то получим

$$P_0\left(1 + \frac{y}{1!} + \ldots + \frac{y^s}{s!}\right) + P_0\frac{y^s}{s!}\left[\frac{y}{s} + \ldots + \left(\frac{y}{s}\right)^j + \ldots\right] = 1.$$

Сделаем предположение, что $y < s$, т. е. что среднее число вызовов меньше числа коммутаторов. Тогда выражение в квадратных скобках во втором члене левой части представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая равна

$$\frac{y}{s-y}.$$

Если положить

$$\frac{1}{\Delta} = 1 + \frac{y}{1!} + \ldots + \frac{y^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{y^s}{s!}\cdot\frac{s}{s-y},$$

то для P_i и P'_j получим

$$P_0 = \Delta,$$
$$P_1 = \Delta \frac{y}{1!},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_s = \Delta \frac{y^s}{s!},$$
$$P'_1 = \Delta \frac{y}{s} \cdot \frac{y^s}{s!},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P'_j = \Delta \left(\frac{y}{s}\right)^j \frac{y^s}{s!},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Найдем вероятность того, что для некоторого абонента промежуток времени ожидания освобождения коммутатора больше τ. Примем гипотезу, что вызовы в ожидании обслуживаются в порядке их поступления. Абонент сможет набрать свой номер, когда j разговоров будут закончены. Вероятность того, что за время τ закончится ровно α разговоров, будет равна

$$\frac{e^{-s\tau}(s\tau)^\alpha}{\alpha!}.$$

Вероятность того, что закончилось любое число разговоров, меньшее или равное j, будет

$$e^{-s\tau} \sum_{\alpha=0}^{j} \frac{(s\tau)^\alpha}{\alpha!}.$$

Следовательно, вероятность того, что время ожидания будет больше, чем τ, представится выражением

$$e^{-s\tau} \sum_{j=0}^{\infty} P'_j \sum_{\alpha=0}^{j} \frac{(s\tau)^\alpha}{\alpha!}.$$

Подставляя выражение для P'_j в написанную формулу, получаем

$$e^{-s\tau} \frac{y^s}{s!} \Delta \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{y}{s}\right)^j \sum_{\alpha=0}^{j} \frac{(s\tau)^\alpha}{\alpha!}$$

или, подробнее,

$$e^{-s\tau} \frac{y^s}{e!} \Delta \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{s\tau}{1!} + \ldots + \frac{(s\tau)^j}{j!}\right)\left(\frac{y}{s}\right)^j$$

или, наконец,

$$e^{-s\tau} \frac{y^s}{s!} \Delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s\tau)^j}{j!} \sum_{j}^{\infty} \left(\frac{y}{s}\right)^j.$$

Так как

$$\sum_{j}^{\infty} \left(\frac{y}{s}\right)^j = \frac{s}{s-y}\left(\frac{y}{s}\right)^j,$$

то формула приводится к виду

$$\frac{s}{s-y}e^{-s\tau}\frac{y^s}{s!}\Delta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(y\tau)^j}{j!}.$$

Итак, вероятность $P(\tau)$ равна

$$P(\tau)=\frac{e^{(y-s)\tau}}{s-y}\cdot\frac{y^s}{(s-1)!}\Delta.$$

Поэтому средняя продолжительность ожидания (ее математическое ожидание) равна

$$\tau_m=-\int_0^{\infty}\tau P'(\tau)\,d\tau=\frac{y^s}{(s-1)!\,(s-y)^2}\Delta.$$

Числовой пример. Пусть имеется $s=10$ коммутаторов в распоряжении группы абонентов, делающих в среднем 2 вызова в минуту. При этом средняя продолжительность разговора равна 2 минутам.

Если принять 2 минуты за единицу времени, то мы получим в среднем $y=4$ вызова за единицу времени. Вероятность занятости i коммутаторов будет

$$P_i=\frac{y^i}{i!}\Delta=\frac{y^i}{i!}\cdot\frac{1}{1+\frac{y}{1!}+\ldots+\frac{y^{s-1}}{(s-1)!}+\frac{y^s}{s!}\cdot\frac{s}{s-y}}.$$

Умножим числитель и знаменатель этого выражения на e^{-y} и обозначим через $A(y;\ i)$ величину

$$A(y;\ i)=e^{-y}\frac{y^i}{i!}.$$

Выражение для P_i

$$P_i=\frac{A(y;\ i)}{A(y;\ 0)+A(y;\ 1)+\ldots+A(y;\ s-1)+\frac{s}{s-y}A(y;\ s)}$$

можно легко вычислить с помощью таблицы для закона распределения Пуассона. В выбранном нами примере получим

$A(4;\ 0)=0{,}0183;$ $A(4;\ 4)=0{,}1953;$ $A(4;\ 8)=0{,}0297;$
$A(4;\ 1)=0{,}0732;$ $A(4;\ 5)=0{,}1562;$ $A(4;\ 9)=0{,}0132;$
$A(4;\ 2)=0{,}1465;$ $A(4;\ 6)=0{,}1042;$ $A(4;\ 10)=0{,}0053.$
$A(4;\ 3)=0{,}1953;$ $A(4;\ 7)=0{,}0595;$

Отсюда

$$\frac{e^{-y}}{\Delta}=0{,}9994\approx 1,$$

и, следовательно,

$P_0=0{,}0183;$ $P_5=0{,}1562;$ $P_{10}=0{,}0053;$
$P_1=0{,}0732;$ $P_6=0{,}1042;$ $P_1'=0{,}0021;$
$P_2=0{,}1465;$ $P_7=0{,}0595;$ $P_2'=0{,}0008;$
$P_3=0{,}1953;$ $P_8=0{,}0297;$ $P_3'=0{,}0003;$
$P_4=0{,}1953;$ $P_9=0{,}0132;$ . . . . . .

Средняя продолжительность ожидания будет равна

$$\tau_m = \frac{4^{10}}{9!6^2}\Delta = 0{,}0015.$$

Так как мы взяли единицу времени, равную 2 минутам, то

$$\tau_m = 0{,}0015 \cdot 2 \cdot 60 = 0{,}18 \text{ сек}.$$

9.1.19. Согласование наблюденных данных с теоретическим законом распределения. Разложение в ряд Грама — Шарлье. Одним из основных применений теории вероятностей для контроля производственного процесса является оценка расхождения между двумя законами распределения. Один из них $p(x)$ мы примем за теоретический, а другой закон $q(x)$ будем исследовать. Обычно этот второй закон распределения является статистическим. Нашей задачей является выяснение вопроса о том, согласуется ли статистический закон распределения с данным теоретическим.

Закон $p(x)$ всегда соответствует уже известному характеру совершения событий. Если бы нам удалось найти степень общности между этими двумя законами, мы смогли бы сделать заключения о скрытом еще от нас характере явления, при котором возникновение событий подчиняется исследуемому закону.

Если, например, $q(x)$ представляет собой закон распределения измерений силы тока, возникающего при нагреве в водороде серии сопротивлений, и если можно удовлетворительным образом связать закон $q(x)$ с нормальным законом распределения, то от инженера, отвечающего за производство, требуется только вести производство так, чтобы рассеивание и среднее значение $\bar{x}$ контролируемой величины оставались в пределах допусков.

Действительно, сродство с нормальным законом распределения укажет ему, что величина x представляет собой случайную величину, и поэтому рассеивание величины x вызывается не систематическим дефектом установки, а лишь влиянием большого числа малых ошибок, действующих в любых возможных направлениях.

Рассмотрим общий случай. Пусть $q(x)$ — исследуемый закон, а $p(x)$ — теоретический. Положим

$$q(x) = p(x) + \alpha_1 p'(x) + \ldots + \alpha_n p^{(n)}(x). \tag{37}$$

Если коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ малы, то закон $p(x)$ хорошо представляет закон $q(x)$. Пусть $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ представляют собой соответственно характеристические функции законов $q(x)$ и $p(x)$. Положим

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = g(u).$$

Тогда $g(0) = 1$, так как коэффициент $\alpha_0 = 1$.

Разложим $g(u)$ по возрастающим степеням величины $(-ju)$:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = g(u) = 1 - a_1 ju + \ldots + (-1)^n a_n (ju)^n + \ldots.$$

Тогда

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p(x)[1 - a_1 ju + \ldots + (-1)^n a_n (ju)^n + \ldots]\,dx.$$

Интегрируя по частям общий член ряда, легко заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}(ju)^n p(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}(ju)^{n-1} p'(x)\,dx;$$

повторяя n раз интегрирование по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} (ju)^n p(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} p^{(n)}(x)\,dx,$$

откуда

$$\psi(u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} [p(x) + a_1 p'(x) + \ldots + a_n p^{(n)}(x) + \ldots]\,dx.$$

Так как, по определению,

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} q(x)\,dx,$$

видим, что $\alpha_n = a_n$. Коэффициенты разложения в формуле (37) выражены, таким образом, через коэффициенты разложения $g(u)$ — отношения двух характеристических функций — по возрастающим степеням $(-ju)$:

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = 1 - \alpha_1 ju + \ldots + (-1)^n \alpha_n (ju)^n + \ldots$$

Пусть $\overline{x^r}$ и $\overline{X^r}$ — моменты порядка r соответственно для законов распределения $q(x)$ и $p(x)$. Тогда следует сначала выбрать закон $p(x)$ таким образом, чтобы математические ожидания $\bar{x}$ и $\bar{X}$ совпадали. Если отнести оба закона к этому общему математическому ожиданию, то

$$\bar{X} = \bar{x} = 0.$$

Кроме того, нужно выбрать закон $p(x)$ таким образом, чтобы для него дисперсия совпадала с дисперсией для закона $q(x)$:

$$\overline{X^2} = \overline{x^2}.$$

Действительно, если это окажется невозможным, то сравнение $q(x)$ и $p(x)$ будет бесполезным. Считая эти условия выполненными, можем написать

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \frac{1 - \frac{1}{2}\overline{x^2}u^2 + \frac{1}{6}\overline{x^3}(ju)^3 + \ldots}{1 - \frac{1}{2}\overline{x^2}u^2 + \frac{1}{6}\overline{X^3}(ju)^3 + \ldots},$$

$$\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = 1 - j\frac{\overline{x^3} - \overline{X^3}}{6}u^3 + \frac{\overline{x^4} - \overline{X^4}}{24}u^4 + j\frac{\overline{x^5} - \overline{X^5} - 10\overline{x^2}(\overline{x^3} - \overline{X^3})}{120}u^5 + \ldots,$$

откуда получаем коэффициенты

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{6}(\overline{x^3} - \overline{X^3}),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{24}(\overline{x^4} - \overline{X^4}),$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{120}[\overline{x^5} - \overline{X^5} - 10\overline{x^2}(\overline{x^3} - \overline{X^3})],$$

. . . . . .

9.1.20. Частный случай нормального закона распределения. Очень важным является частный случай, когда теоретическим законом $p(x)$, с которым сравнивается экспериментальный закон $q(x)$, является нормальный закон распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}.$$

Совмещаем математические ожидания обоих законов распределения:

$$\bar{x} = \bar{X} = 0.$$

Берем

$$\sigma^2 = \bar{x^2}.$$

Будем иметь последовательно

$$\bar{X^3} = 0; \quad \bar{X^4} = 3\sigma^4, \quad \bar{X^5} = 0, \quad \bar{X^6} = 15\sigma^6, \ldots,$$

откуда для коэффициентов α_i получим

$$\alpha_3 = -\frac{\bar{x^3}}{6},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{24}(\bar{x^4} - 3\sigma^4),$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{120}(\bar{x^5} - 10\sigma^2\bar{x^3}),$$

. . . . . .

Положим, с другой стороны, $\sigma y = x$. Нормальный закон приобретает вид

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Вычислим последовательные производные:

$$p'(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}},$$

$$p''(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(y^2 - 1) e^{-\frac{y^2}{2}},$$

. . . . . .

$$p^{(n)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-1)^n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}},$$

. . . . . .

где $H_n(y)$ означает полином Эрмита n-го порядка (см. п. 7.8.2).

Разложение $q(x)$ принимает вид

$$q(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[1 + \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^i \frac{\beta_i}{i!} H_i\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right],$$

где

$$\beta_3 = \frac{\overline{x^3}}{\sigma^3}, \qquad \beta_5 = \frac{\overline{x^5}}{\sigma^5} - 10\frac{\overline{x^3}}{\sigma^3},$$

$$\beta_4 = \frac{\overline{x^4}}{\sigma^4} - 3, \qquad \beta_6 = \frac{\overline{x^6}}{\sigma^6} - 15\frac{\overline{x^4}}{\sigma^4} + 30 \text{ и т. д.}$$

Это выражение называется рядом Грáма — Шарлье.

Можно производить вычисления и прямым способом, пользуясь свойством ортогональности полиномов Эрмита.

Пусть

$$q(\sigma y) = p(y) + \alpha_1 p'(y) + \ldots + \alpha_i p^{(i)}(y) + \ldots$$

Мы видели, что если

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

то

$$p^{(i)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^i H_i(y) e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Умножим обе части ряда на $H_i(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до ∞. Все интегралы в правой части будут равны нулю, за исключением интеграла, имеющего сомножителем коэффициент α_i и равного $(-1)^i i!$ (п. 7.8.3). Поэтому

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} H_i\left(\frac{x}{\sigma}\right) q(x)\, dx.$$

Отсюда получаем разложение в ряд Грáма — Шарлье с прямым вычислением коэффициентов β_i:

$$\beta_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^3}{\sigma^3} - 3\frac{x}{\sigma}\right) q(x)\, dx = \frac{\overline{x^3}}{\sigma^3} - 3\frac{\overline{x}}{\sigma} = \frac{\overline{x^3}}{\sigma^3},$$

$$\beta_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^4}{\sigma^4} - 6\frac{x^2}{\sigma^2} + 3\right) q(x)\, dx = \frac{\overline{x^4}}{\sigma^4} - 3,$$

. . . . . .

Мы снова получили уже известные результаты.

Ошибки измерений и способ наименьших квадратов

9.1.21. Ошибки измерений и нормальный закон распределения. Измерения всегда сопровождаются ошибками. Различают ошибки двух основных видов: систематические и случайные. Систематические ошибки имеют определенные причины, которые искажают измерение всегда в одном направлении и часто на постоянную величину. Они возникают за счет неисправности или плохой регулировки приборов, за счет ошибок в эталонах, из-за плохого выполнения технологии и т. д. Во многих случаях можно найти причины таких ошибок и устранить их.

Случайные ошибки неопределенны, и причина их неизвестна. Свое незнание причины ошибок мы обычно маскируем, говоря, что их порождает случай. А это просто означает, что их можно приписать большому количеству причин, действующих в любом направлении и создающих каждая свою погрешность. Такие случайные ошибки можно учитывать статистическими методами.

Существует еще одна категория ошибок, о которой будет кратко сказано в п. 9.1.27; это категория отдельных промахов, происходящих по однократной вине экспериментатора, например, если он по рассеянности один раз неправильно считает показания со шкалы измерительного прибора. В этом случае мы имеем дело с анормальным результатом измерения. Существует простое правило, позволяющее исключить из таблицы результатов измерений ошибки этой категории.

Мы займемся в основном категорией случайных ошибок. Допустим, что имеется несколько в одинаковой степени надежных измерений физической величины, истинное значение которой равно X. Ошибки, соответствующие измерениям $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$, будут равны

$$x_1 = X_1 - X, \quad x_2 = X_2 - X, \ldots, \quad x_i = X_i - X, \ldots, \quad x_n = X_n - X.$$

Это чисто случайные ошибки.

Мы не знаем точного значения величины X и не можем определить ее на опыте, так как всякое измерение, сделанное для ее определения, искажается ошибкой. Обозначим через $\overline{X}$ наиболее вероятное значение величины X *).

Рассмотрим величины

$$y_1 = X_1 - \overline{X}, \ldots, \quad y_i = X_i - \overline{X}, \ldots, \quad y_n = X_n - \overline{X}.$$

Величины $y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$ называются отклонениями. Так как речь здесь идет только о случайных ошибках, то величины x и y могут быть и положительными, и отрицательными, а малые значения будут встречаться чаще, чем большие. Примем допущение, что эти величины следуют нормальному закону распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Положим

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2},$$

где h, как известно, называется мерой точности. При этом $p(x)$ примет вид

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

где $p(x)$ — относительное число ошибок, равных x.

Вычертим кривые Гаусса при двух различных значениях меры точности h. Легко заметить, что чем больше h, тем кривые острее, тем круче их склоны. Это означает, что чем больше параметр h, тем реже встречаются большие ошибки. Поэтому величину h и называют мерой точности.

---

*) Приближенные значения параметров, характеризующих распределение случайных величин, называются их оценками. Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно математическому ожиданию исследуемой случайной ве-

Вероятность того, что ошибка будет заключаться между $\pm a$, равна

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx = \Phi(ha).$$

9.1.22. Способ наименьших квадратов. Пусть произведено n измерений величины X, величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ представляют собой соответствующие ошибки. Вероятность того, что ошибка x заключена между x_i и $x_i + dx_i$, равна

$$p_i\,dx_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_i^2}\,dx_i.$$

Вероятность того, что при n измерениях допущено n ошибок, имеющих величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, поскольку речь идет о независимых событиях, равна

$$\prod_{i=1}^{n} p_i\,dx_i = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)}\,dx_1\ldots dx_n. \tag{38}$$

Максимум произведения $p_1p_2\ldots p_n$ будет соответствовать минимуму суммы

$$x_1^2+\ldots+x_i^2+\ldots+x_n^2.$$

Этот вывод известен под названием принципа наименьших квадратов. Он означает, что наиболее вероятное значение величины X, полученное в результате n равноточных измерений, обращает в минимум сумму квадратов ошибок.

Наиболее вероятное значение $\overline{X}$, которое должно обеспечить минимум суммы

$$(X_1-X)^2+\ldots+(X_n-X)^2,$$

равно

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}. \tag{39}$$

Это наиболее вероятное значение X есть среднее арифметическое из всех результатов измерений. Таким образом, оправдывается используемое для него обозначение *).

Можно без труда подвергнуть критике рассуждения, связывающие принцип наименьших квадратов с нормальным законом Гаусса. Мы не станем здесь останавливаться на этом довольно тонком вопросе и отошлем читателя к специальной литературе [1] **).

9.1.23. Линейная комбинация ошибок. Рассмотрим случайные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подчиняющиеся нормальному закону распределения. Их средние квадратические ошибки равны соответственно $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Составим

*) Среднее арифметическое значение $\overline{X}$ представляет собой несмещенную оценку математического ожидания случайной величины X.

[1]) См. „Трактат по теории вероятностей" под ред. Э. Бореля, т. 1, раздел „Ошибки и наименьшие квадраты" Р. Дельтейля, стр. 56, и др.

**) В советской литературе обоснование и сущность способа наименьших квадратов изложены в ряде работ, см., например, Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физматгиз, 1962.

комбинацию $\lambda_1 x_1$. Эта переменная будет следовать нормальному закону распределения, средняя квадратическая ошибка которого равна $\lambda_1\sigma_1$, а характеристическая функция выражается формулой

$$e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2\sigma_1^2 u^2}. \tag{40}$$

Составим линейную комбинацию

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_i x_i + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Характеристическая функция закона, которому следует случайная величина x, будет равна произведению функций, подобных (40), как это видно из формулы (20), иначе говоря,

$$e^{-\frac{u^2}{2}\left(\lambda_1^2\sigma_1^2+\ldots+\lambda_n^2\sigma_n^2\right)}.$$

Следовательно, x следует нормальному закону распределения со средней квадратической ошибкой

$$\sigma = \sqrt{\lambda_1^2\sigma_1^2 + \ldots + \lambda_i^2\sigma_i^2 + \ldots + \lambda_n^2\sigma_n^2}.$$

Если перейти теперь к мере точности, то

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_i^2}{h_i^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}. \tag{41}$$

9.1.24. Точность группы измерений. Если произведена группа n измерений X_i, то очень важно уметь определить величину, которая позволила бы охарактеризовать ожидаемую точность результата или, что то же самое, найти приближенное значение ошибки этого результата.

Итак, пусть

$$x_i = X_i - X$$

есть ошибка i-го измерения. Если сложить все ошибки, то результат деления на n даст

$$\frac{1}{n}\sum X_i = X + \frac{1}{n}\sum x_i.$$

Это уравнение с учетом формулы (39) принимает вид

$$\overline{X} = X + \frac{1}{n}\sum x_i.$$

Значит, выражения для отклонений y_i могут быть написаны в виде

$$y_1 = X_1 - \overline{X} = X_1 - X - \frac{1}{n}\sum x_i = x_1 - \frac{1}{n}\sum x_i.$$

Поэтому n соотношений для y_i запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{n-1}{n}x_1 - \frac{1}{n}x_2 - \frac{1}{n}x_3 - \ldots - \frac{1}{n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_i &= \frac{n-1}{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Итак, отклонения представляют собой линейные комбинации ошибок. Следовательно, в силу формулы (41), отклонения подчиняются нормальному закону распределения с мерой точности k, определяемой соотношением

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right],$$

откуда

$$k = h\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{43}$$

9.1.25. Наивероятнейшее значение меры точности. Если дана совокупность n измерений X_i, искаженных ошибками x_i, то наиболее вероятное значение величины h должно, в силу формулы (38), обратить в максимум величину

$$n \ln h - h^2 \sum x_i^2.$$

Поэтому наиболее вероятное значение η величины h должно обратить в нуль производную этого выражения, откуда следует

$$\eta = \sqrt{\frac{n}{2\sum x_i^2}}.$$

Таким образом, нормальный закон распределения полностью определен. Точность совокупности n измерений определяется одной из следующих трех величин.

1. Средняя арифметическая ошибка:

$$\varepsilon_m = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx = \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\eta^2 x^2}\, dx = \frac{1}{\eta\sqrt{\pi}}. \tag{44}$$

Приближенное значение величины ε_m равно $\dfrac{\sum |x_i|}{n}$.

2. Средняя квадратическая ошибка:

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \frac{1}{\eta\sqrt{2}}. \tag{45}$$

3. Срединная ошибка (вероятная ошибка, медианная ошибка). Это такая ошибка, которая с одинаковой вероятностью может быть как превзойдена, так и не достигнута. Это определение выражается равенством

$$\Phi(\eta\varepsilon_p) = 0{,}5,$$

откуда

$$\varepsilon_p = \frac{0{,}476936}{\eta} = \frac{\rho}{\eta}, \quad \text{где} \quad \rho = 0{,}476936\ldots$$

Все три величины ε_m, ε_σ, ε_p связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon_p = \rho\sqrt{2}\,\varepsilon_\sigma = 0{,}6745\,\varepsilon_\sigma, \quad \varepsilon_p = \rho\sqrt{\pi}\,\varepsilon_m = 0{,}8453\,\varepsilon_m,$$
$$\varepsilon_m = 1{,}1829\,\varepsilon_p = 0{,}7979\,\varepsilon_\sigma,$$
$$\varepsilon_\sigma = 1{,}4826\,\varepsilon_p = 1{,}2533\,\varepsilon_m.$$

Геометрический смысл этих величин очень прост: ε_p — это абсцисса прямой, параллельной оси Oy и разделяющей площадь A, заключенную между осями координат и кривой Гаусса при $x \geqslant 0$, на две равные части; ε_m — абсцисса

центра тяжести этой площади; ε_σ — радиус инерции площади A или абсцисса точки перегиба кривой Гаусса.

Величины ε_p, ε_m, ε_σ изображены на рис. 9.6. Любая из них может служить для характеристики точности группы опытов. Удобно определять ε_σ и ε_p на основании величины ε_m, которую легко вычислять. Чаще других пользуются величиной ε_p по той простой причине, что она меньше двух других *).

Величины ε_m, ε_σ, ε_p легко получить как функции отклонений y_i. На основании системы уравнений (42) и формулы (43) получим

$$\varepsilon_m = \frac{\sum |y_i|}{\sqrt{n(n-1)}}, \tag{46}$$

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n-1}}, \tag{47}$$

$$\varepsilon_p = 0{,}6745\,\varepsilon_\sigma.$$

Формулы (46) и (47) более удобны, чем формулы (44) и (45); они выражают ошибки ε как функции отклонений y_i, так как y_i — это известные из опыта величины, чего нельзя сказать об истинных ошибках x_i. Однако практически даже при малых значениях n (порядка десяти) между этими двумя группами формул большой разницы нет.

Наиболее вероятное или среднее арифметическое значение следует нормальному закону распределения с мерой точности, определяемой формулой (41), где $\lambda_i = \frac{1}{n}$. Следовательно, эта мера точности равна

$$\eta\sqrt{n};$$

она изменяется пропорционально квадратному корню из числа измерений. Казалось бы, что, увеличивая число измерений, можно до бесконечности увеличивать точность. Однако если теоретически можно получить еще одну значащую цифру, перейдя от одного единственного измерения к 100 измерениям, или от группы в 10 измерений к 1000 измерениям, то практически получение такого выигрыша весьма сомнительно. Действительно, следует опасаться, что при тысячном измерении измеряемая физическая величина будет уже не совсем та, что вначале. Другими словами, в условиях опыта могут иметь место небольшие изменения, которые воздействуют на результат неслучайным образом **). Это более чем вероятно, так как серия в 1000 измерений должна продолжаться значительное время. Поэтому не принято делать большие серии измерений и число n редко бывает больше 10.

Все сказанное хорошо согласуется с простым здравым смыслом. Лучше усовершенствовать экспериментальный метод, чем увеличивать число измерений; 10 хороших измерений полезнее, чем 1000 посредственных.

9.1.26. „Вес" наблюдения. В некоторых случаях мы бываем вынуждены пользоваться сериями наблюдений различного происхождения. Они могут быть получены разными, не одинаково умелыми экспериментаторами, или методами, имеющими различную точность, или в разное, не одинаково благоприятное время. Для учета характера этих различных источников придают больший

*) Термин „срединная ошибка" имеет тот смысл, что при большом числе опытов в среднем половина значений случайной величины X будет отклоняться от $\overline{X}$ меньше, чем на ε_p, а половина больше.

**) Так называемое „сползание центра рассеивания".

„вес" одним из них перед другими. Чтобы правильно оценить преимущество более точных наблюдений, полученный из опыта результат умножают на коэффициент, который должен быть тем больше, чем больше „вес" этого наблюдения. Естественно, что знаменатель формулы для вычисления среднего значения будет суммой всех „весов".

Пусть ω_i — „вес" наблюдения X_i. Тогда формула для среднего или наиболее вероятного значения примет вид

$$\overline{X} = \frac{\sum \omega_i X_i}{\sum \omega_i}.$$

Формулы (44) — (47) должны соответственно изменены.

Понятие „веса" фигурирует особенно часто в астрономии, где приходится пользоваться измерениями, выполненными в различных пунктах и при различных обстоятельствах. В электротехнике этим понятием пользуются мало, и мы не будем здесь на нем останавливаться.

9.1.27. Критерий ошибочного наблюдения. Предположим, что во время опытов наблюдатель совершает ошибку, обычно по рассеянности. Каким образом в таблице измерений, где фигурирует n результатов наблюдений, распознать неверный результат? Здесь можно применить следующее полезное эмпирическое правило. Нужно вычислить отклонения от среднего значения, соответствующие группе интересующих нас наблюдений. Если какое-либо из отклонений превзойдет срединную ошибку более чем в 5 раз, то соответствующее наблюдение следует отбросить. При этом срединная ошибка вычисляется без учета измерения, подвергнутого сомнению. Действительно, пусть x — соответствующая ошибка. Отождествим ее с отклонением от среднего значения. Если она в 5 раз больше срединной ошибки, то

$$\eta x \approx 2{,}327,$$

потому что

$$\eta \varepsilon_p = 0{,}4769.$$

Но

$$\Phi(2{,}327) = 0{,}999.$$

Следовательно, вероятность такой большой ошибки равна 0,001. Такой сомнительный результат следует отбросить.

9.1.28. Срединная (вероятная) ошибка функции. Пусть даны $\overline{X}$, $\overline{Y}$, ... — средние значения результатов измерений некоторых физических величин X, Y, ... и ε_x, ε_y, ... — соответствующие срединные ошибки. Срединная ошибка ε функции

$$f(X, Y, \ldots)$$

будет, очевидно, равна

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon_x \frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\varepsilon_y \frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 + \ldots}$$

9.1.29. Эмпирические формулы. Пусть z — физическая величина, зависящая от другой величины x. Изобразим в плоскости xOz точки, представляющие собой пары значений x_i, z_i, соответствующие некоторой таблице измерений. Если эти точки расположены достаточно близко одна от другой, то через них можно провести непрерывную кривую, представляющую экспериментальную функцию

$$z = f(x).$$

Часто задача состоит в том, чтобы придать функции $f(x)$ аналитическую форму. Во многих случаях для этой цели выбирают полином вида

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$$

или показательную функцию

$$Ae^{k_0+kx}.$$

Выбор этот в большинстве случаев диктуется теоретическими соображениями и тесно связан с измеряемым явлением. Мы не будем здесь рассматривать вопрос о выборе вида функции.

Пусть, например, измеряется ток насыщения z диода как функция абсолютной температуры x катода. Из теоретических соображений следует, что этот ток, отнесенный к единице поверхности катода, связан с абсолютной температурой зависимостью

$$z=Ax^2e^{-\frac{B}{x}}.$$

После того как аналитическая форма функции выбрана, остается определить наиболее подходящие значения параметров функции с помощью таблицы результатов произведенных измерений.

Разберем сначала случай, когда выбранная функция представляет собой полином. Эта задача решается очень просто элементарным методом, дающим превосходные практические результаты. Пусть n — количество измерений x_i, z_i, а m — степень полинома. Таблица измерений позволяет получить n линейных уравнений с $m+1$ неизвестными, которыми являются коэффициенты A, B, ... Предположим, что $m<n$.

В большинстве случаев число n гораздо больше, чем $m+1$, так что количество уравнений больше количества неизвестных. Предположим, что оно равно $7(m+1)$. Тогда n измерений делят на $m+1$ группу по 7 измерений в каждой. Затем 7 уравнений каждой группы складывают и получают, таким образом, $m+1$ линейных уравнений с $m+1$ неизвестными, которые можно решать обычным способом. Существенное возражение против этого простейшего метода состоит в том, что существует C_n^7 способов группирования n уравнений в $m+1$ группу по 7. Это возражение, теоретически значительное, не имеет значения на практике, так как результаты, которые можно получить при различном группировании уравнений, очень мало отличаются друг от друга.

Рассмотрим общий случай. Пусть выражение

$$z=f(x,\ A,\ B,\ C,\ \ldots)$$

представляет собой аналитическую форму выбранной эмпирической зависимости. Число m неизвестных постоянных меньше числа n сделанных измерений. Предположим, что постоянные определены. Тогда должно существовать отклонение y_i измеренной величины z_i от величины $z_i'=f(x_i, A, B, C, \ldots)$, вычисленной при найденных значениях постоянных

$$z_i-z_i'=y_i,$$

причем принцип наименьших квадратов требует, чтобы выражение

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{48}$$

было наименьшим.

Предположим, что методом эмпирического подбора или путем замеров на экспериментальной кривой $z=f(x)$ нам удалось найти более или менее удовлетворительные значения A_0, B_0, ... Мы можем воспользоваться способом наименьших квадратов для нахождения малых величин α, β, ..., на которые отличаются наивероятнейшие значения постоянных A, B, ... от их ориентировочных значений A_0, B_0, ...:

$$A=A_0+\alpha, \qquad B=B_0+\beta, \ldots$$

Если пренебречь частными производными высших порядков, то разность

$$f(x_i,\ A,\ B,\ C,\ \ldots)=z_i-y_i$$

запишется в виде

$$\left[f(x,\ A_0,\ B_0,\ \ldots)+\alpha\frac{\partial f}{\partial A_0}+\beta\frac{\partial f}{\partial B_0}+\ldots\right]_{x=x_i}=z_i-y_i. \tag{49}$$

Если обозначить

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A_0}\right)_{x=x_i}=\lambda_i, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial B_0}\right)_{x=x_i}=\mu_i, \ \ldots,$$

$$z_i-f(x_i,\ A_0,\ B_0,\ \ldots)=\varphi_i,$$

то уравнение (49) принимает вид

$$\lambda_i\alpha+\mu_i\beta+\ \ldots\ -\varphi_i+y_i=0.$$

Для выражения (48) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\alpha+\mu_i\beta+\ \ldots\ -\varphi_i)^2. \tag{50}$$

Условие минимума этой суммы можно получить, приравняв нулю частные производные выражения (50), взятые по α, β, ... При этом получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\alpha+\mu_i\beta+\ \ldots\ -\varphi_i)\lambda_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\alpha+\mu_i\beta+\ \ldots\ -\varphi_i)\mu_i=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Уравнения (51) называются нормальными. Число их равно числу неизвестных α, β, ..., которые можно из этих уравнений определить.

9.2. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ [1] *)

9.2.1. Введение понятия случайной функции на коикретном примере. Мы уже ознакомились с понятием случайной величины. Вернемся к нему для того, чтобы лучше уяснить себе, что такое случайная функция.

---

[1]) Раздел, посвященный случайным функциям, был отредактирован Андре Блан-Лапьерром. Для более подробного ознакомления читатель может обратиться к книге А. Блан-Лапьерра и Форте „Теория случайных функций. Приложения к различным явлениям флуктуации", изданной в Собрании математических трудов для физиков"под редакцией Г. Дармуа.

*) По теории случайных функций имеется ряд трудов советских авторов. Основные из них приведены в конце главы в списке литературы.

Будем исходить из классического примера игры в кости. Рассмотрим некоторую категорию испытаний C, которая представляет собой совокупность следующих испытаний. В пакет кладут кость и после встряхивания выбрасывают кость на стол. После этого отсчитывают цифру на верхней грани. Результат каждого опыта — некоторое положение кости на столе. Это положение определяет численное значение X — цифру на верхней грани. X — есть случайная величина, определенная по категории испытаний C. *Случайная величина, определенная по известной категории испытаний C, представляет собой численную переменную X, значение которой определяется результатом R каждого испытания.* Определяя вероятность по категории испытаний C, имеют в виду вероятность $F(x_0)$ того, что результат индивидуального испытания приводит к численному значению $X < x_0$. Эта функция F представляет собой функцию распределения случайной величины X по категории испытаний C.

В предыдущем примере мы поставили в соответствие с результатом R испытания некоторое число. Но можно было бы поставить в соответствие с ним математическую категорию любой природы, в частности некоторую функцию. Например, условимся ставить в соответствие каждому значению X_1 случайной величины X, рассмотренной выше, функцию x времени t, определяемую выражением $x(t) = X_1 t$. Тогда результат каждого испытания определит некоторую функцию времени в интервале $-\infty < t < +\infty$. Обобщая предыдущее определение, можно сказать, что $x(t)$ — *это случайная функция времени по категории испытаний C. Случайная функция по известной категории испытаний C — это функция известного параметра t, полностью определяемая результатом каждого испытания.*

В нашем элементарном изложении будут рассматриваться только случайные функции с вещественными значениями. Конечно, вовсе не обязательно, чтобы параметр t мог меняться от $-\infty$ до $+\infty$. Случайная функция величины t может быть определена только для некоторых значений t (например, только в интервале $a \leqslant t \leqslant b$ или только для целых значений t). С другой стороны, категории испытаний в большинстве случаев неизмеримо более сложны, чем те, которые здесь рассматривались. В частности, число возможных результатов может быть бесконечным и даже следовать из бесконечного числа осуществленных результатов $R_1, R_2, \ldots$, полученных для бесконечного количества категорий испытаний $C_1, C_2, \ldots$

Приведенный пример случайной функции имеет то преимущество, что он прост, но в то же время он слишком прост и не позволяет сделать далеко идущих выводов. Рассмотренная выше схема допускает лишь очень ограниченное вмешательство случайности, так как случайная природа функции проявляется лишь через величину X_1. В частности, знание значения x для какого-либо $t \neq 0$ ведет за собой знание x для всех значений t. Очевидно, что столь узкие рамки оставляют слишком мало возможностей для проявления случайной природы таких резко изменчивых и непостоянных явлений, как турбулентность жидкости или флуктуации электрических напряжений, происходящие за счет шумового фона.

Возьмем другой пример. Рассмотрим частицу, способную перемещаться по оси Ox и находящуюся в начале координат при $t = 0$. Предположим, что скорость этой частицы может принимать значения только $+1$ или -1 и меняется только в моменты 0, 1, 2, 3, ..., где она каждый раз с равными вероятностями может принять значение $+1$ или -1. Другими словами, в промежутке времени $n \leqslant t \leqslant n+1$ (n равно либо целому положительному числу, либо нулю) скорость представляет собой случайную переменную v_n, которая с одинаковой вероятностью может принимать зна-

чения $+1$ или -1. Кроме того, случайные переменные v_0, v_1, ..., v_n, ... независимы. Обозначим теперь через $x(t)$ абсциссу частицы в момент t. Можно составить себе представление о свойствах случайной функции $x(t)$ по рис. 9.7, где изображена частная реализация функции $x(t)$. Здесь одновременно изображены и случайные значения членов последовательности v_0, v_1, ..., v_n, ..., и реализация функции $x(t)$, полученная на основании этой последовательности. Такой способ приводит к последовательному составлению функции $x(t)$ и допускает вмешательство случайности, не ограниченное во времени. Каждая реализация $x(t)$ зависит от результатов бесконечного числа последовательных испытаний E_1, E_2, ..., E_n ... Конечно, ничто не мешает рассматривать эту бесконечную совокупность испытаний как одно суммарное испытание $\mathscr{E}$ из некоторой категории испытаний $\mathscr{C}$. Тогда результат испытания $\mathscr{E}$ будет определять частную последовательность скоростей v_n, т. е. некоторую последовательность чисел $+1$ и -1, чередующихся в известном порядке. Рассмотренная схема случайного явления представляет собой частный случай схемы, использованной при изучении явления турбулентности.

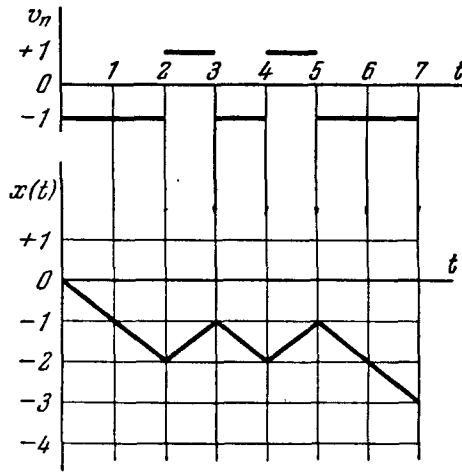


Рис. 9.7.

Рассмотрим теперь пример, взятый из электротехники. Здесь речь идет о флуктуациях, вызванных чистым дробовым эффектом в линейных усилителях. Если свести эту задачу к наиболее упрощенной схеме, то она будет выглядеть следующим образом. Дан линейный усилитель A_l; для простоты полагаем, что он не передает постоянной составляющей. Воздействуем на него постоянным током I. Следует ожидать, что на выходе ток усилителя будет равен нулю. В первом приближении это и наблюдается. Однако при более тонком исследовании можно заметить на выходе усилителя напряжение шума, более или менее беспорядочное. Если записать это напряжение, то получим некоторую кривую $x = x_l(t)$, где t обозначает время.

Проделаем тот же опыт не с одним усилителем, а с большим числом [1]) усилителей A_1, A_2 ..., A_n, находящихся в одинаковых макроскопических условиях. Получим кривые $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Они не тождественны, но исследователь легко обнаружит их сходство. Разница между ними вызывается случайным характером флуктуаций, которые неизбежно требуют статистического подхода. Предположим для простоты, что эти флуктуации вызывает только электронная природа входного тока I (иными словами, пренебрежем собственными флуктуациями усилителя, чтобы не отвлекать внимания от флуктуаций, вызванных входным током I). Влияние тока I на усилитель есть результирующая влияний отдельных электронов, образующих

[1]) Мы говорим о большом числе усилителей, потому что эксперимент не может быть проведен с бесконечно большим числом приборов. Но мысленно мы полагаем, что число это достаточно велико, чтобы дать достаточно точное представление о том, что произошло бы при рассмотрении „всех возможных макроскопически подобных усилителей". Как раз на такой бесконечной совокупности (генеральной совокупности) и основана статистика.

ток I. Каждый электрон создает импульс, который вызывает некоторое возмущение в усилителе, и электрические явления, которые в нем происходят, подобны в совокупности движению маятника, возбуждаемого последовательными толчками. Не уточняя пока, скажем только, что усилитель подвергается ряду одинаковых очень коротких и беспорядочных ударов. Каждый из них соответствует импульсу, создаваемому одним электронным зарядом e; среднее число импульсов в секунду будет равно $\rho_0 = \frac{I}{e}$. Действие тока I будет совершенно определено, если будет известна бесконечная последовательность моментов времени

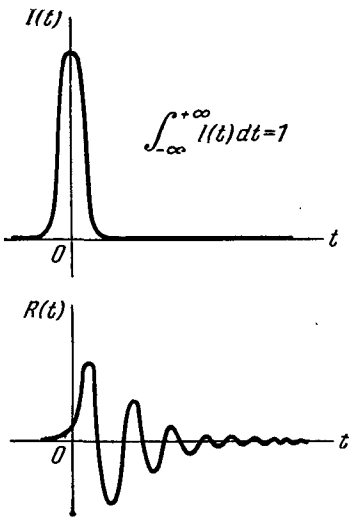


Рис. 9.8.

$$\ldots, t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots,$$

в которые действуют отдельные электроны. Мы можем охарактеризовать линейный усилитель реакцией $R(t)$, которая соответствует очень короткому единичному импульсу (т. е. очень быстрому прохождению единичного заряда), полученному в момент времени $t = 0$. Реакция $R(t)$ называется ударным ответом усилителя (рис. 9.8). Очевидно, что ответ $R(t)$ тождественно равен нулю при $t < 0$, так как следствие не может предшествовать причине. Ответ на импульс, полученный в момент t_j, очевидно, равен $eR(t - t_j)$ и в конечном счете $x(t)$ представляется как наложение в момент t ответов усилителя на все удары, предшествовавшие моменту t. Можно, впрочем, распространить суммирование на все удары как предшествующие, так и следующие за t, так как последующие удары все равно исключаются сами собой как следствие условия $R(t - t_j) = 0$ при $t < t_j$. Поэтому

$$x(t) = \sum_{t_j < t} eR(t - t_j) = \sum_{t_j > -\infty}^{t_j < +\infty} eR(t - t_j). \tag{52}$$

В этом примере случайность входит через свойства последовательностей

$$\ldots, t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots$$

Существует столько же возможных случайных реализаций функции $x(t)$, сколько имеется таких последовательностей.

Так же, как и ранее, можно считать, что влияние случайности проявляется в бесконечной последовательности элементарных испытаний, в каждой из которых случайным образом определяется момент t_{j+1}, если все моменты $t_j, t_{j-1}, t_{j-2}, \ldots$ известны [1]). Можно также назвать испытанием совокупность всех значений частного распределения t_j от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

В рассмотренных до сих пор примерах мы прежде всего выясняли схему случайной природы явления, порождающей случайную функцию. Категория испытаний могла при этом быть более или менее сложной, но она была вполне определенной. При различных применениях теории вероятностей

[1]) Эта точка зрения устанавливает четкое различие между прошедшими опытами, результаты которых известны в момент t, и будущими опытами, сохраняющими еще все случайные возможности.

довольно часто употребляется понятие случайной функции при менее ясных на первый взгляд обстоятельствах. Возьмем пример: известно, что под влиянием перемещений масс на поверхности Земли, о которых еще нет достаточных сведений, полюс Земли претерпевает небольшие перемещения. Значения координат x_1 и y_1 полюса, выраженные в большинстве случаев в секундах дуги, определяются по отношению к системе прямоугольных осей, за начало которых принимается среднее положение полюса, а ось x_1 проходит через Гринвичский меридиан. Рассмотрим, например, координату x_1. Ее изменения во времени за последние десятилетия представлены кривой, ход которой дан на рис. 9.9. Ход этой кривой достаточно незакономерен, чтобы навести на мысль о случайном характере явления, однако на первый

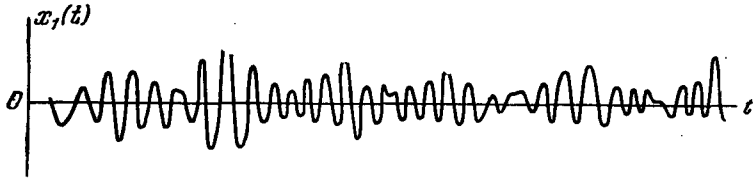


Рис. 9.9.

взгляд всякий вопрос о вероятности из этой задачи исключен. Значения $x_1(t)$ нам становятся известны лишь по мере того, как производятся с течением времени наблюдения. Конечно, мы не знаем будущего функции $x_1(t)$, но эта функция единственна, так как во Вселенной имеется всего одна Земля. Однако если имеется некоторая теория о природе масс, случайные перемещения которых порождают изменения в положении полюса, или если нами приняты достаточно точные гипотезы об этих массах и их перемещениях, то нам ничто не мешает мысленно рассматривать бесконечное количество систем, макроскопически тождественных Земле и отличающихся друг от друга только случайным различием поверхностных масс, перемещения которых мы подчиним некоторым случайным схемам. При этом мы должны будем считать, что наблюдаемая функция $x_1(t)$ представляет собой лишь возможную реализацию случайной функции $x(t)$, определенной по категории испытаний, имеющей, так сказать, только мысленное существование. Такой способ рассуждений законен лишь в том случае, если у нас есть причины считать, что мы сможем, исходя из статистических свойств случайной функции $x(t)$, определенной по воображаемой категории испытаний, вывести результаты, справедливые для дальнейшего хода частной реализации функции $x(t)$ и, в частности, для $x_1(t)$. Тогда мы сможем увидеть, приводят ли принятые гипотезы к результатам, которые подтверждаются опытом, и в благоприятных случаях сможем предвидеть в известной мере будущее функции $x_1(t)$. По аналогии с уже рассмотренными примерами можно сказать, что скорость ветра или температура воздуха — случайные функции времени в некоторой определенной точке Земного шара.

9.2.2. Функции распределения. Изучение случайной величины показало, что не всегда нужно полностью знать схему случайности и что если известна функция распределения случайной величины, то с вероятностной точки зрения поведение этой переменной, взятой изолированно, также будет определено. Что можно сделать при аналогии применительно к случайной функции $x(t)$?

Прежде всего рассмотрим фиксированное значение t_1. При этом $x(t_1)$ есть случайная величина и естественно будет ввести ее функцию распределения. Обозначим эту функцию $F(x_1; t_1)$, имея в виду, что F представляет

собой вероятность осуществления события $x(t_1) < x_1$. Очевидно, что момент t_1 не имеет никаких преимуществ перед другими, и, следовательно, мы приходим к постановке того же вопроса для всех моментов t, иными словами, пытаемся найти функцию распределения $F(x; t)$ для всех моментов t. Зная $F(x; t)$, мы будем знать в каждый момент времени распределение наблюдаемых значений. Этого, однако, недостаточно, чтобы получить полное представление о поведении функции $x(t)$ и, в частности, чтобы определить ее развитие во времени, что ясно видно на следующем примере. Пусть φ — случайная величина, которая с равной вероятностью может принимать все значения в интервале $[0, 2\pi]$. Каждому значению φ соответствует функция $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, где ω — известная постоянная. Таким образом, определена случайная функция по категории испытаний, соответствующей всем возможным значениям φ. Можно без труда получить функцию $F(x; t)$. Она не зависит от t и отвечает плотности вероятности

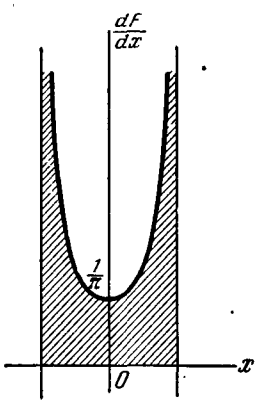


Рис. 9.10.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \tag{53}$$

представленной на рис. 9.10 [1]).

Введем теперь еще одну случайную функцию $y(t)$, определенную по той же категории испытаний, что и раньше, и рассмотрим для любого значения φ следующую функцию, постоянную при всех t:

$$y(t) = \sin\varphi.$$

Функция распределения $F(y; t)$, соответствующая $y(t)$, тождественна функции $F(x; t)$, соответствующей $x(t)$, однако обе случайные функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют очень мало сходства. В частности, каждая реализация $x(t)$ представляет собой синусоиду, тогда как каждая реализация $y(t)$ — прямая, параллельная оси времен. На рис. 9.11 приведены кривые, представляющие функции $x(t)$ и $y(t)$ для некоторого значения φ ($Oa = \sin\varphi$).

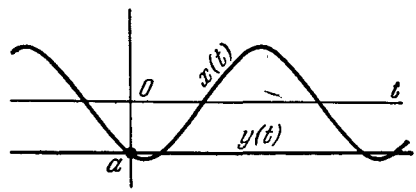


Рис. 9.11.

Этот простой пример показывает, что недостаточно знать $F(x; t)$, чтобы охарактеризовать цепь значений, которые последовательно принимает x с течением времени. Другими словами, знание функции $F(x, t)$ не дает связи между различными случайными значениями, которые принимает $x(t)$ в различные моменты времени. Мы вынуждены поставить вопрос: если t_1 и t_2 — два любых частных значения, то каковы должны быть статистические свойства совокупности двух случайных величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$? (Речь идет

[1]) Вероятность ΔF того, что значение $x(t_1)$ заключается между x_1 и $x_1 + \Delta x_1$, равна вероятности того, что значение φ заключается между $\arcsin x_1 - \omega t$ и $\arcsin(x_1 + \Delta x) - \omega t$. Вследствие того, что случайная величина φ равномерно распределена между 0 и 2π, вероятность ΔF равна

$$\frac{1}{\pi}[\arcsin(x_1 + \Delta x_1) - \arcsin x_1].$$

Отсюда находим $\frac{\Delta F}{\Delta x_1}$, а в пределе $\frac{dF}{dx}$ при $x = x_1$.

в большинстве случаев о случайных величинах, связанных между собой вследствие наличия некоторой непрерывности явлений во времени.) Мы узнаем статистические свойства двух связанных между собой величин $x(t_1)$ и $x(t_2)$, если нам станет известна функция распределения $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$, соответствующая совокупности этих двух случайных величин.

Напоминаем, что функция $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ представляет собой вероятность одновременного осуществления неравенств:

$$x(t_1) < x_1 \quad \text{и} \quad x(t_2) < x_2.$$

В общем случае мы получим представление о статистических свойствах случайной функции $x(t)$, если сможем ответить на следующий вопрос. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ есть n значений t (n — любое, но конечное число), выбранных любым способом. Какова функция распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$, соответствующая совокупности связанных между собой случайных переменных $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$? Вследствие изложенного мы заключаем, что случайная функция определена, если известна функция распределения F, соответствующая наиболее общему случаю. Известную функцию распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ можно заменить соответствующей характеристической функцией, определенной по совокупности связанных между собой случайных величин $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)$. Напоминаем, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть n случайных величин, определенных по одной и той же категории испытаний, то характеристическая функция, отвечающая этим n переменным, является математическим ожиданием величины $e^{j[u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n]}$, которое представляет собой функцию n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. В рассматриваемом случае характеристическая функция, соответствующая функции распределения F, будет равна $\overline{e^{j[u_1x(t_1)+\ldots+u_nx(t_n)]}}$ для заданных значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Это функция n переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которая зависит от n параметров — n моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Следовательно, характеристическая функция, соответствующая функции распределения F, — это функция Φ от $2n$ переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n; t_1, t_2, \ldots, t_n$. Она определяется формулой

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \overline{e^{j[u_1x(t_1)+\ldots+u_nx(t_n)]}}. \qquad (54)$$

Прежде чем покончить с вопросом о функции распределения, сделаем еще три замечания.

1. Можно попытаться приближенно описать поведение функции $x(t)$, пользуясь ограниченным числом особенно типичных значений. Для этого следует ввести моменты или средние значения [1]). Это обстоятельство не является новым при изучении случайных величин, но новым оказывается весьма большое количество рассматриваемых моментов, что объясняется введением переменного параметра t. Следует ввести:

а) момент первого порядка $\overline{x(t)}$, представляющий собой функцию одной переменной t;

б) наиболее общий момент второго порядка — математическое ожидание произведения $x(t_1)x(t_2)$, представляющее собой функцию двух переменных t_1 и t_2. В частном случае, когда $t_1 = t_2 = t$, мы снова получаем начальный момент второго порядка $\overline{x^2(t)}$, зависящий только от одной переменной t;

[1]) Термин „среднее значение" здесь употребляется в смысле математического ожидания. Когда речь пойдет о средних по отношению к времени или к любому другому параметру, это будет специально оговорено.

в) наиболее общий момент порядка n — математическое ожидание произведения $x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_n)$, представляющее собой функцию n переменных. Он включает все частные случаи, которые можно получить, связывая между собой значения t, в частности момент $\overline{x^n(t)}$, который получится при условии, что все значения t одинаковы.

Совершенно очевидно, что все эти моменты можно получить, зная $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Еще удобнее получить их, если известно разложение в ряд в окрестности начала координат для характеристической функции

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n; t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Известно (п. 9.1.8), что знание характеристической функции позволяет получить моменты любого порядка. Мы применяли это, в частности, для случая совокупности двух связанных между собой случайных величин (формулы (19)).

2. Чтобы уточнить связь явлений во времени, естественно поставить вопрос, в какой мере знание значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$, полученных для $x(t)$ в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_k$, может определить значения $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$, отвечающие моментам $t'_1, t'_2, \ldots, t'_l$. Иными словами, речь идет о знании условной вероятности для l величин $x(t'_1), x(t'_2), \ldots, x(t'_l)$, в предположении, что значения $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k)$ известны. Эта условная вероятность описывается функцией распределения, которую мы обозначим $F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_l/x_1, x_2, \ldots, x_k; t'_1, t'_2, \ldots, t'_l/t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Она представляет собой вероятность одновременного выполнения неравенств

$$x(t'_1) < x'_1; \quad x(t'_2) < x'_2; \quad \ldots; \quad x(t'_l) < x'_l$$

в предположении, что справедливы k соотношений

$$x(t_1) = x_1; \quad x(t_2) = x_2; \quad \ldots; \quad x(t_k) = x_k.$$

Функции условного распределения, которые только что были введены, получаются из априорных функций распределения (т. е. определенных при отсутствии каких бы то ни было дополнительных условий) $F(x_1, x_2, \ldots, x_k; t_1, t_2, \ldots, t_k)$ путем применения теоремы умножения вероятностей. Пример этого приводится ниже. В настоящий момент ограничимся показом на конкретном случае важности изучения условных вероятностей.

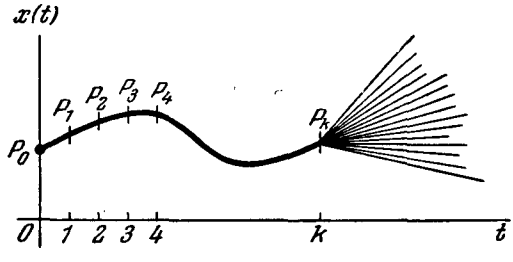


Рис. 9.12.

Допустим, что мы наблюдаем явление $x(t)$, имеющее случайный характер, определенное по известной категории $\mathscr{C}$ испытаний $\mathscr{E}$. Рассмотрим определенный опыт, приводящий к явлению x, и отметим значения x в моменты 0, 1, 2, 3, ..., k. Отложим на графике (рис. 9.12) соответствующие точки (t, x). Пусть это будут $P_0, P_1, \ldots, P_k$. Если явление x развивается достаточно медленно, то мы можем соединить точки непрерывной кривой, которая представит с хорошим приближением ход изменения $x(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant k$. Положим теперь, что наша информация не превышает момента t_k. Значения функции $x(t)$ для моментов, будущих по отношению к моменту t_k, являются случайными. Если бы мы все же захотели

произвести экстраполяцию, то, предполагая некоторую непрерывность явления, могли бы в течение некоторого, не слишком большого отрезка времени продолжить кривую как ее касательную в точке P_k. Однако чем больше мы станем продвигаться в будущее, тем меньше будет обоснована такая экстраполяция. Строго говоря, начиная с момента t_k, совокупность возможных реализаций неограниченно расширяется, и становится возможным бесконечное количество кривых, как это показано на рис. 9.12. Некоторые из этих возможных кривых имеют больше шансов быть наблюденными, чем другие. Поэтому представляет интерес изучение случайных величин $x(t'_1)$, $x(t'_2)$, ..., $x(t'_l)$, когда $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(k)$ имеют значения, полученные в предыдущем опыте (значения t'_1, t'_2, ..., t'_l все больше k).

3. Приведенные до сих пор примеры относились к случайным функциям времени. Это особое значение, придаваемое параметру t, дает возможность сделать изложение более наглядным, но следует иметь в виду, что t не обязательно должно представлять собой время и может быть любым параметром. Можно, например, сказать, что в некоторый момент скорость турбулентной жидкости является случайной функцией координат.

Проблема сходимости

9.2.3. Введение. Прежде чем покончить с вопросом об общих понятиях, мы должны сказать несколько слов о новом аспекте, который получает столь существенное в анализе понятие сходимости при замене определенных величин случайными величинами. В анализе принято говорить, что величина $f(t)$ — функция параметра t — стремится к f_0 при t, стремящемся к t_0, если по любому сколь угодно малому наперед заданному числу $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\eta > 0$, что выполнение неравенства $|t - t_0| < \eta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f - f_0| < \varepsilon$.

Рассмотрим теперь случайную переменную $x(t)$, зависящую от параметра t (иначе говоря, случайную функцию), определенную по категории испытаний $\mathscr{E}$. Когда можно сказать, что при t, стремящемся к t_0, $x(t)$ стремится к некоторому пределу? Очевидно, что предел этот не может быть ни чем иным, как только случайной величиной, которую мы назовем x_0 (в частном случае случайная величина x_0 может оказаться определенным числом). Говоря, что случайная переменная $x(t)$ стремится к случайной величине x_0, мы имеем в виду, что $x(t)$ все меньше и меньше отличается от x_0. Но если в анализе это имеет тот однозначный смысл, что $|f - f_0|$ становится все меньше и меньше, то гораздо труднее определить, что именно имеется в виду, когда говорят, что одна случайная величина мало отличается от другой. Как мы увидим ниже, это выражение можно истолковывать различными способами, откуда следуют и различные определения понятия сходимости. Сделаем несколько замечаний.

9.2.4. Сходимость в смысле Бериулли. Говорят, что случайная функция $x(t)$ стремится к x_0 в смысле Бернулли, если функция распределения $F(x; t)$, относящаяся к $x(t)$, стремится (равномерно в любом конечном интервале) к функции распределения случайной величины x_0. Такое определение сходимости крайне неопределенно. Действительно, вернемся к обоим примерам случайных функций, которые были рассмотрены в п. 9.2.2. Обозначим через $F(x; t)$ и $F(y; t)$ соответствующие функции распределения. Мы уже знаем, что они тождественны и не зависят от времени. Поэтому $x(t)$ сходится к $y(t_0)$ в смысле Бернулли, если t стремится к t_0. Что же происходит в действительности? Для большей наглядности положим $t_0 = \frac{\pi}{\omega}$. Тогда

при каждом испытании имеем

$$x(t)=\sin(\omega t+\varphi);\quad x(t_0)=-\sin\varphi;\quad y(t_0)=\sin\varphi.$$

Итак, если t стремится к t_0, то $x(t)$ в том смысле, как это понимается в анализе, стремится к $-y(t_0)$. Разность $x(t)-y(t_0)$ сходится при каждом испытании к $-2\sin\varphi$. Имеется, следовательно, нулевая вероятность того, что эта разность стремится к нулю. Это указывает на очень неопределенный характер сходимости в смысле Бернулли.

9.2.5. Сходимость по вероятности. Говорят, что случайная функция $x(t)$ сходится по вероятности к случайной величине x_0 при $t\to t_0$, если при любом $\varepsilon>0$ вероятность того, что $|x(t)-x_0|>\varepsilon$, стремится к нулю при $t\to t_0$. Это условие записывают в виде

$$\lim_{t\to t_0} P\{|x(t)-x_0|>\varepsilon\}=0. \qquad (55)$$

Такое определение сходимости имеет более ограничительный характер, чем предыдущее. В частности, из него следует, что если $t\to t_0$, то вероятность того, что отклонение $|x(t)-x_0|$ больше любой конечной величины, становится все меньше и меньше — обстоятельство, не имевшее места в предыдущем случае. Можно, кроме того, показать, что сходимость по вероятности влечет за собой сходимость в смысле Бернулли, а обратное не имеет места.

Приведем пример, иллюстрирующий это определение и позволяющий представить себе его границы. Рассмотрим еще раз случайную величину φ, способную с равной вероятностью принимать все значения от 0 до 2π, и свяжем с ней случайную функцию, определенную при $t>0$ выражением

$$x(t)=|\sin(\omega t+\varphi)|^t, \qquad (56)$$

где ω — определенная постоянная. Для некоторого фиксированного частного значения φ соответствующая кривая имеет вид, представленный на рис. 9.13.

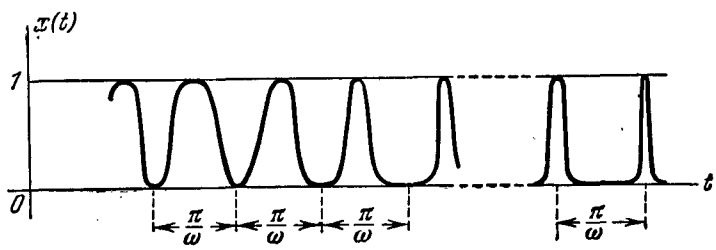


Рис. 9.13.

При $t\to+\infty$ $x(t)$ стремится к очень малым значениям, за исключением все более узких интервалов, содержащих точки, для которых

$$\omega t+\varphi-k\pi-\frac{\pi}{2}\approx 0 \qquad (k\text{ — целые числа}).$$

Если задать t, то, не входя в подробности полного расчета, мы увидим, что получить $|x(t)|<\varepsilon$ можно, только если φ находится внутри одной из окрестностей таких двух значений φ, находящихся между 0 и 2π, что

$$\varphi\approx k\pi+\frac{\pi}{2}-\omega t.$$

По виду кривых можно заключить, что эти окрестности тем уже, чем больше t, и могут стать сколь угодно малыми при условии, что t будет

достаточно велико. Иначе говоря,

$$\lim_{t\to\infty} P\{|x(t)|<\varepsilon\}=0. \tag{57}$$

Итак, случайная величина $x(t)$ сходится по вероятности при $t\to\infty$ к определенному числу 0. Рассмотренный пример представляет интерес, так как показывает, что этот род сходимости вовсе не требует, чтобы при каждом испытании имелась сходимость в том смысле, как это понимается в анализе. В частности, из рис. 9.13 видно, что при любом φ имеется бесконечное множество значений t, для которых $x=1$. Поэтому ни при каком испытании мы не имеем права сказать, что $x(t)$ стремится к нулю в том смысле, как это понимается в анализе.

9.2.6. Сходимость в среднем квадратическом (сходимость с. к.). Говорят, что $x(t)$ сходится к x_0 в среднем квадратическом при t, стремящемся к t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} \overline{[x(t)-x_0]^2}=0. \tag{58}$$

Сходимость в среднем квадратическом влечет за собой сходимость по вероятности. Это следует из неравенства Бьенэмэ [1]), согласно которому

$$P\{|x(t)-x_0|>\varepsilon\}<\frac{\overline{[x(t)-x_0]^2}}{\varepsilon^2}\ *). \tag{59}$$

Значит, если задано любое, сколь угодно малое ε, то из соотношений (58) и (59) следует

$$\lim_{t\to t_0} P\{|x(t)-x_0|>\varepsilon\}=0,$$

а это определяет сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, так же как и сходимость по вероятности, не предполагает для каждой реализации сходимости в том смысле, как ее понимают в анализе.

Можно пояснить этот пункт, заметив, что в примере, представленном на рис. 9.13, $x(t)$ при t, стремящемся к бесконечности, сходится к 0 по вероятности и то же $x(t)$ сходится к нулю в среднем квадратическом. Мы, однако, уже выяснили, что вероятность сходимости функции $x(t)$ к нулю в том смысле, как это понимается в анализе, равна нулю.

---

[1]) Пусть X — случайная величина, а $\overline{X^2}=\sigma^2$ — ее дисперсия. Покажем, что можно легко найти величину, ограничивающую сверху вероятность того, что $|X|>a$, исходя из σ^2. Действительно, обозначим через $dF(x)$ вероятность того, что $x<X<x+dx$. Тогда, если a — любая положительная постоянная, то

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF(x)=\int_{-a}^{+a} x^2\,dF(x)+\int_{-\infty}^{-a} x^2\,dF(x)+\int_{+a}^{+\infty} x^2\,dF(x).$$

Все интегралы положительны; кроме того, в двух последних $x^2>a^2$. Поэтому

$$\sigma^2>a^2\left[\int_{-\infty}^{-a} dF(x)+\int_{+a}^{+\infty} dF(x)\right]=a^2P\{|X|>a\}.$$

Отсюда получаем неравенство Бьенэмэ

$$P\{|X|>a\}<\frac{\sigma^2}{a^2}.$$

*) Неравенство (59) было впервые получено в 1846 г. известным русским математиком П. Л. Чебышевым и известно в советской научной литературе, а также и в ряде зарубежных стран как неравенство Чебышева (лемма Чебышева).

Сходимость $x(t)$ в среднем квадратическом следует из общего положения, согласно которому для случайной величины, модуль которой остается ограниченным, сходимость к нулю по вероятности влечет за собой сходимость к нулю в среднем квадратическом.

Действительно, предположим, что $|x(t)|<A$, где A — граница $x(t)$, не зависящая от t. Вернемся теперь к соотношению, которое помогло нам установить неравенство Бьенэмэ (см. сноски на предыдущей странице). Если a — любая положительная постоянная, то можно написать

$$\overline{x^2(t)}=\int_{-a}^{a}x^2(t)\,dF(x;\,t)+\int_{-\infty}^{-a}x^2(t)\,dF(x;\,t)+\int_{a}^{\infty}x^2(t)\,dF(x;\,t).$$

Найдем для интегралов, стоящих в правой части, верхние границы:

$$\int_{-a}^{a}x^2(t)\,dF(x;\,t)\leqslant a^2,$$

$$\int_{-\infty}^{-a}x^2(t)\,dF(x;\,t)+\int_{a}^{\infty}x^2(t)\,dF(x;\,t)\leqslant A^2\cdot P\{|x|>a\}.$$

Отсюда

$$\overline{x^2(t)}\leqslant a^2+A^2\cdot P\{|x(t)|>a\}.$$

Из этого неравенства следует, что $\overline{x^2(t)}$ стремится к нулю при t, стремящемся к бесконечности. Действительно, выберем сколь угодно малое положительное число ε. Требуется доказать, что можно найти такое T, что при $t>T$ будет $\overline{x^2(t)}\leqslant\varepsilon$. Для этого возьмем $a^2=\frac{\varepsilon}{2}$; теперь достаточно найти такое T, чтобы при $t>T$ было

$$A^2\cdot P\left\{|x(t)|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}<\frac{\varepsilon}{2},$$

что возможно, так как из определения сходимости по вероятности имеем

$$\lim_{t\to\infty}P\{|x(t)|>\eta\}=0$$

при любом наперед заданном η.

Замечание. Доказательство существенно основано на том, что функция $x(t)$ ограничена при любом t и при любом испытании. Если это условие не выполнено, то может иметь место сходимость по вероятности без сходимости в среднем квадратическом. Подтвердим это примером. Будем снова исходить из функции $x(t)$, которую мы рассматривали ранее (рис. 9.13). Если t стремится к бесконечности, $x(t)$ стремится к нулю по вероятности, т. е. равенство $\lim P\{|x(t)|>\varepsilon\}=0$ справедливо для всех ε. Совершенно очевидно, что достаточно соблюдения этого условия для малых значений ε; тогда оно будет иметь место и для больших, так как если $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, то

$$P\{|x(t)|>\varepsilon_2\}<P\{|x(t)|>\varepsilon_1\}.$$

Отсюда следует, что мы можем произвольно изменять $x(t)$ всюду, где x больше некоторой величины η и при этом ничего не изменится в сходимости x к нулю по вероятности. Возьмем, например, $\eta=0{,}1$ и заменим $x(t)$ на функцию $y(t)$, определенную следующим образом:

а) $y(t)=x(t)$ при $x(t)<\eta$;

б) $y(t)=\varphi(t)\,x(t)$ при $x(t)\geqslant\eta$,

где $\varphi(t)$ — определенная (не случайная) функция t. Очевидно, что если $\varphi(t)$ достаточно быстро возрастает при возрастании t, то можно не допустить, чтобы момент второго порядка $\overline{x^2(t)}$ стремился к нулю, и даже заставить его неограниченно возрастать при больших значениях t. При этих условиях функция $y(t)$ будет сходиться к нулю по вероятности, но не в среднем квадратическом.

Понятие сходимости в среднем квадратическом представляет интерес по двум существенным причинам:

1) в большинстве случаев момент второго порядка легко вычисляется;

2) в большем числе практических приложений момент второго порядка имеет простой физический смысл.

Уточним этот важный пункт.

Рассмотрим электрический ток флуктуаций $i(t)$, проходящий по катушке самоиндукции L. Положим, что этот ток связан с некоторым параметром, например с положением α указателя потенциометра. Сказать, что в определенный момент t_1 при α, стремящемся к α_0, этот ток флуктуаций стремится к нулю в среднем квадратическом, значит сказать, что, взяв значение α достаточно близким к α_0, можно среднюю энергию $\frac{1}{2} L \overline{i^2(t)}$, накопленную в катушке самоиндукции в момент t_1, считать сколь угодно малой.

9.2.7. Почти достоверная сходимость. Те типы сходимости, о которых шла речь выше, могут иметь место и без наличия сходимости в том смысле, как она понимается в анализе. Попробуем, однако, стать на точку зрения физика, изучающего электрические флуктуации определенной цепи. Допустим, что он регистрирует некоторое напряжение флуктуаций и наблюдает за ним достаточно долго. В конечном счете он получит единственную кривую, зарегистрированную прибором, за которым велось наблюдение. Эта кривая соответствует результату одного испытания. Сходимость, интересующая исследователя, будет, прежде всего, сходимостью в том смысле, как ее понимают в анализе, установленной по результатам этого испытания. Если потребуется произвести упрощение, заменив исследуемую величину ее пределом, то необходимо, чтобы этот предел имел определенный смысл для полученной исследователем кривой, а не для совокупности возможных кривых, которых он никогда не видел. Это соображение и приводит к понятию почти достоверной сходимости.

Вернемся к случайной функции $x(t)$ и случайной величине x_0, определенным по одной и той же категории испытаний. По результатам одного вполне определенного испытания может иметь или не иметь места сходимость $x(t)$ к x_0 в том смысле, как она понимается в анализе. Следовательно, такая сходимость — случайное событие, которое имеет или не имеет места для каждого испытания. Можно сказать, что существует некоторая вероятность такой сходимости.

Примем следующее определение: функция $x(t)$ сходится почти достоверно к x_0 при t, стремящемся к t_0, если вероятность сходимости $x(t)$ к x_0 равна единице. При этом условии, если пренебречь совокупностью реализаций, имеющих общую нулевую вероятность, можно считать, что при каждом испытании x_0 является пределом $x(t)$ в том смысле, как это понимается в анализе. Однако быстрота сходимости $x(t)$ к x_0 может зависеть от рассматриваемого испытания и, следовательно, сохраняет случайный характер. Кроме того, можно показать, что почти достоверная сходимость влечет за собой сходимость по вероятности.

После рассмотренных уточнений понятия сходимости можно обобщить понятия анализа, основанные на понятии предела, в частности понятия

производных и интегралов. Рассмотрим, например, производную. Мы не будем заниматься сходимостью в смысле Бернулли, о которой уже известно, что она очень неопределенна. С каждым из трех других видов сходимости связано соответствующее определение производной:

1. Производная по вероятности. Случайная функция $x(t)$ имеет в качестве производной по вероятности в точке t_0 некоторую случайную величину $y(t_0)$, если случайная величина $\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$ сходится по вероятности к $y(t_0)$ при t, стремящемся к t_0.

2. Производная в среднем квадратическом. Случайная функция $x(t)$ имеет в качестве производной в среднем квадратическом в точке t_0 случайную величину $y(t_0)$, если

$$\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\left[\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-y(t_0)\right]^2}=0. \tag{60}$$

3. Почти достоверная производная. Случайная величина $y(t_0)$ представляет собой почти достоверную производную случайной функции $x(t)$ при $t=t_0$, если с вероятностью, равной единице, справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=y(t_0), \tag{61}$$

причем предел здесь имеется в виду в том смысле, как это понимается в анализе.

Аналогично, рассмотрение сходимости $x(t_0+\Delta t)$ к $x(t_0)$ при $\Delta t\to 0$ позволяет определить непрерывность по вероятности, непрерывность в среднем квадратическом и почти достоверную непрерывность в точке $t=t_0$.

В дальнейшем мы будем еще много раз возвращаться к понятию сходимости одной случайной величины к другой. В частности, мы будем иметь дело со случайной непрерывностью или со случайной производной. Однако во многих приложениях теории вероятностей часто имеют место одновременно все виды сходимости. Приводимые ниже теоремы относятся, строго говоря, только к сходимости в среднем квадратическом, однако при достаточно общих условиях, которые мы здесь не будем уточнять, но которые практически выполняются в большинстве приложений, они будут устанавливать и почти достоверную сходимость. Поэтому, когда речь пойдет, например, о производной случайной функции, это, строго говоря, будет означать производную в среднем квадратическом, но практически это можно понимать также как почти достоверную производную и, следовательно, производную случайной функции почти достоверно можно отождествить с производной, которую можно вычислить по результатам „одного“ определенного испытания.

Стационарные случайные функции. Изучение постоянных режимов

9.2.8. Введение. Рассмотрим особый класс случайных функций — стационарные случайные функции. Случайная функция $x(t)$ называется стационарной, если все ее статистические свойства не изменяются при любом выборе начала отсчета времени. Точнее, будем называть в этом случае $x(t)$ стационарной случайной функцией в строгом смысле, в отличие от более широкого определения характера стационарности, которое будет дано ниже. Стационарные случайные функции нужны для изучения флуктуаций при по-

стоянных режимах. С точки зрения математики, стационарный характер функции влечет за собой следующие ее особенности.

1. Функция распределения $F(x;\ t)$ не зависит от t; функция распределения $F(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$ зависит только от разности $t_1 - t_2$. В общем случае по отношению ко всем переменным имеет место тождественное равенство:

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k;\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k) \equiv$$
$$\equiv F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k;\ t_1+h,\ t_2+h,\ \ldots,\ t_k+h). \quad (62)$$

2. Такие же особенности встречаются при изучении моментов. Момент первого порядка $\overline{x(t)}$, т. е. математическое ожидание функции, представляет собой постоянную m, не зависящую от t. В дальнейшем будем предполагать, что $m = 0$; очевидно, что это предположение не нарушает общности. Момент второго порядка $\overline{x(t_1)\,x(t_2)}$ — математическое ожидание произведения $x(t_1)\,x(t_2)$ — есть функция только от разности $t_1 - t_2 = \tau$. Эта функция будет играть важную роль в дальнейшем. Мы назовем ее корреляционной функцией $\rho(\tau)$ стационарной случайной функции $x(t)$:

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)}. \quad (63)$$

По поводу определения понятия математического ожидания следует для случая стационарных случайных функций сделать одно существенное замечание. Для этой цели рассмотрим математическое ожидание $\overline{x(t)}$. Будем считать для простоты, что оно тождественно равно нулю. Предположим, что $x(t)$ представляет собой флуктуирующее электрическое напряжение, и поставим вопрос, каким образом экспериментатор может определить его математическое ожидание. По определению, $\overline{x(t_1)}$ есть математическое ожидание случайной величины $x(t_1)$. Его экспериментальное определение сводится к наблюдению в момент t_1 большого числа макроскопически тождественных приборов, которые дадут показания $x_1(t_1),\ x_2(t_1),\ \ldots$, и к нахождению среднего значения этих показаний. На практике такой способ очень сложен и неудобен, так как он требует одновременно большого числа приборов.

Если заменить такое одновременное наблюдение большого числа приборов наблюдением в течение длительного времени напряжения $x(t)$, записанного одним прибором, то это приведет к замене определения математического ожидания $x(t_1)$ в момент t_1 средним значением по времени, взятым за большой промежуток времени T для одного определенного испытания. Это временно́е среднее значение назовем $\mu(T)$:

$$\mu(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt.$$

При довольно общих условиях, которые сводятся к требованию, чтобы корреляционная функция $\rho(\tau)$ достаточно быстро стремилась к нулю при $\tau \to \infty$, и которые, в частности, выполняются, если существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)|\,d\tau$, что имеет место в большинстве приложений, можно показать, что случайная величина $\mu(T)$ сходится в среднем квадратическом и почти достоверно к $\overline{x(t)}$, если $T \to \infty$.

Аналогичные результаты можно получить и для других моментов, например для $\overline{x(t)\,x(t-\tau)}$. Поэтому в дальнейшем мы не будем проводить различия между математическим ожиданием и пределом временно́го среднего

значения при $T \to \infty$. В частности, моменты первого и второго порядков можно будет определять с помощью соотношений

$$\overline{m} = \overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt = 0 \tag{64}$$

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,x(t-\tau)\,dt.$$

9.2.9. Изучение моментов второго порядка. Определение. Флуктуации представляют собой весьма сложное явление, даже в какой-то мере неуловимое, поскольку оно все время изменяется непредвиденным образом. Поэтому экспериментатор должен ограничиться несколькими характерными величинами, которые могут дать качественное представление об изучаемом явлении. В случае стационарных явлений часто довольствуются моментами первого и второго порядков, т. е. математическим ожиданием $\overline{x(t)} = m$ (предполагается, что оно равно нулю) и корреляционной функцией $\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)}$, физический смысл которой мы вскоре выясним. Это, очевидно, наиболее простые статистические характеристики. Кроме того, корреляционные функции удобны по следующей причине. Очень часто флуктуирующая величина $X(t)$ бывает суммой или наложением флуктуирующих величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, независимых друг от друга; так, например, флуктуирующее напряжение $v(t)$ между двумя точками A и B электрической схемы часто оказывается просто наложением флуктуирующих напряжений $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., создаваемых различными сопротивлениями R_1, R_2, ... Понятно, что эти напряжения не зависят друг от друга. Корреляционную функцию $\overline{X(t)\,X(t-\tau)}$ от суммы $X = \sum_i x_i$ можно получить простым суммированием корреляционных функций, относящихся к каждой составляющей. Это видно из следующего преобразования:

$$\overline{X(t)\,X(t-\tau)} = \sum_{i,j} \overline{x_i(t)\,x_j(t-\tau)} = \sum_{i=j} \overline{x_i(t)\,x_j(t-\tau)} + \sum_{i\neq j} \overline{x_i(t)\,x_j(t-\tau)}. \tag{65}$$

Вследствие независимости функций x_i имеем $\sum_{i\neq j} \overline{x_i(t)\,x_j(t-\tau)} = 0$ (предполагается, что $\overline{x_i} = \overline{x_j} = 0$), откуда получаем требуемое соотношение

$$\overline{X(t)\,X(t-\tau)} = \sum_i \overline{x_i(t)\,x_i(t-\tau)}. \tag{66}$$

Легко заметить, что это свойство не распространяется на средние значения типа

$$\psi(\tau, \tau', \tau'') = \overline{x(t)\,x(t-\tau)\,x(t-\tau')\,x(t-\tau'')}. \tag{67}$$

Мы привели сейчас доводы в пользу применения моментов второго порядка по соображениям простоты, однако имеются и гораздо более глубокие соображения. Моменты второго порядка всегда имеют физический смысл. Это становится очевидным, если учесть, например, что средняя мгновенная мощность, рассеянная флуктуирующим током $i(t)$ на сопротивлении R, равна $R\overline{i^2(t)}$, что средняя энергия, накопленная в момент t в катушке с индуктивностью L, по которой течет ток $i(t)$, равна $\frac{1}{2} L\overline{i^2}$, что средняя мощность, переносимая в пустоте плоской электромагнитной волной через

поверхность, перпендикулярную к направлению распространения, пропорциональна моменту 2-го порядка $\overline{E^2}$ напряжения электрического поля.

Выясним теперь, с учетом сказанного, физический смысл корреляционной функции. Рассмотрим световое излучение при постоянном режиме. Мы представим его с помощью некоторой стационарной случайной функции $x(t)$. Рассмотрим интерференцию двух световых излучений. Это означает, что мы каким-то способом получим сумму

$$X(t) = x(t) + x(t-\tau),$$

где τ — оптическое запаздывание, и изучим ее при различных значениях τ. Вычислим среднюю энергию в точке, где оптическое запаздывание имеет значение τ. В этой точке имеем

$$\overline{X^2} = \overline{x^2(t)} + \overline{x^2(t-\tau)} + 2\,\overline{x(t)\,x(t-\tau)},$$

или

$$\overline{X^2} = 2\,[\rho(0) + \rho(\tau)]. \tag{68}$$

Мы видим, что средняя энергия $\overline{X^2}$ представляет собой сумму двух членов. Первый из них $2\rho(0) = \overline{2x^2}$ — это сумма собственных энергий, вызванных каждым из излучений $x(t)$ и $x(t-\tau)$. Второй член $2\rho(\tau)$ — это член, характеризующий взаимодействие двух световых излучений. Этот переменный член $2\rho(\tau)$ регулирует изменение средней энергии $\overline{X^2}$ в зависимости от оптического запаздывания. Следовательно, корреляционная функция дает непосредственно форму интерференционных полос.

Имеется еще одно замечание по поводу изучения моментов второго порядка. Рассмотрим пример из электротехники. Предположим, что ко входу линейного усилителя приложено случайное напряжение $x(t)$. Вследствие этого в различных каскадах усилителя возникнут случайные напряжения $y_1(t)$, $y_2(t)$, ...

Мы покажем, что моменты первого и второго порядков функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, ... можно вывести из соответствующих моментов функции $x(t)$. Следовательно, можно рассмотреть моменты первых двух порядков в любой линейной цепи приборов, переходя от одного к другому. При таком рассмотрении никогда не придется вводить моменты порядка выше второго. Получается, таким образом, особое исследование, и можно сказать, что изучение моментов второго порядка является в значительной мере изучением передачи энергии в линейных системах.

Учитывая описанный выше характер свойств, связанных с моментами второго порядка, видим, что целесообразно рассматривать случайные функции, у которых стационарность относится только к моментам первого и второго порядков. Они называются стационарными случайными функциями второго порядка.

Случайная функция является стационарной случайной функцией второго порядка, если она обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание $\overline{x(t)}$ не зависит от t (всегда можно предположить, что $\overline{x(t)} = 0$).

2. Математическое ожидание произведения $\overline{x(t_1)\,x(t_2)}$ зависит только от разности $t_1 - t_2 = \tau$. Это предположение обеспечивает существование корреляционной функции, определяемой равенством

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)}.$$

Стационарность второго порядка отличается от стационарности в строгом смысле слова. Действительно, можно привести примеры случайной

функции второго порядка, у которой моменты высших порядков не остаются неизменными при изменении начала отсчета времени. Следовательно, такие функции не стационарны в строгом смысле слова.

Можно легко убедиться, что так же обстоит дело и с функцией

$$x(t) = X\cos\omega t + Y\sin\omega t,$$

где ω — определенная постоянная, а X и Y две независимые случайные величины с одинаковым законом распределения и удовлетворяющие условию: $\overline{X} = \overline{Y} = 0$. Сразу же можем написать

$$\overline{x(t_1)\,x(t_2)} = \overline{X^2}\cos\omega(t_1 - t_2) = \overline{X^2}\cos\omega\tau.$$

В то же время легко заметить, что $\overline{X^4(t)}$ существенно зависит от t.

Общие свойства стационарных случайных функций второго порядка

9.2.10. Корреляционные функции. Рассмотрим сначала несколько простейших свойств корреляционных функций.

1. При $\tau = 0$ корреляционная функция равна дисперсии:

$$\rho(0) = \overline{x^2}. \tag{69}$$

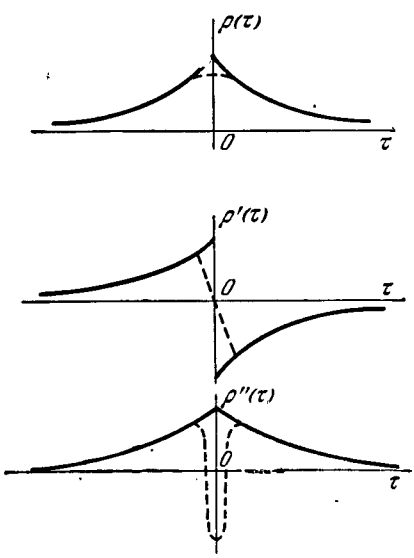


Рис. 9.14.

2. Корреляционная функция представляет собой четную функцию от τ. Действительно,

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)} = \overline{x(t-\tau)\,x(t)}.$$

Вследствие стационарности можно заменить t на $t+\tau$. Тогда имеем

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \rho(-\tau). \tag{70}$$

Если корреляционная функция дифференцируема, то ее нечетные производные представляют собой нечетные функции, например, $\rho'(\tau) = -\rho'(-\tau)$, а четные производные представляют собой четные функции. Характер соответствующих кривых представлен для частного случая на рис. 9.14. Эти кривые соответствуют функции $\rho(\tau) = e^{-|\tau|}$. Мы увидим в дальнейшем, что это действительно корреляционная функция. Если нечетные производные существуют при $\tau = 0$, иными словами, если имеются производная справа и производная слева, равные между собой, то их значение может быть равным только нулю. В нашем примере $\rho'(0)$ не существует. Но если бы функция $\rho(\tau)$ не имела в начале координат угловой точки, а шла бы так, как это изображено пунктиром, то производная при $\tau = 0$, т. е. $\rho'(0)$, существовала бы, но была бы обязательно равна нулю.

3. Корреляционная функция удовлетворяет важному соотношению

$$|\rho(\tau)| \leqslant \rho(0) = \overline{x^2}. \tag{71}$$

Это соотношение вытекает из классического неравенства, называемого

неравенством Буняковского—Шварца*). Пусть даны две случайные величины X и Y, независимые или зависимые. Кроме того, дано вещественное положительное или отрицательное число λ. Тогда справедливо очевидное неравенство $\overline{(\lambda X + Y)^2} \geqslant 0$, откуда

$$\lambda^2 \overline{X^2} + 2\lambda \overline{XY} + \overline{Y^2} \geqslant 0.$$

Это должно иметь место при любом λ, следовательно, квадратное уравнение $\overline{X^2}\lambda^2 + 2\overline{XY}\lambda + \overline{Y^2} = 0$ не должно иметь различных вещественных корней. Поэтому

$$|\overline{XY}|^2 \leqslant \overline{X^2} \cdot \overline{Y^2}. \tag{72}$$

Это и есть неравенство Буняковского—Шварца для рассматриваемого случая. Применим его к двум случайным величинам $x(t)$ и $x(t-\tau)$, которые являются значениями случайной функции $x(t)$ в моменты t и $t-\tau$. Имеем

$$|\overline{x(t)\,x(t-\tau)}|^2 \leqslant \overline{x^2(t)} \cdot \overline{x^2(t-\tau)}.$$

Взяв квадратный корень, получаем требуемое неравенство (71):

$$|\rho(\tau)| \leqslant \rho(0).$$

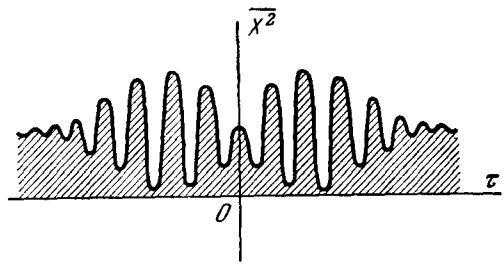


Рис. 9.15.

Согласно соотношению (71), модуль корреляционной функции достигает наибольшего значения при $\tau = 0$. Если рассматривать корреляционную функцию применительно к явлению интерференции, то неравенство (71) означает, что наибольшая интенсивность, если речь идет о системе интерференции с блестящей средней полосой (или наименьшая интенсивность, если речь идет о системе с темной средней полосой), всегда бывает в средней полосе. В частности, таких полос, какие изображены на рис. 9.15, наблюдать нельзя.

9.2.11. Непрерывность. Дифференцируемость. Выясним, при каких условиях функция $x(t)$ будет непрерывна по t в среднем квадратическом. Непрерывность в среднем квадратическом существует, если $x(t+\Delta t)$ сходится к $x(t)$ в среднем квадратическом при Δt, стремящемся к нулю, иными словами, если справедливо равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{\{x(t+\Delta t) - x(t)\}^2} = 0. \tag{73}$$

Необходимым и достаточным условием непрерывности случайной функции $x(t)$ в среднем квадратическом, является непрерывность корреляционной функции в начале координат. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполняется. При этом можно показать, что корреляционная функция будет равномерно непрерывна при $-\infty < \tau < +\infty$.

Совершенно очевидно, что локальные свойства $x(t)$ связаны с поведением $\rho(\tau)$ при малых значениях τ. Мы только что видели, что непрерывность $x(t)$ в среднем квадратическом зависит от непрерывности $\rho(\tau)$ в начале координат. Исходя из этого, можно теперь сформулировать следующую

*) Неравенство Буняковского—Шварца имеет вид

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

теорему: Для того чтобы стационарная случайная функция второго порядка $x(t)$ имела n-ю производную в среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы при $\tau = 0$ существовали все производные корреляционной функции $\rho(\tau)$ до $2n$-го порядка включительно.

Если обратиться к рис. 9.14, то ясно, что корреляционная функция, изображенная сплошной линией, соответствует случайной функции, не имеющей производной в среднем квадратическом. Действительно, производная $\rho'(0)$ не определена. Напротив, корреляционная функция, которая вблизи точки $\tau = 0$ идет по пунктирной кривой, соответствует случайной функции, имеющей производную в среднем квадратическом. Предположим, например, что производные $\frac{d\rho}{d\tau}, \frac{d^2\rho}{d\tau^2}, \ldots, \frac{d^{2n}\rho}{d\tau^{2n}}$ существуют при $\tau = 0$ (тогда можно показать, что они существуют при любом τ). Из этого следует, что случайные производные $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}$ существуют. Для простоты записи обозначим их через $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$. Напоминаем, что они определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \text{с. к.} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\ x^{(2)}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \text{с. к.} \frac{x^{(1)}(t+\Delta t) - x^{(1)}(t)}{\Delta t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \text{с. к.} \frac{x^{(n-1)}(t+\Delta t) - x^{(n-1)}(t)}{\Delta t}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Прежде чем идти дальше, необходимо указать на одно свойство сходимости в среднем квадратическом.

Если две случайные величины $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$, зависящие от параметра α, сходятся в среднем квадратическом соответственно к X_0 и Y_0 при α, стремящемся к α_0, то $\overline{X(\alpha)\,Y(\alpha)}$ стремится к $\overline{X_0 Y_0}$ [1]).

Если в частном случае X не изменяется вместе с α, то

$$\lim \overline{XY(\alpha)} = \overline{XY_0}.$$

Применим этот результат к случайным величинам

$$x(t-\tau) \quad \text{и} \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Имеем

$$\overline{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot x(t-\tau)} = \frac{1}{\Delta t}[\rho(\tau+\Delta t) - \rho(\tau)]. \quad (75)$$

---

[1]) Действительно, положим

$$x(\alpha) = X(\alpha) - X_0; \quad y(\alpha) = Y(\alpha) - Y_0$$

Имеем

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \overline{x^2(\alpha)} = 0; \quad \lim_{\alpha \to \alpha_0} \overline{y^2(\alpha)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\overline{X(\alpha)\,Y(\alpha)} = \overline{[X_0 + x(\alpha)]\,[Y_0 + y(\alpha)]} = \overline{X_0 Y_0} + \overline{x(\alpha)\,Y_0} + \overline{y(\alpha)\,X_0} + \overline{x(\alpha)\,y(\alpha)}.$$

Из неравенства Шварца следует, что

$$\overline{|x(\alpha)\,Y_0|} \leqslant \sqrt{\overline{x^2(\alpha)}\,\overline{Y_0^2}}; \quad \overline{|y(\alpha)\,X_0|} \leqslant \sqrt{\overline{y^2(\alpha)}\,\overline{X_0^2}}; \quad \overline{|x(\alpha)\,y(\alpha)|} \leqslant \sqrt{\overline{y^2(\alpha)}\,\overline{x^2(\alpha)}},$$

откуда

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \overline{X(\alpha)\,Y(\alpha)} = \overline{X_0 Y_0}.$$

Устремим Δt к нулю: $x(t-\tau)$ не изменяется, а величина $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ стремится в среднем квадратическом к $x^{(1)}(t)$. Следовательно, левая часть равенства (75) стремится к $\overline{x^{(1)}(t)\,x(t-\tau)}$; взяв предел правой части, получаем

$$\overline{x^{(1)}(t)\,x(t-\tau)}=\frac{d\rho}{d\tau}. \tag{76}$$

Таким же образом можно найти

$$\overline{x(t)\,x^{(1)}(t-\tau)}=-\frac{d\rho}{d\tau}. \tag{77}$$

Мы свели в табл. I выражения типа (77). Они выражают то, что можно назвать „смешанными корреляционными связями" между $x(t)$ и ее производными. В верхней строке и в левом столбце этой таблицы помещены величины, служащие сомножителями:

$$x(t),\quad x^{(1)}(t),\quad x^{(2)}(t),\ \ldots,$$
$$x(t-\tau),\quad x^{(1)}(t-\tau),\quad x^{(2)}(t-\tau),\ \ldots$$

Из табл. I можно определить значения математического ожидания произведения двух величин, помещенных в заголовках соответствующих строки и

Таблица I

	$x(t)$	$x^{(1)}(t)$	$x^{(2)}(t)$	$x^{(3)}(t)$	$x^{(4)}(t)$
$x(t-\tau)$	$\rho(\tau)$	$\frac{d\rho}{d\tau}$	$\frac{d^2\rho}{d\tau^2}$	$\frac{d^3\rho}{d\tau^3}$	$\frac{d^4\rho}{d\tau^4}$
$x^{(1)}(t-\tau)$	$-\frac{d\rho}{d\tau}$	$-\frac{d^2\rho}{d\tau^2}$	$-\frac{d^3\rho}{d\tau^3}$	$-\frac{d^4\rho}{d\tau^4}$	$-\frac{d^5\rho}{d\tau^5}$
$x^{(2)}(t-\tau)$	$\frac{d^2\rho}{d\tau^2}$	$\frac{d^3\rho}{d\tau^3}$	$\frac{d^4\rho}{d\tau^4}$	$\frac{d^5\rho}{d\tau^5}$	$\frac{d^6\rho}{d\tau^6}$
$x^{(3)}(t-\tau)$	$-\frac{d^3\rho}{d\tau^3}$	$-\frac{d^4\rho}{d\tau^4}$	$-\frac{d^5\rho}{d\tau^5}$	$-\frac{d^6\rho}{d\tau^6}$	$-\frac{d^7\rho}{d\tau^7}$
$x^{(4)}(t-\tau)$	$\frac{d^4\rho}{d\tau^4}$	$\frac{d^5\rho}{d\tau^5}$	$\frac{d^6\rho}{d\tau^6}$	$\frac{d^7\rho}{d\tau^7}$	$\frac{d^8\rho}{d\tau^8}$

столбца. Если приравнять $\tau=0$, то, принимая во внимание, что производные нечетного порядка равны нулю при $\tau=0$, получим результаты, приведенные в табл. II.

Полезно напомнить, что значения, принимаемые в определенный момент случайной функцией и ее производной в среднем квадратическом, не коррелируют:

$$\overline{x(t)\,x'(t)}=0. \tag{78}$$

Мы приводим здесь снова замечание, которое было уже сделано, когда речь шла о различных видах сходимости последовательностей случайных величин. Производные, которые мы сейчас рассматривали, — это производные

Таблица II

	$x(t)$	$x^{(1)}(t)$	$x^{(2)}(t)$	$x^{(3)}(t)$	$x^{(4)}(t)$
$x(t)$	$\rho(0)$	0	$\left.\frac{d^2\rho}{d\tau^2}\right\|_{\tau=0}$	0	$\left.\frac{d^4\rho}{d\tau^4}\right\|_{\tau=0}$
$x^{(1)}(t)$	0	$-\left.\frac{d^2\rho}{d\tau^2}\right\|_{\tau=0}$	0	$-\left.\frac{d^4\rho}{d\tau^4}\right\|_{\tau=0}$	0
$x^{(2)}(t)$	$\left.\frac{d^2\rho}{d\tau^2}\right\|_{\tau=0}$	0	$\left.\frac{d^4\rho}{d\tau^4}\right\|_{\tau=0}$	0	$\left.\frac{d^6\rho}{d\tau^6}\right\|_{\tau=0}$
$x^{(3)}(t)$	0	$-\left.\frac{d^4\rho}{d\tau^4}\right\|_{\tau=0}$	0	$-\left.\frac{d^6\rho}{d\tau^6}\right\|_{\tau=0}$	0
$x^{(4)}(t)$	$\left.\frac{d^4\rho}{d\tau^4}\right\|_{\tau=0}$	0	$\left.\frac{d^6\rho}{d\tau^6}\right\|_{\tau=0}$	0	$\left.\frac{d^8\rho}{d\tau^8}\right\|_{\tau=0}$

в среднем квадратическом. Но если случайные функции ведут себя достаточно правильно, то эти производные являются в то же время и почти достоверными производными. Поэтому с вероятностью, равной единице, их можно отождествить с производными в том смысле, как они понимаются в анализе, которые экспериментатор может вычислить при каждом отдельном испытании.

9.2.12. Энергетический спектр. Рассмотрим вначале, каковы исходные положения при физическом подходе к вопросу об энергетических спектрах. Наиболее наглядны в данном случае оптические явления, при которых частота колебаний непосредственно доступна восприятию наших органов чувств, поскольку она отождествляется с цветом. Чтобы получить понятие о спектральном распределении энергии, достаточно представить себе прохождение светового излучения через цветной экран или, лучше, разложение светового луча с помощью призмы. Этот опыт непосредственно приводит нас к понятию спектрального распределения средней энергии. Можно выделить полосу спектра, заключенную, например, между частотами ν_1 и ν_2, и измерить термопарой мощность W, соответствующую этому диапазону частот. Можно сделать то же самое с другой полосой частот ν_1', ν_2', не имеющей общей части с ν_1, ν_2 (одна, например, в красной части спектра, другая — в синей); ей соответствует мощность W'. Если наложить друг на друга излучения, относящиеся к обеим полосам частот, и снова измерить среднюю мощность, то получим мощность $W + W'$. Таким образом, средние мощности, относящиеся к разным частотам, складываются, или, иначе, средняя энергия взаимодействия между отдельными частотами отсутствует.

Эти чисто экспериментальные заключения приводят к тому, что оказывается возможным приписать некоторую среднюю энергию каждому интервалу частот. Естественно ввести функцию $\mathfrak{F}(\nu)$, которую назовем функцией спектрального распределения энергии, со следующими свойствами:

а) $\mathfrak{F}(\nu)$ равна средней энергии (или средней мощности), соответствующей интервалу частот $[0, \nu]$;

б) $\mathfrak{F}(0)=0$, и можно положить, что $\mathfrak{F}(\nu)=0$ при $\nu<0$;

в) $\mathfrak{F}(\nu)$ может только возрастать вместе с ν, так как любой полосе частот соответствует энергия либо положительная, либо нулевая;

г) $\mathfrak{F}(\infty)=\overline{x^2}$.

Функция $\mathfrak{F}(\nu)$ вводилась различными способами. В чисто математических исследованиях, таких, как работы Бохнера и Хинчина, строго доказано существование функции $\mathfrak{F}(\nu)$, имеющей перечисленные свойства, но доказательства эти абстрактны и не имеют наглядного физического смысла. С другой стороны, имеются работы, в которых существование функции $\mathfrak{F}(\nu)$ обосновано путем соображений, очень наглядных с точки зрения физика, но недостаточно строгих математически. Авторы этих работ предполагают, что случайная функция $x(t)$ разложима в ряд Фурье, или по крайней мере представляют функцию $x(t)$ в виде ряда Фурье на очень большом интервале $[-T; T]$.

Такое введение ряда Фурье в явление, которое, вообще говоря, не является периодическим, довольно произвольно и приводит к рассуждениям, спорным с математической точки зрения. Способ, который мы предлагаем, представляется нам способным примирить стремление к математической строгости с желанием сохранить физический смысл изучаемого явления.

Сейчас мы покажем, каким образом можно точно определить функцию $\mathfrak{F}(\nu)$ по корреляционной функции.

Переведем для этого на язык математики представления, очевидные с точки зрения физики. Что бы мы сделали прежде всего, если бы захотели произвести в лаборатории энергетический анализ тока флуктуации $x(t)$? Мы бы его „профильтровали“ через избирательный усилитель, пропускающий только заранее выбранную полосу частот, энергетическое содержание которой нам нужно измерить. Усилитель преобразовал бы $x(t)$ в $y(t)$, и энергия на выходе фильтра была бы равна $\overline{y^2}$. Основное свойство фильтров с точки зрения математики состоит в том, что они являются стационарными линейными системами, характер работы которых остается неизменным с течением времени.

Введем ответ $R(t)$ фильтра на единичный импульс, приходящий в момент $t=0$. Известно, что функцию на выходе $y(t)$ можно получить по сигналу $x(t)$ с помощью уравнения

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\,R(t-\theta)\,d\theta=\mathfrak{R}[x(t)]. \tag{79}$$

Напомним, что собой представляет преобразование $\mathfrak{R}$, с помощью которого линейный фильтр переводит случайную функцию $x(t)$ в случайную функцию $y(t)$. Конечно, в реальном фильтре, т. е. в фильтре, который можно экспериментально осуществить в лаборатории, функция $R(t)$ не произвольна. В частности, функция $R(t)$ должна быть тождественно равна нулю при $t<0$, так как следствие не может опережать причину (п. 9.2.1). Кроме того, свойства электрических цепей требуют, чтобы функция $R(t)$ при $t>0$ была равна линейной комбинации экспонент. Очевидно, что при этом преобразование $\mathfrak{R}[x(t)]$ представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Здесь мы обобщим понятие фильтра: пренебрежем перечисленными условиями, налагаемыми на $R(t)$, и постараемся выяснить математический смысл преобразования (79). В частности, не будем требовать, чтобы функция $R(t)$ была равна нулю при $t<0$. Мы лишь наложим на нее условия, имеющие целью обеспечить существование несобственного интеграла с бесконечными пределами, входящего в выражение (79),

а именно предположим, что функция $R(t)$ абсолютно интегрируема в бесконечных пределах. При этом интеграл, входящий в выражение (79), сходится с вероятностью, равной единице.

Так же, как в теории линейных усилителей, удобно использовать преобразование Фурье для функции $R(t)$:

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\nu t} R(t)\, dt, \tag{80}$$

где $G(\nu)$ — комплексный сомножитель, называемый частотной характеристикой стационарной линейной системы. Через $g(\nu)$ мы обозначим его модуль, а через $\varphi(\nu)$ — его аргумент. Предположение об абсолютной интегрируемости функции R требует, чтобы функция $g(\nu)$ была гладкой, в частности, нельзя пользоваться кривой усиления, изображенной на рис. 9.16, *а*, но можно

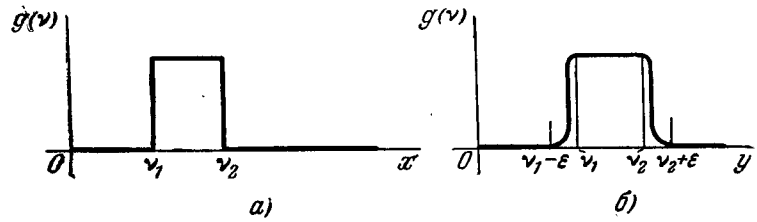


Рис. 9.16.

пользоваться сколь угодно близкими к ней кривыми усиления типа кривой, изображенной на рис. 9.16, *б*. Функция $G(\nu)$ в случае фильтра, представленного функцией $g(\nu)$ на рис. 9.16, *б*, тождественно равна нулю вне интервала $\nu_1 - \varepsilon$, $\nu_2 + \varepsilon$, где ε сколь угодно мало.

Впрочем, более широкое толкование, на подробностях которого мы не будем останавливаться, позволяет рассматривать математические фильтры гораздо более общего типа, в частности с функцией $g(\nu)$, представленной на рис. 9.16, *а*.

Физический смысл функции $g(\nu)$ ясно виден на примере преобразования синусоидальной функции

$$\Re[\sin 2\pi\nu t] = g(\nu)\sin[2\pi\nu t + \varphi(\nu)]. \tag{81}$$

Можно заметить, что при синусоидальном сигнале его эффективная величина при прохождении через фильтр умножается на $g(\nu)$. Для частоты ν передаваемая энергия равна приходящей, умноженной на коэффициент энергетической передачи, а именно на $g^2(\nu)$. Это замечание проливает свет на весь механизм избирательности: меняя $g(\nu)$, можно отдавать предпочтение одним частотам и заглушать другие.

После сделанных замечаний мы сможем ввести функцию спектрального распределения энергии $\mathfrak{F}(\nu)$. Для простоты будем предполагать, что корреляционная функция $\rho(\tau)$ имеет в качестве коэффициента преобразования Фурье $A(\nu)$ — непрерывную функцию от ν, абсолютно интегрируемую [1]).

[1]) Эти предположения делаются здесь лишь для простоты. Они несущественны для возможности определения функции спектрального распределения $\mathfrak{F}(\nu)$. Кроме того, можно сказать, что с точки зрения практики эти ограничения несущественны. В частности, они законны, если корреляционная функция $\rho(\tau)$ и две ее первые производные существуют и являются абсолютно интегрируемыми. Пользуясь языком

Так как $\rho(\tau)$ функция четная, то преобразование Фурье приведется к виду

$$\rho(\tau) = \int_0^\infty A(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu. \tag{82}$$

Вычислим среднюю энергию на выходе фильтра. Возводя в квадрат обе части выражения (79) и определяя их средние значения, получим

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 &= M\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) R(t-\theta)\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta') R(t-\theta')\, d\theta'\right], \\ \bar{y}^2 &= M\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)\, x(\theta') R(t-\theta) R(t-\theta')\, d\theta\, d\theta'\right], \\ \bar{y}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M[x(\theta)\, x(\theta')] R(t-\theta) R(t-\theta')\, d\theta\, d\theta', \end{aligned} \tag{83}$$

но

$$M[x(\theta)\, x(\theta')] = \rho(\theta-\theta') = \int_0^\infty A(\nu) \cos 2\pi\nu(\theta-\theta')\, d\nu, \tag{84}$$

откуда

$$\bar{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\infty A(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu\right] R(u) R(u-\tau)\, du\, d\tau, \tag{85}$$

$$\bar{y}^2 = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty A(\nu) R(u) e^{2\pi j\nu u} R(u-\tau) e^{-2\pi j\nu(u-\tau)}\, du\, d\tau\, d\nu\right].$$

Так как функции R и A абсолютно интегрируемы, то можно переменить порядок интегрирования, и тогда мы получим следующую окончательную формулу:

$$\bar{y}^2 = \int_0^\infty A(\nu)\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(u) e^{2\pi j\nu u}\, du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(u-\tau) e^{-2\pi j\nu(u-\tau)}\, d(u-\tau)\right] d\nu.$$

Отсюда, вспоминая определение для функции $G(\nu)$ — формулу (80) — и учитывая, что квадрат ее модуля $g^2(\nu)$ равен произведению функции $G(\nu)$ на сопряженную с ней комплексную величину, стоящую в первых квадратных скобках, получим

$$\bar{y}^2 = \int_0^\infty A(\nu)\, g^2(\nu)\, d\nu. \tag{86}$$

Соотношение (86) является фундаментальным, так как показывает, что коэффициент $A(\nu)$ обязательно положителен или равен нулю. Действительно,

---

оптика, можно сказать, что изучение непрерывных спектров возвращает нас в рамки этих предположений. Но спектр, содержащий линии в математическом смысле слова т. е. бесконечно тонкие, не удовлетворяет им. Напомним также, что рассуждения которые будут дальше сделаны в рамках этих предположений, без труда распространяются на самые общие случаи.

если функция $A(\nu)$ отрицательна вблизи какой-то частоты ν_0, то, выбрав для $\mathfrak{R}$ фильтр, пропускающий только частоты, соседние с ν_0, мы сделали бы правую часть выражения (86) отрицательной, что невозможно, поскольку речь идет о дисперсии. Следовательно, коэффициент $A(\nu)$ положителен или равен нулю. Поэтому можно толковать величину $d\mathfrak{F}(\nu) = A(\nu)\,d\nu$ как элементарную энергию. Если учесть, что коэффициент передачи энергии равен $g^2(\nu)$, и вспомнить о понятиях, изложенных в начале п. 9.2.12, то приходим к следующему истолкованию соотношения (86), законность которого вытекает из приведенных выше рассуждений. Для случайной функции $x(t)$ полосе частот $(\nu, \nu + d\nu)$ соответствует средняя энергия $d\mathfrak{F}(\nu) = A(\nu)\,d\nu$. После преобразования эта энергия умножается на коэффициент передачи $g^2(\nu)$ при частоте ν и становится равной $g^2(\nu)\,d\mathfrak{F}(\nu)$; полная переданная энергия получится, если произвести суммирование по всем элементарным полосам частот. Это и есть интерпретация основного соотношения (86), в котором выражено содержание весьма важной теоремы Бохнера и Хинчина.

Итак, если корреляционная функция $\rho(\tau)$ имеет непрерывный и абсолютно интегрируемый коэффициент преобразования Фурье $A(\nu)$, то функция $A(\nu)$ обязательно положительна или равна нулю [1]). Функцию $A(\nu)$ можно толковать как спектральную плотность энергии, а функция спектрального распределения энергии $\mathfrak{F}(\nu)$ есть интеграл $A(\nu)$:

$$\mathfrak{F}(\nu) = \int_0^{\nu} A(\nu)\,d\nu. \tag{87}$$

Очевидно, что $\mathfrak{F}(0) = 0$; функция $\mathfrak{F}(\nu)$ может только возрастать; при $\nu = \infty$ снова получим полную энергию. Действительно,

$$\overline{x^2} = \rho(0) = \int_0^{\infty} A(\nu)\,d\nu = \mathfrak{F}(+\infty). \tag{88}$$

На основании принятых гипотез о корреляционной функции $\rho(\tau)$ удалось решить задачу определения функции спектрального распределения энергии. Эти гипотезы соответствуют тому, что в оптике называется непрерывным спектром. Случаем непрерывного спектра мы и ограничимся. Полученные в этом пункте результаты могут быть распространены на самый общий случай, и всегда можно поставить в соответствие корреляционной функции $\rho(\tau)$ некоторый спектр частот; но этот спектр может быть более или менее сложным и, в частности, может содержать линии, т. е. такие частоты, которым соответствует конечная энергия.

Напомним основные соотношения, которые для случая непрерывного спектра связывают между собой величины ρ, A и $\mathfrak{F}(\nu)$:

$$\rho(\tau) = \int_0^{\infty} A(\nu) \cos 2\pi\nu\tau\,d\nu, \tag{89a}$$

---

[1]) Величина $A(\nu)$ существенно подчинена условию быть неотрицательной и давать конечную полную энергию $\int_0^{\infty} A(\nu)\,d\nu$. Всякая функция, для которой преобразование Фурье удовлетворяет этим условиям, очевидно, является корреляционной функцией.

откуда, обращая формулы Фурье, получаем

$$\left.\begin{aligned} A(\nu) &= 4\int_0^\infty \rho(\tau)\cos 2\pi\nu\tau\, d\tau, \\ \mathfrak{F}(\nu) &= \int_0^\nu A(\nu)\, d\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (89б)$$

Соответствие между $\rho(\tau)$ и $A(\nu)$ — это соответствие преобразования Фурье. Свойства его являются классическими. Свойства моментов второго порядка определяются в одинаковой степени как корреляционной функцией $\rho(\tau)$, так и спектральной плотностью $A(\nu)$.

Примечания. 1. Предположим, что интеграл $\int_0^\infty \nu^2 A(\nu)\, d\nu$ сходится. Исходим из соотношения

$$\rho(\tau) = \int_0^\infty A(\nu)\cos 2\pi\nu\tau\, d\nu.$$

Здесь можно дважды произвести дифференцирование под знаком интеграла. Это позволяет вывести два следствия:

а) $\rho''(\tau)$ существует при всех τ и, в частности, при $\tau = 0$. Существует, следовательно, производная в среднем квадратическом от функции $x(t)$, о которой известно, что ее корреляционная функция равна $-\rho''(\tau)$.

б) Имеем

$$-\rho''(\tau) = \int_0^\infty 4\pi^2\nu^2 A(\nu)\cos 2\pi\nu\tau\, d\nu, \qquad (90)$$

откуда следует, что спектральная плотность для производной $x'(t)$ равна $4\pi^2\nu^2 A(\nu)$. При каждом значении ν вычисления производных выполняются так, как если бы речь шла о чистой синусоиде. Известно, что при дифференцировании функции $\sin 2\pi\nu t$ появляется сомножитель $2\pi\nu$.

2. Из предыдущих расчетов мы узнали величину $\overline{y^2}$ средней энергии на выходе фильтра. Аналогичные расчеты могут нам дать корреляционную функцию на выходе. Укажем на главные промежуточные этапы этого важного вычисления:

$$M[y(t)\,y(t-\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} M[x(\theta)\,x(\theta')]\,R(t-\theta)\,R(t-\lambda-\theta')\,d\theta\,d\theta', \qquad (91)$$

$$M[y(t)\,y(t-\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau)\,R(u)\,R(u-\tau-\lambda)\,du\,d\tau, \qquad (92)$$

$$M[y(t)\,y(t-\lambda)] = \int_0^\infty A(\nu)\,g^2(\nu)\cos 2\pi\nu\lambda\, d\nu. \qquad (93)$$

Соотношения (92) и (93) позволяют вычислить корреляционную функцию преобразования $\mathfrak{N}[x(t)]$ либо как функцию от $A(\nu)$ и $g(\nu)$, либо как функцию от $\rho(\tau)$ и $R(t)$. Сравнив соотношения (93) и (89), видим, что спектральная плотность на выходе равна произведению $A(\nu)\,g^2(\nu)$. Этот вывод можно сразу объяснить, заметив, что коэффициент передачи энергии при

частоте ν равен $g^2(\nu)$ и что $A(\nu)\,d\nu$ — это энергия, соответствующая для функции $x(t)$ полосе частот $(\nu, \nu+d\nu)$. С точки зрения энергетики разные частоты взаимно независимы в линейных системах, представленных преобразованием $\mathfrak{N}$. Получаем простое и важное правило: при преобразовании стационарной случайной функции стационарной линейной системой ее спектральная плотность умножается на квадрат модуля частотной характеристики.

9.2.13. Передача энергии стационарной линейной системой. Для уточнения задачи рассмотрим конкретный пример. Прилагаем флуктуирующее напряжение $x(t)$ на входе линейного усилителя. Тогда на выходе первого усиливающего каскада мы получим флуктуирующее напряжение $x_1(t)$, на выходе второго каскада — флуктуирующее напряжение $x_2(t)$ и т. д. Энергетические свойства $x(t)$ выражаются заданной корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$ или заданной спектральной плотностью $A_x(\nu)$. Энергетические свойства $x_1(t)$ определяются заданием $\rho_{x_1}(\tau)$ или $A_{x_1}(\nu)$; энергетические свойства $x_2(t)$—заданием $\rho_{x_2}(\tau)$ или $A_{x_2}(\nu)$ и т. д. Задача состоит в том, чтобы подробно проследить изменения энергетических свойств, т. е. в том, чтобы перейти от $\rho_x(\tau)$ [или $A_x(\nu)$] к $\rho_{x_1}(\tau)$ [или $A_{x_1}(\nu)$], а затем к $\rho_{x_2}(\tau)$ [или $A_{x_2}(\nu)$] и т. д. При этом собственными флуктуациями усилителя мы пренебрегаем. Достаточно, очевидно, решить этот вопрос для одного каскада. Формулируя задачу в более общих терминах, можно сказать, что мы рассматриваем стационарную случайную функцию $x(t)$ и заставляем ее претерпеть линейное преобразование $y(t)=\mathfrak{N}[x(t)]$. Требуется перейти от энергетических свойств функции $x(t)$ (т. е. от ρ_x и A_x) к энергетическим свойствам функции $y(t)$ (т. е. к ρ_y и A_y). Ранее мы указали все соотношения, которые при этом необходимо использовать. Однако представляется полезным придать последовательности соотношений более систематический вид и для этого расположить наиболее важные соотношения в виде схемы. Линейное преобразование можно определить через его частотную характеристику $G(\nu)$ или через его ответ $R(t)$ на единичный импульс. Полезно отметить, что в подобного рода энергетических задачах частотная характеристика $G(\nu)$ входит только через ее модуль $g(\nu)$. Нужные соотношения сведены в схему (на стр. 651).

Замечания. Для упрощения описанных выше расчетов полезно сделать несколько практических замечаний.

1. Корреляционные функции, вводимые в приложениях, стремятся всегда к нулю при больших значениях τ, потому что $x(t)$ и $x(t-\tau)$ стремятся стать взаимно независимыми. Можно сказать, что случайная функция $x(t)$ обладает „статистической памятью", тем меньшей, чем быстрее $\rho(\tau)$ стремится к нулю. Из соответствия, определяемого формулами (89), легко заметить, что при прочих равных условиях чем больше „статистическая память" явления, тем более ограничен его спектр частот. Возьмем для примера, энергетическое распределение, определяемое спектральной плотностью

$$A(\nu)=\frac{4\tau_0}{1+4\pi^2\nu^2\tau_0^2}\,.$$

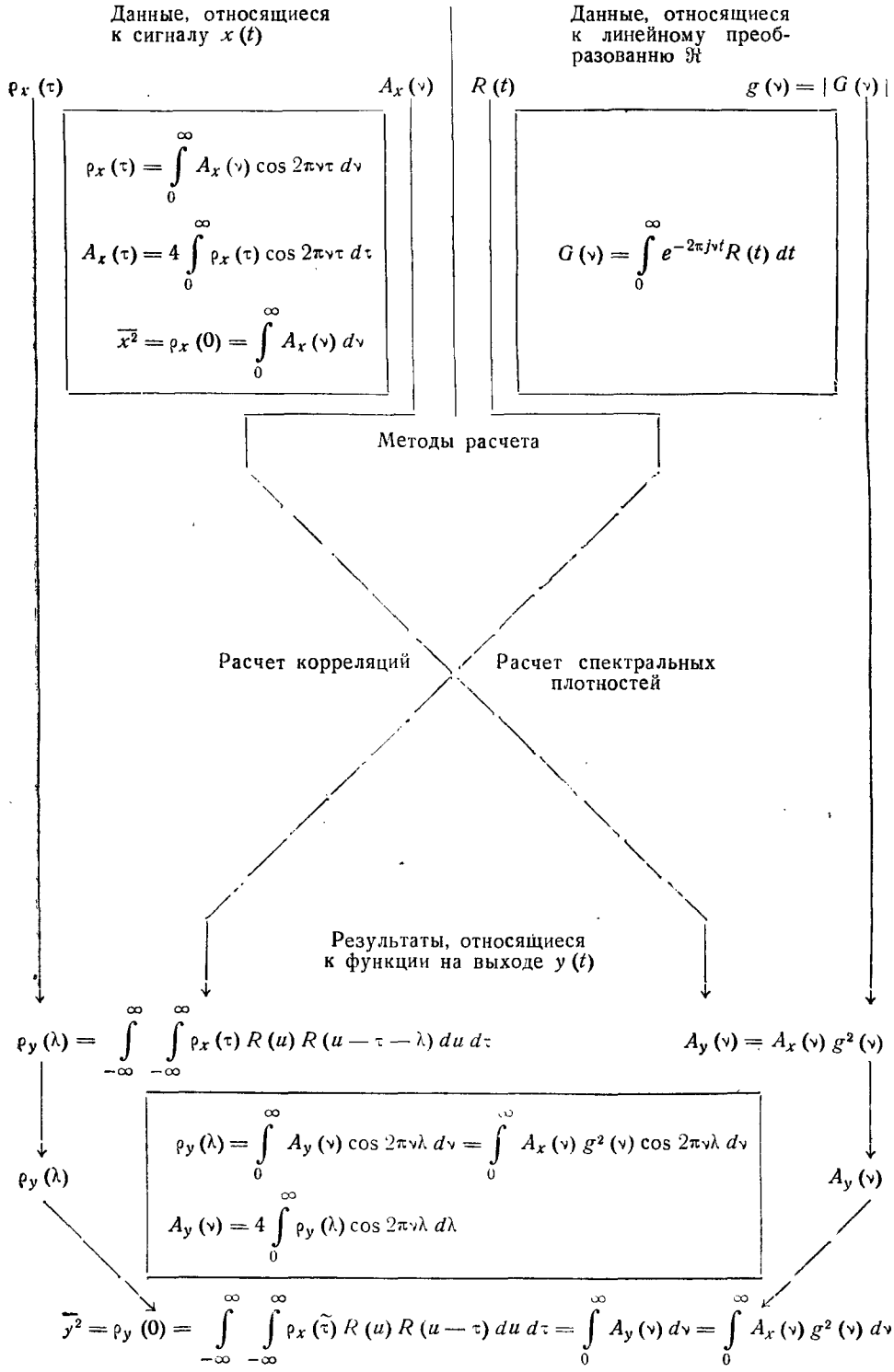
Находим

$$\rho(\tau)=e^{-\left|\frac{\tau}{\tau_0}\right|}. \tag{94}$$

На рис. 9.17 представлены кривые $\rho(\tau)$ и $A(\nu)$ для больших значений τ_0 (сплошные линии) и для малых значений τ_0 (пунктир).

Вернемся к уравнению

$$A(\nu)=4\int_0^\infty \rho(\tau)\cos 2\pi\nu\tau\,d\tau$$


Данные, относящиеся к сигналу $x(t)$
Данные, относящиеся к линейному преобразованию $\mathfrak{H}$
$\rho_x(\tau)$
$A_x(\nu)$
$R(t)$
$g(\nu) = |G(\nu)|$
$\rho_x(\tau) = \int_0^\infty A_x(\nu)\cos 2\pi\nu\tau\, d\nu$
$A_x(\tau) = 4\int_0^\infty \rho_x(\tau)\cos 2\pi\nu\tau\, d\tau$
$\overline{x^2} = \rho_x(0) = \int_0^\infty A_x(\nu)\, d\nu$
$G(\nu) = \int_0^\infty e^{-2\pi j\nu t} R(t)\, dt$
Методы расчета
Расчет корреляций
Расчет спектральных плотностей
Результаты, относящиеся к функции на выходе $y(t)$
$\rho_y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau) R(u) R(u-\tau-\lambda)\, du\, d\tau$
$A_y(\nu) = A_x(\nu) g^2(\nu)$
$\rho_y(\lambda) = \int_0^\infty A_y(\nu)\cos 2\pi\nu\lambda\, d\nu = \int_0^\infty A_x(\nu) g^2(\nu)\cos 2\pi\nu\lambda\, d\nu$
$A_y(\nu) = 4\int_0^\infty \rho_y(\lambda)\cos 2\pi\nu\lambda\, d\lambda$
$\rho_y(\lambda)$
$A_y(\nu)$
$\overline{y^2} = \rho_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tilde{\tau}) R(u) R(u-\tau)\, du\, d\tau = \int_0^\infty A_y(\nu)\, d\nu = \int_0^\infty A_x(\nu) g^2(\nu)\, d\nu$

в более общем виде и запишем $\rho(\tau)$ как $\rho\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$. Меняя параметр τ_0, мы сможем по своему произволу вытянуть или сжать вдоль оси времен кривую, представляющую корреляционную функцию. Тогда, если обозначить через

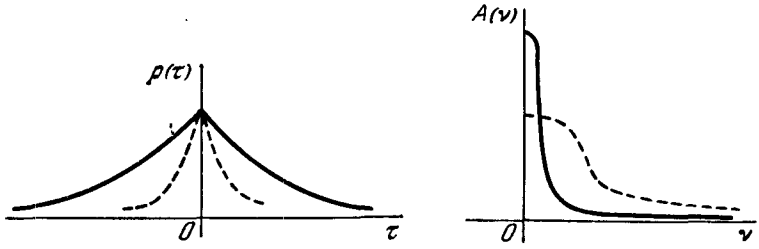


Рис. 9.17.

$A(\tau_0, \nu)$ функцию $A(\nu)$, относящуюся к значению τ_0, предыдущее соотношение можно записать в виде

$$A(\tau_0, \nu) = 4\int_0^\infty \rho\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos 2\pi\nu\tau\, d\tau \tag{95}$$

или

$$A(\tau_0, \nu) = 4\tau_0\int_0^\infty \rho(\theta)\cos 2\pi\nu\tau_0\theta\, d\theta. \tag{96}$$

Видим, что с точностью до числового множителя $4\tau_0$ функция $A(\tau_0, \nu)$ зависит только от произведения $\nu\tau_0$. Поэтому

$$\frac{A(\tau_0, \nu)}{4\tau_0} = \frac{A\left(\lambda\tau_0, \frac{\nu}{\lambda}\right)}{4\lambda\tau_0}. \tag{97}$$

Знаменатели $4\tau_0$ и $4\lambda\tau_0$ соответствуют растяжению кривой A вдоль оси ординат. Если не обращать внимания на это явление, а учитывать только большее или меньшее растяжение вдоль оси частот, то можно заметить, что заставляя кривую $\rho(\tau)$ растягиваться вдоль оси τ, мы заставляем кривую $A(\nu)$ в том же соотношении сжиматься вдоль оси частот. Случайная функция с большой статистической памятью имеет в большинстве случаев относительно узкий спектр, и наоборот.

2. Предположим, что на входе усилителя, характеризующегося своей реакцией $R(t)$ на единичный импульс, приложено стационарное случайное напряжение $x(t)$ второго порядка с корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$. Корреляционная функция на выходе будет $\rho_y(\lambda)$. Переход от одной к другой производится с помощью соотношения

$$\rho_y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau)\, R(u)\, R(u - \tau - \lambda)\, du\, d\tau. \tag{98}$$

Не затрагивая вопросов математической строгости, поясним, что́ именно происходит в двух предельных случаях.

1) Усилитель с большой постоянной времени. Более точно, рассмотрим усилитель, постоянная времени которого велика по сравнению со статисти-

ческой памятью функции $x(t)$. Это означает, что существуют значения α такие, что $\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_x(\tau)\,d\tau$ весьма мало отличаются от $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau)\,d\tau$, хотя $R(\alpha)$ практически не отличается от $R(0)$ или, лучше сказать, хотя $R(u+\alpha)$ мало отличается от $R(u)$. При этом соотношение (98) дает (если не останавливаться на вопросе о сходимости)

$$\rho_y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} R(u)\,R(u-\lambda)\,du. \tag{99}$$

Первый множитель — число, не зависящее от λ. Только второй множитель определяет вид функции $\rho_y(\lambda)$. Итак, вид корреляционной функции на выходе определяется усилителем, так как от величины сигнала зависит только числовой коэффициент.

2) Усилитель с малой постоянной времени. Рассуждая так же, как и раньше, получим

$$\rho_y(\lambda) = \rho_x(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(\theta)\,d\theta\right]^2. \tag{100}$$

В этом случае усилитель определяет только числовой множитель, а корреляционная функция на выходе имеет тот же вид, что и на входе. В обоих случаях то явление, в котором изменение происходит более медленно, определяет вид корреляционной функции.

В частности, если мы наблюдаем явление электронных флуктуаций, при которых корреляции становятся практически равными нулю за короткое время или, во всяком случае, за время, гораздо меньшее, чем постоянные времени наших приборов, то корреляционная функция флуктуаций зависит только от наблюдающих приборов, а не от характера начальных флуктуаций.

3. Можно повторить предыдущие рассуждения, переведя их на язык спектральной плотности. Тогда

$$A_y(\nu) = A_x(\nu)\,g^2(\nu);$$

видим, что ход кривой $A_y(\nu)$ зависит от того, насколько избирательно явление, т. е. от того, насколько тесно оно связано с частотой. Если, в частности, случайная функция $x(t)$ представляет какое-либо молекулярное или электронное явление, не имеющее преимущественных частот, то функцию $A(\nu)$ можно заменить постоянной. Впрочем, согласно замечанию 1, можно сказать, что спектральная плотность $A(\nu)$ постоянна вплоть до очень больших частот или что корреляционная функция $\rho(\tau)$ практически становится равной нулю, как только τ становится больше некоторого малого значения τ_1. Когда это случается, мы говорим, что имеет место микроскопическая корреляция.

4. Мы видели, что в случае молекулярных или электронных явлений корреляция зависит только от приборов наблюдения. Это означает, иными словами, что спектральная плотность, соответствующая явлению в чистом виде, не зависит от ν. Можно сказать, что спектры этих явлений имеют одинаковое, по отношению к частоте, энергетическое распределение плотности. В частности, так же обстоит дело и с флуктуациями электродвижущей силы $e(t)$ на концах некоторого сопротивления R.

Рассмотрим теперь контур, состоящий из сопротивления и шунтированного конденсатора (рис. 9.18). Будем считать, что электродвижущая сила с флуктуацией $e(t)$ последовательно подключена к сопротивлению R.

Определим разность потенциалов $V(t)$ на зажимах A и B конденсатора. При этом преобразование $e(t)$ в $V(t)$ происходит с помощью частотной характеристики

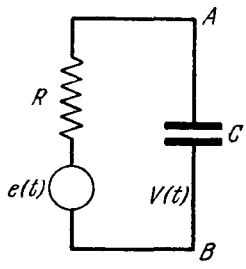


Рис. 9.18.

$$G(\nu) = \frac{j}{j - 2\pi\nu CR},$$

откуда

$$g^2(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2C^2R^2}.$$

Следовательно,

$$\overline{V^2(t)} = \int_0^\infty A_e(\nu) \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2C^2R^2}\, d\nu.$$

Но из предыдущего видно, что $A_e(\nu)$ — постоянная, не зависящая от ν. Можно поэтому вынести ее из-под знака интеграла:

$$\overline{V^2(t)} = A_e(\nu) \int_0^\infty \frac{d\nu}{1 + 4\pi^2\nu^2C^2R^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A_e(\nu)}{2\pi CR}.$$

Принцип равномерного распределения энергии приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} C\overline{V^2} = \frac{1}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Сравнив два предыдущих выражения, находим

$$A_e(\nu) = 4kRT;$$

это соотношение представляет собой формулу Найквиста.

9.2.14. Недостаточность рассмотрения моментов второго порядка и корреляционной функции. Все, о чем говорилось в пп. 9.2.8—9.2.13, ограничивалось рассмотрением моментов второго порядка, иначе говоря, энергетических свойств стационарных случайных функций. Мы видели, что это рассмотрение можно вести двумя параллельными путями, пользуясь либо корреляционной функцией, либо спектральной плотностью. Обе эти функции представлялись нам до сих пор весьма сильными инструментами для изучения энергетических свойств во всех звеньях стационарной линейной системы. Но в большинстве случаев действенность их исчезает, как только потребуется вычислить что-нибудь помимо моментов второго порядка или рассмотреть нелинейные системы. Приведем пример. Рассмотрим установку, изображенную на рис. 9.19. Она может служить для усиления фотоэлектрических токов. В ней имеется линейный усилитель (*1*), квадратичный выпрямитель $y = x^2$ (*2*) и гальванометр (*3*). Гальванометр представляет собой линейную систему. Чтобы вычислить дисперсию $\overline{z^2}$ флуктуаций „зайчика“ гальванометра, требуется знать корреляционную функцию $\overline{y(t)\,y(t-\theta)}$ выпрямленного

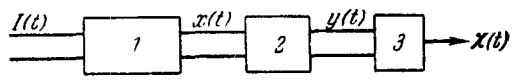


Рис. 9.19.

напряжения. Если предположить, что выпрямитель квадратичен, то нужно знать момент $\overline{x^2(t)\,x^2(t-\theta)}$. По отношению к функции $x(t)$ — это момент четвертого порядка. Если бы характеристика выпрямителя была $y=x^p$, потребовалось бы для функции $x(t)$ знать момент порядка $2p$. Изложенные ранее формулы не позволяют вычислять моменты порядка выше второго.

До сих пор корреляционная функция служила инструментом для вычислений, но в строгом смысле слова не оправдывала своего названия, предполагающего непрерывность явлений во времени. Оценивая качественно, можно сказать, что часто, если τ достаточно велико, то $x(t)$ и $x(t-\tau)$ становятся практически независимыми, так что

$$\overline{x(t)\,x(t-\tau)} \to \overline{x(t)}\cdot\overline{x(t-\tau)} = 0. \tag{101}$$

Поэтому часто стремление τ к бесконечности влечет за собой одновременно и стремление $\overline{x(t)\,x(t-\tau)}$ к нулю и стремление $x(t)$ и $x(t-\tau)$ к независимости. Мы можем также сказать, что если спектр богат низкими частотами, то он соответствует режиму медленных флуктуаций, т. е. представляет собой режим с большой статистической памятью.

Однако все эти замечания весьма нечетки, и легко привести большое число примеров, которые позволяют выявить их неубедительность. В частности, не следует забывать, что две случайные величины могут быть очень тесно связаны и в то же время иметь нулевую корреляцию. Рассмотрим в качестве примера стационарную случайную функцию

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi), \tag{102}$$

где φ — случайная величина, принимающая с одинаковой вероятностью любое значение от 0 до 2π. При этом

$$\rho(\tau) = \overline{x(t)\,x(t-\tau)} = \frac{1}{2}\cos\omega\tau, \tag{103}$$

где $\rho(\tau)$ обращается в нуль, в частности, при $\omega\tau = \frac{\pi}{2}$. Было бы совершенно неправильно заключать из этого, что $x(t_1)$ и $x\left(t_1+\frac{\pi}{2\omega}\right)$ взаимно независимы. Действительно,

$$x(t_1) = \cos(\omega t_1 + \varphi) \quad \text{и} \quad x\left(t_1+\frac{\pi}{2\omega}\right) = -\sin(\omega t_1 + \varphi).$$

Между $x(t_1)$ и $x\left(t_1+\frac{\pi}{2\omega}\right)$ существует соотношение, не зависящее от φ:

$$[x(t_1)]^2 + \left[x\left(t_1+\frac{\pi}{2\omega}\right)\right]^2 = 1. \tag{104}$$

Знание величины $x(t_1)$ определяет абсолютную величину $x\left(t_1+\frac{\pi}{2\omega}\right)$. Следовательно, между этими случайными величинами имеется строгая (неслучайная) связь, и, однако, они не коррелируют. Не нужно упускать из виду, что сама по себе корреляционная функция имеет только энергетический смысл (т. е. определяет только моменты второго порядка). Две случайные функции не коррелируют между собой, если у них нет энергии взаимодействия. Но это не означает, что они взаимно независимы, как видно из предыдущего примера. Как мы увидим ниже, в некоторых случаях, которые с точки зрения математики следует рассматривать как частные случаи, но которые тем не менее включают в себя многочисленные задачи о флуктуациях, поставленные физикой, корреляционная функция полностью характеризует все статистические свойства $x(t)$ и тогда вполне оправдывает свое название.

Это происходит в тех случаях, когда $x(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию Лапласа — Гаусса. Мы поясним свойства этих функций на конкретном примере флуктуаций, возникающих на выходе линейного усилителя под действием дробового эффекта постоянного тока, приложенного на входе.

Стационарные случайные функции Лапласа — Гаусса. Применение к чисто дробовому эффекту

Все последующие рассуждения относятся к флуктуациям, возникающим под влиянием чисто дробового эффекта. Об этом же шла речь в п. 9.2.1. Сущность задачи будет изложена на примере, предназначенном сделать изложение более конкретным. Но выводы будут иметь весьма общее значение, что не ускользнет от внимания читателя.

9.2.15. Общие замечания. В начале этой главы приводился пример, связанный с извлечением шаров из урны с неограниченным числом белых и черных шаров. Если произвести очень большое число N извлечений наудачу и если p и $q=1-p$ — соответственно вероятности появления белого и черного шаров при каждом независимом извлечении, то случайная величина $n(N)$, равная числу белых шаров, появившихся при N извлечениях, приближенно подчиняется закону нормального распределения, причем погрешность этого приближения можно сделать сколь угодно малой при достаточно большом N. Указанное нормальное распределение группируется вокруг математического ожидания $\overline{n}(N)=Np$, а его среднее квадратическое отклонение равно $\sqrt{Npq}$. Этот пример представляет собой частный случай гораздо более общего результата (центральная предельная теорема).

Пусть N — число независимых случайных величин, а S — их сумма. Предположим, кроме того, что относительный вклад в сумму S каждой из этих величин весьма мал или, по крайней мере, весьма мал во всех случаях, за исключением очень маловероятных. При таких условиях для достаточно большого N сумма S подчиняется нормальному закону распределения с соответственно выбранным центром. Например, если случайное явление $x(t)$ является результирующим для очень большого числа независимых элементарных явлений, то в большинстве случаев можно сказать, что в любой момент t_1 величина $x(t_1)$ будет подчиняться нормальному закону распределения. Тогда, предполагая $\overline{x(t_1)}=0$, для вероятности того, что выполняется неравенство

$$x_1 \leqslant x(t_1) \leqslant x_1 + dx_1,$$

будем иметь

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \tag{105}$$

причем

$$\sigma^2 = \overline{x^2(t_1)}.$$

Выяснив эти предварительные обстоятельства, займемся изучением случайной функции, приведенной в конкретном примере п. 9.2.1. Речь идет о флуктуациях напряжения на выходе линейного усилителя под действием дробового эффекта сигнала, который мы назовем, с макроскопической точки зрения, постоянным током. В конечном счете, нам нужно рассмотреть случайную функцию

$$x(t) = \sum_{t_j < t} eR(t - t_j) = \sum_{t_j > -\infty}^{t_j < +\infty} eR(t - t_j).$$

Последовательность значений t_j представляет собой последовательность случайно распределенных моментов времени. Что понимается под выражением случайно распределенные моменты? Сейчас мы это уточним, не входя в тонкости математических рассуждений. Очевидно, речь идет о распределении, статистические свойства которого стационарны, поскольку рассматриваемые нами электроны составляют макроскопически постоянный ток, определенный от $t=-\infty$ до $t=+\infty$. Рассмотрим очень большой промежуток времени T и пусть N — число происходящих за это время электронных ударов. Утверждая, что существует плотность ρ_0, мы тем самым говорим, что при достаточно больших T частное $\frac{N}{T}$ будет мало отличаться от величины ρ_0. Если T достаточно велико, то приближенно будем иметь $N=\rho_0 T$ электронных ударов.

Выберем очень большое значение T и возьмем $\rho_0 T$ точек, которые предположим распределенными случайным образом в промежутке T. Для этого рассмотрим последовательность из N независимых испытаний. Каждое из них состоит в выборе точки отрезка T, причем вероятность поместить эту точку на любой отрезок Δx (внутри отрезка T) равна $\frac{\Delta x}{T}$. После осуществления N таких испытаний можно вычислить вероятность того, что n любых точек находятся в отрезке Δx внутри отрезка T. Эта вероятность равна

$$C_N^n\left(\frac{\Delta x}{T}\right)^n.$$

Естественно, мы не хотим вводить каких-либо преимущественных значений T, и распределение значений t_j должно быть сделано для бесконечного интервала от $t=-\infty$ до $t=+\infty$. Поэтому за характеристические свойства распределения мы примем такие свойства, которые можно получить, переходя к пределу при $T\to\infty$.

Предельные свойства заключаются в следующем:

1. Вероятность P того, что за любой промежуток времени Δt произойдет n электронных ударов, подчиняется закону Пуассона (п. 9.1.18). Иначе говоря,

$$P(n;\ \Delta t)=\frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!},\quad \text{где}\quad \bar{n}=\rho_0\Delta t. \tag{106}$$

2. Имеет место взаимная независимость между промежутками времени, у которых нет никакой общей части (разъединенные промежутки времени). В частности, если Δt_1 и Δt_2 — два разъединенных промежутка, то вероятность того, что за Δt_1 произошло n_1, а за Δt_2 — n_2 электронных ударов, равна

$$P(n_1,\ n_2;\ \Delta t_1,\ \Delta t_2)=P(n_1;\ \Delta t_1)P(n_2;\ \Delta t_2). \tag{107}$$

Распределения, свойства которых мы сейчас уточнили, называются распределениями Пуассона. Установив таким образом свойства последовательности моментов t_j, можно полностью изучить случайную функцию $x(t)$ и, в частности, вычислить функцию распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N)$. Мы ограничимся указаниями, справедливыми в частном случае, который крайне важен в приложениях.

Усилитель обладает некоторой инерцией, и можно связать с ним постоянную времени τ_0. Нас интересует только порядок ее величины. Среднее число электронных ударов за время τ_0 равно $\rho_0\tau_0$. Ясно, что характер явления будет очень различным в зависимости от того, мала величина $\rho_0\tau_0$ или велика по сравнению с единицей. Большое $\rho_0\tau_0$ означает, что колебание,

вызванное электронным ударом, практически еще не начало затухать, когда произошел новый удар, иначе говоря, значение $x(t)$, наблюдаемое в момент t, зависит от очень большого числа ударов, происшедших в близком прошедшем по отношению к t. Малое $\rho_0\tau_0$ означает, напротив, что колебание, вызванное столкновением, практически уже затухло, когда последовал новый удар. Значение $x(t)$ зависит главным образом от момента удара, непосредственно предшествующего t. Заметим для ясности, что если мы имеем дело с усилителем, обладающим достаточно большой избирательностью, то в зависимости от величин $\rho_0\tau_0$ мы получим промежуточный случай между крайними случаями, представленными на рис. 9.20.

Уточним порядки величин. Рассмотрим для примера усилитель с небольшой постоянной времени $\tau_0 = 10^{-6}$. С другой стороны, возьмем ток с силой в $10^{-8}A$, который может считаться слабым в большинстве приложений.

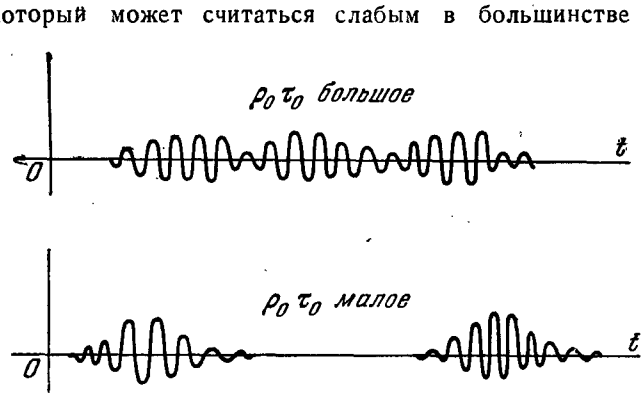


Рис. 9.20.

Соответствующее значение $\rho_0\tau_0$ равно 60 000. Этого примера достаточно, чтобы показать, что в повседневных случаях произведение $\rho_0\tau_0$ будет очень велико. Значение $x(t)$ в момент t_1 зависит теоретически от всех электронных ударов, предшествующих t_1. На практике оно зависит только от столкновений в промежутке $(t_1,\ t_1 - \delta)$, где δ — величина порядка, большего чем τ_0. Так как $\rho_0\tau_0$ очень велико, то в этом промежутке имеется много столкновений, соответственные положения которых взаимно независимы. Слагаемые $eR(t - t_j)$, отвечающие этим ударам, представляют собой независимые случайные величины, и можно предвидеть, что $x(t_1)$ будет подчиняться нормальному закону распределения. Это подтверждается и строгим рассуждением. Случайная величина $x(t_1)$ (предполагается, что $\bar{x} = 0$; если $\bar{x} \neq 0$, то те же рассуждения следует применить к величине $x - \bar{x}$) имеет плотность вероятности, определяемую формулой

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx, \tag{108}$$

где

$$\sigma^2 = \overline{x^2},$$

и характеристическую функцию

$$\Phi(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}. \tag{109}$$

Кроме того, если, вместо того чтобы рассматривать один момент t_1, исследовать k моментов $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k$, выбранных любым образом, то k случай-

ных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_k)$ подчиняются нормальному закону распределения для k случайных величин. Такие законы представляют собой обобщения нормального закона распределения, относящегося к одной случайной величине. Проще всего определить их, обобщая соотношение (109). Можно сказать, что характеристическая функция нормального закона распределения для k случайных величин — это функция $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, определяемая соотношением типа

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k) = e^{-\frac{1}{2}Q(u_1, u_2, \ldots, u_k)}, \tag{110}$$

где Q — неотрицательная квадратичная форма:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \sum_{\substack{i=1, 2, \ldots, k \\ j=1, 2, \ldots, k}} A_{ij} u_i u_j. \tag{111}$$

Коэффициенты A_{ij} имеют очень простой смысл. Мы уже видели, что коэффициенты разложения функции Φ в ряд вблизи точки $u_1 = u_2 = \ldots = u_k$ непосредственно связаны с моментами. Следовательно, можем написать

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \overline{x^2(t_i)} = \sigma^2 = \rho(0); \\ A_{ij} &= A_{ji} = \overline{x(t_i)\, x(t_j)} = \rho(t_i - t_j). \end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned} Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) &= \sum_{\substack{i=1, 2, \ldots, k \\ j=1, 2, \ldots, k}} \rho(t_i - t_j)\, u_i u_j; \\ \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k) &= e^{-\frac{1}{2}\sum \rho(t_i - t_j) u_i u_j}. \end{aligned} \tag{113}$$

Если нам нужно снова перейти к закону распределения, то достаточно вспомнить, что плотность вероятности $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ представляет собой коэффициент преобразования Фурье для характеристической функции $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, как это следует из определяющего соотношения

$$\Phi = \overline{e^{j(u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k)}} = \int\int\int \ldots \int e^{j(u_1 x_1 + \ldots + u_k x_k)} P\, dx_1 \ldots dx_k. \tag{114}$$

В общем случае, если через $|Q|$ обозначить главный определитель квадратичной формы Q, а через Q' — обратную квадратичную форму, то

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|Q|}} e^{-\frac{1}{2}Q'}. \tag{115}$$

Напомним, что если коэффициенты квадратичной формы Q образуют квадратную матрицу $[A_{ij}]$, то коэффициенты обратной квадратичной формы Q' образуют квадратную матрицу $[A'_{ij}]$, где $A'_{ij} = \frac{a_{ij}}{|Q|}$, а a_{ij} — алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в определителе $|Q|$.

Основное следствие предыдущих соотношений заключается в том, что закон распределения, которому подчиняются k случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$, всегда можно полностью определить, если известна корреляционная функция.

Корреляционная функция, которая в общем случае имеет только энергетическое значение, определяет теперь все статистические свойства случайной функции $x(t)$. Именно потому, что многие случайные процессы, изучаемые в приложениях, описываются стационарными случайными функциями Лапласа — Гаусса, корреляционные функции играют такую важную роль. В частности,

шумовой фон в линейных усилителях приводит во всех случаях к режимам, описываемым стационарными случайными функциями Лапласа — Гаусса.

Уточним предыдущие выводы, рассмотрев два частных случая $k=1$ и $k=2$.

a) $k=1$.

Мы уже получили выражения для характеристической функции и плотности вероятности. Разложение характеристической функции в ряд дает сразу же значение всех моментов. Как известно из п. 9.1.13,

$$\overline{x^{2q+1}}=0; \quad \overline{x^{2q}}=\sigma^{2q}\,1\cdot 3\ldots(2q-1), \tag{116}$$

где q — целое положительное число.

b) $k=2$.

Рассматриваются две случайные функции $x(t_1)$ и $x(t_2)$. Положим, что $\theta=t_1-t_2$. Тогда

$$\Phi(u_1, u_2)=e^{-\frac{1}{2}\left\{u_1^2\rho(0)+u_2^2\rho(0)+2u_1u_2\rho(\theta)\right\}}, \tag{117}$$

причем очевидно, что

$$\sigma^2=\rho(0).$$

Соответствующая плотность вероятности равна

$$P(x_1, x_2)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho^2(0)-\rho^2(\theta)}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho(0)\left[x_1^2+x_2^2\right]-2\rho(\theta)x_1x_2}{\rho(0)-\rho^2(\theta)}}. \tag{118}$$

Сделаем несколько выводов из соотношений (117) и (118).

9.2.16. Связь явлений во времени. Возьмем фиксированное значение x_1 и найдем условную плотность вероятности $P(x_2/x_1)$ значения x_2, если известно x_1. Вероятность $P(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$ получения в моменты t_1 и t_2 значений x_1 и x_2 (с точностью до dx_1 и dx_2) равна, согласно правилу умножения вероятностей, произведению вероятности $P(x_1)\,dx_1$ иметь в момент t_1 значение x_1 (с точностью до dx_1) на вероятность $P(x_2/x_1)\,dx_2$ иметь в момент t_2 значение x_2 (с точностью до dx_2), если известно, что в момент t_1 получено значение x_1 (с точностью до dx_1). Поэтому

$$P(x_2/x_1)\,dx_2=\frac{P(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2}{P(x_1)\,dx_1}. \tag{119}$$

Отсюда, используя предыдущие результаты, получаем

$$P(x_2/x_1)\,dx_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho(0)-\frac{\rho^2(\theta)}{\rho(0)}}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[x_2-\frac{\rho(\theta)}{\rho(0)}x_1\right]^2}{\rho(0)-\frac{\rho^2(\theta)}{\rho(0)}}}dx_2. \tag{120}$$

Это снова закон нормального распределения. Математическое ожидание дается формулой

$$\overline{x}_2=\frac{\rho(\theta)}{\rho(0)}x_1=\beta x_1, \tag{121}$$

а среднее квадратическое отклонение равно

$$\sqrt{\rho(0)-\frac{\rho^2(\theta)}{\rho(0)}}=\sqrt{\rho(0)}\cdot\sqrt{1-\beta^2}. \tag{122}$$

Если θ меняется от 0 до ∞, то β меняется от 1 до 0.

На рис. 9.21 представлено изменение математического ожидания $\bar{x}_2 = \beta \bar{x}_1$ (*1*) и значений, отстоящих от него на одно среднее квадратическое отклонение в каждую сторону (*2*).

Рис. 9.21 дает очень точное представление о том, что можно назвать непрерывностью явления во времени или еще статистической памятью функции $x(t)$, так как он показывает, каким образом знание значения x_1 влияет на возможность получения значения x_2. Можно заметить, что эта непрерывность явления во времени находится в прямой и исключительной зависимости от корреляционной функции, чем и оправдывается ее название; при этом не следует упускать из виду, что все сказанное справедливо только для стационарной случайной функции Лапласа — Гаусса.

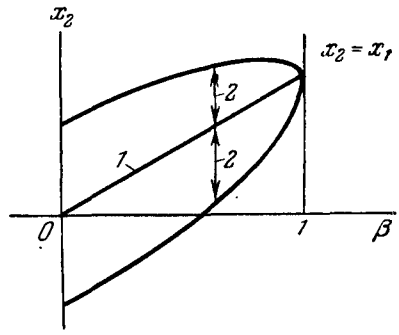


Рис. 9.21.

9.2.17. Флуктуации в нелинейных системах. Обратимся снова к схеме на рис. 9.19. Мы уже видели, что изучение флуктуаций после выпрямления требует знания корреляционной функции $\overline{y(t)\,y(t-\tau)}$. Если речь идет о стационарной случайной функции Лапласа — Гаусса, то вычисление этой корреляционной функции несложно во многих случаях, т. е. для довольно многочисленных вариантов характеристик выпрямителей. Приведем несколько примеров.

1) Квадратичный выпрямитель (характеристика $y = x^2$). Математическое ожидание для выпрямленного тока равно

$$\bar{y} = \overline{x^2} = \rho(0). \tag{123}$$

Вычислим корреляционную функцию, относящуюся к отклонению $Y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$. Имеем

$$\overline{Y(t)\,Y(t-\tau)} = \overline{[x^2(t) - \overline{x^2}]\,[x^2(t-\tau) - \overline{x^2}]} = \overline{x^2(t)\,x^2(t-\tau)} - (\overline{x^2})^2.$$

Момент четвертого порядка получается из разложения в ряд характеристической функции $\Phi(u_1, u_2)$ для функций $x(t_1)$ и $x(t_2)$ при $t_1 = t$ и $t_2 = t - \tau$. Применяя уже указанный метод, находим

$$\overline{x^2(t)\,x^2(t-\tau)} = 2\rho^2(\tau) + \rho^2(0). \tag{124}$$

Отсюда

$$\overline{Y(t)\,Y(t-\tau)} = 2\rho^2(\tau). \tag{125}$$

Таким образом, корреляционная функция на выходе квадратичного выпрямителя равна удвоенному квадрату корреляционной функции на входе.

Аналогичные расчеты позволяют рассматривать случаи характеристик более сложного вида, в частности, характеристики $y = x^p$ (p — целое) или $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

Вычисление моментов второго порядка $\overline{Y(t)\,Y(t-\tau)} = \overline{(y(t) - \bar{y})(y(t-\tau) - \bar{y})}$ сводится к вычислению моментов, которые получаются на основании разложения в ряд характеристической функции $\Phi(u_1, u_2)$.

2) Линейный выпрямитель. Если характеристика $y = y(x)$ имеет более сложный вид, то вычисление моментов функции y уже нельзя свести к вычислению моментов функции x. Но тогда можно непосредственно вычислить момент

$$\overline{y(t)\,y(t-\tau)},$$

исходя из плотности вероятности, относящейся к двум случайным величинам $x_1 = x(t)$ и $x_2 = x(t-\tau)$.

Положим

$$y_1 = y(x_1) \quad \text{и} \quad y_2 = y(x_2);$$

тогда

$$\overline{y(t)\,y(t-\tau)} = \overline{y_1 y_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y(x_1)\,y(x_2)\,P(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (126)$$

Этот способ можно применять, например, к случаю линейного выпрямителя. Возьмем для пояснения линейный выпрямитель, выпрямляющий два полупериода переменного тока. Уравнение характеристики будет $y = |x|$. Если $x_1 x_2 > 0$, то $y_1 y_2 = x_1 x_2$, а если $x_1 x_2 < 0$, то $y_1 y_2 = -x_1 x_2$. Отсюда легко выводим

$$\overline{y_1 y_2} = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1 x_2 P(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 - 2\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} x_1 x_2 P(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (127)$$

Заменяя вероятность $P(x_1, x_2)$ ее выражением, полученным из выражения (118), имеем

$$\overline{y_1 y_2} = \frac{1}{\pi A}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x_1 x_2 e^{-\alpha\frac{x_1^2+x_2^2}{2A^2}}\left\{e^{\frac{2\beta x_1 x_2}{2A^2}} + e^{-\frac{2\beta x_1 x_2}{2A^2}}\right\}dx_1\,dx_2, \qquad (128)$$

где

$$\beta = \rho(\tau), \quad \alpha = \rho(0), \quad A = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Можно разложить выражение для $\overline{y_1 y_2}$ в ряд по степеням отношения $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\rho(\tau)}{\rho(0)}$. При этом получаем результат в следующем виде:

$$\overline{y_1 y_2} = \frac{4\alpha}{2\pi}\left[1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} + \frac{\beta^4}{\alpha^4}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\beta^6}{\alpha^6}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{5} + \ldots\right]. \qquad (129)$$

Прямое вычисление математического ожидания $\bar{y}$ дает

$$\bar{y} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}.$$

Используя это соотношение, получаем

$$\overline{Y_1 Y_2} = \overline{(y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y})} = \overline{y_1 y_2} - (\bar{y})^2.$$

В конечном счете имеем для линейного выпрямителя, выпрямляющего два полупериода переменного тока:

$$\bar{y} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}; \qquad (130)$$

$$\overline{Y_1 Y_2} = \frac{4\alpha}{2\pi}\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} + \frac{\beta^4}{\alpha^4}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3} + \ldots\right]. \qquad (131)$$

Мы в некотором смысле разложили спектр линейного выпрямителя на более простые спектры. В ряде случаев можно довольствоваться первым членом в квадратных скобках, т. е. членом, содержащим β^2. Это равносильно замене спектра данного выпрямителя спектром квадратичного выпрямителя.

Примечание. В случае выпрямителя, выпрямляющего только один полупериод переменного тока, мы нашли бы

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}; \tag{132}$$

$$\overline{Y_1 Y_2} = \frac{4\alpha}{2\pi}\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} + \frac{\beta^4}{\alpha^4}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\beta^6}{\alpha^6}\cdot\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{5} + \ldots\right] + \frac{\beta}{4}. \tag{133}$$

9.2.18. Вычисление корреляционной функции на выходе линейного усилителя под действием дробового эффекта постоянного тока. Мы показали, что все свойства стационарной случайной функции Лапласа — Гаусса $x(t)$ содержатся в корреляционной функции. Остается вычислить корреляционную функцию $\overline{x(t)\,x(t-\tau)}$ для случая флуктуаций, вызванных дробовым эффектом в линейном усилителе. Для этого мы будем предполагать, что ось времен разделена на очень малые последовательно расположенные равные отрезки длиной в Δt. Пусть n_j — число импульсов e, расположенных в промежутке (t_j, t_{j+1}). Так как промежуток Δt очень мал по отношению к постоянным времени усилителя, то реакция на совокупность электронных ударов, происшедших за время между t_j и t_{j+1} (их число равно n_j) будет равна $n_j eR(t-t_j)$.

Уравнение

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} eR(t-t_j) \tag{52}$$

мы заменяем уравнением

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n_j eR(t-t_j). \tag{134}$$

Если нас интересует отклонение $X(t) = x(t) - \bar{x}$, то можно заменить n_j на $n_j - \bar{n}$ или, что то же самое, исключить нефлуктуирующую постоянную составляющую входного тока. Тогда

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (n_j - \bar{n})\, eR(t-t_j). \tag{135}$$

Вычислим

$$\rho(\tau) = \overline{X(t)\,X(t-\tau)} = \sum_{\substack{-\infty < j < \infty \\ -\infty < i < \infty}} \overline{(n_j - \bar{n})(n_i - \bar{n})}\, e^2 R(t-t_j)\, R(t-\tau-t_i). \tag{136}$$

Мы знаем, что переменные n_j и n_i взаимно независимы, если i и j — разъединенные промежутки. Отсюда следует, что

$$\overline{(n_j - \bar{n})(n_i - \bar{n})} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{137}$$

Поэтому

$$\rho(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{(n_j - \bar{n})^2}\, e^2 R(t-t_j)\, R(t-\tau-t_j).$$

Центральный момент второго порядка $\overline{(n_j - \bar{n})^2}$ вычисляется, исходя из закона Пуассона, которому подчиняются n_j (см. соотношение (106)). Находим

$$\overline{(n_j - \bar{n})^2} = \bar{n} = \rho_0 \Delta t, \tag{138}$$

где ρ_0 — средняя плотность, т. е. среднее число электронов в секунду:

$$\rho_0 = \frac{I}{e}.$$

Поэтому

$$\rho(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 e^2 R(t - t_j) R(t - \tau - t_j) \Delta t.$$

Устремляя Δt к нулю, получаем в конечном счете

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 e^2 R(t) R(t - \tau) dt = eI \int_{-\infty}^{\infty} R(t) R(t - \tau) dt. \tag{139}$$

Это уравнение следует сопоставить с уравнением (99). Явление флуктуаций в чистом виде, т. е. до того, как ее исказила инерция усилителя, представляет собой явление с микроскопической корреляцией. Говоря точнее, при сколь угодно малом Δt корреляция между двумя переменными $(n_i - \bar{n})$ и $(n_j - \bar{n})$, соответствующими двум последовательным промежуткам времени $(t_i, t_j = t_i + \Delta t)$ и $(t_j, t_j + \Delta t)$, равна нулю, как в выражении (137). Но мы знаем, согласно выражению (99), что $\rho(\tau)$ принимает вид произведения постоянного числа, зависящего от начальной флуктуации, на функцию от τ, зависящую от фильтра. Это мы и получаем на основании соотношения (139).

Вычислим теперь спектральную плотность. Для этого достаточно применить теорему Парсеваля, которая заключается в следующем. Пусть $F_1(t)$ и $F_2(t)$ абсолютно интегрируемые функции, ограниченные в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, а $G_1(\nu)$ и $G_2(\nu)$ — их коэффициенты преобразования Фурье:

$$G_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t) e^{-2\pi j \nu t} dt,$$

$$G_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t) e^{-2\pi j \nu t} dt.$$

Теорема Парсеваля выражается соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\nu) G_2^*(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) F_2^*(t) dt, \tag{140}$$

где звездочкой помечена сопряженная комплексная величина.

Если за F_1 и F_2 принять вещественные функции $R(t)$ и $R(t - \tau)$, то вводя частотную характеристику $G(\nu)$, получим

$$G_1(\nu) = G(\nu) \quad \text{и} \quad G_2(\nu) = G(\nu) e^{-2\pi i \nu t}.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t) R(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\nu)|^2 e^{2\pi j \nu \tau} d\nu.$$

Тогда соотношение (139) запишется в виде

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} eIg^2(\nu) e^{2\pi j \nu \tau} d\nu = \int_{0}^{\infty} 2eIg^2(\nu) \cos 2\pi\nu\tau \, d\nu.$$

Сравним теперь результат с соотношением (93), дающим корреляционную функцию на выходе линейного усилителя. Мы видим, что значение $2el$ представляет собой спектральную плотность, соответствующую сигналу, иначе говоря, дробовому эффекту тока.

Чтобы рассчитать действие дробового эффекта на усилитель, достаточно приписать этому явлению равномерный спектр со спектральной плотностью, равной $2el$. Это согласуется с тем, что здесь речь идет о явлении с микроскопической корреляцией. Понятно, что говорить о равномерном спектре бессмысленно, так как в этом случае при интегрировании по всем частотам получим бесконечность. В действительности, наблюдать за дробовым эффектом можно только с помощью прибора; при этом главное, чтобы существовал интеграл $\int_0^\infty 2elg^2(\nu)\,d\nu$, что зависит только от величины $g^2(\nu)$ иными словами от прибора наблюдения.

Примечание. В заключение следует отметить, что все сказанное о дробовом эффекте применимо также к эффекту Джонсона (эффект мерцания), т. е. к флуктуациям электродвижущей силы шумов в сопротивлении. Действительно, здесь также речь идет о явлении микроскопической корреляции, которое с помощью некоторой стационарной линейной системы приводит к появлению стационарной случайной функции Лапласа — Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IX

1. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
2. Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, „Советское радио", 1960.
3. Миддлтон Д., Введение в статистическую теорию связи, „Советское радио", 1961.
4. Стратонович Р. Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, „Советское радио", 1961.
5. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, Судпромгиз, 1961.
6. Blanc-Lapierre A., Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Applications à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité, Publications des Laboratoires de l'École Normale Supérieure, Paris, 1945.
7. Blanc-Lapierre A. et Fortet R., Analyse spectrale de l'énergie dans les phénoménes de fluctuations, Annales de Télécommunications, 2, № 7, 1947.
8. Borel E., Traité de calcul des probabilités et ses applications, Paris, 1924—1932.
9. Fry T. C., Probability and its engineering uses, New York, 1928.
10. Loeve M., Fonctions aléatoires de second ordre, La Revue Scientifique, 84, 1946, p. 195.
11. Vauiot A., Calcul des probabilités appliqué à la théléphonie, Cours de l'École Supérieure des Télécommunications.

ГЛАВА X

ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

10.1. РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

10.1.1. Графическое решение. Очень простой способ вычисления корней уравнения $f(x)=0$ состоит в том, чтобы тщательно вычертить на миллиметровке кривую $y=f(x)$. Абсциссы пересечения этой кривой с осью абсцисс будут равны искомым корням с приближением, часто достаточным для инженера. Они могут служить также отправной точкой для методов алгебраической апроксимации, описанных ниже. Построение кривой $y=f(x)$ полезно для применения этих методов, так как сведения, которые оно даст о ходе кривой, позволят выбрать приближение или метод, наиболее подходящий для быстрого вычисления.

Часто можно написать уравнение $f(x)=0$ в виде

$$\varphi(x)-\psi(x)=0.$$

При этом решения будут даны абсциссами точек пересечения двух кривых:

$$y=\varphi(x) \quad \text{и} \quad y=\psi(x).$$

Если представление $f=\varphi-\psi$ выбрано удачно, то начертить эти кривые будет гораздо легче, чем кривую $y=f(x)$. Например, решение уравнения $\sin x \operatorname{ch} x=1$ легче получить, найдя пересечение кривых $y=\sin x$, $y=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$, чем вычерчивая кривую

$$y=\sin x \operatorname{ch} x-1.$$

Такое графическое решение может дать очень точные результаты. В п. 10.1.4 этот способ рассматривается более полно и в большей общности.

Если в уравнении $f(x)=0$ фигурируют параметры, то иногда оказывается возможным собрать их в одну из функций $\varphi(x)$ или $\psi(x)$, а другая оказывается от них независящей. При этом удается получить схему, пригодную для графического решения всех уравнений некоторого типа.

Пример. Графическое решение уравнений третьей и четвертой степени.

а) Требуется решить уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$. Положим $x=z-\frac{a}{3}$. Тогда уравнение принимает вид $z^3-pz-q=0$ при

$$p=\frac{a^2}{3}-b, \qquad q=\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}-c.$$

Достаточно найти пересечение прямой $y=pz+q$ с кривой $y=z^3$, которая будет начерчена раз навсегда.

б) Требуется решить уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Положим $x = z - \frac{a}{4}$. Тогда уравнение примет вид $z^4 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ при

$$\alpha = b - \frac{3a^2}{8}, \quad \beta = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c,$$

$$\gamma = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d.$$

Если $\alpha > 0$, положим $z = t\sqrt{\alpha}$. Получаем

$$t^4 + t^2 - pt - q = 0$$

при

$$p = -\beta \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}, \quad q = -\frac{\gamma}{\alpha^2}.$$

Если $\alpha < 0$, положим $z = t\sqrt{-\alpha}$. Получаем

$$t^4 - t^2 - pt - q = 0$$

при

$$p = -\beta \frac{\sqrt{-\alpha}}{\alpha^2}, \quad q = -\frac{\gamma}{\alpha^2}.$$

Достаточно найти пересечение прямой $y = pt + q$ с кривой $y = t^4 + t^2$ или, в зависимости от случая, с кривой $y = t^4 - t^2$. Обе эти кривые чертятся раз навсегда.

10.1.2. Метод Ньютона и метод пропорциональных частей. а) *Метод Ньютона.* Требуется решить уравнение

$$f(x) = 0.$$

Пусть A_1B_1 — дуга кривой $y = f(x)$ вблизи корня; a_1, b_1 — абсциссы точек A_1 и B_1 (рис. 10.1). Предположим сначала, что эта дуга имеет вогнутость в сторону положительной части оси y [$f''(x) > 0$] и что $f(b_1) > 0$. Пусть b_2 есть точка встречи касательной, проведенной к кривой в точке B_1, с осью x. Тогда b_2 представляет приближение к корню, лучшее, чем b_1, и расположенное с той же стороны от корня:

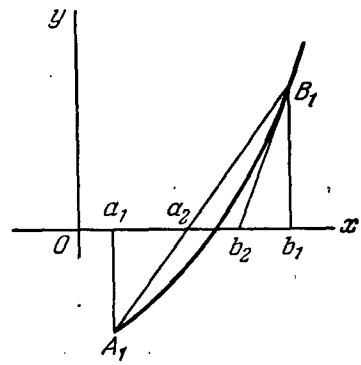


Рис. 10.1.

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}. \qquad (1)$$

Повторим это рассуждение для нового приближения b_2. Получим

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)}$$

и далее

$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)}.$$

Последовательность b_1, b_2, b_3, b_4, ... стремится к искомому корню.

Если бы дуга кривой была обращена вогнутостью к отрицательной части оси y, то следовало бы применить только что описанный способ, проведя касательную к кривой в точке A_1.

Таким образом, получаем правило: если корень заключен между двумя числами a_1, b_1 и вторая производная сохраняет в этом промежутке знак,

то за первое приближение следует принять то из чисел a_1 или b_1, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком $f''(x)$, иначе говоря, нужно, чтобы в выбранной точке было $f(x)f''(x) > 0$.

Замечание 1. Если $f''(x)$ меняет знак в промежутке (a_1, b_1), то может случиться, что вторые приближения окажутся хуже, чем первые (рис. 10.2). Поэтому полезно перед началом вычисления приближенно вычертить кривую $y = f(x)$. Однако иногда применяют метод Ньютона и тогда, когда $f''(x)$ меняет знак, или даже вообще без всякого исследования. В таком случае получаемая последовательность приближений может сходиться к корню или расходиться в зависимости от обстоятельств.

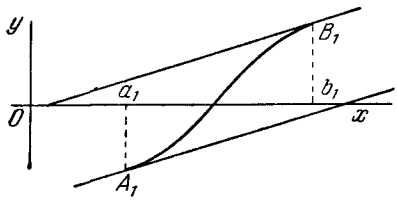


Рис. 10.2.

Замечание 2. Можно легко получить формулу (1), применив формулу Тейлора. Если x_0 — точный корень, то

$$f(x_0) = f(b_1) + \frac{f'(b_1)}{1!}(x_0 - b_1) + \frac{f''(b_1)}{2!}(x_0 - b_1)^2 + \dots$$

Считая $x_0 - b_1$ малой величиной и пренебрегая ее степенями выше первой, находим для x_0 приближенную формулу. Это и есть формула Ньютона.

б) *Способ пропорциональных частей.* Удобно сочетать только что изложенный способ Ньютона со способом пропорциональных частей. Имея отрезок (a_1, b_1), в котором $f(x)$ меняет знак, обозначим через a_2 абсциссу точки пересечения прямой A_1B_1 с осью x (рис. 10.1):

$$a_2 = \frac{b_1 f(a_1) - a_1 f(b_1)}{f(a_1) - f(b_1)},$$

а через b_2 — абсциссу, полученную способом Ньютона. Найдя отрезок (a_2, b_2), поступаем с ним так же, как с (a_1, b_1), что дает нам a_3 и b_3. Продолжая этот процесс, получаем две последовательности:

$$a_1, \qquad b_1,$$
$$a_2 = \frac{b_1 f(a_1) - a_1 f(b_1)}{f(a_1) - f(b_1)}, \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)},$$
$$a_3 = \frac{b_2 f(a_2) - a_2 f(b_2)}{f(a_2) - f(b_2)}, \qquad b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)},$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

которые все ближе и ближе охватывают с двух сторон искомый корень (если только $f''(x)$ не меняет знака в промежутке (a_1, b_1)).

Замечание 1. Для того чтобы уже первые приближения по способу пропорциональных частей были достаточно близки к искомому корню, необходимо, чтобы $f'(x)$ не обращалась в интервале в нуль.

Замечание 2. Если иметь возможность все время точно вычислять $f(x)$, то приведенные выше способы позволяют находить сколь угодно далекие приближения и, следовательно, получать корень с любой точностью. Но если $f(x)$ находится из таблиц, которые неизбежно имеют лишь ограниченную точность, то и корень можно получить также только с ограниченной точностью.

Пусть $\delta f(x)$ — совершенная при вычислении $f(x)$ ошибка. Она снижает точность вычисления x на такую величину δx, что

$$\delta f(x) = f'(x)\,\delta x.$$

Пример. Требуется решить уравнение $xe^x = 2$. Очень упрощенный чертеж показывает, что искомый корень заключен между 0 и 1 и вогнутость такова, что можно взять

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = 1.$$

Имеем последовательности

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & b_1 &= 1, \\ a_2 &= 0{,}735, & b_2 &= 0{,}867, \\ a_3 &= 0{,}8516, & b_3 &= 0{,}8531, \\ a_4 &= 0{,}852625. & b_4 &= 0.852627. \end{aligned}$$

Если e^x находить из пятизначных таблиц десятичных логарифмов с погрешностью, не превышающей 10^{-5}, то погрешность в определении $f(x)$ будет того же порядка, а так как при $x = 0{,}85 \ldots$ $f'(x) = (1 + x)e^x \approx 3{,}3$, то $\delta x \approx \frac{1}{3{,}3} \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-6}$. Следовательно, нет смысла строить дальнейшие приближения.

10.1.3. Метод итерации. Напишем уравнение $f(x) = 0$ в виде

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Грубое графическое изображение кривых

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$

дает значение x_0 абсциссы точки пересечения. Оно будет грубым приближением искомого значения корня. В действительности прямая $x = x_0$ встретит рассматриваемые кривые в двух разных точках.

Возьмем ту из этих двух точек, для которой наклон касательной имеет меньшую по абсолютному значению величину. Положим, например, что

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|, \tag{2}$$

и возьмем точку x_0, $y_0 = \varphi(x_0)$. Проведем из нее прямую, параллельную оси абсцисс, которая пересечет кривую $y = \psi(x)$ в точке с координатами x_1, $y_0 = \psi(x_1)$. Из точки x_1, y_0 проведем параллель к оси ординат, которая встречается с кривой $y = \varphi(x)$ в точке с координатами x_1, $y_1 = \varphi(x_1)$. Оперируем с точкой x_1, y_1 так же, как с точкой x_0, y_0, и т. д.

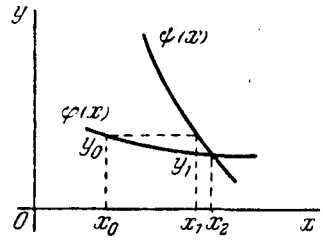


Рис. 10.3.

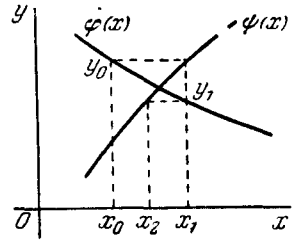


Рис. 10.4.

Если наклоны обеих кривых имеют вблизи точки пересечения одинаковый знак, то абсциссы x_1, x_2, ... стремятся к корню с одной стороны (рис. 10.3).

Если наклоны кривых имеют противоположные знаки, то абсциссы x_1, x_2, ... принимают попеременно значения, то бо́льшие, то меньшие корня (рис. 10.4).

Легко заметить, что скорость сходимости тем больше, чем больше отличаются наклоны кривых φ и ψ.

Пример. Требуется вычислить вещественный корень уравнения

$$\cos x = x - 4.$$

Построение кривых $y = \cos x$, $y = x - 4$ показывает, что абсцисса точки встречи приближенно равна 3. Берем

$$\varphi(x) = \cos x, \qquad \psi(x) = x - 4.$$

Неравенство (2) соблюдено. Имеем последовательно

$$\begin{aligned}
y_0 &= \cos x_0 = \cos 3 = -0{,}98999,\\
x_1 &= y_0 + 4 = 3{,}01001,\\
y_1 &= \cos x_1 = \cos 3{,}01001 = -0{,}99135,\\
x_2 &= y_1 + 4 = 3{,}00865,\\
y_2 &= \cos x_2 = \cos 3{,}00865 = -0{,}99013,\\
x_3 &= y_2 + 4 = 3{,}00987,\\
y_3 &= \cos x_3 = \cos 3{,}00987 = -0{,}990135,\\
x_4 &= y_3 + 4 = 3{,}009865.
\end{aligned}$$

Поэтому искомый корень равен 3,00986 со всеми верными значащими цифрами.

Замечание. Остановимся, в частности, на применении метода итерации для решения алгебраических уравнений.

Пусть требуется вычислить корень полинома

$$g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

близкий к z_0. Положим

$$x = z - z_0.$$

Мы должны найти близкий к нулю корень полинома

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

Если коэффициент $b_{n-1} = g'(z_0)$ не мал по сравнению с другими коэффициентами полинома $f(x)$, можно принять

$$\psi(x) = b_{n-1} x, \qquad \varphi(x) = -b_0 x^n - \ldots - b_{n-2} x^2 - b_n.$$

При этом

$$\psi'(0) = b_{n-1}, \qquad \varphi'(0) = 0$$

и эти величины сильно разнятся. Можно надеяться, что в точке пересечения кривых φ и ψ, лежащей вблизи от точки $x = 0$, наклоны кривых будут все еще сильно отличаться.

Пример. Вычислить близкий к 2 корень уравнения

$$z^3 - 2z - 5 = 0.$$

Положим

$$x = z - 2.$$

Получаем

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0.$$

Иначе говоря, требуется решить уравнение

$$\psi(x) = 10x = -x^3 - 6x^2 + 1 = \varphi(x).$$

Имеем последовательно:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= \varphi(0) = 1,\\ 10x_1 &= y_0 = 1, & x_1 &= 0{,}1,\\ y_1 &= \varphi(0{,}1) = 0{,}939, & &\\ 10x_2 &= y_1 = 0{,}939, & x_2 &= 0{,}0939,\\ y_2 &= \varphi(x_2) = 0{,}946\ldots, & &\\ 10x_3 &= y_2 = 0{,}946\ldots, & x_3 &= 0{,}0946\ldots,\\ y_3 &= \varphi(x_3) = 0{,}94546\ldots, & &\\ 10x_4 &= y_3 = 0{,}94546\ldots, & x_4 &= 0{,}094546\ldots,\\ y_4 &= \varphi(x_4) = 0{,}94552\ldots, & &\\ 10x_5 &= y_4 = 0{,}94552\ldots, & x_5 &= 0{,}094552\ldots \end{aligned}$$

На этой степени приближения $z = 2{,}094552\ldots$ (точный корень равен $z = 2{,}09455148\ldots$)

10.1.4. Приближенное решение системы двух уравнений. Решение системы двух уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x,\ y) &= 0,\\ f_2(x,\ y) &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

может встретиться, в частности, при нахождении комплексных корней уравнения

$$f(z) = 0. \qquad (4)$$

Действительно, положим $z = x + jy$. Тогда, если отделить вещественную часть от мнимой, уравнение (4) может быть написано в виде

$$f_1(x,\ y) + jf_2(x,\ y) = 0,$$

и мы приходим к системе (3).

Может показаться соблазнительным решить систему (3), исключив, например, переменную y и решив полученное таким образом уравнение относительно x. В большинстве случаев это оказывается невыгодным. Напротив, как мы видели в п. 10.1.1, часто бывает проще представить уравнение $f(x) = 0$ в виде равенства двух функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, так как при этом легче нарисовать соответствующие кривые.

а) *Графический способ.* Вычерчиваются графики двух уравнений системы (3). Координаты точек пересечения дают пары вещественных значений $x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2;\ \ldots$, удовлетворяющих данной системе.

Пример 1. Требуется решить систему

$$\begin{aligned} x^3 - 2xy + y^2 &= 0,\\ x^2 - 2x - y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Эта задача сводится к тому, чтобы найти точки пересечения кривой третьего порядка и параболы. Грубо нарисовав обе кривые, мы видим, что кроме очевидного корня $x = y = 1$ имеется еще только один корень, с абсциссой, близкой к $x = 0{,}7$ (рис. 10.5).

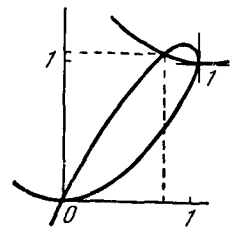


Рис. 10.5.

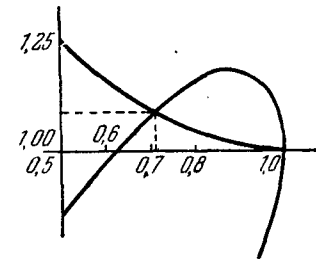


Рис. 10.6.

Более подробный чертеж интересующей нас части кривых в большем масштабе показывает, что этот вещественный корень заключен между

$x = 0{,}70$ и $x = 0{,}71$ (рис. 10.6). Последний чертеж сделан на основании следующей таблицы:

	Кривая третьего порядка	Парабола
$x = 0{,}6$	$y = 0{,}979$	$y = 1{,}16$
$x = 0{,}7$	$y = 1{,}0836$	$y = 1{,}09$
$x = 0{,}8$	$y = 1{,}158$	$y = 1{,}04$
$x = 1{,}0$	$y = 1{,}0$	$y = 1{,}0$

Представим интервал между $x = 0{,}7$ и $x = 0{,}71$ в еще большем масштабе. При этом можно заменить кривые отрезками прямых, соединяющих точки (рис. 10.7)

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0{,}7 & y = 1{,}0836 \\ x = 0{,}71 & y = 1{,}092 \end{array}\right\} \text{кривая третьего порядка,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0{,}7 & y = 1{,}09 \\ x = 0{,}71 & y = 1{,}084 \end{array}\right\} \text{парабола.}$$

Точка пересечения имеет абсциссу, заключенную между 0,704 и 0,705.

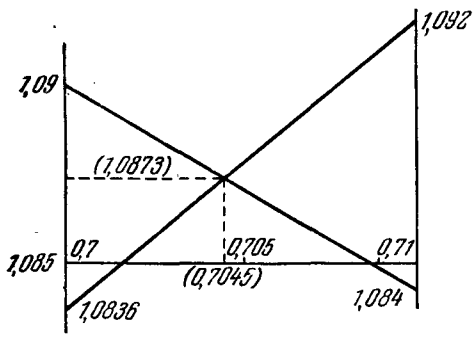


Рис. 10.7.

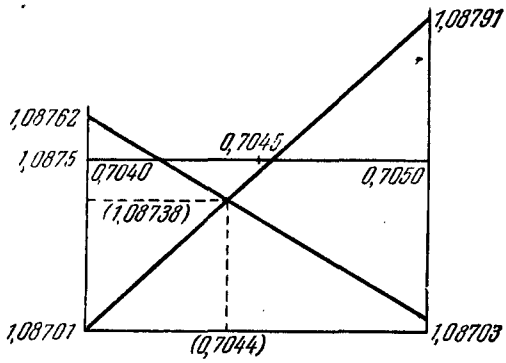


Рис. 10.8.

Действуем также в интервале 0,704; 0,705. На этот раз отрезки прямой соединяют точки (рис. 10.8)

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0{,}704 & y = 1{,}08701 \\ x = 0{,}705 & y = 1{,}087912 \end{array}\right\} \text{кривая третьего порядка,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0{,}704 & y = 1{,}087616 \\ x = 0{,}705 & y = 1{,}087025 \end{array}\right\} \text{парабола.}$$

Можно продолжать построение до бесконечности, но если остановиться на этом этапе вычисления, то пересечение кривых дает в качестве решения системы

$$x = 0{,}70440,$$
$$y = 1{,}08738.$$

(Точные значения равны $x = 0{,}704402\ldots$; $y = 1{,}087378\ldots$)

Замечание. Умножив второе уравнение на x и вычтя его из первого, можно заменить данную систему на систему

$$2x^2+y^2-xy-2x=0,$$
$$x^2-2x-y+2=0.$$

Но вычерчивание по точкам эллипса не проще, чем вычерчивание кривой третьего порядка.

Пример 2. Найти сопряженные комплексные корни уравнения

$$4z^3-3z^2-6z-3=0.$$

Положим $z=x+jy$. Получаем два уравнения:

$$4x^3-12xy^2-3x^2+3y^2-6x-3=0, \qquad (5)$$
$$y(6x^2-2y^2-3x-3)=0.$$

Решение $y=0$ соответствует вещественному корню. В плоскости переменных x, y кривая

$$6x^2-2y^2-3x-3=0$$

является гиперболой. Она изображена пунктиром на рис. 10.9 и пересекает кривую третьего порядка (5) в двух симметричных точках, координаты которых приближенно равны $x=-0{,}5$, $y=\pm 0{,}37$. Применение ранее описанного способа быстро привело бы к значениям, которые мы найдем в п. 10.2.5, пользуясь способом Лобачевского—Греффе—Данделена.

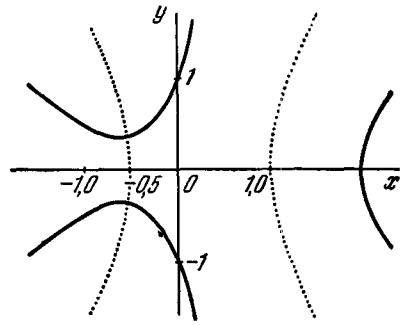


Рис. 10.9.

Замечание. Если кривые, представляющие систему (3), пересекаются под очень острым углом, точность может оказаться не слишком хорошей. Такой опасности нет при нахождении комплексных корней, когда коэффициенты уравнения вещественны, так как обе кривые при этом ортогональны.

б) *Способ Ньютона.* Пусть $x=a_0$, $y=b_0$ — первое приближение решения системы (3) и пусть α и β — точные значения этого решения.

Имеем

$$\alpha=a_0+h, \quad \beta=b_0+k.$$

Можно написать

$$f_1(\alpha, \beta)=f_1(a_0, b_0)+h\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{a_0, b_0}+k\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{a_0, b_0}+R(h, k)=0,$$

$$f_2(\alpha, \beta)=f_2(a_0, b_0)+h\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{a_0, b_0}+k\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{a_0, b_0}+Q(h, k)=0.$$

Пренебрежем членами Q и R второго порядка по h и k. Тогда можем найти приближения лучшие, чем a_0, b_0:

$$a_1=a_0+h_1, \quad b_1=b_0+k_1,$$

где h_1 и k_1 определяются системой

$$h_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{a_0, b_0}+k_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{a_0, b_0}=-f_1(a_0, b_0),$$

$$h_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{a_0, b_0}+k_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{a_0, b_0}=-f_2(a_0, b_0).$$

Теперь, отправляясь от a_1 и b_1, можно вычислить следующее приближение и т. д.

Пример. Вернемся к примеру 1 и будем исходить из приближения

$$a = 0{,}7, \quad b = 1{,}1.$$

Имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y - 2x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Отсюда получаем систему

$$-0{,}73h_1 + 0{,}8k_1 = -0{,}013,$$

$$-0{,}6\ h_1 - \quad k_1 = +0{,}01,$$

а из нее

$$h_1 = 0{,}0041, \quad k_1 = -0{,}0125,$$

$$a_1 = 0{,}7 + 0{,}0041 = 0{,}7041,$$

$$b_1 = 1{,}1 - 0{,}0125 = 1{,}0875.$$

Если действовать таким же образом, отправляясь от значений a_1, b_1, то получим

$$a_2 = a_1 + h_2, \quad b_2 = b_1 + k_2;$$

h_2, k_2 определяются из системы

$$-0{,}68773h_2 + 0{,}7668k_2 = -0{,}00030112,$$

$$0{,}5918\ h_2 + \quad k_2 = \quad 0{,}00005681,$$

откуда

$$h_2 = 0{,}00030195, \quad k_2 = -0{,}00012188$$

и

$$a_2 = 0{,}70440195, \quad b_2 = 1{,}08737812.$$

10.2. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1])

10.2.1. Численное решение уравнений третьей и четвертой степени. 1. Требуется решить уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Припомним вкратце классический способ решения. Осуществим замену переменной $x = z - \frac{a}{3}$. Тогда уравнение примет вид

$$z^3 - pz - q = 0.$$

Могут встретиться следующие случаи:

1) $p < 0$. Положим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Корни равны

$$-2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}, \quad \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi} \pm j\sqrt{-p} \cdot \frac{1}{\sin 2\varphi}.$$

[1]) См. в п. 4.1.10 матричный способ приближенного решения уравнений n-го порядка.

2) $p>0$, $\left(\frac{p}{3}\right)^3<\left(\frac{q}{2}\right)^2$. Положим

$$\sin\theta=-\frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Корни равны

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\varphi},\quad -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\varphi}\pm j\sqrt{p}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}2\varphi}.$$

3) $p>0$, $\left(\frac{p}{3}\right)^3>\left(\frac{q}{2}\right)^2$. Положим

$$\cos\varphi=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}.$$

Корни равны

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3},\quad -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\varphi}{3}\right),\quad -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\varphi}{3}\right).$$

4) $p>0$, $\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{q}{2}\right)^2$. Корни равны

$$-\frac{3q}{2p},\quad -\frac{3q}{2p},\quad \frac{3q}{2p}.$$

Замена $x=z-\frac{a}{3}$ дает корни исходного уравнения.

Пример. Требуется решить уравнение $x^3-3x^2-8x+4=0$. Положим $x=z+1$. Уравнение принимает вид

$$z^3-11z-6=0.$$

Здесь имеет место третий случай:

$$\cos\varphi=\frac{18}{22}\sqrt{\frac{3}{11}}=0{,}42728,\quad \varphi=64^\circ 42'\,17'',$$

$$z_1=2\sqrt{\frac{11}{3}}\cos 21^\circ 34'\,5''=2\sqrt{\frac{11}{3}}\cdot 0{,}92998=3{,}5615,$$

$$z_2=-2\sqrt{\frac{11}{3}}\cos 38^\circ 25'\,55''=-2\sqrt{\frac{11}{3}}\cdot 0{,}78334=-2{,}9999,$$

$$z_3=-2\sqrt{\frac{11}{3}}\cos 81^\circ 34'\,5''=-2\sqrt{\frac{11}{3}}\cdot 0{,}14664=-0{,}56158.$$

Отсюда

$$x_1=4{,}5615,\quad x_2=-1{,}9999,\quad x_3=0{,}43841.$$

Произведение $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ дает

$$x^3-3{,}00001x^2-7{,}9995x+3{,}9994.$$

2. Требуется решить уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Классический способ решения таков: рассматриваем уравнение третьей степени

$$z^3+rz^2+sz+t=0, \tag{6}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$r=-b,\quad s=ac-4d,\quad t=d(4b-a^2)-c^2.$$

Пусть Z — наибольший вещественный корень уравнения (6). Этот корень может быть найден предыдущим способом. Вычисляем величины:

$$p=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b+Z}, \quad q=\frac{Z}{2}+\varepsilon\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2-d},$$

$$p'=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b+Z}, \quad q'=\frac{Z}{2}-\varepsilon\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2-d},$$

в которых

$$\varepsilon=+1, \quad \text{если} \quad \frac{aZ}{2}-c>0,$$

$$\varepsilon=-1, \quad \text{если} \quad \frac{aZ}{2}-c<0.$$

Искомые корни суть корни двух уравнений

$$x^2+px+q=0,$$

$$x^2+p'x+q'=0.$$

Пример. Требуется решить уравнение

$$x^4+2x^3+3x^2-2x+1=0.$$

Получаем

$$r=-3, \quad s=-8, \quad t=4.$$

Вспомогательное уравнение

$$z^3-3z^2-8z+4=0$$

было только что решено. Поэтому $Z=4{,}5615$.

Имеем $\varepsilon=+1$ и

$$p=1+\sqrt{1-3+4{,}5615}=2{,}6005, \quad p'=1-\sqrt{1-3+4{,}5615}=-0{,}6005,$$

$$q=\frac{4{,}5615}{2}+\sqrt{\left(\frac{4{,}5615}{2}\right)^2-1}=4{,}33058,$$

$$q'=\frac{4{,}5615}{2}-\sqrt{\left(\frac{4{,}5615}{2}\right)^2-1}=0{,}23092.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$x^2+2{,}6005x+4{,}33058=0,$$

$$x^2-0{,}6005x+0{,}23092=0,$$

корни которых

$$-1{,}3002\pm1{,}6248j, \quad 0{,}3002\pm0{,}37519j.$$

Вычислив произведение левых частей обоих уравнений второй степени, находим

$$x^4+2{,}0000x^3+2{,}9999x^2-2{,}000005x+1{,}00001=0,$$

что является превосходной проверкой вычислений.

10.2.2. Схема Горнера. Эта схема позволяет удобно расположить вычисления при подстановке числа в полином.

Даны полином

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{7}$$

и некоторое значение $x=\alpha$. Напишем очевидное равенство

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x)+f(\alpha), \tag{8}$$

где $f_1(x)$ — некоторый полином степени $n-1$ (частное от деления $f(x)$ на $x-\alpha$):

$$f_1(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}.$$

Отсюда

$$f(x)=b_0x^n+(b_1-\alpha b_0)x^{n-1}+(b_2-\alpha b_1)x^{n-2}+\ldots+(f(\alpha)-\alpha b_{n-1}). \quad (9)$$

Отождествление (7) и (9) дает

$$b_0=a_0,\quad b_1=a_1+\alpha b_0,\quad b_2=a_2+\alpha b_1,\ \ldots,\ f(\alpha)=a_n+\alpha b_{n-1}.$$

Если нужно вычислить при $x=\alpha$ значения не только f, но и ее последовательных производных, построим по образцу $f_1(x)$ полиномы $f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$, определяемые тождествами

$$f_1(x)=(x-\alpha)f_2(x)+f_1(\alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{k-1}(x)=(x-\alpha)f_k(x)+f_{k-1}(\alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Последовательное дифференцирование дает

$$f_{k-1}^{(p)}(x)=(x-\alpha)f_k^{(p)}(x)+pf_k^{(p-1)}(x),\quad f_{k-1}^{(p)}(\alpha)=pf_k^{(p-1)}(\alpha)$$
$$(p=1,\ \ldots,\ n-k).$$

Следовательно,

$$f^{(p)}(\alpha)=pf_1^{(p-1)}(\alpha)=p(p-1)f_2^{(p-2)}(\alpha)=\ldots=p!\,f_p(\alpha).$$

Все свелось к нахождению величин $f_p(\alpha)=\frac{1}{p!}f^{(p)}(\alpha)$, которое выполняется по тому же образцу, что и нахождение $f(\alpha)$. Последовательно находятся величины

$$c_0=b_0=a_0,\quad c_1=b_1+\alpha c_0,\quad c_2=b_2+\alpha c_1,\ \ldots,\ f_1(\alpha)=b_{n-1}+\alpha c_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_0=g_0=\ldots=a_0,\quad h_1=g_1+\alpha h_0,\quad h_2=g_2+\alpha h_1,\ \ldots,\ f_p(\alpha)=g_{n-p}+\alpha h_{n-p-1}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вычисление производится механически, если расположить эти величины по приведенной здесь схеме Горнера:

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$ a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
		αb_0	αb_1	αb_2	$\ldots$ αb_{n-3}	αb_{n-2}	αb_{n-1}
$b_0=a_0$		b_1	b_2	b_3	$\ldots$ b_{n-2}	b_{n-1}	$f(\alpha)$
		αc_0	αc_1	αc_2	$\ldots$ αc_{n-3}	αc_{n-2}	
$c_0=a_0$		c_1	c_2	c_3	$\ldots$ c_{n-2}	$f'(\alpha)$	
$\ldots$							
		g_1	g_2	$\ldots$	g_{n-p-1}	g_{n-p}	
		αh_0	αh_1	$\ldots$	αh_{n-p-2}	αh_{n-p-1}	
$h_0=a_0$		h_1	h_2	$\ldots$	h_{n-p-1}	$\frac{1}{p!}f^{(p)}(\alpha)$	
$\ldots$							

Пример. Дан многочлен $f(x)=x^5+20x^4-10x^3+2x^2-3x-15$. Для $\alpha=-1$ схема осуществляется так:

1	20	−10	2	−3	−15
	−1	−19	29	−31	34
1	19	−29	31	−34	$19=f(-1)$
	−1	−18	47	−78	
	18	−47	78	$-112=f'(-1)$	
	−1	−17	64		
1	17	−64	$142=\frac{1}{2}f''(-1)$		
	−1	−16			
1	16	$-80=\frac{1}{6}f'''(-1)$			
	−1				
	$15=\frac{1}{24}f^{IV}(-1)$				

$1=\frac{1}{120}f^{V}(-1)$

10.2.3. Построение Лилла. Это построение осуществляет графически операции, дающие коэффициенты b_0, b_1, ..., $b_n=f(\alpha)$ из схемы Горнера. Иначе говоря, оно графически дает результат подстановки числа α в полином

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Дан квадрат $MNPQ$, стороны которого ориентированы в направлении, указанном стрелками (рис. 10.10). Выберем единицу длины и отложим от точки O параллельно стороне MN отрезок длиной a_0. Если число a_0 положительно, то отрезок откладывается в направлении MN, если оно отрицательно, то в обратном направлении. Получаем точку A_0. От этой точки параллельно стороне NP откладываем отрезок длиной a_1 при той же договоренности о знаках. Получаем точку A_1. Продолжаем таким же образом построение, проводя параллели к последовательным сторонам квадрата. Получаем точки A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n. После этого из точки O проводим луч, образующий с лучом OA_0 такой угол θ, что $\operatorname{tg}\theta=\alpha$. Он будет, следовательно, справа от OA_0 при отрицательном α и слева — при положительном. Этот луч пересекает A_0A_1 в точке B_0. Восставим в B_0 перпендикуляр к OB_0, пересекающий A_1A_2 в точке B_1, и т. д. Последний перпендикуляр, восставленный из точки B_{n-2}, пересекает прямую $A_{n-1}A_n$ в такой точке B_{n-1}, что $B_{n-1}A_n=f(\alpha)$. Действительно, имеем

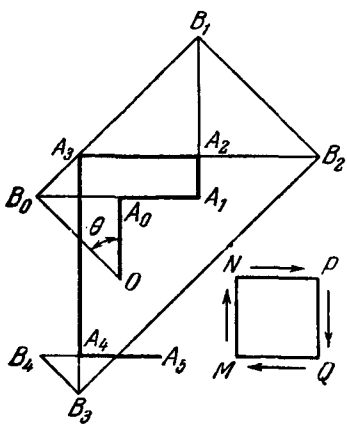


Рис. 10.10.

$$B_0A_0=a_0\alpha,\quad B_0A_1=a_0\alpha+a_1=b_1,$$
$$B_1A_1=b_1\alpha,\quad B_1A_2=b_1\alpha+a_2=b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Таким образом, операции первой строки схемы Горнера осуществлены графически. Если точка B_{n-1} совпадает с A_n, то $\alpha = \operatorname{tg}\theta$ таково, что $f(\alpha) = 0$. Следовательно, α есть корень. Отсюда получаем способ нахождения „на ощупь" вещественных корней полинома.

Рис. 10.10 составлен для полинома

$$2x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2;$$

тонкие линии показывают подстановку $\alpha = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. Находим $B_4A_5 = 3$.

10.2.4. Способ Лагранжа. Пусть $f_1(x_1)$ — алгебраическое уравнение, которое нужно решить. Предположим, что требуется найти корень α, заключенный между двумя последовательными целыми числами

$$a_1 \quad \text{и} \quad a_1 + 1.$$

Производим замену переменных

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}.$$

Получаем при этом алгебраическое уравнение $f_2(x_2)$, один корень которого заключен между $+1$ и бесконечностью. Пусть a_2 и $a_2 + 1$ — два целых числа, между которыми лежит этот корень. Производим замену переменной $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ и т. д. Искомый корень равен

$$x_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Если он рационален, то эта непрерывная дробь конечна.

Пример. Требуется определить заключенный между $+3$ и $+4$ корень уравнения

$$f_1(x_1) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 12x_1 - 1 = 0.$$

Положим $x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}$. Получаем уравнение

$$f_2(x_2) = 10x_2^3 - 24x_2^2 - 15x_2 - 2 = 0,$$

корень которого, больший чем $+1$, заключен между 2 и 3. На это указывает то обстоятельство, что в ряду чисел $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$, ... впервые перемена знака наблюдается при переходе от $f_2(2)$ к $f_2(3)$. Положим

$$x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}.$$

Получаем уравнение

$$f_3(x_3) = 48x_3^3 - 9x_3^2 - 36x_3 - 10 = 0,$$

корень которого, больший чем $+1$, заключен между 1 и 2. Положим

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}.$$

Получаем уравнение

$$f_4(x_4) = 7x_4^3 - 90x_4^2 - 135x_4 - 48 = 0,$$

корень которого, больший чем $+1$, заключен между 14 и 15. Положим

$$x_4 = 14 + \frac{1}{x_5}.$$

Получаем уравнение

$$f_5(x_5) = 370x_5^3 - 1461x_5^2 - 204x_5 - 7 = 0,$$

корень которого, больший чем $+1$, заключен между 4 и 5.

Если здесь остановить приближение, то искомый корень будет заключен между

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \frac{1}{4}}}} = 3{,}34078$$

и

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \frac{1}{5}}}} = 3{,}34080.$$

10.2.5. Метод Лобачевского — Греффе — Данделена. Дано алгебраическое уравнение

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0. \tag{10}$$

Коэффициенты A_0, A_1, ..., A_n вещественны. Обозначим корни уравнения через x_1, x_2, ..., x_n. Излагаемый способ решения опирается на следующие положения:

а) Если уравнение (10) имеет k корней x_1, x_2, ..., x_k, модули которых имеют порядок величины, значительно больший, чем модули $n-k$ других корней x_{k+1}, ..., x_n, то уравнение можно разъединить на два уравнения:

$$A_0x^k + A_1x^{k-1} + \ldots + A_k = 0, \tag{11}$$

корнями которого приближенно будут x_1, ..., x_k, и

$$A_kx^{n-k} + A_{k+1}x^{n-k-1} + \ldots + A_n = 0, \tag{12}$$

корнями которого приближенно будут x_{k+1}, ..., x_n.

Действительно, пусть для определенности $k = 2$. Тогда из представления

$$f(x) = A_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$$

находим

$$A_1 = -A_0(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \approx -A_0(x_1 + x_2),$$

$$A_2 = A_0(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) \approx A_0x_1x_2.$$

Уравнение

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0 \tag{13}$$

имеет коэффициенты, близкие к коэффициентам уравнения

$$A_0x^2 - A_0(x_1 + x_2)x + A_0x_1x_2 = 0.$$

Следовательно, и корни уравнения (13) близки к корням x_1 и x_2 этого последнего уравнения.

Аналогично проводится рассуждение для любого k.

Уравнение (12) найдем, если произведем замену переменной $x=\frac{1}{z}$ и повторим предыдущее рассуждение.

Пример. Уравнение

$$x^4-15\,003x^3+50\,045\,002x^2-150\,030\,000x+100\,000\,000=0$$

имеет корни 10 000, 5000, 2 и 1. Уравнение $x^2-15\,003x+50\,045\,002=0$ имеет корни 9997 и 5006; уравнение $50\,045\,002x^2-150\,030\,000x+100\,000\,000=0$ имеет корни 1,0008 и 1,9964.

б) Если два числа a и b таковы, что $|a|<|b|$, и если ε — сколь угодно малое положительное число, то можно всегда найти число p, настолько большое, что

$$\left|\frac{a}{b}\right|^p<\varepsilon.$$

в) Поставим перед собой задачу построить уравнение, имеющее в качестве корней величины, противоположные квадратам корней уравнения (10), т. е. $-x_1^2, \ldots, -x_n^2$. Для этого достаточно найти произведение $f(x)f(-x)$ и заменить $-x^2$ на x. Тогда получим

$$A_0^2x^n+\left\{\begin{matrix}A_1^2\\-2A_0A_2\end{matrix}\right\}x^{n-1}+\left\{\begin{matrix}A_2^2\\-2A_1A_3\\+2A_0A_4\end{matrix}\right\}x^{n-2}+\ldots=0. \qquad (14)$$

Закон образования коэффициентов прост. Коэффициент ранга k равен квадрату коэффициента ранга k уравнения (10), к которому прибавляют удвоенные произведения симметрично расположенных коэффициентов, попеременно сопровождаемые знаками —, +, —, +, ...

Метод Лобачевского — Греффе — Данделена заключается в следующем. Способом, описанным в в), из уравнения (10) получают уравнение (14). Затем из уравнения (14) таким же способом получают уравнение, имеющее в качестве корней $-x_1^4, \ldots, -x_n^4$, и т. д., вплоть до уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (15)$$

имеющего корни $-x_1^{2^p}, \ldots, -x_n^{2^p}$.

Если p достаточно велико, то уравнение (15) может быть разъединено на некоторое число частичных уравнений, имеющих в качестве корней, с точностью до знака, корни уравнения (10), возведенные в степень 2^p.

Действительно, если разбить корни на группы, отнеся к одной группе все корни, имеющие общий модуль, а затем расположить эти группы в порядке убывания модулей, то после возведения в степень 2^p модули корней одной группы становятся пренебрежимо малыми по сравнению с модулями корней предыдущей группы.

Пользуясь методом Лобачевского — Греффе — Данделена, мы можем встретиться с несколькими различными случаями.

Первый случай. Все корни уравнения (10) простые, а их модули различны. Следовательно, все корни вещественны, так как коэффициенты уравнения (10) вещественны по предположению. Разъединение даст частичные уравнения первого порядка.

Этот случай характеризуется при возрастании p правильным возрастанием (или убыванием) коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, возможно лишь начиная с достаточно больших p. Коэффициенты всегда будут положительны.

Если p достаточно велико и если считать, что корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположены в порядке убывания модулей, то можно написать

$$|x_1|^{2^p} \sim \left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \text{откуда} \quad \log|x_1| \sim \frac{1}{2^p}\log\left|\frac{a_1}{a_0}\right|;$$

. . . . . .

$$|x_k|^{2^p} \sim \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|, \quad \text{откуда} \quad \log|x_k| \sim \frac{1}{2^p}\log\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|.$$

. . . . . .

Остается определить момент, когда можно считать p достаточно большим. Это зависит, очевидно, от точности, которую мы хотим получить при вычислении x_k. Если мы располагаем таблицей логарифмов для чисел от 1 до 10 000, то можем получить только 5 значащих цифр. Следовательно, p будет достаточно велико, если при вычислении коэффициент a_k оказывается равным, с точностью до первых пяти значащих цифр, квадрату предыдущего коэффициента того же ранга *), иначе говоря, если прибавление удвоенных произведений не изменяет первых пяти значащих цифр квадрата предыдущего коэффициента. Будем говорить, что при таком значении p коэффициент a_k удовлетворяет условиям разъединения. Знак, который нужно поставить перед найденным модулем $|x_k|$, получается с помощью проб.

Пример. Требуется решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 12x - 1 = 0$. Последовательность вычислений ясна из нижеследующей таблицы:

p	a_0	a_1	a_2	a_3
0	2	−3	−12	−1
	4	9 +48	144 −6	1
1	4	57	138	1
	16	3 249 −1 104	19 044 −114	1
2	16	2 145	18 930	1
	256	$46\,010 \cdot 10^2$ $-6\,058 \cdot 10^2$	$35\,834 \cdot 10^4$ [1]) $0 \cdot 10^4$	1
3	256	$39\,952 \cdot 10^2$	$35\,834 \cdot 10^4$	1
	65 536	$15\,962 \cdot 10^9$ $-183 \cdot 10^9$	$12\,841 \cdot 10^{13}$ $0 \cdot 10^{13}$	1
4	65 536	$15\,779 \cdot 10^9$	$12\,841 \cdot 10^{13}$	1
	$42\,950 \cdot 10^5$	$24\,898 \cdot 10^{22}$ $-2 \cdot 10^{22}$	$16\,489 \cdot 10^{30}$ $0 \cdot 10^{30}$	1

*) То есть при той же степени неизвестного.

Продолжение

p	a_0	a_1	a_2	a_3
5	$42\,950 \cdot 10^5$	$24\,896 \cdot 10^{22}$	$16\,489 \cdot 10^{30}$	1
	$18\,447 \cdot 10^{15}$	$61\,981 \cdot 10^{48}$ [1] $0 \cdot 10^{48}$	$27\,189 \cdot 10^{64}$ $0 \cdot 10^{64}$	1
6	$18\,447 \cdot 10^{15}$	$61\,981 \cdot 10^{48}$	$27\,189 \cdot 10^{64}$	1

[1]) Коэффициент a_2 удовлетворяет условиям разъединения при $p=3$; коэффициент a_1 — при $p=6$. Большое различие между этими двумя значениями p показывает, что два бо́льших по модулю корня имеют одинаковый порядок величины, а меньший по модулю корень отличается весьма значительно.

$$\log|x_1| \sim \frac{1}{2^6}\log\left(\frac{61\,981}{18\,447}\cdot 10^{33}\right) = \frac{1}{64}\log(3{,}3600\cdot 10^{33}), \quad |x_1| \sim 3{,}3407;$$

$$\log|x_2| \sim \frac{1}{2^6}\log\left(\frac{27\,189}{61\,981}\cdot 10^{16}\right) = \frac{1}{64}\log(0{,}43867\cdot 10^{16}), \quad |x_2| \sim 1{,}7555;$$

$$\log|x_3| \sim \frac{1}{2^6}\log\left(\frac{1}{27\,189}\cdot 10^{-64}\right) = \frac{1}{64}\log(0{,}36780\cdot 10^{-68}), \quad |x_3| \sim 0{,}085254.$$

Находим, что левая часть уравнения имеет попеременно противоположные знаки в точках -2, -1, 0, $+\infty$, откуда

$$x_1 = +3{,}3407, \quad x_2 = -1{,}7555, \quad x_3 = -0{,}085254.$$

Второй случай. Несколько корней имеют один и тот же модуль. Важнейшим является случай, когда имеется несколько пар сопряженных комплексных корней. Он характеризуется колебаниями одного или нескольких коэффициентов при возрастании p.

Пусть, например, этим коэффициентом будет a_k. Сумма удвоенных произведений $-2a_{k-1}a_{k+1}+2a_{k-2}a_{k+2}-\ldots$ никогда не будет пренебрежимо мала по сравнению с первыми значащими цифрами a_k^2, как бы ни было велико p. Положим, что имеется только пара сопряженных комплексных корней. Если p достаточно велико, чтобы все остальные коэффициенты, кроме a_k, удовлетворяли условиям разъединения, то можно разъединить уравнение на несколько уравнений первого порядка и одно уравнение второго порядка

$$a_{k-1}x^2 + a_k x + a_{k+1} = 0.$$

Оно, с точностью до знака, будет иметь в качестве корней искомые комплексные корни, возведенные в степень 2^p. Модуль этих комплексных корней ρ находится из соотношения

$$(\rho^2)^{2^p} = \left|\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right|, \quad \text{откуда} \quad \log\rho = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^p}\log\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k-1}}\right|. \tag{16}$$

Вычислив вещественные корни уравнения (10) и обозначив через

$$x_k = \alpha + j\beta, \qquad x_{k+1} = \alpha - j\beta$$

два искомых комплексных корня, получим

$$-\frac{A_1}{A_0} = 2\alpha + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+2} + \ldots + x_n.$$

Отсюда находим α, а следовательно, и $\beta = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$.

Пример. Требуется решить уравнение $4x^3 - 3x^2 - 6x - 3 = 0$. Вычисления приведены в следующей таблице:

p	a_0	a_1	a_2 [1])	a_3
0	4	−3	−6	−3
	16	9 +48	36 −18	9
1	16	57	18	9
	526	3 249 +576	324 −1 026	81
2	256	2 673	−702	81
	65 536	$71\,449 \cdot 10^2$ $+3\,594 \cdot 10^2$	$49\,280 \cdot 10$ $-43\,302 \cdot 10$	6 561
3	65 536	$75\,043 \cdot 10^2$	$5\,978 \cdot 10$	6 561
	$42\,950 \cdot 10^5$	$56\,314 \cdot 10^9$ $-7 \cdot 10^9$	$-3\,573 \cdot 10^6$ $-98\,471 \cdot 10^6$	$43\,047 \cdot 10^3$
4	$42\,950 \cdot 10^5$	$56\,307 \cdot 10^9$	$-94\,898 \cdot 10^6$	$43\,047 \cdot 10^3$

[1]) Флуктуация коэффициента a_2 делает очевидным существование пары сопряженных комплексных корней, модуль которых меньше абсолютного значения вещественного корня.

$$\log|x_1| = \frac{1}{2^4}\log\left(\frac{56\,307}{42\,950}\cdot 10^4\right) = \frac{1}{16}\log(1{,}311\cdot 10^4), \quad |x_1| = 1{,}8086;$$

$$\log\rho = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\log\left(\frac{43\,047}{56\,307}\cdot 10^{-6}\right) = \frac{1}{32}\log(0{,}76451\cdot 10^{-6}), \quad \rho = 0{,}6439,$$

$$\frac{3}{4} = 1{,}8086 + 2\alpha, \quad \alpha = -0{,}5293, \quad \beta = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} = 0{,}36667,$$

$$x_1 = +1{,}8086, \quad x_2 = -0{,}5293 + 0{,}3666j, \quad x_3 = -0{,}5293 - 0{,}3666j.$$

Случай, когда имеются две пары сопряженных комплексных корней, характеризуется колебаниями двух не соседних коэффициентов. Когда для других коэффициентов будут получены условия разъединения, оба квадратных уравнения дадут, как и в предыдущем случае, модули ρ и ρ' комплексных корней.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $(s = n-4)$ — вещественные корни. Получим

$$-\frac{A_1}{A_0} = 2\alpha + 2\alpha' + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_s,$$

$$(-1)^{n-1}\frac{A_{n-1}}{A_0} = \rho^2\rho'^2(x_2x_3\ldots x_s + x_1x_3\ldots x_s + \ldots + x_1x_2\ldots x_{s-1}) + 2(\alpha\rho'^2 + \alpha'\rho^2)x_1x_2\ldots x_s.$$

Отсюда находим

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \beta = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = \sqrt{\rho'^2 - \alpha'^2}.$$

Третий случай. Пары комплексных сопряженных корней — не единственный случай, когда два корня имеют одинаковый модуль. Это будет также, если имеется двойной корень или если два корня имеют противо-

положные значения, что сводится к двойному корню уравнения, полученного в результате первого преобразования уравнения (10) ($p=1$). Модуль этих корней может быть вычислен по формуле (16). Прикидка в уравнении (10) покажет, что будет иметь место: $x_k=\rho$, $x_{k+1}=-\rho$ или $x_k=x_{k+1}=\pm\rho$. Коэффициент a_k во время возрастания p будет изменяться иначе, чем в предыдущем случае, он не колеблется, а все время остается положительным и стремится стать равным не квадрату коэффициента a_k, соответствующего $p-1$, а половине этого квадрата.

Пример. Требуется решить уравнение $2x^3+3x^2-12x+7=0$. Вычисления приведены в таблице:

p	a_0	a_1	a_2	a_3
0	2	3	—12	7
	4	9 +48	144 —42	49
1	4	57	102	49
	16	3 249 —816	10 404 —5 586	2 401
2	16	2 433	4 818	2 401
	256	$59\,195\cdot10^2$ $-1\,542\cdot10^2$	$23\,213\cdot10^3$ $-11\,683\cdot10^3$	$57\,648\cdot10^2$
3	256	$57\,653\cdot10^2$	$11\,530\cdot10^3$	$57\,648\cdot10^2$
	65 536	$33\,238\cdot10^9$ $-6\cdot10^9$	$132\,936\cdot10^9$ $-66\,472\cdot10^9$	$33\,232\cdot10^9$
4	65 536	$33\,232\cdot10^9$	$66\,464\cdot10^9$	$33\,232\cdot10^9$

Условия разъединения выполняются для a_1, но не для a_2. Удвоенное произведение $2a_1a_3$ становится равным $\frac{1}{2}a_2^2$, что доказывает наличие двойного корня.

Имеем

$$\log|x_1|=\frac{1}{2^4}\log\left(\frac{33\,232}{65\,536}\cdot10^9\right),\quad\text{откуда}\quad|x_1|=3{,}500,\quad x_1=-3{,}500;$$

$$\log\rho=\frac{1}{2}\frac{1}{2^4}\log\frac{33\,232}{33\,232},\quad\text{откуда}\quad\rho=1.$$

Прикидка показывает, что $x_2=x_3=1$.

Четвертый случай. В этом довольно редком случае имеется вещественный корень $x_k=\pm\rho$ и два сопряженных комплексных корня $x_{k+1}=\rho e^{j\varphi}$, $x_{k+2}=\rho e^{-j\varphi}$. При возрастании p коэффициенты a_k и a_{k+1} не удовлетворяют условиям разъединения. Так как они расположены последовательно, то это характеризует случай одного вещественного и двух комплексных корней с одинаковым модулем.

Когда все остальные коэффициенты удовлетворяют условиям разъединения, корни x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, возведенные в степень 2^p и взятые со знаком минус, будут представлять собой решения уравнения

$$a_{k-1}x^3+a_kx^2+a_{k+1}x+a_{k+2}=0.$$

Отсюда

$$\log \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^p} \log \left| \frac{a_{k+2}}{a_{k-1}} \right|;$$

вещественная часть α и мнимая β получаются, как показано выше.

Может быть еще, что $x_k = \pm \rho$, $x_{k+1} = \pm \rho$, $x_{k+2} = \rho e^{j\varphi}$, $x_{k+3} = \rho e^{-j\varphi}$. Когда коэффициенты, кроме a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, удовлетворяют условиям разъединения, корни x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, возведенные в степень 2^p и взятые со знаком минус, будут решениями уравнения

$$a_{k-1}x^4 + a_k x^3 + a_{k+1}x^2 + a_{k+2}x + a_{k+3} = 0.$$

Отсюда $\log \rho = \frac{1}{4} \frac{1}{2^p} \log \left| \frac{a_{k+3}}{a_{k-1}} \right|$. Вещественная часть α и мнимая β определяются, как в предыдущем случае.

Если исключить случай корней кратности больше 2, то мы рассмотрели здесь все возможные случаи, когда уравнение (10) с вещественными коэффициентами имеет корни с одинаковым модулем.

Пример. Требуется решить уравнение

$$x^6 - 15x^5 + 56x^4 - 56x^3 - 56x^2 + 172x - 120 = 0.$$

p	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	1	−15	56	−56	−56	172	−120
	1	225 −112	3 136 −1 680 −112	3 136 +6 272 −5 160 +240	3 136 +19 264 −13 440	29 584 −13 440	14 400
1	1	113	1 344	4 488	8 960	16 144	14 400
	1	12 769 −2 688	$18\,063 \cdot 10^2$ $-10\,142 \cdot 10^2$ $+179 \cdot 10^2$	$20\,142 \cdot 10^3$ $-24\,084 \cdot 10^3$ $+3\,648 \cdot 10^3$ $-29 \cdot 10^3$	$80\,282 \cdot 10^3$ $-144\,908 \cdot 10^3$ $+38\,707 \cdot 10^3$	$26\,063 \cdot 10^4$ $-25\,805 \cdot 10^4$	$20\,736 \cdot 10^4$
2	1	10 081	$8\,100 \cdot 10^2$	$-323 \cdot 10^3$	$-25\,919 \cdot 10^3$	$258 \cdot 10^4$	$20\,736 \cdot 10^4$
	1	$10\,163 \cdot 10^4$ $-162 \cdot 10^4$	$65\,610 \cdot 10^7$ $+651 \cdot 10^7$ $-5 \cdot 10^7$	$10\,433 \cdot 10^7$ $+4\,198\,878 \cdot 10^7$ $+5\,200 \cdot 10^7$ $-40 \cdot 10^7$	$67\,179 \cdot 10^{10}$ $+167 \cdot 10^{10}$ $+33\,592 \cdot 10^{10}$	$66\,564 \cdot 10^8$ $+107\,491\,277 \cdot 10^8$	$42\,998 \cdot 10^{12}$
3	1	$10\,101 \cdot 10^4$	$66\,256 \cdot 10^7$	$42\,145 \cdot 10^9$	$100\,938 \cdot 10^{10}$	$10\,756 \cdot 10^{12}$	$42\,998 \cdot 10^{12}$
	1	$10\,002 \cdot 10^{12}$ $-1 \cdot 10^{12}$	$43\,898 \cdot 10^{19}$ $-843 \cdot 10^{19}$ $0 \cdot 10^{19}$	$17\,762 \cdot 10^{23}$ $-13\,375 \cdot 10^{23}$ $+21 \cdot 10^{23}$ $0 \cdot 10^{23}$	$101\,885 \cdot 10^{23}$ $-90\,662 \cdot 10^{23}$ $+5\,689 \cdot 10^{23}$	$11\,569 \cdot 10^{28}$ $-8\,680 \cdot 10^{28}$	$18\,488 \cdot 10^{29}$
4	1	$10\,001 \cdot 10^{12}$	$43\,055 \cdot 10^{19}$	$4\,408 \cdot 10^{23}$	$16\,921 \cdot 10^{25}$	$2\,889 \cdot 10^{28}$	$18\,488 \cdot 10^{29}$
	1	$1\,002 \cdot 10^{28}$ $-1 \cdot 10^{28}$	$18\,537 \cdot 10^{43}$ $-1 \cdot 10^{43}$ $0 \cdot 10^{43}$	$19\,430 \cdot 10^{49}$ $-14\,571 \cdot 10^{49}$ $0 \cdot 10^{49}$ $0 \cdot 10^{49}$	$28\,632 \cdot 10^{54}$ $-25\,469 \cdot 10^{54}$ $+1\,592 \cdot 10^{54}$	$83\,463 \cdot 10^{58}$ $-62\,567 \cdot 10^{58}$	$34\,181 \cdot 10^{62}$
	1	$10\,002 \cdot 10^{28}$	$18\,536 \cdot 10^{43}$	$4\,859 \cdot 10^{49}$	$4\,755 \cdot 10^{54}$	$20\,896 \cdot 10^{58}$	$34\,181 \cdot 10^{62}$

Как показывает таблица (стр. 686), коэффициенты a_1 и a_2 удовлетворяют условиям разъединения. Следовательно, имеется два вещественных корня. Но три последовательных коэффициента a_3, a_4, a_5 не удовлетворяют этим условиям. Следовательно, имеются 4 корня с одинаковым модулем, связанные в одном уравнении четвертого порядка.

Имеем

$$\log|x_1| = \frac{1}{2^5}\log(1{,}0002\cdot 10^{32}), \qquad |x_1| = 10{,}0005,$$

$$\log|x_2| = \frac{1}{2^5}\log\left(\frac{18\,536}{10\,002}\cdot 10^{15}\right), \qquad |x_2| = 3{,}00002,$$

$$\log\rho = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^5}\log\left(\frac{34\,181}{18\,536}\cdot 10^{19}\right), \qquad \rho = 1{,}4142,$$

$$15 = 10{,}0005 + 3{,}00002 + 2\alpha, \qquad \alpha = 0{,}9996,$$

$$\beta = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}, \qquad \beta = 1{,}0004.$$

Точные значения корней равны 10, 3, $\pm\sqrt{2}$, $1 \pm j$.

Пятый случай. Если уравнение (10) имеет два вещественных корня x_k, x_{k+1}, абсолютные значения которых очень близки, то коэффициент a_k стремится к условиям разъединения очень медленно. Если условия разъединения уже получены для других коэффициентов, то можно в этот момент разъединить уравнение на некоторое число уравнений первой степени и одно уравнение второй степени, имеющее в качестве корней взятые со знаком минус степени 2^p величин x_k, x_{k+1}. Вычисления при этом аналогичны вычислениям для случая двойного корня, но коэффициент a_k не будет равен половине квадрата предыдущего коэффициента того же ранга.

Пример. Требуется решить уравнение $x^3 - 65x^2 + 1087x - 1023 = 0$. Вычисления приведены в таблице:

p	a_0	a_1	a_2	a_3
0	1	—65	1 087	—1 023
	1	4 225 —2 174	$11\,816\cdot 10^2$ $-1\,330\cdot 10^2$	$10\,465\cdot 10^2$
1	1	2 051	$10\,486\cdot 10^2$	$10\,465\cdot 10^2$
	1	$42\,066\cdot 10^2$ $-20\,972\cdot 10^2$	$10\,996\cdot 10^8$ $-43\cdot 10^8$	$10\,952\cdot 10^8$
2	1	$21\,094\cdot 10^2$	$10\,953\cdot 10^8$	$10\,952\cdot 10^8$
	1	$44\,496\cdot 10^8$ $-21\,906\cdot 10^8$	$11\,997\cdot 10^{20}$ $0\cdot 10^{20}$	$11\,995\cdot 10^{20}$
3	1	$22\,590\cdot 10^8$	$11\,997\cdot 10^{20}$	$11\,995\cdot 10^{20}$
	1	$51\,031\cdot 10^{20}$ $23\,994\cdot 10^{20}$	$14\,393\cdot 10^{44}$ $0\cdot 10^{44}$	$14\,388\cdot 10^{44}$
4	1	$27\,037\cdot 10^{20}$	$14\,393\cdot 10^{44}$	$14\,388\cdot 10^{44}$

Коэффициент a_1 лишь очень медленно стремится к условиям разъединения. Для коэффициента a_2 они выполняются уже при $p = 3$.

Имеем

$$\log|x_3| = \frac{1}{2^4}\log\frac{14\,388}{14\,393}, \qquad |x_3| = 1{,}00002,$$

$$\log|x_1| = \frac{1}{2^4}\log\frac{27\,037 + 10^2\sqrt{15\,528}}{2}\,10^{20}, \quad |x_1| = 32{,}996,$$

$$\log|x_2| = \frac{1}{2^4}\log\frac{27\,037 - 10^2\sqrt{15\,528}}{2}\,10^{20}, \quad |x_2| = 31{,}003.$$

Точные значения корней равны 1, 31 и 33.

10.3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Приближение функции полиномами

10.3.1. Введение. Если дана функция $f(x)$ вещественной переменной x, может оказаться полезным заменить ее в данном промежутке изменения x другой функцией более простого вида. В большинстве случаев функция $f(x)$ известна лишь эмпирически, т. е. известна лишь таблица значений $b_0, b_1, \ldots, b_n$, которые она принимает при значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$ аргумента. Самая простая мысль состоит в том, чтобы заменить $f(x)$ полиномом n-й степени, принимающим те же значения, что и $f(x)$. Иначе говоря, заменить кривую $f(x)$, проходящую через $n+1$ точку $a_0, b_0; \ldots; a_n, b_n$ параболой n-й степени, проходящей через те же точки. При этом могут представиться два случая: 1) абсциссы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ распределены неравномерно; 2) абсциссы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию. Это наиболее частый случай, и мы на нем остановимся подробнее.

Можно поступить и иначе: вместо того чтобы искать параболу n-й степени, проходящую точно через $n+1$ точку, можно найти параболу низшей степени p, проходящую возможно ближе к этим $n+1$ точкам. Если при этом абсциссы находятся в арифметической прогрессии, вычисления упростятся, но лишь в небольшой степени.

Функция $f(x)$ может быть задана также аналитически. Замена ее полиномом имеет целью получить вместо сложного аналитического выражения, плохо поддающегося расчету, гораздо более простое. Если при этом возможно вычисление последовательных производных, мы можем применить кроме способов, изложенных для эмпирических функций, еще и другие способы. Замена $f(x)$ более простой функцией должна облегчить не только вычисление значения функции для значения аргумента, отсутствующего в отправной таблице, но также и вычисление значения производной для любой точки интервала и в особенности приближенное вычисление интеграла, которое применяется, в частности, для приближенного решения дифференциальных уравнений.

10.3.2. Значения аргумента распределены неравномерно. Интерполяционный полином Лагранжа. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — значения аргумента и $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — значения функции $f(x)$. Пусть $P(x)$ — искомый полином n-й степени, принимающий те же значения при тех же значениях аргумента. Разложим на простые дроби отношение $\frac{P(x)}{D(x)}$, обозначив через $D(x)$ полином степени $n+1$:

$$(x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Получим

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{x - a_k},$$

иначе говоря,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^{n} (x - a_s).$$

Дадим x значение a_l. $P(x)$ принимает значение b_l, и все члены суммы равны нулю, кроме произведения, для которого $k = l$. Отсюда

$$b_l = A_l \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq l}}^{n} (a_l - a_s).$$

Искомый полином $P(x)$ может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l \frac{\prod\limits_{\substack{s=0 \\ s \neq l}}^{n} (x - a_s)}{\prod\limits_{\substack{s=0 \\ s \neq l}}^{n} (a_l - a_s)}.$$

Это интерполяционная формула Лагранжа. Важно отметить, что она мало удобна для быстрых вычислений, но имеет большое теоретическое значение.

Полином $P(x)$ лучше найти следующим образом. Запишем $P(x)$ в виде

$$P(x) = B_0 + B_1(x - a_0) + B_2(x - a_0)(x - a_1) + \ldots$$
$$\ldots + B_n(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}).$$

Имеем

$$P(a_0) = b_0 = B_0.$$

Рассмотрим полином

$$Q(x) = \frac{P(x) - b_0}{x - a_0} = B_1 + B_2(x - a_1) + \ldots + B_n(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1});$$

$$Q(a_1) = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} = B_1.$$

Затем рассмотрим полином

$$R(x) = \frac{Q(x) - Q(a_1)}{x - a_1} = B_2 + B_3(x - a_2) + \ldots + B_n(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1});$$

$$R(a_2) = \frac{Q(a_2) - Q(a_1)}{a_2 - a_1} = B_2$$

и т. д. Шаг за шагом определяем все коэффициенты B, что и дает искомый полином $P(x)$. Практически вычисления располагают в виде следующей таблицы:

x	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$S(x)$
a_0	$b_0 = B_0$			
a_1	b_1	$\frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} = q_1 = B_1$		
a_2	b_2	$\frac{b_2 - b_0}{a_2 - a_0} = q_2$	$\frac{q_2 - q_1}{a_2 - a_1} = r_2 = B_2$	
a_3	b_3	$\frac{b_3 - b_0}{a_3 - a_0} = q_3$	$\frac{q_3 - q_1}{a_3 - a_1} = r_3$	$\frac{r_3 - r_2}{a_3 - a_2} = s_3 = B_3$
. . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
a_n	b_n	$\frac{b_n - b_0}{a_n - a_0} = q_n$	$\frac{q_n - q_1}{a_n - a_1} = r_n$	$\frac{r_n - r_2}{a_n - a_2} = s_n$

Найдем предел ошибки, совершенной при замене $f(x)$ на $P(x)$. Рассмотрим функцию

$$F(u) = f(u) - P(u) - [f(x) - P(x)] \frac{(u - a_0)(u - a_1) \ldots (u - a_n)}{(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)}$$

и предположим, что функция $f(u)$ дифференцируется $n + 1$ раз. Имеем

$$F^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)}.$$

Функция $F(u)$ обращается в нуль при значениях

$$u = a_0, \quad a_1, \ \ldots, \ a_n \quad \text{и} \quad u = x.$$

Повторное применение теоремы Ролля позволяет показать, что производная $F^{(n+1)}(u)$ обратится в нуль при значении η, заключенном между самым большим и самым малым из предыдущих чисел. Следовательно,

$$f(x) - P(x) = R(x) = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n) \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

Если M_{n+1} — верхний предел $|f^{(n+1)}(x)|$ в интервале, содержащем все точки $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$, то

$$|R(x)| < |(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Теперь понятно, что ошибка будет тем меньше, чем ближе x будет к одной из точек a_i, и что интерполяция будет точнее, чем экстраполяция.

Пример. Экспериментально была получена таблица, определяющая некую эмпирическую функцию:

$$a_0 = 23{,}30, \quad a_2 = 25{,}25, \quad b_0 = 299, \quad b_2 = 373,$$
$$a_1 = 24{,}25, \quad a_3 = 26{,}10, \quad b_1 = 328, \quad b_3 = 415.$$

Речь идет о действительном сопротивлении антенны как функции отношения ее длины к длине волны $a = 100 \frac{l}{\lambda}$.

Найдем параболу третьей степени, проходящую через четыре данные точки.

1. Способ Лагранжа состоит в замене букв их значениями в выражении

$$P(x)=b_0\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}+b_1\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+$$
$$+b_2\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+b_3\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

После подстановки и довольно долгих вычислений находим

$$P(x)=-1{,}7992x^3+138{,}40x^2-3497{,}8x+29\,444.$$

2. Второй способ дает таблицу

x	b	q	r	s
23,30	$299=b_0=B_0$			
24,25	$328=b_1$	$30{,}5263=q_1=B_1$		
25,25	$373=b_2$	$37{,}9487=q_2$	$7{,}4224=r_2=B_2$	
26,10	$415=b_3$	$41{,}4286=q_3$	$5{,}8931=r_3$	$-1{,}7992=s_3=B_3$

Отсюда находим полином

$$P(x)=299+30{,}5263(x-23{,}30)+7{,}4224(x-23{,}30)(x-24{,}25)-$$
$$-1{,}7992(x-23{,}30)(x-24{,}25)(x-25{,}25)=$$
$$=-1{,}7992x^3+138{,}40x^2-3499x+29450,$$

который совпадает с точностью до погрешностей вычисления с уже найденным полиномом.

10.3.3. Значения переменной находятся в арифметической прогрессии. Таблица разностей. Дана функция $f(x)$, принимающая значения $b_0, b_1, \ldots, b_n$ при значениях $a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh$ переменной x.

Выражение

$$\Delta b_0=b_1-b_0=f(a+h)-f(a)$$

называют первой разностью для значения a аргумента. Первая разность для значения $a+ph$ будет

$$\Delta b_p=b_{p+1}-b_p=f[a+(p+1)h]-f(a+ph).$$

Вторую разность, третью, ..., разность k-го порядка определяют, применяя предыдущее вычисление к первой разности, второй, ..., разности порядка $k-1$:

$$\Delta b_{p+1}-\Delta b_p=\Delta^2 b_p,$$
$$\Delta^2 b_{p+1}-\Delta^2 b_p=\Delta^3 b_p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{k-1}b_{p+1}-\Delta^{k-1}b_p=\Delta^k b_p.$$

Легко заметить, что в частном случае, когда $f(x)$ представляет собой полином k-й степени, разности k-го порядка равны между собой, а разности выше k-го порядка равны нулю. Действительно, первые разности для значения x переменной — это полиномы степени $k-1$ и т. д. до разностей k-го порядка, которые сводятся к постоянному члену.

На практике, если дана таблица, определяющая эмпирическую функцию, разности разных порядков располагаются в следующую таблицу:

x	b	Δb	$\Delta^2 b$	$\Delta^3 b$
a	b_0			
		Δb_0		
$a+h$	b_1		$\Delta^2 b_0$	
		Δb_1		$\Delta^3 b_0$
$a+2h$	b_2		$\Delta^2 b_1$	
		Δb_2		
$a+3h$	b_3			

Каждый член равен разности между ближайшими снизу и сверху членами соседнего слева столбца: $\begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \Big| A \qquad A = B - C.$

Составим, например, таблицу разностей для функции $y = \cos x$ от $x = -4°$ до $x = 34°$:

x	$y = \cos x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−4	0,99756		−122	
		+183		
−2	0,99939		−122	
		+61		0
0	1,00000		−122	
		−61		0
+2	0,99939		−122	
		−183		+1
4	0,99756		−121	
		−304		0
6	0,99452		−121	
		−425		0
8	0,99027		−121	
		−546		+1
10	0,98481		−120	
		−666		+1
12	0,97815		−119	
		−785		0
14	0,97030		−119	
		−904		+3
16	0,96126		−116	
		−1020		+1
18	0,95106		−117	
		−1137		+3
20	0,93969		−114	
		−1251		+2
22	0,92718		−112	
		−1363		−1
24	0,91355		−113	
		−1476		+5
26	0,89879		−108	
		−1584		0
28	0,88295		−108	
		−1692		−2
30	0,86603		−106	
		−1798		+3
32	0,84805		−103	
		−1901		
34	0,82904			

Пример. Дана функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Таблицы дают значения $f(x)$ для значений x, меняющихся через 0,001 между 0,515 и 0,520. Получаем следующую таблицу разностей:

x	b	Δb	$\Delta^2 b$	$\Delta^3 b$	$\Delta^4 b$	$\Delta^5 b$
0,515	0,475575472717					
		790051505				
0,516	0,476365524222		—643630			
		789407875		—197		
0,517	0,477154932097		—643827		4	
		788764048		—193		1
0,518	0,477943696145		—644020		5	
		788120028		—188		
0,519	0,478731816173		—644208			
		787475820				
0,520	0,479519291993					

Замечание. Значение a не обязательно должно быть начальным. Если известны значения функции для $x = a - h$, $a - 2h$, $a - 3h$, ..., то можно, пользуясь отрицательными индексами, продолжить вверх таблицу для b и Δb, $\Delta^2 b$, ...:

x	b	Δb	$\Delta^2 b$	$\Delta^3 b$	$\Delta^4 b$
$a-4h$	b_{-4}				
		Δb_{-4}			
$a-3h$	b_{-3}		$\Delta^2 b_{-4}$		
		Δb_{-3}		$\Delta^3 b_{-4}$	
$a-2h$	b_{-2}		$\Delta^2 b_{-3}$		$\Delta^4 b_{-4}$
		Δb_{-2}		$\Delta^3 b_{-3}$	
$a-h$	b_{-1}		$\Delta^2 b_{-2}$		$\Delta^4 b_{-3}$
		Δb_{-1}		$\Delta^3 b_{-2}$	
a	b_0		$\Delta^2 b_{-1}$		$\Delta^4 b_{-2}$
		Δb_0		$\Delta^3 b_{-1}$	
$a+h$	b_1		$\Delta^2 b_0$		$\Delta^4 b_{-1}$
		Δb_1		$\Delta^3 b_0$	
$a+2h$	b_2		$\Delta^2 b_1$		$\Delta^4 b_0$
		Δb_2		$\Delta^3 b_1$	
$a+3h$	b_3		$\Delta^2 b_2$		
		Δb_3			
$a+4h$	b_4				

Интерполяционные полиномы

Найдем полином $P(x)$ n-го порядка, принимающий точно $n+1$ значение b_0, b_1, ..., b_n для значений

$$a,\ a+h,\ \ldots,\ a+nh$$

аргумента. Напишем его в нескольких видах, которые дадут нам основные классические интерполяционные полиномы.

10.3.4. Интерполяционный полином Ньютона. Напишем полином $P(x)$ в виде

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)(x-a-h) + \ldots$$
$$\ldots + A_n(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-1)h]. \quad (22)$$

Дадим последовательно величине x значения a, $a+h$, ..., $a+nh$. Тогда

$$\begin{aligned}
b_0 &= A_0,\\
b_1 &= A_0 + hA_1,\\
b_2 &= A_0 + 2hA_1 + 2!\,h^2A_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{n-1} &= A_0 + (n-1)\,hA_1 + \ldots + (n-1)!\,h^{n-1}A_{n-1},\\
b_n &= A_0 + nhA_1 + \ldots + n!\,h^nA_n.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
A_0 &= b_0,\\
A_1 &= \frac{b_1-b_0}{h} = \frac{\Delta b_0}{h},\\
A_2 &= \frac{b_2-b_1-(b_1-b_0)}{2!\,h^2} = \frac{\Delta^2 b_0}{2!\,h^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_k &= \frac{\Delta^k b_0}{k!h^k},\\
&\cdots\cdots\\
A_n &= \frac{\Delta^n b_0}{n!h^n}.
\end{aligned}$$

Положим $u = \frac{x-a}{h}$. Тогда полином (22) принимает вид

$$y = b_0 + u\,\Delta b_0 + \frac{1}{2!}u(u-1)\Delta^2 b_0 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}u(u-1)\ldots[u-(n-1)]\Delta^n b_0. \qquad (23)$$

Напишем полином $P(x)$ в виде

$$P(x) = B_0 + B_1(x-a) + B_2(x-a)(x-a+h) + \ldots$$
$$\ldots + B_n(x-a)(x-a+h)\ldots[x-a+(n-1)h]. \qquad (24)$$

Определим коэффициенты B условием, что $P(x)$ принимает значения b_0, b_{-1}, ..., b_{-n} для значений a, $a-h$, ..., $a-nh$ переменной. Вычисление, подобное предыдущему, последовательно дает

$$\begin{aligned}
b_0 &= B_0,\\
b_{-1} &= B_0 - hB_1,\\
b_{-2} &= B_0 - 2hB_1 + 2!\,h^2B_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{-n} &= B_0 - nhB_1 + \ldots + (-1)^n n!\,h^nB_n.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
B_0 &= b_0,\\
B_1 &= \frac{b_0-b_{-1}}{h} = \frac{\Delta b_{-1}}{h},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
B_k &= \frac{\Delta^k b_{-k}}{k!b^k},\\
&\cdots\cdots\\
B_n &= \frac{\Delta^n b_{-n}}{n!h^n}.
\end{aligned}$$

Положим $u = \frac{x-a}{h}$. Тогда полином (24) пишется в форме

$$y = b_0 + u\,\Delta b_{-1} + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 b_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}u(u+1)\ldots(u+n-1)\Delta^n b_{-n}. \qquad (25)$$

В связи с тем, что разности b_0, Δb_0, $\Delta^2 b_0$, ..., $\Delta^n b_0$ расположены в таблице разностей на нисходящей косой строке, а разности b_0, Δb_{-1}, $\Delta^2 b_{-2}$, ..., $\Delta^n b_{-n}$ — на восходящей косой строке, полином (23) называется интерполяционным полиномом Ньютона по нисходящим разностям, а полином (25) — интерполяционным полиномом Ньютона по восходящим разностям.

Пример. Пример уточнит условия применения обоих интерполяционных полиномов Ньютона.

Рассмотрим таблицу, взятую из п. 7.5.46. Она дает значения $10^4 J_1(x)$ для $1 \leqslant x \leqslant 2$ при $h = 0{,}1$:

x	b	Δb	$\Delta^2 b$	$\Delta^3 b$
1,0	4401			
		308		
1,1	4709		—34	
		274		—3
1,2	4983		—37	
		237		—1
1,3	5220		—38	
		199		—1
1,4	5419		—39	
		160		—1
1,5	5579		—40	
		120		—1
1,6	5699		—41	
		79		—1
1,7	5778		—42	
		37		2
1,8	5815		—40	
		—3		—2
1,9	5812		—42	
		—45		
2,0	5767			

Естественно, мы будем предполагать, что таблица представляет единственные данные, находящиеся в нашем распоряжении.

Попробуем вычислить $J_1(1{,}049)$, заменив функцию $J_1(x)$ параболой третьей степени, проходящей через 4 последовательно расположенные точки. Так как аргумент близок к началу таблицы, то выгодно взять интерполяционный полином Ньютона по нисходящим разностям (23) при $a = 1$, ибо он вводит только $b_0 = 4401$, $\Delta b_0 = 308$, $\Delta^2 b_0 = -34$, $\Delta^3 b_0 = -3$. Вводимые значения функции равны b_0, b_1, b_2, b_3 с преобладающим влиянием b_0. Это логично, так как 1,049 находится очень близко от $a = 1$. И было бы очень невыгодно взять полином (25) при $a = 1{,}3$. Действительно, пришлось бы вводить $b_0 = 5220$, $\Delta b_{-1} = 237$, $\Delta^2 b_{-2} = -37$, $\Delta^3 b_{-3} = -3$ при преобладающем влиянии b_0, которое соответствует аргументу 1,3, находящемуся далеко от 1,049.

Полином Ньютона (23) для $a=1$ пишется в виде

$$y=4401+308u-17u(u-1)-\frac{1}{2}u(u-1)(u-2),$$

что при $u=\frac{1{,}049-1}{0{,}1}=0{,}49$ дает $J_1(1{,}049)=0{,}4556$.

Посмотрев более подробные таблицы, находим значение $J_1(1{,}049)=0{,}45558$. Следовательно, мы получили по формуле (23) превосходное приближение, несмотря на грубость исходной таблицы, в которой погрешность задания чисел b может достигать $5\cdot 10^{-5}$.

Если же пользоваться формулой полинома Ньютона по восходящим разностям (25) для $a=1{,}3$, то

$$y=5220+237u-18{,}5u(u+1)-\frac{1}{2}u(u+1)(u+2).$$

При $u=\frac{1{,}049-1{,}3}{0{,}1}=-2{,}51$ это дает $J_1(1{,}049)=0{,}4557$, т. е. приближение хуже.

Вычислим теперь $J_1(1{,}941)$. Так как аргумент находится в конце таблицы, следует пользоваться как раз формой (25) полинома Ньютона. Она при $a=2$ имеет вид

$$y=5767-45u-21u(u+1)-\frac{1}{3}u(u+1)(u+2).$$

При $u=\frac{1{,}941-2}{0{,}1}=-0{,}59$ получаем $J_1(1{,}941)=0{,}5799$. Более подробная таблица дает 0,57982. Форма (23) полинома Ньютона, использующая $a=1{,}7$, по причинам, изложенным выше, не дала бы хорошего приближения.

10.3.5. Интерполяционный полином Стирлинга. Напишем полином $P(x)$ в виде

$$P(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a+h)(x-a)+$$
$$+C_3(x-a+h)(x-a)(x-a-h)+\ldots+C_{2k}(x-a+kh)\ldots$$
$$\ldots[x-a-(k-1)h]+C_{2k+1}(x-a+kh)\ldots(x-a-kh)+\ldots \qquad (26)$$

Придавая x значения a, $a-h$, $a+h$, $a-2h$, $a+2h$, ..., можно постепенно вывести

$$b_0=C_0,$$
$$b_{-1}=C_0-hC_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда вычислением, подобным вычислению предыдущего пункта, получаем

$$C_0=b_0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$C_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{\Delta^{2k}b_{-k}}{h^{2k}},$$
$$C_{2k+1}=\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\Delta^{2k+1}b_{-k-1}}{h^{2k+1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Положим $u=\frac{x-a}{h}$. Тогда полином (26) принимает вид

$$y=b_0+u\,\Delta b_{-1}+\frac{1}{2!}u(u+1)\,\Delta^2 b_{-1}+\frac{1}{3!}u(u^2-1)\,\Delta^3 b_{-2}+$$
$$+\frac{1}{4!}u(u^2-1)(u+2)\,\Delta^4 b_{-2}+\frac{1}{5!}u(u^2-1)(u^2-4)\,\Delta^5 b_{-3}+\ldots \quad (27)$$

Напишем интерполяционный полином $P(x)$ в виде

$$P(x)=D_0+D_1(x-a)+D_2(x-a)(x-a-h)+$$
$$+D_3(x-a+h)(x-a)(x-a-h)+\ldots+D_{2k}[x-a+(k-1)h]\ldots$$
$$\ldots(x-a-kh)+D_{2k+1}(x-a+kh)\ldots(x-a-kh)+\ldots \quad (28)$$

На этот раз коэффициенты будут равны

$$D_0=b_0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$D_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\,\frac{\Delta^{2k}b_{-k}}{h^{2k}},$$
$$D_{2k+1}=\frac{1}{(2k+1)!}\,\frac{\Delta^{2k+1}b_{-k}}{h^{2k+1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полином (28) пишут с той же заменой переменных в форме

$$y=b_0+u\,\Delta b_0+\frac{1}{2!}u(u-1)\,\Delta^2 b_{-1}+\frac{1}{3!}u(u^2-1)\,\Delta^3 b_{-1}+$$
$$+\frac{1}{4!}u(u^2-1)(u-2)\,\Delta^4 b_{-2}+\frac{1}{5!}u(u^2-1)(u^2-4)\,\Delta^5 b_{-2}+\ldots \quad (29)$$

Сложив равенства (27) и (29) и разделив на 2, получим

$$y=b_0+u\,\frac{\Delta b_0+\Delta b_{-1}}{2}+\frac{u^2}{2!}\Delta^2 b_{-1}+\frac{u(u^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 b_{-1}+\Delta^3 b_{-2}}{2}+$$
$$+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 b_{-2}+\frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 b_{-2}+\Delta^5 b_{-3}}{2}+\ldots \quad (30)$$

Этот полином называется интерполяционным полиномом Стирлинга. Применение его дает особую точность для точек x, близких к a.

Замечание. Вычисление полинома Стирлинга следует оборвать на члене $\Delta^{2k}b_{-k}$, а не на предыдущем члене $\frac{1}{2}\{\Delta^{2k-1}b_{-k+1}+\Delta^{2k-1}b_{-k}\}$, так как знание двух последних разностей дает разность $\Delta^{2k}b_{-k}$ без вычисления функции в новых точках. Следовательно, полином Стирлинга — четной степени $(2k)$, и, чтобы построить его, требуется знать функцию в нечетном количестве точек $(2k+1)$.

10.3.6. Интерполяционный полином Бесселя. Напишем для точки $a+h$, b_1 формулу (27), полученную для точки a_0, b_0. Это сводится к замене в формуле (27) u на $u-1$ и b_0, b_{-1}, b_{-2}, ... на b_1, b_0, b_{-1}, ... Находим

$$y=b_1+(u-1)\,\Delta b_0+\frac{(u-1)u}{2!}\Delta^2 b_0+\frac{(u-1)u(u-2)}{3!}\Delta^3 b_{-1}+$$
$$+\frac{(u^2-1)u(u-2)}{4!}\Delta^4 b_{-1}+\ldots \quad (31)$$

Сложив (31) и (29) и разделив на 2, получаем

$$y = \frac{b_0 + b_1}{2} + \left(u - \frac{1}{2}\right)\Delta b_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 b_0 + \Delta^2 b_{-1}}{2} + \\ + \frac{u(u-1)\left(u - \frac{1}{2}\right)}{3!}\Delta^3 b_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 b_{-1} + \Delta^4 b_{-2}}{2} + \ldots \quad (32)$$

Этот полином называется интерполяционным полиномом Бесселя. Применение его дает особую точность для точек x, близких к середине интервала $a + \frac{h}{2}$.

Замечание. Легко можно заметить, что, так же как и для полинома Стирлинга, следует прервать вычисление полинома Бесселя на члене $\Delta^{2k+1} b_{-k}$.

Степень полинома Бесселя должна быть нечетной $(2k+1)$, а для построения его требуется знать функцию в четном числе точек $(2k+2)$.

Пример. Вернемся к таблице п. 10.3.4 и вычислим J_1 (1,511). Пользуемся полиномом Стирлинга, ограниченным членом второй степени, иначе говоря, требующим знания трех точек. Имеем

$$a = 1{,}5, \quad b_0 = 5579, \quad \Delta b_0 = 120, \quad \Delta b_{-1} = 160, \quad \Delta^2 b_{-1} = -40.$$

Полином равен $y = 5579 + 140u - 20u^2$, откуда при

$$u = \frac{1{,}511 - 1{,}5}{0{,}1} = 0{,}11$$

находим $J_1(1{,}511) = 0{,}5594$.

Более точные таблицы дают $J_1(1{,}511) = 0{,}55945 \ldots$

Вычислим $J_1(1{,}541)$. Пользуемся полиномом Бесселя, ограниченным членом третьей степени, иначе говоря, требующим знания четырех точек. Имеем

$$a = 1{,}5, \quad b_0 = 5579, \quad b_1 = 5699,$$

$$\Delta b_0 = 120, \quad \Delta^2 b_0 = -41, \quad \Delta^2 b_{-1} = -40, \quad \Delta^3 b_{-1} = -1.$$

Отсюда находим полином

$$y = 5639 + 120(u - 0{,}5) - \frac{81}{4}u(u-1) - \frac{1}{6}u(u-1)(u - 0{,}5),$$

что при $u = 0{,}41$ дает $J_1(1{,}541) = 0{,}5633$.

Более точные таблицы дают $J_1(1{,}541) = 0{,}56333 \ldots$

10.3.7. Области применения интерполяционных полиномов Ньютона, Стирлинга, Бесселя. Значение a должно быть выбрано в непосредственной близости к значению, для которого мы хотим вычислить приближение функции. Можно пользоваться любой из интерполяционных формул (23), (25), (30), (32) при единственном условии, чтобы разности, необходимые для вычисления, находились в таблице. Поэтому при не очень подробных таблицах формулы Ньютона должны применяться для значений аргумента, лежащих у краев таблицы, а формулы Стирлинга и Бесселя — для значений аргумента, лежащих в середине таблицы.

Приводимая схема показывает положение в таблицах разностей, необходимых для вычисления, в зависимости от применяемых формул:



10.3.8. Верхний предел ошибки, совершаемой при применении интерполяционных формул Ньютона, Стирлинга, Бесселя. Если можно вычислить последовательные производные функции $f(x)$, то применение формул, дающих верхний предел ошибки, допущенной при использовании полинома Лагранжа, позволяет легко получить следующие результаты.

1) *Формула Ньютона по нисходящим разностям.* Если M_{n+1} — верхний предел $|f^{(n+1)}(x)|$ в интервале a, $a+nh$, то мы имеем (при $n+1$ точках)

$$|R_n| < |u(u-1)\ldots(u-n)|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}.$$

2) *Формула Ньютона по восходящим разностям.* Если M_{n+1} — тот же предел, но в интервале a, $a-nh$, то мы имеем (при $n+1$ точках)

$$|R_n| < |u(u+1)\ldots(u+n)|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}.$$

3) *Формула Стирлинга.* Если M_{2n+1} — верхний предел $|f^{(2n+1)}(x)|$ в интервале $a-nh$, $a+(n+1)h$, то мы имеем (при $2n+1$ точках)

$$|R_{2n+1}| < |u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)|\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}M_{2n+1}.$$

4) *Формула Бесселя.* Если M_{2n+2} — верхний предел $|f^{(2n+2)}(x)|$ в интервале $a-nh$, $a+(n+1)h$, то мы имеем (при $2n+2$ точках)

$$|R_{2n+2}|<|u(u^2-1)\ldots(u^2-n^2)[u-(n+1)]|\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}M_{2n+2}.$$

10.3.9. Приближение линейной комбинацией функций, определенной с помощью критерия наименьшнх квадратов.

а) *Эмпирическая функция.* Пусть $f(x)$ — данная функция, принимающая для абсцисс $a_0, a_1, \ldots, a_n$ значения $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — p выбранных заранее функций и $p<n$. Попробуем определить коэффициенты A в выражении

$$\Phi(x)=A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_p\varphi_p(x)$$

так, чтобы сумма E квадратов ошибок, совершенных при замене $f(x)$ на $\Phi(x)$ в рассматриваемых точках, была наименьшей.

Имеем

$$E=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon_i=b_i-A_0\varphi_0(a_i)-A_1\varphi_1(a_i)-\ldots-A_p\varphi_p(a_i).$$

Мы получим требуемый минимум, если положим

$$\frac{\partial E}{\partial A_k}=A_0\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(a_i)\varphi_0(a_i)+\ldots+A_p\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(a_i)\varphi_p(a_i)-\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(a_i)b_i=0$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

откуда определяем коэффициенты A_k. Тогда средняя величина квадрата ошибки будет равна

$$M=\frac{E}{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{n}b_i^2-\left(A_0\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(a_i)b_i+\ldots+A_p\sum_{i=0}^{n}\varphi_p(a_i)b_i\right)\right].$$

б) *Функция, определенная аналитически.* При тех же обозначениях требуется определить коэффициенты A таким образом, чтобы интеграл квадрата ошибки при замене $f(x)$ на $\Phi(x)$ в интервале a, b был наименьшим. Этот интеграл равен

$$E=\int_a^b\varepsilon^2(x)\,dx \quad \text{при} \quad \varepsilon(x)=f(x)-A_0\varphi(x)-\ldots-A_p\varphi_p(x).$$

Коэффициенты A_k определяются системой, полученной из условия минимума:

$$\frac{\partial E}{\partial A_k}=A_0\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_0(x)\,dx+\ldots+A_p\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_p(x)\,dx-\int_a^b\varphi_k(x)f(x)dx=0.$$

10.3.10. Приближение полиномом, определенным с помощью критерия наименьших квадратов.

а) *Эмпирическая функция.* Здесь выбранные функции

$$\varphi_0=x^p,\ \varphi_1=x^{p-1},\ \ldots,\ \varphi_{p-1}=x,\ \varphi_p=1$$

и приближающая функция — полином

$$A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_{p-1}x + A_p.$$

Следовательно, вместо того чтобы заменить график эмпирической функции, заданной $n+1$ точками, параболой n-й степени, проходящей как раз через эти $n+1$ точки, можно выбрать параболу степени $p < n$. Такая парабола, естественно, не сможет пройти через эти $n+1$ точки и в действительности, как правило, не пройдет ни через одну из них, но будет определена требованием пройти возможно ближе к ним. Математически мы определим это условие требованием сделать наименьшей сумму квадратов ошибок [1]). В точках a_0, b_0; a_1, b_1; ...; a_n, b_n получаем ошибки

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= b_0 - (A_0a^p + \ldots + A_p),\\
\varepsilon_1 &= b_1 - (A_0a_1^p + \ldots + A_p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n &= b_n - (A_0a_n^p + \ldots + A_p).
\end{aligned}$$

Сумма квадратов ошибок равна

$$E = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Условия для минимума E даны уравнениями

$$\frac{\partial E}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial A_1} = 0, \ldots$$

Отсюда получается следующая система для определения A_0, A_1, ..., A_p:

$$\begin{aligned}
&A_0\sum_{i=0}^{n} a_i^{2p} + A_1\sum_{i=0}^{n} a_i^{2p-1} + \ldots + A_p\sum_{i=0}^{n} a_i^p = \sum_{i=0}^{n} b_i a_i^p,\\
&A_0\sum_{i=0}^{n} a_i^{2p-1} + A_1\sum_{i=0}^{n} a_i^{2p-2} + \ldots + A_p\sum_{i=0}^{n} a_i^{p-1} = \sum_{i=0}^{n} b_i a_i^{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0\sum_{i=0}^{n} a_i^p + A_1\sum_{i=0}^{n} a_i^{p-1} + \ldots + A_p\sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} b_i.
\end{aligned} \tag{33}$$

Если данные абсциссы являются равноотстоящими или, более общо, симметрично расположены вокруг центра тяжести, то полезно принять этот центр тяжести за новое начало координат. Это обратит в нуль суммы

$$\sum_{i=0}^{n} a^{2k+1}.$$

Средняя величина квадрата ошибки M равна

$$M = \frac{E}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[b_i - (A_0a_i^p + \ldots + A_p)]^2.$$

---

[1]) В п. 10.3.17 приводится другая математическая версия этого условия.

Пример. За эмпирическую функцию примем функцию, определенную четырьмя первыми строками таблицы п. 10.3.4 для функции $10^4 J_1(x)$. Попробуем представить эту функцию параболой второй степени.

Помещаем начало координат в точку $x = 1{,}15$. Эмпирическая функция определяется следующими данными:

$$a_1 = -0{,}15, \quad a_2 = -0{,}05, \quad a_3 = 0{,}05, \quad a_4 = 0{,}15,$$
$$b_1 = 4401, \quad b_2 = 4709, \quad b_3 = 4983, \quad b_4 = 5220.$$

Коэффициенты A_0, A_1, A_2 определяются системой

$$\begin{aligned} A_0 \sum_1^4 a_i^4 \qquad\qquad + A_2 \sum_1^4 a_i^2 &= \sum_1^4 a_i^2 b_i, \\ A_1 \sum_1^4 a_i^2 \qquad\qquad &= \sum_1^4 a_i b_i, \\ A_0 \sum_1^4 a_i^2 \qquad\qquad + A_2 \sum_1^4 1 &= \sum_1^4 b_i, \end{aligned}$$

иначе говоря,

$$\begin{aligned} 0{,}001025 A_0 + 0{,}05 A_2 &= 240{,}70, \\ 0{,}05\ A_1 \qquad\quad &= 136{,}55, \\ 0{,}05 A_0 + 4 A_2 &= 19313. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_0 = -1781{,}2, \quad A_1 = 2731, \quad A_2 = 4850{,}5.$$

Парабола, которая представляет в среднем данную функцию в промежутке между 1 и 1,3, есть

$$y = -1781{,}2\,(x - 1{,}15)^2 + 2731\,(x - 1{,}15) + 4850{,}5.$$

Средняя величина квадрата ошибки равна

$$M = \frac{1}{4}\left[(0{,}2)^2 + (0{,}5)^2 + (0{,}4)^2 + (0{,}1)^2\right] = 0{,}11.$$

б) *Функция определена аналитически.* Если функция $f(x)$ определена аналитически и, кроме того, легко вычислить интегралы

$$\int_a^b x^k f(x)\,dx \quad (k \text{ — целое положительное число или нуль}),$$

то для определения полинома $A_0 x^p + \ldots + A_p$, который может заменить в интервале a, b функцию $f(x)$ с наименьшим интегралом от квадрата ошибки, нужно действовать следующим образом.

Ошибка в точке x будет

$$\varepsilon(x) = f(x) - [A_0 x^p + \ldots + A_p]. \tag{34}$$

Интеграл от квадрата ошибки равен

$$E = \int_a^b \varepsilon^2(x)\,dx. \tag{35}$$

Коэффициенты A_0, A_1, ..., A_p определяются условиями минимума E, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial A_0} = \int_a^b x^p \left[A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p - f(x)\right] dx = 0$$

. . . . . .

Отсюда получается система

$$\left.\begin{aligned} &A_0\int_a^b x^{2p}\,dx + A_1\int_a^b x^{2p-1}\,dx + \ldots + A_p\int_a^b x^p\,dx = \int_a^b x^p f(x)dx,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_0\int_a^b x^p\,dx + A_1\int_a^b x^{p-1}\,dx + \ldots + A_p\int_a^b dx = \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Вычисления значительно упростятся, если промежуток интегрирования равен -1, $+1$. Перейдем к этому случаю с помощью замены переменной

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}X.$$

Итак, нам нужно найти полином $B_0X^p + \ldots + B_p$, который наилучшим образом приближается в среднем к функции $\varphi(X) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}X\right)$ в промежутке между -1 и $+1$.

Положим

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} X^k\varphi(X)\,dX = I_k.$$

Так как

$$\int_{-1}^{1} X^{2k}\,dX = \frac{2}{2k+1} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1} X^{2k+1}\,dX = 0,$$

то система (36) принимает вид

$$\begin{aligned}
&B_p + \tfrac{1}{3}B_{p-2} + \tfrac{1}{5}B_{p-4} + \ldots = I_0,\\
&\tfrac{1}{3}B_{p-1} + \tfrac{1}{5}B_{p-3} + \tfrac{1}{7}B_{p-5} + \ldots = I_1,\\
&\tfrac{1}{3}B_p + \tfrac{1}{5}B_{p-2} + \tfrac{1}{7}B_{p-4} + \ldots = I_2,\\
&\tfrac{1}{5}B_{p-1} + \tfrac{1}{7}B_{p-3} + \tfrac{1}{9}B_{p-5} + \ldots = I_3,\\
&\tfrac{1}{5}B_p + \tfrac{1}{7}B_{p-2} + \tfrac{1}{9}B_{p-4} + \ldots = I_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Средняя величина квадрата ошибки равна $M = \frac{E}{1-(-1)} = \frac{E}{2}$. Учитывая формулы (34) и (35) и систему (36), можем написать

$$M = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi^2(X)\,dX - \sum_{i=0}^{p} B_{p-i}I_i.$$

Результат вычисления коэффициентов B и величин $\alpha_p = \sum_{i=0}^{p} B_{p-i}I_i$ как

функции интегралов I для различных значений p приведен в следующей таблице:

p	B	α
1	$B_0 = 3I_1$ $B_1 = I_0$	$\alpha_1 = I_0^2 + 3I_1^2$
2	$B_0 = \frac{15}{4}[-I_0 + 3I_2]$ $B_1 = 3I_1$ $B_2 = \frac{3}{4}[3I_0 - 5I_2]$	$\alpha_2 = I_0^2 + 3I_1^2 + \frac{5}{4}[3I_2 - I_0]^2$
3	$B_0 = \frac{35}{4}[-3I_1 + 5I_3]$ $B_1 = \frac{15}{4}[-I_0 + 3I_2]$ $B_2 = \frac{15}{4}[5I_1 - 7I_3]$ $B_3 = \frac{3}{4}[3I_0 - 5I_2]$	$\alpha_3 = I_0^2 + 3I_1^2 + \frac{5}{4}[3I_2 - I_0]^2 + \frac{7}{4}[5I_3 - 3I_1]^2$
4	$B_0 = \frac{315}{64}[3I_0 - 30I_2 + 35I_4]$ $B_1 = \frac{35}{4}[-3I_1 + 5I_3]$ $B_2 = \frac{105}{32}[-5I_0 + 42I_2 - 45I_4]$ $B_3 = \frac{15}{4}[5I_1 - 7I_3]$ $B_4 = \frac{15}{64}[15I_0 - 70I_2 + 63I_4]$	$\alpha_4 = I_0^2 + 3I_1^2 + \frac{5}{4}[3I_2 - I_0]^2 + \frac{7}{4}[5I_3 - 3I_1]^2 + \frac{9}{64}[35I_4 - 30I_2 + 3I_0]^2$
5	$B_0 = \frac{693}{64}[15I_1 - 70I_3 + 63I_5]$ $B_1 = \frac{315}{64}[3I_0 - 30I_2 + 35I_4]$ $B_2 = \frac{315}{32}[-21I_1 + 90I_3 - 77I_5]$ $B_3 = \frac{105}{32}[-5I_0 + 42I_2 - 45I_4]$ $B_4 = \frac{105}{64}[35I_1 - 126I_3 + 99I_5]$ $B_5 = \frac{15}{64}[15I_0 - 70I_2 + 63I_4]$	$\alpha_5 = I_0^2 + 3I_1^2 + \frac{5}{4}[3I_2 - I_0]^2 + \frac{7}{4}[5I_3 - 3I_1]^2 + \frac{9}{64}[35I_4 - 30I_2 + 3I_0]^2 + \frac{11}{64}[63I_5 - 70I_3 + 15I_1]^2$

Пример. Попробуем определить полином третьей степени, который в промежутке от 1 до 2 наиболее близок к функции $\ln x$. Это можно свести к определению полинома

$$B_0X^3+B_1X^2+B_2X+B_3,$$

наиболее близкому к функции

$$\ln(1{,}5+0{,}5X)$$

в промежутке от -1 до 1.

Имеем

$$I_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln(1{,}5+0{,}5X)\,dX=\int_{1}^{2}\ln x\,dx=2\ln 2-1,$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}X\ln(1{,}5+0{,}5X)\,dX=\int_{1}^{2}(2x-3)\ln x\,dx=-2\ln 2+\frac{3}{2},$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}X^2\ln(1{,}5+0{,}5X)\,dX=\int_{-1}^{1}(2x-3)^2\ln x\,dx=\frac{14}{3}\ln 2-\frac{28}{9},$$

$$I_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}X^3\ln(1{,}5+0{,}5X)\,dX=\int_{-1}^{1}(2x-3)^3\ln x\,dx=-10\ln 2+7.$$

Отсюда, пользуясь формулами предыдущей таблицы и значением $\ln 2=0{,}6931472$, ошибка которого не превосходит $2\cdot 10^{-8}$, получаем

$$B_0=0{,}0133,\quad B_1=-0{,}0583,\quad B_2=0{,}3331,\quad B_3=0{,}4057.$$

Имеем

$$\int_{1}^{2}(\ln x)^2\,dx=2(\ln 2)^2-4\ln 2+2=0{,}18831736,\quad \alpha=0{,}18831731.$$

Следовательно, средняя квадратичная ошибка (т. е. корень из средней величины квадрата ошибки) есть $\sqrt{M}=2\cdot 10^{-4}$. Итак, можно приближенно заменить функцию $\ln x$ между 1 и 2 полиномом

$$0{,}0133(2x-3)^3-0{,}0583(2x-3)^2+0{,}3331(2x-3)+0{,}4057.$$

Замечание. Рассмотренный способ вычисления в равной степени подходит и к случаю, когда функция — эмпирическая, заданная графиком. При этом интегралы I_0, I_1, ... вычисляются тоже графически.

Приближение отрезком ряда Фурье. Задача гармонического анализа

Как и для приближения полиномом, мы будем различать случаи, когда функция задана аналитически, графически или таблицей ординат, соответствующих равноотстоящим абсциссам.

10.3.11. Функция задана аналитически. Предположим, что функция $\varphi(X)$ известна в промежутке $0{,}2\pi$. В п. 2.1.5 мы видели, что коэффициенты выражения

$$S_n(X)=b_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kX+\sum_{k=1}^{n}b_k\cos kX \qquad (37)$$

такого, что средняя величина квадрата ошибки

$$M^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(X) - S_n(X)]^2\, dX$$

минимальна, даны выражениями

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(X)\sin kX\, dX, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(X)\cos kX\, dX,$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(X)\, dX. \tag{38}$$

При этом средняя величина квадрата ошибки равна

$$M = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \varphi^2(X)\, dX - \left[b_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]\right\}.$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке θ, $\theta + T$, то мы придем к предыдущему случаю при помощи замены переменной

$$x = \theta + \frac{T}{2\pi}X. \tag{39}$$

Тогда задача будет заключаться в приближении к функции

$$\varphi(X) = f\left(\theta + \frac{T}{2\pi}X\right)$$

при помощи тригонометрической суммы (37).

Этим приемом можно также пользоваться в силу примечания, сделанного по поводу приближения полиномами, если функция известна из графика. При этом нужно графически же производить интегрирование, которого требует применение формул (38).

10.3.12. Эмпирическая функция. Функция известна из таблицы, дающей $n+1$ значение y_0, y_1, ..., y_n для $n+1$ значений x_0, x_1, ..., x_n аргумента, делящих промежуток 0, 2π на n равных частей.

Если бы промежуток простирался от θ до $\theta + T$, то достаточно было бы произвести замену переменной по формуле (39).

Пусть

$$S_p(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{p} b_k \cos kx + \sum_{k=1}^{p} a_k \sin kx \tag{40}$$

— p-я частная сумма ряда Фурье. Задача будет иметь смысл, лишь если число $2p+1$ коэффициентов, которые нужно определить, меньше или равно числу уравнений

$$y_i = b_0 + \sum_{k=1}^{p} b_k \cos kx_i + \sum_{k=1}^{p} a_k \sin kx_i. \tag{41}$$

Если $2p > n$, то $2p+1$ коэффициентов могут быть определены бесконечным количеством способов.

*) В п. 2.1.5. эта величина обозначалась буквой E.

Если $2p = n$, то система (41) допускает единственное решение. Все ошибки $S_p(x_i) - y_i$ равны нулю. Сумма квадратов ошибок, очевидно, также равна нулю.

Если $2p < n$, коэффициенты определяются условием сделать сумму квадратов ошибок наименьшей. При этом система (41) не удовлетворяется.

Два последних случая можно рассматривать совместно. Вместо того чтобы решать систему (41), коэффициенты находят таким образом, чтобы сделать сумму квадратов ошибок наименьшей. Если $2p = n$, этот минимум равен нулю.

Сумма квадратов ошибок равна

$$E = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \left(b_0 + \sum_{k=1}^{p} b_k \cos kx_i + \sum_{k=1}^{p} a_k \sin kx_i \right) \right]^2. \tag{42}$$

Коэффициент b_k определяется из уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial b_k} = \sum_{i=0}^{n} \cos kx_i \left[y_i - \left(b_0 + \sum_{k'=1}^{p} b_{k'} \cos k'x_i + \sum_{k'=1}^{p} a_{k'} \sin k'x_i \right) \right] = 0. \tag{43}$$

Если $n+1$ чисел x_i делят интервал $0, 2\pi$ на равные части, т. е.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 2(n-1)\frac{\pi}{n}, \quad x_n = 2\pi,$$

и если k и k' — различные целые числа, заключенные между 0 и $p \leqslant \frac{n}{2}$, то можно написать

$$\sum_{i=0}^{n} \sin kx_i = \sum_{i=0}^{n} \cos kx_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sin kx_i \sin k'x_i = \sum_{i=0}^{n} \cos kx_i \cos k'x_i = \sum_{i=0}^{n} \cos kx_i \sin k'x_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sin^2 kx_i = \sum_{i=0}^{n} \cos^2 kx_i = \frac{n+1}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} \cos^2 nx_i = n+1.$$

Следовательно, формула (43) дает

$$b_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \cos kx_i. \tag{44}$$

Точно так же

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i \sin kx_i, \tag{45}$$

$$b_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i. \tag{46}$$

Средняя величина квадрата ошибки равна

$$M = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \left[b_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Замечание 1. Мы предполагали до сих пор, что $y_0 = y_n$, иначе говоря, что функция $y = f(x)$ не имеет точек разрыва первого рода в начале. Если $y_0 \neq y_n$, то, чтобы уничтожить разрывность, достаточно из данной функции вычесть подобранную должным образом пилообразную функцию $d(x)$ (рис. 10.11). Разложение этой последней функции в ряд равно

$$d(x) = \frac{y_0 + y_n}{2} + \frac{y_0 - y_n}{2}\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots\right].$$

Замечание 2. Если бы мы захотели пользоваться способом, изложенным в предыдущем пункте, то, вычисляя методом трапеций интегралы, входящие в формулы (38), мы получили бы формулы (44) — (46).

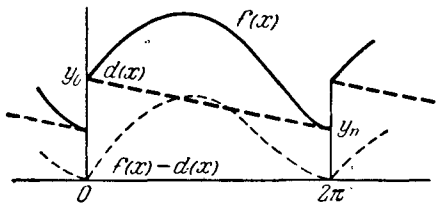


Рис. 10.11.

10.3.13. Практические способы вычисления. Если таблица чисел, определяющих эмпирическую функцию, дана заранее, то дело сводится к вычислениям по формулам (44) — (46). Если же эмпирическая функция дана графически, то число $n+1$, которое служит для составления таблицы, находится в нашем распоряжении.

При $n = 12$ вычисления значительно упрощаются, так как фигурирующие в расчетах 24 значения синуса и косинуса с точностью до знака принимают лишь три значения, отличные от нуля:

$$0{,}5,\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866,\quad 1.$$

Вычисление ведется при этом следующим образом:

1. Записываем 12 значений функции:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	
	f_{12}	f_{11}	f_{10}	f_9	f_8	f_7	
Суммы ...	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Разности ...		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6

2. Записываем суммы и разности:

	S_0	S_1	S_2	S_3	d_1	d_2	d_3
	S_6	S_5	S_4		d_5	d_4	
Суммы ...	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	θ_1	θ_2	θ_3
Разности ...	δ_0	δ_1	δ_2		η_1	η_2	

3. Составляем таблицы:

а) Вычисление коэффициентов при синусах

0,500 0,866 1,000	θ_1 θ_3	θ_2	η_1	η_2	θ_1	θ_3
Суммы произведений	I	II	I	II	I	II
I + II	$6a_1$		$6a_2$		$6a_3$	
I — II	$6a_5$		$6a_4$			

б) Вычисление коэффициентов при косинусах

0,500 0,866 1,000	$\sigma_0+\sigma_2$	$\sigma_1+\sigma_3$	δ_2 δ_0	δ_1	$-\sigma_2$ σ_0	σ_1 $-\sigma_3$	δ_0	δ_2
Суммы произведений	I	II	I	II	I	II	I	II
I+II I—II	$12b_0$ $12b_6$		$6b_1$ $6b_5$		$6b_2$ $6b_4$		$6b_3$	

В этих таблицах числа 0,500, 0,866, 1,000 умножаются на соответствующие (стоящие в той же строке) значения θ, η или δ. Произведения в каждом столбце складываются. Сложение и вычитание полученных сумм (I + II и I—II) дает искомые коэффициенты a_k и b_k.

Графический метод. Можно пользоваться графическим методом для вычисления величин $\frac{n+1}{2}b_k$, $\frac{n+1}{2}a_k$, определенных формулами (44), (45).

Рассмотрим векторы с модулями y_1, y_2, ... и аргументами kx_1, kx_2, ... Величины $\frac{n+1}{2}a_k$, $\frac{n+1}{2}b_k$ будут соответственно проекциями на оси Oy и Ox геометрической суммы этих векторов.

Пример. Дана функция, изображенная на рис. 10.12, *а*. Вычисления коэффициентов a_k и b_k приведены на стр. 710.

Графический способ, применяемый на рис. 10.12, *б*, дает результаты, прекрасно согласующиеся с предыдущим вычислением. Чтобы не загромождать чертеж, ломаная линия, соответствующая определению a_5 и b_5, не изображена.

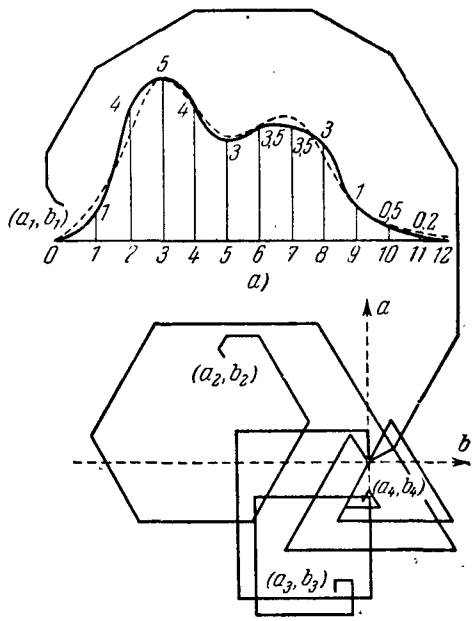


Рис. 10.12.

Если требуется найти более короткое тригонометрическое выражение $S(x) = b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + b_3\cos 3x + a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x$, возможно лучше приближающееся к графически заданной функции, вычисление коэффициентов можно осуществить только сложением и вычитанием:

$$b_0 = \frac{1}{12}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{12}),$$

$$b_3 = \frac{1}{6}(y_4 - y_2 + y_8 - y_6 + y_{12} - y_{10},$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(y_1 - y_3 + y_5 - y_7 + y_9 - y_{11}),$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(y_3 - y_9) + a_3,$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(y_0 - y_6) - b_3,$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(y_0 - y_3 + y_6 - y_9).$$

$f_{12}=0$	$f_1=1$ $f_{11}=0{,}2$	$f_2=4$ $f_{10}=0{,}5$	$f_3=5$ $f_9=1$	$f_4=4$ $f_8=3$	$f_5=3$ $f_7=3{,}5$	$f_6=3{,}5$
$S_0=0$	$S_1=1{,}2$ $d_1=0{,}8$	$S_2=4{,}5$ $d_2=3{,}5$	$S_3=6$ $d_3=4$	$S_4=7$ $d_4=1$	$S_5=6{,}5$ $d_5=-0{,}5$	$S_6=3{,}5$
$S_0=0$ $S_6=3{,}5$	$S_1=1{,}2$ $S_5=6{,}5$	$S_2=4{,}5$ $S_4=7$	$S_3=6$		$d_1=0{,}8$ $d_5=-0{,}5$	$d_2=3{,}5$ $d_4=1$	$d_3=4$
$\sigma_0=3{,}5$ $\delta_0=-3{,}5$	$\sigma_1=7{,}7$ $\delta_1=-5{,}3$	$\sigma_2=11{,}5$ $\delta_2=-2{,}5$	$\sigma_3=6$		$\theta_1=0{,}3$ $\eta_{11}=1{,}3$	$\theta_2=4{,}5$ $\eta_{12}=2{,}5$	$\theta_3=4$

0,500 0,866 1,000	$\theta_1=0{,}3$ $\theta_3=4$	$\theta_2=4{,}5$	$\eta_{11}=1{,}3$	$\eta_{12}=2{,}5$	$\theta_1=0{,}3$	$\theta_3=4$
	I = 4,15	II = 3,897	I = 1,1258	II = 2,165	I = 0,3	II = 4
I + II I — II	$6a_1=8{,}047$ $6a_5=0{,}253$		$6a_2=3{,}2908$ $6a_4=-1{,}0392$		$6a_3=-3{,}7$	

0,500 0,866 1,000	$\sigma_0+\sigma_2=15$	$\sigma_1+\sigma_3=13{,}7$	$\delta_2=-2{,}5$ $\delta_0=-3{,}5$	$\delta_1=-5{,}3$	$-\sigma_2=-11{,}5$ $\sigma_0=3{,}5$	$\sigma_1=7{,}7$ $-\sigma_3=-6$	$\delta_0=-3{,}5$	$\delta_2=-2{,}5$
	I = 15	II = 13,7	I = —4,75	II = —4,5898	I = —2,25	II = —2,15	I = —3,5	II = —2,5
I + II I — II	$12b_0=28{,}7$ $12b_6=1{,}3$		$6b_1=-9{,}3398$ $6b_5=-0{,}1602$		$6b_2=-4{,}40$ $6b_4=-0{,}10$		$6b_3=-1$	

Для вычисления a_2 нужно ввести ординаты, соответствующие $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, иначе говоря $y_{\frac{3}{2}}$, $y_{\frac{9}{2}}$, $y_{\frac{15}{2}}$, $y_{\frac{21}{2}}$. Тогда

$$a_2 = \frac{1}{4}\left(y_{\frac{3}{2}} - y_{\frac{9}{2}} + y_{\frac{15}{2}} - y_{\frac{21}{2}}\right).$$

Пример. Применим этот способ к предыдущему примеру. Тогда

$$12b_0 = 28{,}7, \quad 6b_3 = -1, \quad 6a_3 = -3{,}7, \quad 6a_1 = 8{,}3,$$
$$6b_1 = -10{,}5, \quad 4b_2 = -2{,}5, \quad 4a_2 = 1{,}7,$$

Это хорошо согласуется с полученными ранее результатами. Кривая

$$y = 2{,}391 - 1{,}584\cos x + 1{,}384\sin x - 0{,}625\cos 2x + \\ + 0{,}425\sin 2x - 0{,}166\cos 3x - 0{,}616\sin 3x$$

изображена пунктиром на рис. 10.12.

10.3.14. Приближение эмпирической функции линейной комбинацией показательных функций. Пусть $f(x)$ — функция, данная значениями b_0, b_1, ..., b_n, взятыми на равноотстоящих абсциссах

$$a_0,\ a_0+h,\ a_0+2h,\ \ldots,\ a_0+nh.$$

Пусть $\Phi(x) = A + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + De^{\delta x}$ — линейная комбинация, ограниченная тремя показательными функциями (легко провести вычисление и для большего их числа). Определим 7 параметров A, B, C, D, β, γ, δ при помощи критерия наименьших квадратов ($n+1 > 7$).

Имеем

$$\Phi(a_0+ih) = A + Be^{\beta(a_0+ih)} + Ce^{\gamma(a_0+ih)} + De^{\delta(a_0+ih)}$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Положим

$$e^{\beta h} = u_1, \quad e^{\gamma h} = u_2, \quad e^{\delta h} = u_3;$$
$$Be^{\beta(a_0+ih)} = p_i, \quad Ce^{\gamma(a_0+ih)} = q_i, \quad De^{\delta(a_0+ih)} = r_i.$$

Если бы функция $\Phi(x)$ совпадала с $f(x)$ в $n+1$ рассматриваемых точках, мы имели бы

$$\begin{aligned} b_i &= A + p_i + q_i + r_i, \\ b_{i+1} &= A + p_iu_1 + q_iu_2 + r_iu_3, \\ b_{i+2} &= A + p_iu_1^2 + q_iu_2^2 + r_iu_3^2, \\ b_{i+3} &= A + p_iu_1^3 + q_iu_2^3 + r_iu_3^3. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Первая разность таблицы для b_i дает

$$\begin{aligned} \Delta_i &= p_i(u_1-1) + q_i(u_2-1) + r_i(u_3-1), \\ \Delta_{i+1} &= p_i(u_1-1)u_1 + q_i(u_2-1)u_2 + r_i(u_3-1)u_3, \\ \Delta_{i+2} &= p_i(u_1-1)u_1^2 + q_i(u_2-1)u_2^2 + r_i(u_3-1)u_3^2, \\ \Delta_{i+3} &= p_i(u_1-1)u_1^3 + q_i(u_2-1)u_2^3 + r_i(u_3-1)u_3^3. \end{aligned}$$

Исключаем p_i, q_i, r_i из этих уравнений. Тогда

$$\Delta_i(-u_1u_2u_3) + \Delta_{i+1}(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + \Delta_{i+2}(-u_1 - u_2 - u_3) + \Delta_{i+3} = 0.$$

Положим

$$-u_1u_2u_3 = s_3,$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = s_2,$$
$$-u_1 - u_2 - u_3 = s_1.$$

Предыдущее уравнение принимает вид

$$\Delta_l s_3 + \Delta_{l+1}s_2 + \Delta_{l+2}s_1 + \Delta_{l+3} = 0.$$

Имеем систему из $n-3$ уравнений с тремя неизвестными. Мы получаем ее, придавая l значения $0, 1, \ldots, n-4$. Так как n больше 6, то эта система несовместна. Если в нее подставить какую-нибудь систему значений s_1, s_2, s_3, то $n-3$ результата подстановки равны не нулю, а соответственно $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-4}$. Определим систему значений s_1, s_2, s_3 таким образом, чтобы сумма квадратов ошибок

$$E = \varepsilon_0^2 + \ldots + \varepsilon_{n-4}^2 = \sum_{l=0}^{n-4} [\Delta_l s_3 + \Delta_{l+1}s_2 + \Delta_{l+2}s_1 + \Delta_{l+3}]^2$$

была минимальной. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial s_3} = s_3 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_l^2 + s_2 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_l\Delta_{l+1} + s_1 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_l\Delta_{l+2} + \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_l\Delta_{l+3} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial s_2} = s_3 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+1}\Delta_l + s_2 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+1}^2 + s_1 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+1}\Delta_{l+2} + \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+1}\Delta_{l+3} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial s_1} = s_3 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+2}\Delta_l + s_2 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+2}\Delta_{l+1} + s_1 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+2}^2 + \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+2}\Delta_{l+3} = 0.$$

Пусть s_1, s_2, s_3 — значения, полученные из трех предыдущих уравнений. Тогда u_1, u_2, u_3 — корни уравнения

$$u^3 + s_1u^2 + s_2u + s_3 = 0.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{1}{h}\ln u_1, \quad \gamma = \frac{1}{h}\ln u_2, \quad \delta = \frac{1}{h}\ln u_3.$$

Сумма квадратов ошибок будет

$$E = s_3 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+3}\Delta_l + s_2 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+3}\Delta_{l+1} + s_1 \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+3}\Delta_{l+2} + \sum_{l=0}^{n-4} \Delta_{l+3}^2.$$

Если уравнение по u имеет сопряженные комплексные корни, представление через комбинацию экспонент не подойдет. Тут следует испробовать комбинацию из экспоненты и экспоненты, умноженной на тригонометрическую функцию.

Так как величины β, γ, δ известны, то при обозначениях $p_l' = e^{\beta(a+ih)}$, $q_l' = e^{\gamma(a_0+ih)}$, $r_l' = e^{\delta(a_0+ih)}$ получаем для определения A, B, C, D следующую систему из $n+1$ несовместных уравнений:

$$A + Bp_l' + Cq_l' + Dr_l' - b_l = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда сумма квадратов ошибок равна

$$E = \sum_{l=0}^{n} (A + Bp_l' + Cq_l' + Dr_l' - b_l)^2.$$

Отсюда получается система

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial A}=(n+1)A+B\sum_{i=0}^{n}p_i'+C\sum_{i=0}^{n}q_i'+D\sum_{i=0}^{n}r_i'-\sum_{i=0}^{n}b_i=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial B}=A\sum_{i=0}^{n}p_i'+B\sum_{i=0}^{n}p_i'^2+C\sum_{i=0}^{n}p_i'q_i'+D\sum_{i=0}^{n}p_i'r_i'-\sum_{i=0}^{n}p_i'b_i=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial C}=A\sum_{i=0}^{n}q_i'+B\sum_{i=0}^{n}q_i'p_i'+C\sum_{i=0}^{n}q_i'^2+D\sum_{i=0}^{n}q_i'r_i'-\sum_{i=0}^{n}q_i'b_i=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial D}=A\sum_{i=0}^{n}r_i'+B\sum_{i=0}^{n}r_i'p_i'+C\sum_{i=0}^{n}r_i'q_i'+D\sum_{i=0}^{n}r_i'^2-\sum_{i=0}^{n}r_i'b_i=0,$$

определяющая A, B, C, D с суммой квадратов ошибок, равной

$$E=A\sum_{i=0}^{n}b_i+B\sum_{i=0}^{n}p_i'b_i+C\sum_{i=0}^{n}q_i'b_i+D\sum_{i=0}^{n}r_i'b_i-\sum_{i=0}^{n}b_i^2.$$

Пример. Эмпирическая функция задана таблицей

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_i	—12,2	—11,6	—10,8	—9,43	—7,32	—4,00	+1,00	+9,00	+21,4	+40,8
Δ_i	0,6	0,8	1,37	2,11	3,32	5,00	8,00	12,40	19,40	

Из природы рассматриваемого явления следует, что для приближения рассматриваемой функции следует взять формулу типа

$$y=A+Be^{\beta x}.$$

Так как имеется только одна экспонента, то суммирование в уравнении, служащим для определения β, должно простираться от 0 до $n-2$. Имеем

$$s_1\sum_{i=0}^{n-2}\Delta_i^2+\sum_{i=0}^{n-2}\Delta_i\Delta_{i+1}=261{,}11s_1+407{,}83=0,$$

откуда $u_1=-s_1=1{,}562$ и $\beta=\ln u_1=0{,}446$ при сумме квадратов ошибок

$$E=s_1\sum_{i=0}^{n-2}\Delta_i\Delta_{i+1}+\sum_{i=0}^{n-2}\Delta_{i+1}^2=407{,}83s_1+637{,}11=0{,}08.$$

Применение способа наименьших квадратов к 10 уравнениям

$$b_i=A+Be^{i\beta}\ \text{или}\ b_i=A+Bu_1^i\qquad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 9)$$

дает систему

$$(n+1)A+B\sum_{i=0}^{n}u_1^i=\sum_{i=0}^{n}b_i,$$

$$A\sum_{i=0}^{n}u_1^i+B\sum_{i=0}^{n}u_1^{2i}=\sum_{i=0}^{n}b_iu_1^i,$$

иначе говоря,

$$10A + 152B = 16{,}8,$$
$$152A + 5191B = 3091.$$

Отсюда

$$A = -13{,}12 \text{ и } B = 0{,}974$$

при сумме квадратов ошибок

$$E = A\sum_{i=0}^{n} b_i + B\sum_{i=0}^{n} u_i^l b_i = -2{,}14.$$

Следовательно, приближенная формула есть

$$y = 0{,}974e^{0{,}446x} - 13{,}12.$$

10.3.15. Приближение функции по Чебышеву. Дана функция $f(x)$, непрерывная вместе со своими производными, в интервале a, b. Как мы уже видели, общая задача приближения заключается в том, чтобы найти функцию $g(x)$, которая наилучшим образом приближает $f(x)$ в этом интервале. Выражение „наилучшим образом" может быть определено критерием наименьших квадратов, что приведет к способам приближения, описанным в п. 10.3.9 и последующих. Выражение это может быть также определено условием сделать как можно меньшим наибольшее отклонение между $f(x)$ и $g(x)$. Это называется приближением по Чебышеву.

Функция $g(x)$ должна быть удобнее в обращении, чем функция $f(x)$. Мы ограничимся случаем, когда $g(x)$ представляет собой полином $P(x)$.

Нахождение полинома, который делает максимум отклонения от $f(x)$ на промежутке a, b наименьшим по сравнению с любым другим полиномом той же степени, есть очень трудная задача. Мы будем поэтому решать несколько более легкую задачу и искать полином, который делает этот максимум „по возможности" малым.

Не уменьшая общности, всегда можно предположить, что интервал определения равен -1, $+1$, так как перенос начала на $\frac{1}{2}(a+b)$ и изменение масштаба в отношении $\frac{1}{2}(b-a)$ немедленно приведут к этому случаю.

Мы видели в п. 10.3.2, что полином $P(x)$ n-й степени, совпадающий с данной функцией $f(x)$ в $n+1$ точках интервала с абсциссами a_i, представляет собой интерполяционный полином Лагранжа и что ошибка, совершенная в точке x при замене $f(x)$ полиномом $P(x)$, равна

$$R_n(x) = f(x) - P(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

Абсцисса η здесь такова, что $|\eta| < 1$.

Определим последовательность абсцисс a таким образом, чтобы абсолютное значение максимума $R_n(x)$ было возможно меньшим, когда x пробегает интервал -1, $+1$.

Возьмем $(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$. Здесь $T_{n+1}(x)$ — полином Чебышева $(n+1)$-й степени, и поэтому a будут нулями этого полинома.

Известно, что, в силу свойств полинома Чебышева (п. 7.9.4), полином $2^{-n}T_{n+1}(x)$ принимает попеременно $n+2$ раза значения $\pm 2^{-n}$, когда x возрастает от -1 до $+1$, и что это единственный полином вида $x^{n+1}+\ldots$, наибольшие абсолютные значения амплитуд которого (все равные 2^{-n}) —

самые малые из всех возможных. Последовательность значений a_i будет поэтому

$$a_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Теперь искомый полином $P(x)$ может быть написан в виде формулы, дающей интерполяционный полином Лагранжа для абсцисс a_i, определенных предыдущим выражением. Однако предпочтительнее поступить иначе. Всякая степень x^r может быть разложена в линейную комбинацию полиномов Чебышева степеней $\leqslant r$. Например,

$$x^6 = \frac{1}{32}\{10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6\}.$$

Поэтому искомый полином $P(x)$ может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x).$$

Достаточно определить коэффициенты b.

Функцию $f(x)$ можно написать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x) + \frac{1}{2^n (n+1)!} T_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\eta).$$

Положим $x = \cos\theta$. Имеем

$$f(\cos\theta) = \varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cos k\theta + R_n(x).$$

Для значений $a_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ мы имеем

$$f(a_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k(a_i).$$

Следовательно, для значений $\theta_i = \frac{2i+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ мы имеем

$$\varphi(\theta_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cos k\theta_i.$$

Значит, коэффициенты b представляют собой коэффициенты разложения в ряд Фурье, ограниченный n-м членом, четной функции $f(\cos\theta)$ (п. 7.9.3). Отсюда

$$b_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\varphi(\theta_i), \qquad b_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\varphi(\theta_i)\cos k\theta_i$$

и

$$b_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(a_i), \qquad b_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(a_i) T_k(a_i).$$

Пример. Найдем полином третьей степени, приближающийся, по Чебышеву, к функции $f(x) = \ln(1{,}5 + 0{,}5x)$ между -1 и $+1$. Полином, приближающий эту функцию, был уже определен критерием наименьших квадратов (п. 10.3.10).

Мы имеем $n=3$, $a_i=\cos\left(\frac{2i+1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$a_0=\cos\frac{\pi}{8}= 0{,}923879, \quad \theta_0=\frac{\pi}{8},$$

$$a_1=\cos\frac{3\pi}{8}= 0{,}382683, \quad \theta_1=\frac{3\pi}{8},$$

$$a_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-0{,}382683, \quad \theta_2=\frac{5\pi}{8},$$

$$a_3=\cos\frac{7\pi}{8}=-0{,}923879, \quad \theta_3=\frac{7\pi}{8},$$

$$f(a_0)=\ln 1{,}96194=0{,}673941,$$

$$f(a_1)=\ln 1{,}69134=0{,}525519,$$

$$f(a_2)=\ln 1{,}30866=0{,}269011,$$

$$f(a_3)=\ln 1{,}03806=0{,}037357,$$

$$b_0=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} f(a_i) = 0{,}376457,$$

$$b_1=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} f(a_i)\cos\theta_i = 0{,}343144,$$

$$b_2=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} f(a_i)\cos 2\theta_i = -0{,}029427,$$

$$b_3=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} f(a_i)\cos 3\theta_i = 0{,}003313.$$

Отсюда полином будет

$$P(x)=b_0+b_1T_1(x)+b_2T_2(x)+b_3T_3(x),$$

иначе говоря,

$$P(x)=0{,}40588+0{,}33320x-0{,}05885x^2+0{,}01325x^3.$$

Ошибка будет порядка

$$\frac{1}{2^3}\cdot\frac{6}{4!}\,\frac{0{,}5^4}{1{,}5^4}<\frac{4}{10000},$$

если заменить η числом 0, которое является серединой рассматриваемого интервала.

10.3.16. Применение ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то вычислить значение, которое она принимает для значения x переменной, можно кроме уже описанных еще и другими способами. Наиболее употребительно разложение в ряд Тейлора.

Если можно определить функцию и ее последовательные производные для значения a, близкого к x, то ряд Тейлора вблизи a может быть написан в виде

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)+R_n$$

при

$$R_n<\frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}M.$$

M здесь обозначает наибольшее значение, которое может принимать $|f^{(n+1)}(x)|$ между x и a.

Пример. Вычислить $e^{-0,9}$. Разложение в ряд Тейлора e^{-x} вблизи $x=1$ будет

$$e^{-x}=e^{-1}\left[1-(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2-\frac{1}{3!}(x-1)^3+\ldots\right].$$

Ошибка разложения в скобках равна, если ограничиться четырьмя первыми членами, $(x-1)^4\frac{1}{4!}=10^{-4}\frac{1}{24}$.

Обозначим через Δe^{-1} ошибку, которая получается, если писать не все цифры e^{-1}. Предположим, что имеющаяся в нашем распоряжении таблица дает только первые 6 значащих цифр. Общая ошибка по недостатку будет тогда

$$e^{-1}\frac{10^{-4}}{24}+\left[1+0,1+\frac{0,01}{2}+\frac{0,001}{6}\right]\Delta e^{-1}.$$

Если принять $e^{-1}=0,367879$ с ошибкой, меньшей 10^{-6}, то мы получим общую ошибку по недостатку, меньшую $2,6\cdot 10^{-6}$. Можно поэтому написать

$$e^{-0,9}=e^{-1}\left(1+0,1+\frac{0,01}{2}+\frac{0,001}{6}\right)=\frac{6,631}{6}\cdot 0,367879=0,4065676$$

с точностью до $2,6\cdot 10^{-6}$ по недостатку.

Истинное значение $e^{-0,9}$ равно 0,406569659.

10.4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть функция задана таблично. Заменим ее интерполяционным полиномом. Дифференцирование этого полинома даст нам приближения для последовательных производных функции.

Будем всегда обозначать шаг интерполяции через h, начальное значение x через a и через u — переменную $u=\frac{x-a}{h}$. Дифференцирование интерполяционного полинома Ньютона по нисходящим разностям (формула (23)) дает

$$\begin{aligned}
hy'(a+hu)&=\Delta b_0+\frac{2u-1}{2!}\Delta^2 b_0+\frac{3u^2-6u+2}{3!}\Delta^3 b_0+\\
&\quad+\frac{4u^3-18u^2+22u-6}{4!}\Delta^4 b_0+\ldots,\\
h^2y''(a+hu)&=\Delta^2 b_0+(u-1)\Delta^3 b_0+\frac{6u^2-18u+11}{12}\Delta^4 b_0+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\tag{47}$$

Если в этих выражениях $u=0$, то

$$\begin{aligned}
y'(a)&=\frac{1}{h}\left[\Delta b_0-\frac{1}{2}\Delta^2 b_0+\frac{1}{3}\Delta^3 b_0-\frac{1}{4}\Delta^4 b_0+\ldots\right],\\
y''(a)&=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 b_0-\Delta^3 b_0+\frac{11}{12}\Delta^4 b_0-\frac{5}{6}\Delta^5 b_0+\frac{137}{180}\Delta^6 b_0-\ldots\right],\\
y'''(a)&=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 b_0-\frac{3}{2}\Delta^4 b_0+\frac{7}{4}\Delta^5 b_0-\frac{15}{8}\Delta^6 b_0+\ldots\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)}(a)&=\frac{1}{h^n}\left[\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\frac{1}{4}\Delta^4+\frac{1}{5}\Delta^5-\ldots\right]^n b_0.
\end{aligned}\tag{48}$$

В последней строчке запись дана в операционной форме. Она не должна вызывать трудностей.

Если в выражении (47) придавать u последовательно значения 1, 2, 3, ..., то легко получить $y'(a+h)$, $y''(a+h)$, ...; $y'(a+2h)$, $y''(a+2h)$, ...; $y'(a+3h)$, $y''(a+3h)$, ...

В формулах (47) и (48) используются разности на нисходящей диагонали, проходящей через $f(a)=b_0$. Полезно привести соответствующие формулы, полученные из интерполяционного полинома Ньютона по восходящим разностям и интерполяционного полинома Стирлинга, где используются разности, расположенные соответственно на восходящей диагонали и по обеим сторонам горизонтали, проходящей через b_0.

Интерполяционный полином Ньютона по восходящим разностям дает

$$\begin{aligned}
y'(a) &= \frac{1}{h}\left[\Delta b_{-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 b_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 b_{-3} + \dots\right],\\
y''(a) &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 b_{-2} + \Delta^3 b_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 b_{-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 b_{-5} + \frac{137}{180}\Delta^6 b_{-6} + \dots\right],\\
y'''(a) &= \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 b_{-3} + \frac{3}{2}\Delta^4 b_{-4} + \frac{7}{4}\Delta^5 b_{-5} + \frac{15}{8}\Delta^6 b_{-6} + \dots\right],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y^{(n)}(a) &= \frac{1}{h^n}\left[\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 + \dots\right]^n b_{-\alpha},
\end{aligned} \tag{49}$$

где индекс α равен показателю при Δ.

Точно так же применение интерполяционного полинома Стирлинга дает

$$\begin{aligned}
y'(a) &= \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta b_0 + \Delta b_{-1}}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 b_{-1} + \Delta^3 b_{-2}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5 b_{-2} + \Delta^5 b_{-3}}{2} - \dots\right],\\
y''(a) &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 b_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 b_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 b_{-3} - \dots\right],\\
y'''(a) &= \frac{1}{h^3}\left[\frac{\Delta^3 b_{-1} + \Delta^3 b_{-2}}{2} - \frac{1}{4}\frac{\Delta^5 b_{-2} + \Delta^5 b_{-3}}{2} + \frac{7}{12}\frac{\Delta^7 b_{-3} + \Delta^7 b_{-4}}{2} - \dots\right],\\
y^{\mathrm{IV}}(a) &= \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 b_{-2} - \frac{1}{6}\Delta^6 b_{-4} + \frac{7}{240}\Delta^8 b_{-6} - \dots\right],\\
y^{\mathrm{V}}(a) &= \frac{1}{h^5}\left[\frac{\Delta^5 b_{-2} + \Delta^5 b_{-3}}{2} - \frac{1}{3}\frac{\Delta^7 b_{-3} + \Delta^7 b_{-4}}{2} + \dots\right],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{50}$$

Пример. Вычислим производную $y=\operatorname{arctg} x$ для $x=0{,}515$, пользуясь таблицей разностей этой функции, приведенной в п. 10.3.3 ($h=0{,}001$). Здесь следует применить первую формулу (48), где используются разности, находящиеся на нисходящей диагонали, начиная с 0,515. Тогда

$$y'(0{,}515) \approx \frac{1}{0{,}001}\left\{\begin{array}{rr} & 0{,}000\,790\,051\,505\\ + & 321\,815\\ - & 65\\ + & 1\end{array}\right\} = 0{,}790\,373\,256.$$

Точное значение $y'(0{,}515)$ равно

$$\frac{1}{0{,}515^2+1} = 0{,}790\,373\,254\dots$$

С помощью той же таблицы вычислим $y'(0{,}518)$. При этом следует применить первую формулу, полученную из полинома Стирлинга, где используются разности, находящиеся в непосредственной близости с горизонталью, проходящей через 0,518. Тогда

$$y'(0{,}518) \approx \frac{1}{0{,}001}\left\{\begin{array}{r} 0{,}000\,788\,442\,038 \\ + \qquad\qquad 31 \end{array}\right\} = 0{,}788\,442\,069.$$

Точное значение $y'(0{,}518)$ равно

$$\frac{1}{0{,}518^2+1} = 0{,}788\,442\,070.$$

Замечание. В случае эмпирической кривой, где ординаты получаются с погрешностями, рассмотренные способы вычисления производных приводят часто к обескураживающим результатам. Можно сравнить численное разыскание производной функции, известной приближенно, с графическим проведением касательной к грубо начерченной кривой. Легко сообразить, что небольшое изменение формы кривой вблизи рассматриваемой точки значительно влияет на ход касательной, тогда как область, ограниченная кривой, меняется при этом очень мало.

10.5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

10.5.1. Числа Бернулли. По определению, n-е число Бернулли — это коэффициент при $-\frac{t^{2n}}{(2n)!}$ в разложении в ряд по возрастающим степеням t функции $\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$:

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = 1 - B_1\frac{t^2}{2!} - B_2\frac{t^4}{4!} - \ldots - B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!} - \ldots \qquad (51)$$

Левую часть можно написать в виде $j\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{jt}+1}{e^{jt}-1}$. Заменив jt на t в обеих частях формулы (51), получим

$$\frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} = 1 + B_1\frac{t^2}{2!} - B_2\frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (52)$$

Уменьшив на $\frac{t}{2}$ обе части уравнения (52), можем написать

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + B_1\frac{t^2}{2!} - B_2\frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (53)$$

Умножим обе части уравнения (52) на e^t-1 и разложим e^t в ряд. Тогда отождествление коэффициентов при одинаковых степенях t в обеих частях уравнения дает для первых чисел Бернулли:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6},$$

$$B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43\,867}{798},\ B_{10} = \frac{174\,611}{330},\ B_{11} = \frac{854\,513}{138},$$

$$B_{12} = \frac{236\,364\,091}{2730},\ B_{13} = \frac{8\,553\,103}{6}, \ldots$$

В п. 2.1.4 была установлена формула

$$\operatorname{ctg}\pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left[\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \ldots\right].$$

Заменив πx на $\frac{t}{2}$, получим

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=1-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^2}{p^2\pi^2}\left[1-\left(\frac{t}{2\pi p}\right)^2\right]^{-1}$$

или

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}. \tag{54}$$

Сравнив (51) и (54), получаем

$$B_n=\frac{1}{2}\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2n}}.$$

Начиная с $n=5$, числа Бернулли возрастают очень быстро вместе с n.

10.5.2. Полином Бернулли. Обозначим через $\Phi_n(z)$ полином Бернулли n-й степени. Мы определим его с помощью производящей функции

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(z)\frac{t^n}{n!}. \tag{55}$$

Имеем

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\left(\frac{zt}{1}+\frac{z^2t^2}{2!}+\ldots\right)\left(1-\frac{t}{2}+\frac{B_1}{2!}t^2-\frac{B_2}{4!}t^4+\ldots\right).$$

Сравнив эту формулу с (55), получим

$$\Phi_n(z)=z^n-\frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2B_1z^{n-2}-$$
$$\ldots\qquad -C_n^4B_2z^{n-4}+\ldots+(-1)^{k+1}C_n^{2k}B_kz^{n-2k}+\ldots \tag{56}$$

Если n — четное число, большее 2, то последний член равен

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n(n-1)}{2}B_{\frac{n}{2}-1}z^2.$$

Если n — нечетное число, большее 1, то последний член равен

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}}nB_{\frac{n-1}{2}}z.$$

Полиномы Бернулли обладают следующим свойством: если, используя определяющую формулу (55), написать

$$te^{tz}=t\frac{e^{t(z+1)}-1}{e^t-1}-t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(z+1)-\Phi_n(z)]\frac{t^n}{n!},$$

то, разложив левую часть в степенной ряд и приравняв коэффициенты при $\frac{t^n}{n!}$ в обеих частях, мы получим

$$\Phi_n(z+1)-\Phi_n(z)=nz^{n-1}. \tag{57}$$

Заменив последовательно z целыми числами $p-1$, $p-2$, ... и сложив полученные таким образом выражения, находим для $n>1$, считая $\Phi_0(z)=0$:

$$\frac{\Phi_n(p)}{n}=1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\ldots+(p-1)^{n-1}.$$

Разложив в ряд обе части тождества

$$t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}-t=-t\frac{e^{-t(1-z)}-1}{e^{-t}-1}$$

и приравняв коэффициенты при $\frac{t^n}{n!}$ в обеих частях, имеем

$$\Phi_n(z)=(-1)^n\Phi_n(1-z). \tag{58}$$

Из формул (56) — (58) получаем

$$\Phi_n(0)=\Phi_n(1)=0 \quad (n>1), \tag{59}$$

$$\Phi_{2m\pm1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (m>1). \tag{60}$$

Чтобы найти значение $\Phi_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)$, достаточно отыскать коэффициент при $\frac{t^{2m}}{(2m)!}$ в разложении производящей функции (55), где $z=\frac{1}{2}$. Имеем

$$t\frac{e^{\frac{t}{2}}-1}{e^t-1}=\frac{t}{e^{\frac{t}{2}}-1}-\frac{2t}{e^t-1}.$$

Из разложения в ряд (53) находим искомый коэффициент

$$\Phi_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)=2(-1)^{m+1}B_m\left(\frac{1}{2^{2m}}-1\right). \tag{61}$$

Производная $\Phi_n'(z)$ полинома Бернулли n-го порядка такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n'(z)\frac{t^n}{n!}=\frac{t^2e^{zt}}{e^t-1}=\frac{t^2(e^{zt}-1)}{e^t-1}+\frac{t^2}{e^t-1}. \tag{62}$$

Если $n=2m$ $(m>1)$, то, так как разложение второго члена правой части (62) не содержит, согласно (53), членов нечетного порядка, большего 2, можно написать $\Phi_{2m}'(z)=2m\Phi_{2m-1}(z)$. Следовательно,

$$\Phi_{2m}'\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Подобным же вычислением можно показать, что

$$\Phi_{2m+1}''(z)=\Phi_{2m-1}(z).$$

Если $n=2m+1$, то, приравняв коэффициенты при $\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}$ в обеих частях (62), получим, учитывая (53) и (55),

$$\frac{1}{2m+1}\Phi_{2m+1}'(z)=\Phi_{2m}(z)+(-1)^{m+1}B_m. \tag{63}$$

Теперь можно сделать следующие выводы о корнях $\Phi_n(z)$. Полином $\Phi_{2m+1}(z)$, равный нулю при $z=0$, $z=1$, не обращается в нуль в интервале (0, 1) за исключением точки $z=\frac{1}{2}$. Действительно, если бы полином Φ_{2m+1} обращался в этом интервале в нуль два раза, то его производная Φ_{2m+1}' обращалась бы в нуль по крайней мере три раза, а его вторая производная — по крайней мере два раза. Иначе говоря, полином Φ_{2m-1} обращался бы в нуль по крайней мере два раза. Продолжая рассуждение до Φ_3, мы можем показать, что этот полином третьей степени два раза обращался

бы в нуль внутри промежутка (0, 1), а с учетом точек 0 и 1 — четыре раза, что невозможно.

Полином Φ_{2m}, равный нулю при $z=0$, $z=1$, не обращается в нуль в интервале (0, 1). Действительно, если бы это было не так, то его первая производная обращалась бы в нуль в промежутке (0, 1) по крайней мере два раза. Но это невозможно в силу предыдущего рассуждения, так как $\Phi'_{2m} = 2m\Phi_{2m-1}$. Полином Φ_{2m} проходит через максимум при $z=1/2$.

Первые полиномы Бернулли таковы:

$$\Phi_1 = z,$$
$$\Phi_2 = z^2 - z = z(z-1),$$
$$\Phi_3 = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1),$$
$$\Phi_4 = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2,$$
$$\Phi_5 = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{6}z = z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)\left[z(z-1) - \frac{1}{3}\right],$$
$$\Phi_6 = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^2 = z^2(z-1)^2\left[z(z-1) - \frac{1}{2}\right].$$

10.5.3. Формула Эйлера. Рассмотрим тождество

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(t)\,dt = \int_0^h F'(x+h-t)\,dt.$$

Проинтегрируем последовательно по частям. Получаем

$$\left.\begin{aligned}
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \int_0^h F''(x+h-t)\,t\,dt,\\
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \int_0^h F'''(x+h-t)\frac{t^2}{2!}\,dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F(x+h) - F(x) = hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \ldots + \frac{h^{2p}}{(2p)!}F^{(2p)}(x) +\\
&\qquad\qquad + \int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\frac{t^{2p}}{(2p)!}\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Применим формулу (64) к последовательным производным $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(2p-1)}(x)$, ограничив разложения членами, содержащими производную $F^{(2p)}(x)$. Умножив соответственно на h, h^2, ..., h^{2p-1}, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&h[F'(x+h) - F'(x)] = h^2F''(x) + \ldots + \frac{h^{2p}}{(2p-1)!}F^{(2p)}(x) +\\
&\qquad\qquad + h\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}\,dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&h^{2p-1}\left[F^{(2p-1)}(x+h) - F^{(2p-1)}(x)\right] =\\
&\qquad\qquad = h^{2p}F^{(2p)}(x) + h^{2p-1}\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\,t\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Умножим равенство (64) на единицу, первое равенство (65) на $-\frac{1}{2}$, второе равенство (65) на $\frac{B_1}{2!}$, третье равенство (65) на нуль, четвертое на $-\frac{B_2}{4!}$, ..., $(2p-2)$-е на $\frac{(-1)^p B_{p-1}}{(2p-2)!}$ и результаты сложим. В правой части полученной таким образом суммы коэффициент при F'' будет равен нулю, коэффициент при F''', равный $\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}$, будет также нулем. Легко показать, что коэффициент при $F^{(k)}$, равный

$$C=\frac{1}{k!}-\frac{1}{2}\frac{1}{(k-1)!}+\frac{B_1}{2!}\frac{1}{(k-2)!}-\frac{B_2}{4!}\frac{1}{(k-4)!}+\frac{B_3}{6!}\frac{1}{(k-6)!}+\ldots,$$

есть нуль. Действительно, вынося множитель $\frac{1}{k!}$, получаем

$$C=\frac{1}{k!}\left[1-\frac{k}{2}+C_k^2B_1-C_k^4B_2+C_k^6B_3+\ldots\right],$$

т. е. в силу формулы (56), где взято $z=1$,

$$C=\frac{1}{k!}\Phi_k(1).$$

Это выражение равно нулю, как показывает формула (59). Поэтому результат сложения равен

$$F(x+h)-F(x)=\frac{1}{2}h[F'(x+h)-F'(x)]-\frac{B_1}{2!}h^2[F''(x+h)-F''(x)]+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{B_k}{(2k)!}[F^{(2k)}(x+h)-F^{(2k)}(x)]+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\left[F^{(2p-2)}(x+h)-F^{(2p-2)}(x)\right]+$$

$$+\int_0^h F^{(2p+1)}(x+h-t)\left[\frac{t^{2p}}{(2p)!}-\frac{1}{2}h\frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!}+\frac{B_1}{2!}\frac{h^2}{(2p-2)!}t^{2p-2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{k+1}\frac{B_k}{(2k)!}\frac{h^{2k}}{(2p-2k)!}t^{2p-2k}+\ldots+(-1)^p\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}\frac{h^{2p-2}}{2!}t^2\right]dt. \tag{66}$$

По формуле (56) полином в квадратных скобках под знаком интеграла может быть написан в виде

$$\frac{h^{2p}}{(2p)!}\Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right).$$

Положим $F'(x)=f(x)$. Тогда равенство (66) можно записать в виде

$$\int_x^{x+h}f(x)\,dx=\frac{h}{2}[f(x+h)+f(x)]-\frac{B_1}{2!}h^2[f'(x+h)-f'(x)]+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\left[f^{(2p-3)}(x+h)-f^{(2p-3)}(x)\right]+R, \tag{67}$$

где

$$R=\frac{h^{2p}}{(2p)!}\int_0^h f^{(2p)}(x+h-t)\Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Выведем для R две формулы, удобные для использования.

1. Известно, что $\Phi_{2p}(z)$ сохраняет знак между 0 и 1. Поэтому можно применить теорему о среднем и, обозначив через θ_1 число, заключенное между 0 и 1, написать

$$R=\frac{h^{2p}}{(2p)!}f^{(2p)}(x+\theta_1 h)\int_0^h \Phi_{2p}\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Но согласно формуле (63) можно заменить Φ_{2p} на $\frac{1}{2p+1}\Phi'_{2p+1}+(-1)^p B_p$. Так как $\Phi_{2p+1}(0)=\Phi_{2p+1}(1)=0$, R сводится к

$$R=(-1)^p h^{2p+1}\frac{B_p}{(2p)!}f^{(2p)}(x+\theta_1 h). \tag{68}$$

2. $\Phi_{2p}(1/2)$—наибольшее по абсолютной величине значение $\Phi_{2p}(z)$ между 0 и 1. Если $f^{(2p)}$ сохраняет между x и $x+h$ постоянный знак, то теорема о среднем дает возможность написать

$$R=\frac{h^{2p}}{(2p)!}\Phi_{2p}(\theta_1)\int_0^h f^{(2p)}(x+h-t)\,dt$$

при

$$\Phi_{2p}(\theta_1)=\theta_2\Phi_{2p}\left(\frac{1}{2}\right),$$

где θ_1 и θ_2 обозначают два числа между 0 и 1.

Вводим значение $\Phi_{2p}(1/2)$, данное уравнением (61). Тогда

$$R=2\theta_2(-1)^{p+1}h^{2p}\frac{B_p}{(2p)!}\left(\frac{1}{2^{2p}}-1\right)\left[f^{(2p-1)}(x+h)-f^{(2p-1)}(x)\right]. \tag{69}$$

Применяем формулу (67) последовательно к интервалам a, $a+h$; $a+h$, $a+2h$; ...; $a+(n-1)h$, $a+nh=b$. Положим

$$f(a)=y_0,\quad f(a+h)=y_1,\ \ldots,\ f(a+nh)=f(b)=y_n.$$

Складывая n полученных выражений, получаем формулу Эйлера:

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ \ldots\ +y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)-$$
$$-\frac{B_1}{2!}h^2\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{B_2}{4!}h^4\left[f'''(b)-f'''(a)\right]+\ \ldots$$
$$\ldots\ +(-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}}{(2p-2)!}h^{2p-2}\left[f^{(2p-3)}(b)-f^{(2p-3)}(a)\right]+R_1 \tag{70}$$

при

$$R_1=(-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p+1}\left[f^{(2p)}(x_1)+f^{(2p)}(x_2)+\ \ldots\ +f^{(2p)}(x_n)\right]. \tag{71}$$

Это последнее выражение получаем из формулы (68), обозначив через $x_1, \ldots, x_n$ абсциссы точек, заключенных в интервалах a, $a+h$; ... ...; $a+(n-1)h$, b. Если функция $f^{(2p)}(x)$ сохраняет постоянный знак в интервале a, b, то в силу формулы (69) можно написать

$$R_1=2\theta_2(-1)^p\frac{B_p}{(2p)!}h^{2p}\left[f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right]. \tag{72}$$

Существенное замечание. Так как числа Бернулли очень быстро возрастают вместе с p, то весьма важно заметить, что остаточный член R, вообще говоря, бесконечно возрастает вместе с p, если h фиксировано. Но если h стремится к нулю, а p фиксировано, то R быстро стремится к нулю. Формула Эйлера (70) представляет собой асимптотический ряд.

Пример. Требуется найти $\int_1^{1,6} \frac{dx}{x}$. Результат известен заранее:

$$\ln 1{,}6 = 0{,}4700036292\ldots$$

Делим промежуток интегрирования на шесть частичных интервалов ($h = 0{,}1$) и применяем формулу Эйлера при p, равном 3.

Вычислим сначала верхнюю границу совершенной ошибки. Так как последовательные производные $\frac{1}{x}$ сохраняют постоянный знак между 1 и 1,6, то R следует взять в виде (72):

$$R = \theta(-2)\frac{1}{42}(0{,}1)^6\frac{1}{6!}\left[\frac{5!}{1} - \frac{5!}{(1{,}6)^6}\right] = -8\cdot 10^{-9}\theta.$$

Применение формулы Эйлера дает

$$\ln 1{,}6 = 0{,}1\left\{0{,}5 + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1{,}6}\right\} -$$

$$- \frac{0{,}01}{12}\left\{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(1{,}6)^2}\right\} + \frac{1}{720}\cdot 0{,}0001\left\{\frac{6}{1^4} - \frac{6}{(1{,}6)^4}\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&+0{,}0500000000\\
&0{,}0909090909\\
&0{,}0833333333\\
&0{,}0769230769\\
&0{,}0714285714\\
&0{,}0666666666\\
&0{,}0312500000\\
&-0{,}0005078125\\
&+0{,}0000007061\\
&0{,}4700036327,
\end{aligned}$$

откуда $0{,}470003624 < \ln 1{,}6 < 0{,}470003632$.

Замечание. Из предыдущего примера видно, что применение формулы Эйлера позволяет получить очень большую точность при приближенном вычислении определенного интеграла. Это, однако, верно при условии, что имеется возможность вычислить последовательные значения производных интегрируемой функции на концах промежутка интегрирования и, сверх того, для вычисления совершенной ошибки найти оценку производной высокого порядка внутри этого промежутка. Это, конечно, невозможно, если функция дана в эмпирической форме, и часто бывает затруднительно, если аналитическая форма интегрируемой функции сложна. Отсюда возникает необходимость установить некоторое количество формул достаточной точности, вводящих производные интегрируемой функции только в необязательный первый поправочный член.

10.5.4. Формула трапеций. Если в формуле Эйлера положить $p = 1$, то получим формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] + R_1. \qquad (73)$$

Если функция эмпирическая, то вычислить ошибку R_1 невозможно. Если можно вычислить вторую производную и обозначить через M'' верхний предел абсолютного значения этой производной в интервале a, b, то

$$|R_1| < \frac{n}{12} h^3 M''. \tag{74}$$

Применим формулу трапеций к предыдущему примеру. Имеем

$$\ln 1{,}6 = 0{,}1\left\{0{,}5 + \frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1{,}6}\right\} = \begin{array}{l} 0{,}050000 \\ 0{,}090909 \\ 0{,}083333 \\ 0{,}076923 \\ 0{,}071428 \\ 0{,}066666 \\ 0{,}031250 \\ \hline 0{,}470509 \end{array}$$

при ошибке $R_1 < \frac{6}{12}(0{,}1)^3 \cdot 2 = 0{,}001$. Точность здесь довольно посредственная. Если вычисление первых производных доступно, то можно вычислить поправочный член, положив $p = 2$ в формуле Эйлера:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R_1 \tag{75}$$

с ошибкой

$$|R_1| < \frac{n}{720} h^5 M^{\mathrm{IV}}, \tag{76}$$

где M^{IV} обозначает верхний предел абсолютного значения производной $f^{\mathrm{IV}}(x)$. В рассмотренном примере этот поправочный член равен $-0{,}000507$, откуда $\ln 1{,}6 = 0{,}470002$ при ошибке, меньшей 0,000002 по абсолютному значению.

10.5.5. Формула Симпсона. Предположим, что число частичных интервалов четное. Пишем формулу Эйлера для $p = 2$, иначе говоря, равенство (75) с остаточным членом, получающимся из (71), если положить $p = 2$:

$$|R_1| < \frac{h^5}{720}[f^{\mathrm{IV}}(x_1) + \ldots + f^{\mathrm{IV}}(x_n)].$$

Применяем формулу (75) к $n/2$ интервалов, полученных слиянием каждых двух смежных интервалов. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{4h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R_2 \tag{77}$$

при

$$|R_2| < \frac{32h^5}{720}\left[f^{\mathrm{IV}}(x_1') + \ldots + f^{\mathrm{IV}}\left(x_{\frac{n}{2}}'\right)\right],$$

где x_1'—точка интервала a, $a + 2h$, x_2'—точка интервала $a + 2h$, $a + 4h$, ...

Исключаем поправочный член из выражений (75) и (77). Для этого достаточно вычесть второе из первого, умноженного на 4. Получаем формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n] + R_3. \tag{78}$$

Если можно вычислить верхний предел M^{IV} абсолютного значения четвертой производной в интервале a, b, то мы совершаем погрешность

$$|R_3| = \left|\frac{4R_1 - R_2}{3}\right| < \frac{n}{108} h^5 M^{IV}. \tag{79}$$

Применяем формулу Симпсона к предыдущему примеру:

$$\ln 1{,}6 = \frac{0{,}1}{3}\left(1 + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}6}\right) = \begin{array}{l} 0{,}03333333 \\ 0{,}12121212 \\ 0{,}05555555 \\ 0{,}10256410 \\ 0{,}04761904 \\ 0{,}08888888 \\ 0{,}02083333 \\ \hline 0{,}47000636 \end{array}$$

с погрешностью

$$|R_3| < \frac{6}{108}(0{,}1)^5 \cdot 24 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Если в формуле Эйлера положить $p = 3$, предыдущие вычисления дают возможность написать формулу Симпсона с поправочным членом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n] - \\ - \frac{h^4}{180}[f^{III}(b) - f^{III}(a)] + R_4. \tag{80}$$

Это улучшение дает в качестве верхнего предела абсолютного значения погрешности

$$|R_4| < \frac{17}{22680} nh^7 M^{VI}, \tag{81}$$

где M^{VI} — верхний предел абсолютного значения $f^{VI}(x)$ в интервале a, b. Применим формулу (80) к предыдущему примеру. Поправочный член равен $-0{,}00000282\ldots$ Отсюда $\ln 1{,}6 = 0{,}47000356\ldots$ с ошибкой, меньшей по абсолютному значению

$$\frac{17 \cdot 6}{22\,680}(0{,}1)^7\,6! = 0{,}00000032.$$

10.5.6. Формула Уэддля. Предположим, что интервал интегрирования разделен на n интервалов, где n кратно 6. Тогда с помощью вычисления, совершенно подобного предыдущему, можно написать формулу Эйлера при $p = 3$ сначала для n интервалов, затем для $n/2$ интервалов, полученных соединением смежных интервалов по два, а потом для $n/3$ интервалов, полученных соединением смежных интервалов по три. Все три написанных таким образом выражения позволяют исключить оба члена, содержащие первые и третьи производные. Достаточно для этого первое выражение, умноженное на 15, сложить с третьим и вычесть второе, умноженное на 6. Так получаем формулу Уэддля:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{10}[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + \ldots \\ \ldots + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n] + R_5 \tag{82}$$

с оценкой ошибки

$$|R_5| < \frac{47}{12\,600} nh^7 M^{VI}, \tag{83}$$

где M^{VI} — верхний предел абсолютного значения $f^{VI}(x)$ в интервале a, b.

Вернемся к предыдущему примеру:

$$\ln 1{,}6 = 0{,}03\left[1 + \frac{5}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{6}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{5}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}6}\right] = \begin{array}{r} 0{,}030000000 \\ 0{,}136363636 \\ 0{,}025000000 \\ 0{,}138461538 \\ 0{,}021428571 \\ 0{,}100000000 \\ 0{,}018750000 \\ \hline 0{,}470003745 \end{array}$$

с ошибкой, меньшей по абсолютному значению $\frac{47}{12\,600} 6\,(0{,}1)^7\, 6! = 0{,}0000016$.

Если бы мы производили выкладки, исходя из формул Эйлера для $p = 4$, то получили бы формулу Уэддля с поправочным членом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{10}[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + \ldots + 5y_{n-1} + y_n] - \\ - \frac{h^6}{840}[f^V(b) - f^V(a)] + R_6 \tag{84}$$

при

$$|R_6| < \frac{169}{252\,000} nh^9 M^{VIII}, \tag{85}$$

где M^{VIII} — верхний предел абсолютного значения $f^{VIII}(x)$ в интервале a, b.

Для предыдущего примера поправочный член в формуле (84) будет равен $-0{,}000000134$. Отсюда $\ln 1{,}6 = 0{,}470003612$ при ошибке, меньшей по абсолютному значению

$$\frac{169}{252\,000} 6\,(0{,}1)^9\, 8! = 0{,}00000016.$$

10.5.7. Формула Грегори. Когда функция известна эмпирически, можно составить таблицу разностей. Если в формулу Эйлера ввести значения производных, выраженных по формулам (48) через разности, то мы получим после некоторых вычислений формулу Грегори:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right] - \frac{h}{12}[\Delta y_{n-1} - \Delta y_0] - \\ - \frac{h}{24}[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0] - \frac{19h}{720}[\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0] - \\ - \frac{3h}{160}[\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0] - \frac{836h}{60\,480}[\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0] - \\ - \frac{275h}{24\,192}[\Delta^6 y_{n-6} + \Delta^6 y_0] - \frac{33\,953h}{3\,628\,800}[\Delta^7 y_{n-7} - \Delta^7 y_0] - \ldots \tag{86}$$

Пример. Вычислить $I=\int\limits_{0,515}^{0,520}\operatorname{arctg} x\,dx$. Таблица разностей $f(x)=\operatorname{arctg} x$, составленная в п. 10.3.3, дает

$$
\begin{aligned}
0{,}001\,\frac{y_0}{2} &= 0{,}000237787736358\\
0{,}001\,y_1 &= 0{,}000476365524222\\
0{,}001\,y_2 &= 0{,}000477154932097\\
0{,}001\,y_3 &= 0{,}000477943696145\\
0{,}001\,y_4 &= 0{,}000478731816173\\
0{,}001\,\frac{y_5}{2} &= 0{,}000239759645996\\
-(\Delta y_4-\Delta y_0)\frac{0{,}001}{12} &= 214640\\
-(\Delta^2 y_3+\Delta^2 y_0)\frac{0{,}001}{24} &= 53660\\
-(\Delta^3 y_2-\Delta^3 y_3)\frac{19\cdot 0{,}001}{720} &= 0\\
&\overline{\qquad\qquad 0{,}002387743619291}
\end{aligned}
$$

Замечание. Нетрудно вычислить первообразную для функции $y=\operatorname{arctg} x$:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

но, несмотря на это, вычисление интеграла посредством нахождения первообразной

$$I=0{,}520\operatorname{arctg}0{,}520-0{,}515\operatorname{arctg}0{,}515-\frac{1}{2}\ln 1{,}2704+\frac{1}{2}\ln 1{,}265225$$

гораздо более громоздко и (если пользоваться таблицами арктангенсов и логарифмов с невысокой точностью) дает менее точные результаты, чем прямой подсчет по таблице разностей и формуле Грегори.

Формула Грегори использует разности, помещенные на нисходящей и восходящей диагоналях таблицы разностей, имеющих начало в a и b. Пользуясь при вычислении, подобном предыдущему, выражениями для последовательных производных, данными формулами (50), и произведя подстановку в формуле Эйлера, получаем формулу интегрирования. Она образуется с помощью разностей, находящихся по обе стороны от горизонтальных строк таблицы разностей, имеющих начало в a и b:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = h\Big[\frac{1}{2}y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\Big]-\\
-\frac{h}{12}\Big\{\frac{\Delta y_n+\Delta y_{n-1}}{2}-\frac{\Delta y_0+\Delta y_{-1}}{2}\Big\}+\\
+\frac{11h}{720}\Big\{\frac{\Delta^3 y_{n-1}+\Delta^3 y_{n-2}}{2}-\frac{\Delta^3 y_{-1}+\Delta^3 y_{-2}}{2}\Big\}-\\
-\frac{191h}{60\,480}\Big\{\frac{\Delta^5 y_{n-2}+\Delta^5 y_{n-3}}{2}-\frac{\Delta^5 y_{-2}+\Delta^5 y_{-3}}{2}\Big\}+\ldots
\end{aligned}
\qquad (87)
$$

Пример. Требуется вычислить $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=0{,}5$. Берем таблицу косинусов, приведенную в п. 10.3.3. Интервал 2°, выраженный в радианах,

равен 0,0349066. Формула трапеций дает

$$I = 0{,}49994942.$$

Ограничимся вычислением первого поправочного члена из-за неправильного поведения третьих разностей. Этот поправочный член равен 0,00005076, откуда

$$I = 0{,}50000018.$$

Обращаем внимание на превосходное приближение, полученное несмотря на краткость таблицы.

10.5.8. Введение в методы Ньютона — Котеса, Чебышева, Гаусса *). Требуется вычислить приближенное значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Положим

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,u.$$

Имеем

$$I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,u\right)du = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(u)\,du.$$

Мы пришли к приближенному вычислению интеграла

$$J = \int_{-1}^{+1} \varphi(u)\,du. \tag{88}$$

Попробуем представить J в виде суммы

$$H_0\varphi(u_0) + H_1\varphi(u_1) + \ldots + H_n\varphi(u_n). \tag{89}$$

Неизвестные, входящие в формулу (89), определяются следующим критерием: значения выражений (88) и (89) должны совпадать, если $\varphi(u)$ есть полином, степень которого не превосходит некоторого заданного числа.

Правило это допускает три способа применения. По методу Ньютона — Котеса следует заранее выбрать числа u_i, разделяющие интервал -1, $+1$ на равные части, и определять числа H_i (не зависящие от вида $\varphi(u)$) из требования точного равенства между (88) и (89) при замене $\varphi(u)$ полиномом степени до $n+1$. По методу Чебышева следует взять равные между собой числа H_i и определить из того же требования числа u_i. Если же мы определяем одновременно H_i и u_i таким образом, чтобы значения выражений (88) и (89) совпадали при замене $\varphi(u)$ полиномом степени до $2n+1$, — это будет метод Гаусса, более точный, чем предыдущие.

10.5.9. Метод Ньютона — Котеса. Рассмотрим полином степени $n+1$, принимающий те же значения, что и $\varphi(u)$ при значениях u_i аргумента. Это, очевидно, интерполяционный полином Лагранжа. Интегрируя его, получаем

$$H_i = \int_{-1}^{+1} \frac{\prod_{s\neq i}^{n}(u-u_s)}{\prod_{s\neq i}^{n}(u_i-u_s)}\,du. \tag{90}$$

*) Более подробно этот вопрос изложен в кн. В. И. Крылова, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.

Точки u_i делят на равные части интервал -1, $+1$, т. е. $u_i = -1 + \frac{2i}{n}$. Положим

$$\frac{2t}{n} = u + 1.$$

Тогда

$$H_i = \frac{(-1)^{n-i}\,2}{ni!\,(n-i)!} \int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)\,dt. \quad (91)$$

Вернемся к переменной x. Считая $b - a = nh$, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[H_0 f(a) + H_1 f(a+h) + \ldots + H_n f(a+nh)].$$

Коэффициент H_i всегда определяется выражением (91). Можно составить таблицу чисел H_i для нескольких первых значений n. Более подробное изучение способа Ньютона — Котеса позволяет вычислить главную часть ошибки ε_n, приведенную в последнем столбце таблицы. Из рассмотрения этого столбца видно, что выгоднее брать n четное. Прибавив ε_n к результату вычисления I, мы получим лучшее приближенное значение.

n	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	ε_n
1	1	1								$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$
2	1/3	4/3	1/3							$-\frac{1}{2\,880}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3	1/4	3/4	3/4	1/4						$-\frac{1}{6\,480}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4	7/45	32/45	12/45	32/45	7/45					$-\frac{1}{1\,935\,360}(b-a)^7 f^{\mathrm{VI}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
5	19/144	75/144	50/144	50/144	75/144	19/144				$-\frac{11}{37\,800\,000}(b-a)^7 f^{\mathrm{VI}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
6	41/420	216/420	27/420	272/420	27/420	216/420	41/420			$-\frac{1}{1\,567\,641\,600}(b-a)^9 f^{\mathrm{VIII}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
7	$\frac{751}{8\,640}$	$\frac{3\,577}{8\,640}$	$\frac{1\,323}{8\,640}$	$\frac{2\,989}{8\,640}$	$\frac{2\,989}{8\,640}$	$\frac{1\,323}{8\,640}$	$\frac{3\,577}{8\,640}$	$\frac{751}{8\,640}$		$-\frac{167}{426\,924\,691\,200}(b-a)^9 f^{\mathrm{VIII}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
8	$\frac{989}{14\,175}$	$\frac{5\,888}{14\,175}$	$\frac{-928}{14\,175}$	$\frac{10\,496}{14\,175}$	$\frac{-4\,540}{14\,175}$	$\frac{10\,496}{14\,175}$	$\frac{-928}{14\,175}$	$\frac{5\,888}{14\,175}$	$\frac{989}{14\,175}$	$-\frac{37}{62\,782\,739\,712\,000}(b-a)^{11} f^{\mathrm{X}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Пример. Требуется вычислить $I = \int_1^{1,6} \frac{dx}{x}$ при $n = 6$. Имеем

$$\begin{aligned}
840\,H_0 f(1) &= 41 &&= 41{,}000000\\
840\,H_1 f(1{,}1) &= 216/1{,}1 &&= 196{,}363636\\
840\,H_2 f(1{,}2) &= 27/1{,}2 &&= 22{,}500000\\
840\,H_3 f(1{,}3) &= 272/1{,}3 &&= 209{,}230769\\
840\,H_4 f(1{,}4) &= 27/1{,}4 &&= 19{,}285714\\
840\,H_5 f(1{,}5) &= 216/1{,}5 &&= 144{,}000000\\
840\,H_6 f(1{,}6) &= 41/1{,}6 &&= 25{,}625000\\
\hline
\frac{840}{0{,}6} I &&&= 658{,}005119
\end{aligned}$$

Отсюда $I = 0{,}470003656$. Прибавив поправочный член $\varepsilon_6 = -0{,}000000023$, получим $I = 0{,}470003633$.

Замечание. Если разделить интервал a, b на некоторое количество интервалов длиной h и применить формулу Ньютона — Котеса для $n = 1$ в каждом интервале, мы снова придем к формуле трапеций. Применив эту же формулу при $n = 2$ в каждом интервале длиной $2h$, опять находим формулу Симпсона.

10.5.10. Метод Чебышева. В этом методе принимается, что все H_l имеют общее значение H. Такой выбор коэффициентов обосновывается следующим образом. Предположим, что ординаты $\varphi(u_l)$ измерены с одинаковой точностью. Тогда обусловленная ошибками измерения ошибка в интеграле будет наименьшей, если коэффициенты равны между собой.

Приравняем выражения (88) и (89) при $\varphi(u)$, равном полиному степени $n+1$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} (a_0 u^{n+1} + \ldots + a_{n+1})\, du = H\left[a_0 \sum_{l=0}^{n+1} u_l^{n+1} + \ldots + (n+1)\, a_{n+1}\right].$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях равенства, получаем $n+2$ уравнения. Одно из них дает нам $H = \frac{2}{n+1}$. Остается $n+1$ уравнение, чтобы определить $n+1$ число u_l. Эти уравнения суть

$$\sum_{l=0}^{n+1} u_l^k = \int_{-1}^{+1} u^k\, du = [1 + (-1)^k]\frac{1}{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Заметим, что следует ограничиться значениями $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$, так как только они приводят к вещественным u_l. Вычисление дает следующую таблицу (последний столбец отведен для основной части совершенной погрешности):

n	H	u_l	ε_n
1	1	$\pm 0{,}57735026$	$\frac{1}{180}\frac{1}{4!}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
2	$^2/_3$	$\pm 0{,}70710678$ 0	$\frac{1}{480}\frac{1}{4!}(b-a)^5 f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3	$^1/_2$	$\pm 0{,}79465448$ $\pm 0{,}18759248$	$\frac{1}{3780}\frac{1}{6!}(b-a)^7 f^{\mathrm{VI}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4	$^2/_5$	$\pm 0{,}83248748$ $\pm 0{,}37454144$ 0	$\frac{1}{7444}\frac{1}{6!}(b-a)^7 f^{\mathrm{VI}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
5	$^1/_3$	$\pm 0{,}86624682$ $\pm 0{,}42251866$ $\pm 0{,}26663540$	$\frac{1}{50\,400}\frac{1}{8!}(b-a)^9 f^{\mathrm{VIII}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
6	$^2/_7$	$\pm 0{,}88386170$ $\pm 0{,}52965678$ $\pm 0{,}32391182$ 0	$\frac{1}{88\,552}\frac{1}{8!}(b-a)^9 f^{\mathrm{VIII}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
8	$^2/_9$	$\pm 0{,}91158930$ $\pm 0{,}60101866$ $\pm 0{,}52876178$ $\pm 0{,}16790618$ 0	$\frac{1}{822\,180}\frac{1}{10!}(b-a)^{11} f^{\mathrm{X}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Вернувшись снова к переменной x, получаем $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u_i$,

$$I = H \frac{b-a}{2} [f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_n)].$$

Пример. Требуется вычислить $\int_1^{1,6} \frac{dx}{x}$ способом Чебышева. При $n = 6$ таблица дает

$$x_0 = 1{,}034841490, \quad \frac{1}{x_0} = 0{,}96633156;$$
$$x_1 = 1{,}141102966, \quad \frac{1}{x_1} = 0{,}87634510;$$
$$x_2 = 1{,}202826454, \quad \frac{1}{x_2} = 0{,}83137513;$$
$$x_3 = 1{,}300000000, \quad \frac{1}{x_3} = 0{,}76923077;$$
$$x_4 = 1{,}397173546, \quad \frac{1}{x_4} = 0{,}71573070;$$
$$x_5 = 1{,}458897034, \quad \frac{1}{x_5} = 0{,}68544933;$$
$$x_6 = 1{,}565158510, \quad \frac{1}{x_6} = 0{,}63891292$$

$$I = 0{,}3 \cdot \frac{2}{7} \cdot 5{,}48337551$$
$$I = \quad 0{,}470003615$$
$$\varepsilon_6 = \quad 0{,}000000011$$
$$0{,}470003626$$

10.5.11. Метод Гаусса. При этом способе H_i и u_i определяются, как мы уже отметили, равенством формул (88) и (89) при условии, что $\varphi(u)$ есть полином степени $2n+1$. Примем за такой полином произведение любого полинома степени n на полином Лежандра степени $n+1$:

$$\varphi(u) = \psi(u) P_{n+1}(u).$$

Из элементарных свойств полинома Лежандра известно, что

$$\int_{-1}^{+1} \psi(u) P_{n+1}(u)\, du = 0.$$

Следовательно, выражение (89) для полинома $\psi(u) P_{n+1}(u)$ также равно нулю:

$$H_0 \psi(u_0) P_{n+1}(u_0) + H_1 \psi(u_1) P_{n+1}(u_1) + \ldots + H_n \psi(u_n) P_{n+1}(u_n) = 0.$$

Это верно для любого полинома $\psi(u)$ степени n, следовательно,

$$P_{n+1}(u_0) = 0, \quad P_{n+1}(u_1) = 0, \ \ldots, \ P_{n+1}(u_n) = 0.$$

Все u_i представляют собой корни полинома Лежандра степени $n+1$. H_i (не зависящие от вида $\varphi(u)$) всегда определяются выражением (90).

Узлы u_i и коэффициенты H_i для различных значений n даны в следующей таблице:

n	u_i	H_i	ε_n
1	$\pm 0{,}577350269188$	1	$\frac{1}{180}\frac{1}{4!}(b-a)^5 f^{IV}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
2	$\pm 0{,}774596669240$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2\,800}\frac{1}{6!}(b-a)^7 f^{VI}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	0	$\frac{8}{9}$	
3	$\pm 0{,}861136311594$	$0{,}347854845136$	$\frac{1}{44\,100}\frac{1}{8!}(b-a)^9 f^{VIII}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}339981043784$	$0{,}652145154862$	
4	$\pm 0{,}906179845938$	$0{,}236926885056$	$\frac{1}{698\,544}\frac{1}{10!}(b-a)^{11} f^{X}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}538469310104$	$0{,}478628670498$	
	0	$\frac{512}{900}$	
5	$\pm 0{,}932469514202$	$0{,}171324492378$	$\frac{1}{11\,099\,088}\frac{1}{12!}(b-a)^{13} f^{XII}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}661209386466$	$0{,}360761573048$	
	$\pm 0{,}238619186082$	$0{,}467913934572$	
6	$\pm 0{,}949107912342$	$0{,}129484966168$	$\frac{1}{176\,679\,360}\frac{1}{14!}(b-a)^{15} f^{XIV}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}741531185598$	$0{,}279705391488$	
	$\pm 0{,}405845151376$	$0{,}381830050504$	
	0	$0{,}417959183672$	
7	$\pm 0{,}960289856496$	$0{,}101228536290$	$\frac{1}{2\,815\,827\,300}\frac{1}{16!}(b-a)^{17} f^{XVI}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}796666477412$	$0{,}222381034452$	
	$\pm 0{,}525532409916$	$0{,}313706645876$	
	$\pm 0{,}183434642494$	$0{,}362683783378$	
8	$\pm 0{,}968160239506$	$0{,}081274388361$	$\frac{1}{44\,914\,183\,600}\frac{1}{18!}(b-a)^{19} f^{XVIII}\left(\frac{a+b}{2}\right)$
	$\pm 0{,}836031107326$	$0{,}180648160694$	
	$\pm 0{,}613371432700$	$0{,}260610696402$	
	$\pm 0{,}324253423402$	$0{,}312347077040$	
	0	$0{,}330239355001$	

Вернувшись к переменной x, получаем $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u_i$,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \ldots + H_n f(x_n)].$$

Пример. Требуется вычислить $\int_1^{1,6} \frac{dx}{x}$ способом Гаусса для $n=3$.

Из таблицы получаем

$$\begin{aligned} x_0 &= 1{,}04165910, & H_0 &= H_3 = 0{,}34785484,\\ x_1 &= 1{,}19800569, & & \\ x_2 &= 1{,}40199431, & H_1 &= H_2 = 0{,}65214515;\\ x_3 &= 1{,}55834089, & & \end{aligned}$$

$$\frac{H_0}{x_0} = 0{,}33394307$$
$$\frac{H_1}{x_1} = 0{,}54435898$$
$$\frac{H_2}{x_2} = 0{,}46515535$$
$$\frac{H_3}{x_3} = \underline{0{,}22322127}$$
$$\frac{I}{0{,}3} = 1{,}56667867$$
$$I = 0{,}470003601$$
$$\varepsilon_3 = \underline{0{,}000000022}$$
$$0{,}470003623$$

Точность вычисления близка к точности, полученной при использовании формул Ньютона — Котеса и Чебышева для вдвое большего числа интервалов.

10.5.12. Применение интерполяционных полиномов Ньютона. Требуется вычислить

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Положим

$$b - a = nh, \quad u = \frac{x-a}{h}, \quad \varphi(u) = f(a+hu).$$

Имеем

$$I = h\int_0^n \varphi(u)\,du.$$

Если подставить вместо $\varphi(u)$ интерполяционный полином Ньютона по нисходящим разностям (формула (23)), проходящий через $n+1$ точку a, $f(a)$; $a+h$, $f(a+h)$; ...; $a+nh$, $f(a+nh)$, то, возвращаясь к переменной x, мы получим

$$I = h\left[nf(a) + \frac{1}{2}n^2\Delta f(a) + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 f(a) + \right.$$
$$+\left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 f(a) + \left(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\right)\frac{1}{4!}\Delta^4 f(a) +$$
$$+\left(\frac{n^6}{6} - 2n^5 + \frac{35n^4}{4} - \frac{50n^3}{3} + 12n^2\right)\frac{1}{5!}\Delta^5 f(a) +$$
$$\left.+\left(\frac{n^7}{7} - \frac{15n^6}{6} + 17n^5 - \frac{225n^4}{4} + \frac{274n^3}{3} - 60n^2\right)\frac{1}{6!}\Delta^6 f(a) + \ldots\right]. \quad (92)$$

Действуя точно так же, но пользуясь полиномом Ньютона по восходящим разностям (формула (25)), получаем

$$I = h\left[nf(b) + \frac{n^2}{2}\Delta f(b-h) + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 f(b-2h) + \right.$$
$$+\left(\frac{n^4}{4} + n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 f(b-3h) + \left(\frac{n^5}{5} + \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} + 3n^2\right)\frac{1}{4!}\Delta^4 f(b-4h) +$$
$$+\left(\frac{n^6}{6} + 2n^5 + \frac{35n^4}{4} + \frac{50n^3}{3} + 12n^2\right)\frac{1}{5!}\Delta^5 f(b-5h) +$$
$$\left.+\left(\frac{n^7}{7} + \frac{5n^6}{2} + 9n^5 + \frac{225n^4}{4} + \frac{274n^3}{3} + 60n^2\right)\frac{1}{6!}\Delta^5 f(b-6h) + \ldots\right]. \quad (93)$$

Замечание. Если в формуле (92) считать $n=1$ и после применения этой формулы к каждому элементарному интервалу

$$a,\ a+h;\ a+h,\ a+2h;\ \ldots;\ a+(p-1)h,\ a+ph$$

произвести сложение, то

$$\int_a^{a+ph} f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ \ldots\ +\frac{1}{2}f(a+ph)\right].$$

Мы снова приходим к формуле трапеций.

Действуя точно так же при четном числе p и $n=2$ с каждым из элементарных интервалов $a,\ a+2h;\ a+2h,\ a+4h;\ \ldots$ длины $2h$, получаем коэффициент при $\Delta^3 f(a)$, равный нулю. Погрешность здесь порядка $\Delta^4 f(a)$. Получаем

$$\int_a^{a+2ph} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+\ \ldots$$

$$\ldots\ +2f(a+(2p-2)h)+4f(a+(2p-1)h)+f(a+2ph)].$$

Это формула Симпсона.

Точно так же при p, делящемся на 6, возьмем $n=6$ и применим формулу для каждого из интервалов $a,\ a+6h;\ a+6h,\ a+12h;\ \ldots$ длины $6h$, причем коэффициент при величине $\Delta^7 f(a)$ равен нулю.

Для первого интервала получаем

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = h\left[\frac{41}{140}f(a)+\frac{216}{140}f(a+h)+\frac{27}{140}f(a+2h)+\right.$$

$$\left.+\frac{272}{140}f(a+3h)+\frac{27}{140}f(a+4h)+\frac{216}{140}f(a+5h)+\frac{41}{140}f(a+6h)\right].$$

Прибавим к этому выражению пренебрежимо малую величину

$$\frac{h}{140}\Delta^6 f(a) = \frac{h}{140}[f(a)-6f(a+h)+15f(a+2h)-20f(a+3h)+$$

$$+15f(a+4h)-6f(a+5h)+f(a+6h)].$$

Поступив таким же образом для каждого из $\frac{p}{6}$ интервалов и сложив результаты, мы получим с погрешностью порядка $0{,}007h\Delta^8 f(a)$

$$\int_a^{a+6ph} f(x)\,dx = \frac{3h}{10}[f(a)+5f(a+h)+f(a+2h)+6f(a+3h)+$$

$$+f(a+4h)+5f(a+5h)+2f(a+6h)+5f(a+7h)+f(a+8h)+\ \ldots].$$

Это формула Уэддля. Вследствие своей простоты она является одной из лучших формул интегрирования.

10.5.13. Исключительные случаи. Изложенные способы интегрирования функций, заданных аналитически, не дают хороших результатов в следующих случаях:

а) подынтегральная функция обращается в бесконечность в промежутке интегрирования [1]);

б) производная подынтегральной функции бесконечна в промежутке интегрирования;

в) один из пределов интегрирования бесконечен [1]).

В этих случаях приходится прибегать к замене переменной под знаком интеграла.

а) Требуется, например, вычислить интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}.$$

Разложим его на три интеграла:

$$I=\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}+\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}+$$

$$+\int_{x_2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}=I_1+I_2+I_3,$$

где $0<x_1<x_2<1$. Вычисление интеграла I_2 не представляет затруднений. Для вычисления I_1 производим замену переменной $x=y^2$:

$$I_1=\int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{2\,dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Возьмем $x_1=0{,}36$, откуда $y_1=\sqrt{x_1}=0{,}6$. Способ Уэддля при $h=0{,}1$ дает $I_1=1{,}2165$.

Для вычисления I_3 производим замену переменной $1-x=y^2$:

$$I_3=\int_0^{\sqrt{1-x_2}} \frac{2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(2-y^2)}}.$$

Возьмем $x_2=0{,}64$, откуда $y_2=\sqrt{1-x_2}=0{,}6$. Тот же способ при сохранении шага $h=0{,}1$ дает $I_3=0{,}9416$.

Способ трапеций, примененный к вычислению I_2 при 7 интервалах, равных 0,04, дает $I_2=0{,}4642$. Отсюда $I=2{,}6223$. Точное значение равно 2,622056...

б) Приведем очень простой пример для второго случая, когда интеграл легко вычислить и непосредственно. Требуется найти

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Положим $1-x=y^2$. Тогда $I=2\int_0^1 y^2\sqrt{2-y^2}\,dy$.

Способ Симпсона при 10 интервалах, равных 0,1, дает $I=0{,}78537$.

[1]) Предполагается, конечно, что интеграл сохраняет смысл.

Точное значение равно $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ldots$

в) Когда один из пределов бесконечен, самая естественная замена переменной — это $x = \frac{1}{y}$. Такая замена плоха, если второй предел равен нулю. Тогда можно произвести более сложную замену переменной $x = e^{-y}$. Лучше, однако, расчленить интегрирование на две части, как это показано в следующем примере (в котором интеграл также вычисляется непосредственно).

Требуется найти

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Имеем

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Способ Симпсона при 10 интервалах, равных 0,1, дает $I = 1{,}57079$. Точный результат есть $\frac{\pi}{2} = 1{,}570769\ldots$

10.6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.6.1. Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка p. Решенное относительно $y^{(p)}$ оно записывается в виде

$$\frac{d^p y}{dt^p} = f\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}}, t\right). \tag{94}$$

Если положить

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = v, \quad \ldots, \quad \frac{dw}{dt} = z, \tag{95}$$

иначе говоря,

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}} = z,$$

то $p-1$ уравнений (95) вместе с

$$\frac{dz}{dt} = f(y, u, v, \ldots, z, t)$$

образуют систему из p дифференциальных уравнений первого порядка.

Таким образом, численные методы решения системы из p дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= g(y, u, v, \ldots, z, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz}{dt} &= f(y, u, v, \ldots, z, t) \end{aligned}$$

включают в себя методы численного решения уравнения (94) как частный случай.

Настоящий параграф делится на две части. Первая часть касается численного решения одного дифференциального уравнения первого порядка [1]). Вто-

[1]) См. в пп. 4.1.43 и 4.1.44 матричный способ решения системы дифференциальных уравнений первого порядка и решение дифференциального уравнения n-го порядка.

рая часть обобщает полученные выводы на случай системы p дифференциальных уравнений первого порядка, включающий в себя, как мы только что видели, случай численного решения дифференциального уравнения p-го порядка, а также случай системы из s уравнений порядка r ($sr = p$).

10.6.2. Приближенное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{96}$$

Решить его численно — это значит найти возможно точные значения $y_1, y_2, \ldots$, принимаемые для значений $x_1, x_2, \ldots$ независимой переменной функцией y, которая является решением уравнения (96), принимающим значение y_0 при $x = x_0$.

Существуют многочисленные способы для успешного проведения этой операции. Мы приведем два из них из числа наиболее простых и удобных. В одном способе используется ряд Тейлора, и применение его ограничивается случаем, когда частные производные $f(x, y)$ вычисляются легко. Второй, абсолютно общий способ — способ Адамса — требует меньшего объема вычислений, чем другие общие классические способы, как, например, способ Рунге — Кутта и его варианты. Мы дадим также изложение способа Пикара, или способа итерации, так как применение его часто бывает удобно, а теоретическое значение велико.

10.6.3. Решение с помощью ряда Тейлора. Предположим, что значения переменной x возрастают в арифметической прогрессии с разностью h:

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \ \ldots, \ x_k = x_0 + kh.$$

Разложение в ряд Тейлора искомой функции y дает значение y_{k+1} для значения x_{k+1} независимой переменной как функции значения y и ее последовательных производных в точке x_k:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \ldots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}_k + \ldots \tag{97}$$

Но дифференциальное уравнение, которое требуется решить, дает

$$y'_k = f(x_k, y_k).$$

Отсюда последовательным дифференцированием получаем

$$y''_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_k + y'_k \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_k,$$

$$y'''_k = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_k + 2y'_k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_k + (y'_k)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_k + y''_k \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_k,$$

. . . . . .

Формулу (97) применяют для $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если остановить разложение на члене $n = p$, то это сводится к замене решения y между абсциссами x_k и x_{k+1} полиномом, имеющим в точке x_k, y_k соприкосновение p-го порядка с решением, проходящим через эту точку [1]).

Пример. Требуется вычислить для абсцисс 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 решение дифференциального уравнения

$$y' = (x + y)^2,$$

подчиняющегося начальным условиям $x_0 = y_0 = 0$.

---

[1]) Это значит, что указанный полином и решение дифференциального уравнения (принимающее при $x = x_k$ значение y_k) совпадают при $x = x_k$ вместе с производными до порядка p.

Так как интеграл вычисляется точно, то можно будет проверить расчеты. Действительно, если положить $x+y=z$, то

$$\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx},$$

и предложенное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2.$$

Отсюда

$$z=\operatorname{tg}(x+C).$$

Следовательно, вычисляемый интеграл равен

$$y=\operatorname{tg}x-x.$$

Установив это, вычислим y'', y''', ... последовательным дифференцированием рассматриваемого уравнения. Тогда

$$\begin{aligned}
y' &= (x+y)^2,\\
y'' &= 2(x+y)(1+y'),\\
y''' &= 2(1+y')^2+2(x+y)y'',\\
y^{IV} &= 6y''(1+y')+2(x+y)y''',\\
y^{V} &= 8y'''(1+y')+6(y'')^2+2(x+y)y^{IV},\\
y^{VI} &= 10y^{IV}(1+y')+20y''y'''+2(x+y)y^{V},\\
y^{VII} &= 12y^{V}(1+y')+20(y''')^2+30y''y^{IV}+2(x+y)y^{VI}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Вначале $y=y'=y''=0$, $y'''=2$, $y^{IV}=0$, $y^{V}=16$, $y^{VI}=0$, $y^{VII}=272$. При $h=0{,}1$ восьмой член разложения в ряд Тейлора равен $10^{-7}\cdot 272/7!$ Он порядка $5\cdot 10^{-9}$. В разложении мы пренебрегаем этим членом.

По формуле (97) вычисляется последовательно y_{k+1}, а по только что полученным формулам — y'_{k+1}, y''_{k+1} ... Результаты приведены в таблице:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,00033467	0,00271002	0,00933623	0,02279317
y'	0	0,01006704	0,04109135	0,09568890	
y''	0	0,2026895	0,4220793	0,6778725	
y'''	2	2,081144	2,338856	2,820449	
y^{IV}	0	1,64600	3,58476	6,20136	
y^{V}	16	17,3936	22,0020	31,3164	
y^{VI}	0	28,55	65,98	125,56	
$y_{\text{точное}}$	0	0,00033467	0,00271004	0,00933625	0,02279322
$y_{\text{точное}}-y$	0	0	2	2	5

10.6.4. Способ Адамса. Предположим, как и раньше, что значения независимой переменной x находятся в арифметической прогрессии с разностью h, и пусть y_0 — значение, принимаемое решением при $x=x_0$.

Интегрируем (96) от x_i до x_{i+1}. Тогда

$$y_{i+1}=y_i+\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\,y)\,dx.$$

Заменяем $f(x, y)$ интерполяционным полиномом Ньютона по восходящим разностям:

$$f(x, y) = f(x_i, y_i) + u\,\Delta f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \ldots$$

при

$$u = \frac{x - x_i}{h}, \quad x_i = x_{i-1} + h = x_{i-2} + 2h = \ldots$$

Получаем

$$y_{i+1} = y_i + h\left\{f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\Delta f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_{i-2}, y_{i-2}) + \right.$$
$$+ \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_{i-3}, y_{i-3}) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_{i-4}, y_{i-4}) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_{i-5}, y_{i-5}) +$$
$$\left. + \frac{19087}{60480}\Delta^6 f(x_{i-6}, y_{i-6}) + \ldots\right\}. \quad (98)$$

Если в выражении (98) остановиться на k-й разности, пренебрегая $(k+1)$-й разностью, то это сводится к тому, что $f(x, y)$ заменяется параболой k-й степени, проходящей через $k+1$ точек: x_i, y_i; x_{i-1}, y_{i-1}; ... ... ; x_{i-k}, y_{i-k}.

Способ Адамса состоит из двух этапов: прежде всего установление исходной базы, которая состоит из k значений $y_1, y_2, \ldots, y_k$, соответствующих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и определенных возможно точнее (y_0 известно). Далее экстраполяция, которая заключается в том, чтобы применять формулу (98), ограниченную k-й разностью, последовательно для $i = k$, что дает y_{k+1}, для $i = k+1$, что дает y_{k+2}, ... Для простоты мы покажем сейчас подробно применение этого способа при $k = 4$. Это очень распространенная степень приближения.

а) *Установление исходной базы.* Речь идет об определении y_1, y_2, y_3, y_4. Очень удобно пользоваться ранее изложенным решением с помощью ряда Тейлора, но можно также применять способ, при котором функция $f(x, y)$ заменена полиномом Ньютона по нисходящим разностям:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + u\,\Delta f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}u(u-1)\Delta^2 f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{3!}u(u-1)(u-2)\Delta^3 f(x_0, y_0) + \frac{1}{4!}u(u-1)(u-2)(u-3)\Delta^4 f(x_0, y_0) + \ldots$$

Интегрируя уравнение (96), в котором $f(x, y)$ заменена предыдущим полиномом, ограниченным четвертой разностью, получаем

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h\Delta f(x_0, y_0) - \frac{1}{12}h\Delta^2 f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{24}h\Delta^3 f(x_0, y_0) - \frac{19}{720}h\Delta^4 f(x_0, y_0),$$

$$y_2 = y_0 + 2hf(x_0, y_0) + 2h\Delta f(x_0, y_0) + \frac{1}{3}h\Delta^2 f(x_0, y_0) + 0 - \frac{1}{90}h\Delta^4 f(x_0, y_0),$$

$$y_3 = y_0 + 3hf(x_0, y_0) + \frac{9}{2}h\Delta f(x_0, y_0) + \frac{27}{12}h\Delta^2 f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{3}{8}h\Delta^3 f(x_0, y_0) - \frac{3}{80}h\Delta^4 f(x_0, y_0),$$

$$y_4 = y_0 + 4hf(x_0, y_0) + 8h\Delta f(x_0, y_0) + \frac{20}{3}h\Delta^2 f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{8}{3}h\Delta^3 f(x_0, y_0) + \frac{14}{15}h\Delta^4 f(x_0, y_0).$$

Далее мы обозначим первые, вторые, третьи, четвертые и пятые приближения величины K через

$$(K)', \quad (K)'', \quad (K)''', \quad (K)^{IV}, \quad (K)^{V}.$$

Вычисление производится последовательными приближениями:

1)

$$(y_1)' = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

что позволяет вычислить

$$f[x_1, (y_1)'] \quad \text{и} \quad [\Delta f(x_0, y_0)]';$$

2)

$$(y_1)'' = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2} h[\Delta f(x_0, y_0)]',$$

$$(y_2)'' = y_0 + 2hf(x_0, y_0) + 2h[\Delta f(x_0, y_0)]',$$

откуда находятся

$$f[x, (y_1)''], \quad f[x_2 (y_2)''], \quad [\Delta f(x_0, y_0)]'', \quad [\Delta^2 f(x_0, y_0)]'';$$

3)

$$(y_1)''' = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2} h[\Delta f(x_0, y_0)]'' - \frac{1}{12} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]'',$$

$$(y_2)''' = y_0 + 2hf(x_0, y_0) + 2h[\Delta f(x_0, y_0)]'' + \frac{1}{3} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]'',$$

$$(y_3)''' = y_0 + 3hf(x_0, y_0) + \frac{9}{2} h[\Delta f(x_0, y_0)]'' + \frac{9}{4} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]'',$$

откуда вычисляются

$$f[x_1, (y_1)'''], \quad f[x_2, (y_2)'''], \quad f[x_3, (y_3)'''],$$
$$[\Delta f(x_0, y_0)]''', \quad [\Delta^2 f(x_0, y_0)]''', \quad [\Delta^3 f(x_0, y_0)]''';$$

4)

$$(y_1)^{IV} = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2} h[\Delta f(x_0, y_0)]''' - \frac{1}{12} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]''' + \frac{1}{24} h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]''',$$

$$(y_2)^{IV} = y_0 + 2hf(x_0, y_0) + 2h[\Delta f(x_0, y_0)]''' + \frac{1}{3} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]''' + 0,$$

$$(y_3)^{IV} = y_0 + 3hf(x_0, y_0) + \frac{9}{2} h[\Delta f(x_0, y_0)]''' + \frac{27}{12} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]''' + \frac{3}{8} h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]''',$$

$$(y_4)^{IV} = y_0 + 4hf(x_0, y_0) + 8h[\Delta f(x_0, y_0)]''' + \frac{20}{3} h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]''' + \frac{8}{3} h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]''',$$

откуда находятся

$$f[x_1, (y_1)^{IV}], \quad f[x_2, (y_2)^{IV}], \quad f[x_3, (y_3)^{IV}], \quad f[x_4, (y_4)^{IV}],$$
$$[\Delta f(x_0, y_0)]^{IV}, \quad [\Delta^2 f(x_0, y_0)]^{IV}, \quad [\Delta^3 f(x_0, y_0)]^{IV}, \quad [\Delta^4 f(x_0, y_0)]^{IV};$$

5)

$$(y_1)^{V} = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h[\Delta f(x_0, y_0)]^{IV} - \frac{1}{12}h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]^{IV} + \\ + \frac{1}{24}h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]^{IV} - \frac{19}{720}h[\Delta^4 f(x_0, y_0)]^{IV},$$

$$(y_2)^{V} = y_0 + 2hf(x_0, y_0) + 2h[\Delta f(x_0, y_0)]^{IV} + \frac{1}{3}h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]^{IV} + \\ + 0 - \frac{1}{90}h[\Delta^4 f(x_0, y_0)]^{IV},$$

$$(y_3)^{V} = y_0 + 3hf(x_0, y_0) + \frac{9}{2}h[\Delta f(x_0, y_0)]^{IV} + \frac{27}{12}h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]^{IV} + \\ + \frac{3}{8}h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]^{IV} - \frac{3}{80}h[\Delta^4 f(x_0, y_0)]^{IV},$$

$$(y_4)^{V} = y_0 + 4hf(x_0, y_0) + 8h[\Delta f(x_0, y_0)]^{IV} + \frac{20}{3}h[\Delta^2 f(x_0, y_0)]^{IV} + \\ + \frac{8}{3}h[\Delta^3 f(x_0, y_0)]^{IV} + \frac{14}{45}h[\Delta^4 f(x_0, y_0)]^{IV}.$$

Можно улучшить значения y, вычислив $f[(x, (y)^{V}]$, затем разности и применяя предыдущие формулы по второму разу и т. д. до тех пор, пока результаты не станут повторяться.

б) *Экстраполяция.* Мы получим приближенное значение y_5, применяя формулу (98), ограниченную членом с Δ^4 для $i = 4$;

$$(y_5)' = y_4 + h\left\{f(x_4, y_4) + \frac{1}{2}\Delta f(x_3, y_3) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_2, y_2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_1, y_1) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_0, y_0)\right\}. \quad (99)$$

Значения Δf_3, $\Delta^2 f_2$, $\Delta^3 f_1$, $\Delta^4 f_0$ даны восходящими разностями таблицы для f.

Нужно уточнить полученное значение y_5. Для этого с помощью $f[x_5, (y_5)']$ вычисляют таблицу разностей. Пусть $[\Delta f(x_4, y_4)]'$, $[\Delta^2 f(x_3, y_3)]'$, ...,— улучшенные разности этой таблицы. Имеем

$$y_i = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y)\,dx,$$

где функция $f(x, y)$ выражена через интерполяционный полином Ньютона по восходящим разностям.

Интегрирование дает для $i = 5$

$$(y_5)'' = y_4 + h\left\{f[x_5, (y_5)'] - \frac{1}{2}[\Delta f(x_4, y_4)]'\right\} - \frac{1}{12}[\Delta^2 f(x_3, y_3)]' - \\ - \frac{1}{24}[\Delta^3 f(x_2, y_2)]' - \frac{19}{72}[\Delta^4 f(x_1, y_1)]' - \frac{3}{160}[\Delta^5 f(x_0, y_0)]'. \quad (100)$$

При помощи этого улучшенного значения вычисляют новую таблицу разностей и т. д. до тех пор, пока не получатся два равных последовательных приближения.

Пример. Требуется численно решить дифференциальное уравнение

$$y' = 1 - \frac{y}{x}$$

при начальных условиях $x_0 = y_0 = 2$ с шагом $h = 0{,}05$.

Имеем:

1) $(y_1)' = 2 + 0{,}05\,(1 - 1) = 2,$

$$f[x_1,\ (y_1)'] = 1 - \frac{2}{2{,}05} = 0{,}0244,$$

x	f	Δf
2	0	0,0244
2,05	0,0244	

2) $(y_1)'' = 2 + 0{,}05 \cdot 0 + \frac{1}{2}\,0{,}05 \cdot 0{,}0244 = 2{,}00061,$

$(y_2)'' = 2 + 0{,}10 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}0244 = 2{,}00244,$

$$f[x_1,\ (y_1)''] = 1 - \frac{2{,}00061}{2{,}05} = 0{,}0241,$$

$$f[x_2,\ (y_2)''] = 1 - \frac{2{,}00244}{2{,}10} = 0{,}0465,$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$
2	0	0,0241	—0,0017
2,05	0,0241	0,0224	
2,10	0,0465		

3) $(y_1)''' = 2 + 0 + \frac{1}{2}\,0{,}05 \cdot 0{,}0241 + \frac{1}{12}\,0{,}05 \cdot 0{,}0017 = 2{,}0006095,$

$(y_2)''' = 2 + 0 + 2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}0241 - \frac{1}{3}\,0{,}05 \cdot 0{,}0017 = 2{,}0023817,$

$(y_3)''' = 2 + 0 + \frac{9}{2}\,0{,}05 \cdot 0{,}0241 - \frac{9}{4}\,0{,}05 \cdot 0{,}0017 = 2{,}0052312,$

$$f[x_1,\ (y_1)'''] = 1 - \frac{2{,}0006095}{2{,}05} = 0{,}02409293,$$

$$f[x_2,\ (y_2)'''] = 1 - \frac{2{,}0023817}{2{,}10} = 0{,}04648491,$$

$$f[x_3,\ (y_3)'''] = 1 - \frac{2{,}0052312}{2{,}15} = 0{,}06733433,$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
2	0	0,02409293		
2,05	0,02409293	0,02239198	—0,00170095	0,00015839
2,10	0,04648491	0,02084942	—0,00154256	
2,15	0,06733433			

4) $(y_1)^{IV} = 2{,}0006099,$
$(y_2)^{IV} = 2{,}0023809,$
$(y_3)^{IV} = 2{,}0052343,$
$(y_4)^{IV} = 2{,}0091046,$

$$f[x_1, (y_1)^{IV}] = 1 - \frac{2{,}0006099}{2{,}05} = 0{,}02409273,$$

$$f[x_2, (y_2)^{IV}] = 1 - \frac{2{,}0023809}{2{,}10} = 0{,}04648529,$$

$$f[x_3, (y_3)^{IV}] = 1 - \frac{2{,}0052343}{2{,}15} = 0{,}06733288,$$

$$f[x_4, (y_4)^{IV}] = 1 - \frac{2{,}0091046}{2{,}20} = 0{,}08677064,$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
2	0				
		0,02409273			
2,05	0,02409273		—0,00170017		
		0,02239256		0,00015520	
2,10	0,04648529		—0,00154497		—0,00002006
		0,02084759		0,00013514	
2,15	0,06733288		—0,00140983		
		0,01943776			
2,20	0,08677064				

5) $(y_1)^{V} = 2{,}00060975,$
$(y_2)^{V} = 2{,}00238095,$
$(y_3)^{V} = 2{,}00523256,$
$(y_4)^{V} = 2{,}00909080.$

Эти значения можно считать окончательными, только если последовательные улучшения дают тот же результат. Поэтому вычислим новую таблицу разностей функции $f(x, y)$:

$$f[x_1, (y_1)^{V}] = 0{,}02409280,$$
$$f[x_2, (y_2)^{V}] = 0{,}04648526,$$
$$f[x_3, (y_3)^{V}] = 0{,}06733369,$$
$$f[x_4, (y_4)^{V}] = 0{,}08677691,$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
2	0				
		0,02409280			
2,05	0,02409280		—0,00170034		
		0,02239246		0,00015631	
2,10	0,04648526		—0,00154403		—0,00001749
		0,02084843		0,00013882	
2,15	0,06733369		—0,00140521		
		0,01944322			
2,20	0,08677691				

что дает улучшенные значения

$$(y_1)^{VI} = 2{,}00060975,$$
$$(y_2)^{VI} = 2{,}00238095,$$
$$(y_3)^{VI} = 2{,}00523255,$$
$$(y_4)^{VI} = 2{,}00909091.$$

Новое вычисление таблицы разностей функции $f(x, y)$ приводит к приближению, в точности повторяющему предыдущие значения, которые могут быть, следовательно, приняты за окончательную исходную базу.

Переходим к экстраполяции. Из формулы (99) имеем

$$(y_5)' = 2{,}01388846,$$
$$f[x_5, (y_5)'] = 1 - \frac{2{,}01388846}{2{,}25} = 0{,}10493846.$$

Отсюда получаем новую таблицу разностей, ограниченную пятой разностью. Так как нам нужны лишь восходящие разности, то приведена только нижняя часть таблицы:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
				0,00013882	—0,00001749	0,00000221
			—0,00140521		—0,00001528	
		0,01944322		0,00012354		
2,20	0,08677691		—0,00128167			
		0,01816155				
2,25	0,10493846					

Формула (100) дает в качестве первого улучшения y_5

$$(y_5)'' = 2{,}01388889.$$

Новое вычисление таблицы разностей, основанное на этом значении y_5, в точности повторяет тот же результат. Значит, можно перейти теперь к вычислению y_6 и т. д.

Заметив, что данное дифференциальное уравнение является линейным, мы можем точно вычислить решение, проходящее через точку $x_0 = y_0 = 2$. Данное уравнение может быть записано в виде

$$(xy)' = x,$$

откуда получаем искомое частное решение:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

Точное вычисление y для различных значений x показывает, что апроксимации y верны до восьмого десятичного знака.

Замечание. В большинстве случаев не требуется вычислять такие далекие приближения, как в предыдущем примере. Либо значение h бывает задано, и тогда можно позволить себе применять формулу апроксимации лишь при значении k, меньшем чем 4. При этом формулы будут соответствующим образом урезаны; этапы установления исходной базы сократятся, так же как и все вычисления, касающиеся разностей менее высокого порядка. Либо h

не задается и можно выбрать его достаточно большим, чтобы сократить сумму вычислений, нужных для заполнения полного промежутка, в котором желательно знать y с заданным приближением. Можно также соединить оба способа действий удачным выбором h и k. Здесь трудно предписать твердые правила. Нужно самому заметить по мере вычислений момент, когда следует изменить значение h либо путем удвоения, либо путем уменьшения вдвое, таким образом, чтобы получить при наименьшем количестве вычислений и с нужной точностью повторение последовательных приближений y.

10.6.5. Сокращенный вариант. Если можно довольствоваться исходной базой, состоящей из значений y_0 (точно известного), y_1, y_2, y_3, то бывает удобно пользоваться следующим способом.

Пренебрегая четвертой разностью, можно установить исключительно простую формулу. Интегрируем (96) от x_i до x_{i+4}:

$$y_{i+4} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+4}} f(x, y)\, dx.$$

Заменяем $f(x, y)$ интерполяционным полиномом Ньютона по нисходящим разностям, ограниченным третьей разностью. После интегрирования получаем

$$\frac{3}{h}(y_{i+4} - y_i) = 12 f_i + 24\,\Delta f_i + 20\,\Delta^2 f_i + 8\,\Delta^3 f_i. \tag{101}$$

Заменив Δ, Δ^2, Δ^3 их выражениями, находим

$$y_{i+4} - y_i = \frac{4h}{3}(2f_{i+1} - f_{i+2} + 2f_{i+3}). \tag{102}$$

Первый отброшенный член равен $\frac{28}{90} h\,\Delta^4 f$.

Как только y_{i+4} вычислено, нетрудно вычислить f_{i+4} и снова получить значение y_{i+4} с помощью следующей формулы, выведенной из формулы Симпсона:

$$y_{i+4} = y_{i+2} + \frac{h}{3}(f_{i+4} + 4f_{i+3} + f_{i+2}). \tag{103}$$

Мы пренебрегаем при этом членом порядка $\frac{1}{90} h\,\Delta^4 f$.

Необходимо, очевидно, прежде чем начать вычисление шаг за шагом, иметь исходную базу, образованную значениями y_0 (точно известными), y_1, y_2, y_3 (вычисленными). Ее легко найти с помощью ряда Тейлора.

Разность значений y_{i+4}, полученных из формул (102) и (103), равна примерно

$$\frac{29}{90} h\,\Delta^4 f.$$

Она приблизительно в 30 раз больше, чем поправка, которую требуется внести в результат, полученный в формуле (103). Таким образом, если одна тридцатая этой разности меньше искомой точности в вычислениях, мы можем пренебречь погрешностью формулы (103).

Если эта разность очень велика, то выгодно уменьшить вдвое интервал h. Если же она пренебрежимо мала, то мы удвоим интервал, что значительно сократит вычисления.

Пример. Требуется для $x = 0{,}4$ получить численное решение уравнения

$$y' = y + x^2$$

при начальных условиях $y_0 = 1$, $x_0 = 1$. Результат требуется найти с точностью до пятой значащей цифры.

Исходную базу легко получаем с помощью ряда Тейлора:

$$y_1 = 1{,}1055, \quad y_2 = 1{,}2242, \quad y_3 = 1{,}3595.$$

Для $h = 0{,}1$ имеем

$$y_4 = y_0 + \frac{0{,}4}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3),$$
$$f_1 = y_1 + x_1^2 = 1{,}1155,$$
$$f_2 = y_2 + x_2^2 = 1{,}2642,$$
$$f_3 = y_3 + x_3^2 = 1{,}4495.$$

Отсюда

$$y_4 = 1{,}5154.$$

Формула Симпсона дает

$$y_4 = y_2 + \frac{0{,}1}{3}(f_4 + 4f_3 + f_2),$$
$$f_4 = y_4 + x_4^2 = 1{,}6754,$$

откуда

$$y_4 = 1{,}5154.$$

Уточнять значение y_4 больше не нужно.

Вычисление y на следующем интервале следует производить при $h = 0{,}2$.

10.6.6. Приближенное интегрирование системы дифференциальных уравнений первого порядка. Ограничимся изложением способа Адамса для системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Способ этот может быть легко распространен на любое число уравнений. Дана система

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z),$$
$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

и пусть y_0, z_0 — значения, принимаемые двумя неизвестными функциями для одного и того же значения x_0 независимой переменной (начальные условия).

Так же как и при решении дифференциального уравнения первого порядка, отыскание значений $y_1, y_2, \ldots$; $z_1, z_2, \ldots$, принимаемых функциями y и z для значений независимой переменной x, составляющих арифметическую прогрессию с разностью h, следует разделить на два этапа: установление исходной базы и экстраполяция.

Установить исходную базу можно, либо пользуясь способом Тейлора, либо способом, подобным только что изложенному, при помощи интерполяционного полинома Ньютона по нисходящим разностям Ньютона.

10.6.7. Использование ряда Тейлора. Этот способ, который излагается здесь для установления исходной базы, является также способом полного решения системы дифференциальных уравнений. Чтобы убедиться в этом, достаточно продолжить описанное ниже вычисление таким образом, чтобы покрыть весь рассматриваемый интервал.

Пусть y_0 и z_0 — значения функций y и z для значения $x = x_0$ независимой переменной. Значения y_1 и z_1 для $x_1 = x_0 + h$ даны выражениями

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \ldots + \frac{h^n}{n!}y_0^n + \ldots,$$
$$z_1 = z_0 + hz_0' + \frac{h^2}{2}z_0'' + \ldots + \frac{h^n}{n!}z_0^{(n)} + \ldots$$

при

$$y_0' = f(x_0, y_0, z_0),$$
$$z_0' = g(x_0, y_0, z_0),$$
$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y_0'\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + z_0'\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0,$$
$$z_0'' = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 + y_0'\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 + z_0'\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

10.6.8. Применение интерполяционного полинома Ньютона с нисходящими разностями. Находим величины

$$(y_1)' = y_0 + hf(x_0, y_0, z_0),$$
$$(z_1)' = z_0 + hg(x_0, y_0, z_0),$$

откуда мы можем вычислить

$$f[x_1, (y_1)', (z_1)'],$$
$$g[x_1, (y_1)', (z_1)'],$$

и

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0), \quad \Delta g(x_0, y_0, z_0),$$

откуда

$$(y_1)'' = y_0 + hf_0 + \frac{1}{2}h(\Delta f_0)',$$
$$(z_1)'' = z_0 + hg_0 + \frac{1}{2}h(\Delta g_0),$$

и т. д.

С помощью формул, совершенно тождественных тем, что применяются в случае решения одного уравнения, мы получаем шаг за шагом таблицу

$$\begin{array}{lllll}
f(x_0, y_0, z_0) & & & & \\
 & \Delta f(x_0, y_0, z_0) & & & \\
f(x_1, y_1, z_1) & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & \Delta f(x_1, y_1, z_1) & & \Delta^3 f_0 & \\
f(x_2, y_2, z_2) & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_0 \\
 & \Delta f(x_2, y_2, z_2) & & \Delta^3 f_1 & \\
f(x_3, y_3, z_3) & & \Delta^2 f_2 & & \\
 & \Delta f(x_3, y_3, z_3) & & & \\
f(x_4, y_4, z_4) & & & &
\end{array}$$

и такую же таблицу для g.

Как только сделаны улучшения и получены окончательные значения

$$y_1, y_2, y_3, y_4,$$
$$z_1, z_2, z_3, z_4,$$

переходим к экстраполяции, производимой по формулам:

$$(y_5)' = y_4 + h\left[f(x_4, y_4, z_4) + \frac{1}{2}\Delta f(x_3, y_3, z_3) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_2, y_2, z_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_1, y_1, z_1) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_0, y_0, z_0)\right],$$
$$(z_5)' = z_4 + h\left[g(x_4, y_4, z_4) + \frac{1}{2}\Delta g(x_3, y_3, z_3) + \frac{5}{12}\Delta^2 g(x_2, y_2, z_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\Delta^3 g(x_1, y_1, z_1) + \frac{251}{720}\Delta^4 g(x_0, y_0, z_0)\right].$$

Так же, как и ранее, необходимо улучшить эти значения по формулам:

$$(y_5)'' = y_4 + h\left\{f[x_5, (y_5)', (z_5)'] - \frac{1}{2}[\Delta f(x_4, y_4, z_4)]' - \right.$$
$$- \frac{1}{12}[\Delta^2 f(x_3, y_3, z_3)]' - \frac{1}{24}[\Delta^3 f(x_2, y_2, z_2)]' -$$
$$\left. - \frac{19}{72}[\Delta^4 f(x_1, y_1, z_1)]' - \frac{3}{160}[\Delta^5 f(x_0, y_0, z_0)]'\right\},$$

$$(z_5)'' = z_4 + h\left\{g[x_5, (y_5)', (z_5)'] - \frac{1}{2}[\Delta g(x_4, y_4, z_4)]' - \right.$$
$$- \frac{1}{12}[\Delta^2 g(x_3, y_3, z_3)]' - \frac{1}{24}[\Delta^3 g(x_2, y_2, z_2)]' -$$
$$\left. - \frac{19}{72}[\Delta^4 g(x_1, y_1, z_1)]' - \frac{3}{160}[\Delta^5 g(x_0, y_0, z_0)]'\right\}.$$

10.6.9. Способ Пикара. Дано дифференциальное уравнение, решенное относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

с начальным условием $y = y_0$ для $x = x_0$.

Проинтегрировав от x_0 до x, получаем

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$$

или

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx, \qquad (104)$$

где y — неизвестная функция от x, находящаяся также под знаком интеграла. Будем решать это интегральное уравнение последовательными приближениями.

За первое приближенное значение неизвестной функции примем

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

Подставив это значение y_1 в правую часть интегрального уравнения (104), получим

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\,dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx.$$

Все функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ принимают значение y_0 при $x = x_0$ и могут рассматриваться как все более точные приближения к $y(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$

Сходимость получается в предположении, что $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны вблизи точки x_0, y_0. Рассмотренный способ, легкий в изложении,

оказывается часто трудным для применения. Последовательные интегрирования могут быть очень сложными, а главное, сходимость в большинстве случаев очень медленная, что крайне неудобно при численных расчетах. Можно значительно улучшить этот способ, усовершенствовав исходную базу, иначе говоря, первое приближение. Действительно, принять y_0 за первое приближение — то же самое, что принять $\frac{dy}{dx}=0$, а это является очень грубым приближением. Чтобы иметь более точное первое приближение, разложим $f(x, y)$ (как функцию аргумента y) в ряд Тейлора вблизи y_0:

$$f(x, y)=f(x, y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}+R(x, y).$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение, пренебрегая остатком $R(x, y)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial y_0}y+\left[f(x, y_0)-y_0\frac{\partial f}{\partial y_0}\right].$$

Это — линейное уравнение, рассмотренное в п. 6.1.5. В нем

$$\varphi(x)=\frac{\partial f}{\partial y_0}, \qquad \psi(x)=f(x, y_0)-y_0\frac{\partial f}{\partial y_0}.$$

Если ввести решение, принимающее значение y_0 для $x=x_0$, в правую часть уравнения (104), получаем приближение, часто оказывающееся достаточным для большинства случаев.

Пример. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=y^3$$

при начальных условиях $x_0=0$, $y_0=1$. В этом уравнении переменные разделяются, что позволяет найти точное решение $y=(1-2x)^{-1/2}$. Оно будет служить для проверки.

Применяем способ Пикара. Первое приближение равно $y_0=1$. Второе равно

$$y_1=1+\int_0^x dx=1+x,$$

затем

$$y_2=1+\int_0^x (1+x)^3\,dx=\frac{3}{4}+\frac{(1+x)^4}{4}$$

и

$$y_3=1+\frac{1}{64}\int_0^x [3+(1+x)^4]^3\,dx=1+x+$$
$$+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\frac{13}{4}x^4+\frac{18}{5}x^5+\frac{27}{8}x^6+\frac{147}{56}x^7+$$
$$+\frac{27}{16}x^8+\frac{7}{8}x^9+\frac{11}{20}x^{10}+\frac{33}{352}x^{11}+\frac{1}{64}x^{12}+\frac{1}{832}x^{13}.$$

Заметим, что первые 4 члена совпадают с началом разложения в ряд Тейлора точного решения.

Применяем измененный способ Пикара. Имеем

$$\varphi(x)=3, \quad \psi(x)=-2,$$

откуда первое приближение получается из уравнения

$$\frac{dy}{dx}=3y-2,$$

иначе говоря,

$$\bar{y}_0=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3x}.$$

Второе приближение будет

$$\bar{y}_1=1+\int_0^x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)^3dx=1+\frac{1}{27}\left[-\frac{46}{9}+8x+4e^{3x}+e^{6x}+\frac{1}{9}e^{9x}\right].$$

Сравниваем четвертое приближение y_3, второе приближение $\bar{y}_1$ и точное решение y для $x=0{,}2$. Имеем

$$y(0{,}2)=1{,}29099, \quad \bar{y}_1(0{,}2)=1{,}28776, \quad y_3(0{,}2)=1{,}28676.$$

Из этого примера видно, что при использовании способа Пикара хорошее начальное приближение приносит значительную выгоду.

10.7. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Способ изоклин. Дано дифференциальное уравнение $\varphi(x, y, y')=0$. Решив его относительно y', получаем $y'=f(x, y)$.

Будем предполагать, что $f(x, y)$ — однозначная функция x и y, имеющая конечные первые производные по x и y. Геометрическое место точек плоскости, в которых интегральные кривые имеют крутизну (т. е. тангенс угла наклона касательной), равную p, — это, очевидно, кривая

$$p=f(x, y).$$

Ее называют изоклиной. Если построить изоклины легко (в противном случае способ не представляет интереса), можно начертить на плоскости несколько изоклин $I_{p_1}, I_{p_2}, \ldots$, соответствующих крутизнам $p_1, p_2, \ldots$

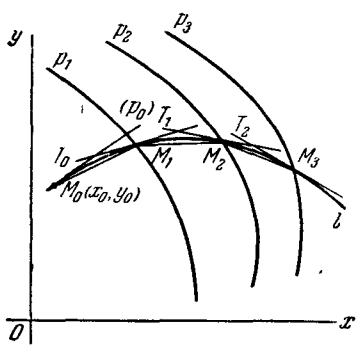


Рис. 10.13.

Пусть M_0 — точка с координатами x_0, y_0 (начальные условия) и пусть

$$p_0=f(x_0, y_0)$$

— крутизна интегральной кривой, проходящей через эту точку; I_{p_1} — ближайшая изоклина (рис. 10.13). Требуется найти точку M_1 пересечения интегральной кривой с изоклиной I_{p_1}. Известно, что крутизна интегральной кривой в точке M_1 есть p_1. Поэтому мы заменим участок M_0M_1 интегральной кривой на прямолинейный отрезок с крутизной, имеющей среднее значение $\frac{p_0+p_1}{2}$. Проведя через M_0 прямую с такой крутизной, найдем точку M_1 как пересечение этой прямой с изоклиной I_{p_1}. Потом проведем через M_1 прямую с крутизной $\frac{p_1+p_2}{2}$ и в пересечении ее с изоклиной I_{p_2} найдем точку M_2 и т. д.

Гладкая кривая l, проведенная через точки M_0, M_1, ..., будет приближать искомую интегральную кривую. При этом ломаная $M_0M_1M_2\ldots$ вписана в l. Описанную ломаную $M_0T_0T_1T_2\ldots$ получим, проведя через точки M_0, M_1, M_2, ... прямые с крутизнами p_0, p_1, p_2, ..., касательные к l.

Полезно получить некоторые сведения о форме пучка интегральных кривых, облегчающие его построение.

Место точек перегиба. На каждой изоклине может находиться точка, в которой интегральная кривая касательна к ней. В такой точке крутизна $\frac{dy}{dx}$ интегральной кривой, равная $f(x, y)$, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$, справедливому для крутизны изоклины. Поэтому в такой точке

$$f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

Так как на интегральной кривой $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}$, то в рассматриваемой точке $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, т. е. интегральная кривая имеет перегиб (при условии, что $\frac{d^3y}{dx^3}$ отлично от нуля, чтобы имела место перемена знака кривизны).

Таким образом, $f\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}=0$ есть уравнение места точек перегиба интегральных кривых.

В случае, если дифференциальное уравнение не разрешено относительно производной $\varphi(x, y, y')=0$, место точек перегиба получается исключением p из уравнений $\varphi(x, y, p)=0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}p=0$.

Место точек возврата. Положим, что пучок изоклин имеет огибающую. Тогда уравнение этой огибающей можно получить, исключив p из уравнения изоклин $\varphi(x, y, p)=0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0$. Изоклины, касательные к огибающей, находятся вблизи нее с одной ее стороны. Интегральные кривые, проходящие вблизи огибающей, не могут ее пересечь, и в большинстве случаев точка, общая с огибающей, является для них точкой возврата.

Если изоклины имеют двойную точку, то в этой точке интегральная кривая возвращается с той же крутизной. Следовательно, это точки, где интегральные кривые касательны сами к себе. Если это имеет место, то уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \varphi(x, y, p)=0$$

совместимы, и исключение p дает искомое место.

Асимптоты. Если пучок интегральных кривых имеет общую асимптоту, то при бесконечном возрастании x предел $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{y}{x}$ будет один и тот же. Заменим в дифференциальном уравнении y' на p и y на px. Тогда

$$\varphi(x, px, p)=0.$$

Если при бесконечно возрастающем x величина p, полученная из этого уравнения, имеет пределом p_1, то прямая $y=p_1x+q_1$ — асимптота, если значение q, полученное из

$$\varphi(x, p_1x+q, p_1)=0$$

при бесконечно возрастающем x имеет конечный предел q_1. Если же предыдущее уравнение не зависит от x, то прямая $y = p_1 x + q_1$ входит в пучок интегральных кривых. Это особое решение, которое обычно входит в огибающую пучка.

Пример. Дано $y'^2 = x^2 - y^2$.

В той части плоскости, где $x^2 - y^2 < 0$, интегральных кривых нет. Через точку, где $x^2 - y^2 > 0$, проходят две интегральные кривые, крутизны

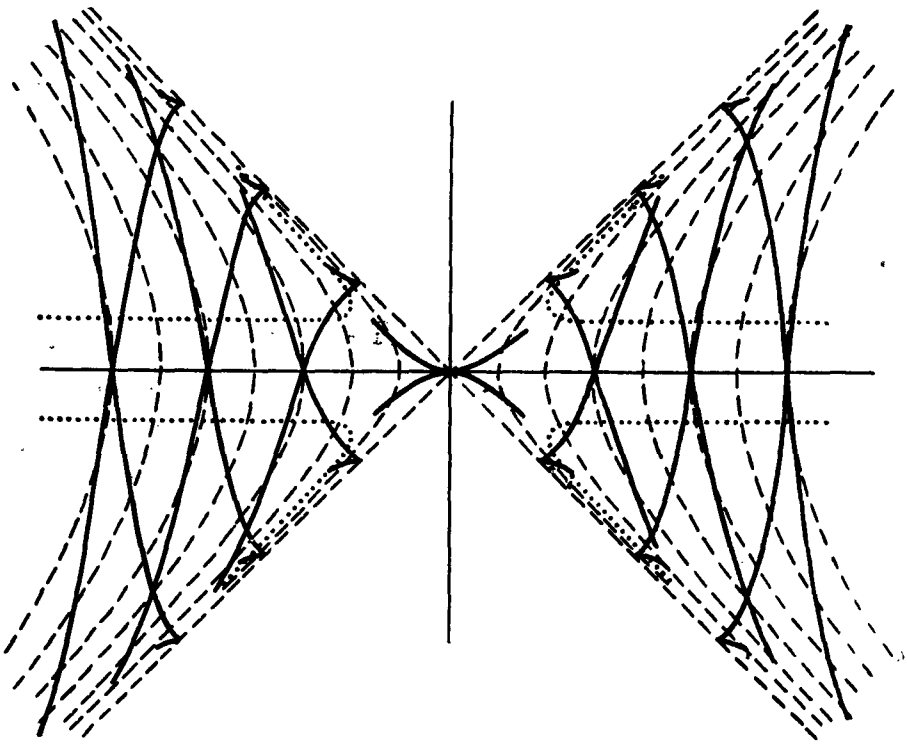


Рис. 10.14.

которых противоположны. Пучок интегральных кривых симметричен по отношению к осям Ox и Oy.

1. *Изоклины.* Это гиперболы $x^2 - y^2 = p^2$.

2. *Место точек перегиба.* Из $x^2 - y^2 = p^2$ и $2x - 2py = 0$ исключают p. Тогда $x^2 = y^2(x^2 - y^2)$.

Дважды продифференцировав дифференциальное уравнение, получаем

$$2y'y''' + 2y''^2 = 2 - 2y'^2 - 2yy''.$$

Условие $y'' = 0$ не влечет за собой $y''' = 0$. Следовательно, кривая $x^2 = y^2(x^2 - y^2)$ и есть место точек перегиба.

3. Для изоклин нет огибающих.

4. *Место точек возврата.* Исключим p из $p^2 = x^2 - y^2$ и $2p = 0$. Тогда получим $x^2 - y^2 = 0$, иначе говоря, биссектрисы осей координат. Здесь изоклины не имеют двойных точек. Значит, кривая $x^2 - y^2 = 0$ есть место точек возврата.

5. Уравнение горизонтальной касательной к интегральной кривой — это $x^2 - y^2 = 0$. Следовательно, в точках возврата касательная горизонтальна.

6. *Асимптоты.* Имеем $\varphi(x, px, p) = p^2 - x^2(1-p^2) = 0$. Иначе говоря, $\frac{p^2}{x^2} = 1 - p^2$. Если x стремится к бесконечности, то p стремится к ± 1. Подставляем $y = \pm x + q$ и $p = \pm 1$ в $x^2 - y^2 = p$. Тогда

$$1 = x^2 - (\pm x + q)^2 = \pm 2qx - q^2,$$

$$\frac{1}{x} = \mp 2q - \frac{q^2}{x}.$$

Когда x стремится к бесконечности, q стремится к 0. Следовательно, $y = x$ и $y = -x$ — асимптоты, общие для пучка интегральных кривых, так как $y' = \pm 1$, $y = \pm x$ не удовлетворяют тождественно данному дифференциальному уравнению.

На рис. 10.14 пунктиром изображены изоклины, точечным пунктиром — место точек перегиба и сплошными линиями — несколько интегральных кривых.

Замечание. Если функция y не фигурирует в дифференциальном уравнении, то его можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

При этом изоклины представляют собой параллели к оси Oy. Способ изоклин дает возможность графически осуществить квадратуру, т. е. начертить одну из кривых

$$y(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

где a — произвольная постоянная, каждому значению которой соответствует отдельная интегральная кривая. Эти кривые получаются одна из другой простым перемещением вдоль оси Oy.

10.7.2. Графическое решение дифференциальных уравнений второго порядка способом радиусов кривизны. Рассмотрим дифференциальное уравнение, решенное относительно y'':

$$y'' = f(y, y', x).$$

Делим обе части на $(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$. Тогда получаем

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f(y, y', x)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varphi(y, y', x)}.$$

Мы определили радиус кривизны интегральных кривых. Он равен

$$R = \varphi(y, y', x).$$

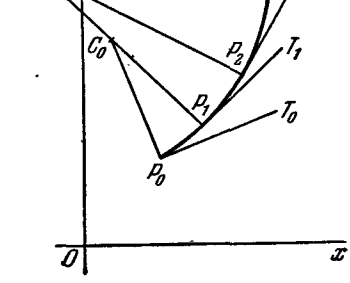


Рис. 10.15.

Отсюда вытекает следующий способ графического решения уравнений. Пусть при $x = x_0$ функция y и ее производная y' принимают соответственно значения y_0 и y_0'. Это означает, что из всего пучка интегральных кривых мы хотим начертить такую, которая проходит через точку x_0, y_0 и имеет в этой точке крутизну y_0'. Пусть будет дана точка $P_0(x_0, y_0)$ и касательная P_0T_0 (рис. 10.15). Радиус кривизны интегральной кривой равен в этой точке $R_0 = \varphi(y_0, y_0', x_0)$. Начертим этим радиусом дугу окружности, соприкасающейся с искомой кривой, и примем, что в промежутке x_0, x_1 эта

дуга совпадает с интегральной кривой. На дуге возьмем точку P_1 с абсциссой x_1. Ордината ее равна y_1, а крутизна касательной P_1T_1 в этой точке равна y_1'.

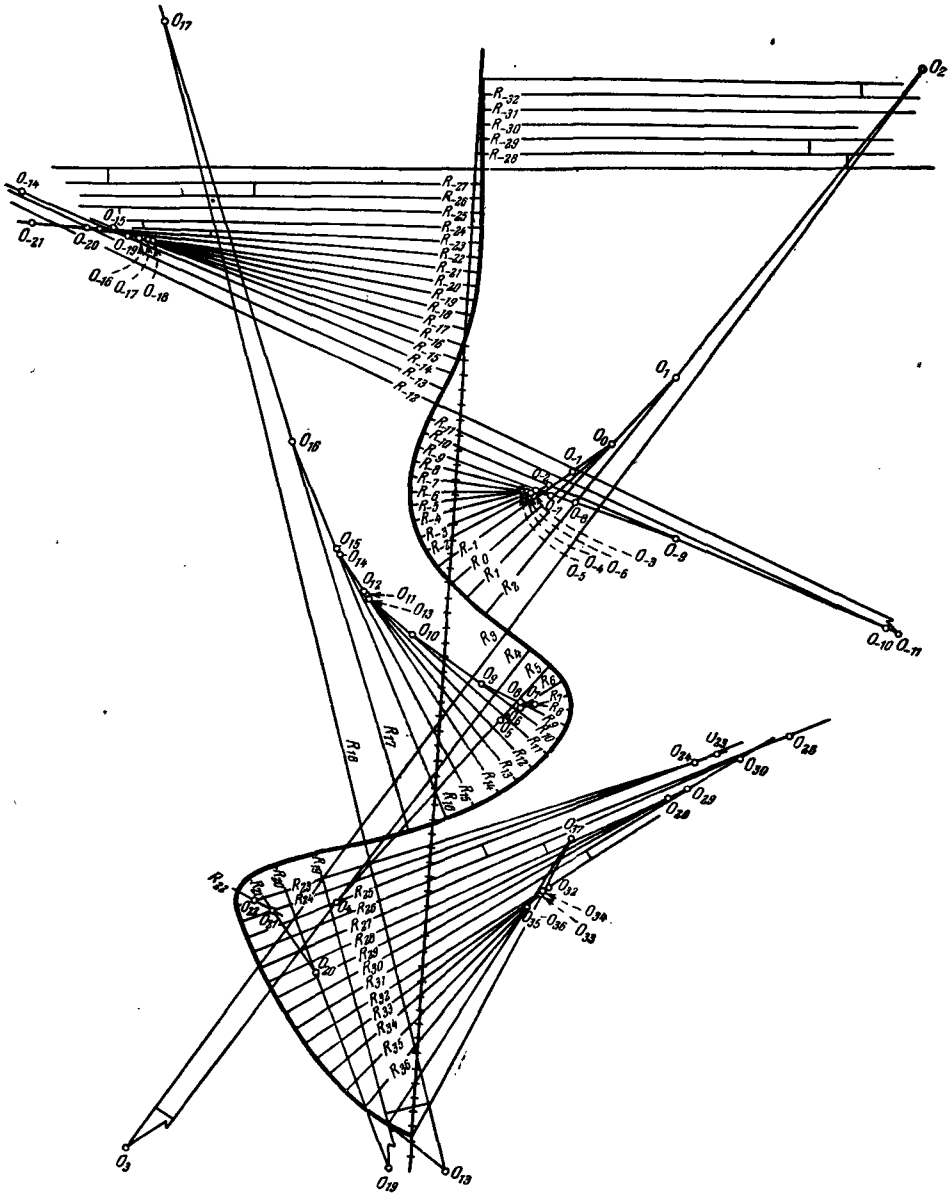


Рис. 10.16.

Радиусом, равным $R_1 = \varphi(y_1, y_1', x_1)$, начертим дугу окружности, проходящей через точку P_1 и касательной к P_1T_1, и т. д. Мы последовательно вычерчиваем таким образом дуги окружностей, практически сливающиеся с искомой интегральной кривой, если последовательные интервалы (x_0, x_1), (x_1, x_2) достаточно малы.

Пример. Попробуем начертить одну из интегральных кривых уравнения

$$y'' - (1 - y^2)\, y' + y = 0.$$

Имеем

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - y^2)\, y' - y}.$$

Начертим проходящую через точку $x = 0$, $y = 0$ кривую, имеющую в этой точке касательную, наклон которой к оси x равен 45°, т. е. $y'_0 = 1$. Получаем кривую, изображенную на рис. 10.16.

10.8. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

10.8.1. Плоские задачи. Мы ограничимся здесь уравнениями в частных производных второго порядка вида

$$f\left(x,\ y,\ U,\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (105)$$

Задача состоит в том, чтобы отыскать функцию, удовлетворяющую уравнению (105) и совпадающую на данном контуре с данной функцией $U = \varphi(x, y)$. Искомую функцию мы определим ее значениями в узлах прямоугольной сетки. Предварительно мы решим две простые задачи.

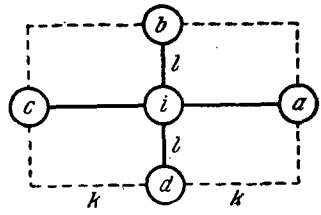


Рис. 10.17.

1. Рассматриваются четыре точки a, b, c, d — середины сторон прямоугольника и точка i — центр прямоугольника (рис. 10.17). Попробуем найти приближенные формулы, дающие первые и вторые частные производные функции U в точке i как функции значений U в точках a, b, c, d, i.

Разлагаем функцию U в ряд Тейлора вблизи точки i:

$$U = U_i + (x - x_i)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i + (y - y_i)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i +$$
$$+ \frac{1}{2}(x - x_i)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i + \frac{1}{2}(y - y_i)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_i +$$
$$+ (x - x_i)(y - y_i)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}\right)_i + \ldots \qquad (106)$$

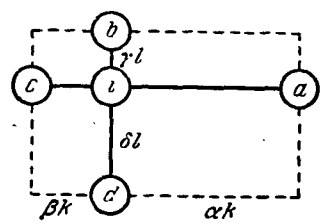


Рис. 10.18.

Пишем этот ряд, ограничиваясь членами второго порядка, в точках a, b, c, d. Нетрудно получить

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2k}(U_a - U_c), \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i = \frac{1}{2l}(U_b - U_d),$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{k^2}(U_a + U_c - 2U_i), \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_i = \frac{1}{l^2}(U_b + U_d - 2U_i). \qquad (107)$$

2. Поставим ту же задачу, но при этом пусть точка i не будет больше в центре прямоугольника. Положение ее определяется отношениями $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ расстояний до сторон прямоугольника (рис. 10.18). Предыдущее разложение,

примененное к точкам a, b, c, d, дает

$$\begin{aligned}
k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i &= \frac{\beta U_a}{\alpha(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha U_c}{\beta(\alpha+\beta)} - \frac{(\beta-\alpha)U_i}{\alpha\beta}, \\
l\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i &= \frac{\delta U_b}{\gamma(\gamma+\delta)} - \frac{\gamma U_d}{\delta(\gamma+\delta)} - \frac{(\delta-\gamma)U_i}{\gamma\delta}, \\
\frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i &= \frac{U_a}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{U_c}{\beta(\alpha+\beta)} - \frac{U_i}{\alpha\beta}, \\
\frac{1}{2}l^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_i &= \frac{U_b}{\gamma(\gamma+\delta)} + \frac{U_d}{\delta(\gamma+\delta)} - \frac{U_i}{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{108}$$

После того как обе эти задачи решены, можно взяться за основную задачу. Разложим область внутри заданного контура на некоторое число прямоугольников. В уравнении (105) следует заменить частные производные приближенными формулами (108) или (107). Мы получим таким образом уравнения, которые дают возможность вычислить значения U в точках внутри контура как функцию значений U на контуре, данных из условий задачи.

Формула (107) применяется главным образом в центральной части зоны, ограниченной контуром, там, где узлы прямоугольной сетки являются равноотстоящими. Формула (108) применяется в основном в периферической части этой зоны, если близость границы вносит неправильность в положение узловых точек прямоугольной сетки (рис. 10.19).

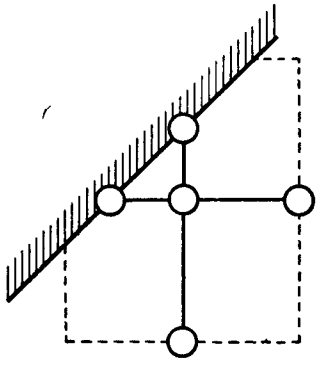


Рис. 10.19.

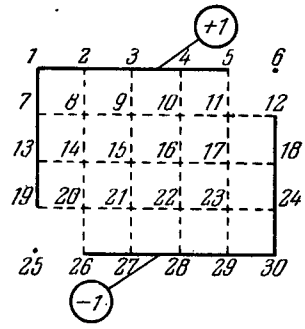


Рис. 10.20.

Пример. Рассмотрим очень простой пример. Требуется найти функцию U, принимающую соответственно значения $+1$ и -1 на двух прямых углах, определяемых точками 19, 13, 7, 1, 2, 3, 4, 5 и 12, 18, 24, 30, 29, 28, 27, 26, и удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри прямоугольника (рис. 10.20). Сетка образована квадратами ($k=l$). Если перенести в уравнение Лапласа значения $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_i$ из формулы (107), то получим

$$4U_i = U_a + U_b + U_c + U_d.$$

Применим это выражение к 12 точкам внутри прямоугольника. Тогда

$$\begin{aligned}
4U_8 &= U_7 + U_9 + U_2 + U_{14}, \\
4U_9 &= U_8 + U_{10} + U_3 + U_{15}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
4U_{23} &= U_{22} + U_{24} + U_{17} + U_{29}.
\end{aligned}$$

Но

$$U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = U_7 = U_{13} = U_{19} = +1,$$
$$U_{12} = U_{18} = U_{24} = U_{29} = U_{28} = U_{27} = U_{26} = -1.$$

Предыдущая система принимает вид

$$\begin{aligned}
4U_8 &= U_9 + U_{14} + 2,\\
4U_9 &= U_8 + U_{10} + U_{15} + 1,\\
4U_{10} &= U_9 + U_{11} + U_{16} + 1,\\
4U_{11} &= U_{10} + U_{17},\\
4U_{14} &= U_{15} + U_8 + U_{20} + 1,\\
4U_{15} &= U_{14} + U_{16} + U_9 + U_{21},\\
4U_{16} &= U_{15} + U_{17} + U_{10} + U_{22},\\
4U_{17} &= U_{16} + U_{11} + U_{23} - 1,\\
4U_{20} &= U_{21} + U_{14},\\
4U_{21} &= U_{20} + U_{22} + U_{15} - 1,\\
4U_{22} &= U_{21} + U_{23} + U_{16} - 1,\\
4U_{23} &= U_{22} + U_{17} - 2\ *).
\end{aligned}$$

Можно попытаться прямо решить эту систему из 12 уравнений с 12 неизвестными. Однако для более сложных систем, где внутренние точки насчитываются сотнями, надо решительно отказаться от этого способа и применять следующий способ последовательных приближений [1]).

Мы будем обозначать первое, второе, ... приближение U в точке a через U'_a, U''_a, ... Значения, взятые в качестве начальных для внутренних точек, могут быть любыми, но удобнее выбирать значения, не слишком отличающиеся от результатов вычислений. Простое рассмотрение рисунка подсказывает нам выбор в качестве начальных значений:

$$\begin{aligned}
U_{14} = U_8 = U_9 = U_{10} &= +0{,}5,\\
U_{21} = U_{22} = U_{23} = U_{17} &= -0{,}5,\\
U_{11} = U_{20} = U_{15} = U_{16} &= 0.
\end{aligned}$$

Перенеся эти значения в предыдущие уравнения, получим первые приближения:

$$\begin{aligned}
4U'_8 &= U_9 + U_{14} + 2 = 0{,}5 + 0{,}5 + 2 = 3, & U'_8 &= 0{,}75,\\
4U'_9 &= U'_8 + U_{10} + U_{15} + 1 = 0{,}75 + 0{,}5 + 1 = 2{,}25, & U'_9 &= 0{,}562,\\
4U'_{10} &= U'_9 + U_{11} + U_{16} + 1 = 0{,}562 + 1 = 1{,}562, & U'_{10} &= 0{,}390,\\
4U'_{11} &= U'_{10} + U_{17} = 0{,}390 - 0{,}5 = -0{,}110, & U'_{11} &= -0{,}027,\\
4U'_{14} &= U_{15} + U'_8 + U_{20} + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75, & U'_{14} &= 0{,}437,\\
4U'_{15} &= U'_{14} + U_{16} + U'_9 + U_{21} = 0{,}437 + 0{,}562 - 0{,}5 = 0{,}499, & U'_{15} &= 0{,}125,
\end{aligned}$$

*) Если учесть симметрию задачи, число уравнений и неизвестных можно уменьшить вдвое.

[1]) То, что в английских и американских работах называется „методом релаксации".

$$4U'_{16} = U'_{15} + U_{17} + U'_{10} + U_{22} = 0{,}125 - 0{,}5 + 0{,}390 - 0{,}5 = -0{,}485.$$

$$U'_{16} = -0{,}121,$$

$$4U'_{17} = U'_{16} + U'_{11} + U_{23} - 1 = -0{,}121 - 0{,}027 - 0{,}5 - 1 = -1{,}648,$$

$$U'_{17} = -0{,}412,$$

$$4U'_{20} = U_{21} + U'_{14} = -0{,}5 + 0{,}437 = -0{,}063, \quad U'_{20} = -0{,}016,$$

$$4U'_{21} = U'_{20} + U_{22} + U'_{15} - 1 = -0{,}016 - 0{,}5 + 0{,}125 - 1 = -1{,}391,$$

$$U'_{21} = -0{,}348,$$

$$4U'_{22} = U'_{21} + U_{23} + U'_{16} - 1 = -0{,}348 - 0{,}5 - 0{,}121 - 1 = -1{,}969,$$

$$U'_{22} = -0{,}492,$$

$$4U'_{23} = U'_{22} + U'_{17} - 2 = -0{,}492 - 0{,}412 - 2 = -2{,}904,$$

$$U'_{23} = -0{,}726.$$

Затем получаем вторые приближения:

$$4U''_{8} = U'_{9} + U'_{14} + 2 = 0{,}562 + 0{,}437 + 2 = 2{,}999, \quad U''_{8} = 0{,}750,$$

$$4U''_{9} = U''_{8} + U'_{10} + U'_{15} + 1 = 0{,}750 + 0{,}390 + 0{,}125 + 1 = 2{,}265,$$

$$U''_{9} = 0{,}566,$$

$$4U''_{10} = U''_{9} + U'_{11} + U'_{16} + 1 = 0{,}566 - 0{,}027 - 0{,}121 + 1 = 1{,}418,$$

$$U''_{10} = 0{,}354,$$

. . . . . .

и т. д. Продолжив вычисления до пятого приближения, получим таблицу:

Точки	Приближения U					
	исходное	первое	второе	третье	четвертое	пятое
8	0,5	0,750	0,750	0,758	0,761	0,764
9	0,5	0,562	0,566	0,563	0,569	0,567
10	0,5	0,390	0,354	0,362	0,356	0,352
11	0,0	—0,027	—0,014	—0,024	—0,029	—0,031
14	0,5	0,437	0,465	0,482	0,488	0,488
15	0,0	0,125	0,140	0,153	0,150	0,146
16	0,0	—0,121	—0,102	—0,121	—0,130	—0,134
17	—0,5	—0,412	—0,460	—0,474	—0,478	—0,481
20	0,0	—0,016	0,029	0,038	0,038	0,037
21	—0,5	—0,348	—0,331	—0,337	—0,341	—0,343
22	—0,5	—0,492	—0,540	—0,552	—0,556	—0,559
23	—0,5	—0,726	—0,750	—0,754	—0,758	—0,760

10.8.2. Задачи вращения. В предыдущем пункте речь шла об отыскании U как функции декартовых координат x, y. Здесь стоит та же задача для цилиндрических координат r и z. Однако имеются некоторые отличия, которые будут изложены ниже.

Рассмотрим разложение в ряд (106), ограниченное членами второго порядка, и заменим x на z, а y на r. Мы получим следующие группы формул, тождественные по виду с уравнениями (107) и (108).

1. Точка i — центр прямоугольника (рис. 10.21):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{2k}(U_a - U_c), \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i = \frac{1}{2l}(U_b - U_d),$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i = \frac{1}{k^2}(U_a + U_c - 2U_i), \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_i = \frac{1}{l^2}(U_b + U_d - 2U_i). \tag{109}$$

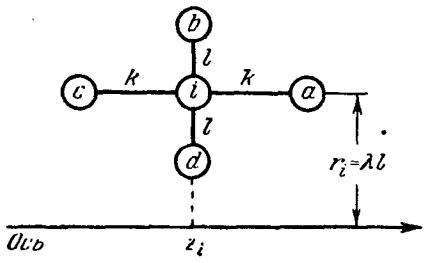


Рис. 10.21.

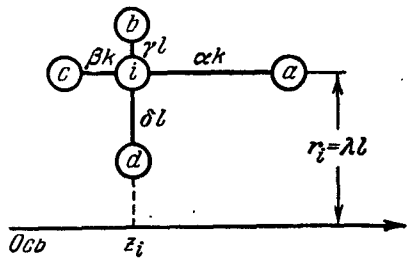


Рис. 10.22.

2. Точка i — не центр прямоугольника (рис. 10.22):

$$k\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_i = \frac{\beta U_a}{\alpha(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha U_c}{\beta(\alpha+\beta)} - \frac{(\beta-\alpha)U_i}{\alpha\beta},$$
$$l\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_i = \frac{\delta U_b}{\gamma(\gamma+\delta)} - \frac{\gamma U_d}{\delta(\gamma+\delta)} - \frac{(\delta-\gamma)U_i}{\gamma\delta},$$
$$\frac{1}{2}k^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i = \frac{U_a}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{U_c}{\beta(\alpha+\beta)} - \frac{U_i}{\alpha\beta}, \tag{110}$$
$$\frac{1}{2}l^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_i = \frac{U_b}{\gamma(\gamma+\delta)} + \frac{U_d}{\delta(\gamma+\delta)} - \frac{U_i}{\gamma\delta}.$$

Разумеется, уравнения в частных производных должны быть приспособлены к системе цилиндрических координат. Например, уравнение Лапласа будет записано в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

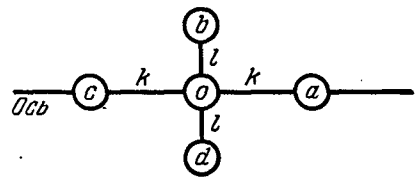


Рис. 10.23.

Основное различие с плоской задачей заключается здесь в наличии прямой — оси вращения, играющей привилегированную роль. Значения U в двух точках, симметричных относительно этой оси, будут, очевидно, равны. Формулы, соответствующие частным производным в точках этой оси, будут выражены особыми формулами в силу этой симметрии и условия $r = 0$.

Пусть o будет точкой на оси вращения (рис. 10.23). Производная $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_o$ равна нулю, но величина $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)_o$ конечна. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_o + r\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_o + \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial r^3}\right)_o + \dots$$

Первый член справа равен нулю, откуда

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)_o = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_o = \frac{1}{k^2}(U_b + U_d - 2U_o).$$

Так как $U_d = U_b$ в силу симметрии, то

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)_o = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_o = \frac{2}{k^2}(U_b - U_o).$$

Вторая производная по z в точке на оси всегда выражается третьим равенством (110). Например, для точки, находящейся от оси на расстоянии αk, и для квадратной сетки уравнение Лапласа будет

$$U_a + U_c - 2U_i + U_b + U_d - 2U_i + \frac{1}{2\alpha}(U_b - U_d) = 0,$$

а для точки на оси

$$6U_i = U_a + U_c + 4U_b.$$

10.9. НОМОГРАММЫ

10.9.1. Введение. Подробное изучение номографии должно включать в себя знакомство с большим количеством типов номограмм. Выбор наилучшего варианта номограммы может быть сделан только специалистом. Здесь же мы задаемся лишь целью дать возможность инженеру вычертить основные номограммы, полезные в его работе. Поэтому ограничим изложение наиболее употребительными номограммами. Мы займемся лишь номограммами с выравненными точками. Они просты и читаются легко и точно. Из них мы рассмотрим только номограммы с тремя параллельными прямыми шкалами, N-образными, W-образными, с двумя параллельными прямолинейными шкалами и криволинейной шкалой, с прямолинейной и двумя криволинейными шкалами, с тремя криволинейными шкалами. Для изучения номограмм круговых, прямоугольных и с огибающей мы отсылаем читателя к специальным трудам. Так как номограммы с перекрещением могут почти всегда быть заменены номограммами с выравненными точками, более простыми по своему строению и более удобочитаемыми, нам показалось ненужным рассматривать их здесь.

10.9.2. Определения. *Графическая шкала.* Графическая шкала состоит из основания (прямая или кривая), на котором нанесены отметки, соответствующие последовательности возрастающих чисел. Если функция $f(u)$ непрерывна и строго возрастает (или убывает) в заданном интервале, то можно эту функцию изобразить графической шкалой.

Модуль. Графические шкалы, которые мы ниже будем строить, должны вычерчиваться на бумаге обычного формата. Если требуется рассмотреть два крайних значения функции $f(u)$ для двух крайних значений переменной u, то следует выбрать на основании такую единицу длины, чтобы формат бумаги использовался для графической шкалы наилучшим образом. Эта единица длины называется модулем графической шкалы.

Например, для прямолинейной шкалы, если нельзя по соображениям удобства превысить длину в l сантиметров и если u_1 и u_2 — крайние значения полезного изменения переменной u, то самый выгодный модуль, т. е. дающий самое точное прочтение, будет

$$m = \frac{l}{|f(u_1) - f(u_2)|}.$$

Пример. Требуется построить графическую шкалу функции

$$f(u) = \ln u$$

для интервала изменения от $u=1$ до $u=10$ на листе бумаги, наибольший размер которого $l=25$ *см*. Наиболее выгодный модуль будет

$$m=\frac{25}{\ln 10-\ln 1}=\frac{25}{2{,}3}\ см=10{,}8\ см.$$

Из соображений простоты, которые не менее важны, чем наибольшая точность прочтения, следует взять $m=10$ *см*.

Начало шкалы. Так называется точка, для которой $f(u)=0$. Следовательно, если x есть расстояние от начала до точки на шкале с отметкой u, то

$$x=mf(u).$$

Начало шкалы может оказаться за ее пределами.

Важнейшие шкалы. Функция $f(u)$ оказывается часто одной из следующих функций: $au+b$ (линейная шкала); $\log u$ (логарифмическая шкала, очень часто с основанием 10); 10^u; u^2, u^3, ..., u^n (параболическая шкала); $u^{\frac{1}{2}}$, $u^{\frac{1}{3}}$, ..., $u^{\frac{1}{n}}$; $\sin u$; $\cos u$; $\operatorname{tg} u$; $\operatorname{sh} u$; $\operatorname{ch} u$; $\operatorname{th} u$; ...

Очень важно уметь быстро вычертить шкалу $mf(u)$ с определенным модулем с помощью шкалы функции f, вычерченной раз навсегда. На рис. 10.24

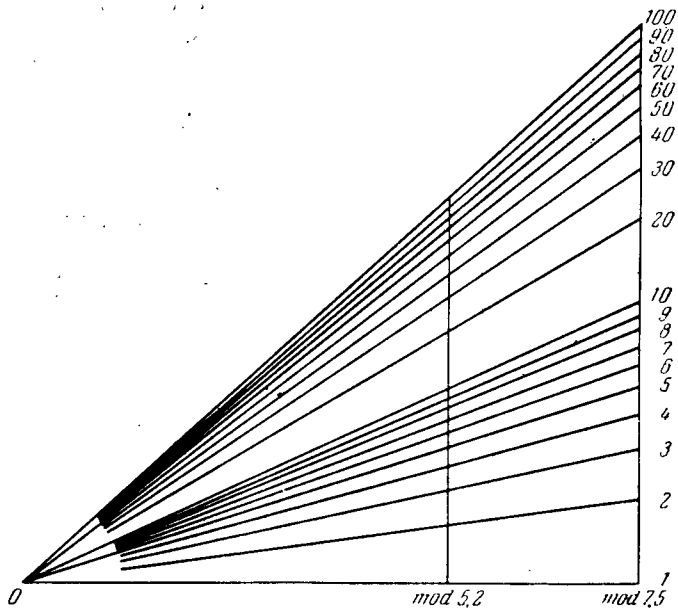


Рис. 10.24.

показан такой способ. В качестве примера здесь вычерчена шкала $x=5{,}2\log u$ при помощи шкалы $x=7{,}5\log u$.

Чтобы вычертить проективную дробно-линейную шкалу $x=m\frac{au+b}{cu+d}$ с помощью линейной шкалы $y=\mu u$ или, в более общем виде, чтобы вычертить шкалу $x=m\frac{af(u)+b}{cf(u)+d}$ с помощью шкалы $y=\mu f(u)$, следует опираться на хорошо известные свойства проективности, указывающие, что обе шкалы x и y являются проекциями одна другой.

На рис. 10.25 показано построение шкалы (логарифмы десятичные) $x = 15\frac{2\lg u + 1}{\lg u + 1}$ с помощью $y = 7{,}5 \lg u$. Центр перспективы S дается пересечением двух прямых, соединяющих точки, соответствующие $u = 10$ и $u = 100$. Обе точки $u = 1$ совпадают. Имеем $u = 1$, $y = 0$, $x = 15$; $u = 10$, $y = 7{,}5$, $x = 22{,}5$; $u = 100$, $y = 15$, $x = 25$.

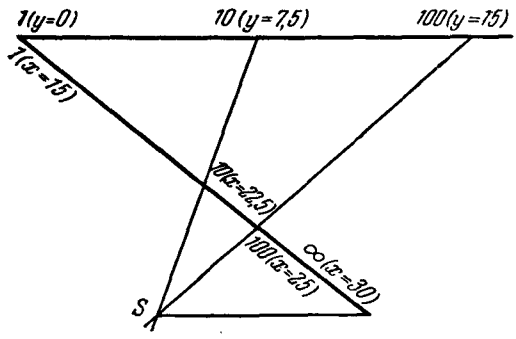


Рис. 10.25.

Весьма важный частный случай состоит в том, чтобы построить шкалу $x = \frac{m}{u}$, обратную линейной шкале $y = \mu(u)$. Как и в предыдущем случае, заставляем совпасть две соответственные точки (например, $u = 2$). Точка с абсциссой $x = \infty$ соответствует точке с абсциссой $y = 0$, и наоборот. Это дает возможность легко определить центр перспективы S (рис. 10.26). Графическое построение $x = \frac{m}{f(u)}$ с помощью $y = \mu f(u)$ не представляет затруднений.

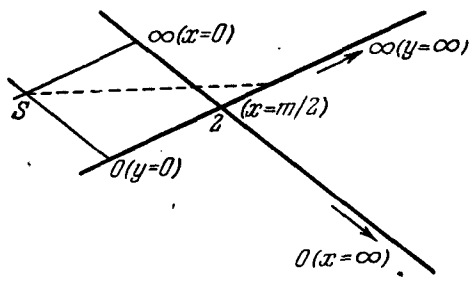


Рис. 10.26.

10.9.3. Номограммы с выравненнымн точками. Известно, что, для того чтобы три точки, отнесенные к любым прямолинейным осям координат (прямоугольным или косоугольным), находились на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы их координаты x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 удовлетворяли уравнению

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (111).$$

Рассмотрим три кривые C_1, C_2, C_3 (рис. 10.27), параметрические уравнения которых будут

$$C_1 \quad x_1 = f_1(u), \quad y_1 = \varphi_1(u),$$
$$C_2 \quad x_2 = f_2(v), \quad y_2 = \varphi_2(v),$$
$$C_3 \quad x_3 = f_3(w), \quad y_3 = \varphi_3(w).$$

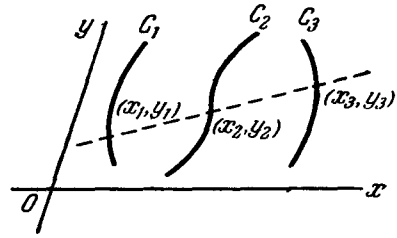


Рис. 10.27.

Если принять эти кривые за основание трех шкал, градуированных по значениям u, v, w, и если задаться двумя определенными значениями u и v, например u_1 и v_1, то прямая, проходящая через точки с отметками u_1 и v_1, пересекает кривую C_3 в точке с отметкой w_1. Это позволяет решить относительно w уравнение

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & \varphi_1(u) & 1 \\ f_2(v) & \varphi_2(v) & 1 \\ f_3(w) & \varphi_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение просто выражает общий принцип номограмм с выровненными точками. Обязательное по изложенным выше причинам введение модулей и необходимость описать практические детали требуют более подробного изложения. Поэтому мы сделаем обзор наиболее употребительных номограмм с выровненными точками.

10.9.4. Номограммы с тремя параллельными прямолинейными шкалами. При обозначениях рис. 10.28 имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ a & y_2 & 1 \\ a+b & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

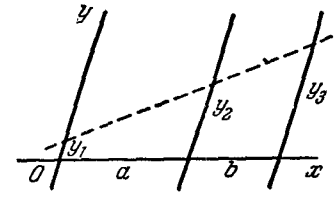


Рис. 10.28.

Иначе говоря, при

$$y_1 = m_1\varphi_1(u),$$
$$y_2 = m_2\varphi_2(v),$$
$$y_3 = m_3\varphi_3(w)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & m_1\varphi_1 & 1 \\ a & m_2\varphi_2 & 1 \\ a+b & m_3\varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = bm_1\varphi_1 + am_3\varphi_3 - (a+b)\,m_2\varphi_2 = 0. \qquad (112)$$

Положим

$$\begin{aligned} bm_1 &= am_3, \\ (a+b)\,m_2 &= am_3. \end{aligned} \qquad (113)$$

Уравнение (112) принимает вид

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2. \qquad (114)$$

Это общий вид уравнения, которое можно решать с помощью рассматриваемой номограммы.

Уравнения (113) позволяют вычислить отношение $\frac{a}{b}$ и один модуль как функцию двух других модулей. Например,

$$\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m_3}, \quad m_2 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}. \qquad (115)$$

Пример. Отношение модулей напряжений на входе и выходе $s = \frac{V_e}{V_s}$ четырехполюсника, образованного емкостью C и сопротивлением R (рис. 10.29), выражается формулой

$$s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi fRC)^2}}}.$$

Эта формула может быть написана в виде (логарифмы десятичные)

$$\lg RC + \lg 2\pi f = -\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1}{s^2} - 1\right).$$

Положим

$$\varphi_1(RC) = \lg RC, \quad \varphi_3(f) = \lg 2\pi f, \quad \varphi_2(s) = -\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1}{s^2} - 1\right).$$

Мы располагаем листом бумаги в 26×20 *см*, f меняется от 1 до 20 000 *гц*, RC меняется от 0,0002 до 0,2. Имеем

$$y_1 = m_1\varphi_1(RC), \quad \text{откуда} \quad \frac{26}{|\lg 2 \cdot 10^{-4} - \lg 0{,}2|} = \frac{26}{3} \approx 8 \text{ см} = m_1,$$

$$y_3 = m_3\varphi_3(2\pi f), \quad \text{откуда} \quad \frac{26}{\lg 20\,000 - \lg 1} \approx 6 \text{ см} = m_3.$$

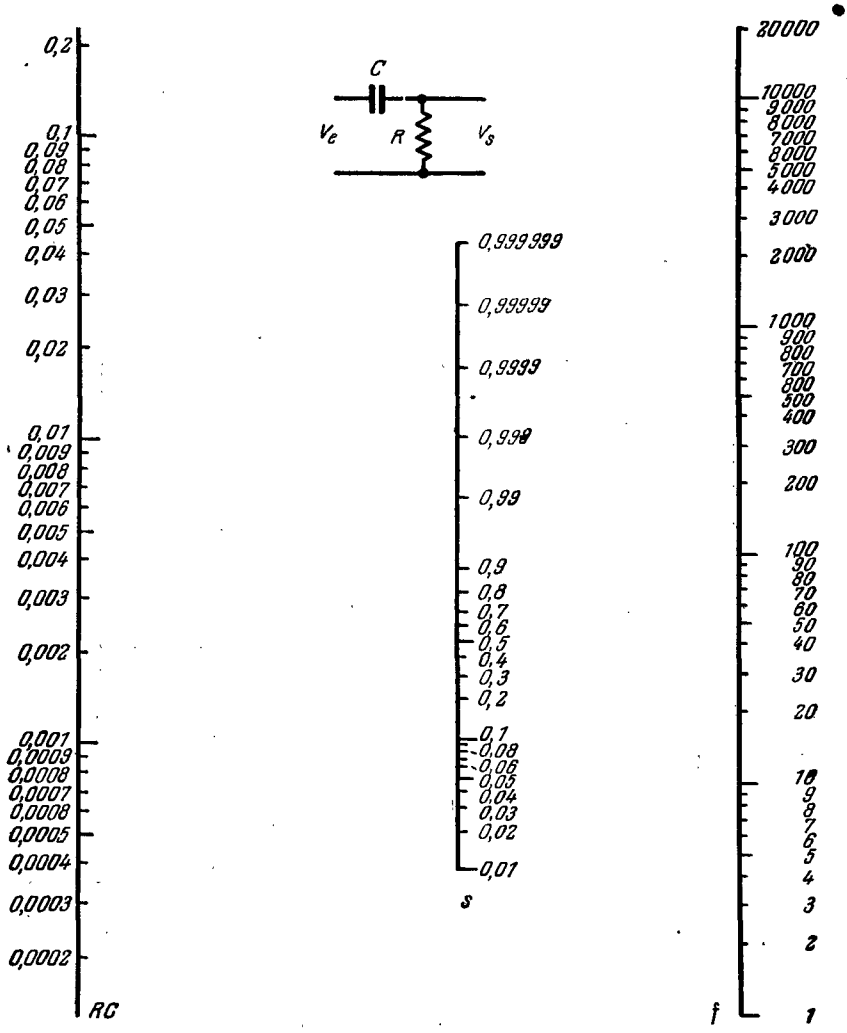


Рис. 10.29.

Отсюда

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{6} \quad \text{при} \quad a + b \leqslant 20 \text{ см};$$

берем $a = 10$ *см*, $b = 7{,}5$ *см*.

Взаимное расположение шкал по вертикали определяется из условия, что отметки для любой тройки значений RC, f, s, удовлетворяющих дан-

ному уравнению $s=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(2\pi fRC)^2}}}$, должны лежать на одной прямой. Из этих трех значений два (например, RC и f) произвольны, а третье вычисляется. Номограмма изображена (в масштабе 1 : 2) на рис. 10.29.

Для $RC=1/1000$ (например, $C=1$ *мкф* и $R=1000$ *ом*) и для $f=90$ *гц* находим $s=0{,}5$. Вычисление дает $s=0{,}49$.

Замечание. Номограмма с тремя параллельными прямолинейными шкалами является наиболее простой. Очень важно просмотреть все соотношения, которые могут быть представлены таким образом, т. е. могут быть сведены к канонической форме (114). Соотношение

$$\varphi_2=\varphi_1\varphi_3 \tag{116}$$

сводится к форме (114), если взять логарифмы обеих частей. Это же относится и к соотношению

$$\varphi_2=\varphi_1^{\varphi_3}, \tag{117}$$

если дважды взять логарифм правой и левой части.

Совершенно очевидно, что оба соотношения

$$\varphi_1(u)\,\varphi_3(w)\,f_2(v)=C$$

и

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_3(w)}=\frac{1}{f_2(v)}$$

легко свести: первое к форме (116), считая $\frac{1}{f_2}=\varphi_2$, второе к канонической форме (114), считая $\frac{1}{f_i}=\varphi_i$.

Уравнение

$$f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=Af_1(u)\,f_2(v)\,f_3(w) \tag{118}$$

можно также свести к форме (114) путем менее явной замены переменной. Соотношение (118) может быть написано в виде

$$-f_3(w)=\frac{f_1(u)+f_2(v)}{1-Af_1(u)\,f_2(v)}.$$

1) $A>0$. Положим $\varphi_i=\operatorname{arctg}\left[\sqrt{A}\,f_i\right]$. Тогда $\varphi_1(u)+\varphi_2(v)=k\pi-\varphi_3(w)$.

2) $A<0$. Положим $\varphi_i=\operatorname{arth}\left[\sqrt{A}\,f_i\right]$. Тогда $\varphi_1(u)+\varphi_2(v)=-\varphi_3(w)$.

Замечание. Путем введения коэффициентов следует сделать область изменения функций f_1, f_2, f_3 для используемой области изменения переменных u, v, w меньшей $\frac{1}{\sqrt{A}}$.

10.9.5. Номограммы с двумя параллельными прямолинейными шкалами и одной криволинейной. Имеем (см. рис. 10.30)

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ d & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{119}$$

Положим

$$y_1 = m_1\varphi_1(u), \tag{120}$$

$$y_3 = m_3\varphi_3(w), \tag{121}$$

$$y_2 = \frac{m_1 m_3 \varphi_2(v)}{m_3 + m_1 f_2(v)}, \tag{122}$$

$$x_2 = d\,\frac{m_1 f_2(v)}{m_3 + m_1 f_2(v)}. \tag{123}$$

Тогда уравнение (119) принимает вид

$$\varphi_1(u) + f_2(v)\,\varphi_3(w) = \varphi_2(v). \tag{124}$$

Это общий вид уравнений, которые можно решать с помощью номограмм рассматриваемой формы. Обе прямолинейные шкалы выражаются формулами (120) и (121). Кривая и ее градуировка выражены двумя параметрическими уравнениями (122) и (123).

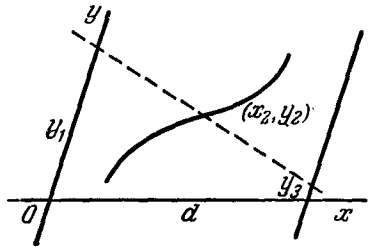


Рис. 10.30.

Пример. Требуется вычертить номограмму для соотношения

$$\sqrt{\frac{n}{t}}\,\frac{1}{n-p} = a.$$

В этом выражении n — общее число импульсов за время эксперимента t, выраженное в минутах. Оно измеряется счетчиком на радиоактивном образце. Величина p — число импульсов, производимых шумами; a — совершенная стандартная ошибка, принятая за 5%. Эту формулу можно написать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{a}{\sqrt{n}}\,p = a\sqrt{n},$$

а это и есть формула (124) при

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \varphi_2(n) = a\sqrt{n}, \quad f_2(n) = \frac{a}{\sqrt{n}}, \quad \varphi_3(p) = p.$$

У нас имеется лист бумаги в 25×20 *см*. Поэтому делаем следующее вычисление модулей с обозначением практической области изменения переменных:

$$y_1 = \frac{m_1}{\sqrt{t}}, \quad 2 < t < \infty, \quad \text{откуда} \quad m_1 = \frac{25}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{\infty}}} \approx 35\ см;$$

$$y_3 = m_3 p, \quad 0 < p < 150, \quad \text{откуда} \quad m_3 = \frac{25}{150} = 0{,}166\ldots \approx 0{,}15\ см;$$

$$x_2 = \frac{35\,\frac{ad}{\sqrt{n}}}{0{,}15 + 35\,\frac{a}{\sqrt{n}}} = \frac{35}{0{,}15\sqrt{n} + 1{,}75} \quad \text{при} \quad a = 5\% \quad \text{и} \quad d = 20\ см,$$

$$y_2 = \frac{0{,}15 \cdot 35a\sqrt{n}}{0{,}15 + 35\,\frac{a}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}2625n}{0{,}15\sqrt{n} + 1{,}75}.$$

Кривая x_2, y_2 легко строится по точкам для различных значений n. Одновременно получается и ее градуировка. Рис. 10.31 изображает номограмму в масштабе 1 : 4.

10.9.6. N-образная номограмма. Это частный случай номограммы, рассмотренной в предыдущем пункте. Кривая сводится к прямой, не параллельной двум другим прямым. Такая номограмма часто называется N-образной или Z-образной. В этом случае третья прямая может быть принята за ось Ox (рис. 10.32).

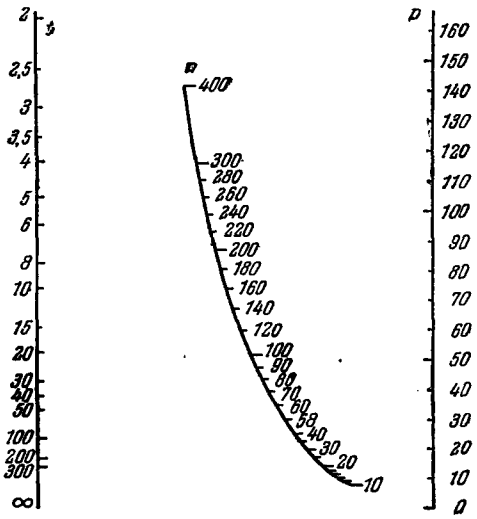


Рис. 10.31.

Мы по-прежнему имеем оба уравнения (120) и (121), но параметрические уравнения (122) и (123) суть

$$y_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \varphi_2(v) = 0,$$

$$x_2 = d\,\frac{m_1 f_2(v)}{m_3 + m_1 f_2(v)}.$$

Последнее уравнение дает графическую шкалу оси x.

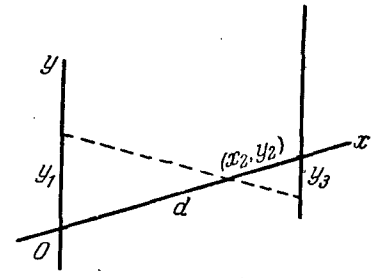


Рис. 10.32.

Общий вид уравнений, решаемых с помощью N-образной номограммы, — это

$$\varphi_1(u) + f_2(v)\,\varphi_3(w) = 0. \qquad (125)$$

Пример. Требуется вычертить номограмму для формулы

$$Q = \frac{a}{\delta}\,\frac{1}{1+\frac{a}{h}},$$

дающей коэффициенты перенапряжения цилиндрического резонатора как функцию отношения радиуса a к глубине проникновения δ и высоты h.

Берем

$$\varphi_1\left(\frac{a}{\delta}\right) = -\frac{a}{\delta}, \quad \varphi_3\left(\frac{a}{h}\right) = 1 + \frac{a}{h}, \quad f_2(Q) = Q.$$

В нашем распоряжении поверхность в 20×20 *см*, область изменения $\frac{a}{\delta}$ от 0 до 10^5, область изменения $\frac{a}{h}$ от 0,25 до 0,50. Отсюда получаем модули

$$m_1 = \frac{20}{10^5} = 2 \cdot 10^{-4}\ см, \quad m_3 = \frac{20}{0{,}25} = 80\ см.$$

Нуль функции φ_3 находится на 1 метр под точкой A (рис. 10.33). Следовательно, точка C наклонной шкалы делит $DA = 20$ *см* в отношении $^1/_5$.

Длина d наклонной шкалы (включая не поместившуюся на чертеже часть) между двумя вертикальными шкалами есть $d = \sqrt{120^2 + 20^2} = 121{,}7$. Отсюда получаем градуировку шкалы f_2:

$$x_2 = 121{,}7\,\frac{2\cdot 10^{-4}Q}{80 + 2\cdot 10^{-4}Q},$$

и номограмму, изображенную на рис. 10.33 в масштабе 1 : 4.

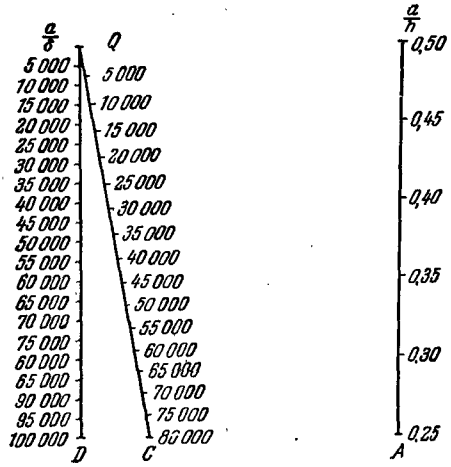


Рис. 10.33.

10.9.7. Номограмма с двумя криволинейными шкалами и одной прямолинейной (рис. 10.34). Если принять прямую за ось ординат, то уравнение (111) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (126)$$

Положим

$$y_1 = m_1\varphi_1(u), \qquad (127)$$

$$x_2 = \frac{m_2}{f_2(v)}, \qquad (128)$$

$$y_2 = \frac{m_1\varphi_2(v)}{f_2(v)}, \qquad (129)$$

$$x_3 = \frac{m_2}{f_3(w)}, \qquad (130)$$

$$y_3 = \frac{m_1\varphi_3(w)}{f_3(w)}. \qquad (131)$$

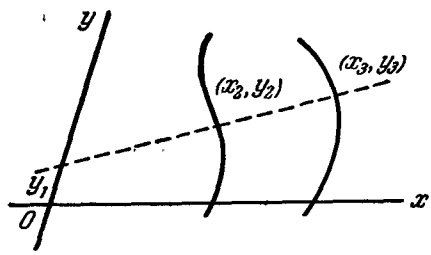


Рис. 10.34.

Тогда уравнение (126) получает вид

$$\varphi_1(u) = \frac{\varphi_2(v) - \varphi_3(w)}{f_2(v) - f_3(w)}. \qquad (132)$$

Это общий вид уравнений, решаемых с помощью рассматриваемой номограммы.

10.9.8. *W*-образная номограмма. Это частный случай номограммы, рассмотренной в предыдущем пункте. Номограмма сводится к трем пересекающимся в одной точке прямым (рис. 10.35). Следовательно, здесь

$$\varphi_2(v) = K, \quad \varphi_3(w) = 0.$$

Уравнение (132) превращается в

$$\varphi_1(u) = \frac{K}{f_2(v) - f_3(w)}.$$

Положим

$$F_2(v) = \frac{K}{f_2(v)}, \quad F_3(w) = \frac{K}{f_3(w)},$$

тогда уравнение (132) принимает окончательный вид

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3}. \qquad (133)$$

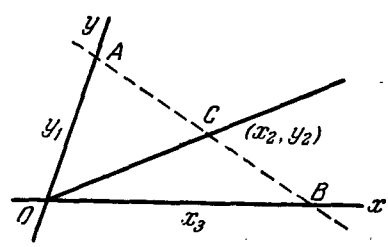


Рис. 10.35.

Уравнение (127) остается неизменным. Уравнения (128) — (131) переходят в

$$x_2 = \frac{m_2}{K}F_2(v), \quad y_2 = m_1F_2(v),$$

откуда

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{m_1K}{m_2},\quad x_3=\frac{m_2}{K}F_3(w),\quad y_3=0.$$

Пример. Требуется построить номограмму для формулы

$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}},$$

которая выражает связь длины волны в волноводе λ_g с длиной критической волны λ_c и длиной волны в свободном пространстве λ. Эту формулу можно представить в виде

$$\frac{1}{\lambda_g^2}=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda_c^2},$$

откуда

$$\varphi_1(\lambda_g)=\lambda_g^2,\quad F_2(\lambda)=\lambda^2,\quad F_3(\lambda_c)=\lambda_c^2.$$

Берем прямоугольные оси. Пусть имеется лист размером 20×10 *см*. Следовательно, наибольшая длина шкал OA и OB будет равна 14 *см* (рис. 10.36). Длины волн λ_g и λ_c меняются в пределах от 3 до 15 *см*. Отсюда $\frac{14}{15^2-3^2}\approx 0{,}06\ см=m_1$.

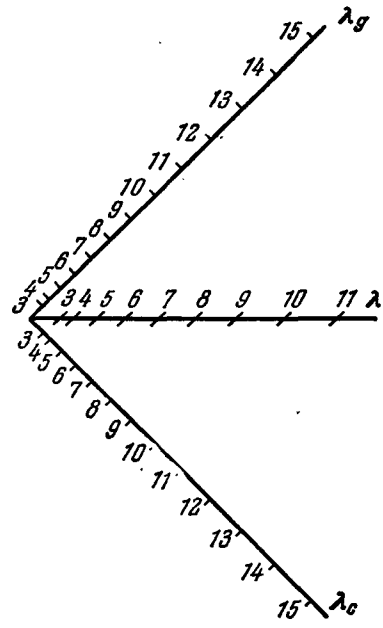


Рис. 10.36.

Возьмем $m_1=m_2$ и $K=1$. Следовательно, шкала OC будет биссектрисой прямого угла и может быть получена проектированием параллельно OA шкалы, начерченной на OB.

Замечание. Номограмма из трех пересекающихся в одной точке прямых позволяет решать все формулы, которые могут быть решены с помощью номограмм с тремя параллельными прямыми. Это не удивительно, так как оба типа номограмм преобразуются друг в друга с помощью перспективного преобразования, переносящего точку пересечения прямых в бесконечность.

10.9.9. *Z*-образная номограмма. Эта номограмма может служить для решения уравнения с четырьмя переменными:

$$\frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(v)}=\frac{f_1(w)}{f_2(t)}.$$

Положим $y_1=m_1\varphi_1(u)$, $y_2=m_2\varphi_2(t)$, $y_3=m_3f_1(u)$, $y_4=m_4f_2(t)$.

Если модули отвечают соотношению $\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_3}{m_4}$, то уравнения решаются графическим построением, изображенным на рис. 10.37, т. к. при этом $\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_3}{y_4}$.

10.9.10. Номограмма с тремя криволинейными шкалами. Определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0,$$

если принять

$$y_1 = \frac{m_1 f_1(u)}{\varphi_1(u)}, \quad x_1 = \frac{m_2}{\varphi_1(u)}, \quad y_2 = \frac{m_1 f_2(v)}{\varphi_2(v)}, \quad x_2 = \frac{m_2}{\varphi_2(v)},$$

$$y_3 = \frac{m_1 f_3(w)}{\varphi_3(w)}, \quad x_3 = \frac{m_2}{\varphi_3(w)},$$

преобразуется в

$$\frac{\varphi_3(w) - \varphi_1(u)}{\varphi_3(w) - \varphi_2(v)} = \frac{f_3(w) - f_1(u)}{f_3(w) - f_2(v)}.$$

Это наиболее общий вид уравнения, которое может быть представлено номограммой с тремя криволинейными шкалами.

10.9.11. Сложные номограммы. При помощи комбинации из двух номограмм мы легко можем представить формулу, содержащую четыре переменных u, v, w, t, если эта формула может быть представлена в виде

$$\Phi_1(u, v) = \Phi_2(w, t),$$

и если оба уравнения

$$\Phi_1(u, v) = \alpha, \quad \Phi_2(w, t) = \alpha$$

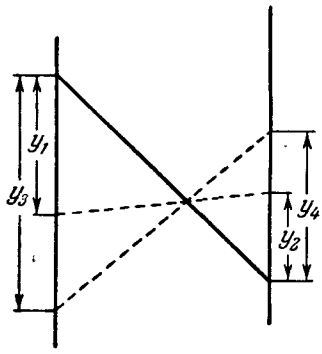


Рис. 10.37.

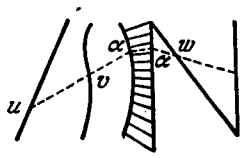


Рис. 10.38.

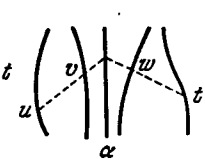


Рис. 10.39.

могут быть по отдельности представлены двумя номограммами с выравненными точками.

Для облегчения графического вычисления принято обе номограммы помещать рядом и соединять соответственные точки обеих шкал вспомогательной переменной отрезком прямой (рис. 10.38).

Если основания α прямолинейны в обеих номограммах и можно взять одни и те же модули, то обе шкалы можно совместить, если только площадь бумаги не слишком плохо использована для номограммы $\Phi_2(w, t) = \alpha$, модули которой при этом заданы. В этом случае не нужно градуировать прямолинейную шкалу α, которая тогда называется немой шкалой сложной номограммы (рис. 10.39).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ X

1. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I и II, Физматгиз, 1962.

2. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1960.

3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, Физматгиз, 1962.

4. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, 1959.

5. Мысовских И. П., Лекции по методам вычислений, Физматгиз, 1962.

6. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1951.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамса способ 740—748
Алгебраические уравнения, численное решение 674—688
Алгебраическое дополнение 180
Аналитическая функция 43
Антисимметричный тензор 245, 249
Аргумент комплексного числа 25
Ареакосинус 354
Ареасинус 354
Ареатангенс 354
Асимптотическая формула Стирлинга 589
Асимптотическое разложение 349—352
Аффикс 24
Аффинное векторное пространство 238

Безвихревое поле 136
Бернулли полиномы 720—722
— теорема 602
— уравнение 311
— числа 719
Бесконечное произведение 90
Бесселя интеграл 384
— интерполяционный полином 697—699
— уравнение 372, 403
— функции 372—405
— — второго рода 372
— — — — модифицированные 396
— —, изображение 515
— — первого рода 374
— — — — модифицированные 393
— —, приложения к изучению колебательных процессов 405—421
— — третьего рода 387
Бета-функция 370
Билинейная форма 180
Биномиальное распределение 596
Бисферические координаты 166, 167, 341
Бицилиндрические координаты 164, 165
Бореля теорема 506
Бохнера — Хинчина теорема 648
Бромвича контур 56
— метод 343
Бромвича — Вагнера интеграл 57
Бьенэмэ неравенство 633
Бэкера формула 196—198

Валлиса формула 90
Вариации произвольных постоянных метод 315—317
Вебера функция 375
Вебера — Эрмита функции 473, 477
Вектор 118—124
—, дифференцирование 124—126
— единичный 119, 238
—, интегрирование 126
—, ковариантные и контравариантные компоненты 240, 257—261
—, матричное представление 173
— осевой 119
— полярный 119
— свободный 119
— связанный 119
— скользящий 119
Векторная величина 117
Векторное исчисление 117—169
— —, приложение к теории электромагнитного поля 147—153
—, поле 126, 139
— произведение 122
— —, вихрь 133
— — двойное 124
— —, дивергенция 132
— пространство 238
Векторный интеграл 139—147
— потенциал 137—139
Вероятная ошибка 619, 621
Вероятности ошибок функция 360
— — —, график 364
— — —, таблица значений 363
Вероятность 585
— статистическая 596
Вес наблюдения 620
Весовая функция 86
Вещественная часть комплексного числа 24
Вихрь 129, 133, 134, 140, 143, 144, 147, 158—167, 262, 263
Волновое уравнение 331, 407—410
Вронскиан 316
Вронского определитель 316
Вычеты 50—53
—, применение к вычислению определенных интегралов 61—66

Гамильтона оператор 130
Гамма-функция 365—370

Гамма-функция, график 370
— —, таблица значений 371
Гармоники сферические 457
Гармоническая функция 68
Гармоиический аиализ 705
Гаусса гипергеометрическая функция 321
— гипергеометрический ряд 321
— кривая 601
— метод 733—735
— функция 360
— —, график 361
Гегеибауера полиномы 441
Гельмгольца уравнение 333
— функция 452
Гиббса явление 93
Гиперболические функции 352—356
— — обратные 354
— —, применение к расчету длинных линий 354, 355
Гипергеометрическая функция 321
Гипергеометрический ряд 321
Главная диагональ матрицы 176
Голоморфная функция 44
Горнера схема 676—678
Градиент 127—129, 132, 133, 140, 143, 144, 157, 159—167, 241, 261, 263
Грама — Шарлье ряд 612, 615
Графическая шкала 762
Графическое решение дифференциальных уравнений 752—757
— — уравиений 666, 671
Грегори формула 728—730
Греффе метод 680—688
Грина формула 144

Данделена метод 680—688
Двойное векторное произведение 124
Диагональная матрица 177
Диаграмма иаправленности 115, 116
Дивергенция 129, 132, 133, 140, 142, 144, 157, 159—167, 262, 263
Дирака функция 520
Дирихле задача 334
— условия 85
Дискретная случайная величина 589
Дисперсия 590, 591, 592
Дифференциальное уравнение 306—348
— — Бернулли 311
— — Бесселя 372, 403
— — в полиых дифференциалах 309
— —, графическое решение 752—757
— — Клеро 311
— — Лагранжа 311
— — Лапласа 333
— — Лежандра 432
— — линейное 310, 315—324
— — — с постоянными коэффициентами 324—330
— — Максвелла 343
— — Матье 339
— — однородное 308
— — порядка выше первого 313—315
— — Пуассона 341
Дифференциальное уравиение, разрешающееся относительно аргумеита 306
— —, — — неизвестной функции 306
— —, — — производной 306
— — Риккати 311
— — с разделяющимися переменными 307
— — — частиыми производными 330—348
— —, численное решение 738—752, 757—762
— — Эйлера 317
Дифференцирование численное 717—719
Долгота 159

Единицы локальной длины 154
Единичная матрица 177
— функция 493
— — Хевисайда 109
Единичиое отклоиеиие 600
Единичиые векторы 119, 238
Емкость скаляриая 247
— тензорная 248

Жордана лемма 53—55

Запаздывания теорема 505
Зенитное расстояние 159
Зональная гармоника 457

Изменение масштаба 502
Изображение 498
—, дифференцирование 505
—, интегрирование 506
—, сложение 500
Интеграл вероятиости 360, 601
— —, график 364
— —, таблица значений 363
— криволинейный 44
— линейный 139
— Ломмеля 379
— от вектора 126
— Френеля 364, 382
— Фурье 98—116
— Шлефли 440
Интегральное преобразование Карсона 498
— — Лапласа 498
Интегральный косинус 356
— —, график 358
— —, изображение 518
— —, таблица значений 358—360
— синус 356
— —, график 358
— —, изображение 518
— —, таблица значений 358—360
Интегрирование численное 719—738
— — дифференциальных уравиений 738—752, 757—762
Интерполяциоииая формула Лагранжа 689

Интерполяционный полином Бесселя 697—699
— — Ньютона 693—696, 698, 699, 735, 736, 749
— — Стирлинга 696—699
Итерации метод 669

Карсона преобразование 498
Квадратичная форма 180
Кельвина функции 398—403
Клеро уравнение 311
Клотоида 364
Ковариантные и контравариантные компоненты вектора 257—261
Ковариантный вектор 240
Колебаний мембраны уравнение 408
— струны уравнение 331
Комплексного переменного функции 42
Комплексные числа 24
— —, деление 30
— —, извлечение корня 28
— —, показательная форма 30
— —, применение к расчету электрических цепей в синусоидальном режиме 31—42
— —, сложение 25
— — сопряженные 27
— —, степень 27
— —, тригонометрическая форма 26
— —, умножение 25
Комплексный вектор 41
Компоненты вектора 120
Контравариантный вектор 240
Контур Бромвича 56
— интегрирования 45
— эквивалентный 57
Конформное отображение 66
— —, применения 68—71, 83, 84
Координатные линии 154
— поверхности 154, 252
Координаты криволинейные 154
— — ортогональные 154
— — —, важнейшие системы 158—168
Корни из единицы 28
Корню спираль 364, 365
Корреляционная функция 638—641
Корреляционные связи 643
Косинус гиперболический 352
— —, график 355
— —, таблица значений 356
— интегральный 356
— —, график 358
— —, таблица значевий 358—360
Косинус-преобразование Фурье 110
Кососимметричная матрица 176
Котеса метод 730—732
Коши теорема 45
— формула 46
Коши — Римана условия 43
Криволинейные координаты 153, 252, 256, 257
— — ортогональные 154
— оси 252
Криволинейный интеграл 44
Критическая точка 48
Кронекера символ 240
Кэли — Гамильтона теорема 194

Лагранжа интерполяционная формула 689
— метод 315—317, 679—680
— уравнение 311
Ламе коэффициенты 154
Лапласа оператор 130, 133, 158—167, 262, 264
— преобразование 498
— произведение 334—336, 338—340
— уравнение 333
— формула 436
— функция 601
Лапласа — Гаусса закон 599
— — стационарная случайная функция 656—661
Лапласиан 130, 334
Лапласово поле 139
Лежандра полиномы 434
— преобразование 313
— уравнение 432
— функции 322, 432—464
— — второго рода 447
— — — — присоединенные 451
— — первого рода 441
— — — — присоединенные 450
— —, приложение к теории электромагнитного поля 456, 457, 460—465
Лилла построение 678
Линейная шкала 763
Линейное дифференциальное уравнение 310, 315—330
— — — второго порядка 322—324
— — —, интегрирование при помощи рядов 317—322
— — —, метод вариации произвольных постоянных 315—317
— — —, применеиие матричного исчисления 209
— — — с постоянными коэффициентами 324—330
— — — — — — неоднородное 326—328
— — — — — — однородное 325
— уравнение 310
Линейный интеграл 139
— спектр функции 95
Лобачевского — Греффе — Данделена метод 680—688
Логарифм 30
—, изображение 517
Логарифмическая шкала 763
Ломмеля интегралы 379
Лорана ряд 48

Максвелла уравнения 151, 168, 264, 343
Масштабные коэффициенты 154
Математическое ожидание 589, 591, 592
Матрица 171
— диагональная 177
—, дифференцирование и интегрирование 205

Матрица единичная 177
— кососимметрическая 176
— нулевая 177
— обратная 180
— симметричная 176
— транспонированная 179
— эрмитова 187, 192
Матричное исчисление 170—235
— —, применение к изучению четырехполюсников 210—237
— —, — — решению дифференциальных уравнений 206—210
— —, — — — систем линейных алгебраических уравнений 183—185
Матье уравнение 339
— функции 339, 465—478
— — второго рода 472
— — первого рода 465
— — — — присоединенные 339, 469
Медианная ошибка 619
Меллина — Фурье теорема 521
Мера точности 600
Метрические коэффициенты 154
Метрический тензор 254, 255, 258
Метрическое пространство 238
Минор 177
Мнимая часть комплексного числа 24
Модифицированные функции Бесселя 393—398
Модуль вектора 118
— — в комплексном пространстве 188
— графической шкалы 762
— комплексного числа 25
Момент 629, 630
— вектора 123
— начальный 592, 594
Муавра формула 28

Набла 130
Наименьших квадратов способ 617
Независимые события 586
Неймана задача 334
— функция 375
Немой индекс 245
Непрерывная случайная величина 591
Непрерывный спектр 648
Несмещенная оценка 616
Несовместные события 586
Номограммы 762—772
Нормальная производная 127
Нормальное распределение 599, 614
Нормальные уравнения 623
Нулевая матрица 177
Нуль функции 60
Ньютона интерполяционный полином 693—696, 698, 699, 735, 736, 749
— метод 667, 673
Ньютона — Котеса метод 730—732
Ньютоново поле 136

Обратная матрица 180
Обратные гиперболические функции 354
Обращения формула 522
Однозначная функция 42
Однородное уравнение 308
Ожидание математическое 589, 591, 592
Оператор Гамильтона 130
— Лапласа 130, 133, 158—167, 262, 264
— преобразования 170, 171
Операционное исчисление 498—532
— —, правила 500—509
— —, применение к вычислению определенных интегралов 568—570
— —, — — изучению электрических цепей 490—498, 510—512, 543—568
— —, — — исследованию функций 577—582
— —, — — решению интегральных уравнений 574—577
— —, — — — линейных дифференциальных уравнений 570—574
— —, список обозначений 584
— —, таблицы 533—542
Оригинал 498
—, дифференцирование 504
—, интегрирование 504
—, сложение 500
Орт 119, 238
Ортогональное преобразование 186
— — комплексного пространства 189
Ортогональные криволинейные координаты 154
— системы функций 86
Ортонормированные системы функций 87
Осевой вектор 119
Особые точки 48
Остроградского теорема 140
Отклонение 590, 591
— единичное 600
— относительное 600
— среднее квадратическое 590, 591
Оценка 616
— несмещенная 616
Ошибка срединная 619, 621
— средняя арифметическая 619
— — квадратическая 619
Ошибки измерений 615—617

Параболическая шкала 763
Параболические координаты вращения 160, 161
— цилиндрические координаты 160, 339
Параболического цилиндра функции 473
Параболоидальные координаты 160, 161, 341
Парсеваля теорема 664
Пикара способ 750—752
Плотность вероятности 591, 594
— скалярная 248
— тензорная 248
Поверхности уровня 128
Поворот 187, 290
Поле векторное 126, 139
— лапласово 139
— ньютоново 136
— потенциальное 136
— скалярное 126
— соленоидальное 139
Полюс 48, 60

Полярный вектор 119
Потенциал векторный 137—139
— скалярный 134—136
Потенциальное поле 136
Поток вектора 140
Почти периодическая функция 98
Преобразование Карсона 498
— координат в матричной форме 242—245
— Лапласа 488
— Лежандра 313
— ортогональное 186, 189
— унитарное 189
— Фурье 110, 112
Приближение по Чебышеву 714—716
Присоединенные сферические функции 432, 450
— функции Лежандра 432, 450
Производная вектора 124
— нормальная 127
Производящая функция 383, 434, 453, 476, 484
Пропорциональных частей метод 668
Противоположное событие 585
Псевдоскаляр 117, 247
Пуассона распределение 604
— —, приложение к задачам автоматической телефонии 605—612
— уравнение 341

Равномерное распределение 593
Разветвления точка 48
Разложения теорема Хевисайда 509
Разность порядка k 691
Ранг матрицы 177
Распределение 591
— биномиальное 596
— нормальное 599, 614
— Пуассона 604
— равномерное 593
— системы случайных величин 594
Распределения функция 591, 594
— — случайной функции 628, 629
— — условная 630
Резонанс 328
Риккати уравнение 311
Родрига формула 438, 453, 482
Ротор 129, 133, 134, 140, 143, 144, 147, 158—167, 262, 263

Свертывание тензора 250, 251
Свертывания теорема 506
Свободный вектор 119
Связанный вектор 118
Секториальная гармоника 458
Силовая трубка 128
Силовые линии 128
Сильвестра теорема 194
Симметричная матрица 176
Симметричный тензор 245
Симметрия 290
Симпсона формула 726
Синус гиперболический 352
— —, график 355
Синус гиперболический, таблица значений 356
— интегральный 356
— —, график 358
— —, таблица значений 358—360
Синусоидальная функция 32
Синус-преобразование Фурье 110
Скалярная величина 117
— емкость 247
— плотность 248
Скалярное поле 126
— произведение 121
— — в комплексном пространстве 189
— —, градиент 132
— —, матричное представление 179
Скалярный потенциал 134—136
Скользящий вектор 119
След матрицы 190
Сложения вероятностей теорема 586
Слоистое поле 136
Случайная величина 589, 591
— функция 624
— —, моменты 629, 630
— —, применение к исследованию линейных и нелинейных систем 644—665
— — стационарная 636
— — —, применение к исследованию флуктуаций при постоянных режимах 636—638
— —, сходимость 631—636
— —, функция распределения 628, 629
— —, — — условная 630
— —, характеристическая функция 629
Случайное событие 585
Смешанное произведение 123
Смещения теорема 505
Собственные векторы 189, 192
— значения 189, 192
— —, приближенное вычисление 199—203
Соленоидальное поле 139
Сопряженные комплексные числа 27
Составляющие вектора 120
Спектр непрерывный 648
— функции 95
— частот 105
— энергетический 644—650
Спектрального распределения энергии функция 644, 646
Срединная ошибка 619, 621
Среднее квадратическое отклонение 590, 591
Средняя арифметическая ошибка 619
— квадратическая ошибка 619
Стандарт (случайной величины) 590, 591
Стационарная случайная функция 636
— — —, дифференцируемость 642
— — — Лапласа — Гаусса 656—661
— — —, непрерывность 641
Степенной ряд 29
Степень матрицы 193, 198, 199
Стирлинга интерполяционный полином 696, 697, 698, 699
Стирлинга формула 589
Стокса формула 145
Струны уравнение 331

Существенно особая точка 48
Сферические гармоники 457
— координаты 159, 337
— функции 432
— — присоединенные 432
Сходимость в смысле Бернулли 631
— — среднем квадратическом 633
— по вероятности 632
— почти достоверная 635

Тангенс гиперболический 352
— —, график 355
Тейлора ряд 47
Телеграфное уравнение 333
Тензор 241, 242, 250—252
— антисимметричный 245, 249
— в криволинейных координатах 252—265
— деформации 292
— коэффициентов упругости 294
— метрический 254, 255, 258
— модулей упругости 294
— напряжений 292
— пьезоэлектрический 298
— симметричный 245
— теплового расширения 293
Тензорная емкость 248
— плотность 248
Тензорное исчисление 238—305
— —, применение к изучению анизотропных сред 288—305
— —, — — исследованию электрических цепей 265—288
Тессеральная гармоника 457
Тороидальные координаты 165, 166, 341
Транспонированная матрица 179
Трапеций формула 725, 726
Трехгранник 118

Умножения вероятностей теорема 586
Унитарное преобразование 189
Уравнения с частными производными 330—348
— — — —, численное решение 757—762
Уровня поверхности 128
Условная функция распределения 630
Уэддля формула 727

Факториальная фуикция 367
Френеля интегралы 364, 382
Фукса теорема 319
Фундаментальный метрический тензор 254, 255, 258
Функция от матриц 193—205
— точки 126
Фурье интеграл 98—116
— —, комплексная форма 100
— —, применеиие к электрическим цепям 102—105
— —, физическая реальность 113
— косинус-преобразование 110
— коэффициенты 86
— преобразование 110, 112
Фурье ряд 85—98
— синус-преобразование 110
Фурье — Бесселя ряд 380

Ханкеля функции 387—389
Характеристическая функция 592, 629
— — системы случайных величин 595
— — суммы независимых случайных величин 595
Характеристическое уравнение 189—191, 325
Хевисайда единичная функция 109, 493
— — —, изображение 499
— теорема разложения 509, 527

Цилиндрические координаты 158, 159, 335
Циркуляция вектора 139

Частость 596
Частота 596
Частотная характеристика стационарной линейной системы 646
Чебышева метод 732, 733
— неравенство 633
— полиномы 322, 478—488
— — второго рода 479
— — первого рода 479
— —, приложение к исследованию электромагнитных излучателей 486—488
— функция 479
Численное дифференцирование 717—719
— интегрирование 719—738
— решение уравнений 667—688

Шварца отображение 77
Шкалы 763
Шлефли интеграл 440
Штурма теорема 324

Эйлера постоянная 366
— уравнение 317
— формула 30, 722—725
Эйлеровы интегралы 370
Эквивалентный контур 57
Эквиполентные векторы 119
Экспоненциальная функция 30
Элемент длины 154
— объема 255
Эллипсоидальные вытянутые координаты 162, 163, 340
— общие координаты 167, 168
— сплюснутые координаты 163, 340
Эллиптические координаты 156
— цилиндрические координаты 161, 162, 338
Эмпирическая функция 700, 701, 706, 711
Эмпирические формулы 621
Эрланга формулы 609
Эрмита полиномы 475
Эрмитова матрица 187, 192
Эрмитово-сопряженная матрица 187, 188

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\boldsymbol{a}$ — вектор 119
$\boldsymbol{AB}$ — вектор 118
$\operatorname{Arch} x$ — ареакосинус 354
$\operatorname{Arsh} x$ — ареасинус 354
$\operatorname{Arth} x$ — ареатангенс 354
$\left.\begin{matrix}\operatorname{bei}_\nu(z)\\ \operatorname{ber}_\nu(z)\end{matrix}\right\}$ функции Кельвина 400
$C(\nu)$ — интеграл Френеля 364
$C_n^p(z)$ — полиномы Гегенбауера 441
$\operatorname{Ce}_m(\xi, q)$ — присоединеиные функции Матье 339, 469
$\operatorname{ce}_m(\varphi, q)$ — функции Матье первого рода 339, 466
$\operatorname{ch} x$ — гиперболический косинус 352
$\operatorname{Ci} x$ — интегральный косинус 356
$\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} qz = A\cos qz + B\sin qz$ 339
$\operatorname{curl} \boldsymbol{a}$ — вихрь вектора 129
$D_\nu(z)$ — функции Вебера — Эрмита 473
$\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ — дивергенция вектора 129
$\operatorname{erf} x$ — функция вероятности ошибок, интеграл вероятности 360
$\operatorname{grad} f$ — градиент функции 127
$H_n(z)$ — полиномы Эрмита 475
$\left.\begin{matrix}H_\nu^{(1)}(z)\\ H_\nu^{(2)}(z)\end{matrix}\right\}$ функции Ханкеля 387
$I(z)$ — мнимая часть комплексного числа 24
$I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν 393
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты 119
$J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν 372
j — мнимая единица 26
$K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка ν 396
$\left.\begin{matrix}\operatorname{kei}_\nu(z)\\ \operatorname{ker}_\nu(z)\end{matrix}\right\}$ функции Кельвина 400
$P_n(x)$ — полиномы Лежандра 434
$p_n(\omega)$ — полиномы Чебышева второго рода 479
$P_\nu(z)$ — функции Лежандра первого рода 441
$\left.\begin{matrix}P_\nu^\mu(z)\\ \widetilde{P}_\nu^\mu(z)\end{matrix}\right\}$ присоединенные функции Лежандра первого рода 450
$\left.\begin{matrix}Q_\nu(z)\\ \widetilde{Q}_\nu(z)\end{matrix}\right\}$ функции Лежандра второго рода 449
$\left.\begin{matrix}Q_\nu^\mu(z)\\ \widetilde{Q}_\nu^\mu(z)\end{matrix}\right\}$ присоединенные функции Лежандра второго рода 451
$R(z)$ — вещественная часть комплексиого числа 24
$\operatorname{Res}(a)$ — вычет функции относительно особой точки a 50
$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ — вихрь вектора 129
$S(\nu)$ — интеграл Френеля 364
$\operatorname{Se}_m(\xi, q)$ — присоединенные функции Матье 339, 469
$\operatorname{se}_m(\varphi, q)$ — функции Матье первого рода 339, 466
$\operatorname{sh} x$ — гиперболический синус 352
$\left.\begin{matrix}\operatorname{Si} x\\ \operatorname{si} x\end{matrix}\right\}$ интегральный синус 356
$T_n(\omega)$ — полиномы Чебышева первого рода 479
$\operatorname{th} x$ — гиперболический тангенс 352
$U_n(\omega)$ — функции Чебышева второго рода 479
$Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода (функция Вебера) порядка ν 374
$\mathrm{Y}_\nu(z)$ — функция Неймана 375
$\Gamma(z)$ — гамма-функция 365
γ — постоянная Эйлера 366
Δ — лапласиан, оператор Лапласа 130
$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака 520
$\Upsilon(t)$ — единичная функция Хевисайда 493
$\Phi(x)$ — функция вероятности ошибок, интеграл вероятности 360
$\Psi(x)$ — функция Гаусса 360
∇ — набла, оператор Гамильтона 130

Андре Анго

Математика для электро- и радиоинженеров

М., 1965 г., 780 стр. с илл.

Редактор *Н. М. Розенгауз*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Г. Г. Желтова*

Печать с матриц. Подп. к печати 10/VI 1965 г.
Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 48,75.
Условн. печ. л. 68,25. Уч.-изд. л. 53,62
Допечатка тиража 40 000 экз.
Цена книги 2 р. 88 к. Заказ № 999.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета
Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

АНДРЕ АНГО

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ
ЭЛЕКТРО- И РАДИОИНЖЕНЕРОВ