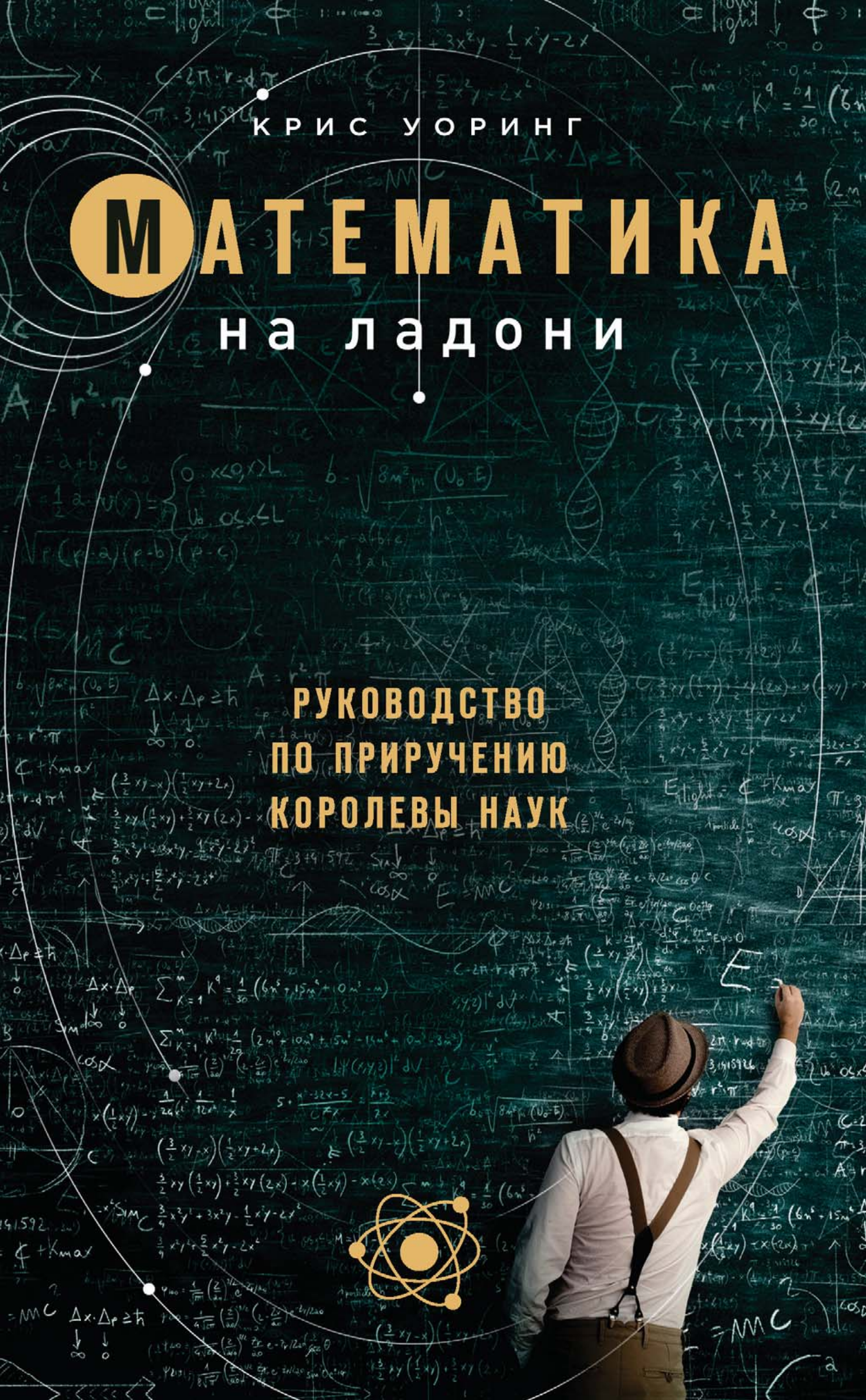

КРИС УОРИНГ
МАТЕМАТИКА
на ладони
РУКОВОДСТВО
ПО ПРИРУЧЕНИЮ
КОРОЛЕВЫ НАУК

MATHS

IN BITE-SIZED CHUNKS

CHRIS WARING

КРИС УОРИНГ

МАТЕМАТИКА

на ладони

РУКОВОДСТВО
ПО ПРИРУЧЕНИЮ
КОРОЛЕВЫ НАУК

МОСКВА
2020

УДК 51
ББК 22.1
У64

Уорринг, Крис.

У64 Математика на ладони / Крис Уорринг ; [перевод с английского М.А. Райтмана]. — Москва : Эксмо, 2020. — 304 с. — (Краткая история).

ISBN 978-5-04-103031-5

Математику часто называют самым трудным, сложным предметом для изучения, многие признаются в страхе перед ней. В книге «Математика на ладони» Крис Уорринг доказывает, что математику легко понять и изучить, следуя определенной системе.

Каждая глава знакомит читателя с одной темой или теорией, демонстрируя, как овладеть ею с помощью проработанных проблем и примеров из жизни.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-04-103031-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эту книгу я мог бы начать с утверждения, что математика окружает нас повсюду, и потом долго и нудно распространяться о том, как она важна. Это действительно так, и вы наверняка уже слышали об этом, но вряд ли это главная причина, по которой вы взяли в руки мою книгу.

Можно начать с того, что математические знания высоко ценятся на рынке труда, тем более учитывая доминирующую роль технологий в современном мире. Люди с техническим складом ума и вправду делают хорошую карьеру, но, честно говоря, эта книга не решит проблему вашего трудоустройства.

Я скажу одно, математике можно научиться. Многие испытывают перед ней ужас. Это словно болезнь — один заболевает и заражает остальных. Родители, друзья, учителя и многие другие заставляют нас поверить в то, что математика только для избранных, для тех, кому повезло родиться с активным правым полушарием мозга. Эта наука дается им без труда, заставляя остальных чувствовать себя идиотами.

Однако не спешите считать свой случай безнадежным.

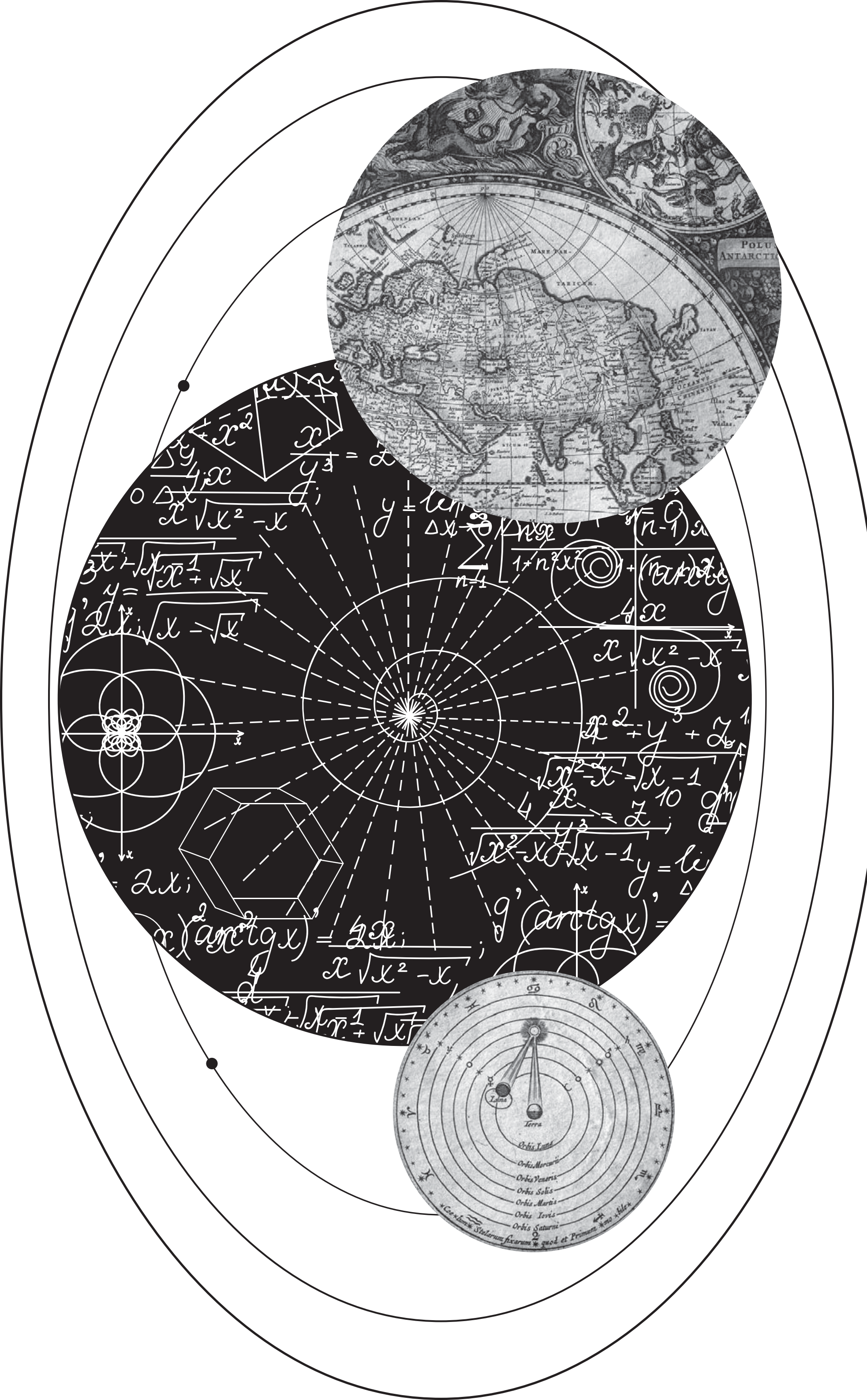
При желании освоить математику может каждый. Да, как и любой навык, это потребует времени и усилий. Да, одним она дается проще, чем другим, как и большинство наук. Я подозреваю, что у вас не так много времени, поэтому идея заключается в том, чтобы разбить важную информацию на легко усваиваемые фрагменты. Вы можете разбирать их по частям. Каждый последующий фрагмент базируется на предыдущем, так что вы легко можете взять на вооружение некоторые концепции, которые помогут вам понять мир вокруг.

Я разделил книгу на несколько частей. Многие моменты, о которых мы будем говорить, вы наверняка помните еще со школы, но моя цель — познакомить вас с действительно заслуживающими внимания аспектами, с которыми вам навряд ли довелось столкнуться.

Кроме того, чтобы разбавить повествование, я включил в книгу несколько забавных историй о том, как совершались знаменитые открытия и как из-за ошибок ситуация выходила из-под контроля.

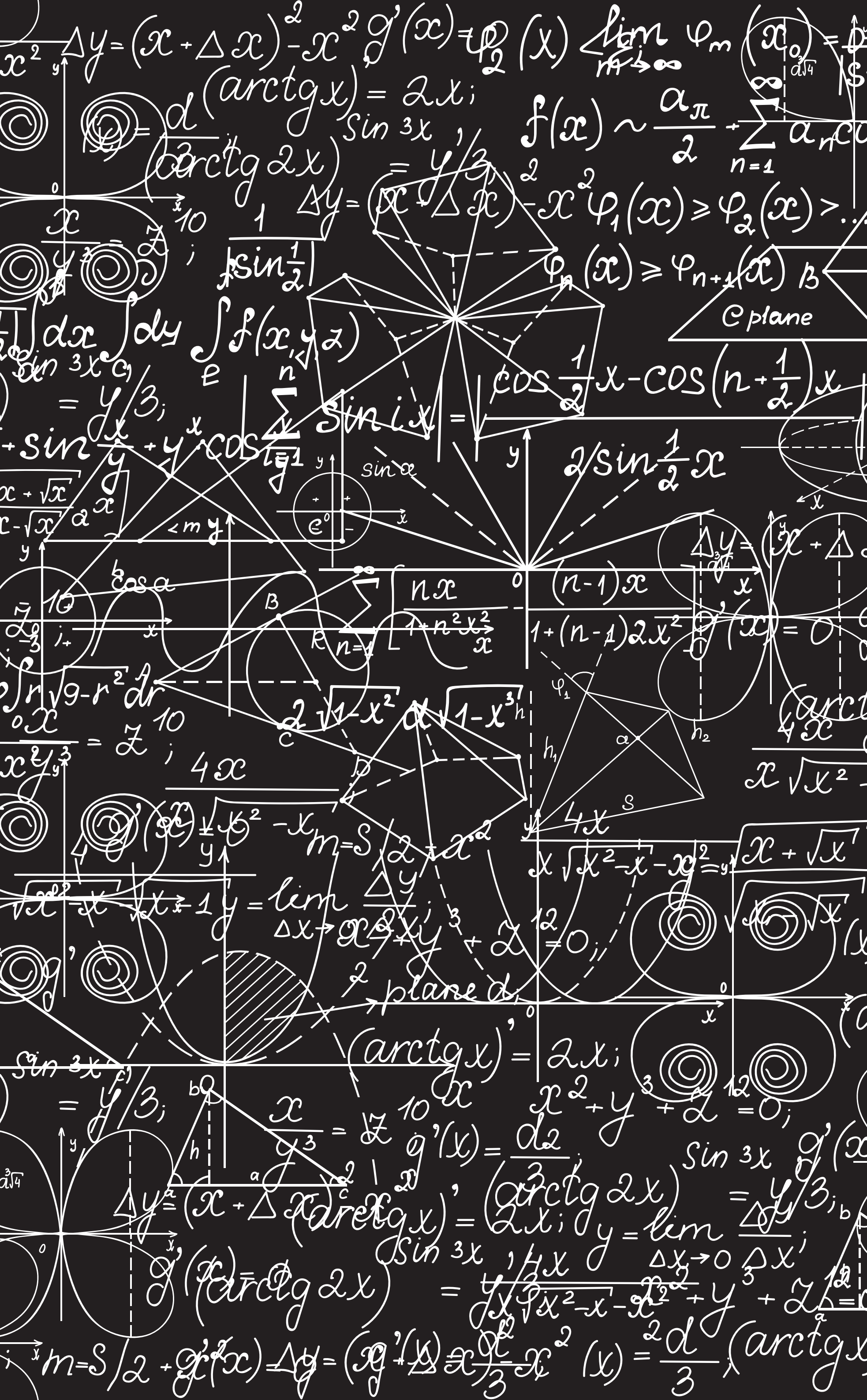
Эти занимательные случаи показывают, что математика — наука с богатой историей, а также ярко описывают то, как наши предки познавали мир. Вы увидите, что великим математикам приходилось упорно трудиться, чтобы совершить свои открытия.

Так что приготовьтесь к интеллектуальному пиршеству. Надеюсь, у вас проснулся аппетит!


Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ I

ЧИСЛА



(arctg x)' = 2x;
sin 3x
f(x) ~ a_π/2 + Σ a_n
φ_1(x) ≥ φ_2(x) > ...
φ_n(x) ≥ φ_{n+1}(x)
C plane
cos 1/2 x - cos(n + 1/2)x
2 sin 1/2 x
sin α
(n-1)x
1+(n-1)2x²
y = lim
plane d
x² + y³ + z¹² = 0;
g'(x) = d_2/3

ГЛАВА 1

ТИПЫ ЧИСЕЛ

У 68% населения Земли есть доступ к суперкомпьютеру. Согласно исследованиям, проведенным в 2017 году, 4,8 млрд. человек имеют собственный мобильный телефон, это при общем населении планеты в 7,5 млрд. Американский физик японского происхождения Митио Каку (р. 1947) как-то сказал: «Сегодня в вашем сотовом телефоне заключена бо́льшая вычислительная мощность, чем та, что находилась в распоряжении NASA в 1969 г., когда два астронавта впервые ступили на Луну». Сейчас мы можем произвести все необходимые нам вычисления, просто проведя пальцем по экрану телефона, так зачем тогда вообще нужно учить арифметику?

Дело в том, что изучение арифметики позволит вам лучше понять природу чисел. Изучение этой природы раньше носило название «арифметика», но теперь так называют непосредственно процесс подсчета. Ту же область математики, которая занимается природой чисел, сегодня называют «теорией чисел». Специалисты в этой области стремятся понять математические основы нашей Вселенной и природу бесконечности — просто непаханое поле информации!

Для начала давайте совершим небольшую прогулку в зоопарк.

Люди начинали с простого — считали *что-то*, начиная с единицы и далее, используя числа (а точнее, *целые* числа). Эти числа стали называться *натуральными*. Если поместить их в воображаемый зоопарк, то для каждого из них потребуется отдельный вольер:

1, 2, 3, 4, 5, 6...

Древние греки не считали ноль натуральным числом, поскольку вы не можете потрогать руками ноль яблок. Однако сегодня мы относим ноль к натуральным числам*, так как он «наводит мост» к *отрицательным* числам. Если добавить ноль

---

* В российской математической литературе ноль к натуральным числам относить не принято. Однако существует понятие «расширенного натурального ряда», включающего в себя также и ноль. — *Прим. ред.*

в наш воображаемый зоопарк, то он будет выглядеть так:

$$\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$$

Теперь мой «зоопарк» содержит также отрицательные числа, которые вместе с натуральными числами образуют совокупность *целых чисел*. Поскольку каждому положительному целому числу теперь соответствует отрицательное число, моему зоопарку нужно в два раза больше вольеров и еще один для нуля. Однако мой бесконечный математический зоопарк не нуждается в расширении — он уже и так бесконечен. Это пример того самого непаханого поля, которое я упоминал ранее.

Есть и другие типы чисел, которые не относятся к целым. Греки предложили отличную идею с яблоками, но, как известно, одно яблоко можно разделить на несколько частей, каждую из которых получит отдельный человек. Я бы хотел отразить это в своем «зоопарке».

Если я начну перечислять все дроби между нулем и единицей, имеет смысл начать с половин, затем третей, четвертей и т. д. Это позволит получить все дроби без пропусков. То есть я последовательно применю все натуральные числа в качестве знаменателя (нижней части дроби). А для каждого знаменателя я последовательно применю различные числа в качестве числителя (верхней части дроби), начиная с единицы и заканчивая числом, равным знаменателю.

ДРОБИ

С помощью дроби можно записать любое число, находящееся в промежутке между целыми. Дробь, как правило, записывается в виде числителя (сверху) и знаменателя (снизу). К примеру, половина будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}$$

1 — это числитель, 2 — знаменатель. Такая запись показывает, что значение этой дроби равно единице, деленной на два. То есть вы видите, какую долю некоторой одной вещи вы получите, если разделите ее между двумя людьми. Дробь $\frac{3}{4}$ обозначает три вещи, разделенные между четырьмя людьми — то есть каждый получает по три четверти.

Определив все дроби между нулем и единицей, я могу использовать их для определения дробей в промежутках между остальными натуральными числами. Добавив единицу ко всем дробям, расположенным между нулем и единицей, я получу все дроби между единицей и двойкой. Добавив еще одну единицу, я получу все дроби между двойкой и тройкой. Продолжая добавлять единицу, я получу все дроби в промежутках между всеми остальными натуральными числами, а вычитая единицу, — все дроби в промежутках между всеми отрицательными числами.

Итак, у меня есть бесконечная последовательность целых чисел, и мне нужно заполнить каждый промежуток между ними бесконечным количеством вольеров для дробей. Это значит, что мне нужно бесконечное число бесконечностей. Звучит дико, но, к счастью, у меня еще много вольеров.

Поскольку дроби можно записать в виде соотношения, они называются *рациональными* числами*. Теперь у меня в «зоопарке» есть все рациональные числа, которые включают в себя целые числа (т. к. целые числа можно записать в виде дроби, разделив их на единицу), которые, в свою очередь, включают в себя натуральные числа. Закончим с этим.

Немного отвлечемся. 2500 лет назад в Индии математики заявили, что некоторые числа не могут быть записаны в виде дроби; причем слово «некоторые» здесь следует понимать как бесконечное множество. Они выяснили, что не существует такого числа, которое можно возвести в квадрат (умножить само на себя) и получить два, поэтому квадратный корень из двух считается нерациональным числом. Мы не можем записать квадратный корень из двух в виде числа, не округляя его, поэтому оно изображается с использованием символа корня: $\sqrt{2}$.

Есть также и другие важные нерациональные числа, записываемые в виде символов, так как вырисовывать в расчетах бесконечную последовательность, мягко говоря, трудоемко. π, e и ϕ — три

* От латинского слова *ratio* (отношение). — *Прим. ред.*

примера, которые мы рассмотрим позже. Эти числа называются *иррациональными* и им также нужно найти место в нашем «зоопарке». Угадайте, сколько иррациональных чисел есть между последовательными рациональными числами? Правильно — бесконечность! Я по-прежнему легко найду пару лишних бесконечностей вольеров, однако, вероятно, у Кантора* нашлись бы некоторые замечания по этому поводу (см. стр. 20).

КВАДРАТ И КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Когда вы умножаете число само на себя, вы возводите его в *квадрат*. Квадрат записывается в виде небольшого индекса (маленькой двойки) над числом:

$$3 \times 3 = 3^2$$

Три в квадрате — девять. Таким образом, *квадратный корень* из девяти — три. Извлечение корня из числа противоположно возведению его в квадрат. Квадратный корень из шестнадцати равен четырем, поскольку четыре в квадрате — шестнадцать:

$$\sqrt{16} = 4$$

Такие числа, как девять и шестнадцать, называются *идеальными* квадратами, так как их квадратный корень — целое число. Любое число, включая

* Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, создатель теории множеств. — *Прим. ред.*

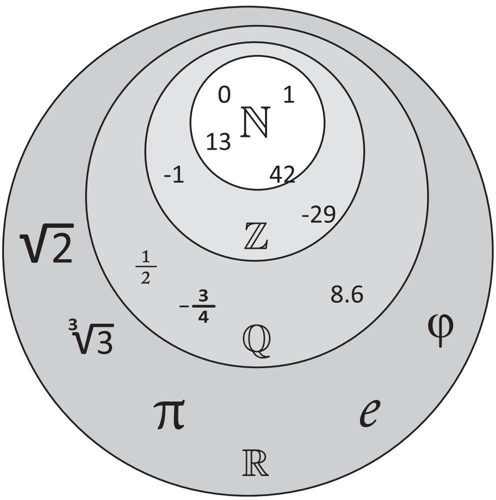
дроби и десятичные дроби, может быть возведено в квадрат. Из любого положительного числа можно извлечь корень.

Чтобы узнать больше, см. стр. 58.

Когда мы объединяем рациональные числа с иррациональными, мы получаем то, что математики называют *действительными* или *вещественными* числами. По аналогии с рассмотренными выше типами чисел, вы можете предположить, что также существуют и недействительные числа, и будете абсолютно правы. Однако, тут я вынужден остановиться и дать моему творению название «*Зоопарк» действительных чисел*». Поскольку в зоопарках животных обычно распределяют по видам, я тоже выделю несколько накладывающихся друг на друга групп чисел разного типа. Мой зоопарк можно представить в виде следующей схемы; для вашего удобства я отметил здесь все главные «достопримечательности»:

«ЗООПАРК» ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Я должен здесь отметить, что мой «зоопарк» обязан своим существованием немецкому математику Давиду Гильберту (1862–1943). Он внес огромный вклад в математику и широко прославился своей деятельностью по пропаганде и направлению развития этой области знаний. В 1900 году он подготовил для Международного конгресса математиков список из 23 нерешенных задач — теперь известных как «проблемы Гильберта» — три из которых остаются нерешенными по сей день. Источником вдохновения для моего «зоопарка» послужил сформулированный Гильбертом мысленный эксперимент «*Гранд-отель*».



Обозначения:

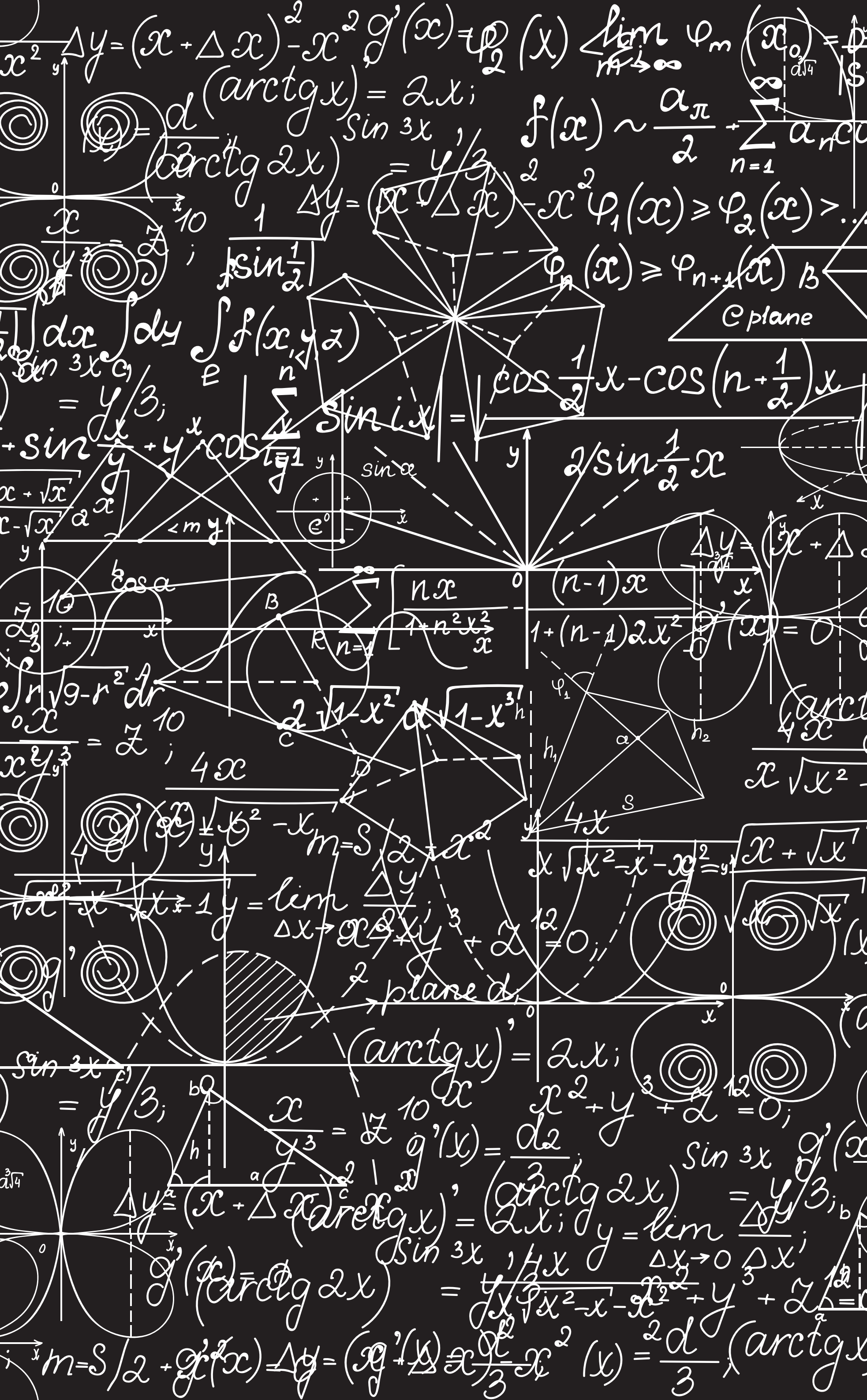
$\mathbb{N}$ — натуральные числа

$\mathbb{Z}$ — целые числа

$\mathbb{Q}$ — рациональные числа

$\mathbb{R}$ — действительные числа

В этом эксперименте Гильберт рассмотрел отель с бесконечным количеством комнат, заполненных бесконечным количеством гостей. При этом он показал, что в отель всегда можно дополнительно заселить бесконечное количество гостей, убедив уже проживающих гостей переселиться в комнату, номер которой в два раза больше номера той комнаты, в которой каждый из них проживает. То есть все текущие гости переместятся в комнаты с четными номерами, освободив комнаты с нечетными номерами (которых имеется бесконечное количество) для вновь прибывших гостей.



ГЛАВА 2

МАТЕМАТИКА КАНТОРА

Галилео Галилей (1564–1642), находясь под домашним арестом в Италии* за еретические убеждения о том, что Земля вращается вокруг Солнца, придумал красивую головоломку, известную как *парадокс Галилея*.

Суть парадокса состоит в следующем. Хотя некоторые натуральные числа представляют собой идеальный квадрат (см. стр. 18), большинство из них таковым не является, соответственно, неквадратных чисел значительно больше, чем квадратных. Однако

* Последние годы жизни (с 1634 по 1642) Галилей провел в поселении Арчетри, неподалеку от Флоренции, находясь при этом под домашним арестом и постоянным контролем инквизиции. — *Прим. ред.*

каждое натуральное число можно умножить само на себя, чтобы получить идеальный квадрат, поэтому количество квадратов обязано соответствовать количеству натуральных чисел. Отсюда парадокс: два логических утверждения, противоречащих друг другу.

Теория чисел, как я уже упоминал ранее, исследует природу бесконечности и ее причудливую арифметику. Теория множеств, которую мы затрагивали выше, когда рассматривали бесконечный математический «зоопарк», была изобретена немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918). Он заметил, что существуют различные типы бесконечности, и ввел понятие *мощность*, обозначающее количество элементов различных множеств. Если, например, мы определим множество А как совокупность планет Солнечной системы, то мощность множества А будет равна восьми (почему Плутон больше не считается планетой Солнечной системы, рассказано на стр. 200).

Кантор исследовал также бесконечные множества. Хотя множество натуральных чисел бесконечно, по мнению Кантора, это все же *счетное* бесконечное множество, поскольку, когда мы начинаем счет от единицы, мы движемся к бесконечности и имеем определенный прогресс. До бесконечности мы, разумеется, не доберемся, но можем приблизиться к ней. Кантор определил мощность множества натуральных чисел как «алеф-ноль», или $\aleph_0$ (алеф — первая буква еврейского алфавита).

Любое другое бесконечное множество чисел, где вы можете добиться прогресса, имеет аналогичную мощность. Так, если я добавлю к натуральным числам все отрицательные числа, я по-прежнему смогу добиться прогресса при подсчете. Соответственно, множество целых чисел также имеет мощность $\aleph_0$.

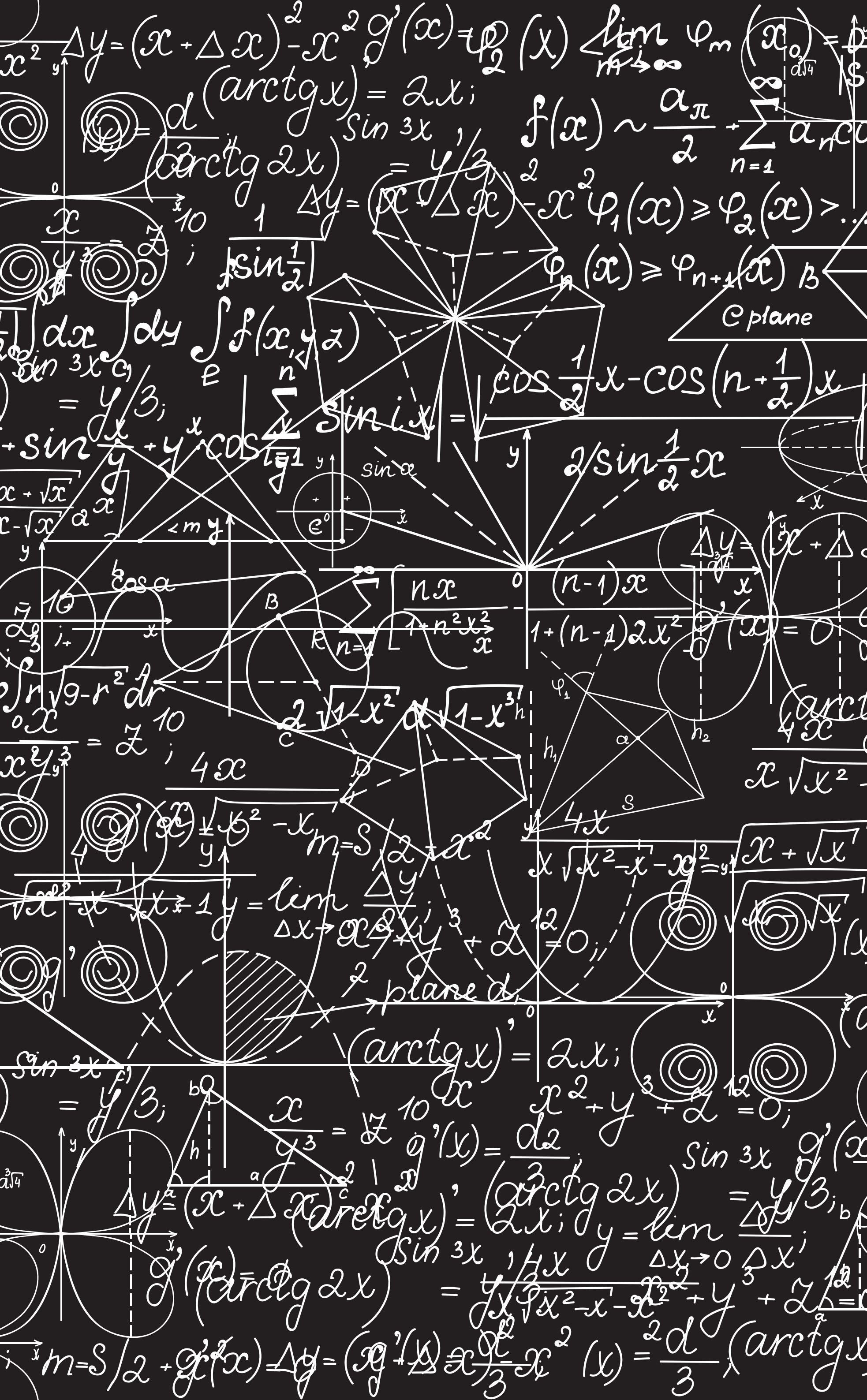
Если бы мой ряд включал все рациональные числа от нуля до единицы, я мог бы, начав с нуля, попытаться перебрать все дроби до единицы. Если мы посмотрим, что представляют собой все возможные знаменатели, то увидим, что мы снова имеем дело с натуральными числами. Числители также представляют собой различные подмножества натуральных чисел, поэтому даже множество рациональных чисел от нуля до единицы имеет мощность $\aleph_0$. Продолжив эти рассуждения, можно доказать, что множество всех рациональных чисел также имеет мощность $\aleph_0$.

Возвращаясь к парадоксу Галилея, мы видим, что и множество натуральных чисел, и множество идеальных квадратов имеют мощность $\aleph_0$, следовательно, оба эти множества действительно обладают одинаковым размером. Спасибо, Кантор, больше нет никаких парадоксов!

В принципе, множества с мощностью $\aleph_0$ могут быть систематически перечислены, даже если этот список будет продолжаться до бесконечности. Но Кантору, когда он подверг рассмотрению иррациональные числа, удалось выявить и те множества, которые не поддаются систематическому перечислению. Его *диагональный аргумент* показал, что если записать все иррациональные числа в виде десятичных дробей, то всегда можно составить новое иррациональное число из уже записанных. После добавления в множество этого нового иррационального числа вы можете снова составить новое иррациональное число на основе нового множества. Этот цикл показывает, что вы никогда не сможете систематически перечислить все иррациональные числа, поскольку всегда будут находиться числа, упущенные вами из виду. Кантор назвал такие множества *бессчетными* бесконечными множествами и определил их мощность как $\aleph_1$.

Кантор и его последователи потратили немало сил на то, чтобы установить соотношение между $\aleph_0$ и $\aleph_1$. Кантор выдвинул *гипотезу континуума*, согласно которой не существует множеств с мощностью, находящейся в промежутке между $\aleph_0$ и $\aleph_1$ — нет ничего между счетными и несчетными множествами. С тех пор было показано, что гипотезу континуума невозможно ни доказать, ни опровергнуть, оставаясь в рамках теории множеств.

Единственное, что можно смело утверждать, так это то, что Кантор обратил внимание на понятие бесконечности, которое до него всерьез рассматривали лишь философы и теологи, и дал начало новому взгляду на сами основы математической науки. Однако разногласия и споры, вызванные его идеями, привели Кантора к депрессии, которая не давала ему покоя до конца его дней. Мы можем лишь надеяться, что включение гипотезы континуума в список проблем Гильберта (см. стр. 20) дало Кантору хоть некоторое представление о величине его вклада. Надо признать, что сама мысль о том, что даже у бесконечностей есть различия, может привести в благоговейный трепет.



C plane
plane d

ГЛАВА 3

АРИФМЕТИКА

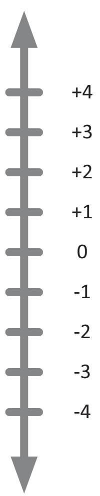
В данной книге подразумевается, что вы умеете считать, поскольку я не встречал ни одного взрослого человека, который бы этого не умел. Это элементарная база, с которой мы начинаем изучение математики, часто еще до того, как пойти в школу. Иногда дети начинают механически повторять числа от одного до десяти, еще не понимая, что представляют собой числа.

Математику можно определить как получение определенных результатов на основе понимания и применения определенных принципов. То есть она включает в себя понимание и процессы. К сожалению, во время обучения детям не дают до конца осознать, зачем нужна математика и как она работает, и они остаются наедине с сухими фактами. Однако, как и любая другая наука, математика не выносит пренебрежения. А с приходом пренебрежения пропадает понимание. За что я люблю математику, так это за то, что я — самый обычный человек, проживающий на небольшом острове в Северном полушарии — стою на вершине пирамиды знания, уходящего корнями в тысячелетия человеческих исследований и культур. Я знаю, что существует огромное количество людей, чьи пирамиды в разы выше моей, и я решил посвятить свою жизнь тому, чтобы помогать другим людям возводить свои собственные. И я по собственному опыту могу сказать, что успех не зависит от запоминания как можно большего количества процессов, фактов и алгоритмов. Без закладки фундамента ваша пирамида долго не простоит.

Прежде чем мы перейдем к рассмотрению письменных методов арифметики, я бы хотел обратить внимание на двойственный характер символов + и −. На Западе их начали употреблять в Германии в конце XV века. Иоганн Видман (ок. 1460–1498) в 1489 году написал труд под названием «Быстрый и приятный счет для всех торговцев», в котором зафиксирован первый случай печатного употребления этих знаков.

Уже с самого начала эти символы несли двойной смысл: они могли обозначать и *операцию* сложения или вычитания, и *знак* положительного или отрицательного числа. То есть это одновременно и инструкция, и описание, и глагол, и существительное. «+3» может означать и «прибавить число три», и «положительное число три». Как же при этом понять, что именно имеется в виду?

Преподаватели математики часто используют понятие числовой оси — воображаемой прямой, которая облегчает выполнение вычислений в уме и дает лучшее представление о том, что такое «больше» и «меньше» применительно к числам. Я часто спрашиваю своих учеников, как выглядит их числовая ось — расположена ли она горизонтально или вертикально, и в каком направлении отсчитываются числа. Я уверен, что в этой области можно провести очень интересные исследования. Наша числовая ось будет вертикальной, как в термометре.



Данный пример демонстрирует применение знаков + и – в их описательной форме, для обозначения положительных и отрицательных чисел. Обычно мы опускаем описательные плюсы положительных чисел, но в данном случае я оставил их, чтобы выделить положительную часть числовой оси. Ноль, как мы видим, находится точно посередине оси, и не является ни положительным, ни отрицательным.

Теперь представьте, что вы управляете математическим воздушным шаром. Управлять набором или сбросом высоты можно двумя способами — либо изменяя количество подаваемого тепла, либо изменяя количество балласта. Подаваемое тепло мы будем считать положительной величиной, поскольку оно заставляет шар набирать высоту. Регулировать количество тепла можно также двумя способами — либо подавая дополнительное количество тепла с помощью горелки, либо уменьшая количество тепла с помощью выпускного клапана в верхней части шара. Балласт мы будем считать отрицательной величиной, поскольку он тянет шар вниз. Для изменения количества балласта вы можете либо сбросить часть балласта за борт, либо доставить в корзину дополнительный балласт с помощью дрона. Результаты этих четырех действий можно представить в виде следующей таблицы:

Действие	**Эффект**		**Направление движения шара**
Включение горелки	Добавление +	тепла +	↑
Открытие выпускного клапана	Вычитание –	тепла +	↓
Добавление балласта	Добавление +	балласта –	↓
Сброс балласта	Вычитание –	балласта –	↑

ИНДО-АРАБСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Используемая нами система записи чисел, или «система счисления», называется *индо-арабской*, поскольку она сочетает в себе несколько прорывных открытий обеих этих культур. Индийский астроном Арьябхата (475–550) одним из первых примерно с 500 года н. э. начал применять позиционную систему счисления, в которой вес каждого следующего разряда в 10 раз превышал вес предыдущего разряда*. Другой индийский астроном, Брахмагупта (598–670), усовершенствовал эту систему, используя девять символов для представления чисел и точку для представления пустого разряда, которая со временем превратилась в символ нуля.

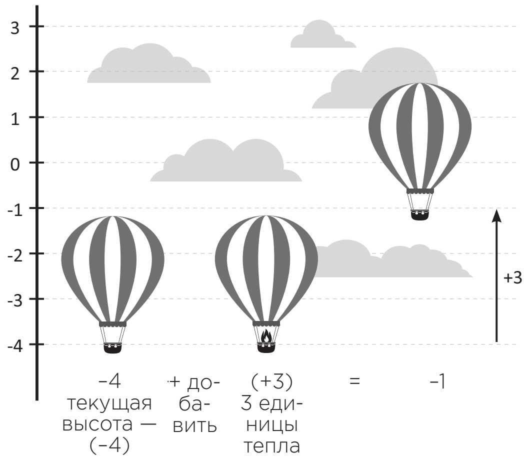
Благодаря тому, что новая система позволяла очень эффективно производить вычисления, она стала очень популярной и распространилась по всему миру. В IX веке об этой системе стало известно арабскому математику Мухаммаду аль-Хорезми (ок. 780–850), благодаря которому нам сегодня известно понятие «алгоритм», и он написал о ней трактат. Последующий перевод этой работы на латынь открыл данную систему западному миру.

К сожалению, изначально эта система не получила большой популярности в Европе. Леонардо Пизанский (ок. 1175–1240), он же Фибоначчи, ознакомившийся с трудами арабских ученых, использовал ее в своей книге Liber abaci («Книга абака»), написанной в 1202 году. Эта книга призывала торговцев и математиков отказаться от использования счетов, обратившись к невероятному потенциалу индо-арабской системы счисления. В то же время она была написана на латинском языке, что сильно ограничивало круг ее читателей. В 1522 году Адам Ризе (1492–1559) написал пособие по использованию этой системы счисления на родном немецком языке, которое, наконец, сделало ее доступной для любого человека, умевшего читать и писать, но не имевшего классического образования.

---

* В позиционной системе счисления *разрядом* называется место цифры в числе, *весом разряда* — множитель, на который умножается значение разряда. Так, например, в десятичной системе счисления в числе 345 — три разряда. Значение первого разряда — 5, вес — 1; значение второго разряда — 4, вес — 10; значение третьего разряда — 3, вес — 100. То есть: 345 = 3×100 + 4×10 + 5×1 = 300 + 40 + 5. — *Прим. ред.*

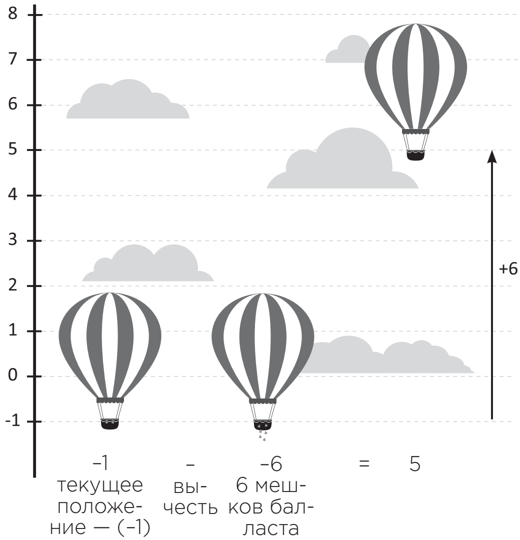
Последнюю операцию в этой таблице люди часто принимают как данность (или учат наизусть) без должного понимания ее подоплеки — надеюсь, моя аналогия с шаром поможет понять ее лучше! Теперь мы видим, посредством каких действий, или, как говорят математики, «операций» обеспечивается перемещение шара вверх и вниз. Чтобы вычислить высоту, то есть положение на числовой оси, мы должны произвести вычисление, объединяющее текущее положение на числовой оси с операцией. Первое число в этом вычислении будет обозначать текущую высоту, а его остальная часть — производимое действие. Например, вычисление –4 + 3 будет обозначать следующее:



Теперь видно, что шар переместится по числовой оси на три позиции вверх, с –4 до –1*. Таким об-

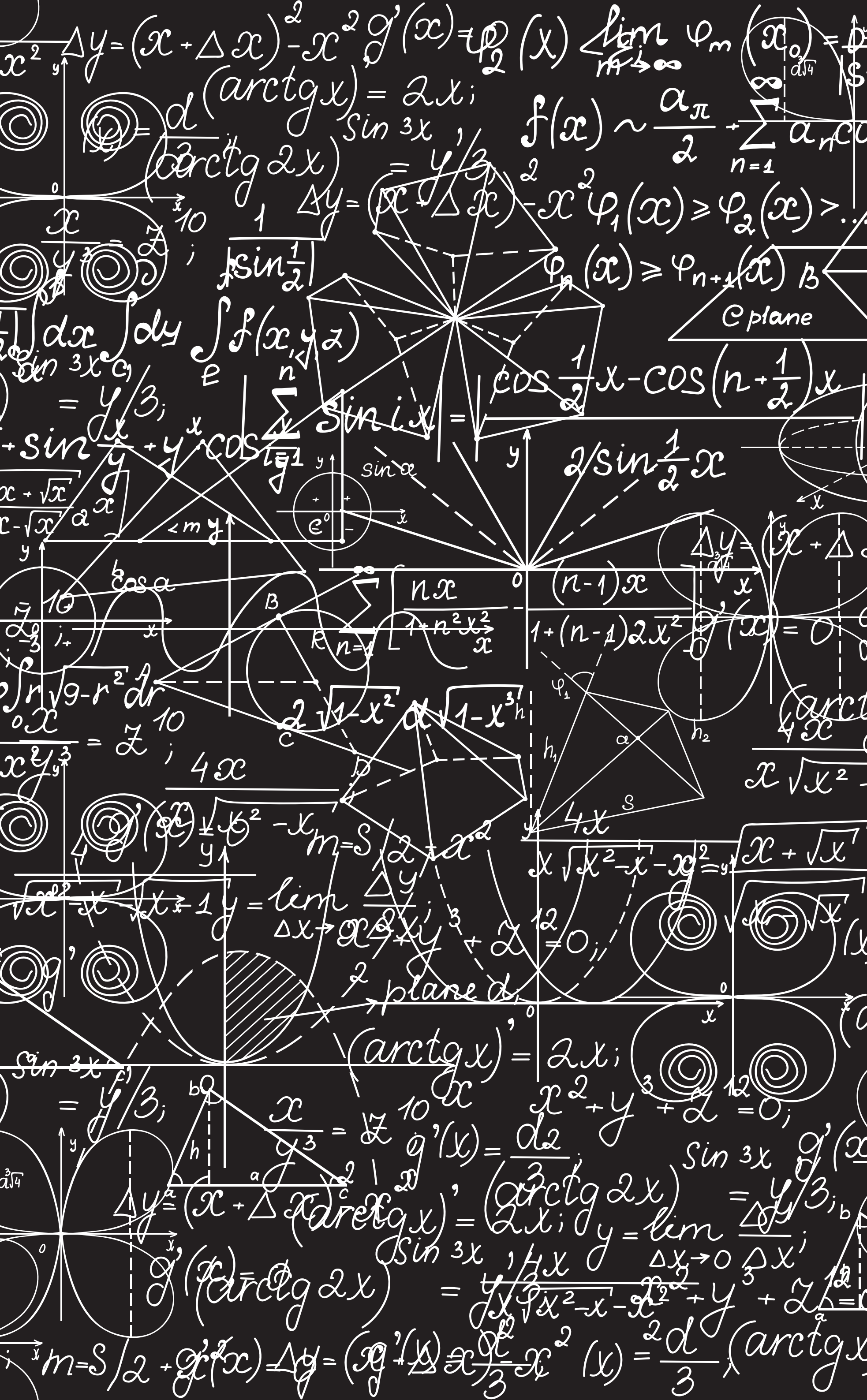
* Я, разумеется, знаю, что настоящий шар в любом случае продолжит подниматься, поэтому в начале уточнил, что шар математический, а не физический.

разом: –4 + 3 = (–1). Теперь давайте возьмем пример посложнее, с большим количеством минусов: –1 – (–6). Это можно расшифровать так:



Сбросив с шара шесть единиц балласта, мы заставим его переместиться на шесть позиций вверх. Таким образом, –1 – (–6) = 5.

Теперь, уже зная, как обеспечивается перемещение шара вверх и вниз, давайте перейдем к рассмотрению более сложной арифметики.


C plane
plane d
(arctg x)' = 2x;
sin 3x

ГЛАВА 4

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ

Когда дело доходит до сложения крупных чисел на бумаге, все сводится к порядку их расположения, отражающему *вес разряда*. Мы знаем, что число, представленное цифрами 1234 равно тысяче двумстам тридцати четырем. Каждая позиция имеет соответствующий вес. Справа налево — единицы, десятки, сотни, тысячи, десятки тысяч и т. д. Значение числа увеличивается в 10 раз при переходе на следующую позицию влево. Таким образом, число 1234 — представляет собой четыре единицы (4), три десятка (30), две сотни (200) и одну тысячу (1000). Я могу записать 1234 так:

$$1234 = 4 + 30 + 200 + 1000$$

Математики называют это *развернутой формой* числа и такой способ действительно полезен для понимания процесса сложения. Представьте себе сумму 1234 + 5678. Я могу записать каждое число в развернутом виде:

$$1234 = 4 + 30 + 200 + 1000$$
$$5678 = 8 + 70 + 600 + 5000$$

Затем можно легко сложить каждую позицию:

1234 + 5678 : 4 + 8 = 12 (единицы)
30 + 70 = 100 (десятки)
200 + 600 = 800 (сотни)
1000 + 5000 = 6000 (тысячи)

Отсюда мы имеем 1234 + 5678 = 12 + 100 + 800 + 6000 = 6912.

Тот способ, которому нас учили в школе, является лишь сокращенной версией этого процесса. Мы устанавливаем сумму в каждом столбце и переносим «избыток» справа налево:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Первое вычисление: 4 + 8 = 12. Мы не можем вписать 12 в одноразрядную позицию ответа, но 12 = 10 + 2, поэтому мы оставляем в этой позиции 2 и переносим 10 в следующую позицию.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & & 2 \end{array}$$

Хотя фактически следующий столбец будет содержать вычисление 10 + 30 + 70 = 110, поскольку мы сейчас работаем с десятками, мы можем просто посчитать количество десятков: 1 + 3 + 7 = 11 десятков. У нас снова слишком много цифр. 11 = 10 + 1, поэтому мы пишем 1 в позицию десятков и переносим 1 в позицию сотен:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & & 1 & 2 \end{array}$$

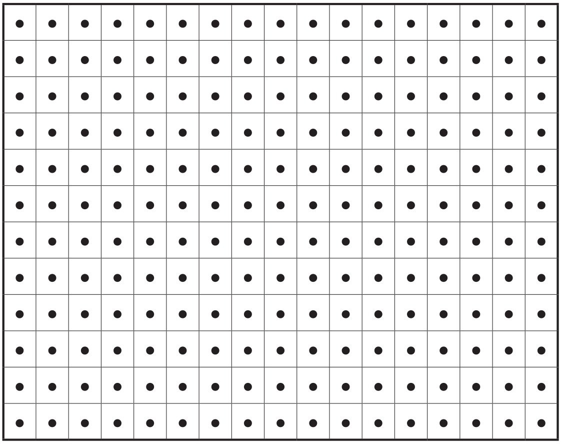
100 + 200 + 600 = 900:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

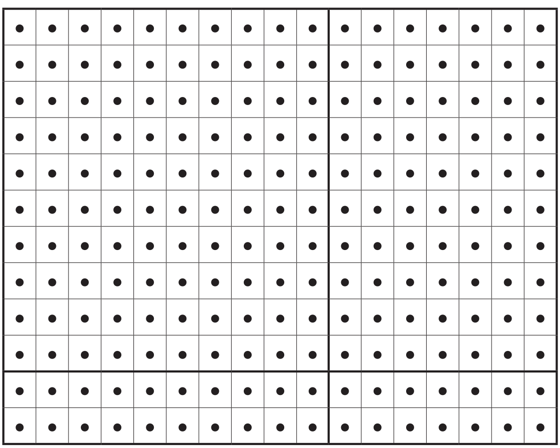
И, наконец, 1000 + 5000 = 6000:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline & 6 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Умножение — это, по сути, ускоренный способ многократного сложения. В случае произведения 12 × 17 мы отвечаем на вопрос: «Сколько будет, если взять 12 раз по 17?» Я мог бы найти ответ, сложив двенадцать раз семнадцать или семнадцать раз двенадцать, но умножение позволяет сделать это гораздо быстрее, если вы знаете таблицу умножения. Представьте, что у меня есть много точек. Я мог бы решить эту проблему, выстроив 12 рядов из 17 точек, а затем пересчитав их:



Однако, если представить 12 как 10 + 2 и 17 как 10 + 7, то я могу сгруппировать точки:



Поскольку я знаю таблицу умножения, мне заранее известно, сколько точек должно быть в каждой выделенной группе точек:

	10	7
10	10 × 10 = 100	10 × 7 = 70
2	2 × 10 = 20	2 × 7 = 14

Теперь я знаю, что 12 × 17 = 100 + 70 + 20 + 14 = 204. Проделанные нами действия (за исключением изображения 204 точек) называются «сеточным» методом умножения. Ниже показан чуть более сложный пример использования этого метода, для произведения 293 × 157:

	200		90		3	
100	100 × 200 =	20000	100 × 90 =	9000	100 × 3 =	300
50	50 × 200 =	10000	50 × 90 =	4500	50 × 3 =	150
7	7 × 200 =	1400	7 × 90 =	630	7 × 3 =	21
		31400		14130		471

Вы можете задать логичный вопрос, как я произвел все умножения в уме, когда их значения намного больше, чем те, что представлены в таблицах умножения. Для этого случая есть очень полезный лайфхак. Каждый раз, когда я умножаю целое число на десять, я добавляю ноль в конце числа. Например, в случае 100 × 200 я знаю, что 100 представляет собой 1 × 10 × 10, а 200 — это 2 × 10 × 10. Выглядеть все должно примерно так:

$$\begin{aligned} 100 \times 200 &= 1 \times 10 \times 10 \times \underline{2} \times 10 \times 10 \\ &= \underline{1 \times 2} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= \underline{2} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \end{aligned}$$

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Не нужно забывать, что способ перехода с одной позиции на другую работает и в обратном направлении. Если двигаться вправо от позиции единиц, то позиция числа будет каждый раз уменьшаться на десять, позволяя мне оперировать десятыми, сотыми и тысячными долями числа. Поставив десятичную запятую, я тем самым укажу, что самый правый разряд уже не является разрядом единиц. При этом я могу использовать описанные выше правила и для сложения таких десятичных чисел, как например, в случае суммы 45,3+ 27,15:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & & & & \\ & 4 & 5 & \bullet & 3 & 0 \\ + & 2 & 7 & \bullet & 1 & 5 \\ \hline & 7 & 2 & \bullet & 4 & 5 \end{array}$$

Обратите внимание, что я поставил ноль в конце 45,3, чтобы позиции совпадали, делая вычисление более понятным (это особенно важно при вычитании). Я могу это сделать, поскольку 45,3 — то же самое, что и 45,30: три десятых вместе с нулем сотых по-прежнему равны трем десятым. По этой причине математики произносят 45,30 как сорок пять целых три десятых, а не сорок пять целых тридцать сотых.

Помня, что каждое умножение на 10 предполагает дополнительный ноль в конце числа, мы получаем: 100 × 200 = 20 000. Это не нужно учитывать при подсчете сеточным способом. Я просто умножаю первые цифры, а затем добавляю справа необходимое количество нулей. Так, например, в случае произведения 50 × 200 процесс подсчета выглядел так: 5 × 2 = 10, и к этому нужно приписать три нуля. То есть 50 × 200 = 10 000. Готово!

Вернемся к сетке — вы можете видеть, что я суммировал результаты каждого столбца. Чтобы получить окончательный ответ, нужно произвести дополнительное сложение: 31 400 + 14 130 + 471:

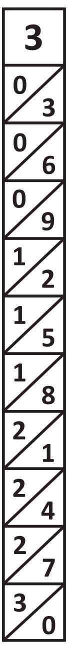
		1	1		
	3	1	4	0	0
	1	4	1	3	0
+			4	7	1
	4	6	0	0	1

Окончательный ответ: 293 × 157 = 46 001.

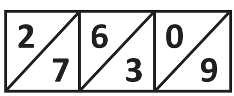
Есть и другие методы, в том числе длинное умножение, но если у вас уже есть некоторый рабочий метод, я советую придерживаться его. А теперь перейдем к обратным процессам сложения и умножения — вычитанию и делению.

НЕПЕРОВЫ ПАЛОЧКИ

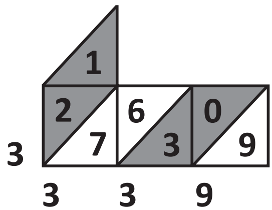
Джон Непер (1550–1617) — шотландский математик, астроном и алхимик, который изобрел счетный набор для умножения, известный как *палочки Непера*. Каждая палочка этого набора содержит таблицу умножения на отдельное число, например, палочка с таблицей умножения на число 3 выглядит следующим образом:



Если, например, вам нужно найти произведение 9 × 371, то для этого следует положить рядом палочки с таблицами умножения на числа 3, 7 и 1, и прочитать содержимое девятого ряда, который будет выглядеть следующим образом:

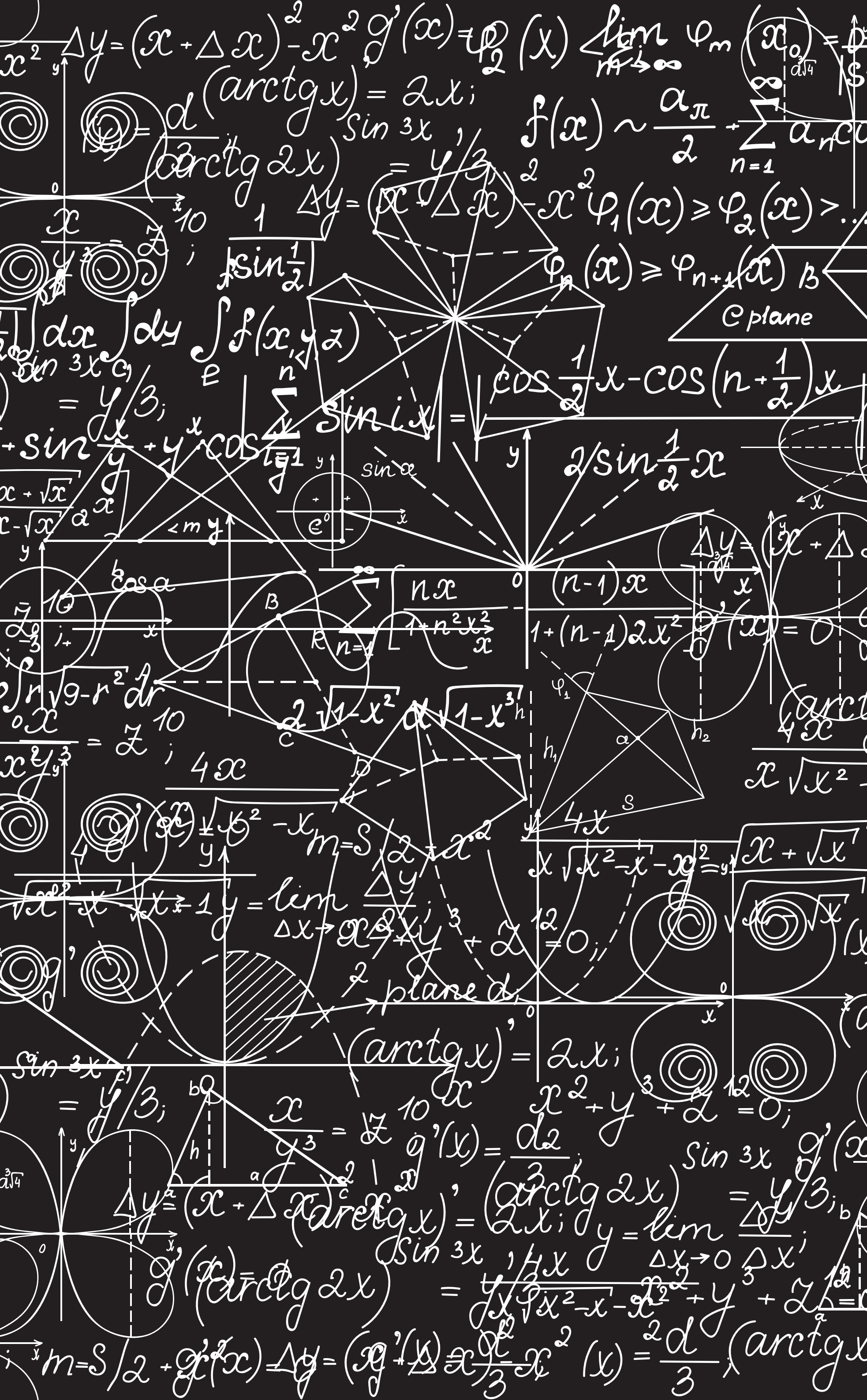


Затем нужно сложить числа по диагонали, начиная справа. Если получившееся число больше девяти, его следует перенести в следующую позицию:



Следовательно, $9 \times 371 = 3339$.

Ходили слухи, что Непер баловался колдовством, имея в своем распоряжении черного петуха. Он периодически приказывал одному из своих слуг зайти в комнату и погладить петуха, говоря, что петух проверит их на честность. На самом деле Непер просто мазал перья птицы золой. Если слуга был «нечист на руку», то он не гладил петуха, и его руки оставались чистыми. Хитроумный хозяин при этом сразу видел, что слуга лукавит.


C plane
plane d

ГЛАВА 5

ВЫЧИТАНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Вычитание производится почти так же, как сложение. Например, в случае разности 6543 – 5678 имеем:

$$
\begin{aligned}
6543 - 5678: \quad & 3 - 8 = -5 \\
& 40 - 70 = -30 \\
& 500 - 600 = -100 \\
& 6000 - 5000 = 1000
\end{aligned}
$$

То есть в итоге мы имеем $-5 + (-30) + (-100) + 1000 = -135 + 1000 = 865$. Также можно снова воспользоваться столбчатым методом вычислений, но если при сложении нам приходилось выполнять перенос, когда мы получали слишком большое значение в одном столбце, то тут ситуация обратная. Если продолжить пример, начатый выше, то мы получим:

	6	5	4	3
–	5	6	7	8
	1	–1	–3	–5

Этот результат не имеет большого смысла. Чтобы найти правильный ответ, я должен выполнять *заем* из старших разрядов, хотя, как верно заметил один из моих студентов, поскольку занятое число никогда не возвращается назад, более уместным названием этого процесса было бы *«похищение».*

Заметив, что 3 – 8 дает в результате отрицательное число, я занимаю из следующего столбца и увеличиваю значение тройки. Перечеркнув четверку, я уменьшаю ее на единицу. Эта занятая единица на самом деле равна десяти, так что теперь тройка превратится в тринадцать. 13 – 8 = 5:

			3	
	6	5	~~4~~	13
–	5	6	7	8
				5

Следующее действие тоже дает отрицательный результат, 3 – 7 = –4. И снова я занимаю единицу из соседнего столбца. Эта сотня представляет собой десять десятков, которые превратят исходную тройку в 13 десятков. Таким образом, можно продолжить:

		4	13	
	6	~~5~~	~~4~~	13
–	5	6	7	8
			6	5

Занимаем снова, чтобы увеличить значение столбца для сотен.

При этом мы сразу видим, что в позиции для тысяч мы получим ноль:

	5	$^{1}4$	$^{1}3$	
	~~6~~	~~5~~	~~4~~	$^{1}3$
–	5	6	7	8
	0	8	6	5

Итак, мы видим, что 6543 – 5678 = 865.

В предыдущем разделе мы выяснили, что сложение и умножение тесно связаны друг с другом. То же самое можно сказать и в отношении вычитания и деления.

Так, например, в случае деления 3780 ÷ 15, мы отвечаем на вопрос: «Сколько раз нужно взять по 15, чтобы получить 3780?», или, говоря иначе: «Сколько раз можно вычесть 15 из 3780?»

На самом деле, эта идея лежит в основе метода деления, называемого делением путем *разбиения*. Этот метод состоит в том, чтобы последовательно вычитать величины, кратные делителю, пока не будет получен ноль.

Во-первых, я знаю, что 2 × 15 = 30, поэтому 200 × 15 должно быть 3000. Я начну с вычитания этого числа из 3780:

	3	7	8	0	
–	3	0	0	0	200
		7	8	0	

Остается 780. Здесь я вижу, что $4 \times 15 = 60$, поэтому $40 \times 15 = 600$. Вычтем это число в качестве следующего действия:

	3	7	8	0	
-	3	0	0	0	200
		7	8	0	
-		6	0	0	40
		1	8	0	

Наконец, я в два этапа отниму еще дюжину чисел 15:

	3	7	8	0	
-	3	0	0	0	200
		7	8	0	
-		6	0	0	40
		1	8	0	
-		1	5	0	10
			3	0	
-			3	0	2
				0	

Теперь я вижу, что отнял $200 + 40 + 10 + 2 = 252$ раза по 15, поэтому $3780 \div 15 = 252$. Вы можете видеть, что чем лучше ваши способности к умножению, тем меньше шагов вам придется предпринять.

Метод *длинного деления* работает по похожему принципу. При этом нужно записать задачу в особой форме, которую я называю «автобусной остановкой»:

15	3	7	8	0

Я пойду слева направо. Поскольку 15 включает в себя две цифры, я смотрю на цифры 3 и 7 — сколько раз нужно взять 15, чтобы получить 37? Дважды, что дает в результате 30, и я вычисляю остаток путем вычитания:

		2		
15	3	7	8	0
-	3	0		
		7		

Теперь обратим внимание на цифру 7, которую мы только что получили, и цифру 8, которую я к ней припишу. Сколько чисел 15 может войти в число 78? Ну, пять раз по 15 — это 75 . . .

		2	5	
15	3	7	8	0
-	3	0	↓	
		7	8	
	-	7	5	
			3	

Наконец, я переношу к тройке ноль и смотрю, сколько чисел 15 содержится в числе 30:

		2	5	
15	3	7	8	0
-	3	0	↓	
		7	8	
	-	7	5	↓
			3	0
		-	3	0
				0

Краткое деление — то же самое, что и длинное деление, с тем отличием, что мы считаем полученные остатки в уме и записываем их в качестве переноса. Такое деление удобно для преобразования обычных дробей в десятичные дроби. Если я хочу знать, как дробь $\frac{5}{8}$ выглядит в десятичной форме, я могу разделить 5 на 8:

$$\begin{array}{r|l} \hline 8 & 5 \end{array}$$

8 входит в 5 ноль раз с остатком 5. Мне некуда записать этот остаток, пока я не впишу запятую и еще один ноль. Я могу это сделать, поскольку 5 = 5,0, и, кроме того, я записываю соответствующую десятичную запятую выше:

$$\begin{array}{r|ll} & 0, & \\ \hline 8 & 5, & {}^{5}0 \end{array}$$

8 входит в 50 шесть раз с остатком 2 (можно продолжать добавлять нули после десятичной запятой по мере необходимости):

$$\begin{array}{r|lll} & 0, & 6 & \\ \hline 8 & 5, & {}^{5}0 & {}^{2}0 \end{array}$$

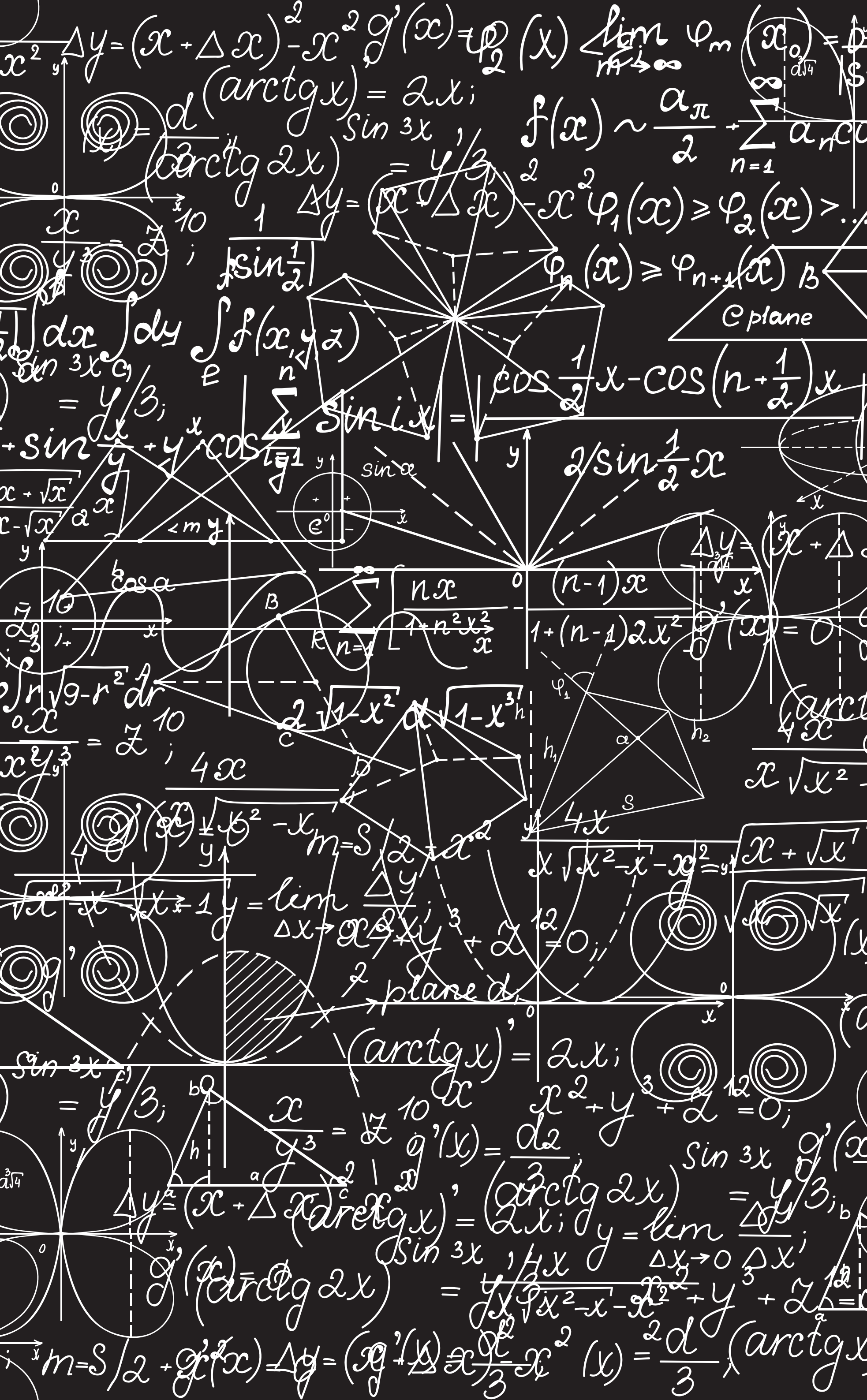
Восемь входит в 20 два раза с остатком 4:

$$\begin{array}{r|llll} & 0, & 6 & 2 & \\ \hline 8 & 5, & {}^{5}0 & {}^{2}0 & {}^{4}0 \end{array}$$

Восемь входит в 40 ровно пять раз:

	0,	6	2	5
8	5,	$^{5}0$	$^{2}0$	$^{4}0$

Таким образом, мы видим, что $\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0{,}625$. Этот метод можно использовать для любой обычной дроби, хотя в особо сложных случаях лучше использовать длинное деление. В следующем разделе мы рассмотрим несколько примеров дробей, деление которых не проходит настолько гладко.


C plane
plane d
sin 3x
(arctg x)' = 2x;
2 sin ½ x

ГЛАВА 6

ДРОБИ И ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Мы только что узнали, как можно получить из обычной дроби десятичную. Давайте взглянем на дробь $\frac{1}{3}$ — тут происходит кое-что интересное:

$$\begin{array}{r|lllll} & 0, & 3 & 3 & 3 & \dots \\ \hline 3 & 1, & {}^{1}0 & {}^{1}0 & {}^{1}0 & \dots \end{array}$$

Мы быстро можем заметить, что в данном случае образуется цикл — три входит в 10 три раза, с остатком 1 — и этот цикл может повторяться бесконечно. Такие десятичные дроби называются *периодическими*, и могут обозначаться с помощью точки над повторяющейся цифрой:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$$

В случае дробей со знаменателем 7 мы получим еще более интересный результат:

$$\begin{array}{r|l} & 0,\ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 8\ \ 5\ \ 7\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 8\ \ 5\ \ 7\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 8\ \ 5\ \ 7\ \ \ldots \\ \cline{2-2} 7 & 1,\ {}^{1}0\ {}^{3}0\ {}^{2}0\ {}^{6}0\ {}^{4}0\ {}^{5}0\ {}^{1}0\ {}^{3}0\ {}^{2}0\ {}^{6}0\ {}^{4}0\ {}^{5}0\ {}^{1}0\ {}^{3}0\ {}^{2}0\ {}^{6}0\ {}^{4}0\ {}^{5}0\ \ldots \end{array}$$

Здесь мы имеем повторяющуюся последовательность чисел. Это повторение можно обозначить с помощью двух точек в начале и конце последовательности*.

$$\frac{1}{7} = 0,\dot{1}4285\dot{7}$$

Что интересно, во всех дробях со знаменателем 7 присутствует одна и та же последовательность, с отличием лишь в том, какие цифры служат началом и концом.

$$\frac{2}{7} = 0,\dot{2}8571\dot{4}$$
$$\frac{3}{7} = 0,\dot{4}2857\dot{1}$$
$$\frac{4}{7} = 0,\dot{5}7142\dot{8}$$
$$\frac{5}{7} = 0,\dot{7}1428\dot{5}$$
$$\frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2}$$

Если вам хочется взглянуть на что-то посложнее, попробуйте рассчитать десятичную форму для дробей со знаменателем 19!

---

* В российской математической литературе десятичные периодические дроби принято обозначать с помощью круглых скобок. Например: 0,(3); 0,(142857) и т. д. — *Прим. ред.*

Взглянув на знаменатель дроби, я могу сразу же определить, будет ли соответствующая десятичная дробь периодической, или нет. Для этого нужно посмотреть, можно ли умножить знаменатель на какое-либо число так, чтобы в результате получилась степень десяти (10, 100, 1000 и т. д.). Если да, то мы можем свободно представить рассматриваемую дробь в виде конечного количества десятичных разрядов.

Однако, прежде чем мы это сделаем, стоит разобраться с очень важной математической концепцией *эквивалентности дробей*, суть которой состоит в том, что различные дроби могут обладать одинаковым значением. В качестве простейшей иллюстрации можно использовать пиццу. Разрезав пиццу пополам, мы можем затем разрезать обе половины на произвольное количество кусков, которые вместе будут по-прежнему составлять половину пиццы. По той же логике нас учили в школе тому, что половина — это две четверти, три шестых и т. д.:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Вероятно, учитель говорил вам, что, делая что-либо с числителем, нужно делать то же самое и со знаменателем. О чем он при этом умалчивал, так это о том, что тем самым вы обеспечиваете эквивалентность дробей.

Таким образом, у меня появился еще один способ приведения дробей к десятичному виду. Например, дробь $\frac{51}{250}$ будет не так просто преобразовать путем деления. Однако, умножив числитель и знаменатель на четыре, получим:

$$\frac{51}{250} = \frac{51 \times 4}{250 \times 4} = \frac{204}{1000} = 0{,}204$$

Дело сделано! Теперь стоит подумать о том, каким образом мы можем определить, можно ли умножить знаменатель так, чтобы в результате получилась степень десяти?

Для этого следует разобраться с концепцией *простых* чисел, которая на протяжении многих лет не перестает восхищать математиков. Краткое определение простого числа звучит так: это число, имеющее ровно два делителя. Например, число 8 делится на 1, 2, 4 и 8 — то есть имеет четыре делителя, и, соответственно, не является простым. Число 5 делится только на 1 и 5; значит, оно простое. Число 1 делится только на 1, и, значит, не является простым. Так что выбросьте из головы эту ерунду про «число, которое делится только на единицу и на само себя». Таким образом, последовательность простых чисел начинается с чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Одним из факторов, подогревающих неослабевающий интерес к простым числам, является *основная теорема арифметики*, которая гласит: «Любое целое число, большее единицы, может быть разделено на простые множители, причем это разложение будет единственным».

Вот пример:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Не существует никакой другой комбинации простых чисел, произведение которых было бы равно тридцати.

Два, три и пять — *простые множители* (или *простые делители*) этого числа.

Лично у меня простые числа ассоциируются с ДНК — каждое из них уникально, без возможных близнецов и клонов.

Даже в случае такого большого числа, как 223 092 870, существует лишь один способ представить его в виде произведения простых чисел (а именно, в виде произведения $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23$).

Как это поможет мне с дробями? Что ж, как говорилось выше, чтобы получаемая десятичная дробь была конечной, у меня должна быть возможность преобразовать знаменатель дроби в степень десяти. Число 10 можно разложить на следующие простые множители:

$$10 = 2 \times 5$$

Чтобы получить простые множители числа 100, следует обратить внимание на то, что это число 10, умноженное само на себя:

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \times 10 \\ &= \underline{2 \times 5} \times \underline{2 \times 5} \end{aligned}$$

Таким образом, простыми множителями числа 10 являются числа 2 и 5, и они же являются простыми множителями числа 100 (в этом случае их просто больше). То есть мы видим, что единственными простыми множителями любой степени десяти будут числа 2 и 5.

Поэтому, если простые множители знаменателя представляют собой комбинацию двоек и пятерок, то его можно умножить на некоторое число, получив в результате степень десяти.

В приведенном выше примере знаменатель дроби равен 250; соответственно, имеем:

$$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

Как видим, только двойки и пятерки. Умножив это число на число 4, которое можно представить как 2 × 2, я получил 1000. Если знаменатель будет равен 240, получим:

$$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Здесь у нас присутствует тройка, поэтому любая дробь, которая в своей простейшей форме имеет знаменатель 240, будет периодической. Например:

$$\frac{73}{240} = 0{,}3041\dot{6}$$

С другой стороны:

$$\frac{120}{240} = \frac{120 \div 120}{240 \div 120} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

После приведения данной дроби к простейшей форме ее знаменатель уже не включает в себя что-либо иное кроме двух или пяти, и потому ее можно представить в виде конечной десятичной дроби.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

В рамках знакомства с дробями будет уместно вспомнить и соответствующую арифметику. Чтобы найти сумму или разность дробей, их нужно привести к одному знаменателю. Самый эффективный способ это сделать состоит в том, чтобы найти наименьшее число, которое делится на оба знаменателя без остатка — *наименьшее общее кратное*. Например, чтобы сложить пять восьмых и семь двенадцатых, необходимо определить наименьшее число, делителями которого являются восемь и двенадцать. При этом можно быстро заметить, что в таблице умножения для обоих этих чисел присутствует число двадцать четыре:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$$
$$=\frac{5\times3}{8\times3}+\frac{7\times2}{12\times2}$$
$$=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}$$
$$=\frac{29}{24}$$

Это *неправильная* дробь, так как ее числитель больше знаменателя. В математике, преподаваемой в средней школе, использование таких дробей почему-то не допускается. Возможно, это связано с тем, что смешанные дроби выглядят гораздо понятнее, однако надо сказать, неправильные дроби проще использовать в расчетах. Чтобы преобразовать неправильную дробь в смешанную, следует учесть, что $\frac{24}{24}=1$.

Таким образом:

$$\frac{29}{24} = \frac{24}{24} + \frac{5}{24} = 1\frac{5}{24}$$

Вычитание выполняется по той же схеме:

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{5\times4}{9\times4} - \frac{1\times9}{4\times9}$$
$$= \frac{20}{36} - \frac{9}{36}$$
$$= \frac{11}{36}$$

36 — наименьший общий знаменатель, поэтому мы приводим нижние части обеих дробей к 36.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Умножение дробей — простой процесс. Я просто умножаю числители и знаменатели друг на друга. Например:

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$$

Стоит отметить, что умножение числа на дробь дает в результате меньшее число. В данном примере я использовал дробь $\frac{1}{2}$, чтобы показать те моменты, которые помогут нам при делении дробей. Как мы видим, умножение на $\frac{1}{2}$ равносильно делению на 2, и точно так же умножение на $\frac{1}{3}$ будет равносильно делению на 3. Такие числа называют *обратными* по отношению друг к другу. Числа 2 и $\frac{1}{2}$ являются обратными по отношению друг к другу, что станет более очевидным, если я запишу двойку в виде дроби:

$\frac{1}{2}$ обратное число по отношению к $\frac{2}{1}$

Это очень удобно в том плане, что позволяет заменять деление на число умножением на соответствующее обратное число:

$$5 \div 3 = 5 \times \frac{1}{3}$$

Это можно использовать при делении дробей:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \div \frac{5}{8} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} \\ &= \frac{2 \times 8}{3 \times 5} \\ &= \frac{16}{15} \\ &= 1\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Простые множители для пятнадцати — это 3 и 5, поэтому при приведении к десятичному виду дробь $1\frac{1}{15}$ станет периодической дробью.

НАХОЖДЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Помимо основной теоремы арифметики, в основе повышенного интереса математиков к простым числам также лежит и тот факт, что пока никому не удалось найти формулу для вычисления простых чисел, хотя пытались это сделать очень многие. Так, например, французский священник Марен Мерсенн (1588–1648) попробовал рассчитать последовательность чисел по формуле:

$$M_n = 2^n - 1$$

При этом первое число вычисляется при *n*, равном 1, второе число — при *n*, равном 2, и т. д. Это дает в результате следующую последовательность:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047…

Мерсенн заметил, что некоторые из чисел, полученных с помощью этой формулы, являются простыми, как, например, числа 3, 7, 31 и 127, занимающие, соответственно, второю, третью, пятую и седьмую позиции в последовательности. Числа 2, 3, 5 и 7 сами являются простыми числами, поэтому можно подумать, что эта формула выдает простые числа при подстановке простых чисел в качестве *n*. Но следующее простое число после семи — одиннадцать, и, подставив его в формулу, получим: $M_{11} = 2047$, а это число не является простым, так как $2047 = 23 \times 89$.

В случае крупного числа очень трудно определить вручную, является ли оно простым. Например, M_{107} представляет собой 33-значное число, и на то, чтобы проверить, есть ли у него какие-либо делители, может уйти очень много времени.

Слава богу, на дворе век компьютеров, которые способны выполнить все необходимые вычисления быстро и точно! В 1950-х годах первые компьютеры сделали возможным вычисление простых чисел Мерсенна в известном нам виде с сотнями значащих цифр. В 1999 году удалось выявить первое простое число Мерсенна с миллионами значащих цифр. Текущий рекорд составляет более 22 миллионов цифр для числа $M_{74207281}$*.

ДЛИННОЕ-ПРЕДЛИННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Во время своей лекции в 1903 году американский математик Фрэнк Нельсон Коул (1861–1926)

* На данный момент наибольшим известным простым числом является $M_{82\,589\,933}$. Оно было открыто в декабре 2018 года и включает в себя 24,86 млн десятичных цифр. — *Прим. ред.*

привел следующий факт о числе M_{67}, которое на тот момент считалось простым:

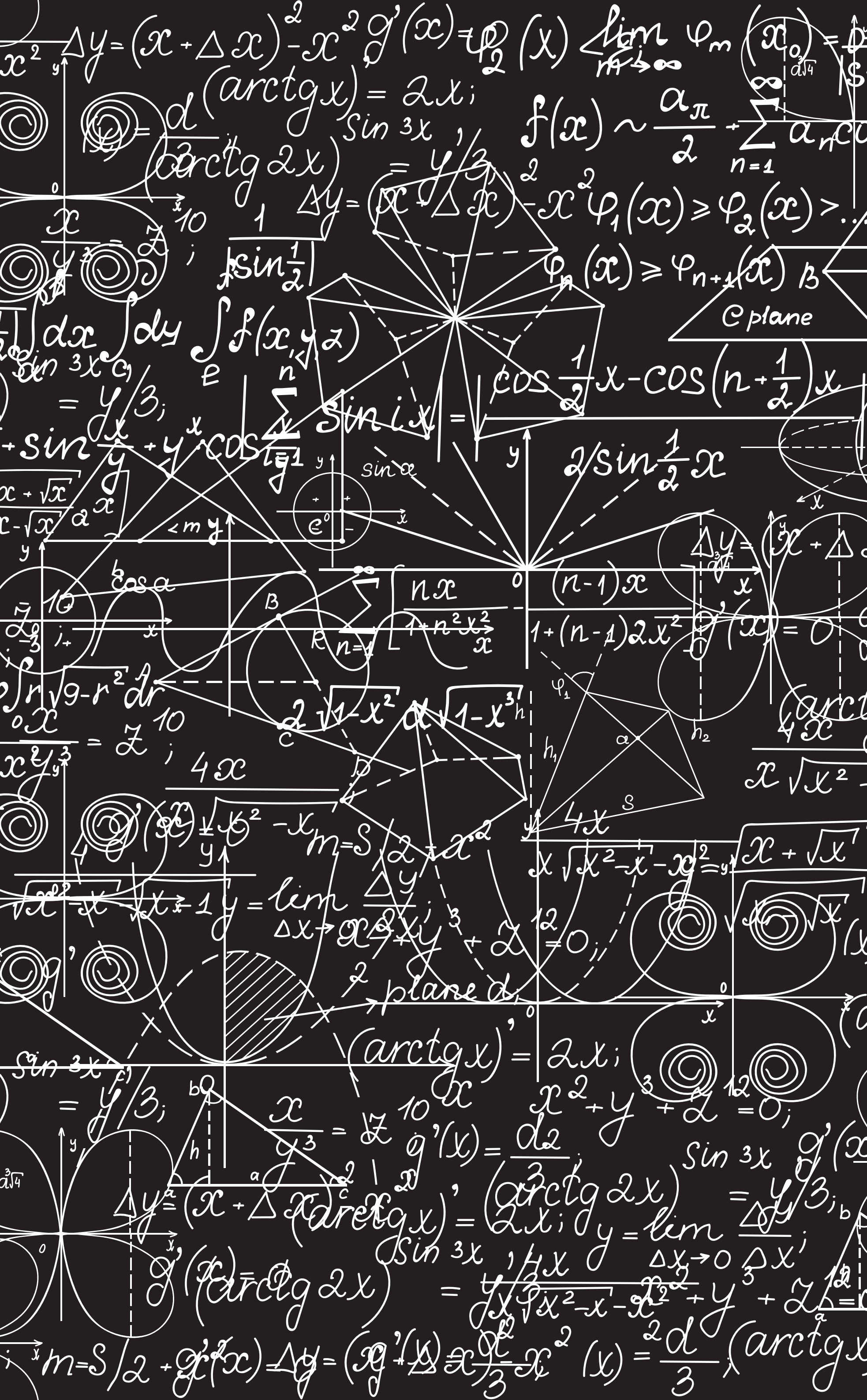
$$147,573,952,589,676,412,927 = 193,707,721 \times 761,838,257,287$$

Затем он приступил к вычислению этого произведения вручную, чтобы подтвердить этот результат. Это заняло у него целый час и проходило в гробовой тишине. В конце «лекции» Коул безмолвно вернулся на свое место под несмолкающие аплодисменты своих коллег.

Однако, зачем тратить столько усилий? Что ж, математики всегда готовы проводить исследования даже просто из любви к своей науке. Плюс к этому, простые числа играют ключевую роль в современных методах шифрования.

Когда я отправляю через Интернет некоторое число, например, код своей банковской карты, достаточно искусные злоумышленники могут легко перехватить этот номер и заполучить мои деньги. Во избежание этого передаваемые через Интернет числа шифруются путем шифрования с *открытым ключом*. Такой ключ представляет собой комбинацию очень больших псевдослучайных чисел, которые на самом деле формируются из очень больших простых чисел. Только предполагаемый получатель, у которого есть *закрытый ключ*, может произвести обратное преобразование за разумный временной интервал.

Префикс «https» в начале веб-адресов означает, что веб-сайт использует протокол защищенной передачи гипертекста для шифрования информации, пересылаемой в ваш компьютер и из него. Так, благодаря усилиям умников-математиков, мы теперь можем спокойно заказывать товары в интернет-магазинах.



C plane
plane d

ГЛАВА 7

ДВОИЧНЫЕ ЧИСЛА

В первой главе я упомянул о том, что все сложные арифметические вычисления можно «переложить на плечи» компьютеров. Однако компьютеры сами по себе — великое достижение человеческой изобретательности. Так, в частности, чтобы сделать компьютеры *цифровыми*, потребовалось создать электронные устройства, способные производить вычисления в *двоичной системе счисления*. Это система счисления, в которой вес каждого разряда равен степени (см. стр. 16) двойки (1, 2, 4, 8, 16 и т. д.), а не степени десяти (1, 10, 100, 1000 и т. д.), как в общепринятой десятичной системе счисления.

Десятичные	Двоичные				
	Вес разряда:	**8**	**4**	**2**	**1**
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0

Такая система используется потому, что с точки зрения электроники, гораздо проще рассматривать уровень напряжения как равный нулю или неравный нулю, считая ненулевой уровень единицей. Если бы мы попытались применить в компьютерах десятичную систему, считая нулевое напряжение нулем, напряжение в 1 вольт — единицей, и т. д., то столкнулись бы с огромными трудностями, поскольку сопротивление электронных компонентов может изменяться по мере роста их температуры, и, кроме того, уровень напряжения может зависеть от длины проводников между компонентами.

В силу применения двоичной системы счисления в современных компьютерах можно было бы подумать, что это сравнительно недавнее изобретение, однако это не так. На самом деле различные разновидности этой системы применялись и раньше в культуре многих народов. В книге «И цзин» или «Канон перемен», которую китайцы, начиная с VIII века до н.э., использовали для предсказания судьбы, присутствуют триграммы и гексаграммы, составленные из аналогов двоичных цифр — символов «инь» и «ян». Великий немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716) был очарован этой книгой и на ее основе в конце XVII века разработал современную двоичную систему счисления.

В свою очередь, британский логик Джордж Буль (1815–1864) в своей книге «Законы мышления» изложил систему математической логики, в которой применялись двоичные числа, и которая теперь известна как «булева логика». В 1937 году американский математик Клод Шеннон (1916–2001) впервые применил эту систему в электронной схеме и показал, что ее можно использовать для выполнения арифметических и логических операций. Для представления двоичной информации Шеннон использовал переключатели: выключенное состояние переключателя соответствовало нулю, а включенное состояние — единице.

В годы Второй мировой войны он встретился с другим великим математиком Аланом Тьюрингом (1912–1954), чтобы обсудить применение компьютеров для взлома применявшихся нацистами шифров. Как оказалось, имевшиеся к тому моменту работы обоих ученых взаимно дополняли друг друга. А после того как в 1948 году Шеннон написал статью «Математическая теория связи», он фактически стал «отцом» всей современной компьютерной техники.

Если вы хотите научиться считать, как компьютер, то могу вас обрадовать: здесь действуют абсолютно такие же правила; нужно лишь принять во внимание, что в двоичной системе счисления 1+1=10. Так, например, вычислить сумму 101 + 110 можно следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 0 & 1\\ + & & 1 & 1 & 0\\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}$$

Ниже показано, как можно вычислить разность 1010 – 111. Здесь нужно принять во внимание, что 10 − 1 = 1:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & {}^{1}0 & \\ & \cancel{1} & {}^{1}\cancel{0} & {}^{1}\cancel{0} & {}^{1}0\\ - & & 1 & 1 & 1\\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}$$

Ниже показано, как можно вычислить произведение 101 × 110 (обратите внимание, что при этом даже не потребуется знать таблицу умножения для десятичных чисел):

×	100		10		0	
100	100 × 100 =	10000	100 × 10 =	1000	100 × 0 =	0
0	0 × 100 =	0	0 × 10 =	0	0 × 0 =	0
1	1 × 100 =	100	1 × 10 =	10	1 × 0 =	0
		10100		1010		0

В итоге получим: 10 100 + 1010 = 11110.

Что касается деления, то вот как можно разделить 1010 на 100:

			1	0,	1
100	1	0	1	0,	1
-	1	0	0	↓	↓
			1	0	0
		-	1	0	0
					0

Обратите внимание, что получаемая при делении дробь тоже записывается в двоичном формате, и разряды справа от запятой представляют, соответственно, половины, четверти, восьмые доли и т. д. То есть в данном случае цифры 0,1 обозначают половину.

В качестве домашнего задания вы можете проверить правильность приведенных здесь расчетов, преобразовав все числа в десятичную форму.

Рост производительности современных компьютеров сдерживается тем, что в каждом микрочипе можно разместить лишь некоторое ограниченное количество электронных «переключателей» (или *транзисторов*), и, кроме того, еще нужно как-то отводить выделяемое ими тепло. На момент написания этой книги сравнительно небольшой серийно производимый чип мог вместить более 7 миллиардов транзисторов. В 1965 году американский предприниматель Гордон Мур (р. 1929), ставший в свое время одним из основателей компании Intel, отметил, что совершенствование технологии производства микрочипов позволяет удваивать количество размещаемых на чипе транзисторов через каждые два года — эта закономерность получила название «закон Мура».

Закон Мура дал сбой пять лет назад, когда технология производства чипов дошла до физического предела. Размер производимых сегодня транзисторов составляет считаные нанометры; это значит, что в одной лишь точке в конце этого предложения могут разместиться миллионы таких транзисторов. Как же мы можем выйти из этого тупика?

Один из возможных путей дальнейшего развития состоит в разработке *квантовых* компьютеров на базе принципов квантовой механики, что теоретически позволит производить вычисления намного быстрее, чем с помощью обычных цифровых компьютеров.

Стоит отметить, что эффективность применения компьютеров в значительной мере зависит от эффективности работы тех людей, которые их создают, и иногда разница между использованием двоичных и десятичных чисел означает разницу между жизнью и смертью. 2 августа 1990 года Ирак начал вторжение в Кувейт, положив начало конфликту, который впоследствии был назван «Войной в заливе». Иракские войска под командованием Саддама Хусейна отказались покинуть Кувейт до тех пор, пока Израиль не уступит им «оккупированные» территории, и 17 августа коалиция из 34 стран, включая США и Великобританию, начала операцию по освобождению Кувейта под названием «Буря в пустыне».

В иракский арсенал входили баллистические ракеты «Скад», разработанные Советским Союзом в годы Холодной войны. «Баллистическими» называют ракеты, которые используют имеющееся в них топливо, чтобы вылететь из земной атмосферы, а затем падают на заданную цель под действием силы тяжести. Дальность действия данных ракет составляла несколько сотен километров, и Ирак использовал их для атак на Израиль, Саудовскую Аравию и другие цели.

Американские военные разместили в ряде мест несколько батарей ракет «Пэтриот». В силу своей высокой скорости и маневренности, в сочетании с высокоточными радарами эти ракеты теоретически позволяли ликвидировать «Скады» в воздухе.

Чтобы поразить движущуюся ракету «Скад», система «Пэтриот» рассчитывала ее ожидаемую скорость и направление движения на основе данных, получаемых от радара. Это позволяло вычислить траекторию «Скада» и установить, куда следует направлять ракету «Пэтриот». Это не составляло большого труда, так как система «Пэтриот» выявляла «Скады» уже на этапе падения под действием силы тяжести.

Решающую роль здесь играла точность расчета временных интервалов.

Тактовый генератор системы «Пэтриот» отсчитывал время в десятых долях секунды. Это означало, что система 10 раз в секунду получала данные от радаров, на их основе определяла направление движения ракеты «Скад» и корректировала ее ожидаемую траекторию.

Как уже говорилось выше, в компьютерах используется двоичная система счисления. Чтобы получить одну десятую в двоичном формате, нужно разделить 1 на 1010. Не вдаваясь в подробное описание соответствующего процесса длинного деления, скажу лишь, что в двоичном виде одна десятая представляет собой периодическую дробь:

Одна десятая =
0,000110011001100110011001100110011...

Воспользовавшись нотацией, показанной на стр. 55, мы можем записать это число как $0{,}0\dot{0}01\dot{1}$.

Используемый системой «Пэтриот» компьютер мог обрабатывать числа длиной до 24 разрядов, что на первый взгляд кажется вполне достаточной точностью. Однако в силу того, что одна десятая в двоичном виде является периодической дробью, ее неизбежным образом приходилось округлять. Возвращаясь к десятичной системе счисления, можно сказать, что вместо интервала в одну десятую (или 0,1) секунды в действительности отсчитывался интервал в 0,0999991 секунды, с ошибкой в 0,00000009 секунды. Каким бы ничтожно малым ни был этот интервал, общая погрешность увеличивалась на эту величину с каждой десятой долей секунды.

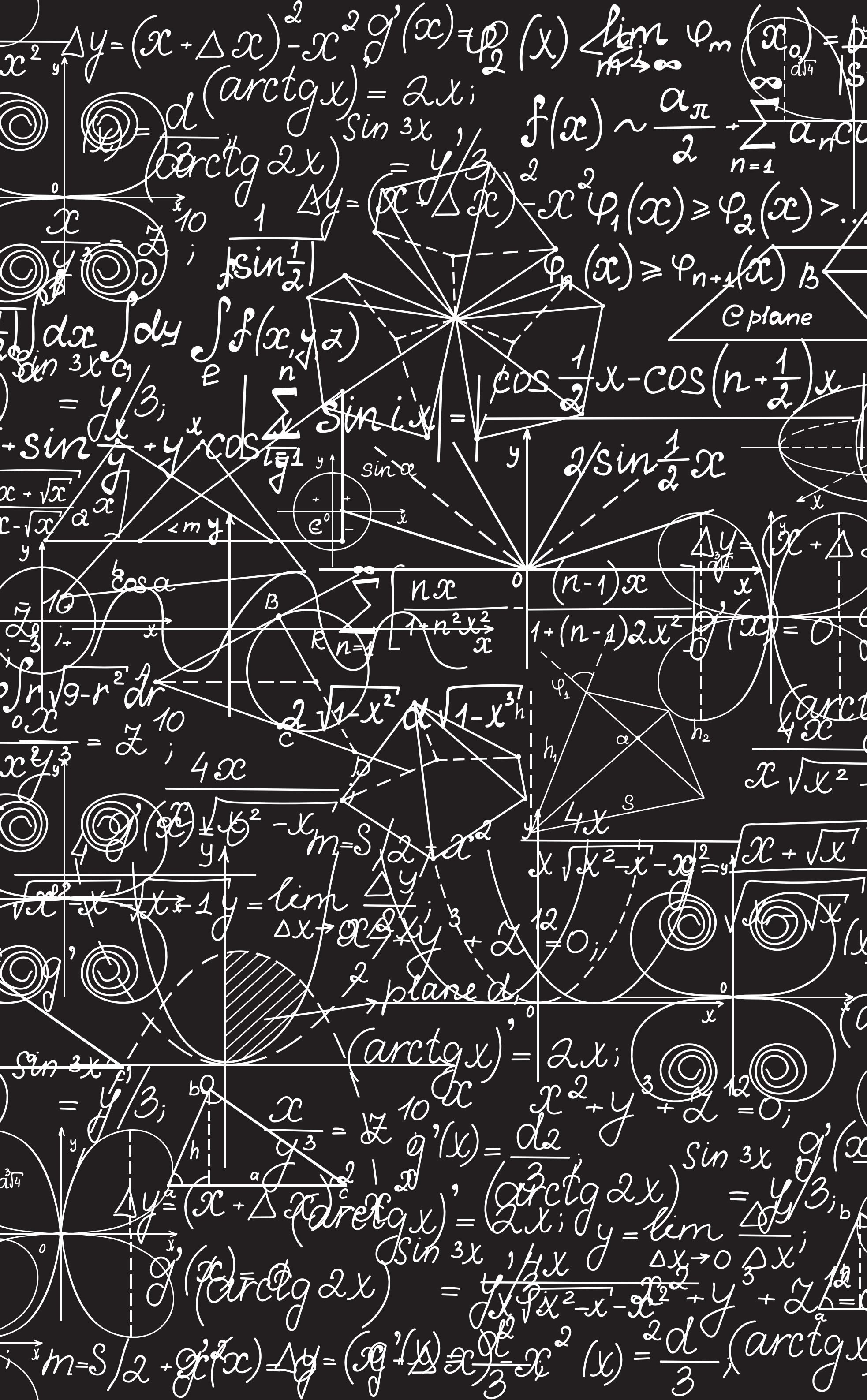
К 25 февраля 1991 года компьютер, работающий с системой «Пэтриот» в Саудовской Аравии, проработал около 100 часов. В сотне часов содержится 3,6 миллиона десятых долей секунды, что дает общую погрешность примерно в треть секунды.

Это опять же не кажется такой уж большой ошибкой. Однако следует учесть, что скорость несущегося из космоса «Скада» составляла около 1,5 км/с, и за треть секунды он успел бы пролететь 500 метров.

Это могло привести к запуску ракеты «Пэтриот» в неправильно указанное место или, вообще, невозможности ее запуска в силу того, что радар мог не обнаружить «Скад» в ожидаемом месте и сделать вывод о том, что произошло ложное срабатывание.

Именно последнее и произошло в тот день в Саудовской Аравии. Ракета «Скад» поразила американскую казарму, в результате чего 28 солдат погибли и еще большее их количество получили ранения. И все это из-за какой-то незначительной погрешности округления.

Эта история говорит о том, насколько важен правильный подход к округлению чисел, и в следующей главе мы узнаем, в чем он состоит.


C plane
plane d
sin α

ГЛАВА 8

ПОГРЕШНОСТЬ

«Дьявол кроется в деталях», и в современном мире таких деталей предостаточно. Математикам и представителям других наук часто приходится иметь дело с данными или результатами измерений, обладающими высокой степенью *точности*.

Так, например, благодаря немецкому специалисту в области физики элементарных частиц Петеру Трюбу, на момент написания книги значение числа π было определено с точностью до 22 триллионов знаков после запятой. Однако, когда требуется определить, какое количество компоста нужно взять для создания круглой цветочной клумбы, подобная точность будет совершенно излишней. Даже калькулятор на моем смартфоне использует число π, взятое с точностью лишь до 22 знаков после запятой, и эта степень точности позволяет вычислять площадь с гораздо большим количеством знаков после запятой, чем мне может потребоваться на практике.

Обратите внимание, что, хотя мы привыкли приравнивать высокую точность к минимальной погрешности, в действительности это не совсем корректно. Если я скажу, что выпил 2,7345 единиц алкоголя вчера вечером, на самом деле выпив 3,2 единицы алкоголя, то, несмотря на высокую точность, этот ответ будет обладать большой погрешностью.

Чтобы уменьшить степень точности с обеспечением минимальной погрешности, в математике применяется процесс, называемый *«округлением»*. Существует несколько способов округления.

Первый способ округления, с которым мы знакомимся в школе — округление *до ближайшего*, с указанием, до какого именно разряда производится округление. Например, 43 — это 40 при округлении до ближайшего десятка. 2893 — это 2900 при округлении до ближайшей сотни или 3000 при округлении до ближайшей тысячи. В жизни мы очень часто округляем большие числа. Цены на жилплощадь часто округляются до ближайшей тысячи, а то и до пяти–десяти тысяч. Фраза «подводная лодка Trident стоит 31 млрд фунтов стерлингов» воспринимается гораздо лучше, чем фраза «цена подводной лодки Trident составляет 31 264 358 769,73 фунта стерлингов».

Суть округления сводится к тому, чтобы уменьшить точность с минимально возможной погрешностью. При округлении числа 57 до ближайшего десятка у меня есть выбор между ближайшими десятками 50 и 60. Я останавливаю свой выбор на 60, поскольку это число гораздо ближе к 57, чем число 50, и, таким образом, обеспечивает минимальную погрешность.

При округлении числа 250 до ближайшей сотни мы столкнемся с небольшой проблемой. Здесь у нас есть выбор между числами 200 и 300, но число 250 находится ровно посередине между ними. Встает вопрос: какое число выбрать? Согласно общепринятому соглашению, в таком случае производится округление вверх, и правильным ответом будет число 300.

Почему было принято именно такое соглашение? В частности, потому, что это позволяет уменьшить количество выполняемых при округлении проверок. Так, при округлении числа 250 до ближайшей сотни, мы можем выполнить округление вверх сразу после того, как обнаружим во втором разряде цифру 5. Если бы мы выполняли округление вниз, то нам бы пришлось также проверить и следующий разряд на предмет того, равен он нулю, или нет. Так что такой способ несколько эффективнее.

Как следует освоив округление до ближайшего, можно переходить к округлению до определенного количества знаков после запятой. Логика здесь та же, что и раньше. При округлении числа 1,234 до двух знаков после запятой мне точно так же потребуется выбрать тот вариант, который обеспечивает минимальную погрешность. Число 1,234 находится между числами 1,23 и 1,24 (если вам так удобнее, можете вместо них рассматривать числа 1,230 и 1,240). Более близким является число 1,23.

Здесь мы смотрим на третий знак после запятой. Если это 0, 1, 2, 3 или 4, то выполняется округление вниз, то есть мы оставляем без изменений второй знак после запятой. Если же третий знак после запятой равен 5, 6, 7, 8 или 9, то выполняется округление вверх с увеличением второго знака после запятой на единицу.

При округлении вверх цифры 9 потребуется изменить и предыдущую цифру. Например, при округлении числа 1,96 до одного знака после запятой, цифра 6 указывает на то, что 9 нужно округлить до 10. Это значит, что мы должны записать 0 и перенести 1 в старший разряд, в результате чего мы получим значение 2,0. В качестве дополнительной проверки можно убедиться, что число 1,96 находится между числами 1,9 и 2,0, и второе число является наиболее близким.

До сих пор мы выполняли лишь округление до ближайшего и округление до определенного количества знаков после запятой. Однако если бы нам потребовалось произвести вычисления с использованием чисел разного размера, то мы не смогли бы обеспечить одинаковую степень точности для всех используемых чисел, используя рассмотренные правила округления. Например, если нам потребуется вычислить произведение 5234 × 0,726, мы не сможем округлить оба числа до ближайшей сотни, поскольку число 0,726 при этом станет равным нулю, и в то же время мы не сможем округлить число 5234 до какого-либо количества знаков после запятой, поскольку у него их просто нет.

Для такого случая предусмотрено еще одно, последнее правило округления, а именно, округление до определенного количества *значащих цифр*.

Отсчет значащих цифр в числе производится слева направо, без учета начальных нулей в десятичных дробях. Таким образом, первая значащая цифра в числе 5234 — 5, а в числе 0,726 — 7.

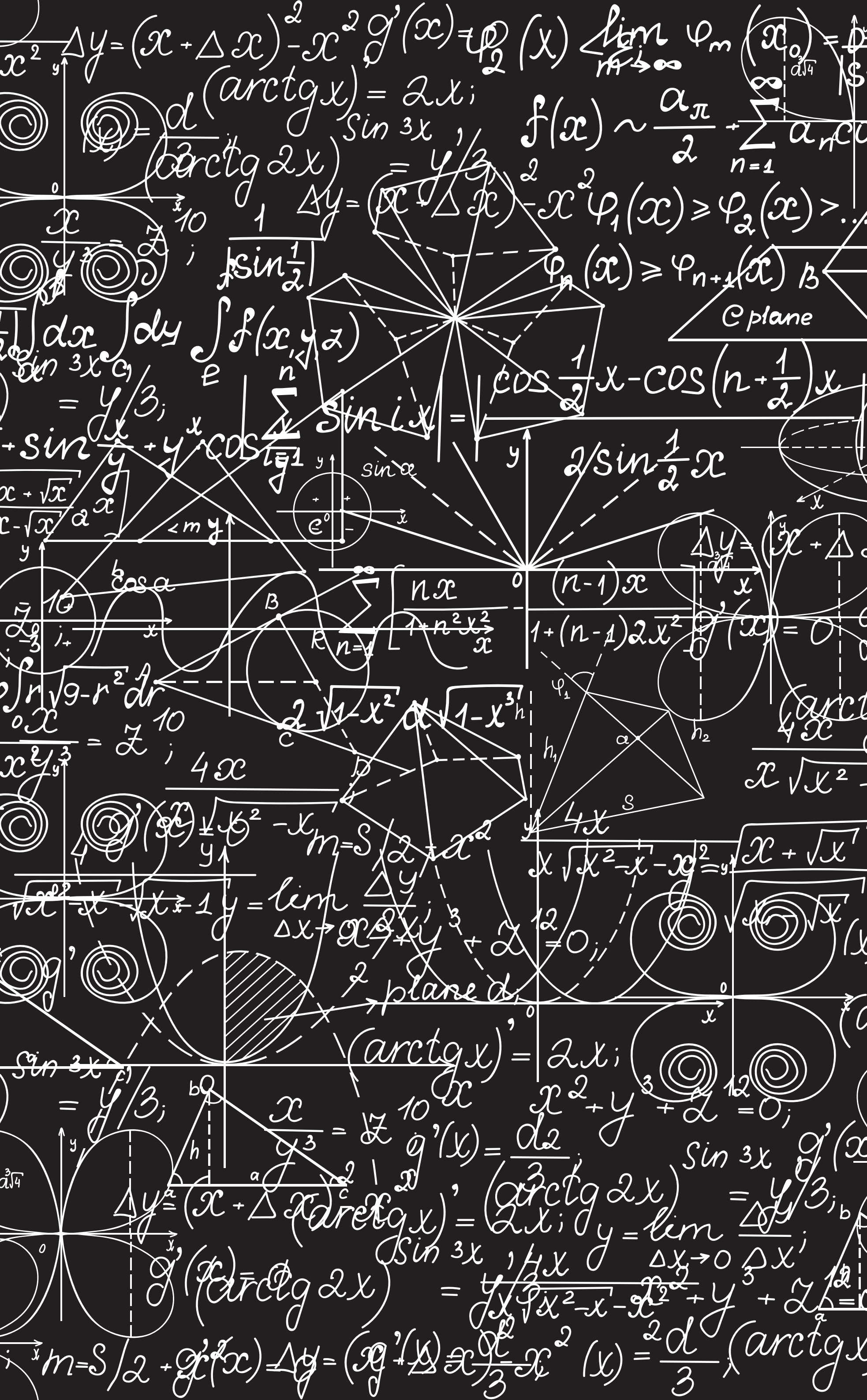
При округлении этих чисел «до одной значащей цифры» ответ будет содержать всего один ненулевой разряд (без учета любых начальных нулей).

В случае числа 5234 это означает цифру 5 в разряде для тысяч. То есть округление числа 5234 до одной значащей цифры сводится к округлению его до ближайшей тысячи, поскольку первая значащая цифра находится именно в этом разряде. Таким образом, 5234 — это 5000 при округлении до одной значащей цифры.

Точно так же первая значащая цифра числа 0,726 — это 7 в разряде десятых долей; значит, мы должны выполнить округление до ближайшей десятой. Соответственно, результат округления числа 0,726 до одной значащей цифры равен 0,7. Теперь наше произведение будет выглядеть следующим образом:

$$5234 \times 0{,}726 \approx 5000 \times 0{,}7 = 3500$$

Как видите, округление до одной значащей цифры ведет к существенному упрощению расчетов, в силу чего этот способ часто используется для нахождения оценок с целью проверки правильности расчетов. Например, если бы вычислив произведение 5234 × 0,726 вручную, я получу ответ 379,9884, то моя оценка сразу укажет мне, что этот ответ неверен, поскольку на самом деле результат должен находиться где-то в районе числа 3500. Еще раз проверив свои расчеты, я увижу, что произведение 5234 × 0,726 на самом деле равно 3799,884, то есть я совершил классическую ошибку, поставив запятую в неправильном месте. Оценка результата перед его вычислением — действительно полезный способ автоматической корректировки расчетов!



ГЛАВА 9

СТЕПЕНИ

Хотя мы редко сталкиваемся со степенями в повседневной жизни, они (в соответствии со своим названием) существенно изменяют размер и смысл числа. Степени позволяют выражать в кратком виде очень большие числа (такие, как количество памяти на вашем жестком диске) и очень малые числа (такие, как количество активного вещества в таблетке витамина).

Если мы запишем: «5^3», то верхний индекс 3 здесь будет сокращенным обозначением того, что число 5 должно быть умножено на себя три раза. Таким образом:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

Эта запись читается как «пять в третьей степени» или «пять в кубе». Эту степень не стоит путать с выражением «5 × 3», которое дает в результате гораздо меньшее число 15. Степени десяти нам уже знакомы, поскольку они равны весам разрядов, используемых в индо-арабской системе счисления (см. стр. 32):

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$ (один миллион)
$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$ (сто тысяч)
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ (десять тысяч)
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ (одна тысяча)
$10^2 = 10 \times 10 = 100$ (сто)

Продолжая данную логику, получим:

$$10^1 = 10 \text{ (десять)}$$

Это равенство демонстрирует одно из основных правил степеней — любое число в первой степени равно самому себе:

$$a^1 = a$$

Степени десяти используются настолько часто, что для многих из них были придуманы соответствующие словесные приставки. Например, приставка «кило» означает 10^3 или 1000. То есть километр — это тысяча метров, килограмм — тысяча граммов, а киловатт — тысяча ватт. Другие приставки для обозначения больших чисел, как правило, соответствуют каждому увеличению показателя степени на три:

10^3: тысячи — кило — (к)
10^6: миллионы — мега — (М)
10^9: миллиарды — гига — (Г)
10^{12}: триллионы — тера — (Т)

Мы часто используем эти степени и приставки для описания параметров компьютеров, но, как мне кажется, не за горами тот час, когда в широкое употребление войдут степени 10^{15} (пета, П) и 10^{18} (экса, Э).

ОЧЕНЬ БОЛЬШИЕ СТЕПЕНИ

В 1920 году число 10^{100} получило название «гугол» (googol) — его придумал девятилетний племянник американского математика Эдварда Казнера, когда тот пытался дать название этому невероятно большому числу. И масштаб этого числа действительно впечатляет — так, во Вселенной* насчитывается «только» 10^{80} атомов, и, значит, гугол в 100 000 000 000 000 000 000 раз больше! Если вам этого мало, то существует даже еще большее число с названием «гуголплекс», равное десяти в степени гугол. Если у гугола сто нулей, то у гуголплекса уже гугол нулей.

Математики также выявили еще несколько правил, которые упрощают умножение и деление чисел со степенями.

* В ее наблюдаемой части. — *Прим. ред.*

Взгляните на пример:

$$5^3 \times 5^4 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$$

Выражения в скобках приведены здесь лишь для того, чтобы показать, сколько пятерок входит в степени 5^3 и 5^4. Можно заметить, что ответ представляет собой результат перемножения семи пятерок, то есть 5^7. И мы можем прийти к этому результату гораздо быстрее, не записывая множество пятерок, если просто сложим показатели обеих степеней:

$$5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$$

Обобщая, можно сказать, что при перемножении степеней одного и того же числа действует следующее правило:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Та же логика действует и в случае деления. Например:

$$8^5 \div 8^2 = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8}$$

Теперь, если я начну вычеркивать восьмерки:

$$\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{8 \times 8} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times \cancel{8} \times \cancel{8}}{\cancel{8} \times \cancel{8}} = \frac{8 \times 8 \times 8}{1} = 8^3$$

Можно заметить, что в конечном счете мы получаем разность показателей степеней:

$$8^5 \div 8^2 = 8^{5-2} = 8^3$$

Или в общем случае:

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Это правило поможет нам разобраться с тем, что означает возведение в нулевую степень. Если, к примеру, нам требуется вычислить выражение $3^4 \div 3^4$, то разность показателей степеней будет равна нулю:

$$3^4 \div 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$$

Но мы также знаем, что число, разделенное на само себя, равно единице; значит, 3^0 должно равняться 1. Таким образом, мы получаем еще одно правило: любое число в нулевой степени равно единице.

$$a^0 = 1$$

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ

Если используя правило для деления степеней, мы разделим меньшую степень числа на большую его степень, то результат будет представлять собой отрицательную степень:

$$7^4 \div 7^9 = 7^{4-9} = 7^{-5}$$

Давайте представим этот пример в виде дробей (подробнее об упрощении дробей было рассказано на стр. 56).

$$7^4 \div 7^9 = \frac{7^4}{7^9} = \frac{7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7} =$$

$$\frac{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}}{7\times7\times7\times7\times7\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}} = \frac{1}{7\times7\times7\times7\times7} = \frac{1}{7^5}$$

Это означает, что 7^{-5} равно или единице, разделенной на 7^5, что является очень малой величиной. В общем случае:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Возвращаясь к степеням десяти, можно отметить, что:

$10^0 = 1$ (один)
$10^{-1} = \frac{1}{10}$ (одна десятая)
$10^{-2} = \frac{1}{100}$ (одна сотая)
$10^{-3} = \frac{1}{1000}$ (одна тысячная)

Опять же некоторым наиболее часто используемым отрицательным степеням десяти поставлены в соответствие словесные приставки:

10^{-2}: сотые доли — санти — (с)
10^{-3}: тысячные доли — милли — (м)
10^{-6}: миллионные доли — микро — (мк)
10^{-9}: триллионные доли — нано — (н)

Если вы взглянете на этикетку баночки с витаминами, то увидите, что содержание определенных минералов в них исчисляется микрограммами. Размеры молекул исчисляются нанометрами, отсюда и произошло слово «нанотехнология». Не следует ошибочно думать, что отрицательные степени дают в результате отрицательные числа — на самом деле они дают в результате положительные числа, величина которых меньше единицы.

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ

Если вы думаете, что отрицательные степени — самая сложная разновидность степеней, то глубоко ошибаетесь. Нам еще предстоит узнать, что собой представляют дробные степени. Как они выглядят, показано ниже.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Результат вычисления $\sqrt{6}$ не является целочисленным (и равен примерно 2,44948974). Когда результат вычисления квадратного корня не является целочисленным, он представляет собой так называемое *иррациональное число*, которое может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Латинское название этого числа, *«surd»*, также переводится как «глухой», «немой», что, видимо, является указанием на то, что эти числа нельзя должным образом «произнести вслух». По той же причине мы называем *«абсурдом»* противоречивые математические или логические аргументы.

Помня о том, что $a^n \times a^m = a^{n+m}$, получим:

$$6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 6^1 = 6$$

Но задумайтесь на секунду — число шесть в степени 1/2, умноженное на себя, равняется шести. Давайте вспомним, о чем говорилось в разделе, посвященном квадратам и корням (см. стр. 18). Если результат умножения $6^{\frac{1}{2}}$ на себя равен шести, то это число должно равняться квадратному корню из шести:

$$6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

И в общем случае:

$$a^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{a}$$

Мы слегка модифицировали равенство с помощью знака «±». Когда знак квадратного корня используется сам по себе (т. е. без знака «±»), он всегда обозначает только положительное значение квадратного корня. Однако у каждого числа также есть и отрицательное значение квадратного корня, поскольку умножение отрицательного числа на отрицательное число дает в результате положительное число:

$$4 \times 4 = 16$$
$$-4 \times -4 = 16$$

Таким образом, у числа 16 два квадратных корня: 4 и –4, и потому мы указали в нашем равенстве на наличие как положительного, так и отрицательного ответа с помощью знака плюс-минус («±»).

Далее можно сделать вывод, что другие дробные степени дают в результате другие типы корней. Так, в случае возведения числа в степень одной трети, мы можем получить исходное число, перемножив друг на друга три таких степени. Это значит, что возведение в степень одной трети равносильно взятию кубического корня:

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Обратите внимание, что здесь нет знака «±». Существует только положительный кубический корень из четырех, так как перемножение трех отрицательных чисел дает в результате отрицательное число. Так, например, мы знаем, что кубический корень из восьми равен двум (потому что $2 \times 2 \times 2 = 8$), но $-2 \times -2 \times -2 = -8$, а не 8.

В общем случае:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

СТЕПЕНИ И ГДЕ ОНИ ОБИТАЮТ

Степени часто используются при указании количеств с помощью составных единиц, когда нет возможности использовать более простые единицы измерения. Например, длина указывается в метрах (часто с использованием приставок, обозначающих различные степени десяти, что сокращается как км, см, мм и т. д.), а площадь — в квадратных метрах ($м^2$). Составная единица «квадратный метр» или «метр в квадрате» используется в силу отсутствия других именованных единиц, хотя иногда мы можем избавиться от степеней, указав площадь в акрах или гектарах.

Часто отрицательные степени используются вместо предлога «в» или наклонной черты для обозначения деления на единицы измерения. На приборной панели некоторых автомобилей составные единицы скорости обозначены как «$кмч^{-1}$», а не «км/ч». Последний способ записи обозначает деление километров на часы, а первый — умножение километров на часы в степени минус один:

$$\begin{aligned} кмч^{-1} &= км \times ч^{-1} \\ &= км \times \frac{1}{ч} \\ &= км \div ч \end{aligned}$$

АРЫ И ГЕКТАРЫ

Хотя мы иногда используем гектар в качестве единицы измерения площади, мало кто знает, что это в действительности такое. Что ж, на самом деле «ар» — устаревшая, но, тем не менее, метрическая единица измерения площади, равная квадрату размером 10 на 10 метров. Эта единица (вместе с метрической системой мер в целом) была предложена французами после революции в конце XVIII века. «Гекто» — очень редко употребляемая приставка, обозначающая 10^2 или 100. Сложив вместе «гекто» и «ар», получим «гектар» — сто квадратов размером 10 на 10 метров, общая площадь которых составляет $100 \times 10 \times 10 = 10\,000$ м^2. Это примерно 2,5 акра, или чуть больше футбольного поля.

Умножение на единицу, деленную на число, можно преобразовать в деление на это число (см. раздел «Умножение и деление дробей» на стр. 228), поэтому, как видим, оба эти способа обозначения единиц измерения скорости равносильны.

Степени используются во многих ключевых для науки уравнениях — здесь уместно вспомнить формулу Эйнштейна $E = mc^2$, которая положила начало ядерной энергетике, или формулу Ньютона для движения планет $F = Gm_1m_2r^{-2}$. В последней теореме Ферма рассматривается уравнение греко-египетского математика Диофанта, которое имеет следующий вид: $a^n + b^n = c^n$ (подробности см. на стр. 82).

В начале главы я упомянул, что степени позволяют выражать в кратком виде числа с большим количеством цифр, и в технической сфере такие числа часто представляют в так называемом *«стандартном виде».* Стандартный вид числа — это его запись в виде числа от одного до десяти, умноженного на степень десяти. Например, скорость света в вакууме (сомножитель «с» в уравнении Эйнштейна) составляет 299 792 458 мс$^{-1}$ (или метров в секунду). Округлив это число до одной значащей цифры (см. стр. 84), получим 300 000 000. Это число уже можно записать в стандартном виде, используя степень десяти:

$$300\,000\,000 = 3 \times 100\,000\,000 = 3 \times 10^8$$

Это число гораздо проще использовать в расчетах, и, кроме того, мы можем избежать ошибок, возможных при записи бесконечного количества цифр исходного числа. Именно по этой причине в современных калькуляторах часто присутствует кнопка $\times 10^x$.

Если мы рассмотрим другую крайность — очень малые числа, то, например, постоянная G в уравнении Ньютона (подробности см. на стр. 197) равна 0,0000000000667408 $м^3 кг^{-1} с^{-2}$. После приведения к стандартному виду это число будет выглядеть как $6,7 \times 10^{-11}$.

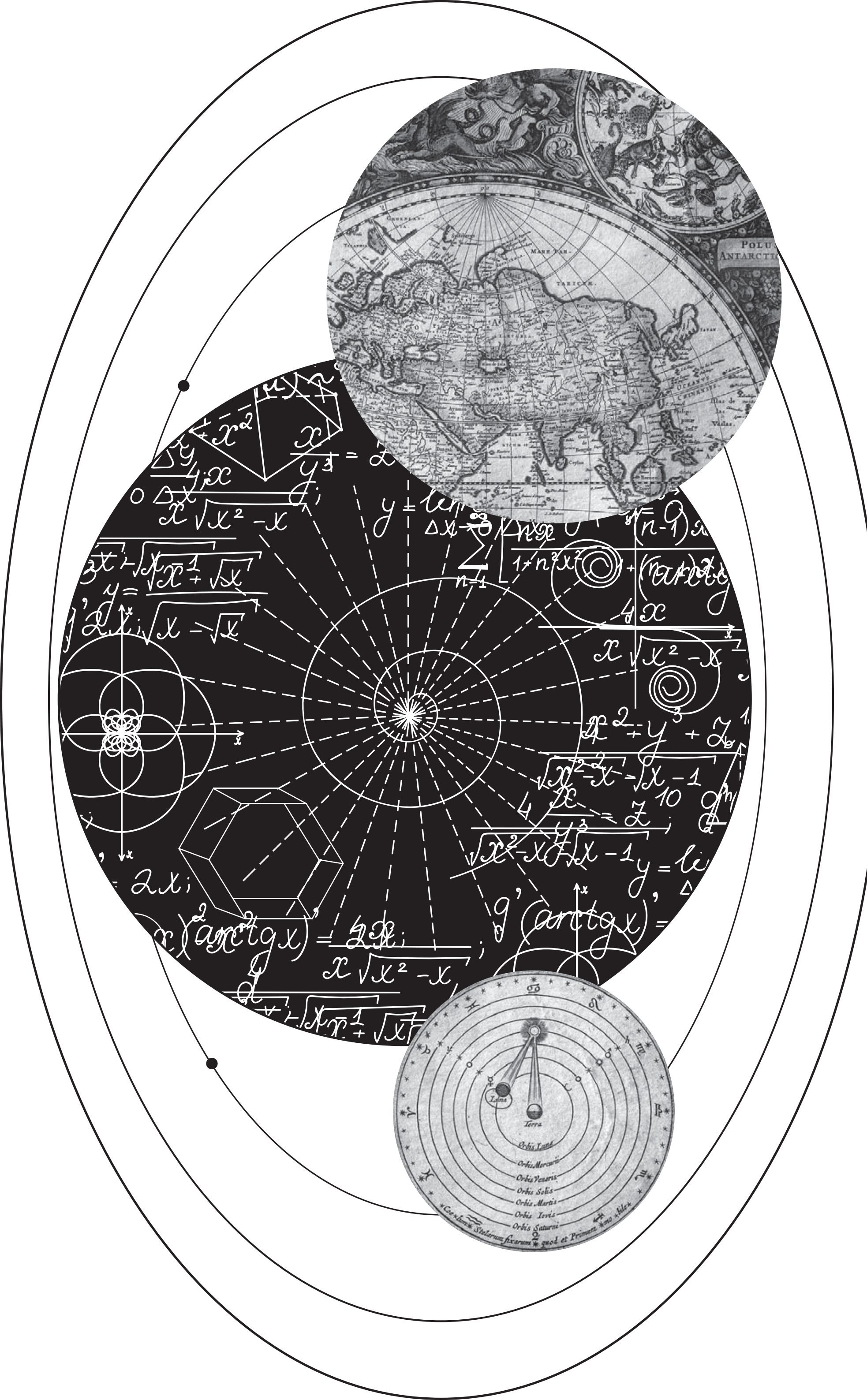
Таким образом, степени будут очень полезны в том случае, если вы производите астрономические или микроскопические вычисления, или просто пытаетесь провести различие с помощью приставок «мега» и «гига».

ИНДЕКС МАССЫ ТЕЛА

Формула для вычисления индекса массы тела выглядит следующим образом:

$$ИМТ = \frac{масса\ тела}{рост^2}$$

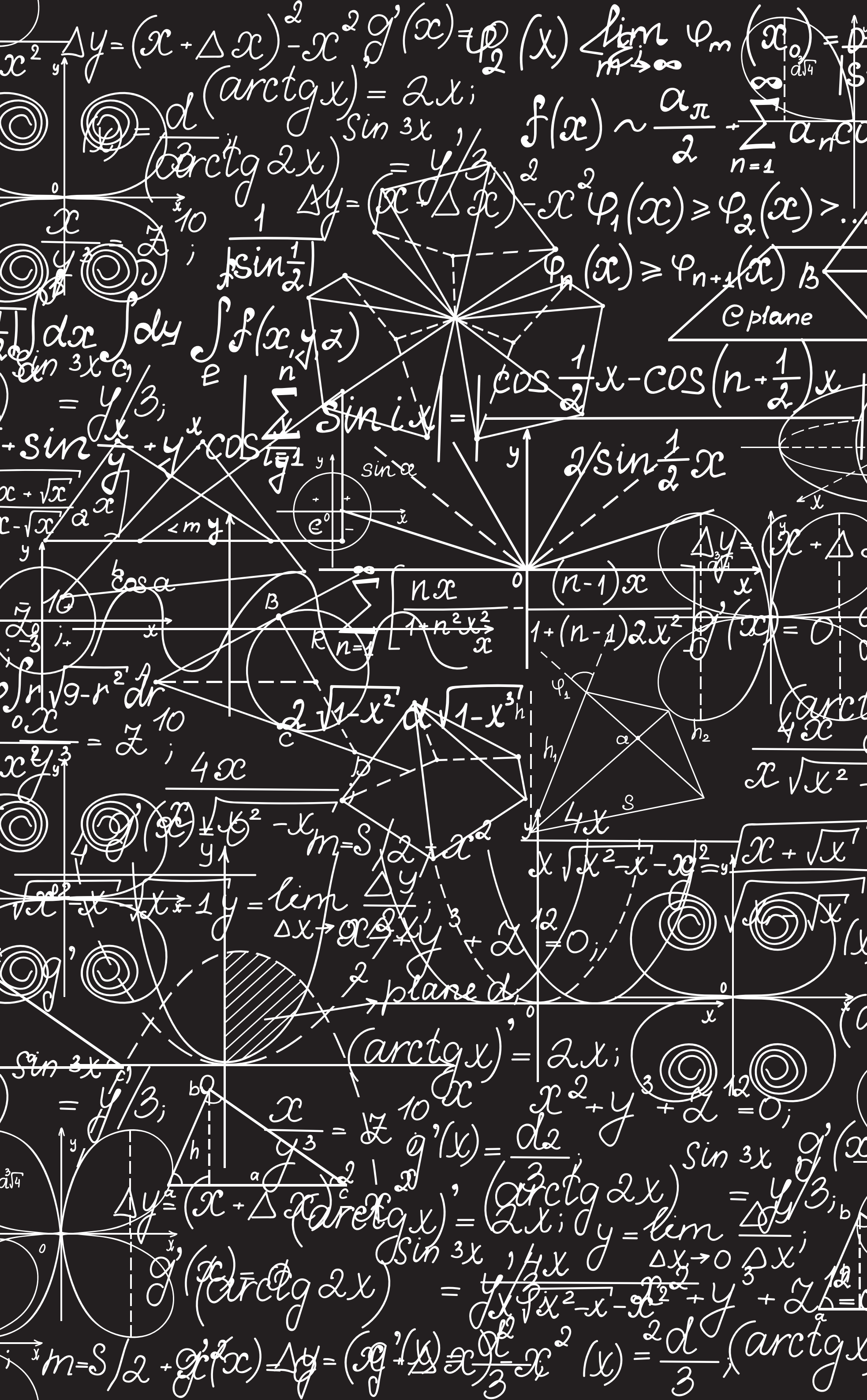
где масса указывается в килограммах, а рост — в метрах. У здорового человека этот показатель должен находиться в диапазоне от 18,5 до 25 кгм$^{-2}$. Так, например, у человека с ростом 1,7 м и весом 70 кг ИМТ будет чуть больше 24. Данная формула служит для грубой оценки того, насколько большим весом обладает человек для своего роста. На основании этого можно сделать вывод о том, следует ли человеку набрать или, наоборот, сбросить вес для поддержания здоровья. Часто, прочитав об этом индексе в журнале или в Интернете, люди вычисляют свой индекс, но при этом вместо возведения роста в квадрат просто умножают его на два. За исключением случая, когда рост превышает два метра, это ведет к занижению значения ИМТ, и эта ошибка будет тем больше, чем меньше рост человека. В итоге вместо того, чтобы ограничиться морковкой, человек «балуется» очередным десертом, и всему виной плохое знание математики!



Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ II

СООТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ И СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ


C plane
plane d
sin 3x
sin α
cos α

ГЛАВА 10

ПРОЦЕНТЫ

В наши дни сложно представить себе какую-либо сферу, обходящуюся без процентов. Скидки, процентные ставки по кредиту, инфляция, количество голосов на выборах, процент жировых отложений в организме, налоги и алкогольные напитки — это лишь несколько областей, в которых сегодня нельзя обойтись без понимания процентов.

«Процент» — это дробь со знаменателем сто, и, соответственно, само название происходит от латинского выражения «per centum» — «на сто». Знак процента «%» развился из сокращенного способа записи выражения «per cento», которым пользовались итальянские купцы. Проценты стали настолько популярными по двум причинам. Во-первых, большинство валют являются десятичными, и в силу этого проценты легко использовать в финансовых расчетах. Во-вторых, процентные величины очень легко сравнивать друг с другом.

Давайте на секунду представим, как выглядел бы мир без процентов. Допустим, вы хотите открыть сберегательный счет, и вам предлагают два варианта — со ставкой $\frac{117}{997}$ или $\frac{59}{500}$. Какой вариант лучше? За исключением самых простых случаев дроби трудно поддаются сравнению. Но, если я скажу, что эти ставки составляют 11,74% и 11,8%, то вы без труда выберете лучший вариант.

Поскольку проценты, по сути, являются дробями, их арифметика подчиняется тем же правилам. Однако операции над процентными величинами практически всегда сводятся лишь к умножению.

НАХОЖДЕНИЕ ПРОЦЕНТА ОТ ЧИСЛА

Моя безмерная радость в день получения зарплаты становится слегка более приземленной, когда я вспоминаю, какая ее часть уйдет на оплату налогов. Если я зарабатываю 25 000 фунтов стерлингов в год, и налог составляет 23% от этой суммы, то какую сумму я должен заплатить? Что ж, я должен заплатить 23 фунта стерлингов с каждой сотни, значит, я могу разделить свою зарплату на 100, чтобы узнать, сколько сотен содержится в моей зарплате, а затем умножить это число на 23:

$$25\,000 \div 100 \times 23 = £5750$$

При этом не важно, что я буду делать первым — делить на 100 или умножать на 23; следовательно, этот пример можно записать и таким образом:

$$25\,000 \times 23 \div 100 = £5750$$

Это то же самое, что и:

$$25\,000 \times \frac{23}{100} = £5750$$

Таким образом, как видите, чтобы найти процент от суммы, нужно просто умножить ее на этот процент. Этот процент можно также выразить и в виде десятичной дроби:

$$25\,000 \times 0{,}23 = £5750$$

ПРОЦЕНТНОЕ УВЕЛИЧЕНИЕ И УМЕНЬШЕНИЕ

Мне улыбнулась удача — начальник поднял мою зарплату на 5%! Чтобы рассчитать, сколько теперь я буду получать за год, можно воспользоваться уже известным нам способом, вычислив 5% от исходной зарплаты и добавив эту сумму. Однако мы также можем заметить, что новая зарплата составляет 105%

от исходной. Соответственно, мы можем вычислить новую зарплату следующим образом:

$$25\,000 \times \frac{105}{100} = £26{,}250$$

То есть, чтобы получить результат, нам потребовался всего один шаг, а не два, как в случае нахождения и добавления 5%. Если вам больше нравится иметь дело с десятичными дробями, то тот же результат можно получить путем умножения 2500 на 1,05.

Поскольку мне не хотелось бы говорить о снижении своей зарплаты, давайте рассмотрим уменьшение процента на примере распродажи. В вашем любимом магазине одежды проходит однодневная распродажа всех товаров со скидкой 15%. Сколько при этом потребуется отдать за футболку, обычная цена которой составляет £23? В данном случае, опять же, можно посчитать 15% от цены и вычесть эту сумму, но это займет два шага. Однако, приняв во внимание то, что при уменьшении на 15% у нас останется 85% от исходной цены, мы можем получить результат следующим образом:

$$23 \times 0{,}85 = £19{,}55$$

ОТМЕНА ПРОЦЕНТНОГО ИЗМЕНЕНИЯ

Недавно я узнал интересный факт: оказывается, величина наценки на продукты в супермаркетах иногда доходит до 35%! Допустим, что я совершил покупки на сумму в 57,24 фунта стерлингов. Сколько, интересно, стоили эти продукты до применения наценки?

Чтобы узнать это, мы должны учесть, что я заплатил за эти продукты 135% от их первоначальной стоимости. Исходя из этого, я могу разделить сумму покупок на 135, чтобы найти 1%, а затем умножить это число на 100, чтобы получить 100% от исходной стоимости:

$$57{,}24 \div 135 \times 100 = £42{,}40$$

Опять же можно поменять порядок выполнения действий:

$$57{,}24 \times 100 \div 135 = £42{,}40$$

Следовательно:

$$57{,}24 \times \frac{100}{135} = £42{,}40$$

Здесь наш процент записан «вверх ногами», но, как мы помним, умножение на любую дробь равносильно делению на дробь, обратную по отношению к ней (см. стр. 63):

$$57{,}24 \div \frac{135}{100} = £42{,}40$$

Таким образом, чтобы узнать, чему равнялась рассматриваемая величина до применения процентного изменения, следует разделить ее на величину процента.

КРЕДИТНЫЕ ОТЧИСЛЕНИЯ

Многие из нас берут деньги в кредит для совершения таких крупных покупок, как покупка недвижимости или автомобиля. Чтобы как-то на этом заработать, банк взимает с нас определенные проценты, которые обычно выражаются в виде годовой процентной ставки.

Взяв кредит по фиксированной ставке 5%, вы могли бы ожидать, что сумма задолженности будет погашаться в равных долях на протяжении всего срока кредитования, однако это не так. Дело в том, что каждый платеж делится на две части. Одна часть идет на погашение процентов, начисленных за соответствующий месяц, а остальная часть — на погашение суммы задолженности.

Допустим, что я взял кредит в размере 20 000 фунтов стерлингов по ставке 12% в год. В конце первого месяца я буду должен те же 20 000 фунтов стерлингов, плюс 1% от этой суммы (поскольку 12% в год = 1% в месяц). В соответствии с тем, что говорилось выше о процентном увеличении, получаем:

$$£20\,000 \times 1{,}01 = £20\,200$$

Если я буду платить 500 фунтов стерлингов в месяц, то 200 из них пойдут на погашение процентов, а оставшиеся 300 — на погашение задолженности. Таким образом, в конце первого месяца я буду должен 20 200 – 500 = 19 700 фунтов стерлингов.

Расчет процентного увеличения для конца второго месяца будет выглядеть следующим образом:

$$£19\ 700 \times 1{,}01 = £19\ 897$$

Теперь платеж в размере 500 фунтов стерлингов покроет проценты в размере 197 фунтов стерлингов и 303 фунта стерлингов от суммы задолженности, в результате чего новая сумма задолженности составит 19 397 фунтов стерлингов. В конце второго месяца я уменьшил сумму задолженности на большую величину, и эта тенденция будет нарастать вплоть до окончательного погашения кредита.

Этот эффект проявляется особенно ярко в случае ипотечного кредита. В течение первых нескольких лет годовой отчет производит довольно гнетущее впечатление, поскольку вы видите, что погасили лишь очень небольшую часть кредита. Однако затем ситуация постепенно исправляется.

Чтобы рассчитать размер кредитных отчислений так, чтобы вы успели погасить всю сумму к концу срока кредитования, банки пользуются следующей устрашающей формулой:

$$\text{Ежемесячная выплата} = \frac{\text{ежемесячная процентная ставка} \times \text{сумма кредита}}{1 - (1 + \text{ежемесячная процентная ставка})^{-\text{количество месяцев}}}$$

Допустим, что я взял ипотеку в размере 150 000 фунтов стерлингов на двадцать пять лет

(25 × 12 = 300 месяцев) по фиксированной ставке 5% (5% ÷ 12 = 0,42% в месяц). В таком случае получим:

$$\text{Ежемесячная выплата} = \frac{\frac{0,42}{100} \times 150000}{1 - \left(1 + \frac{0,42}{100}\right)^{-300}}$$

Если вас смущает показатель степени $^{-300}$, то вернитесь к стр. 91. Введя эти значения в калькулятор, получим:

$$\text{Ежемесячная выплата} = \frac{630}{0,715596} = £880,38$$

В общей сложности мне придется выплатить 880,38 × 300 = 264 114 фунтов стерлингов, что больше исходной суммы на 100 с лишним тысяч.

БЕРНУЛЛИ, ЭЙЛЕР И ЧИСЛО *e*

Темой процентных отчислений в разное время интересовались многие математики, однако именно швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705) заметил, что размер отдельных выплат и их общей суммы зависит не только от величины процентной ставки, но и от того, насколько часто она рассчитывается.

Чтобы убедиться в этом, давайте допустим, что в рассмотренном выше примере банк будет начислять проценты ежедневно. Моя ежедневная процентная ставка будет составлять 5 ÷ 365 = 0,0137% в день. Исходя из этого, ежедневная выплата будет составлять 28,80 фунта стерлингов, что соответствует выплате 876 фунтов стерлингов в месяц. То есть размер ежемесячной выплаты немного уменьшится. И наоборот, если банк будет взимать проценты ежегодно, размер ежемесячной выплаты составит 886,91 фунта стерлингов.

Как видите, вам выгодно, чтобы проценты рассчитывались как можно чаще. Та же закономерность действует и в случае банковских вкладов. Бернулли выяснил, что в случае непрерывного начисления процентов данная задача будет в действительности сводиться к нахождению следующего предела:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Это слегка устрашающее выражение знакомит нас с парой важных математических понятий. Здесь «lim» — сокращение от слова «limit», означающего «предел», а «$n\to\infty$» означает «при n, стремящемся к бесконечности». Если вы помните, бесконечность не является числом, и мы не можем использовать ее в расчетах и формулах. Таким образом, это просто математический способ записи вопроса: «Что станет со значением $(1+\frac{1}{n})^n$, когда значение n станет очень и очень большим?» По мере роста значения n дробная часть выражения будет становиться все меньше и меньше, обеспечивая все меньший прирост, однако, с другой стороны, будет увеличиваться показатель степени, и, значит, это число будет умножаться на себя большее количество раз. Именно с этой дилеммой мы имеем дело в случае кредитных отчислений — более частая выплата сумм меньшего размера ведет к уменьшению общей суммы выплат.

Бернулли рассмотрел случай начисления процентов по банковскому счету и обнаружил, что максимально возможная сумма выплат вкладчику за год равна величине исходного вклада, умноженной на число 2,7, возведенное в степень с показателем, равным процентной ставке. То есть если положить на счет 100 фунтов стерлингов со ставкой 5% в год и непрерывным начислением процентов, то сумма выплат составит:

$$100 \times 2{,}7^{0{,}05} = £105{,}09$$

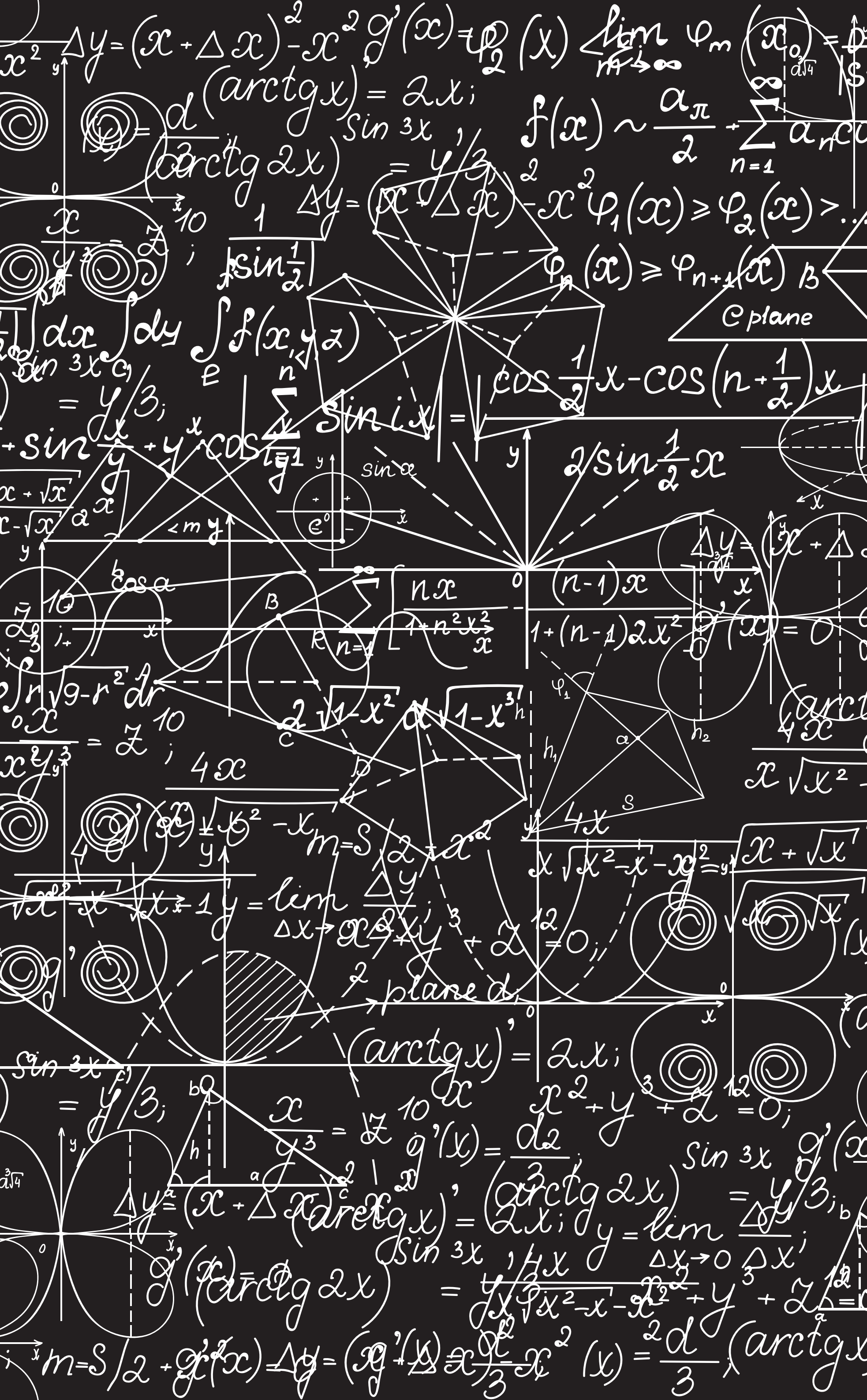
Конечно, нельзя сказать, что эта сумма намного больше тех 105 фунтов стерлингов, которые я получил бы при однократном начислении процентов в конце года, однако, как говорится, копейка рубль бережет! Со временем люди научились выполнять расчеты с более высокой степенью точности, что позволило дополнить число 2,7 дополнительными знаками после запятой. В 1978 году один из основателей компании Apple Inc., американец Стив Возняк (р. 1950), с помощью одного из первых компьютеров Apple смог рассчитать это значение с точностью до более чем 100 000 знаков после запятой. Сегодня мы знаем, что это число, подобно числу π, представляет собой бесконечную последовательность неповторяющихся цифр:

$$2{,}718281828459045235360287471352662 49\ldots$$

Это значение находит применение в самых разных, и, на первый взгляд, не связанных друг с другом областях математики. Выдающийся швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) обозначил его буквой *e* в своей работе по механике (где под «механикой» подразумевалось движение различных тел, а не починка механизмов), и с тех пор его стали называть «числом Эйлера». Это число также присутствует в широко известном тождестве Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Числа 1 и 0, лежащие в основе любых расчетов и всех остальных чисел, не требуют каких-либо дополнительных пояснений. π — геометрическая составляющая в этом тождестве, число, играющее критически важную роль в определении круга. i — квадратный корень из минус единицы, несуществующее мнимое число, которое позволяет нам решать уравнения, не имеющие действительных решений. Это содержательное тождество включает в себя пять чрезвычайно важных чисел и по праву считается одним из самых изящных уравнений математики.


C plane
plane d

ГЛАВА 11

СОСТАВНЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Ученые, инженеры и математики всегда могут воспользоваться так называемым *«анализом размерности»*, чтобы проверить последнюю редакцию той или иной формулы на предмет ее корректности с точки зрения используемых единиц измерения. Вот, например, как выглядит формула для нахождения площади квадрата:

$$\text{площадь квадрата} = \text{длина} \times \text{длина}$$

Площадь, как известно, измеряется в квадратных метрах ($м^2$). Если мы рассмотрим единицы измерения правой части этого уравнения, «длина × длина», то увидим, что оба сомножителя измеряются в метрах, и, перемножив метры на метры, мы также получаем квадратные метры. Единицы измерения обеих частей формулы совпадают. Таким образом, мы провели анализ размерности этой формулы. Несмотря на всю полезность этого метода, его применение все же не гарантирует абсолютной правильности формулы.

Теперь давайте перейдем к площади окружности:

площадь окружности = радиус × радиус

Это равенство является правильным с точки зрения размерности на основании точно таких же доводов, как и в случае предыдущего примера. Однако, как мы помним, для получения правильного ответа в этой формуле также должен присутствовать наш старый приятель — число π:

площадь окружности = πr^2

Чтобы число π не испортило наш анализ, оно само не должно измеряться ни в каких единицах. Число π — константа, которая не измеряется в метрах, килограммах или чем-то еще. То есть число π — это *«безразмерная постоянная»*, и на протяжении веков было приложено огромное количество усилий для вычисления точных значений таких постоянных.

Одним из замечательных достижений французской революции конца XVIII века стала *метрическая система мер*. Революционерам удалось учесть сразу два фактора — потребность в новой, последовательной системе мер и весов, и легкость использования десятичной системой счисления. Начиная с эпохи Возрождения, естествоиспытатели (предшественники современных ученых и математиков) испытывали растущую потребность в обмене информацией и потому нуждались в более универсальной системе записи величин.

Хотя данная система дорабатывалась в течение многих лет, ее основная идея заключалась в том, чтобы иметь небольшое количество базовых единиц измерения, из которых можно было бы вывести все остальные. Изначально базовыми единицами были метр (для длины), килограмм (для массы) и секунда (для времени). Французские революционеры определили метр как одну десятимиллионную расстояния от Северного полюса до экватора по линии, проходящей через Париж. Килограмм был изначально определен как масса тысячи кубических сантиметров воды при температуре, немного превышающей точку замерзания. В 1899 году он был определен заново как единица измерения, равная Международному эталону килограмма, который представляет собой цилиндр из невероятно устойчивого к износу и коррозии сплава платины и иридия. В ближайшие годы это определение планируется снова заменить на новое, более концептуальное определение, основанное на фундаментальных физических постоянных. Секунда была в употреблении с незапамятных времен, и равна одной шестидесятой часа из-за того, что была унаследована от древних цивилизаций, которые измерили время первыми. Сегодня определение секунды привязано к чрезвычайно стабильной частоте колебаний атома цезия — это время, за которое атом цезия совершает 9 192 631 770 колебаний.

По мере того как наши знания о Вселенной расширялись и требовали дополнительных измерений, был добавлен ряд других базовых единиц: кельвин — единица измерения температуры; ампер — единица измерения электрического тока; моль — количество вещества в определенной массе; кандела — единица интенсивности или силы света. Семь базовых единиц, которые сегодня составляют систему единиц СИ (от фр. Système international), позволяют нам описать практически все процессы, происходящие в окружающем мире.

Собственное название получили и многие производные или составные единицы, которые мы сегодня используем. Например, литр — единица объема, равная одной тысячной кубического метра, и согласитесь, что, заправляя машину по дороге на работу, гораздо легче исчислять бензин в литрах, нежели в тысячных долях кубического метра. Многие производные единицы названы в честь ученых, внесших большой вклад в соответствующую область науки.

Так, выдающийся англичанин Исаак Ньютон (1642–1726) прославился тем, что разработал понятие силы тяжести.

Второй закон Ньютона: сила = масса × ускорение.

Для измерения массы используется килограмм — одна из базовых единиц измерения системы СИ. Ускорение измеряется в метрах в секунду в квадрате. Таким образом, единицу силы можно определить как «килограмм-метр в секунду в квадрате», но сегодня мы называем эту единицу «ньютоном».

Французский ученый Блез Паскаль (1623–1662), помимо прочего, внес большой вклад в изучение жидкостей, попутно придумав гидравлический пресс и шприц. Значительная часть его работы была сосредоточена на давлении:

$$\text{давление} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$$

Сила, как мы только что разобрались, измеряется в килограмм-метрах в секунду в квадрате, а площадь — в метрах в квадрате. Таким образом, единицу измерения давления можно определить как «килограмм-метр в секунду в квадрате на метр в квадрате». Конечно, мы можем сократить это определение до «килограмм на метр в секунду в квадрате», но согласитесь, что гораздо удобнее использовать слово «паскаль» — общепринятое сегодня название единицы давления.

Оба вышеприведенных определения содержат фразу «в секунду». Когда мы делим что-либо на единицу времени, мы определяем, как эта величина изменяется за единицу времени. Это очень распространенное явление в науке в целом и в математике в частности, которое называют «скоростью изменения». Самый распространенный пример скорости изменения величин — обычная скорость. В школе вам должны были рассказать о следующей формуле; возможно, при этом для наглядности использовался показанный ниже треугольник:

$$\text{скорость} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время}}$$

Как учитель математики, я должен, прежде всего, отметить, что данная формула позволяет найти *среднее* значение скорости. Например, если я сяду на поезд, идущий из Йорка в Лондон, и проеду это расстояние в 200 миль за 2 часа, то, согласно формуле, моя скорость будет составлять 200 ÷ 2 = 100 миль в час. Однако вполне очевидно, что это средняя скорость, так как поезд сделал остановку на станции моего отправления, после чего многократно набирал и сбавлял скорость, совершая остановки на других станциях, пока, наконец, не остановился в Лондоне.

Традиционное понятие скорости представляет собой скорость изменения положения. В данном конкретном случае речь идет о покрытии мной за каждый час среднего расстояния в 100 миль, то есть изменении моего положения относительно исходной точки на 100 миль.

В свою очередь, ускорение представляет собой скорость изменения скорости — то есть оно показывает, насколько изменяется скорость за заданный промежуток времени. Так, при падении предметов на Земле сила тяжести заставляет их падать с ускорением, равным 9,81 метра в секунду в квадрате. Это означает, что с каждой секундой скорость падающего предмета увеличивается на 9,81 метра в секунду. Это ведет к очень быстрому набору скорости, в результате чего при падении с достаточно большой высоты разбивается практически все, за исключением кошек. На Луне ускорение составляет лишь около 1,66 метра в секунду в квадрате, что позволяет астронавтам совершать прыжки, подобные прыжкам на батуте, несмотря на то, что вес их скафандров превышает их собственный вес.

Поскольку мы в течение всей своей жизни имеем дело с ускорением в 9,81 метра в секунду в квадрате, мы привыкли сравнивать с ним и другие виды ускорений, выражая их в количестве ускорений силы тяжести, или G. Мы ускоряемся, когда меняем направление или скорость движения, что можно ощутить, входя в поворот на автомобиле. На американских горках мы также подвергаемся ускорениям, величина которых может доходить до 6G, но лишь на короткий промежуток времени. А вот астронавтам и пилотам истребителей приходится выдерживать такие перегрузки намного дольше. По этой причине они часто одевают противоперегрузочный костюм, который позволяет сохранять нормальное снабжение мозга кровью за счет внешнего давления на поверхность тела.

Значительные перегрузки могут возникать и при снижении скорости; именно поэтому в современных автомобилях предусмотрены зоны смятия кузова, призванные в случае столкновения растянуть по времени изменение скорости, тем самым снизив величину ускорения, действующего на водителя и пассажиров. То же самое делают и подушки безопасности, обеспечивая более плавное замедление тел водителя и пассажиров.

ОШИБКА В РАСЧЕТАХ: MARS CLIMATE ORBITER

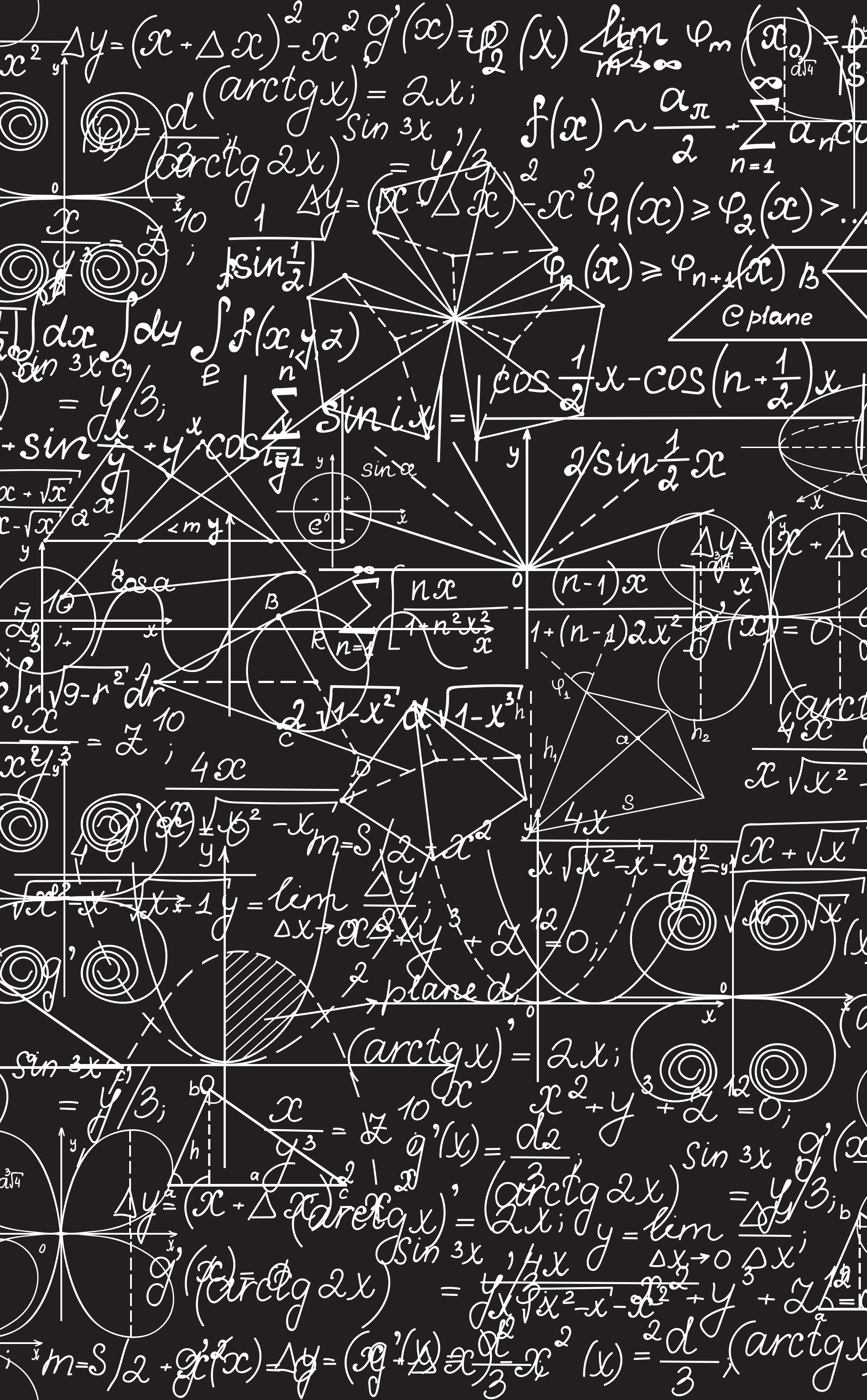
Хотя прошло уже несколько сотен лет после изобретения метрической системы, во многих странах мира по-прежнему используются более старые системы мер. Так, в Великобритании пиво и молоко до сих пор измеряют в пинтах (568 миллилитров), а расстояния на дорожных знаках указывают в милях. В Соединенных Штатах используют сходную, хотя и не идентичную систему, которая также применяется в некоторых отраслях промышленности.

Такое положение дел стало причиной ряда неприятных инцидентов. В 1983 году у авиалайнера «Boeing 767» компании Air Canada закончилось топливо в полете, потому что выполнявшая заправку наземная служба измеряла топливо в фунтах, а не килограммах. Поскольку килограмм более чем в два раза больше фунта, количество залитого топлива было в два раза меньше необходимого. В сочетании с неисправностью датчика топлива, это привело к тому, что пилоту пришлось совершить аварийную посадку на бывшем военном аэродроме, который в тот момент использовался как гоночная трасса. К счастью, никто не пострадал. А пилотов одновременно и наказали за ненадлежащий контроль над уровнем топлива, и наградили за быстроту реакции и летное мастерство.

В 1999 году после девятимесячного полета с Земли космический аппарат Mars Climate Orbiter должен был, как и предполагает его название, выйти на орбиту Марса для исследования климата этой планеты. Однако вскоре после того, как были задействованы двигатели для выведения аппарата на орбиту, контакт с ним был потерян. В ходе последующего расследования выяснилось, что один из поставщиков использовал фунты, а не ньютоны для расчета вырабатываемой двигателями тяги.

Это была вдвойне глупая ошибка. Во-первых, анализ размерности показывает, что фунты и ньютоны служат для измерения разных величин: ньютон — мера силы, тогда как фунт — мера массы. Во-вторых, неполадки в работе двигателей были уже замечены ранее, но по какой-то причине их оставили без должного внимания.

Как бы там ни было, в итоге это привело к тому, что орбитальный аппарат вошел в атмосферу Марса на слишком большой скорости и разлетелся на кусочки прежде, чем смог приступить к своей миссии. Размер финансовых потерь составил более чем 600 миллионов долларов.



C plane
plane d
$(\mathrm{arctg}\,x)' = 2x;$
$\sin 3x$
$2\sin\frac{1}{2}x$
$\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$
$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) > \ldots$
$\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x)$
$f(x) \sim \frac{a_\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ГЛАВА 12

ПРОПОРЦИИ

Концепция пропорциональности кажется очевидной, но так было не всегда. Если у вас есть рецепт, рассчитанный на четыре порции, но вы знаете, что к вам на ужин придет восемь гостей, вы интуитивным образом понимаете, что все ингредиенты нужно взять в двойном размере, поскольку количество гостей вдвое больше расчетного количества порций. Это объясняется тем, что необходимое количество ингредиентов пропорционально количеству гостей. Но что, если один из гостей приведет с собой друга, доведя общее количество гостей до девяти? Здесь уже не все так просто.

Для математика это означает, что существует взаимосвязь между количеством гостей и, скажем, количеством макарон, которое мне нужно приготовить. Если по исходному рецепту нужно взять 300 г макарон, то мы можем определить необходимое количество макарон, воспользовавшись цепью рассуждений «если — то — следовательно» или «унитарным» методом:

Если 4 гостям требуется 300 г макарон, то 1 гостю требуется 300 ÷ 4 = 75 г макарон, следовательно, 9 гостям требуется 75 × 9 = 675 г макарон

Этот метод называется «унитарным» по той причине, что для нахождения ответа мы вычисляем количество, приходящееся на одну единицу — в данном случае, на одного гостя. Еще один способ решения этой задачи состоит в том, чтобы составить формулу для нахождения необходимого количества макарон. Это позволит нам легко вычислять это количество вне зависимости от того, сколько гостей придет к вам на ужин. Предположим, что количество гостей равно n, а соответствующая масса макарон равна m. В таком случае математики могут начать выработку формулы со следующего утверждения:

$$m \propto n$$

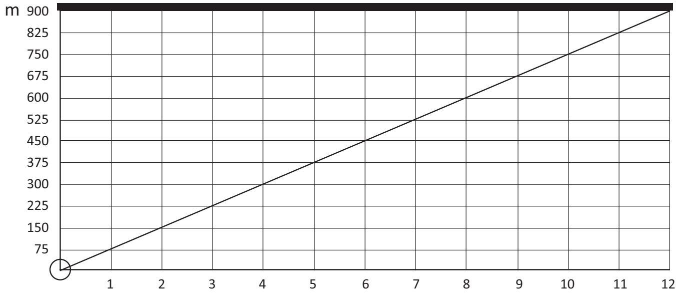
Этот символ означает «пропорционально». У нас пока нет готовой к использованию формулы, однако мы уже изложили исходную посылку.

Теперь нам нужно добавить некоторую числовую информацию. При применении унитарного метода выше мы установили, что на одного гостя приходится 75 г макарон, и это число мы затем умножали на количество гостей, чтобы получить необходимый результат. В данном случае количество гостей равно *n*, поэтому наша формула приобретает следующий вид:

$$m = 75 \times n$$

Число 75 в этой формуле является *коэффициентом пропорциональности* — числом, которое определяет зависимость между переменными *m* и *n*.

В примере с макаронами количество гостей и масса макарон находятся в линейной пропорции. Это объясняется тем, что при графическом представлении данной зависимости она представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (точку в нижнем левом углу, где *m* и *n* равны нулю):



Однако не любая пропорция образует прямую линию. Допустим, что моя компания производит и продает квадратные плитки. При этом площадь плитки очевидным образом зависит от ее длины, но эта зависимость носит нелинейный характер.

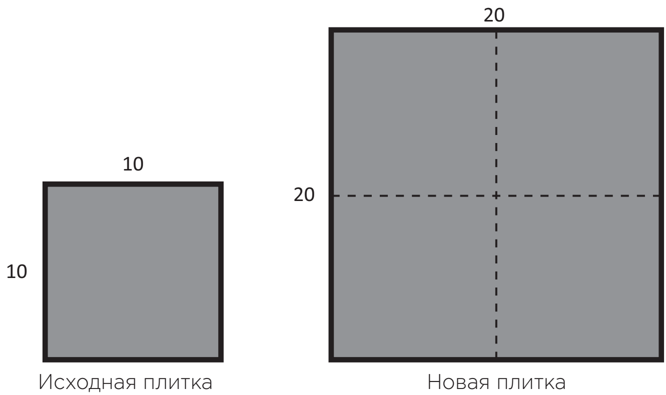
ОШИБКА В РАСЧЕТАХ: ИСТРЕБИТЕЛИ F-22 НАД ЛИНИЕЙ ПЕРЕМЕНЫ ДАТ

Американский истребитель F-22 Raptor — шедевр современного военного самолетостроения. Этот самолет практически необнаружим с помощью радара; последние достижения в аэродинамике, машиностроении и авиации сочетаются в нем с высокопроизводительными компьютерами, контролирующими почти все его системы. В этом же и кроется проблема: что, если компьютер даст сбой?

Именно это и произошло в феврале 2007 года. Двенадцать истребителей F-22 летели с базы на Гавайях в Японию. В ходе этого полета они пересекли линию перемены дат. Это условная и довольно нечеткая линия, которая проходит между Аляской и восточной границей России, далее на юг через Тихий океан с обходом некоторых групп островов, мимо Новой Зеландии и т. д. При движении с востока на запад, как это происходило в данном случае, вы возвращаетесь во времени на 24 часа назад.

Хотя американские военные не сообщили, в чем именно выражалась возникшая проблема, как я подозреваю, в определенный момент самолеты перестали правильно определять скорость изменения различных критически важных показателей. Различные системы начали отображать значения, выходящие за пределы нормального диапазона, что полностью вывело из строя системы навигации и связи. К счастью, это произошло в тот момент, когда поблизости от истребителей находились самолеты-заправщики, следуя за которыми, они и добрались обратно на гавайскую базу. Вот так: самолет стоимостью 148 миллионов долларов не способен даже облететь вокруг земного шара!

При удвоении длины плитки ее площадь увеличится в четыре раза:



Исходная плитка

Новая плитка

Поскольку площадь плитки равна квадрату длины, эту зависимость можно определить следующим образом:

$$\text{площадь} \propto \text{длина}^2$$

И в примере с макаронами, и в примере с плитками мы имели дело с *прямой* пропорцией, когда при увеличении одного значения пропорционально увеличивается и другое значение. В случае *обратной* пропорции при увеличении одного значения другое значение пропорционально уменьшается. Например, представим, что несколько сборщиков мусора производят уборку на музыкальном фестивале. При этом затраченное на уборку время будет тем меньше, чем больше работников будет ее выполнять. То есть имеем:

$$\text{время, затраченное на уборку} \propto \frac{1}{\text{количество сборщиков мусора}}$$

Если нам известно, что 10 сборщиков мусора могут выполнять уборку за 50 часов, то мы можем превратить эту зависимость в формулу, введя коэффициент пропорциональности *k*, который нам еще нужно будет вычислить:

$$50 = k \times \frac{1}{10}$$

Отсюда видим, что *k* = 500 (поскольку одна десятая от 500 равна 50), то есть наша формула примет следующий вид:

$$t = 500 \times \frac{1}{n}$$

где *t* — время, затраченное на уборку, а *n* — количество сборщиков мусора.

Теперь давайте вспомним старую школьную задачу: «Если восьми землекопам требуется восемь часов на то, чтобы выкопать восемь ям, сколько времени потребуется одному землекопу, чтобы выкопать одну яму?» Поэтическая часть нашего мозга так сильно хочет, чтобы мы сказали «один», что ее голос полностью перекрывает то, что хочет сказать нам часть мозга, отвечающая за математические способности. Правильный ответ здесь, конечно же, «восемь часов». При этом унитарный метод приводит нас к понятию «человеко-часа» — объема работы, выполняемого одним человеком за час. То, что восемь землекопов за восемь часов могут выкопать восемь ям, очевидным образом подразумевает, что каждый из них может выкопать одну яму за восемь часов. То есть объем работы по выкапыванию одной ямы составляет восемь человеко-часов.

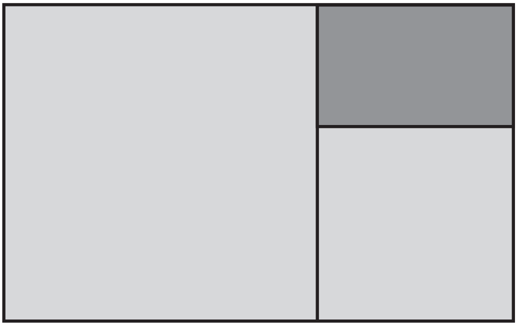
В повседневной жизни мы часто понимаем «пропорцию» как соотношение между длиной и шириной определенного объекта. Мы находим нечто эстетически приятное в пропорциях некоторых вещей. На протяжении веков многие математики, ученые, философы, архитекторы, дизайнеры и художники испытывали большой интерес к этому явлению.

Евклид (ок. 300 г. до н.э.), которого по праву считают отцом геометрии, был первым, кто дал описание пропорции, сегодня известной как «золотое сечение». Применение этой пропорции делает вещи красивыми с пропорциональной точки зрения. Евклид рассматривал эту пропорцию на примере линий, но для большей наглядности я буду использовать пример с прямоугольниками.

Ширина и высота представленного выше прямоугольника соответствуют пропорции золотого сечения. По мнению многих, это делает его идеальным с эстетической точки зрения, в силу чего архитекторы широко использовали прямоугольники с таким соотношением сторон при проектировании самых разных строений, от средневековых мечетей до современных зданий. Так, например, золотое сечение часто применял в своих работах швейцарский архитектор Шарль-Эдуар Жаннере (1887–1965), более известный как Ле Корбюзье.

Ключевой особенностью этого прямоугольника является то, что, если я разделю его на квадрат максимально большого размера и прямоугольник, то этот меньший прямоугольник будет обладать такими же пропорциями, что и исходный, большой прямоугольник.

Для большей наглядности давайте таким же образом разобьем и меньший прямоугольник:



Как видим, темно-серый прямоугольник тоже обладает такими же пропорциями, что и исходный прямоугольник. Если этот рисунок чем-то напоминает вам работы Пита Мондриана (1872–1944) — голландского художника, прославившегося своими геометрическими абстрактными картинами, то это вполне объяснимо: стремясь создавать идеальные с эстетической точки зрения формы, он часто пользовался золотым сечением в своих работах.

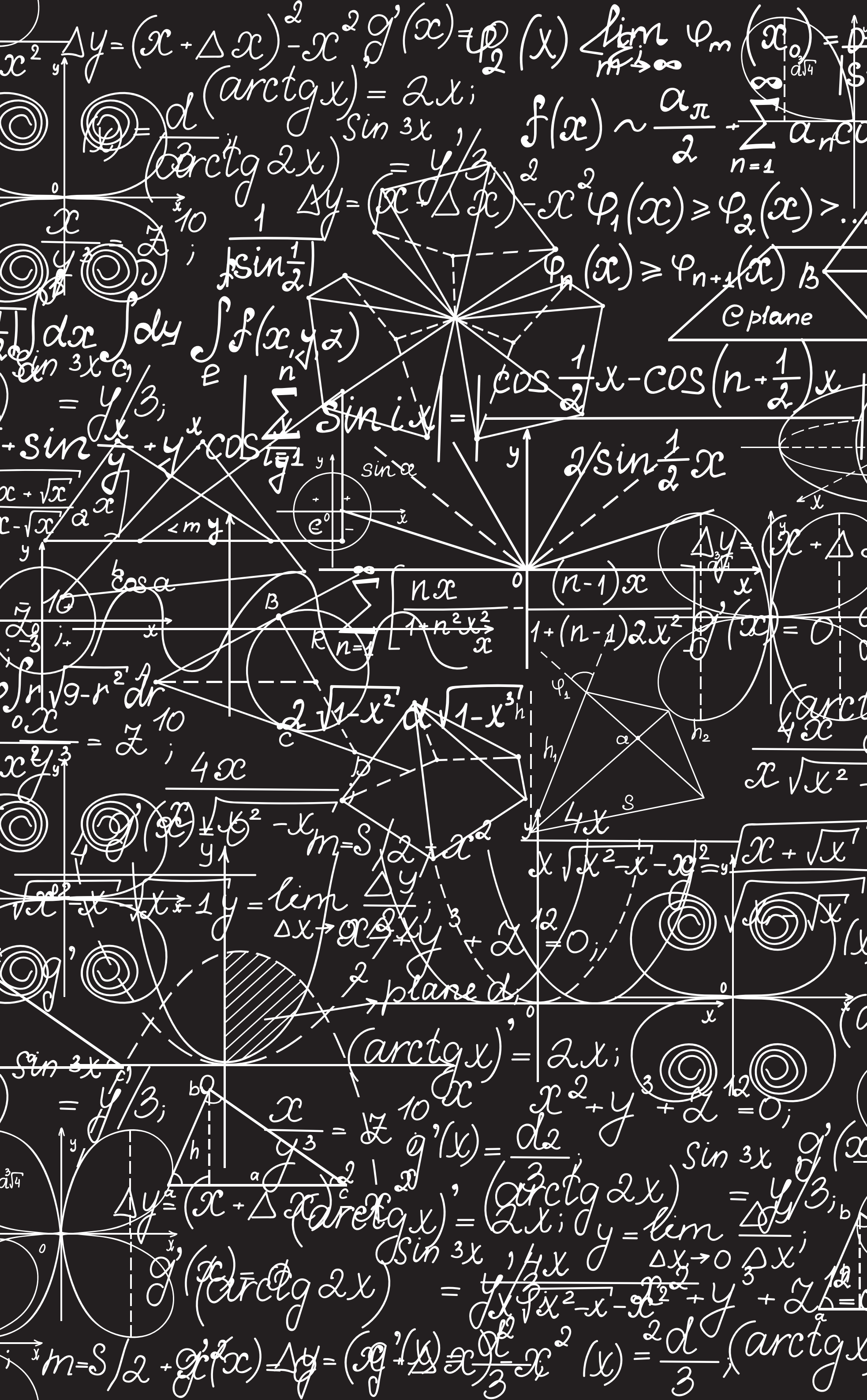
Так почему же нам так приятно смотреть на этот прямоугольник? Никто пока не дал точного ответа на это вопрос. Однако американский инженер Адриан Бежан считает, что наши глаза в процессе эволюции научились «усваивать» изображения с такими пропорциями с одного взгляда, что облегчает обработку информации для нашего мозга. Возможно, именно поэтому мы бессознательно находим наиболее привлекательными формы, картины, здания и даже лица, пропорции которых близки к золотому сечению.

Золотое сечение играет в математике настолько важную роль, что, подобно числам π и *e*, получило собственное буквенное обозначение: ϕ (произносится как «фи»), в честь отца классической греческой архитектуры, древнегреческого архитектора и скульптора Фидия (ок. 480–430 до н. э.). Как и числа π и *e*, число ϕ также является иррациональным:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$$

(Почему число ϕ равно этому значению, объясняется на стр. 193.)

Таким образом, длина наших красивых прямоугольников в полтора с лишним раза больше их ширины. Точно так же люди интуитивно считают наиболее привлекательными лица, пропорции которых близки к золотому сечению — вы даже можете скачать специальное приложение, которое анализирует фотографии с помощью технологии распознавания лиц, и определяет, насколько вы «красивы».


C plane
plane d

ГЛАВА 13

СООТНОШЕНИЕ

Знак деления обелус «÷» можно рассматривать как комбинацию знака соотношения «:» и используемой в дробях горизонтальной черты. Сегодня уже нельзя сказать, имел ли это в виду швейцарский математик Иоганн Ран (1622–1676), когда впервые использовал этот знак, но он явным образом подчеркивает взаимосвязь между делением, соотношением и дробями. При этом взаимосвязь между делением и дробями вполне очевидна:

$$5 \div 7 = \frac{5}{7}$$

Соотношение 5:7, однако, имеет несколько иное значение по сравнению с делением и дробью. Если две величины находятся в соотношении 5:7, это означает, что на каждые пять единиц одной величины приходится семь единиц другой величины.

Для приготовления кускуса рекомендуют использовать 160 миллилитров воды на каждые 100 граммов сухого кускуса. Масса 160 миллилитров воды удобным для нас образом равна 160 граммам, поэтому это соотношение можно записать так:

вода : кускус
160 : 100

Если для приготовления порции этого средиземноморского лакомства я смешаю воду и сухой кускус именно в таком соотношении, чему будут равны дробные доли этих составляющих? Как раз тут и проявляется различие между соотношениями и дробями.

Доля воды не может составлять $\frac{160}{100}$, так как это больше общей массы готового продукта. И точно так же доля сухого кускуса не может составлять $\frac{100}{160}$ от массы готового продукта.

Вместо этого мы видим, что масса готового блюда должна составлять 160 + 100 = 260 г. Это означает, что доли воды и сухого кускуса должны составлять, соответственно, $\frac{160}{260}$ и $\frac{100}{260}$. При этом в качестве знаменателя каждой дроби используется сумма двух чисел, используемых в соотношении (или общее число частей).

Как и в случае дробей, соотношения при необходимости можно модифицировать, используя принцип эквивалентности. Так, в данном случае можно уменьшить члены соотношения до минимума, разделив оба числа на 20:

160:100 = 8:5

Допустим, что, приступив к приготовлению блюда, я обнаружил, что масса имеющегося кускуса составляет 250 г. Сколько в таком случае мне потребуется воды? Что ж, учитывая, что исходное соотношение составляет 160:100, я могу заметить, что масса имеющегося кускуса в 2,5 раза больше, и, значит, мне нужно взять в 2,5 раза больше воды. То есть мне требуется 2,5 × 160 = 400 г воды.

Во многих школьных задачах по теме соотношений требуется правильно разделить деньги. Например: «Если тетя Анна выдаст своим племянницам Билли, Кларе и Дейзи 100 фунтов стерлингов в соотношении 2:3:5, сколько получит каждая из девочек?»

Первое, что мы можем здесь заметить, так это то, что в соотношениях можно использовать более двух величин, что невозможно в случае дробей. Для решения этой задачи можно вообразить себе тетю Анну и лежащую перед ней груду из сотни однофунтовых монет. Она начинает раздавать их племянницам: две дает Билли, три — Кларе и пять — Дейзи. За каждый такой круг раздачи она раздает 10 фунтов стерлингов. Очевидно, что, имея изначально 100 фунтов стерлингов, она сможет выполнить 10 кругов раздачи, и значит, каждая племянница в целом получит в десять раз больше по сравнению с долей, выдаваемой ей на каждом круге раздачи, а именно, 20, 30 и 50 фунтов стерлингов соответственно:

Б	:	К:	:	Д	Общее число частей
2		3		5	10
20		30		50	100

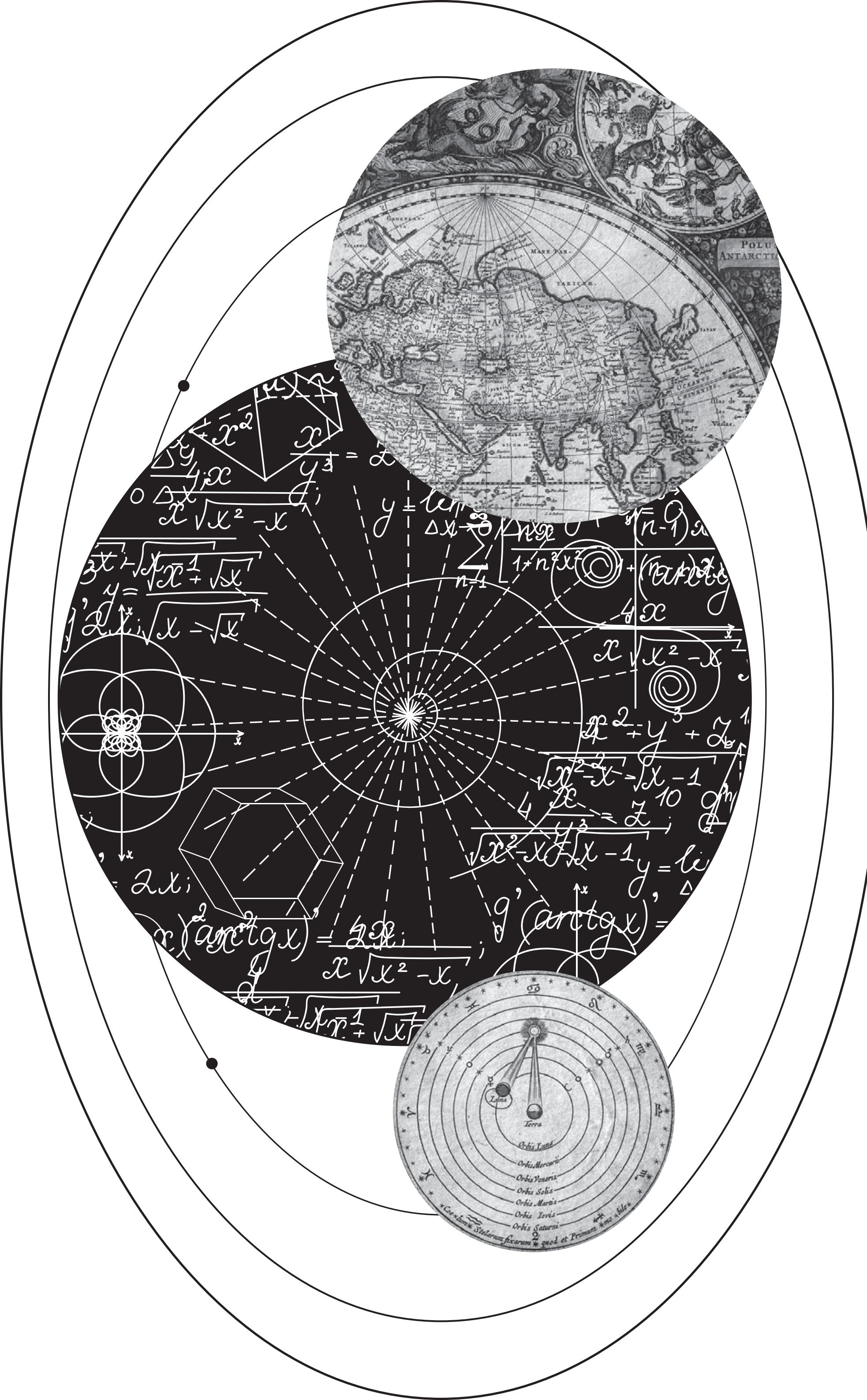
Еще одной областью применения соотношений являются масштабы карт. Хотя иногда масштабы карт и атласов указываются с помощью фразы вида «1 см соответствует 100 км», довольно часто для этого используются соотношения вида 1:50 000. Это соотношение между размерами объектов на карте и их реальными размерами.

В качестве примера давайте выясним, чему равно реальное расстояние от моего дома до букмекерской конторы, если на карте оно составляет 5 сантиметров.

Соотношение подсказывает мне, что реальное расстояние должно быть в 50 000 раз больше. 5 см × 50 000 = 250 000 см. Сколько же это в привычных нам единицах? Чтобы преобразовать сантиметры в метры, необходимо разделить это число на 100. Получим 2500 м или 2,5 км. Как видим, не так уж далеко.

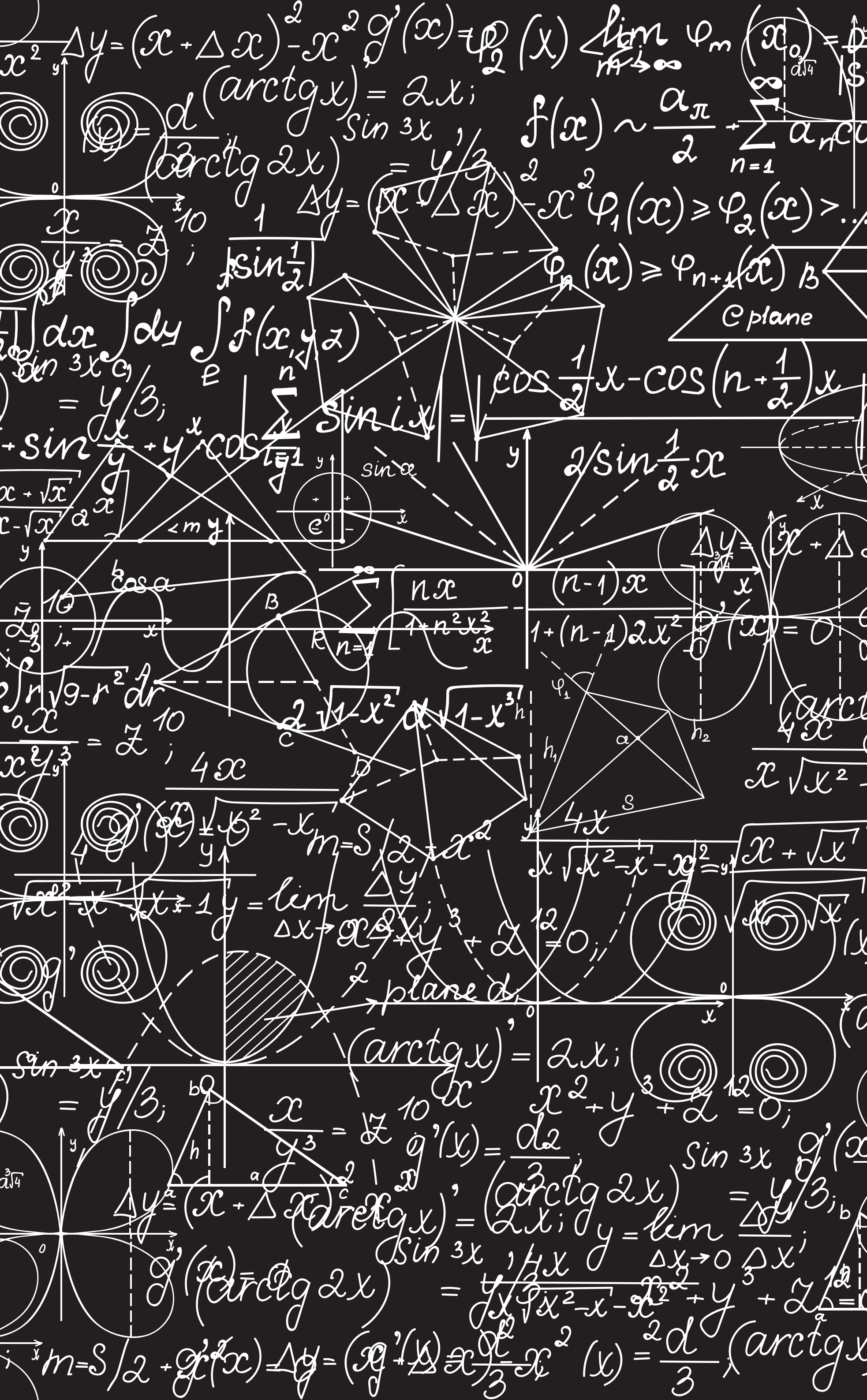
В букмекерской конторе мне придется иметь дело с еще одной разновидностью соотношений, а именно — с *коэффициентами ставок*. Хотя это, по сути, соотношения, их по сложившейся традиции принято записывать с помощью чисел, разделенных предлогом «к» или знаком «–». Иногда их даже записывают в виде дроби, используя знак наклонной черты «/». Вне зависимости от используемого способа записи, коэффициенты ставок представляют собой соотношение между размером выигрыша и размером поставленной суммы. Так, например, если коэффициент ставки составляет «пять к двум» (или «5–2», или «5/2»), значит, каждые 2 поставленных фунта стерлингов дадут вам 5 фунтов стерлингов выигрыша. Поскольку вам также возвратят и сумму ставки, то в случае успеха ставки в 2 фунта стерлингов вы в целом будете иметь 7 фунтов стерлингов. Коэффициент ставки «два к пяти» означает, что вы выиграете 2 фунта стерлингов при успехе ставки в 5 фунтов стерлингов, в целом получив те же 7 фунтов стерлингов.

Стоит отметить, что эти коэффициенты ставок не являются вероятностями, хотя имеют к ним некоторое отношение. Более подробные сведения о вероятностях см. на стр. 275.


Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ III

АЛГЕБРА


C plane
plane d
(arctg x)' = 2x;
sin 3x
2 sin 1/2 x

ГЛАВА 14

ОСНОВЫ

В основе алгебры лежит предельно простая концепция: с помощью букв мы обозначаем числа, которые мы пока не знаем («неизвестные») или которые нам, возможно, потребуется изменить («переменные»).

Только и всего! Делать алгебраические выкладки люди научились уже в очень древние времена. Сегодня их начинают делать уже ученики начальной школы:

У меня есть некоторое число. Если взять два моих числа, получится десять. Какое это число?

С такого вопроса может начинаться изучение математики в любой точке мире. Каким бы образом вы ни решали эту задачу, при этом вам придется иметь дело с абстрактным неизвестным числом. В алгебре используются в точности те же правила, что и в обычной арифметике. С помощью алгебры человечеству удалось создать теории, объясняющие строение Вселенной с гораздо большей степенью подробности по сравнению с существовавшими ранее религиозными и философскими интерпретациями. Алгебра не только используется сама по себе, но и находит применение во всех других областях математики.

Каким же образом решается изложенная выше задача? Я уверен, что вы уже нашли ее решение, и ход ваших размышлений выглядел примерно следующим образом: если два числа дают в сумме десять, то одно число должно равняться половине от десяти. Половина от десяти это пять!

Тем самым вы показали, что уже знаете, что такое удвоение или умножение на два, и что противоположностью, или, иначе говоря, «инверсией» этой операции является деление на два. Так держать!

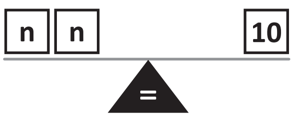
Автор знаменитой фразы «Я думаю, следовательно, я существую», французский философ и математик Рене Декарт (1596–1650) впервые использовал в алгебраических выкладках систему буквенных обозначений, которая используется и поныне. Декарт мог бы выразить данную задачу следующим образом:

$$2n = 10$$

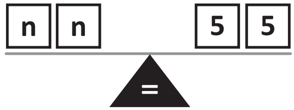
Здесь неизвестное число сокращенно обозначено как n. 2n означает «два умножить на n». Мы могли бы написать $2 \times n$, но в силу того, что знак произведения можно легко спутать с широко используемой буквой x, обычно этот символ принято опускать, указывая его только при подстановке чисел вместо букв. Наконец, «= 10», как обычно, означает «равно десяти».

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Представленная выше формулировка задачи называется «уравнением». Обычно (но не всегда) такое уравнение имеет некоторое решение. Один из способов найти это решение состоит в том, чтобы представить задачу в виде качелей-весов, где знак равенства является точкой опоры. Вот как будут выглядеть такие качели в данном случае:



Как видим, для того чтобы обеспечить равное число коробок слева и справа, нам нужно разделить число десять на две равные коробки (т. е. разделить на два):

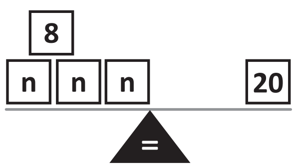


Следовательно, число n должно равняться пяти.

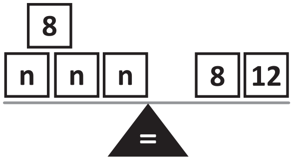
Польза аналогии с качелями-весами состоит в том, что из своего опыта мы знаем, что для поддержания таких весов в равновесном состоянии мы должны иметь грузы одинаковой массы с обеих сторон. Если мы изменяем груз с одной стороны, то для сохранения равновесия или равенства точно такое же изменение нужно сделать и с другой стороны.

У меня есть некоторое число. Если взять три моих числа и добавить восемь, получится двадцать. Какое это число?

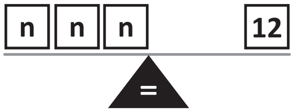
Эта задача уже немного сложнее, но, снова обозначив неизвестное буквой n, мы получим уравнение $3n + 8 = 20$. Качели-весы будут выглядеть следующим образом:



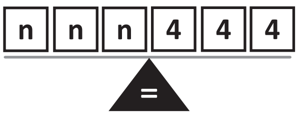
Число 20 я могу представить в виде суммы чисел 12 и 8:



Теперь я могу, не нарушая равновесия, удалить с обеих сторон число 8:



Чтобы обеспечить равное число коробок слева и справа, нам нужно разделить 12 на три:



Следовательно, число n должно равняться 4. Применив каждый из этих шагов не к качелям, а к уравнению, получим следующую последовательность действий:

$$3n + 8 = 20$$

(вычитаем 8 из обеих сторон)

$$3n = 12$$

(делим на 3 обе стороны)

$$n = 4$$

Поиск решения уравнения — это своего рода игра, в которой вы последовательно удаляете с качелей лишние элементы, пока на них не останется только непосредственно неизвестное с одной стороны и некоторое число с другой стороны. Это последовательное удаление элементов производится с помощью обратных операций. Например, вот как это делается в случае уравнения с вычитанием и делением:

$$\frac{n}{5} - 2 = 4$$
$$(+2)$$
$$\frac{n}{5} = 6$$
$$(\times 5)$$
$$n = 30$$

Данная «игра» немного усложняется, когда неизвестное присутствует в обеих частях уравнения. Однако этот случай не настолько сложен, как может показаться:

$$5n + 7 = 3 + n$$
$$(-n)$$
$$4n + 7 = 3$$
$$(-\ 7)$$
$$4n = -4$$
$$(\div 4)$$
$$n = -1$$

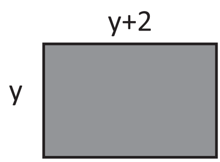
При этом полезно помнить о том, что мы всегда можем проверить найденное решение, подставив это число в исходное уравнение. Это называется «подстановкой»:

$$5 \times (-1) + 7 = 3 + (-1)$$
$$-5 + 7 = 2$$
$$2 = 2$$

Поскольку все сходится, наш ответ является верным.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все приведенные выше уравнения называются «линейными», поскольку они не содержат возведенных в степень неизвестных. Любое уравнение, которое содержит возведенное в квадрат неизвестное, называется «квадратным». Существуют различные способы решения таких уравнений. Допустим, что у нас есть прямоугольник с площадью 15 м^2. Мы не знаем точно длину его сторон; нам лишь известно, что одна сторона на 2 метра больше другой. Можем ли мы определить длину сторон прямоугольника на основе этой информации?



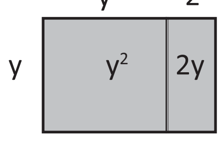
Площадь прямоугольника вычисляется путем перемножения его длины и ширины; поэтому, помня о том, что знак умножения можно опустить, мы можем составить следующее уравнение:

$$y(y + 2) = 15$$

То есть нам нужно найти два числа, одно из которых на два больше другого, и произведение которых равно 15.

Можно заметить, что в данном случае отлично подойдут числа 3 и 5 — таким образом, дело сделано! В то же время у нас нет уверенности в том, что мы всегда сможем решить такое уравнение, производя вычисления в уме. Поэтому давайте рассмотрим некоторые алгебраические способы решения данного квадратного уравнения.

Мы не можем использовать здесь метод качелей — неизвестное присутствует в двух местах, и нет какого-либо способа свести их воедино. В качестве вспомогательной меры мы можем разбить прямоугольник на квадрат и небольшой прямоугольник. Площадь квадрата равна $y \times y = y^2$. Площадь небольшого прямоугольника равна $2 \times y = 2y$, что иллюстрирует приведенный ниже рисунок:



Теперь мы видим, что $y(y + 2) = y^2 + 2y$ и, поскольку площадь квадрата и площадь небольшого прямоугольника в совокупности дают площадь большого прямоугольника, это выражение также должно равняться 15:

$$y^2 + 2y = 15$$

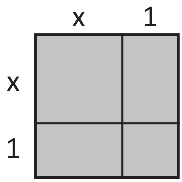
Таким образом, мы произвели умножение на скобки и теперь явно видим член y^2, наличие которого делает это уравнение «квадратным». Существуют три алгебраических способа решения квадратных уравнений — заполнение квадрата, разложение на множители и применение формулы корней квадратного уравнения.

ЗАПОЛНЕНИЕ КВАДРАТА

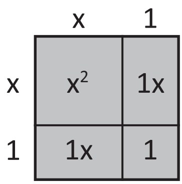
Этот метод требует понимания того, что происходит в случае перемножения или «*раскрытия*» скобок следующего вида:

$$(x + 1)^2$$

Здесь нам могут снова помочь геометрические построения, поскольку $(x + 1)^2$ означает $(x + 1) \times (x + 1)$, то есть число умножается само на себя, что можно представить как площадь квадрата. Разбив стороны квадрата на части с длинами x и 1, мы в результате получим следующие области внутри квадрата:



Вычислив площадь каждой внутренней области, получим:



Следовательно, $(x + 1)^2 = x^2 + 1x + 1x +1$. Сложив вместе члены 1x, получим:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Что же это нам дает? Давайте сравним правую часть этого уравнения с левой частью того квадратного уравнения, которое нам нужно решить. Можно заметить, что выражения $x^2 + 2x + 1$ и $y^2 + 2y$ очень схожи между собой, отличаясь только наличием члена в первом выражении. Исходя из этого, можно записать следующее равенство:

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$$

Для чего же нужно было делать все эти преобразования? Для того чтобы переписать квадратное уравнение так, чтобы неизвестное *у* находилось только в одном месте. Это позволит нам решить данную задачу таким же образом, как мы решали линейные уравнения. Прежде всего, давайте еще раз запишем исходное уравнение и посмотрим, как мы его изменили:

$$y^2 + 2y = 15$$
$$(y + 1)^2 - 1 = 15$$

Добавив единицу к обеим сторонам уравнения, получим:

$$(y + 1)^2 = 16$$

Теперь нам нужно вспомнить, как производится извлечение квадратного корня. Вспомнив то, что говорилось на стр. 18, извлечем квадратный корень из обеих частей уравнения:

$$y + 1 = \pm\sqrt{16}$$

Мы использовали здесь знак «±» по той причине, что получить число 16 можно, возведя в квадрат и число 4, и число −4:

$$y + 1 = \pm 4$$

Теперь давайте вычтем 1 из обеих сторон уравнения:

$$y = \pm 4 - 1$$

Это означает, что *у* может равняться либо $+4 - 1 = 3$, либо $-4 - 1 = -5$. Оба эти варианта являются одинаково корректными решениями квадратного уравнения, но только вариант $y = 3$ имеет смысл в контексте прямоугольников. Теперь, уже зная, что длина первой стороны y равна 3, мы можем определить и длину второй стороны, равную $y + 2$. Таким образом, мы видим, что данный прямоугольник обладает сторонами длиной 3 м и 5 м, как мы и установили изначально.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Метод разложения на множители опирается на тот факт, что если произведение двух чисел равно нулю, то одно из этих чисел тоже равно нулю:

$$\text{Если } m \times n = 0,$$
$$\text{то } m = 0 \text{ или } n = 0 \text{ или } m = n = 0$$

Наше уравнение выглядит как $y^2 + 2y = 15$, поэтому первое, что нужно сделать, чтобы воспользоваться данной закономерностью, это вычесть 15 из обеих частей уравнения, чтобы получить 0 в правой части:

$$y^2 + 2y - 15 = 0$$

Чтобы разложить на множители квадратное уравнение, его необходимо представить в виде произведения двух выражений в скобках: $(y + n)(y + m)$, где n и m — числа. Здесь нам опять могут помочь прямоугольники:

	y	n
y	y^2	ny
m	my	nm

Как видим, $(y + n)(y + m) = y^2 + my + ny + nm$. Если мы сравним это выражение с нашим уравнением, то увидим, что $my + ny$ должно равняться *2y*, а *nm* должно равняться −15:

$$\begin{array}{ccc} y^2 & + 2y & - 15 \\ y^2 & + my + ny & + nm \end{array}$$

То есть нам нужны два числа, сумма которых равна 2 и произведение которых равно −15. Получить отрицательное произведение и положительную сумму можно лишь, используя более крупное положительное число (что обеспечит положительную сумму) и менее крупное отрицательное число (что обеспечит отрицательное произведение). Исходя из этого, мы можем принять $m = (-3)$ и $n = 5$. Тогда, как и требовалось, $m + n = -3 + 5 = 2$, а $mn = -3 \times 5 = -15$.

Теперь мы знаем, что:

$$y^2 + 2y - 15 = (y - 3)(y + 5) = 0$$

Чтобы выполнялось это равенство, должно выполняться равенство $y - 3 = 0$ или равенство $y + 5 = 0$. Это довольно простые линейные уравнения, решение которых можно найти в уме: неизвестное *y* должно равняться 3 или –5, что в точности совпадает с результатом, полученным путем заполнения квадрата. Опять же оба эти варианта представляют собой одинаково корректное решение, но только вариант $y = 3$ имеет смысл в контексте прямоугольников.

В общем случае, чтобы решить квадратное уравнение путем разложения на множители, необходимо найти два числа, сумма которых равна числу, стоящему перед *y*, и произведение которых равно постоянному члену (без *y*). Затем следует подставить эти числа внутри скобок, приравнять оба выражения нулю, и дело сделано!

ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решить квадратное уравнение путем заполнения квадрата или разложения на множители не всегда легко. К счастью для нас, нашлись люди, которые выполнили заполнение квадрата в обобщенном виде и получили формулу для решения квадратного уравнения. Одним из первых такую формулу предложил индийский математик Брахмагупта (597–668), но поскольку это произошло за тысячу лет до появления на свет Декарта и его нотации, формула была выражена словесно, а не с помощью буквенных обозначений. Как бы там ни было, формула для решения квадратного уравнения вида $ay^2 + by + c = 0$ выглядит следующим образом:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Несмотря на свой устрашающий вид, данная формула довольно проста в использовании. Так, в случае нашего уравнения $y^2 + 2y - 15 = 0$ мы видим, что $a = 1$, $b = 2$ и $c = (-15)$. Подставив эти числа в формулу, получим:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times -15}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - -60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$y = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$y = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \text{ или } y = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

Здесь нужно обратить внимание на следующие два момента. Во-первых, данная формула позволяет решать квадратные уравнения, в которых член с неизвестным в квадрате начинается с числа. При использовании заполнения квадрата или разложения на множители это тоже возможно, но требует некоторых дополнительных усилий. Во-вторых, если выражение $b^2 - 4ac$ является отрицательным, то вы не можете извлечь из него квадратный корень, и квадратное уравнение не имеет решений. Точнее говоря, в таком случае оно не имеет обычных, «вещественных» решений. Математики договорились о том, что квадратный корень из –1 представляет собой «мнимое» число, обозначаемое буквой *i*. Это позволило получить множество интересных результатов, которые находят удивительно широкое применение в таких далеко не мнимых областях, как электроника и квантовая физика.

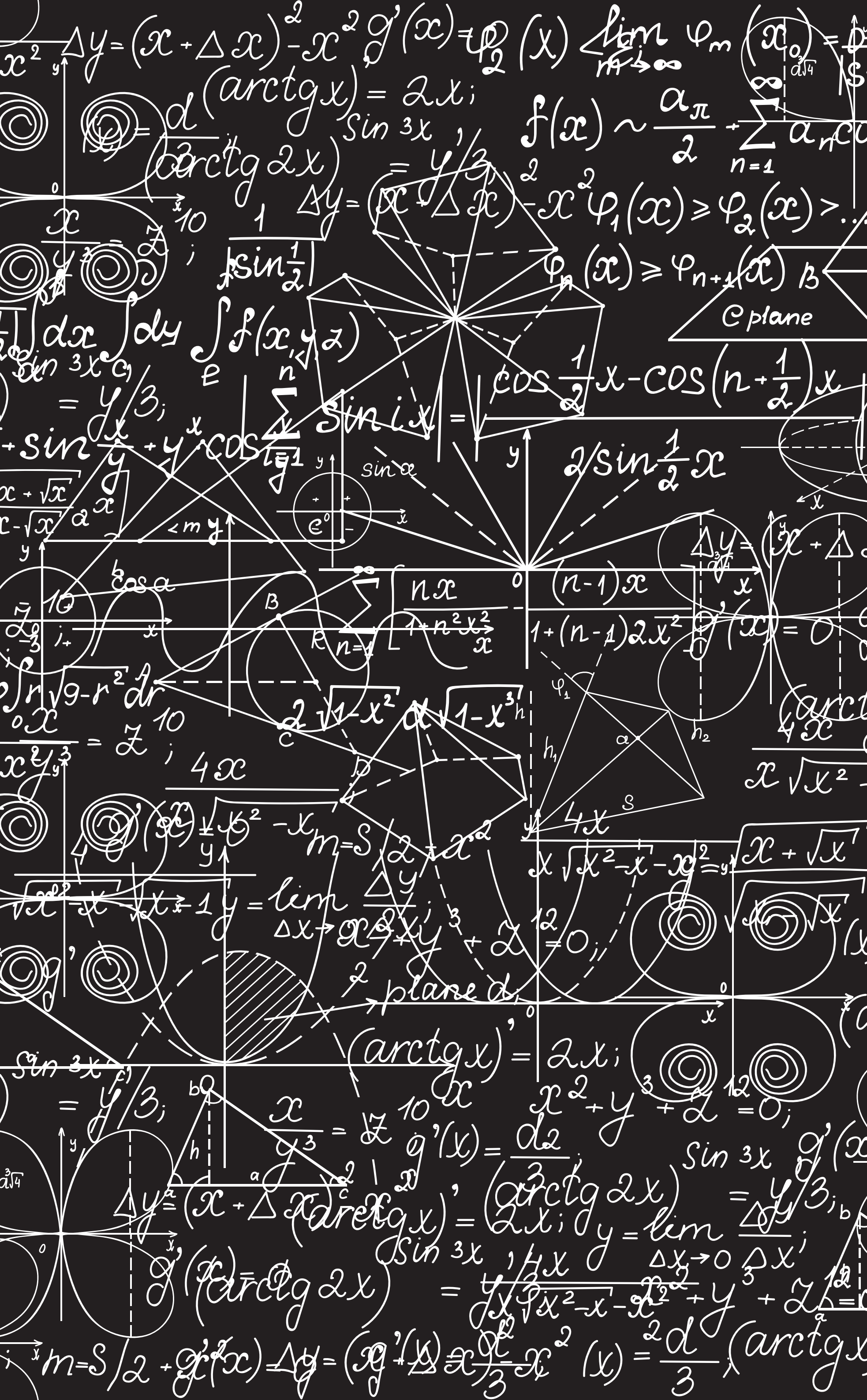
ТЕРМИНОЛОГИЯ

Существует ряд ключевых понятий, значение которых вам будет полезно знать при дальнейшем изучении алгебры. Хотя некоторые из них уже встречались выше, давайте сведем эту терминологию воедино:

Термин	**Определение**	**Пример**
Коэффициент	Число, стоящее перед неизвестным	$3x^2$: 3 — коэффициент при x^2
Выражение	Некоторые алгебраические выкладки без знака =	$3x^2 + 2x - 5$
Член	Часть выражения	В приведенном выше выражении $2x$ является членом
Уравнение	Некоторые алгебраические выкладки со знаком =. Обычно позволяет найти некоторые решения	$3x^2 + 2x - 5 = 0$ — квадратное уравнение
Формула	Уравнение, в которое можно подставлять значения; обычно выражает некоторый физический закон	$E = mc^2$ — формула, определяющая взаимосвязь между энергией (E), массой (m) и скоростью света (c)
Тождество	Уравнение, являющееся истинным при любых значениях входящих в него переменных. Может обозначаться знаком из трех черточек (≡).	$a(b + c) \equiv ab + bc$ — тождество, верное при любых значениях переменных a, b и c.

БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЕКАРТА

Декарт не был первопроходцем в использовании букв для обозначения неизвестных величин, но, тем не менее, в своей работе «Геометрия» (1637 год) он впервые описал современный способ записи алгебраических выражений. В этой работе ему также впервые удалось соединить друг с другом две отдельные области математики — геометрию и алгебру, что сделало возможным выражение геометрических фигур и линий в виде алгебраических уравнений. Согласно легенде, идея использования системы координат x и y (которые, в честь Декарта, также называют «декартовыми» координатами) пришла Декарту в голову, когда он, лежа в постели, наблюдал за движением мухи по потолку. Стремясь найти способ точного описания положения мухи, он решил выбрать угол потолка в качестве отправной точки (или *«начала координат»*) и определять положение мухи с помощью двух числовых *«координат»* — почти так же, как это делается в игре «морской бой».



C plane
plane d

ГЛАВА 15

ОПТИМИЗАЦИЯ

В жизни нам часто приходится решать задачи на оптимизацию — мы пытаемся сделать предельно большими такие вещи, как прибыль, объем продаж, количество просмотров или посещений, либо сделать предельно малыми такие вещи, как затраты денег и времени. Если такая задача может быть описана математически с использованием алгебраических выражений, то в большинстве случаев вы также можете найти ее идеальное решение с использованием алгебраических методов.

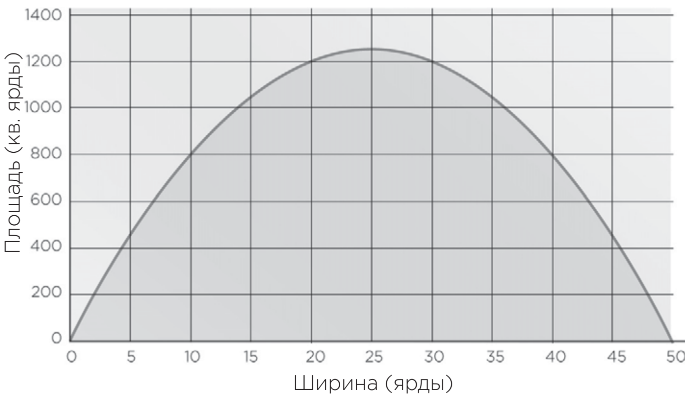
В одной старой легенде говорится, что некогда один рыцарь, у которого было много сыновей, решил подарить им в качестве свадебного подарка столько земли, сколько каждый из них мог огородить веревкой длиной в 100 ярдов. Он указал, что участок может быть ограничен с одной стороны одной из имеющихся изгородей, и что он должен быть прямоугольным. Как же могли обеспечить себе максимальное количество земли сыновья с более-менее приличным пониманием математики? Мы можем смоделировать эту ситуацию следующим образом:

Мы знаем, что длина веревки составляет 100 ярдов, поэтому *ширина + длина + ширина* = 100. Обозначив ширину буквой w, а длину — буквой *l*, получим: 2w + *l* = 100. Мы также можем сказать, что длина равна 100 − 2w; очень скоро мы этим воспользуемся.

Нам нужно обеспечить максимально возможную площадь. Площадь определяется путем перемножения ширины и длины. Обозначив площадь буквой А, получим:

$$A = wl,\ \text{но}\ l = 100 - 2w,\ \text{поэтому}$$
$$A = w(100 - 2w)$$

Таким образом, мы получили формулу для определения площади прямоугольника на основе его ширины. После этого мы можем последовательно подставлять в формулу различные значения w, пытаясь найти значение, обеспечивающее максимальный результат. Однако у нас не будет полной уверенности в том, что мы нашли оптимальное значение, пока не будут испробованы все возможные значения. Еще один способ состоит в том, чтобы построить график:



Этот график явно показывает, что максимально возможная площадь в 1250 квадратных ярдов обеспечивается, когда ширина w составляет 25 ярдов. Мы нашли *«графическое»* решение задачи, но можно ли найти этот ответ аналитически?

И СНОВА ЗАПОЛНЕНИЕ КВАДРАТА

Раскрыв скобки в формуле для площади $A = w(100 - 2w)$, получим:

$$A = 100w - 2w^2$$

Это квадратное уравнение, что позволяет нам воспользоваться методом заполнения квадрата; однако для этого его сначала нужно немного преобразовать:

$$A = (-2w^2) + 100w$$
$$A = (-2)(w^2 - 50w)$$

Тем самым мы сделали выражение в скобках очень похожим на примеры из предыдущей главы:

$$w^2 - 50w = (w - 25)^2 + c$$

Я записал здесь «+ c», поскольку знаю, что нам нужно найти некоторое число, при котором данное уравнение будет верным.

$$(w - 25)^2 = (w - 25)(w - 25) = w^2 - 50w + 625$$

При возведении в квадрат выражения в скобках мы получим дополнительное число 625 в правой стороне уравнения. Чтобы избавиться от этого числа, примем $c = (-625)$:

$$w^2 - 50w = (w - 25)^2 - 625$$

Теперь давайте подставим это выражение (выделив его для наглядности квадратными скобками) в исходное уравнение для площади и выполним некоторые преобразования:

$$A = (-2)[w^2 - 50w]$$
$$A = (-2)[(w - 25)^2 - 625]$$
$$A = (-2)(w - 25)^2 + 1250$$

Тут в игру вступает небольшая магия. Дело в том, что после приведения квадратного уравнения к форме заполненного квадрата оно само указывает вам, где находится его точка максимума или минимума.

В данном случае формула для площади состоит из отрицательной и положительной частей — соответственно, выражения $-2(w - 25)^2$ и числа 1250. Следовательно, чтобы получить максимально возможную площадь, мы должны минимизировать отрицательную часть, поскольку как-либо изменить положительную часть невозможно.

Заключенное в скобки выражение возводится в квадрат и потому всегда дает положительный результат. Значит, это выражение дает минимальный результат в том случае, когда оно равно нулю, то есть когда $w = 25$. Это показывает нам, что максимально возможная площадь составляет 1250 кв. ярдов при $w = 25$ ярдов. То есть чтобы получить наибольший участок земли, сын рыцаря должен огородить прямоугольник с шириной 25 ярдов и длиной 50 ярдов.

Как видим, нам пришлось проделать достаточно сложные выкладки, но, надеюсь, вы уловили логику их завершающей части. Метод заполнения квадрата подходит только для квадратных уравнений. Как, в таком случае, можно оптимизировать формулу, содержащую более высокие степени?

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Область математики, называемая *«интегральным исчислением»*, позволяет нам проанализировать, каким образом изменяются значения. Процесс *«дифференцирования»* позволяет нам определить скорость изменения значения и найти точки максимума и минимума без построения какого-либо графика.

В основе этого процесса лежит концепция градиента и понимание того, чему равен градиент в точках максимума и минимума. Давайте представим, что вы отправились на прогулку по Математическим горам, склоны которых представляют собой аккуратные плавные кривые. Значительная часть вашего пути будет представлять собой подъем в гору с положительным градиентом. Также часть вашего пути будет представлять собой спуск с горы; при этом градиент будет отрицательным по отношению к вашему направлению движения. Вершины гор и дно долин — то есть точки максимума и минимума высоты на вашем пути — будут представлять собой ровные участки поверхности, в которых вы будете переходить от подъема к спуску, или наоборот, от спуска к подъему.

Дифференцирование позволяет нам найти эти точки с нулевым градиентом.

Мы не будем здесь подробно рассматривать, как и почему осуществляется дифференцирование — эти подробности вы можете найти в учебнике по программе средней школы.

Таким образом, представим, что за сегодня вы планируете пройти 10 км, преодолев несколько «кубических» гор. «Кубическими» называются уравнения, которые содержат член x^3, и данные конкретные горы описываются приведенной ниже формулой, где x и y — расстояния от исходной точки по горизонтали и вертикали:

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 10$$

Давайте с помощью дифференцирования определим, где находятся вершина горы и дно долины.

Дифференцирование в его простейшей форме преобразует исходное уравнение в уравнение градиента. Для этого нужно модифицировать члены со степенями неизвестного *x*, используя следующее правило:

$$x^n \text{ преобразуется в } nx^{n-1}$$

То есть x^3 преобразуется в $3x^2$, а x^2 — в $2x$. Надеюсь, вы помните, что x — это x^1, что преобразуется при дифференцировании в $1x^0$. Число 10 представляет собой член без какой-либо степени x и, соответственно, преобразуется в ноль. Подставив эти результаты в наше уравнение (и вспомнив при этом, что $x^0 = 1$, как упоминалось на стр. 92), получим:

$$\text{градиент} = 2 \times 3x^2 - 15 \times 2x^1 + 24 \times x^0 + 0$$

$$\text{градиент} = 6x^2 - 30x + 24$$

Теперь нужно вспомнить о том, что вершина горы и дно долины находятся в точках, где градиент равен нулю:

$$6x^2 - 30x + 24 = 0$$

Это уже знакомое нам квадратное уравнение, которое можно решить одним из нескольких способов (см. стр. 151). Каким бы способом мы ни воспользовались, в итоге мы определим, что данное уравнение выполняется при $x = 1$ и $x = 4$. Но как мы сможем понять, какое из этих значений соответствует вершине горы, а какое — дну долины? Мы можем подставить эти значения в исходное уравнение и посмотреть, какое из них обеспечивает максимальный, а какое — минимальный результат:

	$y =$	$2x^3$	$-15x^2$	$+24x$	$+10$
Если $x = 1$,	$y =$	2×1^3	-15×1^2	$+24 \times 1$	$+10$
	$y =$	2	-15	$+24$	$+10$
	$y =$	21			
Если $x = 4$,	$y =$	2×4^3	-15×4^2	$+24 \times 4$	$+10$
	$y =$	128	-240	$+96$	$+10$
	$y =$	-6			

Теперь мы видим, что первая точка с нулевым градиентом соответствует вершине горы, а вторая — дну долины.

НЬЮТОН ПРОТИВ ЛЕЙБНИЦА*

Интегральное исчисление имеет и множество других применений, помимо планирования пеших маршрутов. С момента изобретения интегрального исчисления в 1600-х годах это одна из наиболее важных областей математики, позволяющая решать большое количество задач. Однако в свое время между двумя гигантами математической мысли разгорелся поединок за право называться автором интегрального исчисления, породивший многолетний раскол между британскими и европейскими математиками.

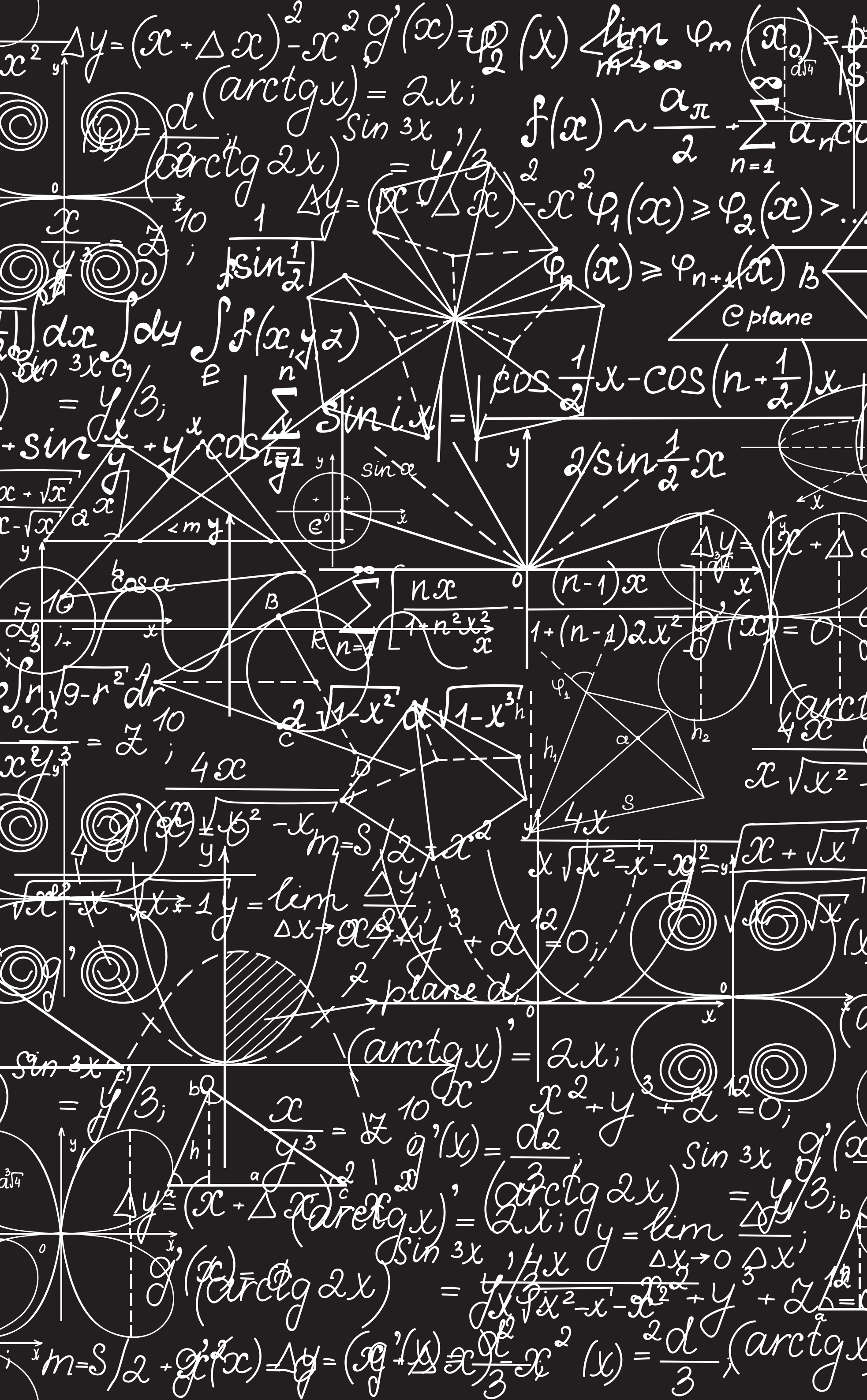
В одном углу ринга — британский джентльмен, который не нуждается в представлении — сэр Исаак Ньютон. Знаменитый наблюдатель падающих яблок, алхимик, профессор Кембриджского университета, член парламента, магистр Королевского монетного двора и президент Королевского общества. В другом углу ринга — немец Готфрид Лейбниц. Вундеркинд, философ, дипломат, изобретатель механических калькуляторов, автор двоичной системы исчисления и философии бесконечного оптимизма.

Оба эти джентльмена независимо друг от друга изобрели интегральное исчисление, сделав это примерно в одно и то же время. Хотя Лейбниц первым опубликовал свои идеи, Ньютон заявил, что они были заимствованы из его работ, которые он показывал на заседаниях Королевского общества, членом которого также был и Лейбниц. Этот конфликт

* «Fig Newtons» и «Choco Leibniz» — так называются два моих любимых вида печенья. Печенье «Choco Leibniz» названо в честь известного математика и производится в Ганновере, где он жил и работал. Печенье «Fig Newtons», однако, названо так в честь города в США.

между двумя авторитетными учеными выражался, главным образом, в обмене язвительными письмами и распространении очерняющих соперника памфлетов.

Лейбниц умер раньше, чем закончился этот спор. Сегодня кажется очевидным, что оба этих джентльмена обладали достаточными математическими способностями для того, чтобы придумать интегральное исчисление, и что они оба опирались в своей работе на достижения ряда других математиков. Достаточно лишь сказать, что мы до сих пор пользуемся нотацией Лейбница.


C plane
plane d

ГЛАВА 16

АЛГОРИТМЫ

Алгоритмы неразрывно связаны с компьютерными науками, но появились гораздо раньше компьютеров. Алгоритм — это набор инструкций. Вы берете некоторые входные данные — как правило, одно или несколько чисел — и выполняете ряд операций, дающих в итоге некоторые выходные данные.

Хотя алгоритмы можно не считать составной частью алгебры, я решил рассмотреть их здесь, поскольку в большинстве случаев они используют переменные в качестве входных данных.

РУССКИЕ КРЕСТЬЯНЕ

Данный алгоритм часто называют «алгоритмом русского крестьянина», хотя по имеющимся свидетельствам его начали использовать гораздо раньше, чем появилась Россия и русские крестьяне. Чтобы умножить, к примеру, 35 на 47, используя этот алгоритм, необходимо взять меньшее число и последовательно делить его пополам, каждый раз отбрасывая остаток:

35

17

8

4

2

1

Следующий шаг сводится к тому, чтобы заполнить еще один столбец путем последовательного удвоения большего сомножителя:

35	47
17	94
8	188
4	376
2	752
1	1504

Затем нужно вычеркнуть все строки, содержащие четные числа в левом столбце:

35	47
17	94
~~8~~	~~188~~
~~4~~	~~376~~
~~2~~	~~752~~
1	1504

Сложив оставшиеся числа в правом столбце, получим окончательный ответ:

$$47 + 94 + 1504 = 1645$$

Следовательно, $35 \times 47 = 1645$.

Вуаля! Чтобы перемножить два числа с помощью этого алгоритма, достаточно уметь лишь удваивать числа, делить их пополам и складывать между собой — что идеально подходит для не знающего таблицы умножения русского крестьянина. В силу того, что алгоритмы разбивают сложную задачу на ряд более простых операций, они также могут служить отличной основой для создания компьютерных программ. На самом деле, работа программиста по большей части сводится к «обучению» компьютера различным алгоритмам, которые, к примеру, перемножают числа, сортируют список или выполняют обработку ваших фото с тем, чтобы вы выглядели моложе.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ

Первая реальная компьютерная программа представляла собой алгоритм для вычисления ряда чисел, называемых «числами Бернулли» (в честь Якоба

Бернулли, см. стр. 110), которые трудно рассчитывать вручную. Что удивительно, эта программа была создана задолго до создания компьютера, на котором ее можно было запустить. Ее придумала выдающаяся англичанка Ада Лавлейс (1815–1852) во время совместной работы с ее соотечественником, инженером Чарльзом Бэббиджем (1791–1871) над проектом так называемой «аналитической машины» — компьютера с паровым приводом. Она также смогла увидеть, что такая машина будет не просто машиной для вычислений, а машиной, действующей на основе любой информации, которую можно представить в числовой форме, включая музыку, изображения и письма, тем самым предсказав все те возможности, которые нам предлагают современные компьютеры.

Изобретение и создание электронных компьютеров позволило использовать их для работы над задачами, решение которых в противном случае заняло бы огромное количество времени. Прекрасным примером в этом плане является *Bombe* Алана Тьюринга — компьютер, который во время Второй мировой войны использовался специалистами британского криптографического центра для расшифровки сообщений, зашифрованных нацистами с помощью машины «Энигма». В основе «Энигмы» лежал достаточно простой принцип. Эта машина представляла собой усовершенствованную версию кодирующего диска — при нажатии на клавиатуре буквы сообщения она пропускалась через три кодирующих диска (так называемые «роторы»), давая на выходе зашифрованную версию буквы. Сложность заключалась в том, что положение роторов можно было менять после каждой отдельной буквы, что, по сути, означало использование отдельного шифра для каждой буквы сообщения. Не зная исходное положение каждого ротора, было практически невозможно прочитать сообщение.

В Bombe был использован единственный недостаток этой системы, который состоял в том, что исходная буква никогда не кодировалась точно такой же буквой. Bombe определяла исходное положение каждого ротора, последовательно проверяя различные комбинации на предмет получения на выходе точно такой же буквы и отбрасывая каждую такую комбинацию. Несмотря на всю простоту этого алгоритма большое количество исходных положений, использование нескольких роторов и ряд других хитростей «Энигмы» давали в итоге 159 квинтиллионов возможных комбинаций. Это очень подходящая задача для компьютера, способного работать без малейших ошибок и гораздо быстрее человека.

Сегодня алгоритмы являются уже неотъемлемой частью различных сфер нашей жизни. Когда компьютер подсказывает вам, как попасть в нужное место оттуда, где вы находитесь, он использует алгоритм для поиска самого короткого или самого быстрого маршрута, производящий множество расчетов для получения оптимального результата. Один из таких алгоритмов поиска кратчайшего пути называется «алгоритмом Дейкстры», в честь голландского ученого в области компьютерных наук Эдсгера Дейкстры (1930–2002). Каждый раз, когда вы пересылаете информацию по сети Интернет, используется специальный алгоритм для обеспечения безопасного обмена данными (см. стр. 66). Когда вы выстраиваете в алфавитном порядке элементы электронной таблицы или сортируете некоторые числа, используется алгоритм сортировки. Когда вы говорите с кем-то по телефону или общаетесь через Интернет, звук и изображение преобразуются в цифровую форму с помощью алгоритма преобразования Фурье, названного в честь француза Жозефа Фурье (1768–1830), который провел большую работу в области математики колебаний, когда открыл так называемый «парниковый эффект». Технология анализа связей использует несколько алгоритмов для оценки того, насколько различные данные связаны друг с другом. Такой анализ находит применение в самых разных областях — от поисковых систем и приложений для социальных сетей, где на его основе производится отбор результатов поиска и рекламных объявлений, представляющих наибольший интерес для пользователя, до маркетинга, медицинских исследований и охраны правопорядка, где он используется для сопоставления различных данных и создания между ними перекрестных ссылок.

В то же время, надо отметить, что работа математиков и ученых в области компьютерных наук еще не окончена, поскольку для ряда задач еще не найден эффективный алгоритм решения.

ЗАДАЧА УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ И ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Поставка товара из одного места в другое наиболее эффективным и экономичным образом является фактически краеугольным камнем современной розничной торговли, особенно, если учесть, что сегодня мы все чаще заказываем товары через Интернет с доставкой их на дом. Поэтому розничных продавцов сильно расстраивает то, что в их распоряжении нет быстрых алгоритмов для поиска наилучшего способа загрузки доставочного автомобиля и кратчайшего маршрута доставки.

В широко известной задаче упаковки в контейнеры требуется найти наилучший способ размещения определенного количества контейнеров известного объема в заданном пространстве — например, посылок в кузове почтового автомобиля. Проблема здесь заключается в том, что не существует простого способа определить, как лучше осуществлять погрузку — нужно ли начать с наибольшего или с наименьшего ящика, или лучше руководствоваться каким-либо иным критерием? Конечно, можно проанализировать все возможные комбинации и выбрать наилучший вариант, но такие расчеты часто требуют слишком много времени.

Допустим, что вам удалось достаточно эффективно загрузить свой фургон. Как теперь определить оптимальный маршрут доставки посылок?

Эту так называемую «задачу коммивояжера» впервые рассмотрели ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) и британский священник Томас Киркман (1806–1895).

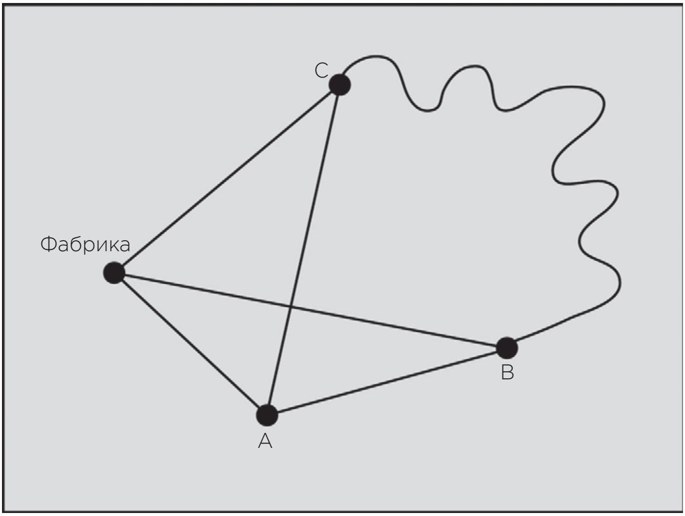
Они рассмотрели случай, когда коммивояжеру требуется посетить несколько заданных городов и после этого вернуться на свою фабрику по кратчайшему маршруту без повторного посещения этих городов. В 1857 году Гамильтон даже выпустил настольную игру с названием «Икосаэдрическая игра»*, которая иллюстрировала это задачу; эта игра доступна и сегодня в виде компьютерного приложения.

При рассмотрении этой задачи быстро стало очевидным, что существующие алгоритмы не всегда выдают правильный маршрут. Так, например, «алгоритм ближайшего соседа», в соответствии со своим названием, направит вас в ближайший непосещенный город, но путь через этот город может в итоге оказаться очень длинным.

В показанном выше примере алгоритм ближайшего соседа направит вас с фабрики сначала в точку А, а затем в точку В, после чего вам не останется иного выбора, кроме как направиться в точку С по длинной и извилистой дороге. Однако маршрут «фабрика — С — А — В — фабрика» будет гораздо короче.

---

* Икосаэдр — геометрическая фигура, представляющая собой правильный выпуклый многогранник, каждая из 20 граней которого представляет собой равносторонний треугольник. — *Прим. ред.*



Таким образом, единственный верный способ найти кратчайший маршрут состоит в том, чтобы рассмотреть все возможные маршруты. В нашем примере с тремя городами это можно сделать достаточно просто:

фабрика — A — B — C — фабрика
фабрика — A — C — B — фабрика
фабрика — B — A — C — фабрика
фабрика — B — C — A — фабрика
фабрика — C — A — B — фабрика
фабрика — C — B — A — фабрика

Можно заметить, что некоторые из этих маршрутов являются обращенными копиями друг друга, как, например, первый и последний маршруты. Каждую такую пару мы можем считать одним маршрутом;

при этом список сократится до трех возможных маршрутов, по которым можно двигаться в обоих направлениях.

Чтобы рассчитать количество маршрутов более явным образом, следует принять во внимание, что с фабрики мы можем отправиться в любой из трех городов, оттуда — в любой из двух непосещенных городов, затем — в один непосещенный город и, наконец, обратно на фабрику. Это дает 3 × 2 × 1 = 6 возможных маршрутов; это число затем делится пополам в силу возможности движения по маршруту в обе стороны.

Выражение 3 × 2 × 1 в математике принято сокращенно обозначать как 3! (произносится «три факториал*»). В рассмотренном выше примере нам требуется проверить 3! ÷ 2 маршрутов. Если бы нам нужно было посетить 20 городов, то количество проверяемых маршрутов составило бы 20! ÷ 2:

$$\frac{20!}{2} = \frac{20 \times 19 \times 18 \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{2} \approx$$
$$1\,216\,451\,000\,000\,000\,000$$

Это число того же порядка, что и количество комбинаций Энигмы. Как видите, значения факториала возрастают очень быстро.

Такие задачи математики называют «NP-задачами», где NP — сокращение от слов «*nondeterministic*

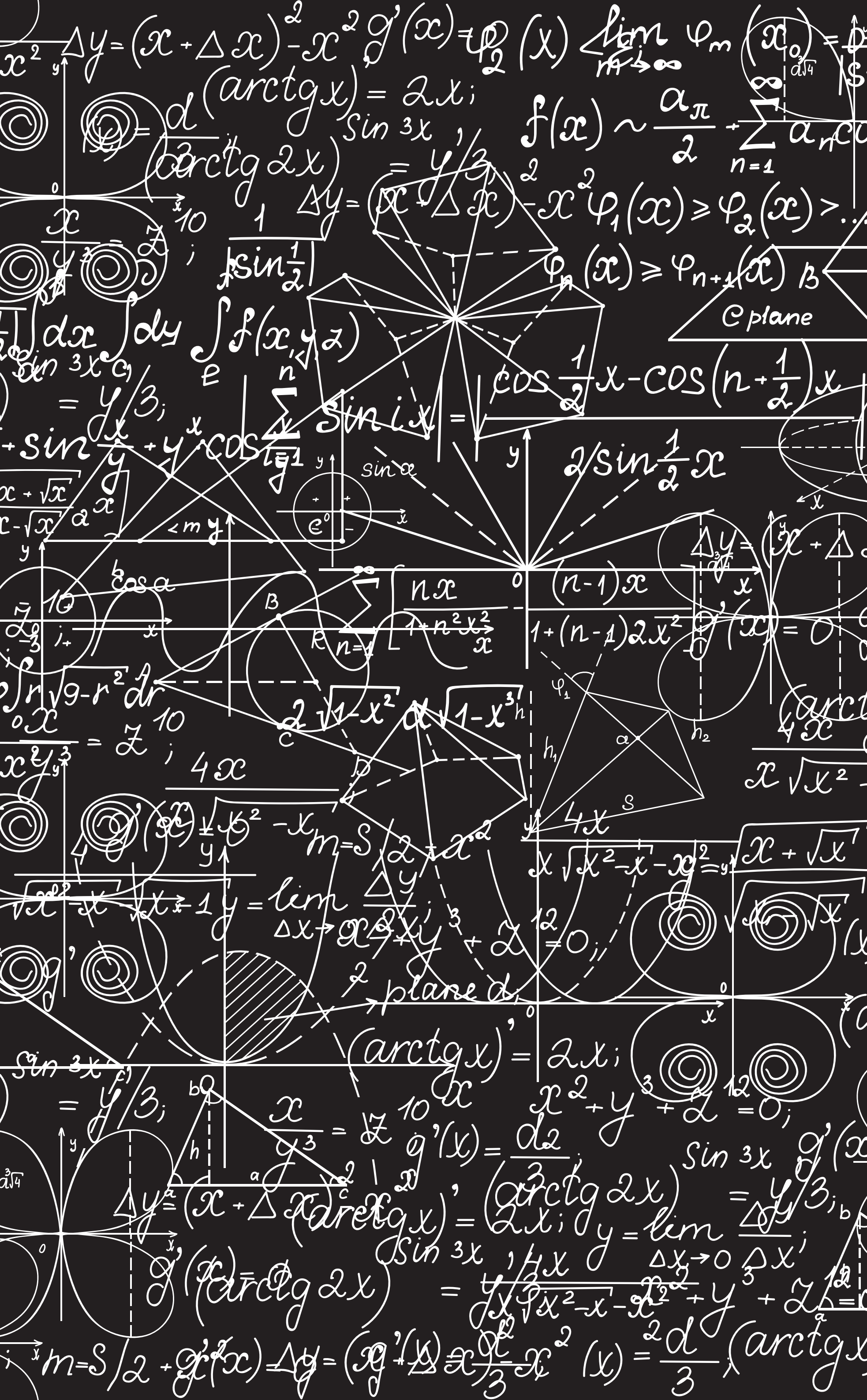
---

* Факториал какого-либо натурального числа *n* определяют как произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно. — *Прим. ред.*

polynomial time» — «недетерминированное полиномиальное время». В переводе на нормальный язык это означает, что при возрастании количества рассматриваемых вами вещей количество комбинаций возрастает как степень этого числа. Это ведет к резкому увеличению количества рассматриваемых комбинаций, и, соответственно, количества времени, необходимого для нахождения наилучшего варианта.

Существует ряд алгоритмов, которые выдают близкий к оптимальному результат за разумное количество времени. Эти *«эвристические»* алгоритмы действуют во многом так же, как поступаем мы сами при планировании маршрута по карте — хотя мы не всегда находим наилучший маршрут, такой подход себя оправдывает и позволяет не тратить слишком много времени на выбор маршрута.

Если кому-то все же удастся найти действительно эффективный алгоритм, позволяющий найти наилучший вариант без перебора всех возможных комбинаций, то очень многие компании будут готовы отдать немалые деньги за право его использовать.


C plane
plane d
sin 3x
sin α
cos α

ГЛАВА 17

ФОРМУЛЫ

В этой книге вы повсюду можете встретить формулы. Формулы являются настолько непреложной составляющей математики, что я вряд ли смог бы обойтись без них.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые формулы чуть подробнее и разберемся с тем, что они собой представляют.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМУЛ

Для конвертирования температуры в градусах Цельсия в градусы Фаренгейта используется следующая формула (где обе температуры обозначены буквами C и F):

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

Здесь F является той величиной, которую мы получаем на выходе, подставив в формулу значение C. Но что, если мы захотим конвертировать температуру в обратном направлении, из градусов Фаренгейта в градусы Цельсия? Например, такая формула будет совсем не лишней при использовании старых кулинарных книг.

Преобразование формулы для вычисления с ее помощью другой величины имеет много общего с тем, как мы решаем уравнение. Нам нужно выполнить аналогичные действия, с той разницей, что итоговым результатом в данном случае является не некоторое решение уравнения, а преобразованная формула:

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

$$(-32)$$

$$F - 32 = \frac{9C}{5}$$

$$(\times 5)$$

$$5(F - 32) = 9C$$

$$(\div 9)$$

$$\frac{5(F - 32)}{9} = C$$

Наша новая формула является *«инверсией»* исходной формулы, потому что служит для конвертации в противоположном направлении. Так, например, если мы примем C = 25 °C, получим:

$$F = \frac{9 \times 25}{5} + 32 = 77$$

То есть мы определили, что значению 25 °C соответствует значение 77 °F. Подставив это значение в нашу новую формулу, получим:

$$C = \frac{5\,(77 - 32)}{9} = 25$$

То есть значению 77 °F соответствует наше исходное значение 25 °C.

ЛУЧШЕ ПОЗДНО, ЧЕМ НИКОГДА

Когда американский математик Джордж Данциг (1914–2005) еще учился в университете, он опоздал на одну из своих лекций. Он увидел, что на доске записаны две задачи, и подумал, что это выданное лектором домашнее задание. Когда он, как полагается, сдал выполненную работу, лектор очень удивил его, сказав, что эти задачи были не домашним заданием, а примером нерешенных математических задач. Позже ему сказали, что он может оформить эти решения в качестве своей докторской диссертации.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Одним из направлений деятельности математиков является вывод общих закономерностей на основе частных случаев. Так, в рассмотренном выше примере соответствие значения 25 °C значению 77 °F является частным случаем, а соответствующая формула описывает, как можно получить любое значение в общем случае.

Предметом интереса математиков часто становятся числовые паттерны. Вот простейший пример такого паттерна:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20…

Это четные числа, или, иначе говоря, числа, кратные двум. Мы без каких-либо проблем можем продолжить эту последовательность, поскольку знаем, что для получения каждого следующего числа нужно просто добавить два. Каждое число в последовательности называется *«членом»*. Первый член этой последовательности равен двум; математик может записать это как $t_1 = 2$. Я обозначил член буквой t, но с тем же успехом мог бы использовать любой другой символ. Второй член равен 4; соответственно, $t_2 = 4$. Далее $t_3 = 6$ и $t_4 = 8$.

Теперь на основе этих частных случаев давайте выведем общую закономерность. Как было сказано выше, для получения каждого следующего члена этой последовательности вам нужно добавить два.

Исходя из *n*-го члена последовательности, t_n, мы можем найти следующий член по формуле:

следующий член = текущий член + 2

$$t_{n+1} = t_n + 2$$

Такое определение называют *«индуктивным»* определением последовательности. При этом полученная в итоге последовательность будет зависеть от того, какое значение вы зададите в качестве первого члена. При $t_1 = 2$ мы получим показанные выше четные числа, но при $t_1 = 1$ мы получим последовательность 1, 3, 5, 7 и т. д. — то есть нечетные числа.

Широкую известность получила последовательность чисел Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Эти числа названы в честь математика Фибоначчи (см. стр. 32), и определяются по следующему правилу: каждый следующий член представляет собой сумму двух предыдущих. В индуктивной форме это можно представить следующим образом:

$$t_{n+1} = t_{n-1} + t_n;\ t_1 = 1 \text{ и } t_2 = 1$$

Такие последовательности часто встречаются в природе, особенно в растительном мире. Так, последовательности Фибоначчи часто соответствует количество ответвлений на стеблях и корнях растений, а также спиральные узоры в семенных шапках цветов, ананасах и сосновых шишках. Хотя такие индуктивные формулы могут служить в качестве обобщенного описания последовательности, они не позволяют вычислить произвольно выбранный член, не вычислив все предыдущие члены. Что, если, например, мы захотим определить 1000-й член последовательности? Для этого нам нужно располагать формулой для определения *n*-го члена.

Еще раз внимательно взглянув на последовательность четных чисел, мы можем заметить взаимосвязь между номером члена и его значением. $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = 6$, $t_4 = 8$: значение члена всегда равно его номеру, умноженному на два:

$$t_n = 2n$$

С помощью этой формулы мы можем вычислить 1000-й член напрямую: $t_{1000} = 2 \times 1000 = 2000$. А можно ли вывести формулу для *n*-го члена в случае чисел Фибоначчи?

Что ж, такая формула существует, но выглядит гораздо сложнее. Простой вид формулы в случае четных чисел обусловлен тем, числа в этой последовательности всегда возрастают на одну и ту же величину. Числа Фибоначчи каждый раз возрастают на разную величину.

ЕЩЕ РАЗ О ЧИСЛЕ Ф

На стр. 134 мы установили, что $\phi = 1{,}61803398\ldots$ Какое отношение это имеет к числам Фибоначчи? Дело в том, что если мы разделим каждое число Фибоначчи на предшествующее число, мы получим следующую картину:

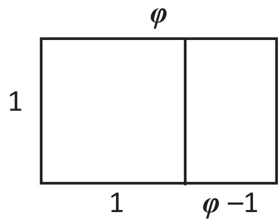
$1 \div 1 =$	1
$2 \div 1 =$	2
$3 \div 2 =$	1,5
$5 \div 3 =$	1,66666...
$8 \div 5 =$	1,6
$13 \div 8 =$	1,625
$21 \div 13 =$	1,61538...
$34 \div 21 =$	1,61905...
$55 \div 34 =$	1,61764...

Как видим, результат такого деления колеблется вокруг числа ϕ. Пройдя в последовательности Фибоначчи чуть дальше, можно увидеть, что, например, в случае девятнадцатого и двадцатого члена это значение составляет:

$$6765 \div 4181 = 1{,}61803396...$$

Это число равно числу ϕ, взятому с точностью до семи знаков после запятой, что указывает на наличие явной связи между числами Фибоначчи и золотым сечением.

Чтобы понять, откуда берется значение числа ϕ, давайте еще раз рассмотрим уже знакомый нам прямоугольник с идеальными пропорциями. Пусть длина более длинной стороны прямоугольника равна ϕ, а длина более короткой стороны равна единице. В таком случае мы можем обозначить длины сторон следующим образом:



Согласно правилу золотого сечения меньший прямоугольник должен обладать такими же пропорциями. Длины сторон большего прямоугольника равны ϕ и 1; длины сторон меньшего прямоугольника равны 1 и $\phi - 1$. Разделив длину каждого прямоугольника на его ширину, мы должны получить равные дроби:

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Деление любого числа на единицу дает в результате само это число, поэтому:

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Как видим, это уравнение, которое мы вполне можем решить. Чтобы перенести все числа ϕ в одно место, давайте умножим обе части уравнения на знаменатель дроби:

$$\phi(\phi - 1) = 1$$

Теперь давайте перемножим скобки:

$$\phi^2 - \phi = 1$$

Это уже квадратное уравнение (см. стр. 151). Чтобы решить его, нам нужно сделать правую часть равной нулю. Для этого вычтем единицу из обеих частей уравнения:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Такое квадратное уравнение плохо поддается разложению на множители, поэтому нам остаются только два варианта: либо применить метод заполнения квадрата, либо воспользоваться формулой для корней квадратного уравнения. В разделе «Формулы» будет «правильнее» выбрать второй вариант:

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times -1}}{2 \times 1}$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Это дает нам $\phi = 1{,}6180339887...$ и $-0{,}6180339887...$ Поскольку длина стороны прямоугольника не может быть отрицательной, мы можем отбросить отрицательный результат.

Теперь давайте вернемся к нашей формуле для *n*-го числа Фибоначчи. Абрахам де Муавр (1667–1754) был французским протестантом, бежавшим от преследования в Лондон. Во время пребывания в Лондоне он познакомился с Исааком Ньютоном, и они стали друзьями — Ньютон даже обращался за помощью к Муавру в случае затруднений с математическими расчетами! Как бы там ни было, именно де Муавр впервые опубликовал следующую формулу для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Интересной особенностью этой формулы является то, что она позволяет получить целое число Фибоначчи на основе двух иррациональных чисел (ϕ и $\sqrt{5}$).

ПРЕДСКАЗАНИЕ ДЕ МУАВРА

Де Муавр дожил до преклонного возраста — 87 лет, что довольно много для того времени. Однако, согласно легенде, в определенный момент он заметил, что спит все дольше с каждым днем, и предсказал, что умрет, когда количество требуемого для сна времени превысит количество имеющихся в сутках часов. Он рассчитал, когда это произойдет, и умер именно в этот день.

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Умение пользоваться формулами является непреложным условием для хорошего понимания астрономии, которую за прошедшие века изучали многие математики. Так, например, хотя задача трех тел была известна и ранее, именно Исаак Ньютон сформулировал ее впервые в своем фундаментальном труде *«Математические начала натуральной философии»*. В данной задаче рассматриваются три объекта или *«тела»*, их движение в пространстве и воздействие на них сил взаимного притяжения. Хотя формула, описывающая движение таких тел, уже приводилась выше при обсуждении степеней (см. стр. 98), будет не лишним взглянуть на нее еще раз:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Как известно, закон всемирного тяготения Ньютона гласит, что сила притяжения между любыми двумя объектами равна произведению их масс ($m_1 \times m_2$), разделенному на квадрат расстояния между ними (r^2), умноженный на гравитационную постоянную (G). Получается, что мы можем достаточно легко рассчитать движение двух тел, например, движение Земли вокруг Солнца. Однако если мы примем в расчет еще одно, третье тело, например, вращающуюся вокруг Земли Луну, то наши математические выкладки станут гораздо сложнее. По мере дальнейшего добавления тел в эту систему описывающее ее уравнение становится чрезвычайно сложным, что не позволяет найти его решение аналитически. То есть такое уравнение нельзя решить посредством алгебраических выкладок, но в то же время часто можно решить с помощью численных методов, позволяющих найти удовлетворяющие уравнению числа. Это обычно занимает очень много времени, и потому сегодня для этой цели используются компьютеры.

В общем и целом можно сказать, что космические тела нашей Солнечной системы, будь то планеты, астероиды, естественные и искусственные спутники, и т. д., немного колеблются относительно своей орбиты из-за воздействия на них сил притяжения, оказываемых другими телами Солнечной системы, и сила этого воздействия зависит от удаленности других тел.

Астрономы хорошо научились выявлять такие колебания планет и на их основе делать вывод о наличии в Солнечной системе других тел. В 1846 году сотрудник Парижской обсерватории Урбен Леверье (1811–1877), потратив несколько месяцев на расчеты, сделал вывод о существовании Нептуна на основе наблюдаемого отклонения Урана от орбиты, рассчитанной согласно существовавшей тогда модели Солнечной системы. Впоследствии на основе его расчетов было произведено реальное наблюдение этой планеты. Это открытие Нептуна путем математической дедукции считается одним из важнейших научных достижений XIX века.

Что интересно, затем Леверье перешел к изучению колебаний Меркурия и на основе этих наблюдений сделал вывод о наличии еще одной планеты, которую он назвал *«Вулканом»*. Однако никто не смог обнаружить эту планету, и лишь в 1916 году Альберт

Эйнштейн предположил, что колебание Меркурия является эффектом *общей теории относительности*, вызванным близостью к Солнцу.

Как бы там ни было, астрономы продолжили наблюдения за Нептуном и, произведя расчеты, обнаружили, что на эту планету тоже воздействует некоторое, пока не выявленное тело. Эта планета долго «не попадалась в сети», и лишь в 1930 году американец Клайд Томбо (1906–1997) обнаружил Плутон, сравнив снимки ночного неба, сделанные с помощью телескопа с интервалом в две недели. В силу своего небольшого размера Плутон не мог вызывать наблюдаемые колебания орбит Нептуна и Урана; как впоследствии выяснилось, эти колебания объясняются тем, что масса Нептуна гораздо ниже, чем считалось изначально.

После открытия Плутона выяснилось, что он занимает в Солнечной системе лишь 17-е место по массе — он даже легче, чем Луна. В 2006 году Международный астрономический союз дал официальное определение понятию «планета», и оказалось, что Плутон не вполне удовлетворяет этому определению. Соответственно, он был понижен в статусе до «карликовой планеты» вместе с рядом других «соискателей», таких как Эрида и Седна*.

Это, однако, не стало препятствием для отправки капсулы с прахом Клайда Томбо на борту

* Эрида и Седна — транснептуновые объекты. Статус карликовой планеты был присвоен Международным академическим союзом пока только Эриде. — *Прим. ред.*

космического аппарата New Horizons, который достиг Плутона в 2015 году.

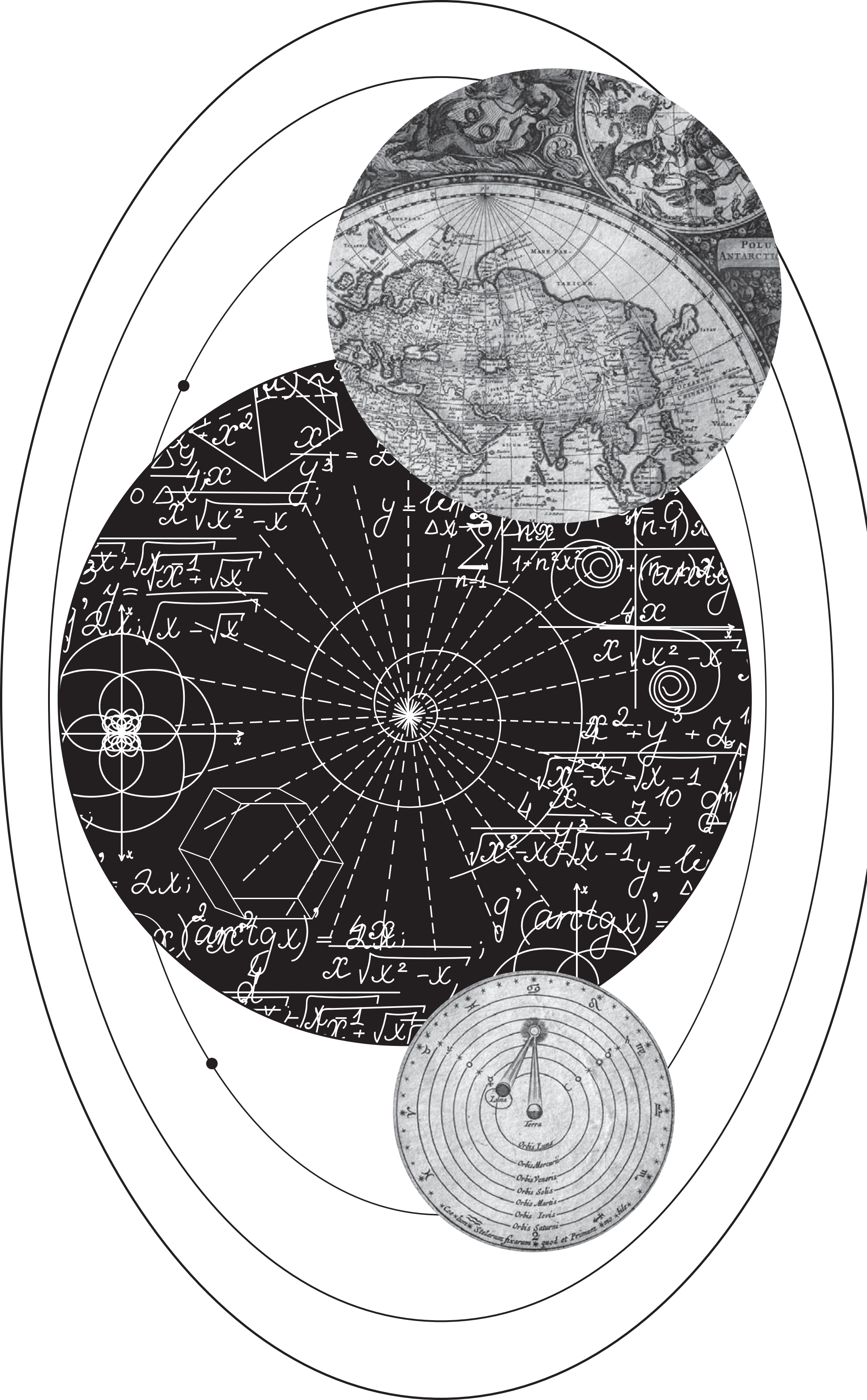
Обратив внимание на странную форму орбиты Седны, некоторые ученые провели математический анализ движения этой и ряда других отдаленных карликовых планет, и сделали вывод о том, что в Солнечной системе существует «Девятая планета», которая в четыре раза больше Земли, и орбита которой расположена под прямым углом к орбитам остальных планет. Числа сделали свою работу — осталось лишь обнаружить эту планету!

НЕТЕР И МИРЗАХАНИ

Исторически сложилось так, что ведущую роль в математике всегда играли мужчины. У меня нет сомнений в том, что причиной этому была меньшая доступность для женщин образования и других возможностей, а не какой-либо недостаток у них умственных способностей. К счастью, ситуация в этом плане постепенно меняется; в то же время это означает, что любая женщина, сделавшая себе имя в математике, обладала действительно исключительным талантом.

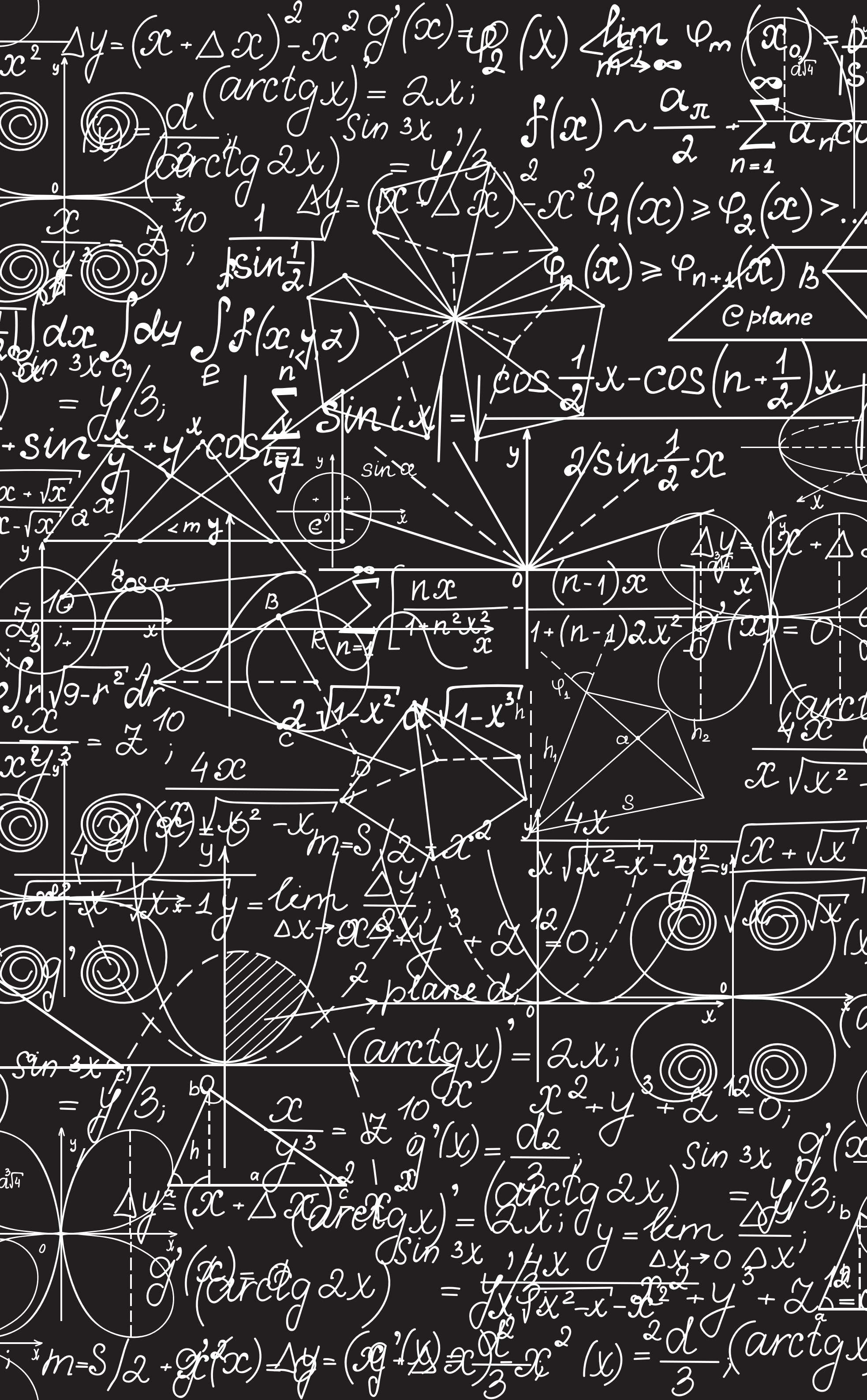
Немку Эмми Нетер (1882–1935) по мнению многих (в том числе Эйнштейна) можно считать одним из лучших математиков за всю историю человечества, включая и мужчин, и женщин. Несмотря на все ее способности и достижения, ей не разрешали преподавать в университетах, и потому ей приходилось читать лекции от имени своих коллег-мужчин, выступая в роли их ассистента. Параллельно с преподавательской работой она доказала теорему с далеко идущими последствиями для физики, которую теперь называют теоремой Нетер.

Иранский математик Мариам Мирзахани (1977–2017) отличилась тем, что стала первой женщиной, получившей Филдсовскую премию — высшую награду в области математики (ввиду отсутствия Нобелевской премии по математике). После окончания иранского университета она переехала в США, где получила высокое признание за свою работу в области геометрии. Она умерла от рака в возрасте 40 лет и, сообщая об этом, иранская пресса впервые нарушила табу на изображение женщин без головного убора.


Terra
Orbis Lunae
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ IV

ГЕОМЕТРИЯ


C plane
plane α
sin 3x
(arctg x)' = 2x;
2 sin 1/2 x

ГЛАВА 18

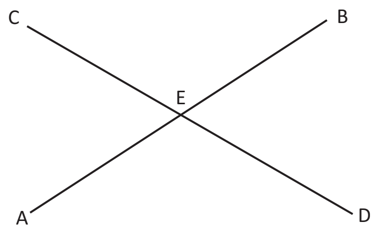
ПЛОЩАДЬ И ПЕРИМЕТР

Геометрия (в переводе с древнегреческого языка — «измерение земли») — с давних времен одна из самых практически полезных областей математики. Говоря о культуре древнего мира, мы часто вспоминаем о его наследии в виде памятников, создать которые было бы невозможно без использования геометрии.

Давайте кратко вспомним некоторых основные понятия геометрии.

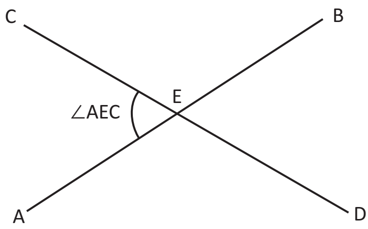
УГОЛ

При графическом представлении линии обычно называются по именам точек, расположенных на их концах. Например, если две прямые, AB и CD, пересекаются в точке E, это можно представить так:

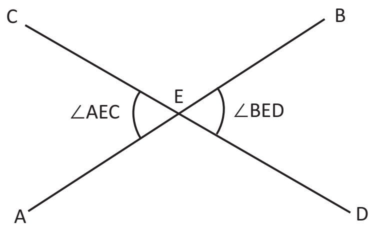


Эти прямые образуют четыре угла в точке пересечения E; при этом каждый угол определяется двумя образующими его прямыми.

Так, чтобы определить угол, отмеченный на рисунке ниже, можно заметить, что он образуется путем соединения точки A с точкой E, а затем — с точкой C. Следовательно, мы можем назвать его углом AEC, или ∠AEC. ∠CEA будет обозначать тот же угол.



Благодаря системе исчисления по целочисленному основанию 60, придуманной в древней Месопотамии, мы имеем 360° вокруг точки. Прямая линия фактически разделяет точку или вершину (например E) на две части, образуя угол в 180° с каждой стороны. По обе стороны от вершины лежат равные углы: ∠AEC и ∠BED. Такие пары углов называются «вертикально противоположными», где слово «вертикально» является производным от слова «вершина» (vertex), а не слова «вертикаль» (vertical).



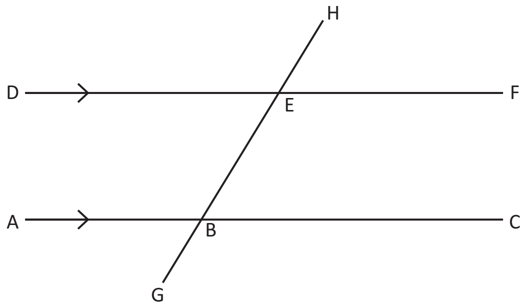
Хотя мы не знаем точную величину представленных на этом рисунке углов, мы можем сказать, что углы ∠AEC и ∠BED *острые* (т. е. их величина составляет менее 90°), а углы ∠CEB и ∠AED — *тупые* (т. е. их величина находится в диапазоне от 90° до 180°). Углы, величина которых превышает 180°, называются углами *отражения**.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

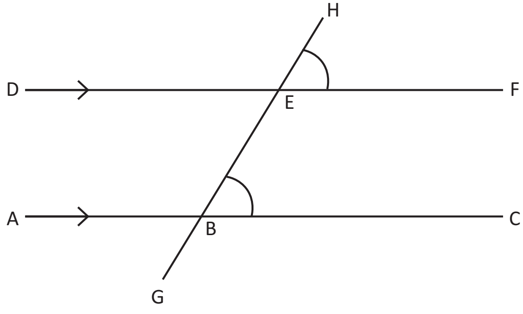
Параллельные линии всегда расположены на одинаковом расстоянии друг от друга и никогда не пересекаются. Если мы проведем еще одну линию

* В российской математической литературе углы величиной от 0° до 180° называются *выпуклыми*, а величиной от 180° до 360° — *невыпуклыми*. — *Прим. ред.*

поперек параллельных прямых (обозначены на рисунке стрелками), можно будет увидеть дополнительные взаимосвязи:



Прямая GH пересекает параллельные прямые DF и AC под одинаковыми углами, образуя два одинаковых пересечения в точках B и E. Углы, которые занимают одинаковое относительное положение в каждом пересечении, как, например, углы ∠HEF и ∠HBC, равны и называются *соответственными* углами:



Мы видим, что углы ∠HEF и ∠BED вертикально противоположные и, следовательно, равны. Это, в свою очередь, означает, что углы ∠BED и ∠HBC тоже равны; такие углы называются *накрест лежащими* углами.

ЭТО ВСЕ КАК КИТАЙСКАЯ ГРАМОТА!

Геометрия изначально относилась к прикладной области и основывалась на инженерных науках, но в скором времени стала самостоятельным предметом теоретических исследований, главным образом благодаря философски настроенным грекам. В ее развитие огромный вклад внесли Фалес (ок. 624–526 до н.э.), Пифагор (ок. 570–495 до н.э.) и Евдокс (ок. 390–337 до н.э.), но «отцом геометрии» все же считают Евклида (ок. 300 г. до н.э.) — грека, который жил в эллинистическом Египте.

Почему его, а не других? А потому, что именно он написал потрясающий учебник по геометрии.

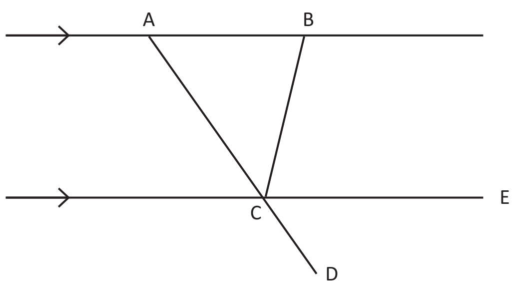
Его «*Начала*» по праву считают величайшим сочинением всех времен, которое до XX века входило в стандартную программу обучения каждого образованного человека. Сегодня значительная часть его содержания включена в школьный курс математики. Для математиков этот учебник — один из первых примеров строгих, исчерпывающих доказательств, которые заложили основу для всего дальнейшего развития геометрии.

Евклид начал с ряда очевидных истин, которые не нуждаются в доказательстве, назвав их «аксиомами».

Такой аксиомой, например, является утверждение о том, что любые две точки можно соединить прямой линией, или, что любую прямую линию можно при желании продолжить. Затем он использовал эти аксиомы для демонстрации ряда геометрических и числовых теорем, после чего представил их доказательство.

Так, например, Евклид доказал, что сумма углов треугольника составляет 180°, используя для этого лишь понятия соответственных и накрест лежащих углов.

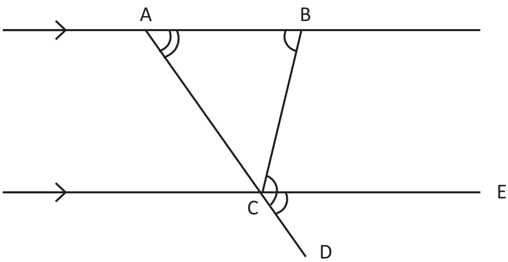
Допустим, что у нас есть треугольник ABC, нарисованный между двумя параллельными прямыми:



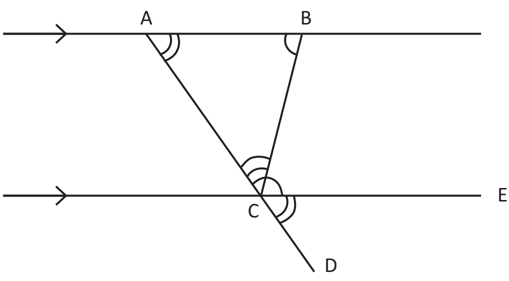
Евклид выдвинул следующее утверждение:

$\angle ABC$ и $\angle BCE$ — накрест лежащие углы и, следовательно, равны.

∠BAC и ∠ECD — соответственные углы и, следовательно, равны. Следовательно, ∠ABC + ∠BAC = ∠BCE + ∠ECD:



Добавим третий угол треугольника, ∠ACB, в обе стороны этого уравнения, получим:



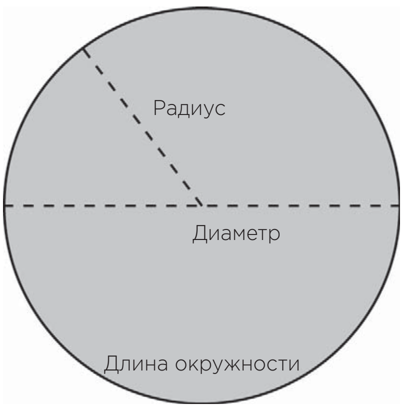
∠ABC + ∠BAC + ∠ACB = ∠BCE + ∠ECD + ∠ACB

сумма углов треугольника = сумма углов на прямой линии

Следовательно, общая величина углов треугольника составляет 180°.

ПЕРИМЕТР

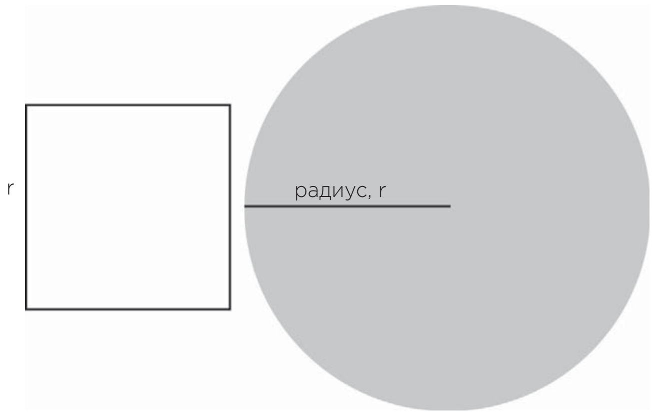
Под «периметром» может пониматься либо длина внешнего контура двумерной фигуры, либо непосредственно сам внешний контур фигуры. Например, можно сказать, что периметр определенного участка земли составляет 210 метров, или, что его периметр имеет прямоугольную форму. Интерес к изучению форм появился у людей еще в те времена, когда охотники и собиратели начали переходить к оседлой жизни и занятию сельским хозяйством. Сохранившиеся памятники древних народов показывают, что людей с давних времен волновала проблема размера и формы полей, часто в связи с обложением крестьян налогами.



Измерение периметра не представляет проблем, когда речь идет о фигуре с прямолинейными сторонами или, иначе говоря, *многоугольнике*. Но когда приходится иметь дело с кривыми или *дугами,* ситуация усложняется. Конечно, вы можете наложить на кривую что-то гибкое, вроде веревки или нити, а затем выпрямить эту веревку или нить и измерить длину дуги. Однако математики любят оперировать формулами, и потому на определенном этапе умы древних математиков были заняты поиском формулы для вычисления периметра круга.

ОКРУЖНОСТЬ

В поиске формулы для вычисления периметра круга, или, иначе говоря, *«длины окружности»,* древние математики выявили взаимосвязь между стороной квадрата и длиной окружности с радиусом, равным стороне квадрата:



Периметр круга в шесть с небольшим раз длиннее стороны квадрата:

окружность = шесть с небольшим × радиус

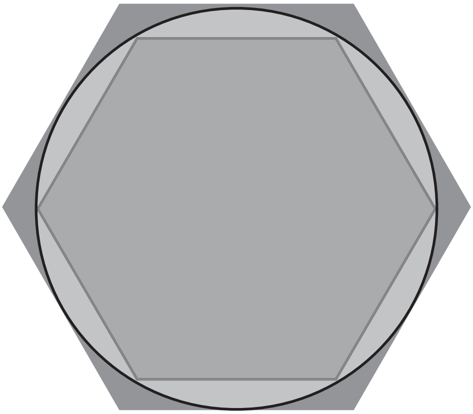
Некоторые математики предложили обозначить «шесть с небольшим» греческой буквой τ, «тау» (аналог латинской буквы t). В случае диаметра, который в два раза больше радиуса, получим следующую закономерность:

окружность = три с небольшим × диаметр

Древние вавилоняне и египтяне вычислили это значение с точностью, достаточной для создания построек, включающих в себя круги и дуги, но именно греческий гений математики Архимед (ок. 287–212 до н.э.) первым предложил систематический способ вычисления этого числа с более высокой точностью.

Его метод состоял в том, чтобы аппроксимировать* круг с помощью двух шестиугольников, как показано на рисунке:

* Аппроксимация (приближение) — вычисление приближенного значения. Обычно используется в тех случаях, когда вычислить точное значение невозможно или затруднительно. — *Прим. ред.*



Поскольку все стороны шестиугольников прямолинейны, вычисление их периметра не представляет проблем. Архимед выдвинул предположение о том, что длина окружности должна находиться где-то в диапазоне между периметром внутреннего или *вписанного* шестиугольника и периметром внешнего или *описанного* шестиугольника. Затем Архимед начал удваивать количество сторон многоугольников, с каждым разом получая все более точное приближение к длине окружности. Когда количество сторон дошло до 96, полученные результаты показали ему, что длина окружности приблизительно равна длине диаметра, умноженной на $\frac{22}{7}$.

Это значение долгое время было известно как «постоянная Архимеда»; позднее его стали обозначать греческой буквой π, поскольку это первая буква в слове «периферия», которое в греческом языке также означает «окружность». Полученное

Архимедом значение очень близко к реальной величине этого множителя и до сих пор используется при выполнении математических расчетов без использования калькулятора.

Таким образом, для круга с радиусом r или диаметром d получаем:

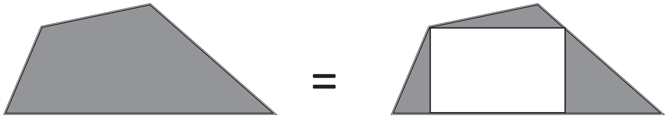
$$\text{окружность} = \pi d = 2\pi r$$

Дальнейшая работа в этой области показала, что значение π иррационально (см. стр. 17), поэтому максимум, что мы можем сделать, это как можно точнее его аппроксимировать. Также было доказано, что значение π является *трансцендентным*. Не имея никакого отношения к духовности, данный термин означает число, которое не является решением уравнения с коэффициентами и степенями величин, выраженными целыми числами. Доказать, что некоторое число трансцендентное, достаточно трудно, и в отношении числа π это впервые сделал в 1882 году немецкий математик Фердинанд фон Линдеман (1852–1939).

ПЛОЩАДЬ

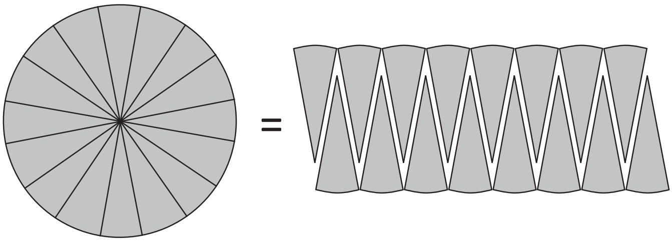
Площадь — это занимаемое фигурой количество плоского пространства. Фон Линдеман доказал, что невозможно найти *квадратуру круга*, то есть построить квадрат с площадью, равной площади круга, используя только пару циркулей и угольник, чего с древних времен пытались добиться землемеры и математики.

В жизни нам часто приходится тратить деньги пропорционально площади — например, при покупке краски для стен или оплате аренды офисных помещений. Для вычисления площади многоугольников нам достаточно знать, как вычисляется площадь прямоугольника (длина × ширина) и треугольника ($\frac{1}{2}$ × основание × высота). Имея эти формулы, мы можем определить площадь многоугольника путем разбиения его на прямоугольники и треугольники. Например:



Представленный здесь *четырехугольник* (четырехсторонний многоугольник) можно разбить на три треугольника и прямоугольник.

Однако, когда требуется узнать площадь изогнутого участка, задача усложняется. Мы уже видели формулу для площади круга на стр. 115–116, но как ее можно вывести с нуля? Что, если мы попытаемся разбить круг на треугольные части и расположить их по-другому?



В данном случае я разбил круг на равные «ломтики» и составил из них фигуру, аппроксимирующую прямоугольник. При увеличении количества ломтиков составленная мной фигура будет приобретать все более прямоугольный вид, пока, наконец, сами ломтики не станут представлять собой фактически тонкие прямоугольники. Как мы знаем, площадь прямоугольника равна его ширине, умноженной на длину. Ширина прямоугольника в данном случае равна расстоянию от центра круга до его края, т. е. его радиусу. Длина прямоугольника должна быть равна половине длины окружности, поскольку каждая из длинных сторон прямоугольника составлена из половины внешнего края круга. Таким образом, площадь данного прямоугольника можно вычислить как радиус × (окружность ÷ 2):

$$\text{площадь круга} = \text{радиус} \times (\text{окружность} \div 2) =$$
$$= r \times (2\pi r \div 2)$$
$$= r \times \pi r$$
$$= \pi r2$$

Одна пиццерия в моем районе предлагает пиццы разных размеров, цена которых зависит от диаметра. «Маленькая» пицца с диаметром 9,5 дюйма стоит 13,99 фунта стерлингов. «Одиночная» пицца с диаметром 7 дюймов стоит 6,99 фунта стерлингов. Так какое из этих предложений наиболее выгодное?

Что ж, давайте сравним площади этих пицц с точностью до одного знака после запятой:

$$\text{Площадь}_{\text{маленькая}} = \pi \times \left(\frac{9{,}5}{2}\right)^2 = 70{,}9 \text{ квадратных дюйма}$$

$$\text{Площадь}_{\text{одиночная}} = \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 38{,}5 \text{ квадратных дюйма}$$

Теперь я вижу, что площадь двух одиночных пицц составляет 38,5 × 2 = 77 квадратных дюймов при цене в 13,98 фунта стерлингов; следовательно, купить их выгоднее, чем одну маленькую пиццу. Проверяйте и вы свои пиццерии перед покупкой!

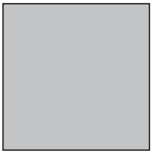
ЕЩЕ РАЗ ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Зная, как вычисляется площадь круга, мы можем вычислить и площадь любой фигуры, образованной секторами кругов. Площадь фигуры, образованной другими видами кривых, можно найти с помощью *интегрального исчисления*, представляющего собой противоположность *дифференцированию* (см. стр. 168). Если мы можем описать кривую с помощью уравнения, то, интегрировав это уравнение, мы получим уравнение для определения площади под кривой.

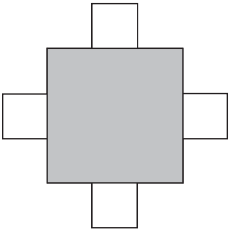
Интегральное исчисление можно применять и в трехмерных расчетах для определения объема таких криволинейных форм, как сфера. Однако прежде давайте вспомним о Пифагоре, без упоминания о котором любой учебник геометрии будет неполным.

ФРАКТАЛЫ — КОНЕЧНАЯ ПЛОЩАДЬ, БЕСКОНЕЧНЫЙ ПЕРИМЕТР

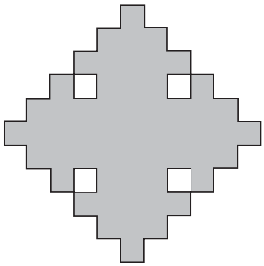
Давайте рассмотрим следующий алгоритм создания фигуры. Сначала создается квадрат:

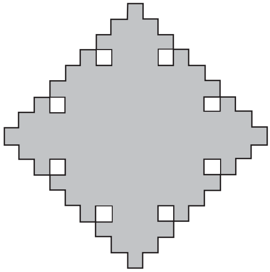


Затем добавляются дополнительные квадраты посередине каждой стороны:



Процесс повторяется до бесконечности:

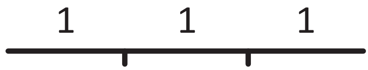




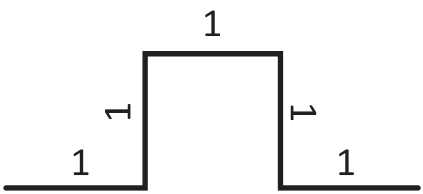
Такие «самоподобные» множества называются *«фракталами»* и обладают рядом интересных свойств.

Если я удвою длину сторон фигуры, то можно будет сказать, что я произвел *увеличение с масштабным коэффициентом 2*. Обычно площадь увеличивается в число раз, равное квадрату коэффициента масштабирования, что в данном случае составляет $2^2 = 4$ раза (это наглядно демонстрирует рисунок с плитками на стр. 129). Справедливо ли это и для показанного выше фрактала?

При выполнении первого добавления квадратов (каждую такую операцию называют *«итерацией»*) длина каждой стороны фигуры увеличивается с масштабным коэффициентом $\frac{5}{3}$. Для наглядности можно представить, что исходная сторона квадрата с длиной в три единицы заменяется фигурой с длиной в пять единиц:



заменяется на

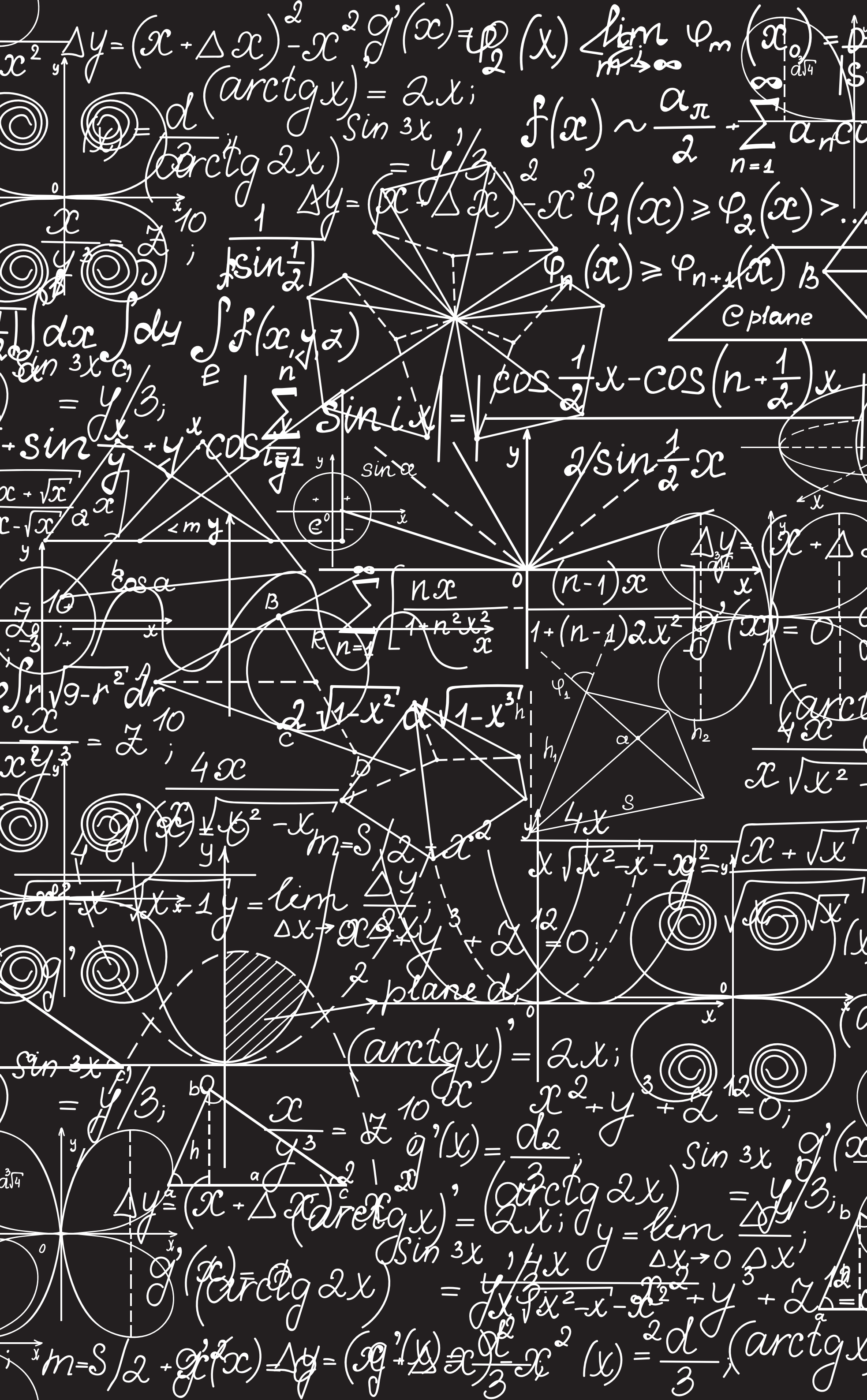


При этом площадь изменяется от 9 (3 × 3) до 13. Согласно обычным правилам увеличения, должно выполняться следующее равенство:

$$9 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 13$$

то есть площадь должна увеличиться в число раз, равное квадрату коэффициента масштабирования. Однако на самом деле левая часть этого уравнения дает другой результат — 25. При каждой итерации длина краев фигуры увеличивается больше, чем можно было бы ожидать, судя по увеличению площади.

В итоге, если бесконечно продолжать итерации, периметр полученной фигуры будет стремиться к бесконечности, тогда как площадь будет оставаться конечной. Нечто похожее происходит и в случае трехмерного пространства — здесь мы получаем твердые тела с конечным объемом и бесконечной площадью поверхности. Многие растения и животные используют такой подход там, где площадь поверхности играет ключевую роль, например, в легких и листьях.

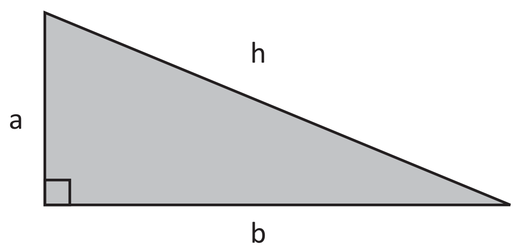

C plane
plane d
sin 3x
(arctg x)' = 2x;
(arctg 2x)
2sin 1/2 x

ГЛАВА 19

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

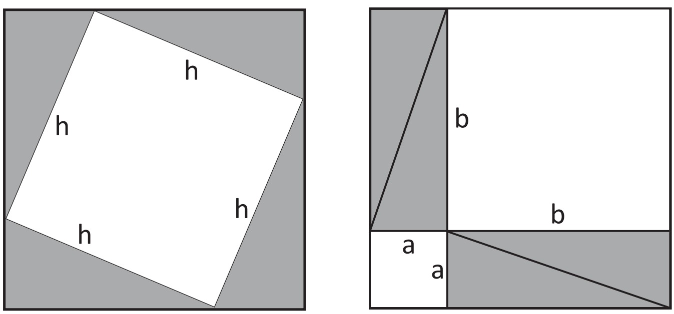
Теорема, которая была названа в честь Пифагора (ок. 570–495 до н.э.), не была создана им самим. Письменные памятники ряда более древних культур свидетельствуют о том, что она использовалась и до времен Пифагора, однако именно он одним из первых предложил доказательство этой теоремы.

Теорема Пифагора относится к прямоугольным треугольникам:



Я обозначил две стороны, расположенные под прямым углом друг к другу, как a и b. Третья сторона, обозначенная здесь буквой h, называется *«гипотенузой»*. Это самая длинная сторона прямоугольного треугольника, всегда расположенная напротив прямого угла. Пифагор предложил очень элегантное доказательство, которое выполняется исключительно путем перестановки треугольников.

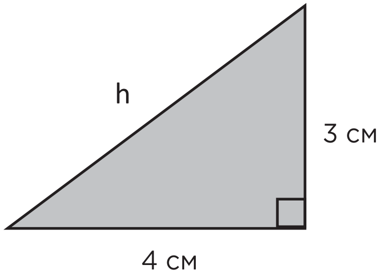
Мы можем взять четыре таких треугольника и расположить их так, чтобы они образовали два квадрата равной площади:



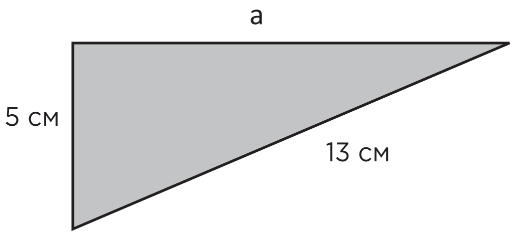
Пифагор выдвинул следующее утверждение: площадь внутреннего квадрата, представленного на левом рисунке, должна быть равна $h \times h = h^2$. Площади двух квадратов, представленных на правом рисунке, должны быть равны a^2 и b^2. Поскольку оба больших квадрата обладают одинаковой площадью и также не меняются размеры треугольников, должно выполняться следующее равенство:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Теорема Пифагора позволяет нам вычислить неизвестную сторону прямоугольного треугольника, как показано в примерах ниже:



$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$h = \sqrt{9 + 16}$$
$$h = \sqrt{25}$$
$$h = 5 \text{ см}$$



$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 - b^2 = a^2$$
$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$a = \sqrt{169 - 25}$$
$$a = \sqrt{144}$$
$$a = 12 \text{ см}$$

В обоих этих примерах длины трех сторон треугольника представлены целыми числами. Наборы целых чисел, при подстановке которых выполняется уравнение Пифагора, называются *тройками Пифагора*. Еще два примера таких троек: 7, 24, 25 и 8, 15, 17.

ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

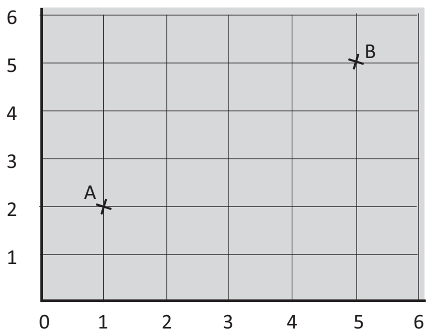
Диофант (ок. 210-290) — живший в Египте греческий математик — в своей серии книг «*Арифметика*» рассмотрел уравнения, аналогичные уравнению Пифагора. Пьер де Ферма (1607–1665) — увлекавшийся математикой французский юрист — в своем экземпляре «*Арифметики*» сделал пометку о том, что у него есть «поистине изумительное доказательство» того, что уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ может выполняться при подстановке целых чисел только в том случае, когда n равно двум, т. е. в случае троек Пифагора. Доказательство так и не было найдено, и прошло почти 400 лет, прежде чем это утверждение смог убедительно доказать британский математик Эндрю Уайлс (р. 1953). При этом он также заложил основу для доказательства *теоремы модульности*, которая была включена в *Книгу рекордов Гиннесса* как теорема с наибольшим количеством неудачных попыток доказательства.

Как выглядело доказательство, созданное самим Ферма, никто не знает.

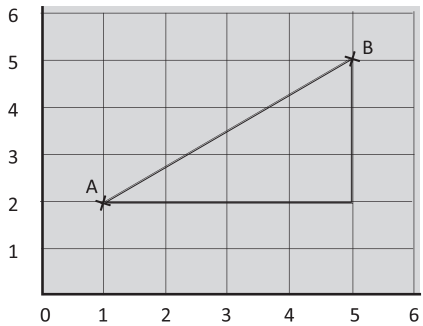
Почему роль теоремы Пифагора так велика? Что ж, как оказалось, возможность вычисления длины гипотенузы играет важную роль при расчете расстояний между двумя точками в *координатной геометрии*.

ИЗ ТОЧКИ А В ТОЧКУ В

Декартова система координат из осей X и Y (см. стр. 161) позволяет нам определять положение точек, линий и фигур. Допустим, что у нас есть две точки: точка А с координатами (1,2) и точка В с координатами (5,5), как показано ниже:



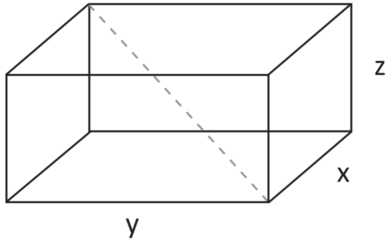
Вычислить точное расстояние между этими точками можно, образовав прямоугольный треугольник:



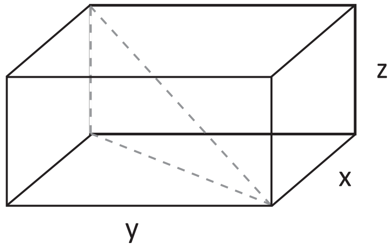
Как видим, длина основания этого треугольника составляет 4 единицы, а высота — 3 единицы. Это те же цифры, что и в случае треугольника, показанного на стр. 226, поэтому, как мы уже знаем, расстояние AB должно составлять 5 единиц.

Теорему Пифагору можно применять и в трехмерной системе координат.

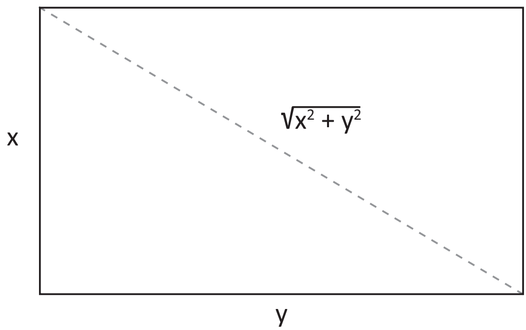
Допустим, что у нас есть коробка с шириной x, длиной y и высотой z, и нам нужно вычислить длину ее диагонали:



Для этого мы должны дважды воспользоваться теоремой Пифагора. Сначала нужно построить следующий прямоугольный треугольник:



Нужная нам диагональ является гипотенузой этого треугольника. Мы знаем, что высота треугольника равна z, но пока не знаем длину его основания. Однако если мы взглянем на прямоугольник, образующий нижнюю часть коробки, то увидим, как можно вычислить это расстояние с помощью теоремы Пифагора:



Теперь, когда нам известны длина основания и высота треугольника, мы можем определить длину диагонали *d*:

$$d^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2$$

Это выглядит немного пугающе; но если мы вспомним, что извлечение корня и возведение в квадрат — противоположные действия, которые отменяют друг друга, получим следующее уравнение:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Таким образом, выразив величины в обобщенном виде, мы вывели формулу для применения теоремы Пифагора в трехмерной системе координат. Многие математики и ученые рассматривают в своих работах больше трех измерений, и при этом теорема Пифагора может быть расширена до любого необходимого количества измерений. В одной из последних работ по квантовой теории было выдвинуто предположение о том, что мы живем в одиннадцатимерной вселенной*, однако в этой главе мы, пожалуй, остановимся на трех!

ПИФАГОР — ЧЕЛОВЕК И МИФ

Пифагор был выдающимся математиком и философом, но оставил после себя очень мало записей. Имеющиеся у нас сведения о его жизни почерпнуты из более поздних источников, которые часто носят мистический характер, наделяя Пифагора сверхъестественными способностями.

Выудив из этой информации наиболее правдоподобные детали, удалось выяснить, что Пифагор был греком, жившим на юге Италии**, которая в то время

---

* Это предполагается в так называемой М-теории, которая является развитием теории струн и претендует в современной физике на статус фундаментальной. — *Прим. ред.*

** Пифагор родился на острове Самос, расположенном в Эгейском море. В Южную Италию он перебрался уже входила в состав Греческой империи. Он основал названную его именем школу философии, в которой изучались математика, наука, религия и политика. Учителей в этой школе называли «*математиками*», а учеников — «*акустиками*»*. Пифагорейцы придерживались ряда радикальных для того времени идей: о том, что женщины должны иметь равное положение с мужчинами; о том, что строгая диета ведет к здоровью духа и тела; и о том, что числа и фигуры имеют божественное начало. Они верили в нумерологию, считая, что на жизнь человека влияют числа, связанные с местом и датой его рождения, а также его именем.

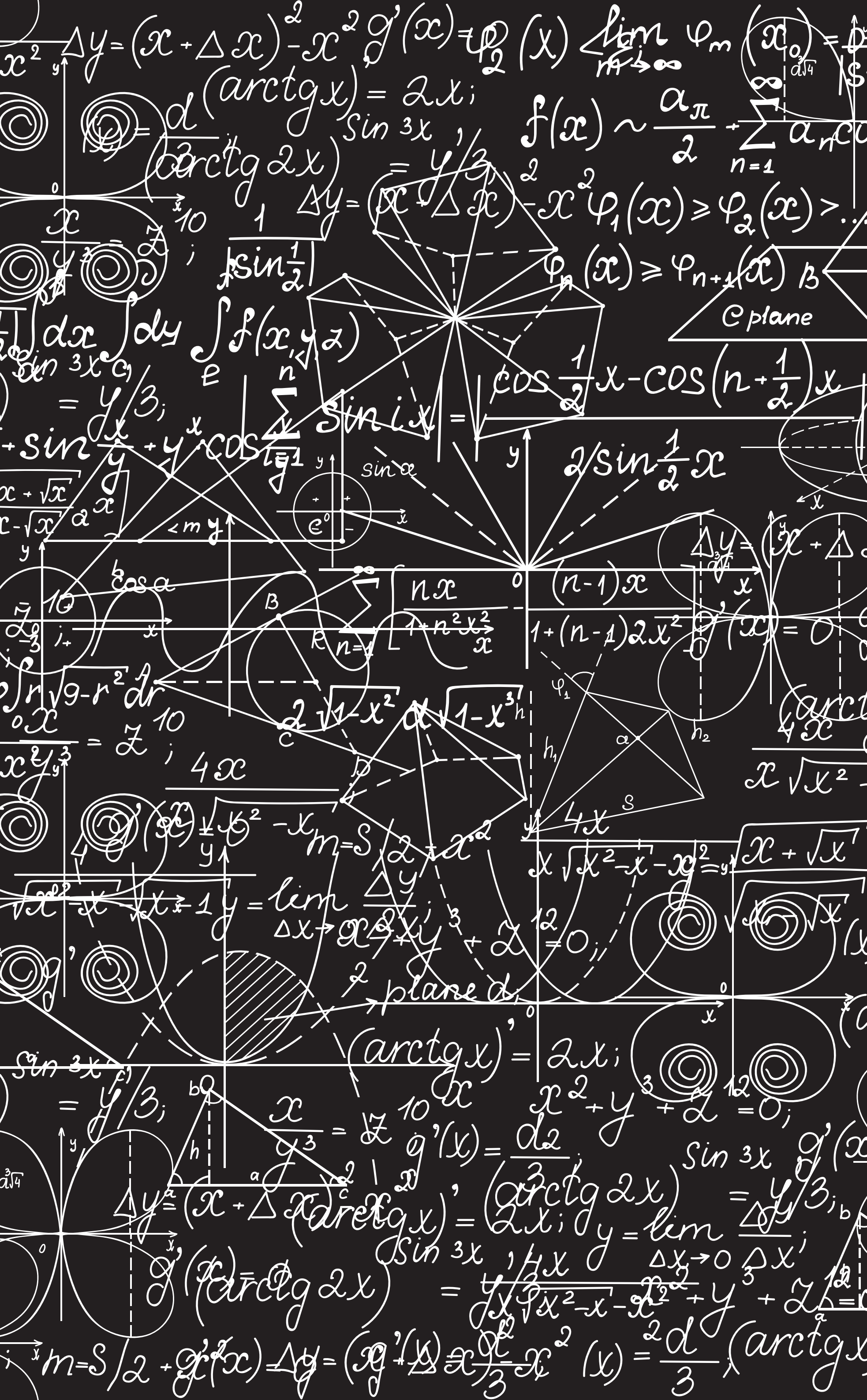
Пуританский образ жизни и политические взгляды Пифагора и его последователей были крайне непопулярны в то время, из-за чего им приходилось скрываться. Их убежище не раз подвергалось поджогам, в результате чего им приходилось спасаться из города бегством и искать себе новое пристанище.

Сведения о смерти Пифагора столь же неопределенны, как и подробности его жизни — одни историки полагают, что он погиб, когда недоброжелатели подожгли храм, в котором он находился, другие — что он все-таки смог бежать от преследователей, после чего заморил себя голодом, третьи — что он был схвачен и убит из-за того, что не захотел бежать по бобовому полю.

Не вызывает сомнений лишь тот факт, что Пифагор и его школа оказали глубочайшее влияние на формирование западной философии.

в зрелом возрасте. А «Греческой империи» (как единого государства) никогда не существовало. — *Прим. ред.*

* Согласно древнеримскому писателю Авлу Гелию (II в. н.э.) проходящие обучение в школе Пифагора делились на «акустиков», «математиков» и «физиков» в зависимости от того, на какой стадии обучения они находились. — *Прим. ред.*


C plane
plane d
sin 3x
(arctg x)' = 2x;

ГЛАВА 20

ОБЪЕМ

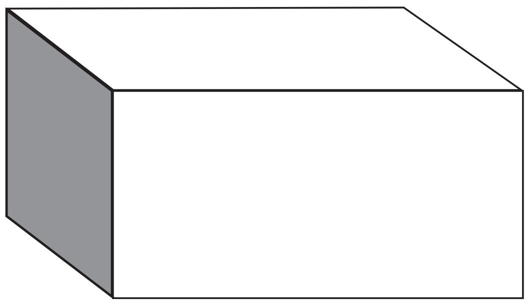
Объем объекта — это занимаемое им количество трехмерного пространства. Любое тело, имеющее прямые ребра, называется *«многогранником»*. Самая простая разновидность многогранника — кубоид*, объем которого вычисляется путем перемножения длины, ширины и высоты. Можно также сказать, что для этого нужно умножить площадь грани кубоида на его длину.

* Кубоид — то же, что прямоугольный параллелепипед, т. е. шестигранник, каждая грань которого является прямоугольником. — *Прим. ред.*

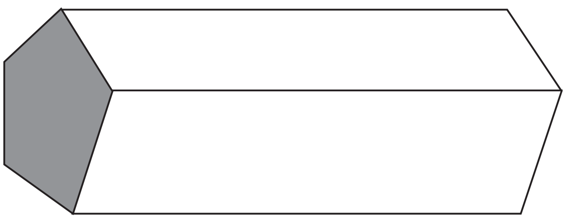
ПРИЗМЫ И СФЕРЫ

Этот принцип можно применить к любой форме, имеющей постоянное поперечное сечение. Такие формы называются *«призмами»*:

объем призмы = площадь грани × длина



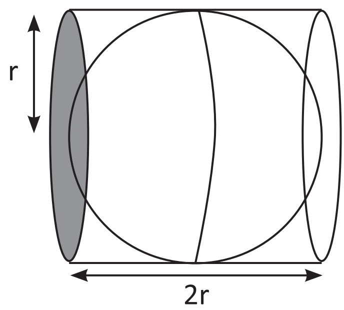
Кубоид (прямоугольная призма)



Пятиугольная призма

Мы можем определить объем этих двух призм, вычислив площадь серой грани и умножив ее на длину призмы. Поскольку мы уже знаем все, что нужно, о площади из предыдущего раздела, вычисление объема призмы обычно не представляет проблем.

В случае объектов с криволинейной поверхностью нам потребуется еще раз вспомнить об Архимеде (см. стр. 213). Он доказал, что объем сферы составляет две трети объема описанного вокруг нее цилиндра:



Мы можем рассматривать цилиндр как призму. Площадь серой круглой грани равна πr^2, и эту величину необходимо умножить на длину призмы, равную в данном случае 2r:

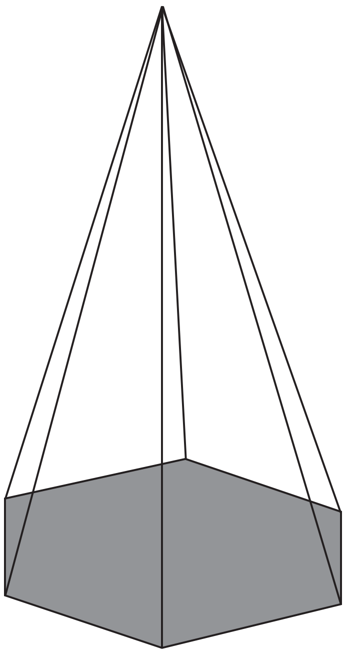
$$\text{объем сферы} = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

Таким образом, объем сферы составляет две трети от полученного значения:

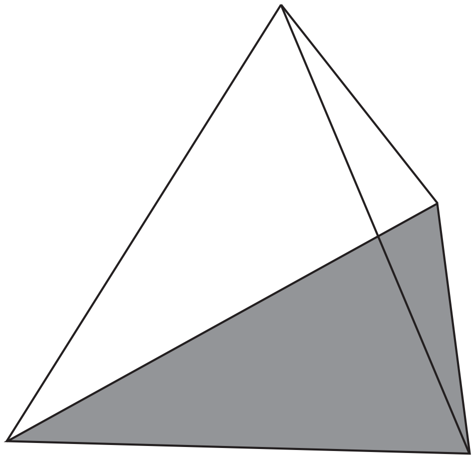
$$\text{объем цилиндра} = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi r^3$$

ПИРАМИДЫ

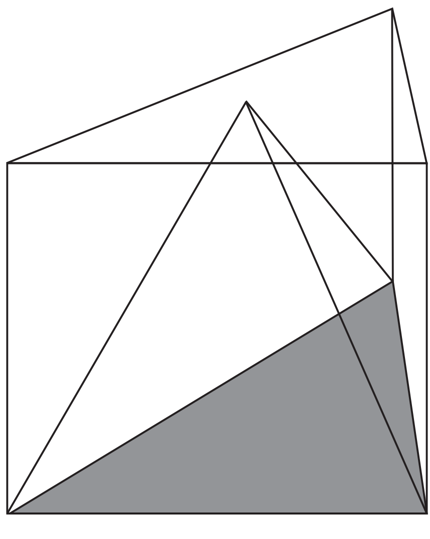
Пирамида представляет собой результат соединения с одной точкой всех углов двумерной фигуры. Так, например, в данном случае в качестве исходной фигуры выступает шестиугольник, что дает в результате гексагональную пирамиду.



Если в качестве исходной фигуры использовать равносторонний треугольник, результат будет представлять собой треугольную пирамиду, также называемую *«тетраэдром»*:



Как и в случае сферы, существует простая взаимосвязь между объемом пирамиды и объемом описанной вокруг нее призмы:



Арьябхата (см. стр. 32) одним из первых установил, что объем пирамиды составляет одну треть от объема призмы.

$$\text{объем пирамиды} = \frac{1}{3} = \text{площадь грани} \times \text{длина}$$

В данном случае грань призмы представляет собой основание пирамиды, и, соответственно, длина в действительности является высотой, что позволяет нам переписать данную формулу следующим образом:

$$\text{объем пирамиды} = \frac{1}{3} = \text{площадь основания} \times \text{высота}$$

Пирамиды Гизы имеют квадратные основания, и самая большая, так называемая «Великая пирамида», отличается действительно колоссальными размерами: квадратное основание составляет 230 метров в длину и ширину, а высота изначально составляла 147 метров. Используя нашу формулу, получим:

$$\text{объем Великой пирамиды} = \frac{1}{3} \times \text{площадь основания} \times \text{высота} = \frac{1}{3} \times 230^2 \times 147 = 2\,592\,100 \text{ м}^3$$

Для сравнения можно сказать, что объем самого высокого здания в мире, *Бурдж-Халифа*, составляет около 1,6 млн м^3. Учитывая, что Великая пирамида на 4500 лет старше здания Бурдж-Халифа и была построена без использования машин, ее масштаб не может не впечатлять.

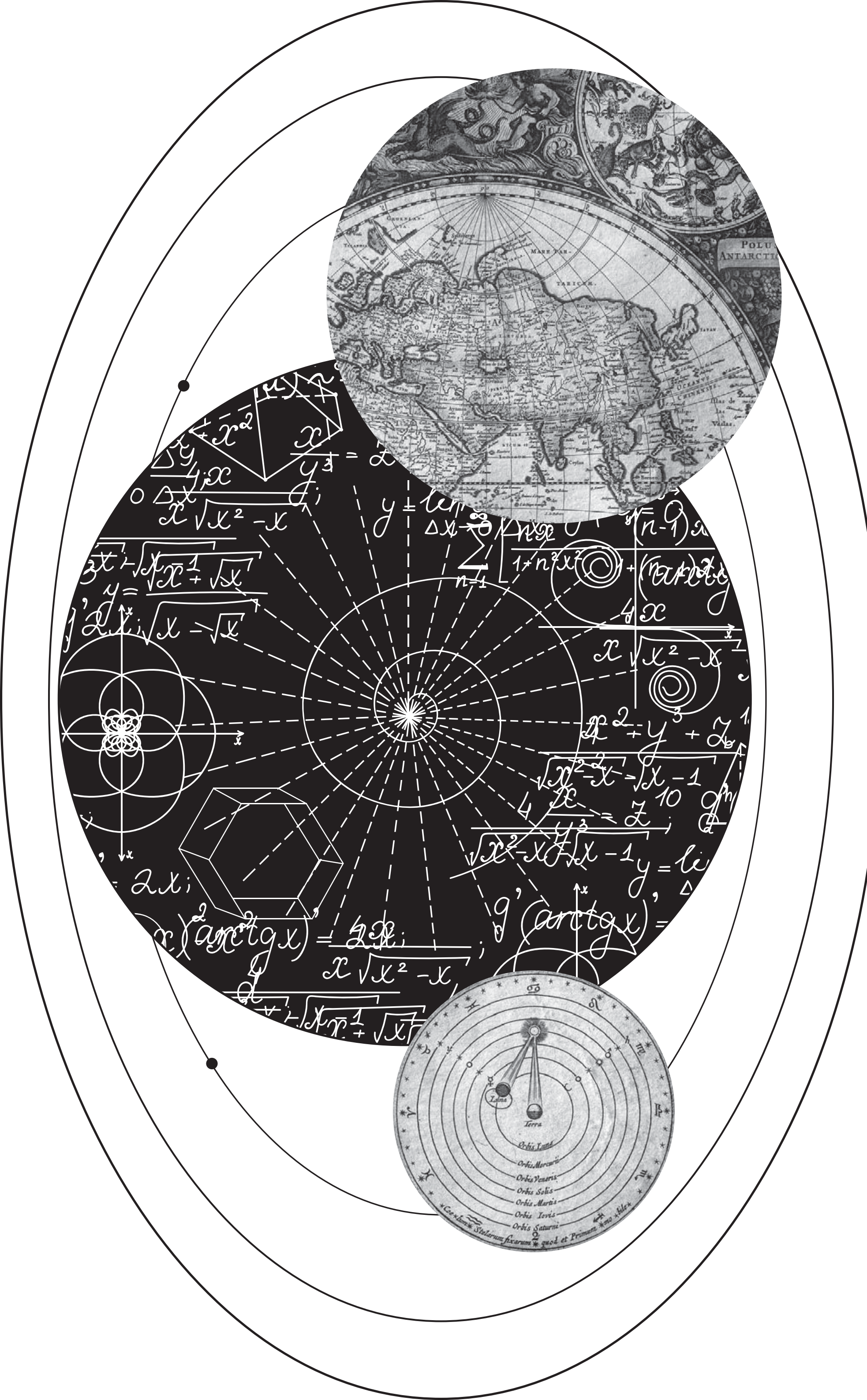
ЭВРИКА!

В случае тел неправильной формы у нас есть выбор из двух вариантов. Мы можем либо аппроксимировать объем тела, используя комбинацию тел с известным объемом, либо воспользоваться *законом Архимеда*. Согласно легенде, Архимеду было поручено проверить, была ли изготовлена заказанная царем Сиракуз корона с использованием всего предоставленного для ее изготовления золота. Царь хотел убедиться в том, что ювелир не заменил некоторую часть золота на свинец или серебро, обеспечив себе небольшой приятный бонус без уменьшения массы короны.

Самый простой способ убедиться в этом состоял в том, чтобы расплавить корону и сравнить полученный объем с тем объемом золота, который был предоставлен мастеру. Однако эту проверку нужно было выполнить, не причиняя вреда короне.

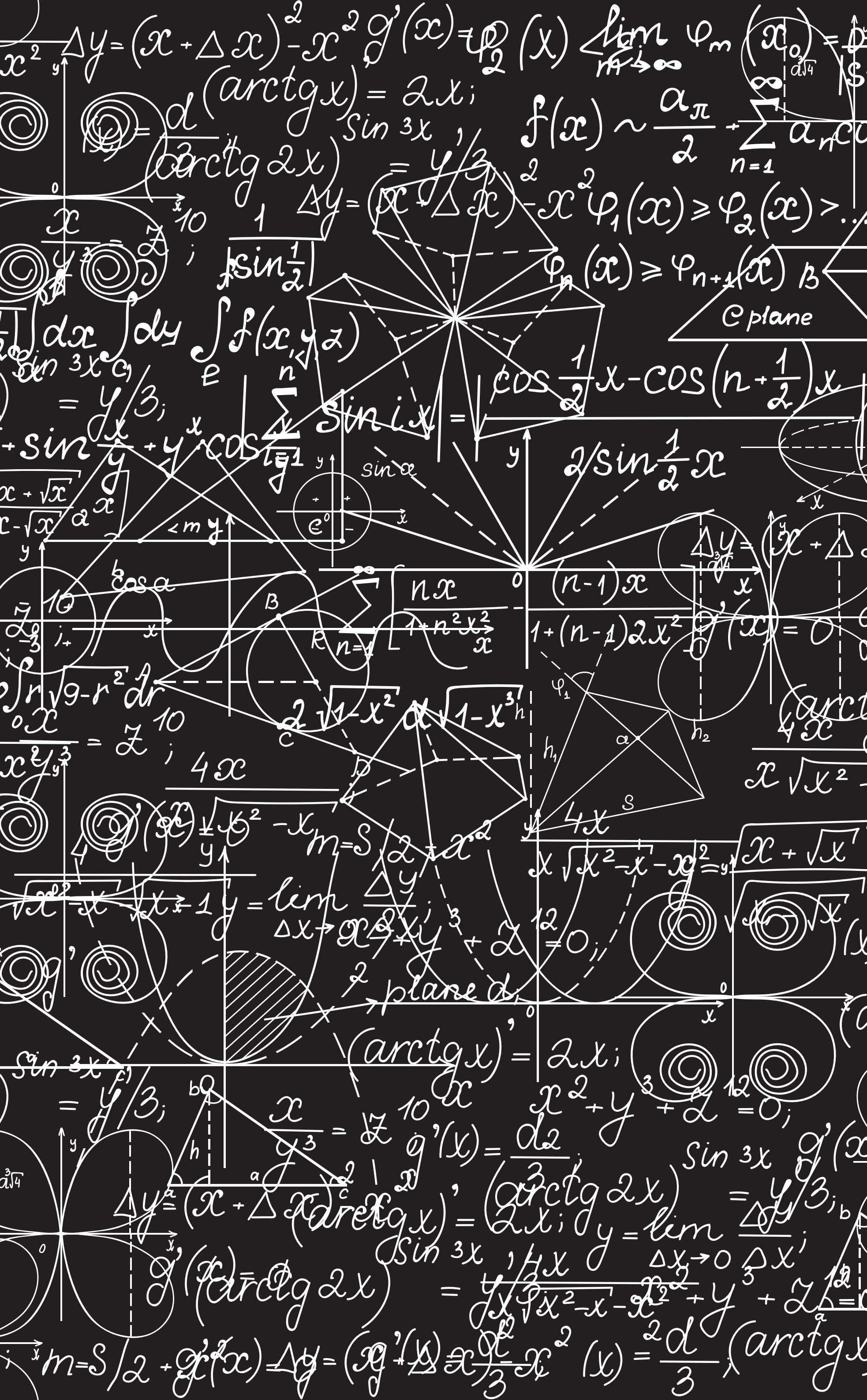
Потратив день в напряженных попытках решить эту проблему, Архимед пришел в баню и, опустившись в ванну, заметил, что его тело вытеснило воду. Он понял, что определить объем короны можно, посмотрев, сколько воды она вытеснила. Это настолько обрадовало его, что он выбежал на улицу с криком «*Эврика!*» (что на греческом языке означает «Нашел!»), забыв при этом даже одеться.

На следующий день он провел эксперимент, который подтвердил имевшиеся подозрения в отношении честности ювелира.


Luna
Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni
Coelum Stelarum fixarum quod et Primum mobile

ЧАСТЬ V

СТАТИСТИКА


C plane
plane d
sin α
cos a
$2\sin\frac{1}{2}x$
$(arctg\,x)' = 2x;$

ГЛАВА 21

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Статистики — это математики, которые собирают и анализируют данные* для получения некоторой итоговой *статистики*, после чего делают определенные выводы, исходя из этой статистики. От статистики зависят практически все аспекты нашей жизни: от размера одежды и стоимости автомобильной страховки до лекарств, прописываемых при той или иной болезни. При сборе и анализе статистики важно понимать, взяты ли данные из *генеральной совокупности* или *выборки*.

Генеральная совокупность — это совокупность всех членов определенной группы. Например, если

* «Данные» — это множество отдельных значений, или «элементов данных».

бы мне нужно было узнать размах крыльев взрослых особей полярной крачки, то генеральная совокупность включала бы в себя всех взрослых особей этого вида птиц. Измерив размах крыльев всех взрослых особей полярной крачки, я получил бы точную статистику этой генеральной совокупности.

Поскольку в действительности невозможно измерить длину крыльев буквально у каждой взрослой особи полярной крачки, вместо этого мне пришлось бы сделать выборку и надеяться на то, что статистика выборки будет мало отличаться от статистики генеральной совокупности. Чтобы не допустить систематической ошибки, важно делать выборку надлежащим образом. Например, если я включу в свою выборку всех крачек, которых мне удастся поймать на некотором конкретном острове, то все эти особи могут обладать определенной особенностью, влияющей на размах их крыльев.

При этом группы птиц, обитающие на других островах, могут иметь намного более длинные или более короткие крылья.

Вы можете использовать различные методы формирования выборки, в зависимости от того, сколько времени, усилий и денег вы готовы потратить. Те статистические данные, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, редко представляются с указанием того, каким образом формировалась выборка. Плохо сформированная выборка может специально использоваться для получения необъективной статистики, что породило знаменитое высказывание, приписываемое британскому премьер-министру Бенджамину Дизраэли (1804–1881): «Существуют три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика».

Один из наиболее часто используемых видов статистики — статистика относительно *средних значений*.

Средние значения обычно определяют, исходя из того допущения, что основная масса числовых данных, как правило, сосредоточивается в центральной области — что статистики называют *центральной тенденцией*. Например, рост большинства британских женщин мало отличается от *среднего* роста, равного 164 см.

Среднее, или, как его еще называют, среднее арифметическое значение представляет собой результат суммирования всех данных с последующим делением на количество элементов данных. Фактически при этом обеспечивается равномерное распределение данных по всем членам выборки. В качестве примера давайте допустим, что мне нужно узнать средний рост членов моей команды по мини-футболу. Сначала я измеряю рост каждого члена команды в сантиметрах: 167, 168, 175, 184, 191

В итоге получается 167 + 168 + 175 + 184 + 191 = 885.

Разделив это число на количество элементов данных (5), получим: 885 ÷ 5 = 177 см.

Обратите внимание, что никто из членов команды на самом деле не обладает таким ростом, в силу чего среднее арифметическое является не очень подходящим значением в некоторых случаях. Так, проведенное один раз исследование показало, что среднее количество детей в английской семье составляет 2,4, что стало всеобщим поводом для насмешек, поскольку в действительности количество детей не может обозначаться нецелым числом.

Существуют две разновидности числовых данных: *непрерывные* данные, которые могут принимать любое значение в заданном диапазоне (как, например, значения высоты или веса) и *дискретные* данные, которые могут принимать только определенные значения внутри диапазона (как, например, данные о количестве детей или размере обуви).

Медианой называется средний элемент выборки, расположенной в порядке возрастания или убывания — как в случае выстраивания шеренги по росту или весу (или другому параметру) и выбора того, кто стоит посередине. В случае моей футбольной команды медиана составляет 175 см. Если мы добавим в выборку запасного игрока, доведя число элементов до шести, то в качестве медианы будет выступать среднее арифметическое третьего и четвертого элементов.

В случае неупорядоченных данных можно использовать *модальное значение*, или, иначе говоря, «*моду*».

Это не показатель центральной тенденции, а просто наиболее распространенное или популярное значение.

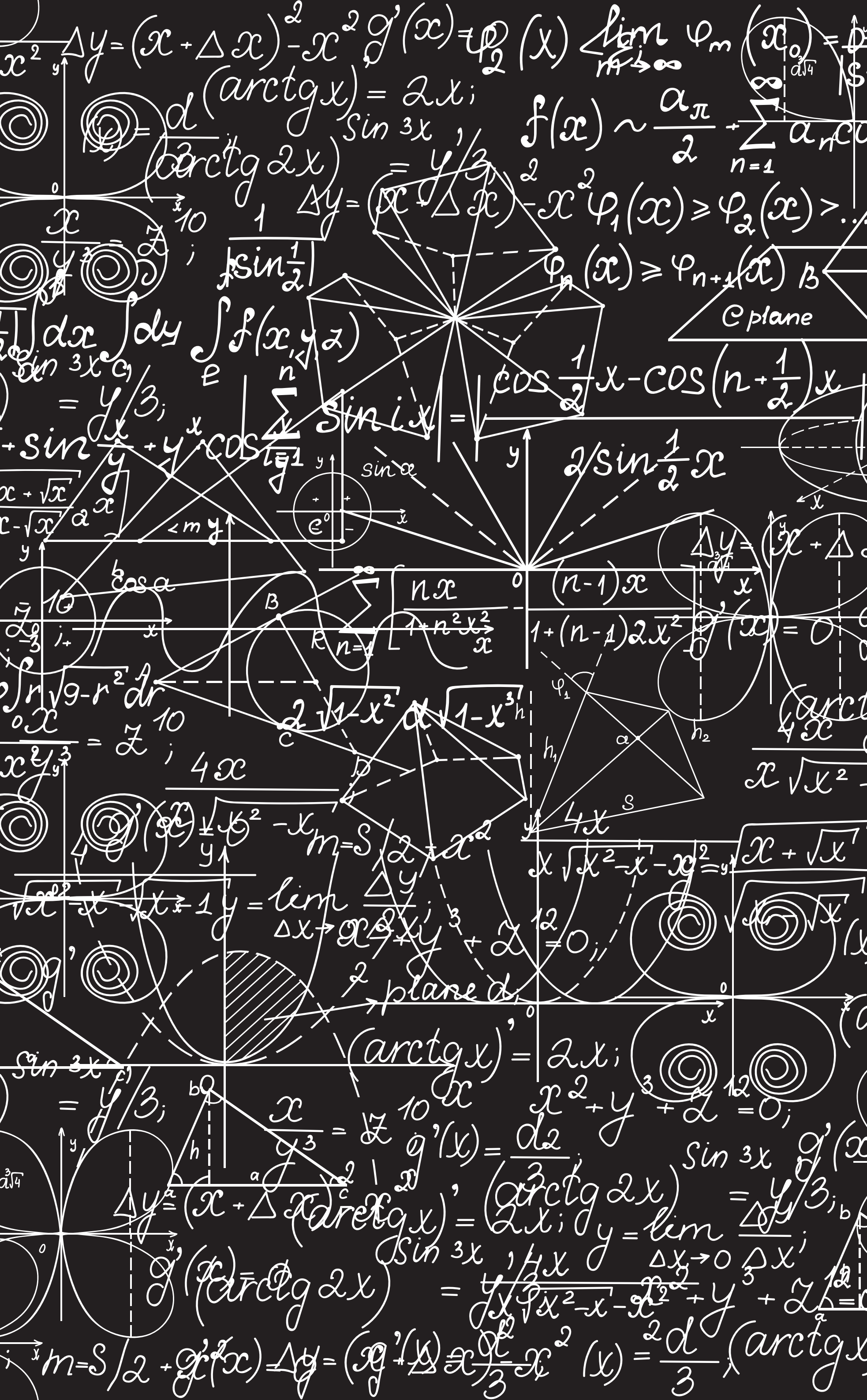
Хотя средние значения очень полезны уже сами по себе, обычно также важно иметь некоторое представление и о том, как распределены данные. Находятся ли все данные поблизости от среднего значения, или по обе стороны от среднего значения находятся широко раскинувшиеся группы значений? О том, как может выполняться такой анализ, мы поговорим в следующем разделе.

ОШИБОЧНОЕ ПОНИМАНИЕ: НИЖЕ СРЕДНЕГО

В 2012 году главный инспектор школ Великобритании заявил, что оценки каждого пятого ученика начальной школы по английскому языку ниже общенационального среднего уровня и поэтому необходимо повышать образовательные стандарты.

Похожая история случилась и с американским президентом Дуайтом Эйзенхауэром (1890–1969), который однажды выразил возмущение по поводу того, что коэффициент умственного развития (IQ) половины граждан США ниже среднего уровня.

Этим джентльменам не мешало бы предъявить более высокие требования к самим себе, поскольку это совершенно неверное понимание того, что представляют собой средние значения!


C plane
plane d

ГЛАВА 22

ПОКАЗАТЕЛИ РАЗБРОСА ДАННЫХ

Выставляя оценки на экзамене по математике, я обычно вычисляю средний балл. Это позволяет мне оценить общую успеваемость класса; кроме того, ученики часто хотят узнать, насколько отличается их результат от среднего балла класса. Если полученный средний балл составляет 75%, это может означать, что уровень большинства учеников либо немного ниже, либо немного выше 75% — то есть основная масса оценок очень близка к 75%. Это будет означать, что мои ученики мало отличаются по уровню своих способностей, и примерно одинаково усвоили изложенный мной материал. С другой стороны, я могу получить более значительный разброс оценок. При этом ряд очень низких оценок будет скомпенсирован рядом очень высоких оценок, что даст в итоге такое же среднее значение. Каким же образом мне отразить этот аспект успеваемости, не представляя начальству конкретный список оценок?

Для этого мне нужно предоставить показатель разброса оценок. Существует несколько видов таких показателей, которые отличаются по уровню своей сложности.

РАЗМАХ

Проще всего определить *размах* — разность между самым высоким и самым низким баллами. Так, если размах оценок будет составлять 20%, то это будет значить, что оценки за экзамен находятся примерно в диапазоне от 65 до 85%.

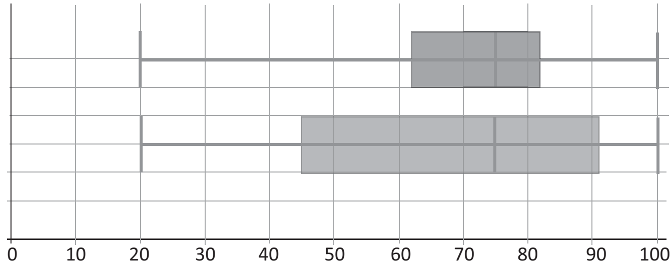
Чем больше размах, тем больше степень разброса данных.

Поскольку для определения размаха используется только наибольшее и наименьшее значения, он может создавать превратное представление о ситуации. Если один ученик получит очень низкую оценку в 20%, в то время как остальные оценки будут отличаться от среднего значения не больше чем на 10%, то полученный в итоге большой размах создаст неверное представление об этих данных. Оценку в 20% в данном случае можно считать *выбросом* (подробности см. ниже).

МЕЖКВАРТИЛЬНЫЙ РАЗМАХ

Чтобы избежать этой проблемы, мы можем использовать *межквартильный размах*, позволяющий оценить степень разброса средних 50% данных. Для этого мне понадобится определить положение *квартилей*. Давайте вспомним, что медиана — это средний элемент данных, разделяющий выборку пополам, а в нашем случае — оценка, занимающая среднее положение во всем множестве оценок. Если я возьму нижнюю половину данных и найду их медиану, то ниже этого значения будут находиться 25% данных. Такое значение называют *нижним квартилем*. Сделав то же самое с верхней половиной данных, я получу *верхний квартиль*, ниже которого расположены 75% данных. Таким образом, межквартильный размах представляет собой разность между верхним и нижним квартилями.

Ниже представлены две диаграммы размаха, называемые «*ящиком с усами*», построенные по результатам, полученным на экзамене по математике двумя группами шестиклассников:



Каждый «ящик с усами» включает в себя пять вертикальных линий. Две линии по краям — «усы» — соответствуют максимальному и минимальному значениям. Три линии, образующие центральный «ящик», соответствуют нижнему квартилю, медиане и верхнему квартилю. «Ящик» показывает мне, как распределены средние 50% баллов, а «усы» — как распределены остальные оценки. Эти графики показывают, что размах обеих групп составляет 100 – 20 = 80%. Межквартильный размах верхней группы составляет 82 – 62 = 20%, то есть оценки половины учеников отличаются друг от друга не больше чем на 20%. Нижняя группа учеников обладает таким же размахом (как нам показывают «усы») и такой же медианой, но намного более широким «ящиком» межквартильного размаха (91 – 45 = 46%). Из этого можно сделать вывод, что вторая группа учеников менее однородна в плане успеваемости, чем первая группа, несмотря на такой же средний балл.

СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

«Стандартное» или «среднеквадратичное» отклонение — это показатель удаленности данных от среднего значения. Не являясь в буквальном смысле средним отклонением от среднего значения (которое называется *абсолютным средним отклонением*), данное значение имеет ряд полезных свойств, которые мы рассмотрим чуть позже.

Для вычисления стандартного отклонения нужно вычесть среднее значение из каждого элемента данных. Если элемент данных меньше среднего значения, то результат будет отрицательным, но для нас важна лишь величина расстояния между элементом и средним значением, и не важен его знак. Чтобы избавиться от этой проблемы, полученные значения возводятся в квадрат, так как возведение в квадрат дает положительный результат, даже когда исходное значение отрицательно (см. стр. 93).

Далее нужно суммировать полученные квадраты, разделить сумму на количество элементов данных и вычислить квадратный корень, тем самым компенсировав предыдущую операцию возведения в квадрат. Полученный результат будет представлять собой стандартное отклонение. Вот пример:

Оценки за тест по алгебре
Средняя оценка = 57,45
Количество учеников = 11

Оценка	**Оценка — Среднее значение**	**(Оценка — Среднее значение)^2**
74	16,55	273,9025
44	–13,45	180,9025
45	–12,45	155,0025
42	–15,45	238,7025
45	–12,45	155,0025
76	18,55	344,1025
79	21,55	464,4025
40	–17,45	304,5025
38	–19,45	378,3025
83	25,55	652,8025
66	8,55	73,1025
	Итого:	3220,7275

$$\text{Стандартное отклонение} = \sqrt{\frac{3220.7275}{11}} = 17{,}11$$

(с точностью до двух знаков после запятой)

Это означает, что разброс оценок моих учеников достаточно широк, и эта группа не слишком однородна в плане успеваемости. Если другая группа учеников при таком же среднем значении и размахе будет обладать меньшим стандартным отклонением, это будет говорить о том, что оценки этой группы в целом меньше удалены от среднего значения.

ВЫБРОСЫ

Выброс — это значение, которое сильно отличается от всех остальных данных и выглядит как слишком низкое или слишком высокое на общем фоне. К числу выбросов относятся те значения, которые:

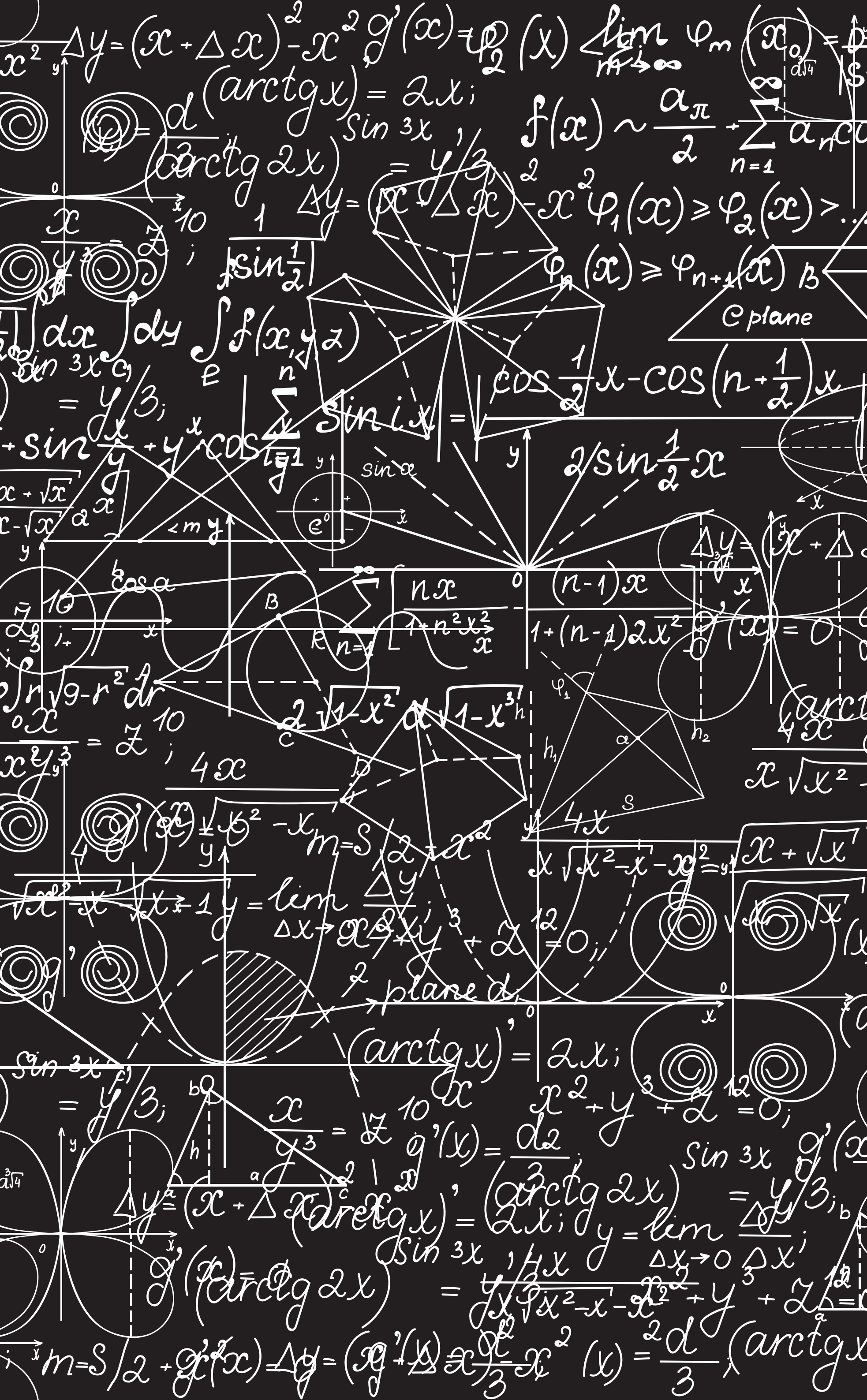
больше среднего значения как минимум на два стандартных отклонения,
меньше среднего значения как минимум на два стандартных отклонения,
больше верхнего квартиля как минимум на 1,5 межквартильных размаха, или
меньше нижнего квартиля как минимум на 1,5 межквартильных размаха

Например, средний рост австрийской женщины в 2001 году составлял 167,6 см со стандартным отклонением в 5,6 см. В таком случае верхний выброс составляет $167{,}6 + (2 \times 5{,}6) = 178{,}8$ см; то есть мы можем считать необычно высокими тех австрийских женщин, рост которых превышает эту величину. Нижний предел составляет $167{,}6 - (2 \times 5{,}6) = 156{,}4$ см; то есть мы можем считать необычно низкими тех австрийских женщин, рост которых меньше этой величины.

При сборе данных в ходе наблюдений и экспериментов ученым приходится обращать особое внимание на выбросы. Следует ли считать выброс достоверным значением, оставив его в наборе данных, или он вызван погрешностью измерений и его лучше удалить из набора данных? Чтобы уменьшить степень влияния выбросов на итоговую статистику, ученые обычно многократно повторяют каждый эксперимент.

В 1970-х годах самолеты Национального управления США по аэронавтике и исследованию космического пространства (NASA) регулярно измеряли концентрацию озона в верхних слоях атмосферы. Полеты над Антарктикой часто давали очень низкие показания, которые исключались программным обеспечением из анализа как выбросы. Лишь десять лет спустя работающие в Антарктике ученые обнаружили дыру в озоновом слое. Озоновый слой в значительной мере исключает попадание на поверхность Земли испускаемого солнцем вредного ультрафиолетового излучения, и потому играет чрезвычайно важную роль в сохранении жизни на Земле. К счастью, благодаря запрету на разрушающие озон хлорированные фторуглероды, озоновый слой начал понемногу восстанавливаться, но, тем не менее, заполниться полностью дыра сможет лишь через несколько десятилетий.

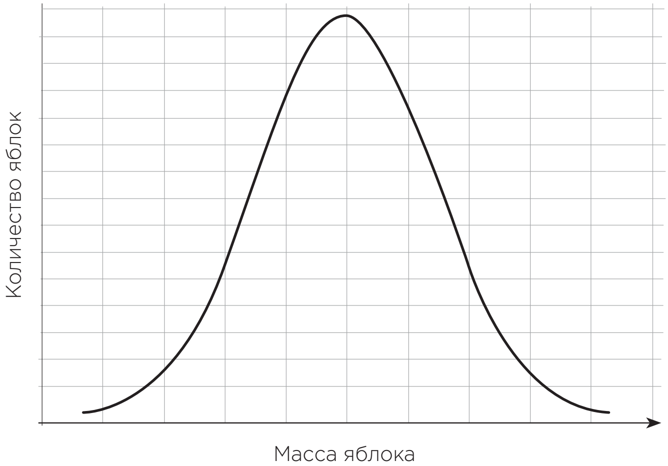
Таким образом, выброс может быть как достоверным, так и ошибочным значением, и оба эти случая требуют тщательного анализа.


C plane
plane d

ГЛАВА 23

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

График распределения собранных данных часто выглядит как колоколообразная кривая. Так, например, если бы я построил график, показывающий, как распределена масса яблок, полученных с одной яблони, я получил бы график примерно следующего вида:



Как и можно было ожидать, масса большинства яблок находится вблизи центрального (среднего) значения, и количество яблок постепенно уменьшается по мере удаления от среднего значения.

Такая форма распределения встречается настолько часто, что можно было бы подумать, что именно поэтому она называется *«нормальным распределением»*. На самом деле такое название обусловлено тем, что для обработки статистики по собранным данным обычно используется нормализованная версия графика, где среднее значение равно нулю, а стандартное отклонение равно единице. Такой график впоследствии можно использовать для определения того, какая доля генеральной совокупности больше заданной величины. Именно поэтому стандартное отклонение стало настолько популярным показателем разброса.

При нормальном распределении 68% данных находятся в пределах одного стандартного отклонения от среднего значения, 95% — в пределах двух и 99,7% — в пределах трех. Когда ученые, проводящие опыты на Большом адронном коллайдере, объявили об открытии бозона Хиггса в 2013 году, они говорили о «пяти сигмах». Сигма — это буква греческого алфавита, используемая для обозначения стандартного отклонения. Пять сигм означают, что вероятность того, что полученные данные вызваны погрешностью измерений, а не появлением новой частицы, удалена от среднего значения на пять стандартных отклонений, то есть вероятность равна 0,0000003.

Нормальное распределение находит применение в самых разных областях человеческой деятельности. Так, при проектировании самых разных вещей, от одежды и мебели до поездов, самолетов и зданий, широко используются данные *антропометрии*, науки о размерах человеческого тела, для выбора подходящих размеров для тех или иных элементов. Благодаря тому, что эти данные нормально распределены, проектировщики и дизайнеры могут определить, для какой части населения хорошо подойдет футболка среднего размера или смотровой люк с размерами метр на метр.

КАКОЙ IQ У МАТЕМАТИКОВ?

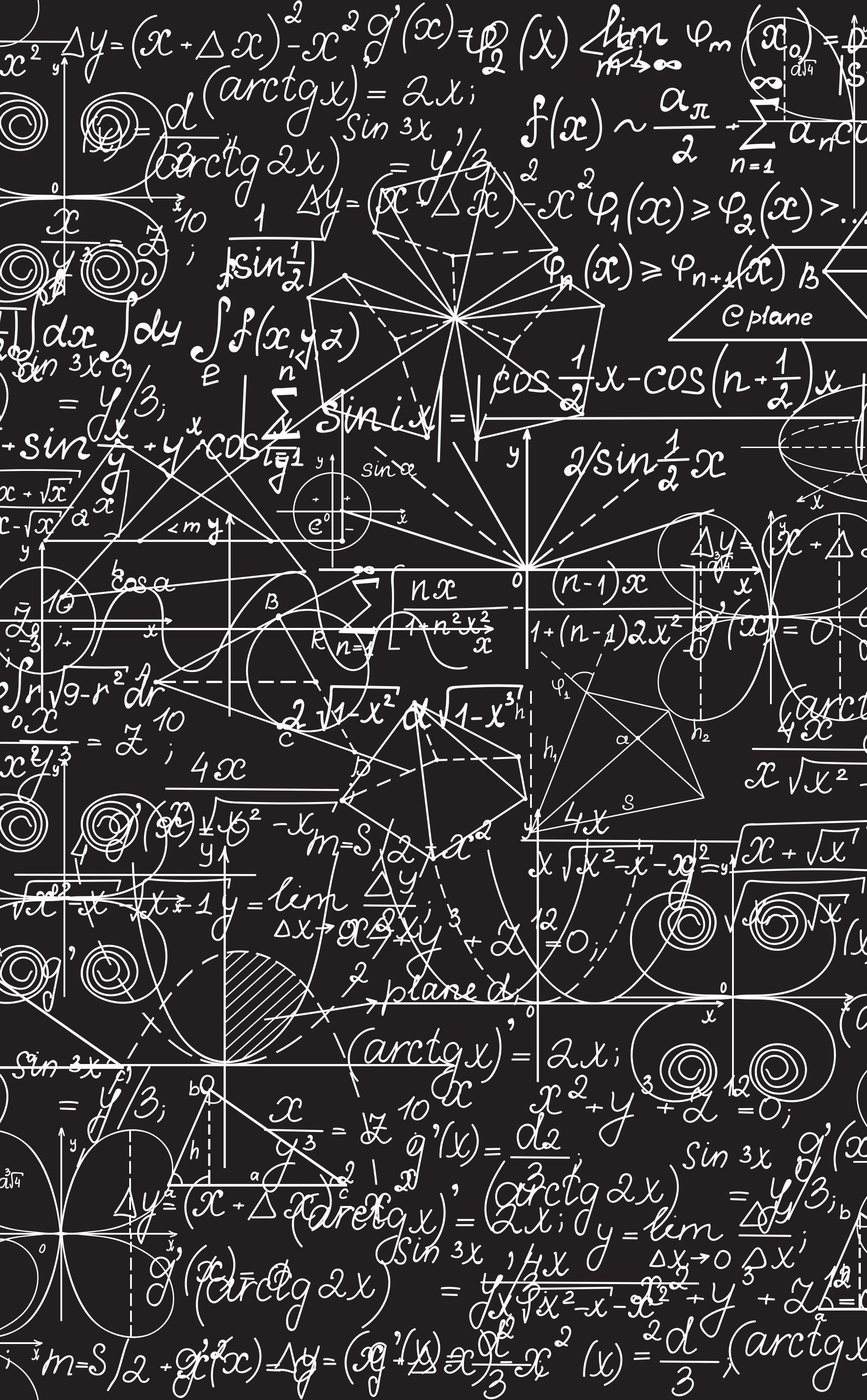
IQ или *коэффициент умственного развития* — довольно спорный показатель умственных способностей. Он трудно поддается точному измерению, и, определенно, не может быть измерен с помощью десятиминутного онлайн-теста. Этот показатель нормально распределен по всей совокупности населения со средним значением 100 («средние умственные способности») и стандартным отклонением 15. Организация «Менса» для людей с высоким IQ позиционирует себя как общество для 2% населения с наивысшим IQ, который составляет примерно 135 единиц.

В 1926 году американский психолог Катарина Моррис Кокс (1890–1984) опубликовала очень интересную работу, в которой, помимо прочего, была произведена оценка IQ ряда известных исторических личностей, которые прославились своей гениальностью.

Верхнюю строчку в этом списке занял разносторонне одаренный немец Иоганн фон Гете (1749–1832), который внес выдающийся вклад в философию, политику, науку и литературу, и имел IQ на уровне 188 единиц. Второе место, с IQ в 183 единицы, получил Лейбниц (см. стр. 172), и третье место, с IQ в 168 единиц, разделили француз Пьер-Симон Лаплас (1749–1827) и Исаак Ньютон (см. стр. 115).

Если говорить о нашем времени, то IQ лауреата Филдсовской премии австралийского математика Теренса Тао (р. 1975), по слухам, превышает 200 единиц.

Если вы чувствуете себя немного посрамленным на этом фоне, то, возможно, вас утешит тот факт, что IQ человека имеет тенденцию повышаться с течением времени.


C plane
plane d
2 sin 1/2 x
(arctg x)' = 2x;
sin 3x

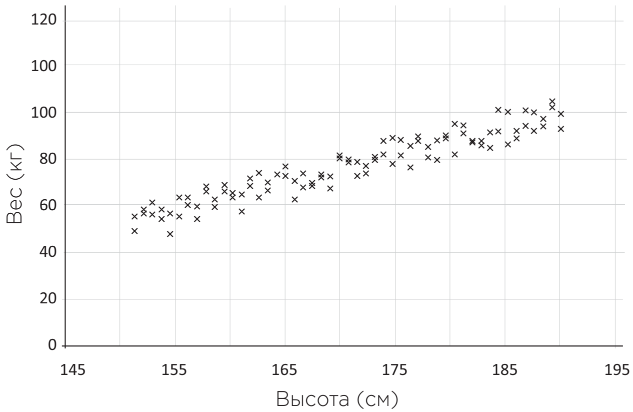
ГЛАВА 24

КОРРЕЛЯЦИЯ

Помимо обобщения данных, статистика также может использоваться для выявления взаимосвязей между различными данными.

Собрав два типа данных по каждому члену генеральной совокупности или выборки, я могу построить график их взаимной зависимости, используя *диаграмму рассеяния*.

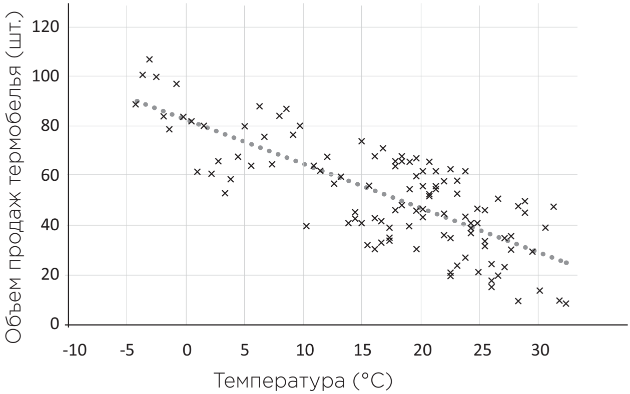
Например, вот как выглядит *диаграмма рассеяния* со значениями роста и веса людей, занимающихся в тренажерном зале:



Как мы видим, общая тенденция состоит в том, что чем выше человек, тем больше он весит. Этого и следовало ожидать — высокорослые люди обычно больше низкорослых, хотя иногда эта закономерность нивелируется особенностями телосложения. Такую зависимость статистики называют сильной положительной корреляцией.

Эта корреляция «сильна» в силу того, что ее график очень близок по форме к прямой линии, и «положительной» в силу того, что при увеличении значений одной переменной значения второй переменной тоже увеличиваются.

А вот пример слабой отрицательной корреляции:

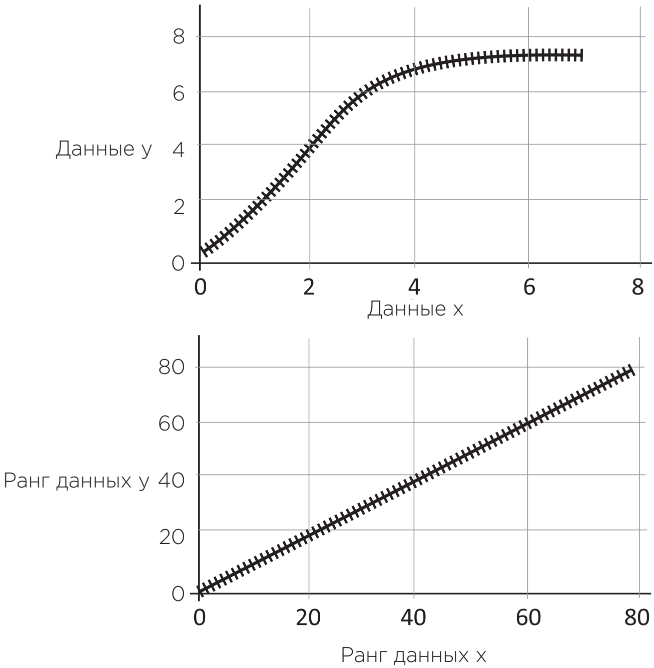


Эта корреляция «отрицательна» в силу того, что объем продаж термобелья снижается по мере роста температуры. Она «слабая» в силу того, что, указывая на наличие тенденции, точки этого графика все же далеко отстоят от показанной прямой линии. Это так называемая *«линия наилучшего соответствия»* — линия, расположенная как можно ближе к максимально возможному количеству точек.

Англичанин Фрэнсис Гальтон (1822–1911) отличился не только тем, что ввел в обиход стандартное отклонение, но и тем, что в числе первых рассмотрел корреляцию и предпринял попытки к ее измерению. Он был одержим идеей точных измерений и сбора данных, и особенно сильно интересовался антропометрией, поскольку был неизменным приверженцем евгеники — то есть считал, что людей нужно подвергать избирательной селекции, чтобы сделать их более здоровыми и умными, и искоренить физические недостатки и другие «нежелательные» черты. После Гальтона изучение корреляции продолжил его соотечественник Карл Пирсон (1857–1936), который предложил математический способ измерения корреляции (сводящийся к использованию так называемого *коэффициента корреляции Пирсона*), а также способ построения идеальной линии наилучшего соответствия.

Коэффициент корреляции Пирсона может изменяться от –1 (идеальная отрицательная корреляция) до 1 (идеальная положительная корреляция), с серединой в 0 (полное отсутствие корреляции).

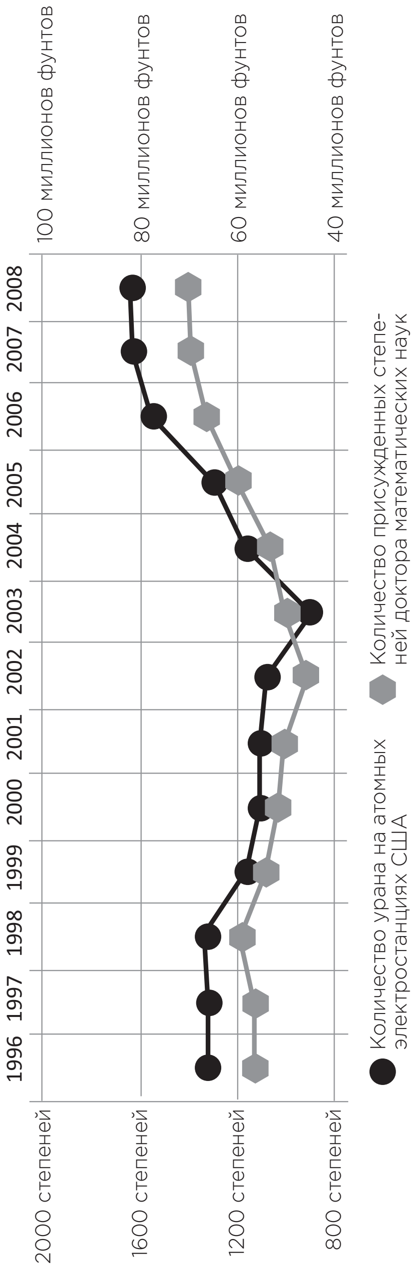
Коэффициент Пирсона можно использовать только в том случае, когда диаграмма рассеяния представляет собой прямолинейную зависимость. Чарльзу Спирмену (1863–1945) удалось обойти это ограничение за счет упорядочения данных и выявления корреляции путем анализа рангов данных, а не самих числовых значений. Так появился *коэффициент ранговой корреляции Спирмена,* и после этого экзамены курса по географии GCSE Geography уже никогда не содержали повторяющиеся задания. Ниже показана диаграмма рассеяния данных, между которыми имеется нелинейная зависимость. Проранжировав данные и использовав в диаграмме ранги, мы получим более линейную зависимость, показанную на нижнем рисунке.



КОРРЕЛЯЦИЯ — ЭТО НЕ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННАЯ СВЯЗЬ

Наличие корреляции между двумя явлениями еще не говорит о том, что одно явление порождает другое. Так, высокие люди весят больше, но если вы наберете лишний вес, это не сделает вас выше.

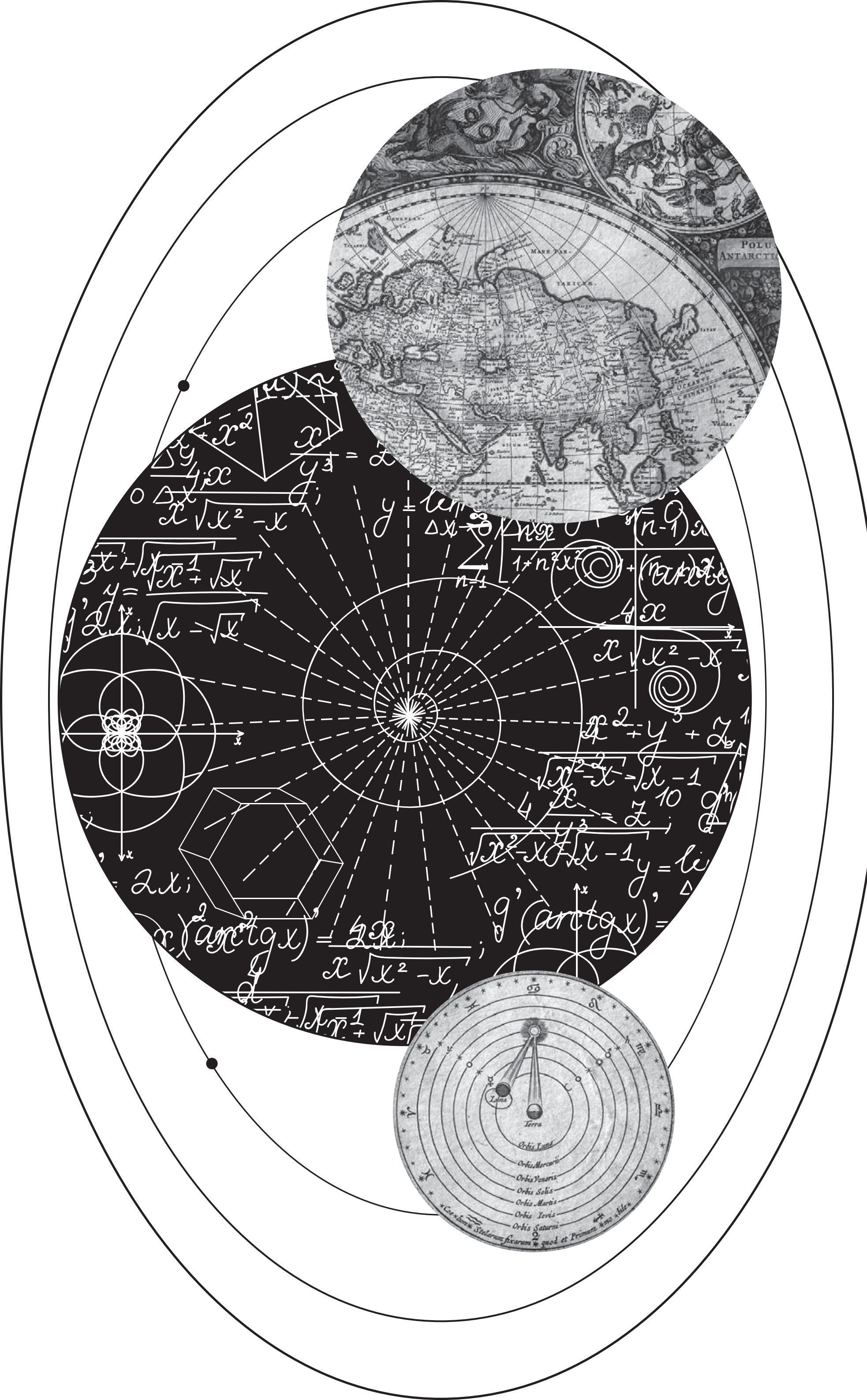
Корреляция между количеством присужденных степеней доктора математических наук и количеством урана, хранящегося на атомных электростанциях США



Хотя существует корреляция между количеством проданного мороженого и количеством утонувших людей, это не значит, что вы рискуете утонуть из-за того, что съели мороженое — это жаркая погода заставляет людей есть больше мороженого и чаще купаться, что, к сожалению, ведет и к увеличению количества утонувших людей.

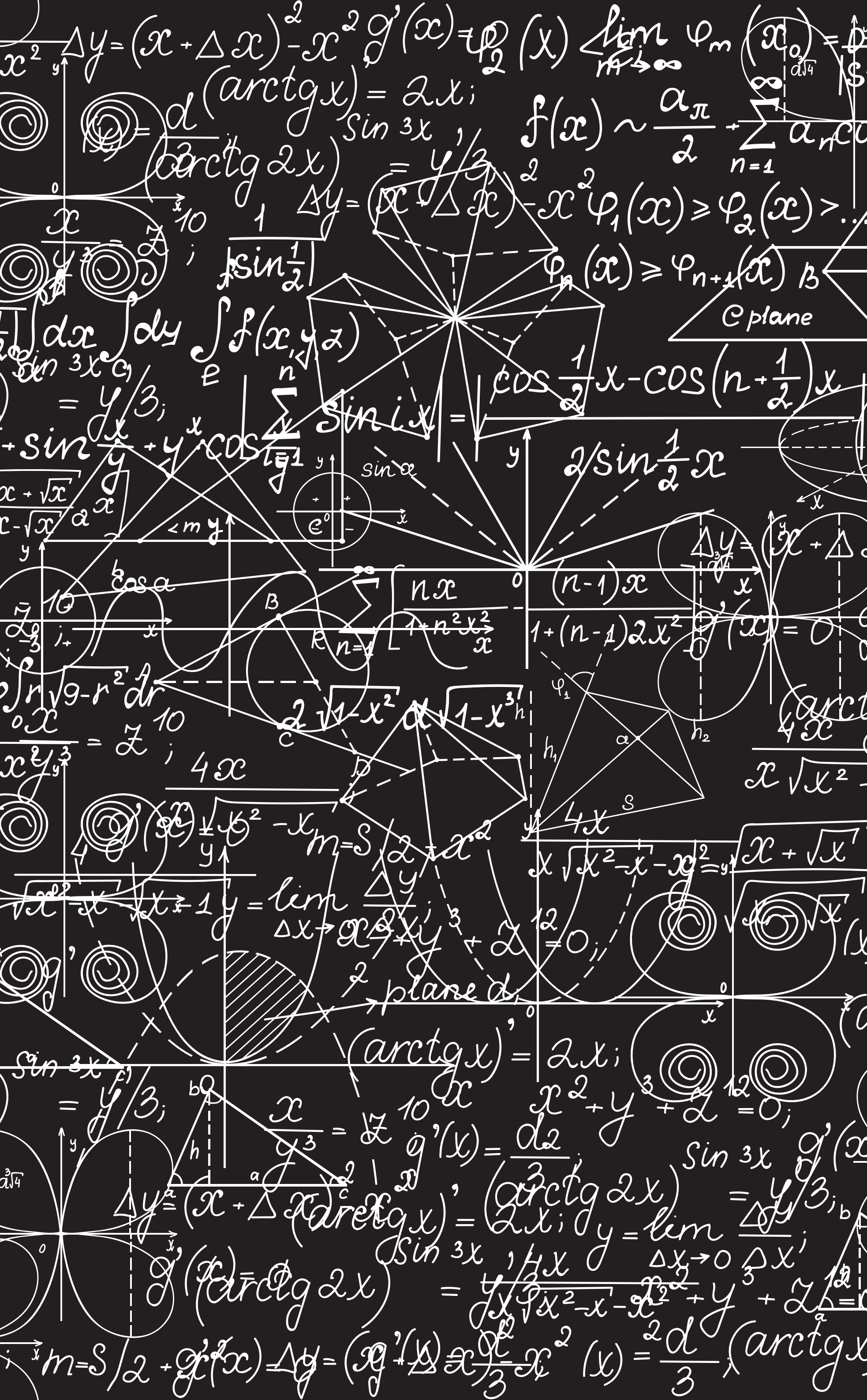
На веб-сайте американца Тайлера Вигена (**tylervigen.com**) представлена прекрасная коллекция таких «ложных» корреляций, как он их называет. Мне особенно нравится пример, представленный слева.

В этом примере четко прослеживается видимое наличие корреляции, однако поставка урана на атомные электростанции совершенно очевидным образом не может влиять на присуждение степени доктора математических наук.


Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ VI

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



ГЛАВА 25

ВЕРОЯТНОСТЬ

В жизни мы постоянно определяем вероятность того или иного поворота событий; только иногда не отдаем себе в этом отчет. Почти любая деятельность связана с некоторой долей риска, а риск, по сути, — та же вероятность, но с немного зловещим оттенком. Также стоит вспомнить, насколько популярны азартные игры. 55% британцев играют в азартные игры, делая ставки на спортивных соревнованиях, покупая лотерейные билеты, играя в онлайн-покер, посещая залы игральных автоматов и т. д.

СТЕПЕНЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Математики говорят об *«исходах»*, представляющих собой *результат некоторых происходящих явлений*. Например, при выбрасывании обычного кубика* количество возможных исходов равно шести. Если мы будем выбрасывать сразу два кубика, складывая выпавшие числа, количество возможных исходов составит одиннадцать (от двух до двенадцати).

Каждый из возможных исходов обладает некоторой степенью вероятности. Степень вероятности представляется с помощью числа в диапазоне от нуля (полная уверенность в том, что событие не произойдет) до единицы (полная уверенность в том, что событие произойдет). Это означает, что степень вероятности может быть представлена в виде обычной дроби, десятичной дроби или количества процентов (см. стр. 103). Все, что обладает вероятностью более 50%, считается «вероятным» или «возможным». Все, что обладает вероятностью менее 50%, считается «маловероятным» или «маловозможным». Все, что обладает вероятностью 50%, считается «равновероятным».

Исход (или ряд исходов), вероятность которого вам нужно определить, называется «событием».

---

* Я сторонник традиционных правил, при которых вы за раз выбрасываете один или несколько кубиков.

Пример такого события — выпадение шестерки при выбрасывании кубика. Некоторые *события взаимоисключающие*, то есть не могут происходить одновременно. Так, при вытягивании из колоды случайной карты невозможно одновременно вытянуть и бубновую, и червовую масть. Это взаимоисключающие события. С другой стороны, мы можем одновременно вытянуть и бубновую масть, и короля. Эти события не взаимоисключающие, поскольку в колоде имеется бубновый король.

При определении вероятности мы часто исходим из некоторых допущений. Так, при выбрасывании кубиков мы обычно предполагаем, что выбрасываемые кубики *геометрически правильные*, то есть все возможные исходы обладают равной вероятностью. Также предполагается, что между последовательно происходящими событиями *нет какой-либо зависимости*. То есть выпадение шестерки при выбрасывании кубика не влияет на вероятность получения того или иного исхода при следующем броске.

Таким образом, «магическая» формула для определения вероятности выглядит следующим образом:

$$\text{P(событие)} = \frac{\text{количество успешных исходов}}{\text{общее количество исходов}}$$

Здесь P() — сокращенное обозначение вероятности. То есть если нам нужно определить вероятность выпадения квадратного числа при выбрасывании обычного кубика, мы можем заметить, что у нас есть шесть возможных исходов (1, 2, 3, 4, 5, 6), и два из них (1 и 4) являются квадратными числами, то есть успешными исходами. Это можно записать следующим образом:

$$P(\text{выпадение квадратного числа}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Сократив дробь, мы привели конечный результат к самому простому виду. Теперь, уже зная вероятность выпадения квадратного числа, мы можем рассчитать вероятность *невыпадения* квадратного числа, опираясь на тот факт, что вероятности выпадения и невыпадения должны в сумме давать единицу.

$$P(\text{невыпадение квадратного числа}) = 1 - P(\text{выпадение квадратного числа}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

В 1650-х годах математики Пьер де Ферма (см. стр. 227) и Блез Паскаль (см. стр. 120) впервые рассмотрели вероятность с математической точки зрения. Знакомый любитель азартных игр попросил Ферма определить, на какой из следующих двух вариантов лучше сделать ставку:

- выпадение как минимум одной шестерки за четыре броска кубика;
- выпадение как минимум одной двойной шестерки за 24 броска двух кубиков.

На первый взгляд может показаться, что второй вариант более вероятный, поскольку количество бросков здесь гораздо больше, чем в первом варианте. Давайте по очереди рассмотрим оба эти варианта.

ВЫПАДЕНИЕ КАК МИНИМУМ ОДНОЙ ШЕСТЕРКИ ЗА ЧЕТЫРЕ БРОСКА КУБИКА

При выполнении нескольких попыток общее количество возможных исходов равно произведению количеств каждой попытки. Так, в случае однократного подбрасывания монеты мы будем иметь два возможных исхода, а в случае двукратного подбрасывания — четыре: «орел-орел», «орел-решка», «решка-орел», «решка-решка». В случае трехкратного подбрасывания количество возможных исходов составит $2 \times 2 \times 2 = 8$. Соответственно, 4 броска кубика дадут $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ возможных исходов. Но какую часть от этого количества составляют успешные исходы? Успешными являются случаи выпадения одной, двух, трех и четырех шестерок, что включает в себя множество различных комбинаций.

Здесь уместно заметить, что «как минимум одна» означает в данном случае то же самое, что и «ненулевое количество». Выше мы видели, что вероятность того, что событие не произойдет, можно получить путем вычитания из единицы вероятности того, что событие произойдет. Соответственно, получим следующее:

P(выпадение как минимум одной шестерки за четыре броска) = P(выпадение ненулевого количества шестерок за четыре броска) = 1 – P(невыпадение шестерки за четыре броска)

При выбрасывании кубика мы имеем пять возможных вариантов невыпадения шестерки, поэтому количество успешных исходов для выпадения нулевого количества шестерок за четыре броска составляет 5 × 5 × 5 × 5 = 625:

$$1 - \text{P(выпадение нулевого количества шестерок за четыре броска)} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

То есть вероятность выпадения как минимум одной шестерки за четыре броска кубика составляет 51,8%.

ВЫПАДЕНИЕ КАК МИНИМУМ ОДНОЙ ДВОЙНОЙ ШЕСТЕРКИ ЗА 24 БРОСКА ДВУХ КУБИКОВ

Выбрасывание двух кубиков со сложением выпавших чисел используется во многих играх. В данном случае нельзя сказать сразу, какова вероятность выпадения той или иной суммы, поэтому будет полезно составить таблицу, содержащую все возможные исходы:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Эта таблица называется *диаграммой пространства вероятностей*. В данном случае мы имеем 36 возможных исходов с одинаковой степенью вероятности. Семерка — наиболее вероятный исход, так как обеспечивается наибольшим количеством комбинаций выпавших чисел. Двойная шестерка, или двенадцать, обеспечивается только одной комбинацией, поэтому вероятность этого исхода равна $\frac{1}{36}$.

Как и в предыдущем примере, «как минимум одна» означает то же самое, что и «ненулевое количество», и мы можем получить искомый результат, используя вероятность невыпадения двойной шестерки за 24 броска.

Вероятность выпадения двойной шестерки у нас равна $\frac{1}{36}$; соответственно, вероятность невыпадения двойной шестерки должна составлять $\frac{35}{36}$, поскольку $\frac{1}{36} + \frac{35}{36} = 1$.

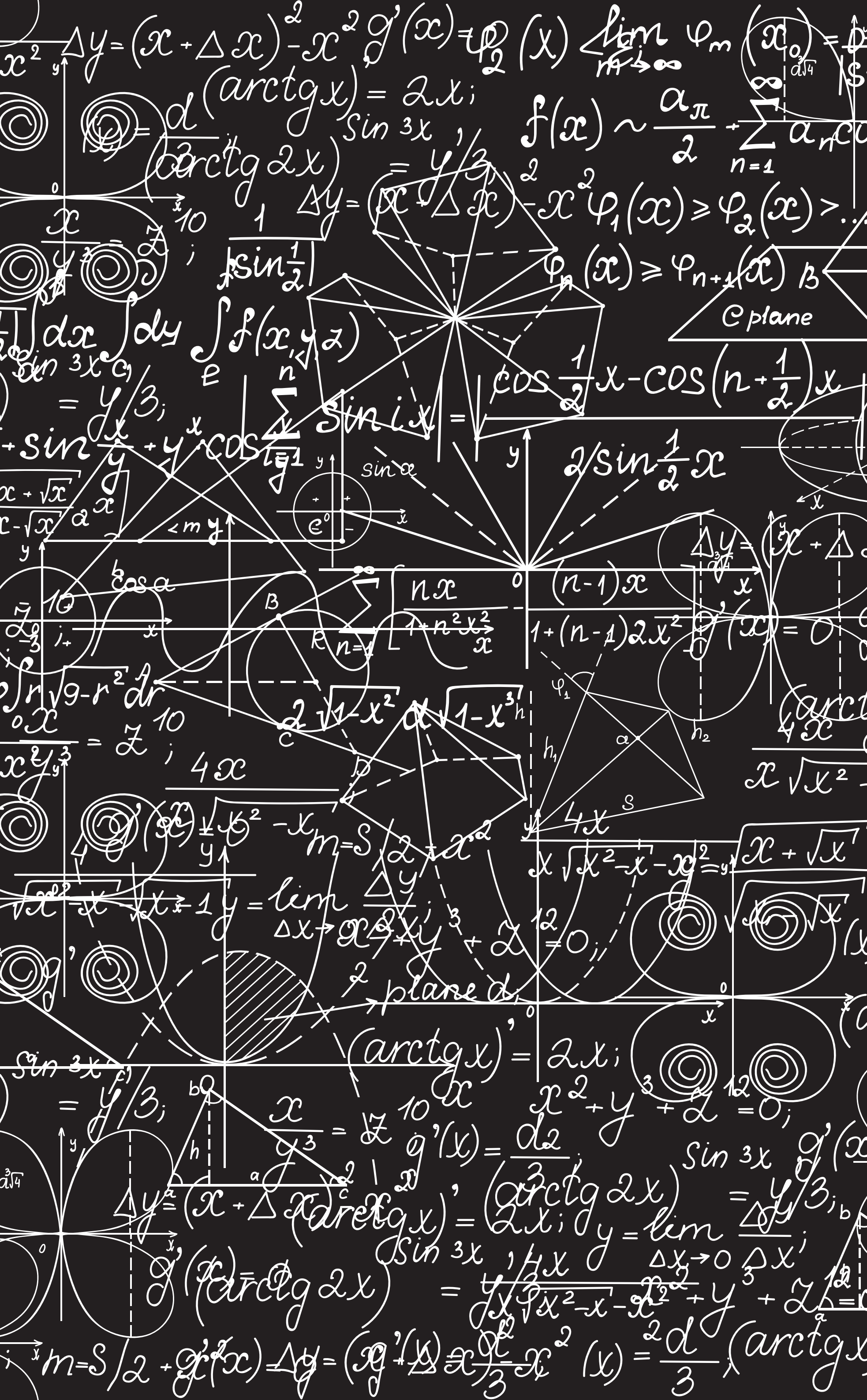
$$P(\text{выпадение как минимум одной двойной шестерки за 24 броска}) = 1 - P(\text{невыпадение двойной шестерки за 24 броска}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}491$$

(с точностью до трех знаков после запятой)

Таким образом, вероятность выпадения хотя бы одной двойной шестерки за 24 броска составляет 49,1%. Первый вариант давал игроку больше шансов на успех, хотя и с совсем небольшим перевесом. Получив этот, нелогичный с виду результат, игрок понял, почему ему так не везло в игре в кости.

КАКОЕ СОВПАДЕНИЕ!

Впервые *задачу о днях рождения* сформулировал австрийский инженер Рихард фон Мизес (1883–1953). Задачи по теории вероятностей часто имеют нелогичные ответы, и данная задача очень показательна в этом плане. Допустим, что вы пошли в кафе. Вероятность того, что любые два посетителя родились в один день, на первый взгляд, очень низка, поскольку в году 365 дней, а количество посетителей обычно гораздо меньше. Однако, поскольку мы рассматриваем очень большое количество возможных пар людей, в действительности вероятность того, что любые два посетителя родились в один день, составляет 50% уже при количестве посетителей, равном 23. При количестве посетителей, равном 70, эта вероятность составляет 99,9%.



ГЛАВА 26

КОМБИНАЦИИ И ПЕРЕСТАНОВКИ

В моем классе 24 ученика с одинаково хорошей успеваемостью по математике. Мне нужно выбрать из них четверых для участия в конкурсе по математике, и это настолько трудный выбор, что я решил произвести отбор случайным образом. Сколько разных команд я могу составить?

Это зависит от того, имеет ли значение порядок отбора. Например, если первый отобранный ученик будет выступать в роли капитана команды, второй — производить расчеты на калькуляторе, третий — делать записи, а четвертый — заваривать чай, то порядок имеет значение.

Если я буду вытягивать имена из шапки, то у меня будет 24 возможных варианта при выборе первого члена команды, 23 — при выборе второго и т. д., что в итоге дает следующую цифру:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 = 255\,024$$

То есть я буду иметь 255 024 возможных *перестановок* команды.

Этот результат можно представить следующим образом:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Зачем же нам переписывать это выражение таким образом? Если воспользоваться нотацией факториала (см. стр. 183), то можно привести его к форме, упрощающей его ввод в калькулятор:

$$24 \times 23 \times 22 \times 21 = \frac{24!}{20!}$$

В общем случае для отбора *k* элементов из *n* элементов справедливо следующее соотношение:

$$\text{количество перестановок} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

То есть если бы мне нужно было отобрать в команду не четыре, а шесть участников, я получил бы $k = 6$ и $n = 24$, и, соответственно:

$$\text{количество возможных команд} = \frac{24!}{(24 - 6)!} = \frac{24!}{18!} = 96\ 909\ 120$$

Многие команды из четырех учеников, которые я могу получить путем вытягивания жребия из шляпы, будут состоять их одних и тех же учеников, с отличием лишь в порядке их отбора. Если нам не нужно учитывать порядок отбора, это будут фактически одни и те же команды — так, если я последовательно отберу Эми, Билли, Кару и Дэна, команда будет такой же, как и в том случае, если я последовательно отберу Дэна, Кару, Билли и Эми. Поскольку существует $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ различных способов расположения четырех участников, мы должны разделить количество перестановок на это число, чтобы получить количество возможных *комбинаций*:

$$\text{количество комбинаций} = \frac{24!}{20!4!} = 10\ 626$$

Опять же, в общем случае, для отбора *k* элементов из *n* элементов без учета порядка отбора справедливо следующее соотношение:

$$\text{количество комбинаций} = \frac{n!}{(n - k)!k!}$$

Таким образом, в случае отбора команды из шести человек без учета порядка отбора получим следующий результат:

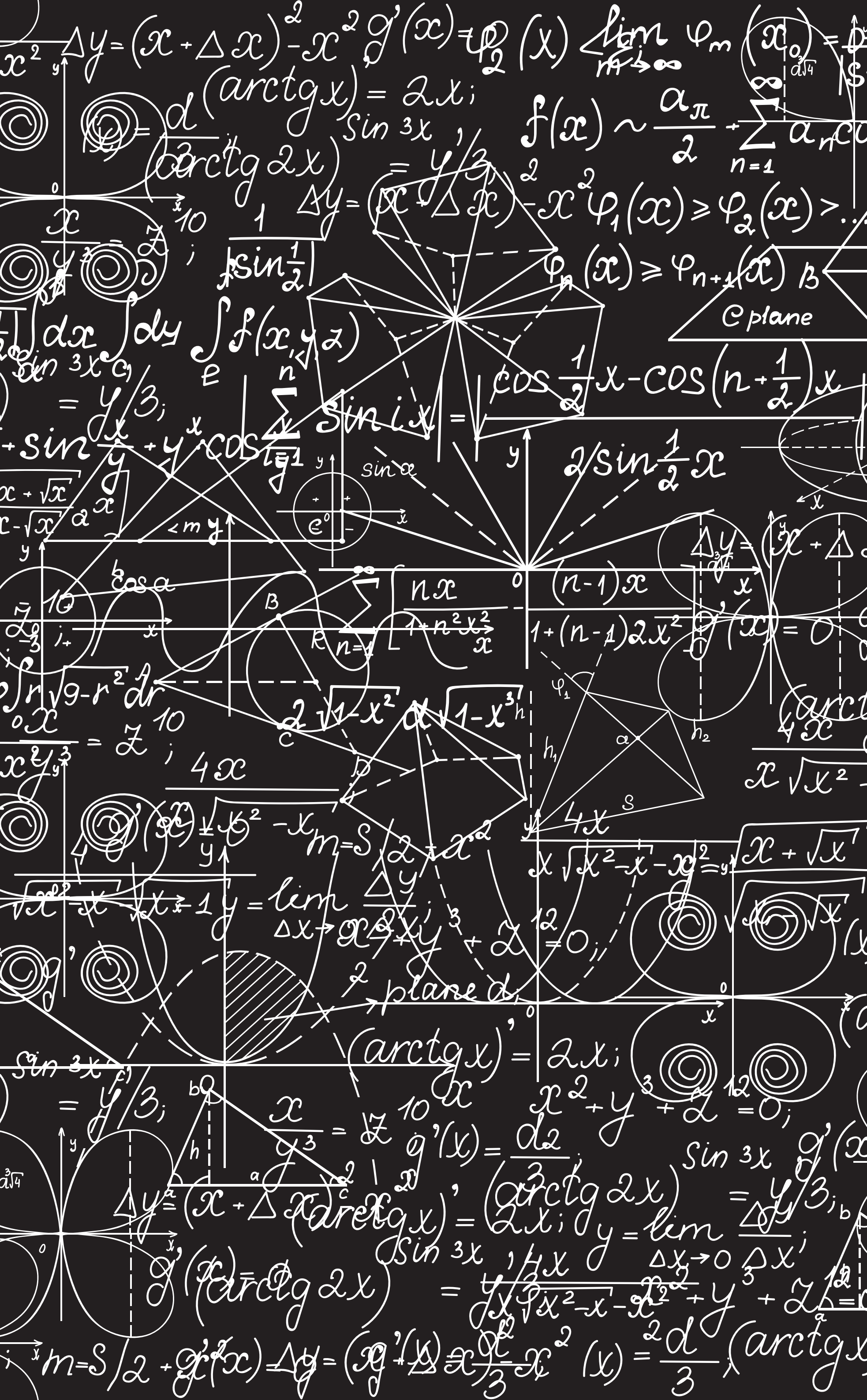
$$\begin{array}{c}\text{количество}\\ \text{возможных}\\ \text{команд}\end{array} = \frac{24!}{(24 - 6)!6!} = \frac{24!}{18!6!} = 134\,596$$

Исходя из изложенных здесь выкладок, можно заметить, что шифры кодовых замков некорректно называть «комбинациями» — поскольку в них учитывается порядок цифр, их следует называть «перестановками».

Перестановки и комбинации помогают нам в решении задач на определение вероятности. Так, по правилам Национальной лотереи Великобритании вам нужно выбрать шесть чисел от 1 до 49. Главный приз достается тому участнику, который получает совпадение всех шести чисел со случайно сгенерированной выигрышной комбинацией. Порядок чисел не играет роли; то есть мы имеем дело с количеством комбинаций.

$$\text{количество возможных комбинаций из 6 чисел} = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49!}{43!6!} = 13\,983\,816$$

Таким образом, в данном случае имеется почти 14 миллионов возможных комбинаций, и, соответственно, шансы на то, что вы выиграете главный приз, составляют примерно $\frac{1}{14\,000\,000}$, что, согласитесь, не очень-то много!


C plane
plane d
(arctg x)' = 2x;
sin 3x
y/3;
2 sin 1/2 x

ГЛАВА 27

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА

В предыдущих примерах мы смогли определить общее количество возможных исходов и на основе этого рассчитать вероятность, не прибегая к чему-либо еще помимо теоретических выкладок. Однако получить результат таким образом можно далеко не всегда. Если бы вы спросили меня, какова вероятность того, что сегодня я выпью чашку кофе, то я мог бы сказать вам, что она достаточно высока, и даже назвал бы ее примерное числовое значение, но, чтобы произвести ее математическое вычисление, мне сначала потребовалось бы собрать некоторые данные.

Я мог бы в течение недели отмечать в дневнике, пил ли я кофе в тот или иной день, и затем определить вероятность на основе этих данных. Допустим, что распитие кофе «украсит» пять из семи дней первой недели. Исходя из этого, мы могли бы сказать, что вероятность того, что я выпью кофе в тот или иной день недели, составляет $\frac{5}{7}$. Для отличия от теоретически выведенной вероятности математики называют такую вероятность *«относительной частотой»*. При этом предполагается, что распитие кофе в тот или иной день — независимое событие — то есть его вероятность не увеличивается и не уменьшается в том случае, если я пил кофе в предыдущий день.

Допустим, что в течение следующей недели я буду пить кофе каждый день. В таком случае относительная частота изменится следующим образом:

$$\text{относительная частота} = \frac{(5+7)}{(7+7)} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

То есть чем больше будет проходить времени, тем точнее относительная частота будет отражать вероятность того, что я выпью кофе в тот или иной день.

Где можно использовать этот принцип? Например, когда букмекеры устанавливают коэффициенты ставок, а игроки делают ставки на спортивные матчи, и те и другие обычно руководствуются тем, какие результаты демонстрировали соответствующие команды в последнее время. Страховые компании поступают аналогичным образом, когда классифицируют своих клиентов для определения степени риска, связанного с их страхованием, и выбора соответствующего размера страховых взносов. В основе скидки за отсутствие страховых претензий лежит тот принцип, что чем больше времени проходит без предъявления вами страховых претензий, тем ниже становится относительная частота предъявления претензий. Соответственно, вы начинаете представлять все меньше риска для страховой компании, что позволяет ей предлагать вам все более низкий размер страховых взносов.

НЕПРАВИЛЬНОЕ ПОНИМАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Если при подбрасывании монеты «орел» выпадет восемь раз подряд, можно ошибочно подумать, что вселенная каким-то образом вышла из равновесия, и выпадение «решки» стало более вероятным; однако на самом деле шансы на выпадение «решки» будут по-прежнему составлять 50%. Хотя вероятность выпадения «орла» восемь раз подряд крайне низка (она составляет примерно 0,4%), вероятность выпадения за восемь бросков любой другой комбинации равна этому же значению.

Такое заблуждение называют «*заблуждением игрока*». Широкую известность получил следующий случай, произошедший в казино Монте-Карло в 1913 году. На одном рулеточном колесе черный цвет выпал 23 раза подряд без какой-либо искусственной помощи «фортуне». Посетители казино быстро заметили необычное поведение рулетки, и начали ставить большие суммы на красный цвет, полагая, что вероятность его выпадения стала выше.

Многие люди делают ту же ошибку в отношении пола ожидаемого ребенка — они считают более высокими шансы на рождение девочки, если у них уже есть несколько мальчиков, и наоборот.

«Заблуждение прокурора» состоит в том, чтобы, в зависимости от обстоятельств рассматриваемого дела, считать, что вероятность виновности или невиновности обвиняемого равна вероятности того, что определенное событие имело место. Так, британка Салли Кларк (1964–2007) была признана виновной в убийстве своих двух детей, которые на самом деле умерли от синдрома внезапной детской смерти (СВДС). Вероятность того, что дети умерли от этой болезни, была принята равной $\frac{1}{73\,000\,000}$, что соответствует вероятности двух независимых смертей от СВДС, однако

этого нельзя было делать в случае детей одних родителей, поскольку при этом могла иметь место генетическая предрасположенность. Пробыв в заключении три года, эта женщина все же добилась оправдания, в результате чего был пересмотрен и ряд других аналогичных дел.

Это хороший пример того, как неправильное понимание статистики может привести к весьма серьезным последствиям.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Если вы дочитали книгу до этого места, то вероятно, оценили по достоинству представленный здесь «комплексный обед» из шести блюд. Надеюсь, теперь вы понимаете, что математика может быть доступной для каждого, каким бы уровнем знаний он ни обладал.

Если у вас есть желание продолжить изучение этого предмета, вы можете обратиться к громадному количеству пособий по математике, а также воспользоваться множеством отличных бесплатных интернет-ресурсов. Если вам нравится более обстоятельный подход с изучением всей подоплеки тех или иных математических законов, в поиске такой информации вам помогут ближайшая библиотека, книжный магазин и поисковая строка вашего браузера.

Если вам пришлись по вкусу представленные здесь небольшие «порции» математики, включите ее в состав своего обычного «рациона». Математика действительно правит миром, и чем математически грамотнее будет каждый из нас, тем проще нам будет сделать мир лучше.

В начале книги я говорил о том, насколько заразительной может быть математическая неуверенность, однако столь же заразительной может быть и математическая уверенность. Если вы обрели такую уверенность, поделитесь ею с окружающими — дайте им понять, что при желании понимание математики можно улучшить, просто уделив этому некоторое время.

Я рекомендую вам не останавливаться на этой книге и продолжить свое путешествие по миру математики. Станьте «гурманом» и изучите все его вкусные математические десерты! Ведь оценить по достоинству мастерство повара и насладиться конечным продуктом можно, даже не зная всех тонкостей математической кухни.

Приятного аппетита!

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научно-популярное издание

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ

Крис Уорринг

МАТЕМАТИКА НА ЛАДОНИ

Главный редактор *Р. Фасхутдинов*
Руководитель направления *В. Обручев*
Ответственный редактор *Ю. Лаврова*
Младший редактор *Ю. Клюшина*
Художественный редактор *С. Власов*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru

12+

Интернет-магазин : www.book24.kz
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылмаған

Подписано в печать 21.02.2020. Формат 84x108 1/32.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,96.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-103031-5

9 785041 030315 >

У МАТЕМАТИКИ ДУРНАЯ РЕПУТАЦИЯ: ЕЕ ЧАСТО НАЗЫВАЮТ САМЫМ СЛОЖНЫМ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТОМ. НО БЕЗ ЗНАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРИНЦИПОВ В СОВРЕМЕННОЙ ЖИЗНИ НЕ ОБОЙТИСЬ.

В своей книге «Математика на ладони» Крис Уоринг доказывает, что понять математику и разобраться в ней легко, надо только изменить подход к ее изучению!

ВЕРОЯТНОСТЬ

ЗООПАРК ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

ГДЕ ОБИТАЮТ СТЕПЕНИ

КОМБИНАЦИИ И ПЕРЕСТАНОВКИ

ISBN 978-5-04-103031-5

9 785041 030315 >