

Шорт-лист премии
Royal Society Science
за лучшую научную
книгу

СТИВЕН
СТРОГАЦ

Внимание:
эта книга опасна.
Она заставит вас полюбить
математику. Более того,
существует ненулевая
вероятность, что она сделает
из вас математика

Нассим Талеб

БЕСКОНЕЧНАЯ СИЛА

Как математический
анализ раскрывает
тайны Вселенной

Эту книгу хорошо дополняют:

Голая статистика

Чарльз Уилан

Теория игр

Авинаш Диксит, Барри Нейлбафф

Аналитическая культура

Карл Андерсон

Удовольствие от x

Стивен Строгац

STEVEN STROGATZ

INFINITE POWERS:

HOW CALCULUS REVEALS THE SECRETS
OF THE UNIVERSE

HOUGHTON MIFFLIN HARCOURT
AN EAMON DOLAN BOOK

СТИВЕН СТРОГАЦ

БЕСКОНЕЧНАЯ СИЛА

КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
РАСКРЫВАЕТ ТАЙНЫ ВСЕЛЕННОЙ

Перевод с английского Евгения Поникарова

МОСКВА

«МАНН, ИВАНОВ И ФЕРБЕР»

2021

УДК 512

ББК 22.1я9

С86

Научный редактор Игорь Красиков

Издано с разрешения Steven Strogatz, c/o Brockman, Inc.

На русском языке публикуется впервые

Строгац, Стивен

С86 Бесконечная сила. Как математический анализ раскрывает тайны Вселенной / Стивен Строгац ; пер. с англ. Е. Поникарова ; [науч. ред. И. Красиков]. — Москва : Манн, Иванов и Фербер, 2021. — 416 с.

ISBN 978-5-00169-590-5

Популяризатор науки мирового уровня Стивен Строгац предлагает обзор основных понятий математического анализа и подробно рассказывает о том, как они используются в современной жизни. Автор отказывается от формул, заменяя их простыми графиками и иллюстрациями. Эта книга — не сухое, скучное чтение, которое пугает сложными теоретическими рассуждениями и формулами. В ней много примеров из реальной жизни, которые показывают, почему нам всем нужна математика. Отличная альтернатива стандартным учебникам.

Книга будет полезна всем, кто интересуется историей науки и математики, а также тем, кто хочет понять, для чего им нужна (и нужна ли) математика.

УДК 512

ББК 22.1я9

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-00169-590-5

Copyright © 2019 by Steven Strogatz. All rights reserved.
© Издание на русском языке, перевод, оформление. ООО «Манн, Иванов и Фербер», 2021

Оглавление

Введение	9
ГЛАВА 1	
Бесконечность	30
ГЛАВА 2	
Человек, который обуздал бесконечность	58
ГЛАВА 3	
Открытие законов движения	94
ГЛАВА 4	
Зарождение дифференциального исчисления	129
ГЛАВА 5	
Перекресток	168
ГЛАВА 6	
Словарь изменений	187
ГЛАВА 7	
Тайный источник	217
ГЛАВА 8	
Измышления разума	254
ГЛАВА 9	
Логическая вселенная	285

ГЛАВА 10

Создание волн	312

ГЛАВА 11

Будущее анализа	336

Заключение	366

От автора	374

Благодарности за иллюстрации	377

Предметно-именной указатель	378

Примечания	383

Библиография	404

Введение

Без математического анализа* у нас не было бы ни мобильных телефонов, ни компьютеров, ни микроволновых печей. Ни радио, ни телевидения. Ни УЗИ для будущих мам, ни GPS для заблудившихся путешественников. Мы не расщепили бы атом, не раскрыли бы геном человека и не отправили бы астронавтов на Луну. Возможно, у нас даже не было бы Декларации прав человека.

Любопытно, что историю мира этот загадочный раздел математики изменил навсегда. Как же могло так случиться, что некая теория, изначально занимавшаяся малыми изменениями, в итоге изменила цивилизацию коренным образом?

Суть ответа кроется в замечании, которое физик Ричард Фейнман сделал во время обсуждения Манхэттенского проекта с писателем Германом Воуком. Воук собирал материал для крупного романа о Второй мировой войне, который планировал написать, и отправился в Калтех**, чтобы побеседовать с физиками, работавшими над созданием бомбы, а Фейнман был одним из них. Когда они прощались после интервью, Фейнман спросил Воука, знает ли тот матанализ.

* В оригинале используется слово *calculus*, у которого в русском языке нет однозначного соответствия. В английском языке это слово применяется как для математического анализа или для анализа бесконечно малых в целом, так и для наименования различных областей высшей математики, для которых мы используем слова «анализ» (например, *vector calculus* — векторный анализ) или «исчисление» (например, *differential calculus* — дифференциальное исчисление). В данной книге под термином «анализ» будет подразумеваться анализ бесконечно малых, который объединяет интегральное и дифференциальное исчисление. *Прим. пер.*

** Калтех — Калифорнийский технологический институт. Частный университет в Калифорнии, один из лучших в США. *Прим. пер.*

Воук признался, что нет. «Вам следовало бы ему поучиться, — сказал Фейнман. — Это язык, на котором говорит Бог» [1].

Действительно, Вселенная — глубоко математическая сущность [2], хотя причин этого явления никто не понимает. Возможно, так устроил Бог. А может, это единственный способ нашего в ней существования, ибо нематематические вселенные не могут создать жизнь, достаточно разумную для того, чтобы задать такой вопрос. В любом случае то, что наша Вселенная подчиняется законам природы, которые всегда выражены на языке анализа в виде предложений, называемых дифференциальными уравнениями, — весьма таинственный и изумительный факт. Такие уравнения описывают разницу между чем-то прямо сейчас и той же величиной мгновение спустя или между чем-то прямо здесь и бесконечно близко. Детали отличаются в зависимости от конкретной области природы, но структура законов всегда одна и та же. Иначе говоря, все выглядит так, словно у Вселенной существует какой-то код, некая операционная система, которая оживляет все в конкретный момент в конкретном месте. Анализ подключается к этому порядку и выражает его.

Исаак Ньютон первым увидел эту тайну Вселенной. Он обнаружил, что орбиты планет, ритм приливов и отливов и траектории пушечных ядер можно описать, объяснить и предсказать с помощью небольшого набора дифференциальных уравнений. Сегодня мы называем их законами движения и гравитации Ньютона. Мы обнаружили, что эта закономерность сохраняется всякий раз, когда мы открываем какую-то новую часть Вселенной. От старых стихий — земли, воздуха, огня и воды, до новейших электронов, кварков, черных дыр и суперструн — все во Вселенной подчиняется правилам дифференциальных уравнений. Бьюсь об заклад, что именно это имел в виду Фейнман, когда говорил, что на этом языке разговаривает Бог. Если что-то и заслуживает называться тайной Вселенной, то это дифференциальное исчисление.

Случайно открыв этот странный язык, сначала в области геометрии, а потом в коде Вселенной, затем научившись бегло разговаривать на нем и расшифровывать его идиомы и тонкости и в конце концов используя его способность к прогнозированию, люди стали применять анализ, чтобы переделать мир.

Это центральный вопрос нашей книги.

А коль это так, то ответ на «главный вопрос жизни, Вселенной и всего такого» [3] — вовсе не 42, да простят меня фанаты Дугласа Адамса и его книги «Автостопом по галактике»*. Тем не менее «Думатель» был на верном пути: тайна Вселенной действительно «математична».

Анализ для всех

Замечание Фейнмана о языке Бога поднимает массу глубоких вопросов. Что такое анализ? Как люди поняли, что на этом языке говорит Бог (или, если вам так больше нравится, что на нем работает Вселенная)? Что такое дифференциальные уравнения и что они сделали для мира, причем не только во времена Ньютона, но и в наши дни? И наконец, как доходчиво рассказать эти истории и идеи, чтобы их с удовольствием восприняли такие доброжелательные читатели, как Герман Воук, — вдумчивые, любопытные, образованные, но имеющие смутное представление о высшей математике?

В эпилоге рассказа о встрече с Фейнманом Воук писал, что в течение четырнадцати лет даже не пытался заняться анализом. Его роман разросся до двух больших романов — «Ветры войны» и «Война и память», примерно по тысяче страниц каждый. После окончания

* В юмористическом фантастическом романе Адамса «Автостопом по галактике» (издана на русском языке: Адамс Д. Автостопом по галактике. М. : АСТ, 2002) специальный суперкомпьютер «Думатель» находит «ответ на главный вопрос жизни, Вселенной и всего такого», и это оказывается 42. *Прим. пер.*

работы над ними он попытался учиться по книгам с названиями типа «Анализ в легком изложении», но безуспешно. Он копался в нескольких учебниках в надежде, как он выразился, «найти то, что помогло бы математическому невежде вроде меня, который в колледже занимался гуманитарными науками, то есть литературой и философией, в подростковом поиске смысла существования; при этом я лишь знал, что анализ (о котором я слышал как о скучной и бесполезной вещи) — это язык, на котором говорит Бог» [4]. Однако учебники оказались неприступными, и тогда он нанял израильского преподавателя математики, чтобы подучиться анализу и подтянуть разговорный иврит, но обе надежды опять не оправдались. Вконец отчаявшись, он стал слушать курс анализа в старших классах школы, но почувствовал, что сильно отстал, и сдался через пару месяцев. Когда он уходил, дети хлопали. Он сказал, что это было похоже на сочувствующие аплодисменты после провального выступления на сцене.

Я написал «Бесконечные силы», пытаясь сделать величайшие идеи матанализа доступными каждому. Чтобы узнать об этих эпохальных событиях в истории, вам незачем повторять печальный опыт Германа Воука. Анализ — одно из самых вдохновляющих достижений человечества, и чтобы оценить его, вовсе не обязательно им заниматься — как необязательно уметь готовить изысканные блюда, чтобы насладиться такой едой. Я постараюсь объяснить все, что нам надо, с помощью картинок, метафор и анекдотов, а также покажу вам некоторые самые красивые из когда-либо созданных уравнений и доказательств, ведь разве можно посетить галерею, не увидев ее шедевров? Что касается Германа Воука, то на момент написания книги ему было 103 года*. Я не знаю, выучил ли он анализ, но если еще нет, то она для вас, мистер Воук!

* Герман Воук скончался в мае 2019 года в возрасте 103 лет. *Прим. пер.*

Мир согласно анализу

Как вам уже, должно быть, понятно, я собираюсь изложить историю и значение анализа с точки зрения прикладного математика. Историк математики рассказал бы все иначе [5], собственно, как и чистый математик. Что восхищает меня как прикладника — так это наличие связи между реальным миром вокруг нас и идеальным миром в наших головах. Внешние явления обуславливают вопросы, которые мы задаем, и наоборот, математика, которую мы воображаем, иногда предсказывает то, что произойдет в реальности. Когда такое случается, эффект просто поражает.

Заниматься прикладной математикой [6] — значит смотреть вовне и быть «интеллектуально неразборчивым». Для специалистов в этой области математика не чистый и герметичный мир теорем и доказательств [7], отражающих самих себя. Мы охватываем все виды предметов: философию, политику, историю, медицину и так далее. Именно такую историю я и собираюсь вам рассказать — мир, соответствующий анализу.

Это гораздо более широкий взгляд на анализ. Он включает множество родственных дисциплин, как смежных, так и в рамках математики. Поскольку такой широкий взгляд непривычен, я хочу убедиться, что он не вызывает никакой путаницы. Например, когда я говорил, что без анализа у нас не было бы компьютеров, мобильных телефонов и так далее, я вовсе не имел в виду, что именно математика сама по себе создала все эти чудеса. Отнюдь нет. Наука и технология были важными партнерами — возможно, главными звездами шоу. Я просто хочу сказать, что анализ также сыграл не последнюю роль (пусть часто и вспомогательную) в том, чтобы мир стал таким, каким мы его знаем.

Возьмем историю беспроводной связи. Все началось с открытия законов электричества и магнетизма [8] такими учеными, как Майкл Фарадей и Андре-Мари Ампер. Без их наблюдений

и размышлений важнейшие факты о магнитах, электрическом токе и их невидимых силовых полях остались бы неизвестными и никогда бы не появилась беспроводная связь. Очевидно, что в этой области знаний нельзя было обойтись без экспериментальной физики, но и анализ был совершенно необходим. В 1860-х годах шотландский математик Джеймс Максвелл выразил экспериментальные законы электричества и магнетизма в символьной форме, которую можно было изучать методами математического анализа. После некоторых манипуляций появилось уравнение, которое не имело смысла. Судя по всему, в физике чего-то не хватало. Максвелл подозревал, что виноват закон Ампера, и попытался внести исправления, добавив в уравнение новый член — гипотетический ток, который мог бы разрешить противоречие, а затем снова применил анализ. На этот раз получился разумный результат — простое и элегантное волновое уравнение [9], очень похожее на уравнение, описывающее распространение ряби в пруду. Разница была в том, что результат Максвелла давал новый вид волн, где электрические и магнитные поля вместе исполняли па-де-де. Изменяющееся электрическое поле порождает изменяющееся магнитное поле, которое, в свою очередь, снова порождает изменяющееся электрическое поле, и так далее — поля влияют друг на друга и распространяются вместе в виде энергетической волны. Вычислив скорость этой волны, Максвелл обнаружил — и это был один из величайших моментов в истории науки, — что она распространяется со скоростью света. Таким образом, с помощью анализа он не только предсказал существование электромагнитных волн, но и решил вековую загадку природы света. Он пришел к выводу, что свет — это электромагнитная волна.

Предсказания Максвелла об электромагнитных волнах побудили Генриха Герца провести в 1887 году эксперимент, который подтвердил их существование. Восемь лет спустя Александр Попов продемонстрировал первую в мире систему радиосвязи, а еще пару лет

спустя это сделал и Никола Тесла. Еще через пять лет Гульельмо Маркони передал первые беспроводные сообщения через Атлантику. Вскоре появилось телевидение, мобильные телефоны и все остальное.

Ясно, что анализ не смог бы привести к этому в одиночку, но так же ясно, что *без* него ничего бы этого не произошло. Или, если точнее, могло бы произойти, но гораздо позже.

Анализ — больше, чем язык

История Максвелла иллюстрирует тему, с которой мы встретимся еще не раз. Часто говорят, что математика — это язык науки. В этом есть значительная доля правды. В случае электромагнитных волн первым ключевым шагом Максвелла стало преобразование экспериментально открытых законов в уравнения, написанные на языке анализа.

Однако аналогия с языком неполна. Анализ, как и другие области математики, — нечто гораздо большее, чем просто язык. Это невероятно мощная система мышления, позволяющая нам преобразовывать одно уравнение в другое, выполняя различные символьные операции, подчиняющиеся определенным правилам. Эти правила коренятся в логике, так что, даже если кажется, что мы просто перетасовываем символы, на самом деле мы выстраиваем длинные цепочки логических рассуждений. Перемещение символов — это полезные сокращения, удобный способ строить доказательства, слишком сложные, чтобы удерживать их в голове.

Если нам повезет и мы будем достаточно умелыми — то есть правильно преобразуем уравнения, — то можем получить скрытые доселе следствия. Математику этот процесс кажется почти осязаемым. Словно мы манипулируем уравнениями, массируем их, пытаюсь

расслабить до такой степени, чтобы они выдали свои секреты. Мы хотим, чтобы они открылись и поговорили с нами.

Здесь требуется творческий подход, потому что часто неясно, какие манипуляции выполнять. У Максвелла было бесчисленное количество способов преобразовать его уравнения; с логической точки зрения приемлемы были все, но новый интересный научный результат давали лишь некоторые. Учитывая то, что он даже не знал, что ищет, он мог легко получить от уравнений всего лишь бессвязное бормотание (или его символьный эквивалент). К счастью, уравнения раскрыли свои секреты.

В результате правильного подхода волновое уравнение не осталось абстракцией. В этот момент лингвистическая функция матанализа снова взяла верх. Когда Максвелл перевел абстрактные символы обратно в реальность, они предсказали, что электричество и магнетизм взаимодействуют, создавая электромагнитные волны, распространяющиеся со скоростью света. Через несколько десятилетий это открытие изменило мир.

Непостижимо эффективно

Тот факт, что анализ может так хорошо моделировать природу, даже несколько пугает, учитывая, насколько различны эти две сферы. Анализ — воображаемое царство символов и логики; природа — реальное царство сил и явлений. Но каким-то образом, если переводить реальность в символы достаточно искусно, с помощью логики анализа можно использовать одну истину реального мира для порождения другой. Истина на входе, истина на выходе*. Начните с чего-то эмпирически истинного и выраженного в символах (как Максвелл с законами электричества и магнетизма), примените верные логические действия, и получится другая эмпирическая истина,

* В оригинале Truth in, truth out — каламбурная отсылка к фразе Wine in, truth out, что примерно соответствует нашей пословице «что у трезвого на уме, то у пьяного на языке». *Прим. пер.*

возможно, новая — какой-то ранее неизвестный факт о Вселенной (подобно существованию электромагнитных волн). Таким образом анализ позволяет нам заглядывать в будущее и предсказывать неизвестное. Именно это делает его столь мощным инструментом для науки и технологий.

Но почему же Вселенная должна уважать хоть какую-нибудь логику, не говоря уже о той, которую можем использовать мы, ничтожные люди? Именно этому удивлялся Эйнштейн, когда писал: «Вечная тайна мира заключается в его постижимости» [10]. Именно это имел в виду американский физик Юджин Вигнер в своем эссе «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» [11], когда писал: «Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов, это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем»*.

Это чувство благоговения восходит к истории математики. По легенде, Пифагор [12] ощутил его примерно в 550 году до нашей эры, когда вместе с учениками обнаружил, что музыка регулируется отношениями целых чисел. Например, представьте, что вы зацепили гитарную струну. Когда струна вибрирует, она издает определенную ноту. Поставьте палец левой руки точно на половине длины струны и снова зацепите ее. Теперь колеблющаяся часть струны вдвое короче (отношение 1 к 2), и струна звучит ровно на октаву выше, чем исходная нота (это расстояние от одной ноты «до» до следующей «до» в интервале до-ре-ми-фа- соль-ля-си-до). Если сократить струну на $\frac{2}{3}$ исходной длины, то она будет звучать на квинту выше (интервал от «до» до «соль»; вспомните первые две ноты из темы «Звездных войн»). Если же вибрирующая часть составляет $\frac{3}{4}$ исходной длины, то звук выше на кварту (интервал между первыми двумя нотами свадебного марша «Вот идет невеста»**). Древнегреческие музыканты

* Перевод Ю. А. Данилова. *Прим. пер.*

** Here Comes the Bride — популярный на Западе свадебный марш, звучащий во время выхода невесты. Тема взята из оперы «Лоэнгрин» Рихарда Вагнера. *Прим. пер.*

знали о таких музыкальных интервалах, как октава, кварта и квинта, и считали их красивыми. Столь неожиданная связь между музыкой (гармонией реального мира) и числами (гармонией воображаемого мира) привела пифагорейцев [13] к мистической вере в то, что *всё* есть число. Считается, что они даже верили в то, что планеты на своих орбитах издают музыку — музыку сфер.

С тех пор многие из величайших математиков и других ученых заболели пифагорейской лихорадкой. Страдал ею астроном Иоганн Кеплер. И физик Поль Дирак. Это побуждало их мечтать, искать и стремиться к гармонии Вселенной и в конце концов привело к открытиям, которые изменили мир.

Принцип бесконечности

Чтобы помочь вам понять, куда мы движемся, позвольте мне сказать несколько слов о том, что такое анализ, чего он (образно говоря) хочет и чем отличается от других областей математики. К счастью, всю эту тему пронизывает одна значимая красивая идея. Как только мы ее осознаем, вся конструкция анализа сложится в единую картину, превратившись в вариации на одну общую тему.

Увы, большинство курсов анализа хоронят эту тему под лавиной формул, процедур и вычислительных ухищрений. Если подумать, то я никогда не сталкивался с тем, чтобы кто-то ее подробно объяснял, хотя это часть культуры анализа и каждому специалисту она, естественно, известна. Давайте назовем это «принципом бесконечности». Он будет направлять нас в нашем путешествии точно так же, как направлял развитие самого анализа — и концептуально, и исторически. Я испытываю искушение сформулировать его прямо сейчас, хотя пока это будет звучать как тарабарщина. Вам будет проще это оценить, если мы станем продвигаться медленно, спрашивая, чего хочет анализ... и как он получает то, что хочет.

Если коротко, то анализ хочет сделать сложные задачи проще. Он буквально одержим простотой. Это может показаться вам

абсурдным, учитывая, что у анализа репутация сложного метода и что некоторые лучшие учебники по нему превышают тысячу страниц и весят, как кирпич. Но давайте не будем выносить резких суждений. Анализ ничего не может поделать с тем, как выглядит, и громоздкости ему не избежать. Он кажется сложным, потому что старается решать сложные задачи. И он действительно решил ряд самых трудных и важных задач, с которыми когда-либо сталкивался наш вид.

Анализ добивается успеха, разделяя запутанные задачи на более мелкие составляющие. Конечно, такая стратегия не уникальна. Все хорошие специалисты вам подтвердят, что сложные задачи становятся проще при разбиении на части. Поистине радикальный и отличительный ход анализа состоит в том, что он доводит эту стратегию «разделяй и властвуй» до крайнего предела — *бесконечности*. Вместо того чтобы разрезать большую задачу на несколько маленьких, анализ без устали режет и режет ее, пока не измельчит буквально в порошок, до бесконечного множества крохотных частей. Затем анализ решает исходную задачу для всех этих мелких частей, что обычно гораздо проще, чем в случае изначальной гигантской задачи. На следующем этапе главное — свести все полученные крошечные ответы воедино. Как правило, это довольно трудно, но все же не так сложно, как в исходной задаче.

Таким образом, анализ действует в два шага: разбиение и восстановление. С математической точки зрения первый всегда включает бесконечно малое вычитание, используемое для оценивания разницы между частями. Соответственно, эта часть предмета называется *дифференциальным* исчислением*. Второй шаг — процесс сборки — всегда включает бесконечное сложение, объединяющее части

* И английское слово *difference* («разница, различие»), и термин «дифференциальный» восходят к латинскому слову *differentia* («разность, различие»). *Прим. пер.*

обратно в единое целое. Эта часть предмета именуется *интегральным* исчислением*.

Такая стратегия подойдет для всего, что можно представить в виде бесконечного нарезания. Такие бесконечно делимые непрерывные объекты называют *континуумами*, от латинского глагола *continere*, образованного от приставки *con-* «с, вместе» и слова *tenere* «держать». Подумайте об окружности, стальной балке подвесного моста, миске супа, остывающего на кухонном столе, параболической траектории летящего копья или продолжительности вашей жизни. Форма, объект, жидкость, движение, временной интервал — все это льет воду на мельницу анализа и все это непрерывно или почти непрерывно.

Обратите внимание на определенный акт творческой фантазии. В действительности суп и сталь не непрерывны. В масштабах обычной жизни, возможно, они и кажутся таковыми, но на уровне атомов или суперструн — нет. Анализ игнорирует неудобства, создаваемые атомами и прочими неразделимыми объектами, не потому, что их не существует, а потому, что полезно представить, что их нет. Как мы увидим, анализу присуща склонность к полезным выдумкам.

Говоря в целом, те виды сущностей, которые анализ моделирует континуумами, включают практически все, что можно представить. Ученые использовали анализ для описания того, как мяч непрерывно катится по наклонной поверхности, как луч солнца проходит сквозь воду, как непрерывный поток воздуха вокруг крыла удерживает в полете колибри или самолет и как концентрация частиц вируса ВИЧ в крови пациента непрерывно снижается в течение нескольких дней после начала комбинированного лечения. Во всех случаях стратегия одна и та же: разделить сложную непрерывную задачу на бесконечное множество более простых частей, решить их по отдельности, а затем соединить опять.

Теперь мы наконец готовы изложить главную идею.

* И английское слово *integrate* («объединять»), и термин «интегральный» восходят к латинскому слову *integer* («целое»). *Прим. пер.*

Принцип бесконечности

Чтобы пролить свет на любые непрерывные формы, объекты, движения, процессы или явления — какими бы дикими или сложными они ни казались, — переосмыслите их как бесконечный набор более простых частей, проанализируйте, а затем сложите полученные результаты, чтобы понять исходное целое.

Голем бесконечности

Единственная неприятность во всем этом — необходимость справляться с бесконечностью. И это проще сказать, чем сделать. Хотя тщательно контролируемое применение бесконечности — секрет анализа и источник его колоссальной предсказательной силы, одновременно это и его самая большая головная боль. Подобно чудовищу Франкенштейна или голему из еврейской мифологии, бесконечность склонна ускользать из-под контроля хозяина. Как и в любой истории о гордыне, монстр неизбежно обращается против своего создателя.

Создатели анализа осознавали такую опасность, но все же считали, что без бесконечности не обойтись. Конечно, время от времени чудовище приходило в бешенство, оставляя за собой парадоксы, путаницу и философский хаос. Однако после каждого такого случая математикам всегда удавалось усмирить монстра, рационализировать его поведение и вернуть к работе. В итоге все всегда заканчивалось хорошо. Анализ давал правильные ответы, даже когда его создатели не могли объяснить, почему. Желание обуздать бесконечность и использовать ее силу — это та нить, которая проходит через всю 25-вековую историю матанализа.

Если учесть, что математика обычно изображается точной и безупречно рациональной, все эти разговоры о желаниях и заблуждениях могут показаться неуместными. Она рациональна, но не всегда изначально. Творение интуитивно, понимание приходит позже.

В истории анализа логика всегда отставала от интуиции чаще, чем в других областях математики. И это заставляет чувствовать, что эта тема особенно человечна и дружелюбна, а ее гении больше похожи на нас.

Кривые, движение и изменение

Принцип бесконечности организует рассказ об анализе вокруг какой-то методологической темы. Но анализ — это не только методология, но и загадки. Его развитию особенно способствовали три: загадка кривых, загадка движения и загадка изменения. Плодотворность их изучения доказала ценность чистого любопытства.

Задачи о кривых, движении и изменении на первый взгляд могут показаться неважными, а может, даже безнадежно заумными. Но они затрагивают настолько глубокие концептуальные вопросы, а математика так глубоко вплетена в ткань Вселенной, что их решение имело далеко идущие последствия для хода цивилизации и нашей повседневной жизни. Как мы увидим в следующих главах, мы пожинаем плоды этих исследований всякий раз, когда слушаем музыку в своих телефонах, делаем покупки в магазинах с помощью лазерных сканеров или находим дорогу домой благодаря GPS-навигатору.

Все началось с загадки кривых. Здесь я использую слово «кривые» в самом широком смысле — для обозначения любой изогнутой линии, изогнутой поверхности или изогнутого твердого тела — представьте себе резиновую ленту, обручальное кольцо, плавающий пузырь, контуры вазы или палку салями. Чтобы упростить вещи, ранние геометры, как правило, сосредоточивались на абстрактных, идеализированных версиях кривых форм и игнорировали толщину, шероховатости и текстуру. Например, математическая сфера представлялась бесконечно тонкой, гладкой, идеально круглой мембраной

без толщины, неровностей или волосатости, как у кокосового ореха. Но даже при таких идеализированных представлениях изогнутые формы вызвали принципиальные трудности, поскольку там не было прямых. С треугольниками и квадратами проблем не возникало. С кубами тоже. Они состоят из прямых линий и плоскостей, соединенных между собой в углах. Нетрудно вычислить их периметр, площадь или объем. Такие задачи умели решать геометры всего мира — в Древнем Вавилоне и Египте, Китае и Индии, Греции и Японии. Но с округлыми формами дело обстояло гораздо хуже. Никто не знал, какова поверхность сферы или какой у нее объем. В древности даже вычисление длины окружности или площади круга представлялось невыполнимой задачей. Не было стартовой точки и прямых линий, от которых можно оттолкнуться. Все изогнутое казалось непостижимым.

Так начинался анализ. Он рос из любопытства геометров и разочарования в округлости. Круги, сферы и прочие изогнутые формы были Гималаями той эпохи. И не потому, что они ставили важные практические задачи, по крайней мере поначалу. Дело было в жажде приключений, характерной для человеческого духа. Подобно покорителям Эвереста, геометры хотели разобраться с кривыми просто потому, потому что они есть*.

Прорыв произошел благодаря идее, что кривые на самом деле *состоят* из прямых частей. Хотя это неправда, но можно сделать вид, что это так. Загвоздка была в том, что тогда эти части должны быть бесконечно малы и бесконечно многочисленны. Благодаря такой фантастической концепции родилось интегральное исчисление. Это самое раннее применение «принципа бесконечности». История его развития растянется у нас на несколько глав, но его суть в зародышевой форме мы можем изложить уже сейчас: если очень сильно увеличить окружность (или другую гладкую кривую), то часть, которую

* Когда альпинисту Джорджу Мэллори задали вопрос, зачем он хочет подняться на Эверест, он ответил: «Потому что он существует». *Прим. пер.*

мы увидим под микроскопом, будет выглядеть как прямая линия. Так что в принципе можно вычислить длину кривой, сложив длины всех маленьких прямых кусочков. Чтобы выяснить, как именно это делать — нелегкая задача, — понадобились многовековые усилия величайших математиков человечества. В итоге коллективно (а иногда и в результате ожесточенного соперничества) они продвинулись по пути к решению загадки кривых. Побочными результатами, как мы увидим в главе 2, стала математика, используемая для рисования реалистично выглядящих волос, одежды и лиц персонажей в компьютерной анимации и вычисления, необходимые пластическим хирургам для выполнения операций на лице виртуальных пациентов, прежде чем оперировать реальных.

Поиски решения загадки кривых достигли апогея, когда стало ясно, что кривые — это нечто большее, чем просто геометрические отклонения. Они были ключом к разгадке тайн природы. Они естественным образом возникали в параболической дуге летящего мяча, в эллиптической орбите Марса, движущегося вокруг Солнца, и в выпуклой форме линзы, которая могла преломлять и фокусировать свет в нужном месте, без чего было бы невозможно бурное развитие микроскопов и телескопов в Европе позднего Возрождения.

Так началась вторая великая одержимость: увлечение тайнами движения на Земле и в Солнечной системе. С помощью наблюдений и замысловатых экспериментов ученые обнаружили интересные численные закономерности для простейших двигающихся объектов. Они измеряли колебания маятника, определяли ускорение шара, катящегося по наклонной плоскости, и наносили на карту движение небесных тел. Обнаруженные закономерности восхищали их: действительно, Иоганн Кеплер впал в состояние описанного им «священного помешательства», обнаружив законы движения планет, поскольку эти закономерности показались ему признаком работы Бога. С более светской точки зрения такие законы подкрепляли утверждение, что природа глубоко «математична», как и говорили пифагорейцы.

Единственная загвоздка — никто не мог объяснить эти новые чудесные закономерности, по крайней мере с помощью существовавших в то время форм математики. Арифметика и геометрия не справлялись с этой задачей даже в руках великих математиков.

Проблема заключалась в том, что движение не было равномерным. Шар, катившийся по наклонной плоскости, непрерывно менял скорость, а планета, вращающаяся вокруг Солнца, все время меняла направление движения. Что еще хуже, планеты двигались быстрее, когда находились ближе к Солнцу, и медленнее, когда находились от него вдалеке. Не было никакого известного способа разобраться с непрерывно изменяющимся движением. У математиков имелаась теория для самого тривиального вида движения — перемещения с *постоянной* скоростью, когда расстояние вычисляется путем произведения скорости на время. Но когда скорость меняется, причем непрерывно, дела обстоят совершенно иначе. Движение оказалось таким же Эверестом, как и кривые.

Как мы увидим в середине книги, очередные крупные достижения анализа выросли из стремления разгадать тайну движения. Как и в случае кривых, на помощь пришел принцип бесконечности. На этот раз пришлось притвориться, что движение с переменной скоростью состоит из бесконечно большого числа бесконечно коротких движений с постоянной скоростью. Чтобы представить, что это значит, вообразите, что вы едете в машине с нервным водителем, заставляющим автомобиль двигаться рывками. Вы с беспокойством смотрите на спидометр, стрелка которого дергается вверх и вниз при каждом рывке машины. Но даже самый резкий водитель не сможет сильно сдвинуть стрелку за миллисекунду, а уж за более короткий, то есть бесконечно малый интервал, — и подавно. Стрелка просто замрет на месте. Никто не способен так быстро нажать на педаль газа.

Эти идеи объединились в более молодой части анализа — дифференциальном исчислении. Это было именно то, что требовалось

для работы с бесконечно малыми изменениями времени и расстояния, которые возникали при изучении постоянно меняющегося движения, равно как и для работы с бесконечно малыми прямыми кусочками кривых, появлявшимися в аналитической геометрии — новомодном исследовании кривых, определенных с помощью алгебраических уравнений, — популярной в первой половине 1600-х годов. Как мы увидим позже, одно время алгебра была настоящим поветрием. Ее популярность была благом для всех областей математики, включая геометрию, но она же создала буйные джунгли новых кривых, которые следовало изучить. Таким образом пересеклись загадки кривых и движения. В середине 1600-х они оказались в центре анализа, сталкиваясь друг с другом и создавая математический хаос и неразбериху. Расцвет анализа в этих суматошных условиях не обходился без бурных дискуссий. Некоторые математики критиковали анализ за чересчур свободное обращение с бесконечностью. Другие высмеивали алгебру как простой набор символов. Сопровождаемый всеми этими препирательствами прогресс анализа был медленным и нестабильным.

А потом в одно прекрасное Рождество родился ребенок*. Этот юный мессия анализа был невероятным героем. Рожденный недоношенным, без отца и брошенный матерью в возрасте трех лет, этот одинокий мальчик с темными мыслями превратился в скрытного подозрительного юношу. И тем не менее он (а это, как вы уже, наверное, догадались, был Исаак Ньютон) оставил в мире такой заметный след, как никто ни до, ни после него.

Сначала он нашел «святой Грааль» анализа, открыв, как снова сложить кусочки кривой, причем легко, быстро и систематически. Объединив символы алгебры с мощностью бесконечности, он нашел способ представить любую кривую в виде суммы бесконечного множества более простых кривых, которые описываются различными

* Исаак Ньютон родился 25 декабря 1642 года по юлианскому календарю (4 января 1643 года — по григорианскому). *Прим. пер.*

степенями x , например x^2 , x^3 , x^4 и так далее. Имея такие ингредиенты, он мог приготовить любую желаемую кривую — положив щепотку x , чуточку x^2 и полную столовую ложку x^3 . Это было похоже на рецепт и набор специй, мясную лавку и огород — и все в одном флаконе. С его помощью Ньютон мог решить любую задачу о формах и движениях.

Затем он взломал код Вселенной, обнаружив, что любое движение всегда происходит бесконечно малыми шагами и в любой момент описывается законами, изложенными на языке анализа. С помощью всего лишь горстки дифференциальных уравнений (законы движения и всемирного тяготения) Ньютон смог объяснить все, от траектории пушечного снаряда до орбит планет. Его потрясающая «система мира» объединила небеса и землю, положив начало просвещению и изменив западную культуру. Его влияние на философов и поэтов Европы было колоссальным. Как мы увидим, оно распространилось даже на Томаса Джефферсона и Декларацию независимости. В наше время идеи Ньютона положены в основу космических программ, предоставляя математику, необходимую для расчета траекторий, — работы, сделанной в NASA афроамериканским математиком Кэтрин Джонсон и ее коллегами (героини книги и фильма «Скрытые фигуры»).

После того как загадки кривых и движения были решены, анализ перешел к третьей великой одержимости: загадке изменений. Пусть это и клише, но от этого оно не менее истинно: нет ничего постоянного, все меняется. Сегодня дождливо, а завтра солнечно. Рынок акций растет и падает. Воодушевленные ньютоновскими взглядами, последующие поколения специалистов по анализу задались вопросом: есть ли законы изменений, аналогичные ньютоновским законам движения? Существуют ли законы роста населения, распространения эпидемий и кровотока в артериях? Можно ли использовать анализ для описания того, как электрические сигналы распространяются по нервам, или для предсказания транспортного потока на автостраде?

Следуя этой амбициозной программе, в постоянном сотрудничестве с другими областями науки и технологии, анализ помог создать современный мир. С помощью наблюдений и экспериментов ученые установили законы изменений, а затем использовали анализ для решений задач и составления прогнозов. Например, в 1917 году Альберт Эйнштейн применил анализ к простой модели атомных переходов и предсказал замечательный эффект под названием *вынужденное излучение* [14] (этот термин обозначают буквы s и e в слове *laser*, которое представляет собой аббревиатуру, образованную от слов *light amplification by stimulated emission of radiation**). Эйнштейн предположил, что при определенных обстоятельствах фотоны, проходящие через вещество, могут индуцировать появление других фотонов с той же длиной волны, движущихся в том же направлении. Получается своего рода цепная реакция, которая может дать мощный когерентный луч. Спустя несколько десятилетий предсказание сбылось. Первые действующие лазеры были созданы в начале 1960-х. С тех пор они используются везде — от проигрывателей компакт-дисков и оружия с лазерным наведением до сканеров штрих-кодов в супермаркетах и медицинских лазеров.

Законы изменений в медицине не так понятны, как в физике. Тем не менее даже в случае элементарных моделей анализ может внести свой вклад в спасение жизней. Например, в главе 8 мы увидим, как модель, использующая дифференциальное уравнение, разработанная иммунологом и исследователем СПИДа, сыграла свою роль в создании комбинированной терапии из трех препаратов для лечения пациентов с ВИЧ. Идеи, подсказанные моделью, опровергли распространенную точку зрения, что вирус в организме бездействует; на самом деле он ожесточенно сражается с иммунной системой каждую минуту каждого дня. Благодаря новому пониманию, предоставленному анализом, ВИЧ-инфекция превратилась из почти неизбежного

* Усиление света посредством вынужденного излучения. *Прим. пер.*

смертного приговора в управляемое хроническое заболевание — по крайней мере для тех, кто имеет доступ к комбинированной лекарственной терапии.

Общепризнанно, что некоторые аспекты нашего вечно меняющегося мира лежат за пределами приближений и моделирования, характерных для принципа бесконечности. Например, в мире субатомных частиц физики не могут представлять электрон как классическую частицу, которая движется по какой-то линии подобно планете или пушечному ядру. Согласно квантовой механике, на таком микроскопическом уровне траектории становятся размытыми и плохо определяемыми, поэтому поведение электронов приходится описывать в терминах волн вероятности, а не ньютоновских траекторий. Но как только мы это сделаем, анализ с триумфом возвращается. Он управляет эволюцией волн вероятности с помощью так называемого уравнения Шрёдингера.

Удивительно, но факт: даже на субатомном уровне, где ньютоновская физика уже не действует, созданный им анализ по-прежнему работает. И работает очень хорошо. Как мы увидим далее в книге, он объединил усилия с квантовой механикой и предсказал замечательные эффекты, лежащие в основе методов медицинской визуализации — от магнитно-резонансной (МРТ) и компьютерной (КТ) томографии до более экзотической позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ).

Пришло время ближе познакомиться с языком Вселенной. И начнем, разумеется, с бесконечности.

Бесконечность

Начало математике [1] положили обычные повседневные задачи. Пастухам нужно было следить за стадами. Фермерам — взвешивать собранное зерно. Сборщикам налогов — решать, сколько коров или кур крестьянин должен отдать правителю. Из таких практических требований и возникли числа. Сначала их определяли по пальцам рук и ног. Затем стали выцарапывать на костях животных. По мере того как представление чисел эволюционировало от черточек к символам, они облегчили все задачи — от налогообложения и торговли до бухгалтерского учета и переписи населения. Доказательства тому мы находим на глиняных табличках Месопотамии, созданных более пяти тысяч лет назад, — сделанная на них клиновидными значками запись называется клинописью.

Наряду с числами значение имели и формы. В Древнем Египте измерениям линий и углов придавали первостепенное значение. Каждый год землемерам приходилось заново проводить границы крестьянских хозяйств, поскольку разлив Нила стирал их. Эта деятельность позже дала название всей области математики, изучающей формы, — *геометрия*, от древнегреческого слова γεωμετρία, которое означало «землемерие»: γῆ — «земля» и μέτρον — «измеряю».

Поначалу геометрия работала с прямыми линиями и углами, что отражало ее утилитарное происхождение: треугольники были наклонными плоскостями, пирамиды — монументами и гробницами,

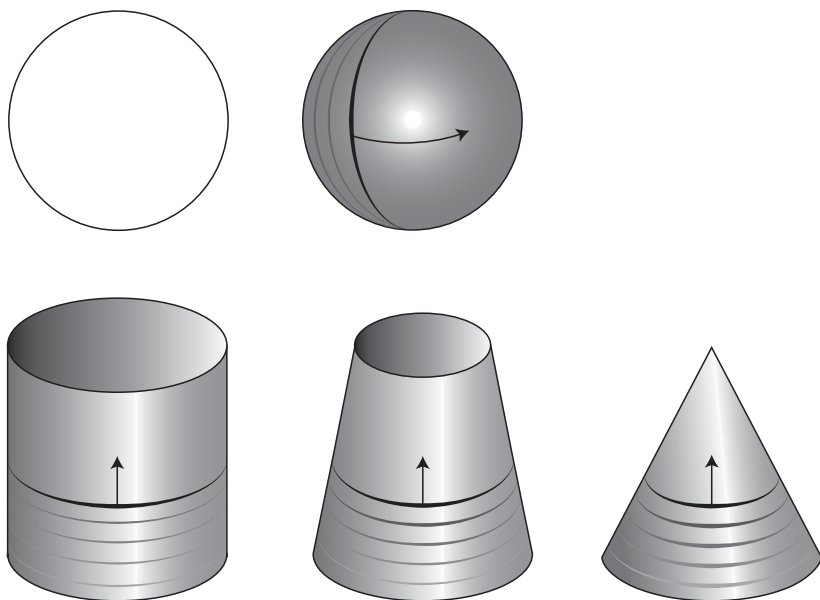
а прямоугольники — столами, алтарями и земельными участками. Строители и плотники использовали прямые углы для построения вертикальных линий. Для моряков, архитекторов и священников знание геометрии прямых линий было необходимо для землемерных работ, навигации, ведения календаря, предсказания затмений и возведения храмов и святилищ.

Но всегда — даже когда геометрия была зациклена на прямых линиях — выделялась одна кривая, самая совершенная из всех: окружность. Мы видим ее в годичных кольцах деревьев, в волнах на пруду, в форме солнца и луны. В природе круги повсюду. Когда мы смотрим на них, они смотрят на нас — в буквальном смысле, ведь они в глазах наших близких, в зрачках и радужках. Круги и практичны, и эмоциональны, как колеса и обручальные кольца; в них есть нечто мистическое. Вечное возвращение предполагает цикл времен года, возрождения, вечной жизни и нескончаемой любви. Неудивительно, что круги привлекали внимание с тех пор, как люди стали изучать формы.

С математической точки зрения окружности воплощают изменения без изменений. Точка,двигающаяся по окружности, меняет направление движения, не меняя при этом своего расстояния от центра. Это минимальная форма изменений — самый простой способ двигаться по кривой. И, конечно же, окружность симметрична. Если вы повернете ее вокруг центра, она будет выглядеть точно так же. Такая поворотная симметрия может быть причиной распространенности этих фигур. Везде, где природу не беспокоит направление, обязательно появляются окружности. Посмотрите, что происходит, когда дождевая капля попадает в лужу: от точки удара расходятся мелкие волны. Они *обязаны* иметь круговую форму, потому что двигаются с одинаковой скоростью во всех направлениях и начинаются в одной точке. Этого требует симметрия.

Окружности могут также порождать другие искривленные формы. Если представить, что окружность проткнули по диаметру

и стали вращать вокруг этой оси в трехмерном пространстве, то получится сфера — форма мяча или планеты. Если окружность двигать по прямой перпендикулярно ее плоскости, появляется цилиндр — форма банки или коробки для шляп. Если окружность одновременно с поступательным движением сжимается, образуется конус, если расширяется — то усеченный конус (форма абажура).



Окружности, сферы, цилиндры и конусы очаровывали первых геометров, но при этом они считали, что работать с ними гораздо труднее, чем с треугольниками, прямоугольниками, квадратами, кубами и прочими прямолинейными формами, составленными из кусков прямых линий и плоскостей. Ученых интересовали площади криволинейных поверхностей и объемы криволинейных тел, но они понятия не имели, как решать такие задачи. Криволинейность была сильнее.

Бесконечность как строитель моста

Анализ начинался как отрасль геометрии [2]. Примерно в 250 году до нашей эры в Древней Греции вплотную занялись разгадкой кривых. Амбициозный план состоял в использовании бесконечности для построения моста между кривыми и прямыми. Приверженцы плана надеялись, что как только такая связь будет установлена, методы и техники прямолинейной геометрии можно будет перетащить через этот мост и применить для решения загадки кривых. Бесконечность поможет решить все старые задачи. По крайней мере, таков был настрой.

Должно быть, в то время такой план выглядел довольно надуманным. У бесконечности была сомнительная репутация — будто бы это нечто пугающее, а не полезное. Что еще хуже, само понятие бесконечности было весьма туманно и сбивало с толку. Что это вообще такое? Число? Место? Идея?

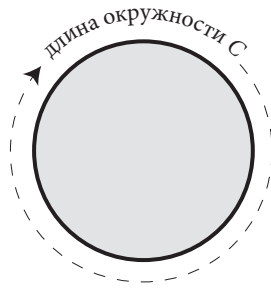
Тем не менее, как мы вскоре увидим, бесконечность оказалась манной небесной. Если учесть все открытия и технологии, которые в итоге выросли из анализа, то идея использовать бесконечность для решения трудных геометрических задач была одной из лучших в истории.

Конечно, в 250 году до нашей эры предвидеть это было невозможно. Тем не менее бесконечность тут же дала несколько впечатляющих результатов. Одним из первых и лучших стало решение давней загадки: как найти площадь круга [3].

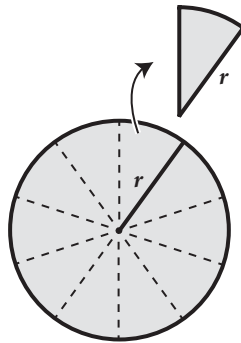
Доказательство с помощью пиццы

Перед тем как вдаваться в подробности, давайте набросаем ход рассуждений. Наша стратегия — представить круг в виде пиццы, а затем нарезать ее на бесконечное множество кусочков и волшебным образом переложить их так, чтобы получился прямоугольник. Это даст нам ответ, который мы ищем, поскольку перекладывание кусочков, очевидно, не меняет их площадь, а находить площадь прямоугольника мы умеем: нужно умножить его длину на ширину. Результатом будет формула для площади круга.

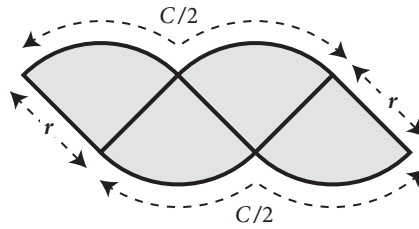
Для такого рассуждения пицца должна быть идеализированной математической пиццей — идеально плоской и круглой, с бесконечно тонкой корочкой. Обозначим буквой C ее периметр (или длину окружности) — расстояние вдоль границы. Длина окружности — вовсе не то, что обычно интересует любителей пиццы, однако при желании мы могли бы измерить величину C с помощью рулетки.



Еще одна необходимая величина — радиус пиццы r , который определяется как расстояние от ее центра до любой точки корочки. В частности, если мы нарежем пиццу на ломтики, проводя разрезы от центра к краям, то длина прямого отрезка в таких ломтиках будет равна r .



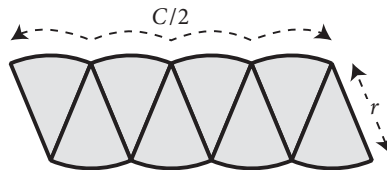
Предположим, что мы разделили пиццу на четыре части. Их можно переложить следующим способом, но он не выглядит слишком многообещающим.



Получившаяся фигура с выступами вверх и вниз смотрится несколько странно. Это явно не прямоугольник, и определить ее площадь непросто. Похоже, нам придется отступить. Но, как и в любой драме, герою перед триумфом предстоит преодолеть трудности. Драматическое напряжение нарастает.

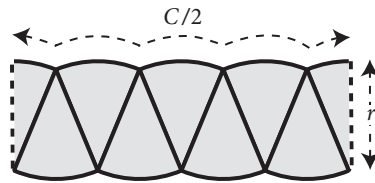
Однако раз уж мы тут застряли, то отметим две вещи, потому что они будут справедливы в ходе всего доказательства и в итоге дадут нам размеры искомого прямоугольника. *Первая* — одна половина корочки стала искривленной верхней границей новой фигуры, а вторая — нижней частью. Поэтому длина верхней границы равна $C/2$ и нижней границы — тоже $C/2$, как изображено на рисунке. Как мы увидим, в итоге эти границы превратятся в длинные стороны прямоугольника. *Вторая* — длина всех наклонных боковых сторон получившейся фигуры равна r , потому что это просто стороны исходных ломтиков пиццы. Эти боковые отрезки в итоге превратятся в короткие стороны прямоугольника.

Причина, по которой мы пока не видим никаких признаков искомого прямоугольника, — у нас еще недостаточно ломтиков. Если разрезать пиццу на восемь частей и переложить их таким же образом, то фигура окажется более прямоугольной.



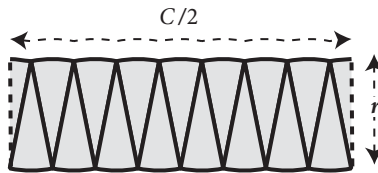
По сути, пицца начинает походить на параллелограмм. Не-плохо — по крайней мере это почти прямоугольник. Выступы вверх и вниз уже не так выпирают, как на предыдущем рисунке, — из-за большего количества ломтиков. Как и ранее, длина верхней границы фигуры равна $C/2$, а боковой границы — r .

Чтобы картинка выглядела еще лучше, разрежем пополам один из боковых ломтиков и перенесем его на другую сторону.



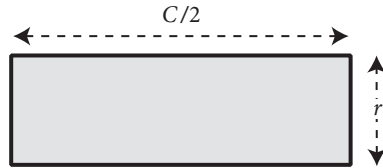
Теперь фигура очень похожа на прямоугольник. Да, вверху и внизу еще есть выступы из-за кривизны исходной корочки, но все же мы добились прогресса.

Похоже, увеличение числа кусков помогает, поэтому продолжим их нарезать. При шестнадцати ломтиках и таком же косметическом переносе половинки крайнего куска, как мы сделали только что, получается следующая фигура:



Чем больше кусков мы берем, тем сильнее сглаживаем выступы в верхней и нижней частях получающейся фигуры. Наши операции создают последовательность фигур, которые волшебным образом

приближаются к определенному прямоугольнику. Поскольку фигуры к нему все ближе и ближе, назовем его *предельным* прямоугольником.



Смысл всей процедуры в том, что найти площадь предельного прямоугольника очень просто — достаточно перемножить его ширину и высоту. Все, что нам осталось, — выразить эти ширину и высоту через параметры исходного круга. Поскольку ломтики располагались вертикально, высота — это просто радиус r исходного круга, а ширина — половина длины его окружности, ведь его граница пошла на создание верхней и нижней границы прямоугольника — как это было для всех промежуточных фигур с выступающими краями. Следовательно, ширина равна $C/2$. Таким образом, площадь прямоугольника $A = r \times C/2 = rC/2$. Но учитывая, что перекладывание ломтиков не меняло площади исходного круга, то и его площадь должна быть точно такой же!

Этот результат для площади круга, $A = rC/2$, впервые получил (используя аналогичные, но более строгие рассуждения) древнегреческий математик Архимед (287–212 до нашей эры) в трактате «Измерение круга».

Самым новаторским аспектом доказательства было привлечение на помощь бесконечности. Имея всего четыре, восемь или шестнадцать ломтиков, мы могли сложить только фигуру с выступами. После малообещающего старта мы продвинулись к успеху, начав брать больше ломтиков; при этом получающаяся фигура все сильнее приближалась к прямоугольнику. Однако только при *бесконечном* *множестве* кусков она становилась по-настоящему прямоугольной. Эта идея и легла в основу анализа. С бесконечностью все упрощается.

Пределы и загадка стены

Предел подобен недостижимой цели. Вы можете подбираться к нему все ближе и ближе, но никогда не пройдете весь путь до конца.

Например, в доказательстве, использующем пиццу, мы могли приближаться к прямоугольнику, нарезаая все большее количество ломтиков и переставляя их. Но истинной «прямоугольности» нам никогда не добиться. Мы можем лишь приблизиться к этому идеалу. К счастью, в анализе недостижимость предела обычно не имеет значения. Нередко мы можем решить задачу, представив, что способны достичь предела, а затем посмотрев, что следует из такого представления. Фактически многие из пионеров в этой области сделали свои великие открытия именно таким образом. Логически — нет. С воображением — да. Успешно — весьма.

Предел — это тонкое понятие, и в анализе оно занимает центральное место. Его не просто уловить, потому что в повседневной жизни эта идея не встречается. Пожалуй, ближайшей аналогией будет загадка стены. Если вы проходите половину расстояния до стены, затем половину оставшегося расстояния, потом половину оставшегося и так далее, то достигнете ли в конце концов этапа, на котором доберетесь до стены?

Очевидно, что ответ отрицателен, потому что в загадке стены на каждом этапе вы проходите только половину пути, а не весь путь. Сделаете ли вы десять шагов, миллион или любое другое число, между вами и стеной всегда останется какой-то промежуток. Однако столь же очевидно, что вы можете подойти к стене сколь угодно близко. Это означает, что на каком-то этапе вы окажетесь от нее в сантиметре, миллиметре, нанометре или на любом ином ненулевом расстоянии, но никогда не закончите свой путь. Здесь стена играет роль предела. На то, чтобы строго определить это понятие, понадобилось две тысячи лет. До тех пор пионеры анализа прекрасно обходились интуицией. Так что не волнуйтесь, если пределы кажутся

вам сейчас туманными. Мы познакомимся с ними лучше, наблюдая на практике. С современной точки зрения пределы — это фундамент, на котором построен весь анализ.



Если метафора со стеной кажется вам слишком мрачной и негуманной (кому захочется вечно приближаться к недостигаемой стене?), рассмотрите такую аналогию: все, что движется к какому-то пределу, подобно герою, занятому бесконечным поиском. Это не бесполезное занятие, как бессмысленная задача Сизифа, обреченного вечно вкатывать камень на гору только для того, чтобы увидеть, как он снова скатывается вниз. Когда в математике происходит приближение к пределу (как наши фигуры с выступами приближались к предельному прямоугольнику), это подобно тому, как главный герой стремится к чему-то, что, как он знает, невозможно, но все же надеется на успех, воодушевляясь прогрессом в своих попытках достичь недостижимой звезды.

Притча о $0,333\dots$

Чтобы подкрепить важные идеи, что в бесконечности все упрощается и что пределы подобны недостижимым целям, возьмем пример из арифметики. Это задача преобразования обыкновенной дроби — например, $1/3$ — в десятичную (в нашем случае $1/3 = 0,333\dots$). Я хорошо помню, как моя школьная учительница математики мисс Стэнтон учила нас это делать. Запомнилось это потому, что она внезапно заговорила о бесконечности.

До этого момента я никогда не слышал, чтобы взрослые говорили о бесконечности. Мои родители определенно этого не делали. Это казалось секретом, о котором знали только дети. На детской площадке о нем постоянно упоминали в насмешках и издевках:

- Ну ты и дурак!
- А ты дурак вдвойне!
- А ты дурак бесконечность раз!
- А ты дурак бесконечность раз плюс один!
- Это то же самое, что бесконечность, идиот!

Такие поучительные разговоры убедили меня в том, что бесконечность ведет себя не так, как обычное число. Она не становится больше, если к ней прибавить 1. Даже добавление бесконечности не поможет. Несокрушимые свойства делали ее окончательным аргументом в дворовых разборках. Побеждает тот, кто применит бесконечность первым.

Однако никто из учителей до мисс Стэнтон не упоминал о бесконечности. Все в нашем классе уже знали о конечных десятичных дробях, используемых для представления денежных сумм, например 10,28 доллара, где есть две цифры после запятой. Напротив, бесконечные десятичные дроби, где после запятой было бесконечно много чисел, казались странными на первый взгляд, но становились естественными, как только мы начали изучать обыкновенные дроби.

Мы узнали, что дробь $1/3$ можно записать как $0,333...$, где многоточие означало, что тройки повторяются до бесконечности. Это имело для меня смысл, потому что, пытаясь поделить 1 на 3 в столбик, я застрял в бесконечном цикле: 1 меньше 3, поэтому получаем в частном ноль целых, дописываем к единице 0, делим 10 на 3, получаем 3 и остаток 1; в итоге нужно снова делить 1 на 3, то есть мы возвращаемся к тому, с чего начали. Выхода из цикла не было, а значит, тройки при делении будут повторяться: $0,333...$

Многоточие после $0,333$ истолковывается двумя способами. Наивное толкование состоит в том, что существует буквально бесконечное

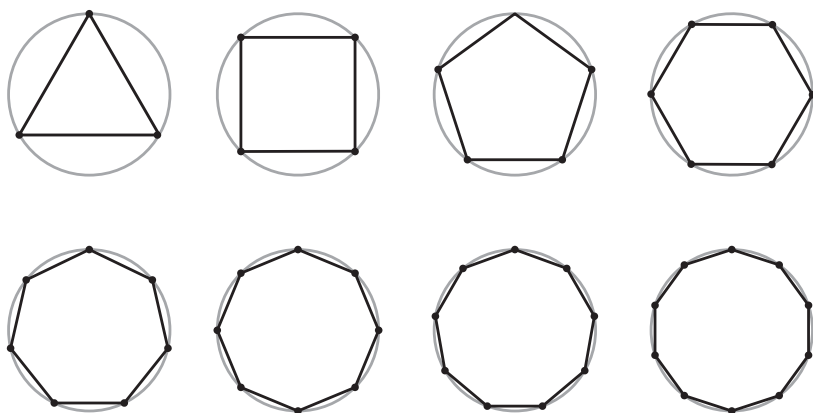
количество троек, находящихся справа от десятичной запятой вплотную друг к другу. Конечно, мы не можем записать их все, раз их бесконечно много, но с помощью многоточия показываем, что они там есть, по крайней мере в нашей голове. Я назову такую интерпретацию *актуальной бесконечностью*. Преимущество ее в том, что она выглядит простой и здоровой, пока мы не желаем особо задумываться о том, что означает бесконечность.

Более изящное толкование состоит в том, что $0,333\dots$ представляет собой некоторый предел — в точности такой же, как предельный прямоугольник для наших фигур в доказательстве с пиццей или стена для незадачливого путешественника. Только здесь $0,333\dots$ отображает предел последовательных десятичных чисел, которые мы генерируем при делении 1 на 3. Чем больше этапов в процессе деления, тем больше троек в десятичном разложении $1/3$. Мы можем получить сколь угодно хорошее приближение к $1/3$. Если нам не нравится $1/3 \approx 0,3$, мы можем сделать еще шаг и получить $1/3 \approx 0,33$ и так далее. Я назову это толкование *потенциальной бесконечностью*. Она «потенциальна» в том смысле, что приближения можно получать сколь угодно долго. Ничто не мешает сделать миллион, миллиард или любое иное количество шагов. Преимущество этого толкования в том, что нам незачем прибегать к такому туманному понятию, как бесконечность. Мы всегда можем оставаться в области конечного.

Для работы с равенством вида $1/3 = 0,333\dots$ не имеет значения, какой точки зрения мы придерживаемся. Они одинаково состоятельны и дают одни и те же математические результаты в любых нужных нам вычислениях. Однако в математике существуют ситуации, когда понятие актуальной бесконечности может вызвать логический хаос. Именно это я подразумевал, когда писал во введении о големе бесконечности. Иногда действительно важно, как мы думаем о результатах процесса, приближающегося к какому-то пределу. Делая вид, что процесс в реальности заканчивается и каким-то образом достигает nirваны бесконечности, подчас можно попасть в неприятную ситуацию.

Притча о многоугольнике с бесконечным числом углов

В качестве примера возьмем круг, расставим на его границе (окружности) через равные промежутки определенное количество точек и соединим их отрезками. При трех точках получим равносторонний треугольник, при четырех — квадрат, при пяти — правильный пятиугольник и так далее, последовательно получая все новые правильные многоугольники.



Обратите внимание, что чем больше точек мы используем, тем ближе наш многоугольник к кругу. При этом стороны многоугольников становятся все короче и многочисленнее. Наш круг — предел для построенных многоугольников.

Таким образом, бесконечность снова соединяет два мира. На этот раз она ведет нас от прямолинейности к криволинейности, от угловатых фигур к гладкому кругу, тогда как в случае с пиццей бесконечность, наоборот, преобразовала круг в прямоугольник.

Конечно же, на любом шаге многоугольник по-прежнему остается многоугольником. Это еще не круг и никогда им не станет. Фигуры приближаются к кругу, но никогда не совпадут с ним. Здесь мы имеем дело с потенциальной бесконечностью, а не с актуальной. Так что с логической точки зрения все безукоризненно.

Но что, если бы мы могли пройти весь путь до актуальной бесконечности? Был бы итоговый многоугольник с бесконечным количеством углов и бесконечно короткими сторонами кругом? Заманчиво так думать, ведь тогда многоугольник окажется гладким. Все углы будут сошлифованы. Все станет идеальным и красивым.

Очарование и опасность бесконечности

Здесь заложен общий принцип: пределы часто проще, чем приближения, ведущие к ним. Круг проще и изящнее, чем любой из угловатых многоугольников, к нему приближающих. То же самое относится и к доказательству с помощью пиццы, где предельный прямоугольник проще и элегантнее, нежели бугристые фигуры с некрасивыми выступами, и к дроби $1/3$. Это проще и приятнее, нежели любое из неуклюжих приближений с большими числителями и знаменателями вроде $3/10$, $33/100$ или $333/1000$. Во всех этих случаях предельная фигура или число проще и симметричнее, чем конечные приближения.

В этом и состоит очарование бесконечности. Здесь все становится лучше.

Помня об этом, давайте вернемся к притче о многоугольнике с бесконечно большим количеством углов. Нужно ли сделать решительный шаг и сказать, что круг — это действительно многоугольник с бесконечно большим количеством бесконечно малых сторон? Нет. Мы не должны поддаваться искушению и так поступать, поскольку это означает впасть в грех актуальной бесконечности. Это обрекло бы нас на логический ад.

Чтобы понять, почему, предположим, что мы на миг подумали, будто круг — на самом деле многоугольник с бесконечным числом углов и бесконечно малыми сторонами. Какова длина этих сторон? Если она равна 0, то общая длина всех сторон — бесконечность, умноженная

на 0, — должна давать длину окружности. Но представьте окружность вдвое большего размера. Точно так же ее длина должна равняться бесконечности, умноженной на 0. Получается, бесконечность, умноженная на 0, должна равняться и длине нашей окружности, и вдвое большему числу. Что за ерунда? Не существует разумного способа определить результат умножения бесконечности на ноль, а потому нет разумного способа рассматривать круг как правильный многоугольник с бесконечным числом сторон.

Тем не менее в таком интуитивном представлении есть нечто искушающее. Подобно библейскому первородному греху, по той же причине трудно сопротивляться и первородному греху анализа — соблазну считать, что круг — это правильный многоугольник с бесконечным числом сторон. Он соблазняет нас запретным знанием, идеями, недоступными для обычных средств. На протяжении тысячелетий геометры пытались вычислить длину окружности. Если бы круг можно было заменить многоугольником со множеством крохотных прямых сторон, задача была бы гораздо проще.

Прислушиваясь к шипению этого змея-искусителя — но все же сдерживаясь, используя потенциальную бесконечность вместо более заманчивой актуальной, — математики научились решать задачу о длине окружности и другие загадки кривых. В следующих главах мы узнаем, как им это удалось, а пока попробуем еще глубже понять, насколько опасной может быть актуальная бесконечность. Этот грех ведет ко многим другим, включая тот, о котором учителя предупреждали нас в первую очередь.

Грех деления на ноль

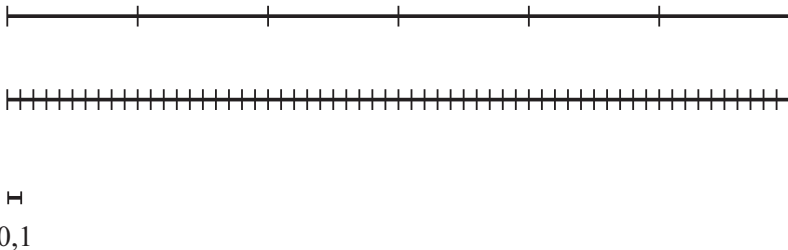
Во всем мире школьников учат, что делить на ноль нельзя. Должно быть, они шокированы существованием такого табу. Предполагается, что числа дисциплинированы и хорошо себя ведут. Урок математики — место для логики и рассуждений. И все же можно задавать о числах простые вопросы, на которые нет ответов, или пытаться

сделать с ними простые вещи, которые не работают или не имеют смысла. Деление на ноль — одна из них.

Корень проблемы — в бесконечности. Деление на ноль вызывает бесконечность примерно так же, как доска для спиритических сеансов — духов из другого мира. Это рискованно. Не ходите туда.

Тем, кто не в силах сопротивляться искушению и желает понять, почему в тенях скрывается бесконечность, советуем поделить 6 на какое-нибудь маленькое число, близкое к нулю, но не равное ему, например 0,1. В этом ничего запретного нет. Если разделить 6 на 0,1, получится 60, довольно прилично. Поделим 6 на еще меньшее число, скажем 0,01; ответ будет больше — 600. Если мы отважимся разделить 6 на число, которое гораздо ближе к 0, допустим, на 0,0000001, то ответ будет еще больше и составит 60 000 000. Тенденция ясна. Чем меньше знаменатель, тем больше частное. В пределе, когда знаменатель приближается к нулю, частное стремится к бесконечности. Вот настоящая причина, почему нельзя делить на 0. Малодушные говорят, что ответ неопределенный, но на самом деле он бесконечный.

Все это можно представить себе следующим образом. Вообразите, что вы делите 6-сантиметровую линию на части длиной 0,1 сантиметра. Получается 60 кусков, уложенных вплотную друг к другу.



Точно так же (но я не буду пробовать это нарисовать) эту линию можно поделить на 600 частей по 0,01 сантиметра или на 60 000 000 частей по 0,0000001 сантиметра.

Если мы продолжим и доведем это безумное деление до предела, то придем к заключению, что наша 6-сантиметровая линия состоит из *бесконечного* числа частей *нулевой* длины. Возможно, это звучит правдоподобно. В конце концов, линия состоит из бесконечного количества точек, и каждая точка имеет нулевую длину.

Но с философской точки зрения нервирует то, что аналогичное рассуждение можно применить к линии *любой* длины. В самом деле, в числе 6 нет ничего особенного. Мы могли бы с равным успехом утверждать, что линия длиной 3 сантиметра, или 49,57, или 2 000 000 000 состоит из бесконечного числа точек нулевой длины. Очевидно, что умножение 0 на бесконечность может дать нам любой мыслимый результат — 6, 3, 49,57 или 2 000 000 000. С математической точки зрения это ужасно.

Грех актуальной бесконечности

Прегрешение, которое втянуло нас в эту путаницу, заключалось в том, что мы вообразили, будто действительно можем *достичь* предела и трактовать бесконечность как достижимое число. Еще в IV веке до нашей эры греческий философ Аристотель [4] предупреждал, что такое обращение с бесконечностью способно привести к различным логическим неприятностям. Он выступал против актуальной бесконечности [5], уверяя, что смысл имеет только потенциальная бесконечность.

В контексте разрезания линии на части потенциальная бесконечность означает, что линию можно разрезать на сколь угодно большое количество частей, но оно всегда конечно, а длина частей не равна 0. Это вполне допустимо и не вызывает никаких логических затруднений.

Что запрещено — так это идея, что можно пройти весь путь до актуальной бесконечности и получить бесконечное число частей нулевой длины. Аристотель считал, что это ведет к бессмыслице — как в нашем случае, когда произведение бесконечности и 0 может дать

любое число. Поэтому он запретил пользоваться актуальной бесконечностью в математике и философии. Математики поддерживали его мнение в течение следующих двадцати двух столетий.

Когда-то в далекие доисторические времена кто-то понял, что числа никогда не заканчиваются. Вместе с этой мыслью родилась бесконечность. Это числовой аналог глубин, скрытых в нашей психике, в наших ночных кошмарах о бездонных ямах и в наших надеждах на вечную жизнь. Именно бесконечность лежит в основе множества наших мечтаний, страхов и безответных вопросов. Насколько велика Вселенная? Сколько длится вечность? Насколько могуществен Бог? Тысячи лет бесконечность сбивает с толку лучшие умы человечества во всех областях мысли — от религии и философии до науки и математики. Ее запрещали, объявляли вне закона и отвергали. Во времена инквизиции монах Джордано Бруно [6] был сожжен заживо на костре за предположение, что Бог в своей бесконечной силе создал бесчисленные миры.

Парадоксы Зенона

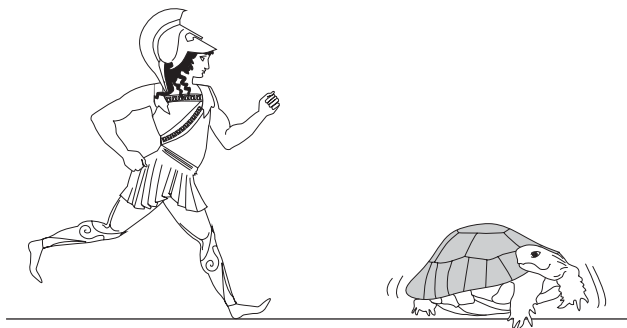
Примерно за два тысячелетия до казни Джордано Бруно бесконечность осмелился созерцать другой отважный философ. Зенон Элейский (около 490–430 до нашей эры) изложил ряд апорий (парадоксов), связанных с пространством, временем и движением, и бесконечность играла в них главную роль. Эти апории предвосхищали идеи, положенные в основу анализа, и обсуждаются до сих пор. Бертран Рассел называл их неизмеримо тонкими и глубокими.

Мы не знаем, что именно пытался показать своими рассуждениями Зенон, поскольку ни одно из его сочинений не сохранилось, если они вообще существовали. Его рассуждения дошли до нас в передаче Платона и Аристотеля, которые в основном пытались их опровергнуть. В их пересказе Зенон пытался доказать, что изменения невозможны. Наши чувства говорят нам иное, но они нас обманывают. Изменение, согласно Зенону, — это иллюзия.

Особенно известны три парадокса Зенона* [8]. Первый, «Дихотомия», аналогичен загадке стены, но гораздо печальнее. Он гласит, что вам не удастся даже сдвинуться с места, поскольку для того, чтобы сделать первый шаг, нужно сделать полшага, а перед этим — четверть шага и так далее. Так что вы не только не сможете добраться до стены, но даже не сможете начать движение.

Это блестящий парадокс. Кто бы мог подумать, что для шага требуется выполнить бесконечно много подзадач? Хуже того, нет самой *первой* задачи, которую надо выполнить. Она не может состоять в том, что нужно сделать полшага, потому что до этого пришлось бы сделать четверть шага, а до того — восьмую часть шага и так далее. Если вы думаете, что у вас много дел перед завтраком, представьте, что вам нужно закончить бесконечное количество дел, прежде чем добраться до кухни.

Другой парадокс, названный «Ахиллес и черепаха», утверждает, что быстрый бегун (Ахиллес) никогда не догонит медленного бегуна (черепаху), если у того будет фора.



К тому времени, когда Ахиллес достигнет места, откуда отправилась в путь черепаха, она успеет немного продвинуться вперед. К тому моменту, когда Ахиллес достигнет этого нового места,

* Всего в античных трудах упоминается 40 апорий Зенона, но до наших дней дошло 9. *Прим. пер.*

черепаха снова продвинется, и так далее. Поскольку все мы считаем, что быстрый бегун *может* обогнать медленного, то либо наши чувства нас обманывают, либо что-то не так с нашими рассуждениями о движении, пространстве и времени.

В этих первых двух парадоксах Зенон, похоже, возражал против принципиальной непрерывности пространства и времени, то есть против того, что их можно делить до бесконечности. Его умной стратегией было применение доказательства от противного (некоторые утверждают, что он его и изобрел), известное среди юристов и логиков как *reductio ad absurdum* (доведение до абсурда). В обоих парадоксах Зенон предположил непрерывность пространства и времени, а затем вывел из этого допущения противоречие, поэтому предположение о непрерывности должно быть ложным. Анализ основан именно на этом предположении, а потому ставки тут весьма высоки. Он опровергает Зенона, демонстрируя ошибки в его рассуждениях.

Например, вот как анализ справляется с Ахиллесом и черепахой. Допустим, что черепаха стартует в 10 метрах перед Ахиллесом, а Ахиллес бежит вдесятеро быстрее своей соперницы — скажем, 10 метров в секунду против 1 метра в секунду. Таким образом, за 1 секунду Ахиллес отыгрывает 10-метровую фору черепахи. За это время черепаха продвинется на 1 метр. Чтобы покрыть это расстояние, Ахиллесу понадобится еще 0,1 секунды. За это время черепаха преодолеет еще 0,1 метра. Продолжая рассуждать в том же духе, мы видим, что последовательные отрезки времени, которые нужны Ахиллесу, чтобы покрыть разделяющее расстояние, складываются в бесконечный ряд:

$$1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots = 1,111\dots \text{ секунд.}$$

Если записать это число в виде обыкновенной дроби, получим 10/9 секунды. Именно столько времени понадобится быстрогогерою мифа, чтобы догнать черепаху. И хотя Зенон был прав

в том, что Ахиллесу требуется выполнить бесконечное количество задач, в этом нет ничего парадоксального. Как показывает математика, он может справиться с ними за конечный промежуток времени.

Такое рассуждение использует анализ. Мы просто суммируем бесконечный ряд и вычисляем предельное значение, как делали при обсуждении, почему $0,333... = 1/3$. Всякий раз, когда мы работаем с бесконечной записью десятичных чисел, мы применяем анализ (хотя большинство людей отнеслись бы к этому как к школьной арифметике).

Кстати, анализ — не единственный способ справиться с такой задачей. Мы могли бы использовать алгебру. Для этого нам нужно выяснить, где в произвольный момент времени t находится на трассе каждый из соперников. Пусть Ахиллес начинает в нулевой точке. Поскольку он бежит со скоростью 10 метров в секунду, а расстояние равно произведению скорости на время, то в момент t он пробежит $10 \times t$. Что касается черепахи, то она начинает двигаться в точке 10 и перемещается со скоростью 1 метр в секунду, поэтому в момент t она находится в точке $10 + 1 \times t$. Чтобы определить время, когда герой настигнет соперницу, нужно приравнять эти два выражения, поскольку с алгебраической точки зрения это означает, что Ахиллес и черепаха находятся в одной точке в один момент времени. Получаем уравнение

$$10t = 10 + t.$$

Чтобы решить его, вычитаем t из обеих частей и получаем $9t = 10$. Делим обе части на 9 и получаем $t = 10/9$ секунды, то есть ровно тот же ответ, что нам дал анализ. Таким образом, с точки зрения анализа в ситуации с Ахиллесом и черепахой нет никакого парадокса. Если пространство и время непрерывны, все прекрасно работает.

Зенон в цифровом мире

В третьей апории под названием «Стрела» Зенон выступает против альтернативной идеи, что пространство и время дискретны*, то есть состоят из крохотных неделимых частей вроде пикселей пространства и времени. Суть парадокса в следующем: если пространство и время дискретны, то летящая стрела не может двигаться, поскольку в каждый момент (пиксель времени) она занимает некоторое определенное положение в каком-то определенном месте (конкретном наборе «пикселей» в пространстве). Следовательно, в любой конкретный момент стрела не движется. Она также не перемещается между мгновениями, так как, по предположению, между ними *нет* времени. Поэтому стрела вообще никогда не движется.

На мой взгляд, это самый тонкий и интересный из парадоксов. Философы все еще продолжают его обсуждать, но мне кажется, что на две трети Зенон прав. В мире, где пространство и время дискретны, стрела в полете вела бы себя именно так, как указывает ученый. Она бы странным образом материализовывалась в одном месте за другим по мере того, как время двигалось бы дискретными шагами. И он прав также в том, что, исходя из наших ощущений, реальный мир не таков, во всяком случае не такой, как мы его обычно воспринимаем.

Но Зенон ошибался, полагая, что движение в подобном мире невозможно. Все мы знаем это по собственному опыту просмотра кино и видео на наших цифровых устройствах. Наши мобильные телефоны, цифровые видеорекордеры и компьютерные экраны разрезают все на отдельные пиксели, и тем не менее, вопреки утверждениям Зенона, движение в этих дискретных ландшафтах прекрасно происходит. Когда все «нарезано» достаточно мелко, мы не можем различить слитное движение и его цифровое представление. Если бы мы посмотрели видео с высоким разрешением стрелы в полете,

* От лат. *discretus* «отделенный, раздельный». *Прим. пер.*

мы бы фактически увидели пиксельную стрелку, которая появляется в одном кадре за другим. Однако из-за ограничений нашего восприятия это выглядит как гладкая траектория. Иногда наши чувства действительно нас обманывают.

Конечно, если нарезать слишком крупными блоками, то разница между непрерывным и дискретным будет заметна, и это нередко утомляет. Подумайте, чем старомодные аналоговые часы отличаются от современных цифровых/механических монстров. На аналоговых часах секундная стрелка перемещается по кругу красиво и равномерно, изображая текучее время, а на цифровых — рывками: *тик, тик, тик*, изображая скачущее время.

Бесконечность может построить мост между этими весьма различными концепциями времени. Представьте цифровые часы, которые вместо одного громкого «тика» дают триллионы крохотных «тиков» в секунду. Мы уже не сможем отличить такие часы от настоящих аналоговых. Точно так же и с фильмами и видеороликами: пока кадры меняются достаточно быстро — скажем, тридцать раз в секунду, — они создают впечатление плавного потока. А если бы в секунду менялось *бесконечное* количество кадров, то поток был бы действительно плавным.

Подумайте, как записывается и воспроизводится музыка. Моя дочка недавно получила на 15-летие старомодный проигрыватель Victrola. Теперь она может слушать Эллу Фицджеральд на виниле. Это квинтэссенция аналогового опыта. Все ноты и скеты* Эллы текут так же плавно, как и тогда, когда она их пела; громкость меняется непрерывно между тихими и громкими звуками, захватывая весь диапазон между ними, и точно так же плавно меняется высота ее тона. В то же время, когда вы слушаете ее в цифровом формате, все нюансы ее музыки раздроблены на крошечные дискретные

* Скет — вид вокализа, когда голос используется для имитации музыкального инструмента. *Прим. пер.*

шажки и преобразованы в строки из 0 и 1. Но хотя концептуальные различия огромны, наши уши не в состоянии их уловить.

Таким образом, в обычной жизни пропасть между дискретным и непрерывным вполне преодолима, по крайней мере при хорошем приближении. Для многих практических целей дискретное может заменять непрерывное при достаточно мелком разбиении вещей. В идеальном мире анализа мы можем пойти еще дальше. Все непрерывное можно точно (а не приблизительно) нарезать на бесконечно тонкие бесконечно малые части. Это принцип бесконечности. С пределами и бесконечностью дискретное и непрерывное становятся единым целым.

Зенон встречается кванты

Принцип бесконечности просит нас притвориться, что все можно резать и дробить до бесконечности. Мы уже видели, насколько полезными бывают такие представления. Идея пиццы, которую можно разрезать на произвольно тонкие ломтики, помогла нам найти площадь круга. Естественно, возникает вопрос: существуют ли такие бесконечно малые вещи в реальном мире?

Квантовой механике есть что сказать по этому поводу [9]. Этот раздел современной физики описывает поведение природы в самых малых масштабах. Это самая точная физическая теория из когда-либо созданных, и она знаменита своею странностью. Ее терминология — со всеми лептонами, кварками и нейтрино — словно позаимствована у Льюиса Кэрролла. Поведение, которое она описывает, тоже часто бывает необычным. В атомном масштабе могут происходить вещи, которые никогда не случатся в макроскопическом мире.

Рассмотрим, например, с точки зрения квантовой механики загадку стены. Если бы нашим путешественником был электрон, он мог бы с некоторой вероятностью пройти сквозь стену. Сработал бы так называемый туннельный эффект. Такое действительно происходит.

В классических терминах этому трудно придать смысл, но с точки зрения квантовой механики объяснение состоит в том, что электроны описываются волнами вероятности, которые, в свою очередь, описываются уравнением, предложенным в 1925 году австрийским физиком Эрвином Шрёдингером. Решение уравнения Шрёдингера [10] показывает, что небольшая часть волны вероятности существует и по другую сторону непроницаемого барьера. Это означает наличие маленькой, но ненулевой вероятности, что электрон будет обнаружен по ту сторону барьера, как если бы он туннелировал сквозь стену. С помощью анализа мы можем рассчитать частоту, с которой происходят такие события, и эксперименты подтвердили прогнозы. Туннельный эффект реален. Альфа-частицы туннелируют, выходя из ядер урана с предсказанной квантовой механикой частотой — это альфа-распад. Туннельный эффект также играет важную роль в процессах ядерного синтеза, которые заставляют Солнце светить, поэтому жизнь на Земле частично зависит и от него. Этот эффект имеет и практические применения: на нем основана работа сканирующих туннельных микроскопов, которые позволяют ученым строить изображения отдельных атомов и манипулировать ими.

У нас нет интуитивного представления о таких событиях на атомном уровне, потому что мы — колоссальные создания, состоящие из триллионов триллионов атомов. К счастью, интуицию может заменить анализ. Вкупе с квантовой механикой он помог физикам открыть теоретическое окно в микромир. Плодами их исследований стали лазеры и транзисторы, микросхемы в компьютерах и светодиоды в телевизорах с плоским экраном.

Хотя квантовая механика во многих отношениях оперирует радикально новыми концепциями, она сохраняет традиционное предположение о непрерывности пространства и времени. Максвелл делал аналогичное предположение в своей теории электромагнитных волн, Ньютон — в теории тяготения, Эйнштейн — в теории относительности. Весь анализ, а следовательно, и вся теоретическая физика

опираются на предположение о непрерывности пространства и времени. До сих пор оно приводило к ошеломляющим успехам.

Однако есть основания полагать, что в масштабах гораздо ниже атомных пространство и время теряют непрерывный характер. Мы не знаем, что действительно происходит на этом уровне, но можем строить догадки. Может оказаться, что пространство и время так же «пикселизованы», как в парадоксе Зенона «Стрела», хотя более вероятно, что из-за квантовой неопределенности они вырождаются в беспорядочный хаос. В таких малых масштабах пространство и время могут случайным образом бурлить и волноваться. Они могут меняться, как пузырящаяся пена.

Хотя в вопросе, как представлять пространство и время в этих масштабах, пока согласия нет, есть консенсус в отношении самих этих масштабов. Они определяются тремя фундаментальными константами природы, одна из которых — гравитационная постоянная G . Она измеряет силу тяготения во Вселенной. Сначала эта константа появилась в ньютоновском законе всемирного тяготения, а затем в общей теории относительности Эйнштейна. Она будет и в любой теории, которая их заменит. Вторая постоянная $\hbar$ (читается « h с чертой») отражает силу квантовых эффектов*. Она появляется, например, в принципе неопределенности Гейзенберга и в волновом уравнении Шрёдингера, используемом в квантовой механике. Третья константа — это скорость света c . Это максимальная скорость во Вселенной. Никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей c . Эта скорость должна обязательно входить в любую теорию пространства и времени, поскольку связывает их: расстояние равно произведению скорости и времени. В 1899 году отец квантовой теории немецкий физик Макс Планк понял, что есть единственный способ объединить

* $\hbar$ — постоянная Дирака (постоянная Планка — Дирака, приведенная постоянная Планка [видимо, поэтому ее часто называют не «с чертой», а «с планкой»]). Связана с постоянной Планка h (основной константой квантовой теории) соотношением $\hbar = h/2\pi$. Используется вместо постоянной Планка, чтобы в формулах пропадало часто встречающееся число 2π . *Прим. пер.*

эти фундаментальные константы для получения единицы длины. Он пришел к выводу, что такая единица — естественная «мера длины» во Вселенной. В его честь она именуется планковской длиной [11] и определяется следующим соотношением:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}.$$

Если подставить измеренные значения $\hbar$, G и c , то планковская длина оказывается равной около 10^{-35} метра — ошеломительно малое расстояние, которое примерно в сто миллионов триллионов раз меньше диаметра протона. Соответствующее планковское время — это время, за которое свет проходит такое расстояние, и оно приблизительно равно 10^{-43} секунды. При меньших величинах пространство и время теряют смысл.

Эти числа ограничивают наши возможности деления пространства и времени. Чтобы ощутить уровень точности, о котором мы говорим, посмотрим, сколько цифр нам понадобится для проведения одного из самых экстремальных сравнений. Возьмем самое большое возможное расстояние — оцениваемый диаметр Вселенной, и разделим его на самое маленькое возможное расстояние — планковскую длину. Это невообразимо огромное отношение расстояний выражается числом, состоящим всего лишь из шестидесяти цифр. Хочу подчеркнуть — *всего* шестидесяти. И это самое большое число, которое понадобится, чтобы выразить одно расстояние через другое. Использование большего количества — скажем, сотни цифр, не говоря уже о еще бóльших числах — было бы колоссальным излишеством, не требующимся для описания каких-либо реальных расстояний в материальном мире*.

* Разумеется, если отвлечься от расстояний, то нам могут понадобиться и бóльшие числа. Скажем, если мы пожелаем сравнить планковский объем (то есть объем крохотного кубика со стороной в планковскую длину) и объем Вселенной. Поскольку объем пропорционален третьей степени длины, то вместо числа 60 получится примерно число 180. По другим оценкам, диаметр Вселенной составляет $1,4 \cdot 10^{62}$ планковских длин, а объем — $4,5 \cdot 10^{185}$ планковских объемов. *Прим. пер.*

И все же в анализе мы постоянно используем бесконечно много цифр. Уже в школе учеников просят думать о числах наподобие $0,333\dots$, причем десятичное разложение продолжается бесконечно. Мы называем эти числа действительными, хотя в них нет ничего действительного. Определение такого числа с помощью бесконечного количества знаков после запятой не имеет ничего общего с реальностью, по крайней мере в том ее понимании, которое бытует в современной физике.

Но если действительные числа недействительны, то почему математики так их любят? И почему школьники вынуждены их изучать? Потому что они нужны в анализе. С самого начала анализ упорно настаивал, что все — пространство и время, вещество и энергия, все объекты, которые когда-либо были или будут, — должно считаться непрерывным. Соответственно, все это можно и нужно выражать действительными числами. В этом идеализированном воображаемом мире мы делаем вид, что все можно без конца делить на все более мелкие кусочки. На этом предположении построена вся теория анализа. Без него нельзя вычислить пределы, а без пределов анализ бы остановился. Если бы мы использовали только десятичные дроби с не больше чем 60 цифрами после запятой, то числовая прямая была бы испещрена дырками. Дыры были бы на месте числа π , квадратного корня из 2 и многих других чисел, для выражения которых требуется бесконечное число цифр после запятой. Отсутствовала бы даже такая простая дробь, как $1/3$, потому что для выражения ее местоположения на цифровой прямой тоже требуется бесконечное число цифр ($0,333\dots$). Если мы хотим думать о всей совокупности чисел, образующих прямую, эти числа тоже должны быть действительными. Возможно, они только приближение к реальности, но они изумительно работают. Как и везде в анализе, бесконечность все упрощает и в случае бесконечных десятичных знаков после запятой.

Человек, который обуздал бесконечность

Примерно через двести лет после того, как Зенон задумался о природе пространства, времени, движения и бесконечности, еще один мыслитель счел бесконечность неотразимой. Его звали Архимед [1]. Мы уже встречались с ним, когда говорили о площади круга, но он легендарен и по многим другим причинам.

Начнем с того, что о нем ходит много забавных историй [2]. В некоторых он предстает таким чудаком-математиком. Например, историк Плутарх рассказывает [3], что Архимед настолько увлекался геометрией, что «забывал о пище и уходе за телом»*[4]. (Это определенно верно. Для многих из нас, математиков, еда и личная гигиена не входят в список приоритетов.) Из-за этого, как говорит Плутарх, ученого даже насильно заставляли принимать ванну [5]. Забавно, что он занимался этим с такой неохотой, учитывая, что именно с купанием связана история, которую знают все. По словам римского архитектора Витрувия [6], Архимед был настолько возбужден внезапным озарением во время купания, что выскочил из ванны и побежал голышом по улице, крича: «Эврика!» («Нашел!»).

Другие истории рисуют его магом военного искусства, воином-ученым — настоящим отрядом смерти из одного человека. Согласно этим легендам, когда его родной город Сиракузы в 212 году

* Плутарх. Сравнительные жизнеописания. Марцелл. Перевод С. П. Маркиша. *Прим. пер.*

до нашей эры осадили римляне, Архимед — к тому времени уже почти 70-летний старик — помогал защищать город, применяя свои знания о рычагах и блоках для создания фантастического оружия — «боевых машин», таких как крюки и гигантские краны, которые поднимали римские корабли из воды и стряхивали с них моряков, как вытряхивают песок из обуви. Плутарх описывал эту ужасающую сцену так: «Нередко взору открывалось ужасное зрелище: поднятый высоко над морем корабль раскачивался в разные стороны до тех пор, пока все до последнего человека не оказывались сброшенными за борт или разнесенными в клочья, а опустевшее судно разбивалось о стену или снова падало на воду, когда железные челюсти разжимались»* [7].

Если говорить о более серьезных вещах, то все школьники и инженеры помнят закон Архимеда (на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости) и закон рычага (предметы на противоположных плечах рычага уравновешиваются, если их массы обратно пропорциональны расстояниям от точки опоры). Обе идеи имеют бесчисленные практические приложения. Закон Архимеда объясняет, почему одни объекты плавают, а другие — нет. Он также лежит в основе теории кораблестроения, теории остойчивости судов и проектирования морских нефтебуровых платформ. А принцип рычага вы, сами того не сознавая, применяете каждый раз, когда используете ножницы для ногтей или лом.

Возможно, Архимед был потрясающим конструктором боевых машин и, несомненно, блестящим ученым и инженером, но по-настоящему в пантеон великих его вводят достижения в математике. Он проложил путь к интегральному исчислению. Глубочайшие идеи, содержащиеся в его работах, больше не встречались почти два тысячелетия. Сказать, что он опередил

* Плутарх. Сравнительные жизнеописания. Марцелл. Перевод С. П. Маркиша. *Прим. пер.*

свое время, — значит ничего не сказать. Кто-нибудь опережал свое время *настолько*?

В работах ученого постоянно появляются две стратегии. Первая — активное использование принципа бесконечности. Чтобы изучать загадки кругов, сфер и прочих криволинейных форм, Архимед всегда аппроксимировал их с помощью прямолинейных форм, состоящих из прямых и кусков плоскостей, похожих на грани драгоценных камней. Воображая все большее количество частей и делая их все меньше по размеру, он подгонял свои приближения все ближе к истине, подходя к пределу с бесконечным количеством частей. Такая стратегия требовала филигранного обращения с суммами и головоломками, поскольку для получения своих выводов ему приходилось складывать множество чисел и частей.

Вторая примечательная стратегия — сочетание математики с физикой, идеального с реальным. В частности, он объединял геометрию, науку о формах, с механикой, изучающей движение и силы. Иногда он использовал геометрию, чтобы пролить свет на механику; иногда ход мыслей бывал обратным — механические соображения рождали идеи для чистых форм. Искусно используя обе стратегии, Архимед смог глубоко проникнуть в тайну кривых.

Поимка числа π

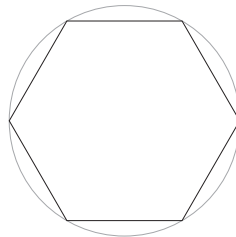
Когда я иду на работу или гуляю вечером с собакой, шагомер в моем iPhone отслеживает пройденное расстояние. Вычисления просты: приложение оценивает длину шага, исходя из моего роста, считает количество сделанных шагов, а затем перемножает эти два числа. Пройденное расстояние равно длине шага, умноженной на количество шагов.

Архимед использовал аналогичную идею для вычисления длины окружности и оценки числа π [8]. Представьте, что окружность — это дорожка для ходьбы. Путь будет выглядеть примерно так:



Каждый шаг представлен коротким отрезком. Умножив число шагов на длину одного отрезка, мы можем оценить длину пути. Конечно, это всего лишь оценка, потому что окружность на самом деле состоит не из прямых отрезков, а из дуг. Заменяя каждую дугу отрезком, мы слегка сокращаем путь. Поэтому такое приближение *занижает* реальную длину круговой дорожки. Но, по крайней мере теоретически, сделав достаточно большое количество достаточно маленьких шагов, мы можем приблизить длину дорожки с желаемой точностью.

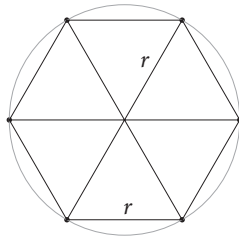
Архимед проделал ряд подобных вычислений, начав с пути из шести шагов, то есть с правильного шестиугольника*.



* Автор называет многоугольником и замкнутую ломаную из нескольких точек и соединяющих их отрезков, и плоскую фигуру, которая ограничена такой ломаной. *Прим. пер.*

Это был удобный базовый лагерь перед штурмом более сложных вычислений. Преимущество шестиугольника в том, что его периметр — сумму длин всех шести сторон — вычислить очень просто. Он в шесть раз больше радиуса круга. Почему? Потому что шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников, длина сторон которых равна радиусу круга.

Шесть сторон таких треугольников образуют периметр шестиугольника.



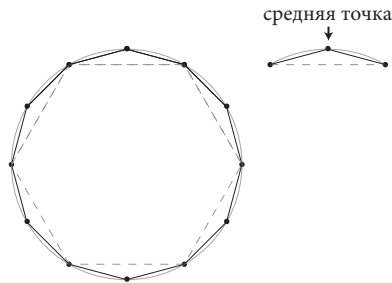
Получается, периметр в шесть раз больше радиуса, то есть $p = 6r$. Тогда, поскольку длина окружности C больше, чем периметр шестиугольника p , должно выполняться $C > 6r$.

Это рассуждение дало Архимеду нижнюю границу для числа, которое мы называем *пи*, обозначаем греческой буквой π и определяем как отношение длины окружности к ее диаметру. Так как диаметр d равен $2r$, то из неравенства $C > 6r$ следует:

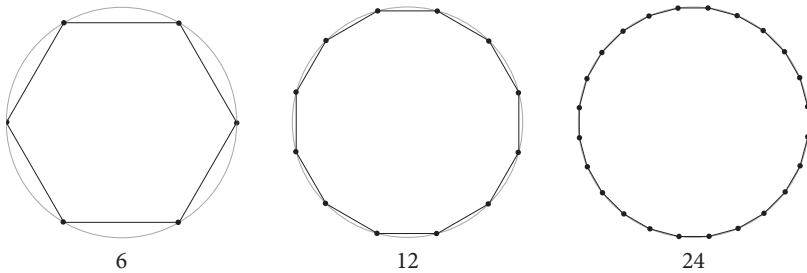
$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r} > \frac{6r}{2r} = 3.$$

Таким образом, с помощью шестиугольника можно определить, что $\pi > 3$.

Конечно, шесть — это смехотворно малое число шагов, и получившийся шестиугольник — очень грубая карикатура на окружность, но для Архимеда он был всего лишь началом. Выяснив все, что мог дать ему шестиугольник, он уменьшил длину шагов, но увеличил их количество. Он добавил средние точки всех дуг и вместо одного шага стал делать два.



Он, как одержимый, продолжал делать так снова и снова, перейдя от шести шагов к 12, потом к 24, 48 и 96, вычисляя периметр получающихся многоугольников с точностью, вызывающей мигрень.



К сожалению, по мере уменьшения длины отрезков стало все труднее вычислять их длину, поскольку ему приходилось постоянно применять теорему Пифагора, а для этого требовалось находить квадратные корни — чертовски сложная вещь, когда приходится считать вручную. Кроме того, чтобы получить не только оценку снизу, но и сверху, Архимед использовал второй многоугольник — описанный вокруг окружности; его периметр был больше, чем длина окружности.

Я хочу сказать, что вычисление Архимедом числа π было героическим подвигом — и с логической, и с арифметической точки зрения. В итоге, используя 96-угольник, вписанный в круг, и 96-угольник,

описанный около круга, он доказал, что число π больше, чем $3 + 10/71$, и меньше, чем $3 + 10/70$.

Забудьте на минуту о математике. Просто насладитесь этим результатом на визуальном уровне:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}.$$

Неизвестное и вечно непостижимое число π оказалось зажато в тиски между двумя почти одинаковыми числами, отличающимися только знаменателями 70 и 71. Одно из полученных граничных значений — число $3 + 10/70 = 22/7$ — стало знаменитым приближением для π , знакомым всем школьникам; к сожалению, многие ошибочно считают его самым числом π .

Метод, который использовал Архимед (он основывается на более ранних работах греческого математика Евдокса), сегодня известен как метод исчерпывания, когда неизвестное число π оказывается зажатым между двумя известными числами. С каждым удвоением границы сближаются, оставляя числу π все меньше места.

Окружности — это простейшие кривые в геометрии. Тем удивительнее, что определение их количественных характеристик выходит за ее рамки. Например, вы не найдете упоминания о числе π в «Началах» Евклида, написанных за одно-два поколения до Архимеда. Вы найдете там доказательство (методом исчерпывания), что отношение площади круга к квадрату его радиуса одинаково для всех кругов, но ни малейшего намека на то, что это универсальное число близко к 3,14. Такое упущение Евклида было сигналом, что тут нужно что-то более глубокое. Чтобы разобраться с числовым значением π , потребовалась новая математика, которая бы могла работать с криволинейными формами. Как измерить длину кривой, площадь криволинейной фигуры или объем криволинейного тела? Эти актуальные вопросы увлекли Архимеда и позволили сделать первые шаги по направлению к тому, что мы сейчас именуем интегральным исчислением. Число π было его первым триумфом.

Дао числа π

Современным умам может показаться странным, что число π не появляется в формуле Архимеда для площади круга, $A = rC/2$, и что он никогда не записывал уравнения типа $C = \pi d$ для выражения длины окружности через диаметр. Он избегал это делать, поскольку π не было для него числом. Это было просто отношение двух длин, длины окружности и ее диаметра. Это была какая-то величина, а не число.

Сегодня мы не проводим различия между величиной и числом, но в древнегреческой математике оно было важным. По-видимому, оно возникло из-за напряженности между дискретным (представляемым целыми числами) и непрерывным (представляемым формами). Исторические подробности неясны, но, похоже, что где-то между Пифагором и Евдоксом, между VI и IV веками до нашей эры, кто-то доказал, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной*, то есть отношение этих двух длин нельзя выразить как отношение двух целых чисел. Говоря современным языком, этот кто-то обнаружил существование иррациональных чисел [9]. Есть подозрение, что это открытие потрясло и разочаровало греков, поскольку противоречило убеждениям пифагорейцев. Если целые числа и их отношения не могут измерить даже такую несложную вещь, как диагональ квадрата, то утверждение «все есть число» оказывалось ложным. Столь обескураживающее разочарование может объяснить, почему поздние греческие математики всегда ставили геометрию выше арифметики. Числам больше нельзя было доверять. Они не годились для фундамента математики.

Древнегреческие математики поняли, что, для того чтобы описывать непрерывные величины и рассуждать о них, им нужно нечто

* Традиция приписывает открытие несоизмеримых отрезков пифагорейцу Гиппасу (V век до нашей эры). Однако неизвестно, какие именно несоизмеримые отрезки он рассматривал. *Прим. пер.*

более мощное, чем целые числа. Поэтому они разработали систему, основанную на формах и их отношениях. Она опиралась на измерение геометрических объектов — длины отрезков, площади квадратов, объемы кубов. Все это греки называли величинами. Они считали их отличными от чисел и превосходящими их.

Думаю, именно поэтому у Архимеда не было тесных отношений с числом π . Он не знал, что с ним делать. Это было странное сверхъестественное творение, куда более экзотичное, нежели любое число.

Сегодня мы считаем π числом — действительным числом, для записи которого требуется бесконечное количество знаков после запятой, — причем числом захватывающе интересным. Моих детей оно просто заинтриговало. Они часто смотрели на тарелку, висящую на стене нашей кухни, на которой цифры числа π бежали по ободку, а затем сходились по спирали к центру, уменьшаясь в размерах по мере того, как пропадали в этом водовороте. Для детей очарование заключалось в выглядящей случайно последовательности цифр без каких-либо закономерностей и повторений, продолжающейся вечно — настоящей бесконечностью на тарелке. Первые несколько цифр в бесконечном десятичном представлении числа π таковы:

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749...

Мы никогда не узнаем всех цифр числа π . Тем не менее они ожидают своего открытия. На момент написания этой книги лучшие компьютеры мира вычислили 22 триллиона цифр. И все же 22 триллиона — ничто по сравнению с бесконечным количеством цифр, определяющих π . Подумайте, насколько это тревожно с философской точки зрения. Я сказал, что цифры числа π есть, но где именно? В материальном мире их нет. Они существуют в какой-то платоновской реальности вместе с абстрактными понятиями вроде истины и справедливости.

В числе π есть нечто парадоксальное. С одной стороны, оно представляет собой порядок, воплощенный в форме круга, который

долгое время считался символом совершенства и вечности. С другой же стороны, π — непокорное, внешне неопрятное число, его цифры не подчиняются никаким явным правилам, по крайней мере тем, которые мы можем воспринимать*. Число π неуловимо и загадочно, навеки недостижимо. Столь завораживающим его делает сочетание в нем порядка и беспорядка.

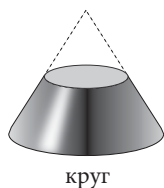
По большому счету π — это дитя анализа. Оно определяется как недостижимый предел нескончаемого процесса. Но, в отличие от последовательности многоугольников, неуклонно приближающихся к окружности, или незадачливого пешехода, проходящего половины половин пути к стене, у π нет предела, который мы можем узнать. И тем не менее π существует. Вот оно, четко определенное как отношение двух длин, лежащих перед нами: длины окружности и ее диаметра. Это отношение определяет π , причем максимально ясно, хотя само число ускользает сквозь наши пальцы.

Со своими началами инь и ян число π напоминает весь анализ в миниатюре. Это портал между круглым и прямолинейным, бесконечно сложное число, баланс между порядком и хаосом. В свою очередь, анализ использует бесконечное для изучения конечного, неограниченное для изучения ограниченного, прямое для изучения кривого. Принцип бесконечности — ключ к разгадке тайны кривых, и впервые он возник здесь, в загадке π .

* Предполагается, что число π нормально, то есть с одинаковой асимптотической частотой в нем встречаются все цифры, все комбинации из двух цифр, из трех цифр и вообще из любого числа цифр. В частности, это означает, что в нормальном числе рано или поздно встретится любая заданная последовательность цифр (например, номер вашего телефона или закодированная числами полная Британская энциклопедия). Однако пока нормальность π не доказана. *Прим. пер.*

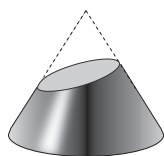
Кубизм встречается с анализом

Архимед углубился в загадку кривых, снова руководствуясь принципом бесконечности, в своем труде под названием «Квадратура параболы» [10]. Парабола — это кривая, которую описывает мяч при броске или струйка воды из фонтана. На самом деле эти дуги в реальном мире можно считать параболами только приближенно. Согласно Архимеду, настоящая парабола получается при сечении конуса плоскостью*. Представьте себе нож, который разрезает колпак или конический бумажный стаканчик; при разрезе могут получиться разные виды кривых — в зависимости от того, под каким углом нож будет резать конус. Разрез параллельно основанию конуса образует окружность.



круг

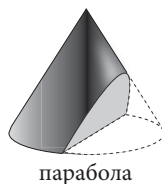
Если провести разрез немного наклонно, получится эллипс.



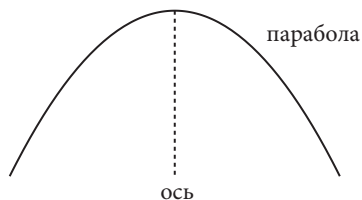
эллипс

* Архимед не был первооткрывателем параболы и других конических сечений. Традиционно считается, что это сделал древнегреческий математик Менахм (примерно 380–320 до нашей эры). *Прим. пер.*

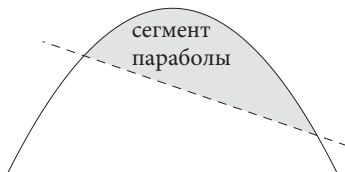
Если угол разреза будет таким же, как у самого конуса, получится парабола.



Если посмотреть на плоскость разреза, то парабола выглядит как изящная симметричная кривая. Линия симметрии называется осью параболы.

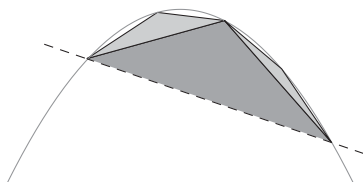


В своем труде Архимед поставил перед собой задачу вычислить площадь сегмента параболы. Говоря современным языком, сегментом параболы называется криволинейная область, лежащая между параболой и пересекающей ее прямой.



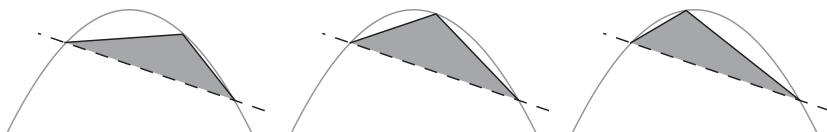
Термином «квадратура» называется определение площади какой-либо фигуры (изначально — построение квадрата, равновеликого этой фигуре), то есть поиск способа выразить ее через более простые формы — квадрат, треугольник, прямоугольник и прочие прямолинейные фигуры.

Архимед использовал потрясающую стратегию. Он представил сегмент параболы как бесконечное множество треугольных черепков, склеенных вместе, словно осколки разбитого глиняного горшка.

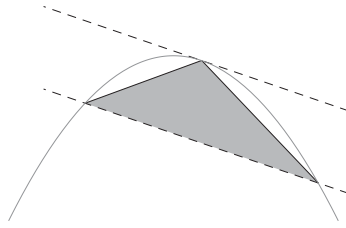


Эти осколки образуют бесконечную иерархию размеров: один большой треугольник, два поменьше, четыре еще меньше и так далее. Ученый планировал найти их площади, а затем сложить их и вычислить интересующую его площадь. Требовался калейдоскопический скачок художественного воображения, чтобы представить плавный сегмент в виде мозаики из угловатых кусков. Если бы Архимед был художником, он стал бы первым кубистом.

Для реализации своей стратегии Архимеду требовалось вычислить площадь всех осколков. Но как точно определить эти осколки? Ведь параболический сегмент можно разбивать на куски бесконечным числом способов — так же как бесконечным числом способов можно разбить тарелку на части. Самый большой осколок может выглядеть вот так, или так, или вот так:

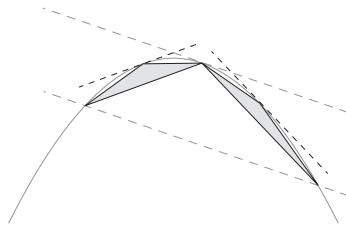


Ученому пришла в голову блестящая идея. Блестящая потому, что она создавала закономерность, которую можно было сохранять на всех уровнях иерархии. Он представил, как секущая линия в основании сегмента скользит вертикально, сохраняя свой наклон, пока не будет соприкасаться с параболой в единственной точке неподалеку от вершины.



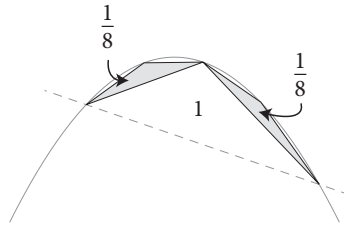
Такая особая точка называется точкой касания. Она определяет третью вершину большого треугольника, где две другие — точки пересечения секущей и параболы.

Архимед использовал эту же тактику для определения треугольников на *каждом* этапе в иерархии. Например, на втором этапе треугольники выглядели так:



Обратите внимание, что теперь роль наклонной линии, пересекавшей треугольник на предыдущем этапе, играют стороны большого треугольника.

Затем Архимед использовал известные геометрические факты о параболах и треугольниках, чтобы узнать, как площади треугольников одного уровня связаны с площадью треугольников предыдущего уровня. Он доказал, что площадь каждого нового треугольника составляет $1/8$ площади породившего его треугольника. Таким образом, если считать, что площадь первого, самого крупного, треугольника 1 (пусть он будет нашей единицей площади), то площадь двух дочерних треугольников будет $1/8 + 1/8 = 1/4$.



На каждом следующем этапе справедливо то же правило: дочерние треугольники всегда составляют в сумме четверть площади от родительского. Следовательно, общая площадь сегмента параболы, состоящая из всего бесконечного количества осколков, должна равняться

$$\text{Площадь} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

В этом бесконечном ряду каждый член вчетверо меньше предыдущего.

Существует простой способ вычислить сумму членов такого ряда, известного как геометрическая прогрессия. Хитрость состоит в том, чтобы избавиться от бесконечного числа слагаемых. Для этого умножим обе части уравнения на 4 и вычтем из получившегося равенства исходное. Смотрите: умножение всех членов ряда на 4 дает:

$$\begin{aligned} 4 \times \text{Площадь} &= 4 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) = \\ &= 4 + \frac{4}{4} + \frac{4}{16} + \frac{4}{64} + \dots = \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \\ &= 4 + \text{Площадь}. \end{aligned}$$

Чудо происходит между предпоследней и последней строками. В предпоследней строке, подобно фениксу, возродилось выражение для исходной площади: $\text{Площадь} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ и поэтому мы получаем

$$4 \times \text{Площадь} = 4 + \text{Площадь}.$$

Вычитая из обеих частей величину *Площадь*, получаем $3 \times \text{Площадь} = 4$, откуда $\text{Площадь} = 4/3$. Другими словами, площадь сегмента параболы составляет $4/3$ от площади самого большого треугольника.

Рассуждение о сыре

Архимед не одобрил бы вышеприведенный трюк. Он получил тот же результат другим путем, используя рассуждение под названием *двойное доказательство от противного*. Он доказывал, что площадь сегмента параболы не может быть меньше $4/3$ или больше $4/3$, поэтому она должна быть равна $4/3$. Как позднее советовал Шерлок Холмс, «отбросьте все невозможное, и то, что останется, будет истинной, какой бы невероятной она ни казалась» [11].

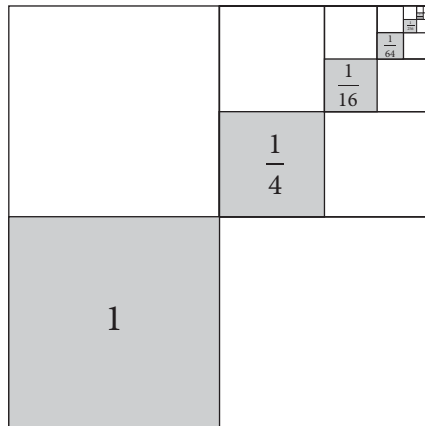
Принципиально важно здесь то, что Архимед устранил невозможное с помощью рассуждений, основанных на *конечном* количестве осколков. Он показал, что суммарная площадь всех осколков может отличаться от числа $4/3$ сколь угодно мало — просто надо взять достаточно большое их количество. Поэтому Архимед не прибегал к бесконечности. Все в его доказательстве было железным и вполне соответствует современным стандартам строгости.

Суть его аргументов легко понять, если представить их в виде повседневных терминов. Предположим, что три человека хотят поделить между собой четыре одинаковых ломтика сыра.



Самым здравым решением было бы дать каждому по кусочку, а оставшийся разрезать на три равные части. Это честно: каждый получит по $1 + 1/3 = 4/3$ ломтика.

Но предположим, что эти трое оказались математиками, которые слоняются вокруг стола с едой перед семинаром, разглядывая последние четыре ломтика сыра. Самый сообразительный из троих, по совпадению носящий имя Архимед, может предложить такое решение: «Ребята, берем по одному куску, а оставшийся будем делить. Евклид, разрежь его на *четыре* части, а не на три. Теперь опять берем каждый по четверти, а оставшийся делим. Продолжаем так делать, пока оставшаяся крошка не перестанет нас интересовать. Хорошо? Евдокс, прекрати ныть».



Сколько всего сыра съест каждый из них, если процесс будет продолжаться бесконечно? После первого этапа каждый математик съест один ломтик. После второго, когда поделили четверть, у всех по $1 + 1/4$ ломтика. После третьего этапа каждый съест по $1 + 1/4 + 1/16$ ломтика. И так далее. Если дележ будет продолжаться вечно, каждому достанется $1 + 1/4 + 1/16 + \dots$ ломтиков сыра. А поскольку эта величина равна трети от исходного количества сыра, то $1 + 1/4 + 1/16 + \dots = 4/3$.

В «Квадратуре параболы» Архимед дал очень близкое рассуждение, включая диаграмму с квадратами разного размера, но нигде не прибегал к бесконечности и не пользовался аналогами многоточия, чтобы показать бесконечную сумму. Наоборот, он рассуждал в терминах конечных сумм, так что его изложение было безупречно строгим. Его ключевое соображение заключалось в том, что крохотный квадратик в правом верхнем углу — текущий остаток, который еще предстоит разделить, — можно сделать меньше любого заданного числа после достаточно большого, но конечного числа этапов. И, согласно аналогичным рассуждениям, величину $1 + 1/4 + 1/16 + \dots + 1/4n$ (общее количество сыра, которое получает каждый математик) можно сделать сколь угодно близкой к числу $4/3$, если взять достаточно большое n . Поэтому единственно возможный ответ — $4/3$.

Метод

В этот момент я начинаю испытывать настоящее расположение к Архимеду, поскольку в одном из своих сочинений* он делает то, на что решаются немногие гении: приглашает нас посмотреть, как он мыслит. (Я использую здесь настоящее время, потому что этот труд воспринимается так, словно ученый говорит с нами сегодня). Он делится своей уязвимой интуицией и выражает надежду, что будущие математики станут использовать ее для решения задач, которые ускользнули от него. Сегодня этот секрет известен как *метод***.

Я никогда не слышал о нем на занятиях по анализу. Нас ему не учат. Но я нахожу его историю и саму изначальную идею захватывающей и уникальной.

* Практически все труды Архимеда содержатся в его письмах. *Прим. пер.*

** Полное название этой работы Архимеда — «Метод механических теорем». Автор называет методом и саму работу, и содержащийся в ней способ решения задач. *Прим. пер.*

Архимед пишет о «Методе» в письме своему другу Эратосфену, библиотекарю в Александрии и единственному математику того времени, способному его понять. Он признается, что хотя его метод и не обеспечивает реальной демонстрации результатов [13], которые его интересуют, он помогает установить истину. Это наделяет его интуицией. Как он говорит, «если мы с помощью этого метода заранее получили какие-то знания по нужному вопросу, получить доказательство проще, чем находить его без предварительного знания». Другими словами, разминаясь, играя с методом, Архимед приобретает ощущение территории. И это приводит его к надежным доказательствам.

Вот такой честный отчет о том, что значит заниматься творческой математикой. Математики не придумывают доказательств сразу. Сначала срабатывает интуиция. Строгость приходит позднее. Эту решающую роль интуиции и воображения часто не учитывают в школьных курсах геометрии, однако она важна для всей творческой математики.

Архимед с надеждой заключает, что «среди нынешних и будущих поколений найдутся те, кто с помощью описанного здесь метода сможет найти другие теоремы, которые не выпали на нашу долю» [14]. От этих слов у меня на глаза наворачиваются слезы. Этот непревзойденный гений, ощущающий конечность своей жизни на фоне бесконечности математики, признает, что еще предстоит очень много сделать и что существуют «другие теоремы, которые не выпали на нашу долю». Все мы, математики, это понимаем. Наш предмет бесконечен. Он учит смирению даже самого Архимеда.

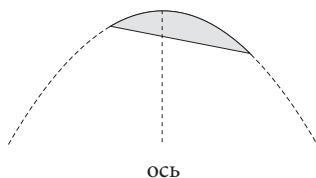
Первое упоминание о *методе* появляется в начале сочинения о квадратуре параболы, перед кубистским доказательством с помощью осколков. Архимед признает, что именно метод привел его к этому доказательству и прежде всего к числу $4/3$.

Что же это за метод и что в нем такого личного, блестящего и трансгрессивного? Метод *механический*; Архимед ищет площадь сегмента параболы, мысленно его *взвешивая*. Он думает об этой

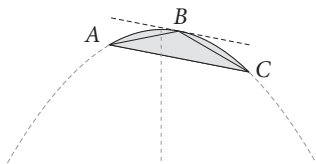
криволинейной области как о материальном предмете — я представляю его в виде тонкого листа металла, обрезанного до желаемой параболической формы, — а затем помещает его на один конец воображаемых весов. Или, если вам так удобнее, представьте его на конце воображаемой доски-качалки. Затем он выясняет, как уравновесить этот предмет с помощью фигуры, которую он уже умеет взвешивать, — треугольника. Отсюда он выводит площадь первоначального сегмента параболы.

Это еще более творческий подход, чем его кубистско-геометрическая техника осколков и треугольников, которую мы обсуждали ранее, поскольку в этом случае Архимед собирается построить для вычислений воображаемую доску-качалку, причем так, чтобы она соответствовала размерам параболы. В совокупности его идеи дадут ответ, который он ищет.

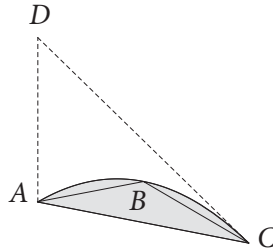
Он начинает с сегмента параболы и наклоняет его так, чтобы ось симметрии параболы была вертикальной.



Затем он строит качалку. Инструкция по эксплуатации гласит: *нарисуйте большой треугольник внутри сегмента параболы и обозначьте его ABC*. Как и в кубистском доказательстве, он будет служить стандартной мерой площади. Мы будем сравнивать с ним площадь сегмента и увидим, что она в $4/3$ раза больше.

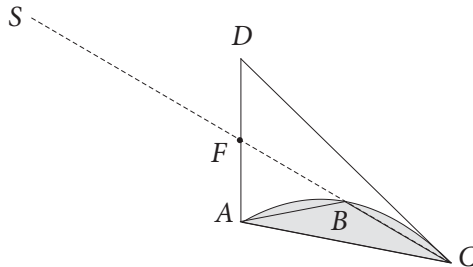


Теперь заключим наш сегмент в треугольник гораздо большего размера, ACD .

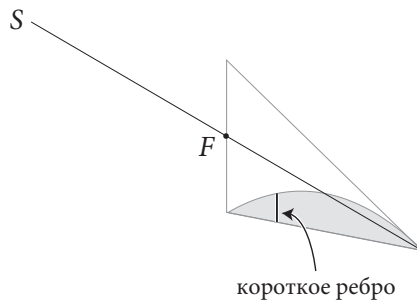


Верхняя сторона этого треугольника выбирается как касательная прямая к параболе в точке C . Основание треугольника — линия AC . Левая же сторона — линия, идущая от A вертикально вверх до пересечения с верхней стороной в точке D . С помощью обычной евклидовой геометрии Архимед доказывает, что площадь этого большого внешнего треугольника ACD вчетверо превышает ABC . (Этот факт станет важным позже, а пока возьмем его на заметку.)

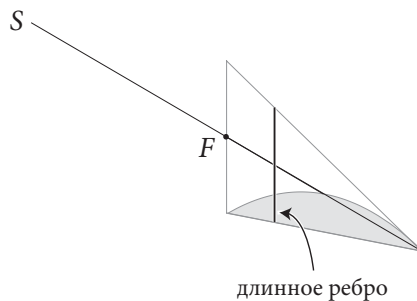
Следующий этап — строительство остальной части качалки: доски, двух сидений и точки опоры. Доска — это линия, соединяющая два сиденья. Она начинается в точке C (первое сиденье), проходит через B , пересекает границу внешнего треугольника в F (это будет точка опоры) и продолжается далее до точки S (второе сиденье), которая определяется как $FS = FC$. Иными словами, F — середина отрезка SC .



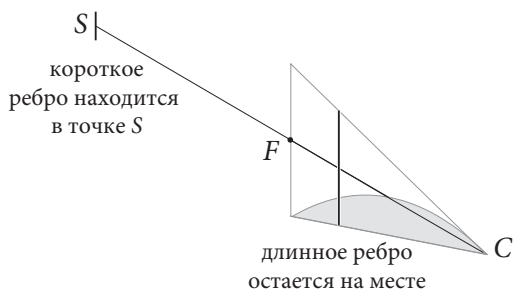
И вот тут появляется ошеломляющая идея, лежащая в основе всей концепции. Используя известные факты о параболах и треугольниках, Архимед доказывает, что можно уравновесить большой внешний треугольник относительно сегмента параболы, если представлять его *по одной вертикальной линии за раз*. Он считает обе фигуры состоящими из бесконечного количества параллельных отрезков, похожих на бесконечно тонкие планки или ребра. Вот типичная пара вертикальных линий-ребер. Короткое ребро соединяет основание с параболой,



а длинное ребро — с верхней стороной внешнего треугольника.



Суть идеи состоит в том, что эти ребра идеально уравнивают друг друга, как дети, качающиеся на доске, если они находятся в правильных точках. Архимед доказывает, что если сдвинуть короткое ребро до точки S , а длинное оставить на своем месте, то они уравниваются.



То же самое верно для *любого* вертикального кусочка. Неважно, какой вертикальный срез вы сделаете, короткое ребро всегда уравновесит длинное, если вы поместите его в точку S , а длинное оставите на месте.

Поэтому две фигуры уравнивают друг друга: ребро за ребром. Если перенести все ребра параболы в S , то они уравнивают все ребра внешнего треугольника ACD . Соответственно, вся масса параболы, перемещенная в S , уравнивает внешний треугольник, находящийся там, где он есть.

Далее Архимед заменяет весь внешний треугольник одной эквивалентной точкой под названием центр тяжести треугольника. Эта точка — словно «заместитель» треугольника. Весь треугольник воздействует на доску качелей так, будто вся его масса сосредоточена в одной точке — центре тяжести. Этот центр, как Архимед уже показал в другой работе, лежит внутри треугольника на линии FC в точке, расстояние от которой до F ровно в три раза меньше, чем расстояние SF .

Итак, у нас получается рычаг, где вся масса параболы в точке S уравнивает массу треугольника (сосредоточенную в одной точке), причем длинное плечо рычага втрое длиннее короткого. Следовательно, по закону рычага масса параболы втрое меньше площади треугольника. Это означает, что площадь сегмента параболы составляет

треть от площади треугольника ACD . Однако ранее мы уже взяли на заметку тот факт, что ACD вчетверо больше ABC . Поэтому площадь сегмента параболы составляет $4/3$ от площади треугольника ABC внутри него... Тот же результат, что мы получили, находя площадь с помощью бесконечного ряда из треугольных осколков!

Надеюсь, мне удалось передать всю психоделичность этого рассуждения. Здесь Архимед уже больше похож не на гончара, собирающего черепки, а на мясника. Он делит ткань параболической области, по одной вертикальной полоске за раз, и подвешивает эти бесконечно тонкие полоски на крюке в точке S . Общий вес мяса остается таким же, как если бы это был исходный цельный сегмент параболы. Просто он порезал исходную фигуру на множество вертикальных тончайших полосок, висящих на одном крюке. (Хм, странный образ. Возможно, нам лучше придерживаться терминологии доски-качалки?!)

Почему я назвал это рассуждение трансгрессивным? Потому что оно оперирует актуальной бесконечностью. На каком-то этапе Архимед открыто описывает внешний треугольник как «составленный из всех параллельных линий» [15]. Конечно, в греческой математике это было табу — вся эта бесконечная совокупность вертикальных линий, все эти вертикальные ребра. Он открыто представляет треугольник как уже завершенную бесконечность — совокупность ребер. И, делая это, выпускает голема на свободу.

Точно так же он описывает сегмент параболы — как «состоящий из всех параллельных линий, нарисованных внутри фигуры» [16]. Привлечение актуальной бесконечности, по его оценке, понижает статус этого рассуждения до эвристического — то есть это средство найти ответ, но не доказать его правильность. В письме Эратосфену он преуменьшает значение метода, говоря, что это не более чем своего рода указание на то, что вывод будет верным [17].

Каким бы ни был статус метода Архимеда, он обладает свойством *e pluribus unum*. Это латинское выражение, означающее

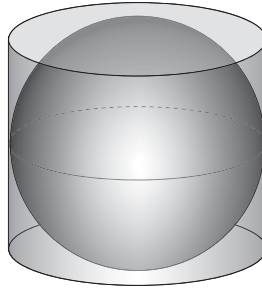
«из многих — единое», используется как девиз на гербе США. Из бесконечного множества отрезков, составляющих параболу, возникает единая область. Думая о ней как о массе, Архимед перемещает ее, отрезок за отрезком, на левое сиденье доски-качалки. Теперь бесконечность отрезков представлена массой, сосредоточенной в одной точке. Единое заменяет многое, представляя его точно и верно.

То же самое справедливо и для уравнивающего внешнего треугольника на правой стороне доски. Континуум вертикальных линий превращается в одну точку — центр тяжести. Она тоже заменяет целое. Бесконечность схлопывается в единое, *e pluribus unum*. Только это не поэзия и не политика, а истоки интегрального исчисления. Треугольники и сегменты парабол каким-то таинственным образом в каком-то смысле, который Архимед не смог строго определить, явно эквивалентны бесконечности из вертикальных линий.

Хотя Архимеда, похоже, смущает его заигрывание с бесконечностью, у него хватает смелости в этом признаться. Любой, кто попытается измерить криволинейную форму — найти длину границы или объем, который она заключает, — вынужден сражаться с пределом бесконечных сумм бесконечно малых частей. Осторожные люди могут попытаться обойти эту необходимость с помощью метода исчерпывания. Но на деле от нее никуда не деться. Справляться с криволинейными формами — так или иначе значит справляться с бесконечностью. Архимед открыто об этом говорит. Когда ему нужно, он может нарядить свои доказательства в респектабельные одежды, используя конечные суммы и метод исчерпывания. Но в глубине души он лукавит. Он признает, что мысленно взвешивает фигуры, мечтает о рычагах и центрах тяжести, взвешивая области и твердые тела отрезок за отрезком, по одному бесконечно малому кусочку за раз.

Архимед применил этот метод ко многим другим задачам о криволинейных формах. Например, для поиска центра тяжести полусферы, параболоида и сегментов эллипсоидов и гиперболоидов. Его любимый результат, который касался соотношения объемов и площадей

поверхности шара и цилиндра [18], нравился ему настолько, что он завещал высечь его на могильном камне. Представьте себе шар, точно размещенный в цилиндрической коробке (шар, *вписанный* в цилиндр).



С помощью метода Архимед установил, что объем вписанного в цилиндр шара составляет $\frac{2}{3}$ от объема цилиндра, а площадь поверхности этого шара — $\frac{2}{3}$ от площади поверхности описанного цилиндра. Обратите внимание, что он не дал *формул* для объема или площади поверхности сферы, как мы сделали бы сегодня. Он выразил свой результат в виде пропорций. Это классический греческий стиль. Все выражается в пропорции. Область сравнивали с другой областью, а объем — с другим объемом. И когда в пропорциях получились небольшие целые числа, как здесь (3 и 2) или в случае сегмента параболы (4 и 3), это было источником непередаваемого удовольствия. В конце концов, эти же самые соотношения 3:2 и 4:3 имели особое значение для древних греков из-за их роли в пифагорейской теории музыкальной гармонии. Вспомните, что, если зацепить две струны с соотношением длин 3:2, они звучат гармонично, будучи разделенными через интервал, известный как квинта. Аналогично струны в соотношении 4:3 дают кварту. Такие числовые совпадения между гармонией и геометрией, должно быть, восхищали Архимеда.

Его слова в трактате «О шаре и цилиндре» показывают, насколько ему нравится результат: «Разумеется, эти свойства были присущи

этим телам всегда, но они остались неизвестными всем геометрам» [19]. Не обращайтесь внимания на нотки гордости, а сосредоточьтесь на его утверждении, что «свойства были присущи этим телам всегда, но они остались неизвестными». Здесь он выражает философию математики, близкую сердцам всех математиков. Мы чувствуем, что *открываем* математику. Результаты уже существуют и ждут нас. Они всегда были присущи телам. Мы их не изобретаем. В отличие от Боба Дилана или Тони Моррисона, мы не пишем музыку или романы, которых раньше не было, а открываем уже имеющиеся факты, которые присущи изучаемым нами объектам. Хотя у нас есть творческая свобода изобретать сами объекты — создавать такие идеализации, как сферы, круг и цилиндры, как только мы это делаем, они начинают жить собственной жизнью.

Когда я читаю, как Архимед радуется обнаружению соотношений для площади поверхности и объема шара, я испытываю аналогичные ощущения. Или, скорее, понимаю, что он чувствовал то же самое, что и все мои коллеги-математики. Хотя нам говорят, что «прошлое — это чужая страна»*, она не может быть чужой во всех отношениях. Люди, о которых мы читаем у Гомера и в Библии, очень похожи на нас. То же самое, по-видимому, верно и в отношении древнегреческих математиков, по крайней мере Архимеда, единственного, кто впустил нас в свое сердце.

Двадцать два века назад, написав письмо своему другу Эратосфену, библиотекарю в Александрии, Архимед, по сути, отправил ему математическое послание в бутылке, которое тогда практически никто не мог оценить, но он надеялся, что оно благополучно преодолеет моря времени. Он делился своей интуицией, своим методом, желая, чтобы он помог будущим поколениям математиков «найти другие теоремы, которые не выпали на нашу долю». Шансы были против

* «Прошлое — чужая страна, здесь все по-другому» — первая фраза романа Лесли Хартли «Посредник» (1953). Впоследствии выражение «прошлое — чужая страна» стало названием книги Дэвида Лоуэнталя (1985). *Прим. пер.*

него. Времена всегда были жестокими. Царства рушились, библиотеки сжигались, рукописи портились. Ни одна копия «Метода» не пережила периода Средневековья. Хотя Леонардо да Винчи, Галилей, Ньютон и другие гении Возрождения и научной революции изучали то, что осталось от трудов Архимеда, у них не было возможности прочитать «Метод». Считалось, что он безвозвратно утерян.

А затем каким-то чудом его нашли.

В октябре 1998 года потрепанный средневековый молитвенник был выставлен на аукцион Christie's и продан анонимному частному коллекционеру за 2,2 миллиона долларов. Под латинскими молитвами просматривались едва различимые геометрические чертежи и математический текст, написанный на греческом языке в X веке. Книга оказалась палимпсестом: в XIII веке ее пергаментные листы были вымыты и очищены от греческого текста ради написанных поверх литургий на латыни. К счастью, греческий текст не был полностью уничтожен. Это оказалась единственная сохранившаяся копия «Метода» Архимеда*.

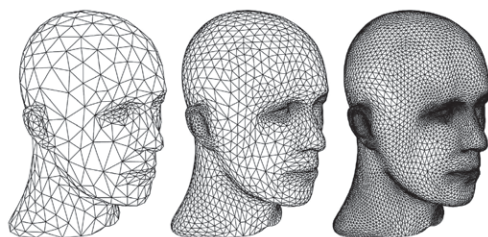
На палимпсест Архимеда [20], как сейчас называют эту рукопись, впервые обратили внимание в 1899 году, когда он находился в православной библиотеке в Константинополе. Ренессанс и научную революцию он пролежал незамеченным в лавре Саввы Освященного недалеко от Вифлеема. Сейчас он находится в художественном музее Уолтерса в Балтиморе, где был с любовью отреставрирован и исследован с применением новейших технологий воссоздания изображений**.

* Кроме «Метода математических теорем», палимпсест содержит еще несколько работ Архимеда, из которых две («Стомахион» и «О плавающих телах») также сохранились только в этом документе. *Прим. пер.*

** Документ, хранившийся в лавре, был известен и раньше. Греческий текст в нем заметили еще в 1840-х годах. То, что текст принадлежит Архимеду, установил в 1906 году датский ученый Йохан Гейберг, который сфотографировал и издал эти работы в собрании сочинений Архимеда в 1910–1915 годах. После этого палимпсест выпал из истории и всплыл только на аукционе Christie's. К сожалению, к этому времени оказалось, что уже в XX веке некоторые страницы пропали, а один из владельцев добавил несколько иллюстраций, навсегда испортивших текст под ними. С 1998 года началось активное изучение документа. *Прим. пер.*

Архимед сегодня: от компьютерной анимации до лицевой пластики

Наследие Архимеда живо и сегодня [21]. Взгляните на анимированные фильмы [22], которые так любят смотреть наши дети. Персонажи «Шрека», «В поисках Немо» или «Истории игрушек» кажутся такими живыми и настоящими отчасти потому, что воплощают идею Архимеда: любую гладкую поверхность можно надежно аппроксимировать треугольниками. Например, вот три триангуляции головы манекена [23]:



Чем больше треугольников мы возьмем и чем меньше их размер, тем лучше становится приближение.

То, что верно для манекенов, верно и для огров, и для рыб-клоунов, и для игрушечных ковбоев. Подобно тому как Архимед использовал мозаику из бесконечного количества осколков, чтобы представить сегмент гладкой криволинейной параболы, современные аниматоры из DreamWorks создают круглый живот Шрека и его милые трубообразные уши из десятков тысяч многоугольников. Еще больше потребовалось для сцены турнира, где Шрек [24] сражался с местными громилами: каждый ее кадр требовал свыше 45 миллионов многоугольников [25]. Но в готовом фильме их следов нигде нет. Как учит нас принцип бесконечности, прямое и угловатое может олицетворять изогнутое и гладкое.

Когда примерно через десять лет вышел фильм «Аватар» [26], уровень многоугольной детализации стал запредельным. По настоянию режиссера Джеймса Кэмерона аниматоры использовали около миллиона многоугольников, чтобы изобразить каждое растение в воображаемом

мире Пандоры. А учитывая, что действие происходило в пышных виртуальных джунглях, там насчитывалось множество растений... и множество многоугольников. Неудивительно, что производство «Аватара» обошлось в триста миллионов долларов. Это был первый фильм, в котором многоугольники использовались миллиардами [27].

В самых ранних компьютерных анимационных фильмах многоугольников было куда меньше. Тем не менее в то время вычисления казались ошеломляющими. Возьмем «Историю игрушек» [28], вышедшую в 1995 году. Одному аниматору тогда требовалась неделя, чтобы синхронизировать восьмисекундный кадр. На создание всего фильма ушло четыре года и 800 тысяч часов компьютерного времени. Как говорил в интервью журналу Wired соучредитель студии Pixar Стив Джобс, «над этим фильмом работает больше людей с ученой степенью, чем над любым другим в истории кино» [29]. Вскоре после «Истории игрушек» вышел первый анимационный ролик с человеком в главной роли — «Игра Джери» [30]. Эта забавная и грустная история одинокого старичка, который играет сам с собой в шахматы в парке, получила в 1998 году «Оскар» за лучший короткометражный анимационный фильм.



Как и другие персонажи, созданные компьютером, Джери был сконструирован из угловатых форм. В начале этого раздела я показал

компьютерную графику лица из все большего количества треугольников. Примерно таким же образом аниматоры студии Pixar смоделировали голову Джери из сложного многогранника, состоявшего из примерно 4500 вершин, соединенных ребрами и гранями, как драгоценный камень. Аниматоры сильнее и сильнее делили эти грани, чтобы получить все более детальное изображение. Этот процесс занял намного меньше компьютерной памяти, чем методы, использованные ранее, и позволял делать анимацию гораздо быстрее [31]. На тот момент это был революционный прорыв в компьютерной анимации, но по духу — продолжение идей Архимеда. Напомним: для того чтобы оценить число π , Архимед начал с шестиугольника, затем перешел к двенадцатиугольнику. После следующего деления получился многоугольник с 24 сторонами, затем 48-угольник и наконец 96-угольник; так происходило постепенное приближение к предельной фигуре — окружности. Точно так же, многократно разделяя свой многогранник, аниматоры Джери аппроксимировали морщинистый лоб персонажа, его торчащий нос и складки кожи на шее. Повторяя этот процесс достаточное количество раз, они смогли сделать Джери таким, каким он должен быть — похожим на куклу персонажем, передающим широкий спектр человеческих чувств.

Через несколько лет конкурент Pixar, компания DreamWorks, сделала следующий шаг на пути к реализму и эмоциональной выразительности в своей истории о дурно пахнущем, ворчливом героическом огре по имени Шрек.



Хотя Шрек никогда не существовал вне компьютера, выглядел он почти как человек. Отчасти потому, что аниматоры постарались воспроизвести анатомию человека. Под виртуальной кожей они создали виртуальные мышцы, жир, кости и суставы. Все было сделано настолько добросовестно, что, когда Шрек открывал рот, чтобы сказать что-нибудь, кожа на его шее образовывала второй подбородок [32].

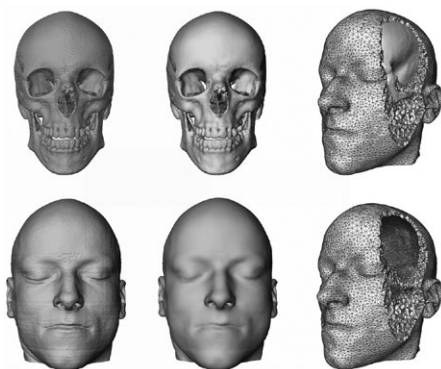
Это подводит нас к другой области, где идея Архимеда о приближении прямолинейными формами оказалась полезной, — пластической хирургии лица [33] для пациентов с неправильным прикусом, смещением челюстей и другими врожденными пороками. В 2006 году немецкие математики Петер Дойфлхард, Мартин Вайзер и Стефан Захов сообщили о результатах своей работы по применению анализа и компьютерного моделирования для прогнозирования результатов сложных операций на лице.

Первым шагом было построение точной карты структуры лицевых костей пациента. Для этого использовалась компьютерная (КТ) или магнитно-резонансная (МРТ) томография. Результаты давали информацию о трехмерной конфигурации лицевых костей черепа, с помощью которой исследователи строили компьютерную модель лица пациента. Эта модель была не просто геометрически точной; она была биомеханически точной. Она включала реалистичные оценки свойств кожи и мягких тканей — жиров, мышц, сухожилий, связок и кровеносных сосудов. С помощью компьютерной модели хирургии могли проводить операции на виртуальных пациентах, подобно тому как пилоты оттачивают мастерство на летных тренажерах. Виртуальные кости лица, челюсти и черепа можно резать, перемещать, наращивать или полностью удалять. Компьютер рассчитывал, как в ответ на появление новой костной структуры будут перемещаться и перестраиваться виртуальные мягкие ткани.

Результаты такого моделирования полезны по нескольким причинам. Они предупреждают хирургов о возможных неблагоприятных воздействиях процедуры на такие уязвимые структуры, как нервы,

кровеносные сосуды и корни зубов. Они также показывают, как будет выглядеть лицо пациента после операции, поскольку модель предсказывает, как переместятся мягкие ткани после выздоровления пациента. Еще одно преимущество — это позволяло хирургам лучше подготовиться к реальной операции в свете смоделированных результатов. А пациенты могли более взвешенно принимать решение о необходимости операции.

Идеи Архимеда проявились, когда исследователи смоделировали гладкую двумерную поверхность черепа с помощью огромного количества треугольников. Мягкие ткани создавали собственные геометрические проблемы. В отличие от черепа, мягкие ткани полностью заполняют трехмерный объем. Они наполняют сложное пространство между кожей лица и черепом. Ученые представили эту ткань сотнями тысяч тетраэдров — трехмерных аналогов треугольников. На изображении внизу поверхность черепа аппроксимируют примерно 250 000 треугольников (они слишком малы, чтобы их разглядеть), а объем мягких тканей включает 650 000 тетраэдров.



Массив тетраэдров позволил исследователям предсказать, как поведут себя после операции мягкие ткани пациента. Грубо говоря, мягкие ткани — это упругий материал, немного похожий на резину или эластан. Если вы ущипнете себя за щеку, она изменит форму, а когда отпустите, вернется к естественному состоянию. Еще

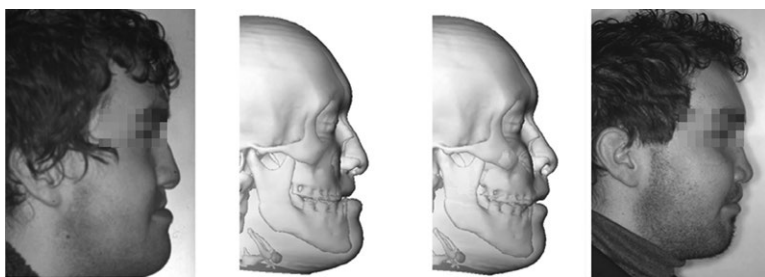
с 1800-х годов математики и инженеры использовали анализ, чтобы смоделировать, как различные материалы будут растягиваться, изгибаться или скручиваться, если их сжимать, растягивать или резать различными способами. Эта теория лучше всего развита в традиционных областях техники, где она используется для изучения напряжений и деформаций в мостах, зданиях, крыльях самолетов и многих других конструкциях из стали, бетона, алюминия и прочих жестких материалов. Немецкие исследователи адаптировали традиционный подход к мягким тканям и обнаружили, что он работает достаточно хорошо для того, чтобы быть полезным хирургам и пациентам.

Их основная идея заключалась в следующем. Представим мягкие ткани в виде сети тетраэдров, связанных между собой подобно бусинкам, соединенным эластичными нитями. Эти бусинки изображают небольшие кусочки ткани. Они соединены эластично, потому что в реальности атомы и молекулы в тканях соединены химическими связями. Эти связи сопротивляются растяжению и сжатию, что и обеспечивает упругость. Во время виртуальной операции хирург разрезает кости на виртуальном лице и передвигает некоторые их фрагменты. Когда кусок кости перемещается на новое место, он тянет за собой присоединенные ткани, а те, в свою очередь, тянут соседние ткани. В результате из-за этих сил сеть меняет конфигурацию. По мере движения участков ткани они меняют силы, оказываемые на соседей, поскольку связи между участками растягиваются или сжимаются. Затронутые соседи перенастраиваются сами и так далее. Отслеживание всех возникающих сил и смещений требует колоссальных вычислений, которые может выполнить только компьютер. Шаг за шагом алгоритм корректирует мириады сил и перемещений в крошечных тетраэдрах. В конечном счете все силы уравниваются и ткани приходят в новое состояние равновесия. Это и будет новой формой лица пациента, предсказанной моделью.

В 2006 году Дойфлхард, Вайзер и Захов проверили прогнозы своей модели для примерно тридцати клинических случаев и пришли

к выводу, что она работает замечательно. В качестве одной из мер ее успешности было правильно предсказанное — с точностью до миллиметра — положение 70% поверхности кожи на лице пациента. Только для 5–10% поверхности отклонение от прогноза составляло более трех миллиметров. Другими словами, модели можно было доверять. И это, конечно, гораздо лучше, чем действовать наугад. Вот пример с одним пациентом до и после операции. На четырех иллюстрациях показан его профиль до операции (крайний рисунок слева), компьютерная модель лица в этот момент (второй рисунок слева), спрогнозированный результат операции (второй рисунок справа) и фактический результат (крайний рисунок справа).

Посмотрите на положение его челюсти до и после операции. Результаты говорят сами за себя.



К загадке движения

Я пишу эти строки на следующий день после метели. Вчера было 14 марта, День числа π^* , и у нас навалило тридцать сантиметров снега. Сегодня утром, четвертый раз расчищая подъездную дорожку, я с завистью наблюдал, как небольшой трактор с роторным снегометом

* В американской системе записи дат (сначала месяц, а потом число) 14 марта записывается как 3/14. Поэтому с 1987 года этот день стал неофициальным праздником — Днем числа π . Строго говоря, отмечать положено 14 марта в 1:59:26, поскольку $\pi = 3,1415926...$ *Прим. пер.*

легко прокладывал по улице путь. С помощью вращающегося винта он забирал снег, а потом выбрасывал его во двор моего соседа.

Подобное использование вращающегося винта для перемещения чего-либо также восходит к Архимеду, по крайней мере согласно традиции. В его честь мы называем такой механизм архимедов винт [34]. Говорят, что ученый придумал его во время поездки в Египет (хотя, возможно, ассирийцы использовали его намного раньше) для подъема воды в ирригационные каналы. Сегодня в механических устройствах для поддержания работы сердца применяют насосы, использующие архимедов винт: они поддерживают циркуляцию крови при повреждениях левого желудочка.

Однако очевидно, что Архимед не хотел, чтобы его помнили за винты, военные машины или любые другие практические изобретения: он не оставил нам о них никаких записей. Больше всего он гордился своими математическими открытиями, что также заставляет меня задуматься, о каком его наследии уместно поразмышлять в День числа π . За двадцать два столетия, прошедших с тех пор, как Архимед нашел границы числа π , новые приближения появлялись много раз, но при этом всегда использовались математические методы, введенные Архимедом: приближения многоугольниками или бесконечные ряды. В более широком смысле его наследие — первое принципиальное использование бесконечных процессов для определения количественных характеристик криволинейных форм. В этом ему не было равных ни тогда, ни сейчас.

Однако геометрия криволинейных форм имеет свои пределы. Нам нужно также знать, как в этом мире происходит движение — как смещаются ткани после операции, как кровь течет по артериям, как мяч летит по воздуху. Об этом Архимед промолчал [35]. Он дал нам знания по статике, о телах, уравновешенных на рычаге и устойчиво плавающих в воде. Он был мастером равновесия. Территория впереди таила в себе загадки движения.

Открытие законов движения

Когда Архимед умер, вместе с ним практически умерло и математическое изучение природы. Прошло полторы тысячи лет, прежде чем появился новый Архимед. В Италии эпохи Возрождения молодой ученый по имени Галилео Галилей начал с того места, на котором остановился великий грек. Он наблюдал, как двигаются предметы, когда летят по воздуху или падают на землю, и искал в их движении числовые закономерности. Он проводил тщательные эксперименты и анализировал их. Измерял время колебания маятников и спуска шариков по наклонным поверхностям и находил удивительные правила для обоих случаев. А тем временем молодой немецкий математик Иоганн Кеплер изучал движение планет. Оба ученых были очарованы обнаруженными в своих работах закономерностями и ощущали присутствие чего-то гораздо более глубокого. Они знали, что натолкнулись на нечто важное, но не могли понять его значения. Открытые ими законы движения были написаны на незнакомом языке, коим и было дифференциальное исчисление. Это были первые намеки на него, сделанные человечеству.

До работ Галилея и Кеплера природные явления редко воспринимались в математических терминах. Архимед открыл математические принципы равновесия и плавучести в своих законах рычага и гидростатического равновесия, однако их применение было ограничено статическими ситуациями, где не было движения. Галилей и Кеплер рискнули выйти за пределы статического мира Архимеда и исследовать, как движутся объекты. Их попытки разобраться

в увиденном стимулировали появление нового вида математики, которая могла бы обращаться с движением, происходящим с переменной скоростью. Такая математика должна была описывать, например, изменение скорости шарика, катящегося по наклонной плоскости, или скорости планет, ускоряющихся по мере приближения к Солнцу и замедляющихся по мере удаления от него. В 1623 году Галилей описывал Вселенную как «величественную книгу... которая всегда открыта нашему взору» [1], но предупреждал, что «читать ее может лишь тот, кто сначала освоит язык и научится понимать знаки, которыми она начертана. Написана же она на языке математики, и знаки ее — треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остается лишь блуждать в темном лабиринте»*. Кеплер выражал еще большее преклонение перед геометрией. Он полагал, что она так же вечна, как божественный разум [2], и предоставила Богу закономерности [3] для сотворения мира. Задача Галилея, Кеплера и других близких им по духу математиков начала XVII века состояла в том, чтобы взять их любимую геометрию, так хорошо приспособленную для описания мира покоящегося, и распространить ее на мир меняющийся. Проблемы, с которыми они столкнулись, были больше чем математическими; им пришлось преодолевать философское, научное и богословское сопротивление.

Мир по Аристотелю

До XVII века движение и изменение были мало понятны. И не только потому, что их трудно изучать; они просто считались отвратительными. Платон учил [4], что цель геометрии — приобрести знание

* Галилео Галилей. Пробирных дел мастер (Il Saggiatore, 1623). Перевод Ю. А. Данилова. *Прим. пер.*

о том, что существует вечно, а не возникает на мгновение, а затем исчезает. Его философское презрение к преходящим вещам перешло в более крупных масштабах в космологию его самого выдающегося ученика — Аристотеля.

Согласно учению Аристотеля [5], которое доминировало в западной мысли почти два тысячелетия (и было принято католицизмом после того, как Фома Аквинский убрал из него языческие элементы), небеса вечны, неизменны и совершенны. Неподвижная Земля находится в центре божьего творения, а Солнце, Луна и планеты вращаются вокруг нее по идеальным окружностям, увлекаемые движением небесных сфер. В соответствии с такой космологией все в земном царстве ниже сферы Луны испорчено и поражено гниением, разложением и смертью. Превратности жизни, подобно опаданию листьев, по самой своей природе преходящи, мимолетны и беспорядочны.

Хотя космология с Землей в центре выглядела обнадеживающей и здоровой, неудобной проблемой представлялось движение планет. Слово «*планета*» означает «блуждающая»*. В древности планеты считались блуждающими звездами; вместо того чтобы находиться в одной точке неба подобно звездам Пояса Ориона и Ковша Большой Медведицы, которые никогда не двигаются относительно друг друга**, планеты, казалось, перемещались по небу. За несколько недель и месяцев они переходили из одного созвездия в другое. Большую часть времени они двигались на восток относительно звезд, но иногда казалось, что они замедляются, останавливаются

* Др.-греч. *πλανήτης* (планэтэс), от глагола *πλανάω* «блуждать, скитаться». *Прим. пер.*

** Разумеется, звезды (в том числе звезды Пояса Ориона или Ковша Большой Медведицы) тоже обладают собственным движением в пространстве, просто оно не так заметно, как у планет. Однако в некоторых случаях перемещение весьма существенно. Например, английский астроном Эдмунд Галлей (первооткрыватель собственного движения звезд) обнаружил, что Сириус сместился по сравнению с его положением в античном каталоге звезд Гиппарха (то есть примерно за две тысячи лет) больше чем на диаметр Луны. Самая быстрая из известных звезд (звезда Барнарда) смещается на диаметр Луны всего за 174 года, однако она не видна невооруженным взглядом. *Прим. пер.*

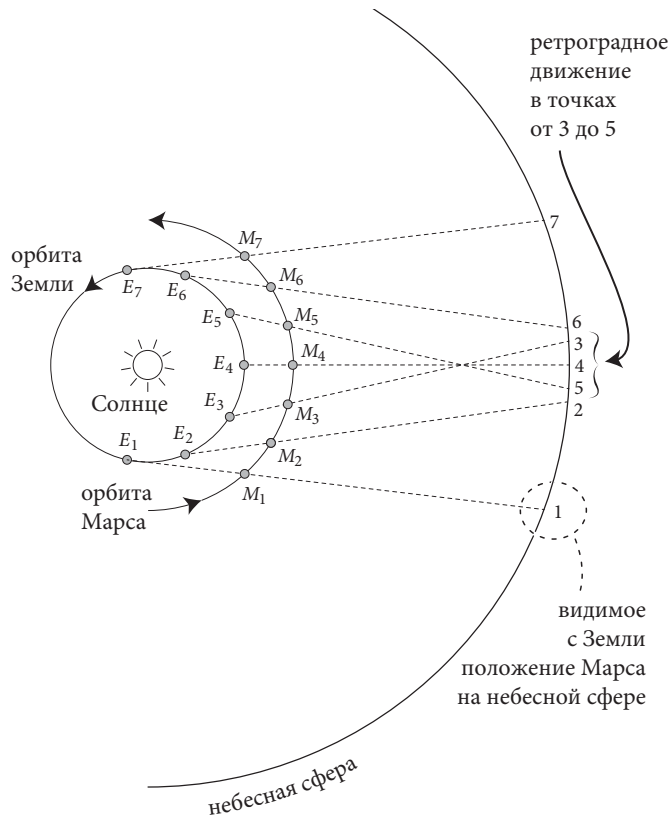
и пятятся назад, на запад (астрономы называют такое движение ретроградным [6]).

Например, было замечено, что Марс за время своего почти двухлетнего оборота по небу в течение примерно 11 недель движется в обратном направлении. Сегодня мы можем запечатлеть это попятное движение с помощью фотографии. В 2005 году фотограф Тунч Тезел сделал серию из 35 снимков Марса с интервалом примерно в неделю и объединил изображения, скоординировав их по звездам на заднем плане. На итоговом комбинированном снимке 11 точек в середине показывают ретроградное перемещение Марса.



Сегодня мы понимаем, что такое попятное движение — всего лишь иллюзия. Оно вызвано перемещением Земли, проходящей мимо более медленно движущегося Марса.

Это же происходит, когда вы идете на обгон автомобиля. Представьте, что вы мчитесь по автострате в пустыне, а вдалеке виднеются горы. Пока вы догоняете более медленную машину, вам кажется, что она движется вперед относительно гор. Но когда вы ее догнали и проезжаете мимо, на мгновение кажется, что она двигается *назад* на их фоне. Затем, как только вы отъедете достаточно далеко, снова будет казаться, что она двигается вперед.



Такое наблюдение привело греческого астронома Аристарха [7] к идее гелиоцентрической системы мира почти за два тысячелетия до Коперника. Он справился с загадкой ретроградного движения. Однако Вселенная с Солнцем в центре сама по себе вызывала вопросы. Если Земля движется, почему мы с нее не падаем? И почему звезды кажутся неподвижными? Они же должны двигаться: по мере того как Земля вращается вокруг Солнца, их положение должно слегка меняться. Опыт подсказывает, что когда вы посмотрите на какой-то предмет, потом сдвинетесь и посмотрите еще раз, то предмет переместится на фоне более далеких объектов. Этот эффект называется параллаксом. Чтобы проверить, поставьте палец вертикально перед лицом. Закройте один глаз, затем второй. Кажется, что палец

сдвигается на фоне более дальних предметов. Точно так же, когда Земля движется по орбите вокруг Солнца, звезды должны смещаться на фоне более далеких звезд. Единственный способ разобраться с этим парадоксом (как понял сам Архимед [8], изучая космологию Аристарха) — принять, что все звезды чрезвычайно далеки, по сути, бесконечно далеки от Земли. Тогда движение нашей планеты не даст обнаружить сдвиг, потому что параллакс будет слишком мал, чтобы его можно было заметить. В то время такое рассуждение было трудно принять: никто не мог вообразить, что Вселенная настолько необъятна, а звезды настолько дальше планет. Сегодня мы знаем, что все именно так, но тогда это казалось немыслимым.

Поэтому картина мира с Землей в центре при всех ее недостатках выглядела более правдоподобно. Греческий астроном Птолемей скорректировал ее, введя эпициклы, экванты и прочие дополнительные факторы*, чтобы теория могла разумно описывать движение планет и обеспечивала соответствие календаря и сезонных изменений. Система Птолемея [9] была неуклюжей и сложной, но работала достаточно хорошо, чтобы дожить до позднего Средневековья.

В 1543 году вышли две книги, которые ознаменовали начало научной революции. В том же году фламандский доктор Андреас Везалий сообщил о результатах вскрытия человеческих трупов — практике, запрещенной в предыдущие столетия. Его данные противоречили многовековым представлениям об анатомии человека. В тот же год Николай Коперник наконец разрешил опубликовать свою радикальную теорию о том, что Земля вращается вокруг Солнца. Он затягивал

* Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам с переменной скоростью, в то время как со времен античности считалось, что они должны равномерно двигаться вокруг Земли по идеальным окружностям с постоянной скоростью. Поэтому приходилось как-то компенсировать расхождение теории с реальными наблюдениями. В частности, например, в геоцентрической системе Птолемея предполагалось, что планеты движутся не непосредственно вокруг Земли, а по некоторому малому кругу (эпициклу), центр которого вращается вокруг Земли по большому кругу (деференту). Даже Коперник не смог полностью отказаться от теории эпициклов (хотя уменьшил их число): несмотря на то что он перенес Солнце в центр системы, планеты у него все равно двигались по идеальным окружностям, что является только грубым приближением к действительности. *Прим. пер.*

этот момент практически до своей смерти (и умер, когда книга увидела свет), поскольку боялся, что католическая церковь придет в ярость от подобного утверждения. И он оказался прав в своих опасениях. Когда Джордано Бруно [10] предположил среди прочих ересей, что Вселенная бесконечно велика и в ней бесконечно много миров, инквизиция осудила его и сожгла на костре в Риме в 1600 году.

На сцену выходит Галилео

В это смутное время, когда опасные идеи бросали вызов авторитетам и догмам, в Пизе, в родовитой, но обедневшей семье 15 февраля 1564 года родился мальчик, Галилео Галилей [11]. Его отец, теоретик музыки и лютнист, заставил сына учиться медицине, поскольку эта профессия была гораздо прибыльнее, чем его собственная. Но в университете Галилео обнаружил, что его страсть — математика. Он основательно увлекся трудами Архимеда и Евклида и досконально их изучил. Однако окончить университет ему не удалось (у отца больше не было возможности платить за обучение), он занялся самообразованием и через четыре года стал профессором математики в Пизанском университете, а еще через три года получил место профессора математики в Падуанском университете. Он был блестящим преподавателем, его выступления были ясны, задиристы и остроумны. Студенты стекались толпами на его лекции.

Галилео встретил жизнерадостную женщину по имени Марина Гамба [12], с которой многие годы прожил в гражданском браке. У них были две дочери и сын, однако в брак они не вступили; для него это считалось бы бесчестьем — из-за молодости Марины и ее низкого социального статуса*. Скудная зарплата преподавате-

* Считается, что Марина появилась на свет примерно в 1570 году, а детей родила в 1600, 1601 и 1606 годах. Поэтому говорить о ее молодости не приходится. *Прим. пер.*

ля математики, затраты на воспитание троих детей и дополнительная ответственность за судьбу незамужней сестры вынудили Галилея отдать дочерей в монастырь, и это разбило его сердце*. Его любимцей [13], радостью в жизни была старшая дочь Вирджиния. Позже он описывал ее как «женщину с утонченным умом, исключительной доброты, нежнее всего привязанную ко мне». Став монахиней, она приняла имя Мария Челесте — в честь Девы Марии и увлечения отца астрономией**.

Сегодня Галилея, пожалуй, чаще всего вспоминают в связи с его работой с телескопом и как сторонника теории Коперника о движении Земли вокруг Солнца, что противоречило взглядам Аристотеля и католической церкви. Хотя Галилей не изобретал телескоп, он усовершенствовал его и стал первым, кто сделал с его помощью выдающиеся научные открытия. В 1610-м и 1611 годах он наблюдал лунные горы, пятна на Солнце и четыре спутника Юпитера (с тех пор были открыты и другие).

Все эти наблюдения противоречили господствующим догмам. Горы на Луне означали, что вопреки учению Аристотеля она не была сияющей совершенной сферой. Аналогично пятна на Солнце означали, что оно не было совершенным небесным телом и имело дефекты. А поскольку Юпитер и его четыре спутника выглядели как собственная планетная система, где маленькие тела вращались вокруг более крупной центральной планеты, было очевидно, что не все небесные тела вращаются вокруг Земли.

Кроме того, эти спутники как-то умудрялись оставаться у Юпитера во время движения по небу. А ведь одним из стандартных аргументов против гелиоцентризма было то, что если Земля вращается

* Галилей был вынужден отдать дочерей в монастырь в первую очередь потому, что они были незаконнорожденными и достойно выдать их замуж было невозможно. Заметим, что сына Галилей позднее признал законным. *Прим. пер.*

** Celeste (*um.*) — небесный. *Прим. пер.*

бы вокруг Солнца, то Луна должна от нее отстать. Однако Юпитер с его спутниками показал, что это рассуждение ложно.

Это не означает, что Галилей был атеистом или нерелигиозным человеком. Он был добрым католиком и полагал, что открывает великолепие божьего труда, документируя его в соответствии с истиной, а не с традиционными представлениями Аристотеля и его более поздних схоластических толкователей. Однако католическая церковь так не считала. Труды Галилея были сочтены ересью. В 1633 году он предстал перед инквизицией, где его заставили отречься от своих взглядов. Его приговорили к пожизненному заключению, которое затем заменили домашним арестом, и остаток жизни Галилей прожил в своем доме в Арчетри около Флоренции. Он с нетерпением ждал встречи с любимой дочерью Марией Челесте, однако вскоре после его возвращения она заболела и умерла — в возрасте тридцати трех лет. Галилей был опустошен и на какое-то время утратил интерес к работе и жизни.

Оставшиеся годы он провел под домашним арестом — старик, теряющий зрение и пытающийся спорить со временем. Каким-то образом через два года после смерти дочери он нашел в себе силы обобщить свои неопубликованные исследования движения. Получившаяся книга, «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки» [14], стала кульминацией его трудов и первым великим шедевром современной физики. Он написал ее на итальянском, а не на латыни, чтобы ее мог понять кто угодно, и тайно переправил в Голландию, где она была опубликована в 1638 году. Радикальные идеи этой работы дали старт научной революции и привели человечество к разгадке тайны Вселенной: что великая книга природы написана на языке анализа.

Падение, качение и закон нечетных чисел

Галилей первым стал практиковать научный метод. Вместо того чтобы цитировать авторитетов или философствовать, сидя в кресле,

он изучал природу посредством тщательных наблюдений, остроумных экспериментов и изящных математических моделей. Такой подход позволил ему сделать многие замечательные открытия, среди которых было и такое: за тем, как падают предметы, скрываются нечетные числа 1, 3, 5, 7 и так далее.

До Галилея Аристотель предполагал, что тяжелые тела падают [15], потому что стремятся к своему естественному месту в центре космоса. Галилей считал, что это пустые слова. Вместо того чтобы размышлять, *почему* вещи упали, он хотел количественно определить характеристики того, *как* они падают. Для этого ему требовался способ измерять движение падающих тел и отслеживать, где они находятся, момент за моментом.

Это было непросто. Любой, кто сбрасывал камень с моста, знает, что камни падают быстро. Чтобы следить за камнем в каждый момент его падения, нужны очень точные часы, а таких во времена Галилея не было, да и несколько хороших видеокамер не помешали бы, но и они отсутствовали в начале 1600-х годов.

Галилей придумал блестящее решение: он замедлил движение. Вместо бросания камня с моста он пускал шар по наклонному скату. На языке физики он известен как наклонная плоскость, хотя во время первоначальных экспериментов Галилея это был длинный тонкий кусок дерева с прорезанным желобком для шара. Когда ученый уменьшал наклон почти до горизонтального, он мог замедлить движение шара до желаемой скорости, что позволяло ему измерять, где находится шар в каждый момент времени, обходясь инструментами, доступными в то время.

Чтобы определить время спуска шара, он использовал водяные часы. Они работали как секундомер: в начальный момент физик открывал вентиль и вода начинала с постоянной скоростью поступать по тонкой трубе в резервуар. В нужный момент он закрывал вентиль. Взвесив воду, накопившуюся в резервуаре за время спуска шара, Галилей мог количественно определить,

сколько времени прошло, с точностью до «одной десятой удара пульса»* [16].

Он повторял эксперимент много раз, иногда меняя наклон ската, а иногда — расстояние, проходимое шаром. По его словам, он установил следующее: «Расстояния, пройденные за равные промежутки времени телом, падающим из состояния покоя, находятся между собой в таком же соотношении, как и нечетные числа, начинающиеся с единицы» [17].

Чтобы понятнее изложить этот закон больших чисел, предположим, что шар прокатится некоторое расстояние за первую единицу времени. Тогда за вторую единицу времени он прокатится *втрое* дальше, за третью — *впятеро*. Это потрясающе! Нечетные числа 1, 3, 5 и так далее как-то связаны с тем, как предметы катятся вниз. И если падение — это предельный случай качения, когда наклон приближается к вертикали, то и для падения должно быть справедливо то же самое.

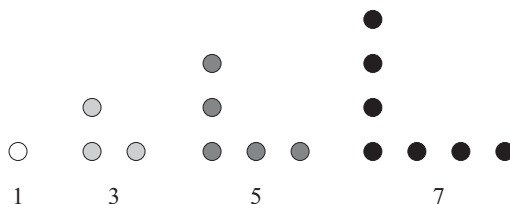
Мы можем только представить, как должен был обрадоваться Галилей, когда открыл это правило. Но обратите внимание, как он его сформулировал: словами, числами и соотношениями, а не буквами, формулами и уравнениями. Наша нынешняя манера использовать алгебру, а не разговорный язык, по тем временам казалась бы авангардным, новейшим, новомодным способом думать и говорить. Галилей так не думал и не выражался, да и читатели его бы не поняли.

Чтобы увидеть самые важные следствия из правила Галилея, давайте посмотрим, что произойдет при сложении последовательных нечетных чисел. За одну единицу времени шар прошел одну единицу расстояния. За следующую — еще три единицы расстояния, то есть в общей сложности $1 + 3 = 4$ единицы с момента начала движения. После третьей единицы времени получаем $1 + 3 + 5 = 9$ единиц расстояния. Обратите внимание на закономерность: числа 1, 4 и 9 — это

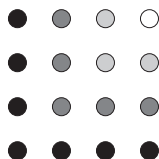
* Галилей писал: «Мы повторяли эксперимент более одного раза, чтобы измерять время с такой точностью, что отклонение между двумя наблюдениями никогда не превышало одной десятой удара пульса». *Прим. пер.*

квадраты последовательных целых чисел: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$. Таким образом, правило нечетных чисел Галилея, похоже, означает, что общее расстояние, пройденное падающим телом, пропорционально квадрату прошедшего времени.

Эту изящную связь между нечетными числами и квадратами можно доказать наглядно. Представьте нечетные числа как «уголки» из точек:



Теперь соедините их так, чтобы получился квадрат. Например, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$, поскольку мы можем сложить первые четыре уголка так, чтобы они образовали квадрат со стороной 4.



Наряду с законом о расстоянии, пройденном падающим телом, Галилей также открыл закон скорости. По его словам, скорость увеличивается пропорционально времени падения. Интересно здесь то, что ученый имел в виду мгновенную скорость, что кажется парадоксальным понятием. В книге «Две новые науки» он приложил немало усилий, чтобы объяснить, что при падении из состояния покоя тело не прыгает внезапно с нулевой скорости до какой-то более высокой, как полагали его современники. Наоборот, оно плавно проходит через все промежуточные скорости — бесконечное количество

скоростей — за конечное время, начиная с нулевой и непрерывно увеличивая скорость при падении.

Итак, в этом законе падающих тел Галилей инстинктивно размышлял о *мгновенной скорости* — понятии дифференциального исчисления, с которым мы познакомимся в главе 6. В то время он не мог определить ее точно, но интуитивно понимал.

Искусство научного минимализма

Прежде чем мы оставим эксперимент Галилея с наклонной плоскостью, давайте обратим внимание на стоящее за ним мастерство. Ученый уговорил природу дать красивый ответ, задав красивый вопрос. Словно художник-экспрессионист, он выделял то, что его интересовало, отбрасывая остальное.

Например, описывая свой прибор, он говорит, что сделал желоб очень прямым, гладким и отполированным [18] и катил по нему твердый, гладкий и круглый бронзовый шар. Почему его так беспокоили гладкость, прямолинейность, твердость и округлость? Потому что ученый хотел, чтобы шар катился вниз в самых простых и идеальных условиях, какие он только мог представить. Он сделал все возможное, чтобы уменьшить потенциальные осложнения, возникающие из-за трения или столкновений шара с боковыми стенками желоба (что могло происходить, если канал не был прямым), из-за мягкости шара (что могло привести к потере энергии шаром из-за его деформации) и всего остального, что могло вызвать отклонения от идеального случая. Это был правильный эстетический выбор. Просто. Элегантно. И минимально.

Сравните это с Аристотелем, который ошибался с законами падения, потому что его сбивали с толку осложнения. Ученый считал, что тяжелые тела падают быстрее легких — со скоростью, пропорциональной их массе. Это верно для крошечных частиц, плавающих в очень густой вязкой среде, например патоке или меде, но неверно для пушечных ядер или мушкетных пуль, падающих сквозь воздух.

Похоже, Аристотель был так озабочен силами сопротивления, создаваемыми воздухом (следует признать, что это важный эффект при падении перьев, листьев, снежинок и прочих легких предметов, у которых большая площадь поверхности, на которую воздействует воздух), что забыл проверить свою теорию на более типичных предметах вроде камней, кирпичей или обуви, то есть на компактных и тяжелых вещах. Другими словами, он слишком сильно сосредоточился на шуме (сопротивлении воздуха) и недостаточно на сигнале (инерция и сила тяжести)*.

Галилей не позволил себе отвлекаться. Он знал, что сопротивление воздуха и трение в реальном мире неизбежны, а значит, и в его эксперименте тоже, но они несущественны. Предвидя критику, он признал, что дробинка падает не так быстро, как пушечное ядро, но отметил, что допущенная ошибка гораздо меньше, чем в теории Аристотеля. В книге «Две новые науки» персонаж, прототипом которого был Галилей, говорит простоватому собеседнику, стоящему на аристотелевских позициях**: «Я не хотел бы... чтобы вы поступали как многие другие, отклоняя беседу от главного вопроса, и придирались к выражению, в котором я допустил отклонение от действительности на один волосок, желая скрыть за этой небольшой погрешностью ошибку другого, грубую, как якорный канат»*** [19].

В том-то и дело. В науке допустима погрешность в один волосок. А грубая, как якорный канат, — нет.

* Аристотель не занимался экспериментами в современном смысле этого слова, скорее, он наблюдал и осмысливал наблюдения. Однако чисто логическое противоречие, возникающее при предположении, что тела разной массы падают с разной скоростью, он вполне мог обнаружить. Вот это изящное рассуждение. Предположим, что тяжелые тела падают быстрее легких. Возьмем тяжелый камень и более легкий кусок дерева и скрепим их. С одной стороны, получившийся предмет тяжелее камня, поэтому он должен падать еще быстрее, чем камень. С другой — дерево падает медленнее камня и поэтому добавление дерева к камню должно замедлять падение. Противоречие. *Прим. пер.*

** Свои книги Галилей строит как диалоги трех людей: Сальвиати, выражающего коперниканские взгляды самого Галилея, простака Симпличио, отстаивающего точку зрения Аристотеля и Птолемея, и нейтрального (но сочувствующего взглядам автора) собеседника Сагредо. *Прим. пер.*

*** Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки. День первый. Перевод С. Н. Долгова. *Прим. пер.*

Галилей продолжил изучать движение брошенных тел, например полет мушкетной пули или пушечного ядра. По какой траектории они летят? Ученый полагал, что движение такого тела складывается из двух разных эффектов, которые следует рассматривать по отдельности: боковое движение, параллельное поверхности земли, в котором сила тяжести не играет роли, и вертикальное движение вверх или вниз, где действует сила тяжести и применим его закон падающих тел. Объединив оба вида движения, он обнаружил, что брошенные тела летят по параболическим траекториям. Вы наблюдаете их всякий раз, когда перебрасываетесь мячиком или пьете воду из питьевого фонтанчика.

Это была еще одна потрясающая связь между природой и математикой и еще одно свидетельство того, что книга природы написана на языке математики. Галилей был в восторге, обнаружив, что парабола, абстрактная кривая, которую изучал его кумир Архимед, существует в реальном мире. Природа использовала геометрию.

Но чтобы прийти к такому пониманию, Галилею нужно было знать, чем можно пренебречь. Как и прежде, приходилось игнорировать сопротивление воздуха — силу, замедлявшую движение летящего тела из-за трения. Для одних видов брошенных тел (камень) такое трение пренебрежимо мало по сравнению с гравитацией, тогда как для других (надувной мяч для пляжа или мяч для настольного тенниса) это не так. Все виды трения, включая сопротивление воздуха, трудны для изучения. По сей день оно остается загадкой и темой активных исследований.

Чтобы получить простую параболу, Галилею нужно было предположить, что боковое движение не замедляется, а продолжается вечно. Это был пример его закона инерции, который гласит, что движущееся тело остается в движении с той же скоростью и в том же направлении, если на него не действуют внешние силы. Для реального брошенного тела сопротивление воздуха будет такой внешней силой. Но, по мнению Галилея, в качестве приближения лучше

проигнорировать это, чтобы охватить львиную долю истины и красоты в том, как двигаются предметы.

От качающейся люстры к системе глобального позиционирования

Согласно легенде, Галилей сделал свое первое научное открытие, еще будучи студентом-медиком. Однажды во время церковной службы в Пизанском соборе он заметил, что висевшая над головами люстра раскачивается подобно маятнику [20]. Ее двигали потоки воздуха, и Галилей подметил, что для одного колебания всегда требуется одно и то же время — независимо от того, сильное оно или слабое. Это удивило его. Как могут большие и маленькие колебания занимать одинаковое время? Но чем больше он над этим думал, тем логичнее казался ответ. Да, при большом отклонении люстра проходила большее расстояние, но и двигалась она быстрее. Возможно, эти два эффекта уравниваются? Чтобы проверить эту догадку, Галилей измерил время колебания с помощью собственного пульса. И действительно, каждое колебание длилось одинаковое количество его ударов.

Эта легенда чудесна, и мне хочется в нее верить, однако многие историки сомневаются в ее истинности. Она дошла до нас от первого и самого преданного биографа Галилея — Винченцо Вивиани. Этот молодой человек был помощником и учеником Галилея в конце жизни ученого, когда тот ослеп и жил под домашним арестом. Разумеется, испытывая вполне понятное почтение к своему старому учителю, Вивиани приукрасил пару историй, когда писал биографию ученого после его смерти.

Но даже если история недостоверна (но, может, и нет!), мы точно знаем, что Галилей проводил опыты с маятниками еще в 1602 году и писал о них в книге «Две новые науки». В этой книге, построенной как сократовский диалог, один из персонажей говорит так, словно был тогда в соборе с тем мечтательным юным студентом: «Тысячи раз наблюдал я колебания, в особенности церковных паникадил,

подвешенных часто на очень длинных цепях и почему-либо совершающих незначительные движения»* [21]. В остальной части диалога разъясняется, что маятнику требуется одно и то же время, чтобы пройти дугу любого размера. Итак, мы знаем, что Галилей был хорошо знаком с явлением, описанным в рассказе Вивиани; остается только догадываться, действительно ли именно он открыл его в молодости.

В любом случае утверждение Галилея, что колебания маятника занимают одно и то же время, не совсем верно; для больших размахов потребуется чуть больше времени. Но если дуга достаточно мала, скажем меньше 20 градусов, то это практически точно. Такая неизменность маятника при небольших колебаниях называется *изохронностью*, от др.-греч. *ίσος* (*изос*) «равный» и *χρόνος* (*хронос*) «время». Это свойство создает теоретическую основу для метрономов и маятниковых часов, от обычных напольных до башенных часов в лондонском Биг-Бене. Галилей сам конструировал первые маятниковые часы в мире в последний год своей жизни, но умер, так и не успев их доделать. Первые работающие маятниковые часы появились пятнадцать лет спустя — их изобрел голландский математик и физик Христиан Гюйгенс.

Галилея особенно интриговал (и разочаровывал) открытый им любопытный факт — элегантное отношение между длиной маятника и его периодом (временем, которое потребуется маятнику, чтобы качнуться в обе стороны). Как объяснял ученый, «если мы пожелаем, чтобы один маятник качался в два раза медленнее, чем другой, то необходимо длину его сделать в четыре раза большею»**. Говоря языком отношений, он сформулировал общее правило: для тел, подвешенных на нитях разной длины, длины относятся друг к другу как квадраты периодов колебания [22]. К сожалению, Галилею так и не удалось доказать это математически. Это была эмпирическая

* Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки. День первый. Перевод С. Н. Долгова. . *Прим. пер.*

** Там же. *Прим. пер.*

закономерность, которая нуждалась в теоретическом объяснении. Ученый годами работал над этой проблемой, но так и не смог с нею справиться. С точки зрения современной науки он и не мог этого сделать. Объяснение требовало новой математики, которой не владели ни он, ни его современники. Пришлось ждать Исаака Ньютона и его открытия языка, на котором говорит Бог, — языка дифференциальных уравнений.

Галилей признавал, что изучение маятников многим может показаться крайне скучным [23], хотя более поздние работы показали, что это совсем не так. В математике загадки маятника стимулировали развитие анализа. В физике и технике маятники стали образцами колебаний. Подобно строке Уильяма Блейка, где мир виден в песчинке*, физики и инженеры смогли увидеть мир в колебании маятника. Везде, где возникают колебания, применяется одна и та же математика. Доставляющие беспокойство движения пешеходного мостика, подпрыгивание автомобиля на амортизаторах, грохот стиральной машины с неравномерной загрузкой, трепетание жалюзи на ветерке, шевеления земли при повторных толчках после землетрясения, гудение флуоресцентных ламп, работающих с частотой шестьдесят герц, — в каждой области науки и техники сегодня найдется свой вариант таких ритмических движений, свой вариант колебаний. Маятник — это их дедушка. Его схема универсальна. Так что *скучный* — неподходящее слово.

Иногда взаимосвязи между маятниками и другими явлениями настолько точны, что уравнения можно даже не менять. Достаточно по-другому истолковать символы, а синтаксис оставить тем же. Как будто природа раз за разом возвращается к одному и тому же мотиву — регулярному повтору темы маятника. Например, уравнения

* Отсылка к четверостишию Блейка из «Песен невинности» (1789):

Чтоб увидеть весь мир в песчаном зерне,
Небеса в полевом цветке,
Уместите вечность в одном лишь дне,
Бесконечность — в одной руке.
Перевод Е. В. Поникарова. *Прим. пер.*

для колебания маятника без изменений можно перенести на работу генераторов, вырабатывающих переменный ток и отправляющих его в наши дома и офисы. Благодаря такой родословной электрики называют свои уравнения уравнениями колебаний.

Те же уравнения возникают в квантовых осцилляциях высокотехнологического устройства, которое в миллиарды раз быстрее и миллионы раз меньше, чем любой генератор или напольные часы. В 1962 году Брайан Джозефсон, тогда 22-летний аспирант Кембриджского университета, предсказал, что при температурах, близких к абсолютному нулю, электроны могут проходить туда и обратно через непроницаемый барьер из диэлектрика между двумя сверхпроводниками, что казалось абсолютным нонсенсом согласно классической физике. Тем не менее анализ и квантовая механика вызвали к жизни эти маятникообразные колебания, или, если выражаться менее мистически, открыли возможность их появления. Через два года после предсказания Джозефсона в лаборатории были созданы условия, необходимые для их возникновения, и они действительно были обнаружены. У устройств, использующих джозефсоновский переход [24], масса областей практического применения. Они способны обнаруживать сверхслабые магнитные поля, в сто миллиардов раз слабее поля нашей планеты, что помогает геофизикам находить нефть глубоко под землей. Нейрохирурги используют джозефсоновские переходы, чтобы точно определять места опухолей головного мозга и обнаруживать у пациентов с эпилепсией поражения, вызывающие судороги. В отличие от эксплоративных операций*, такие процедуры полностью неинвазивны**. Они работают посредством отображения мельчайших изменений магнитного поля, которое создается аномальными

* Эксплоративная операция (от *лат. exploratio* — «исследование»), также диагностическая операция — операция для уточнения диагноза (например, с помощью биопсии). *Прим. пер.*

** Инвазивный (от *лат. invadere* — «проникать внутрь») — основанный на введении инструментов через кожу пациента. При неинвазивных процедурах проникновения через кожу, наоборот, нет. *Прим. пер.*

электрическими путями в мозге. Джозефсоновские переходы могут также обеспечить основу для крайне быстрых микросхем в следующем поколении компьютеров и даже сыграть определенную роль в квантовых вычислениях, которые произведут революцию в компьютерной науке, если это когда-нибудь произойдет.

Маятники также предоставили человечеству первый способ для точного отсчета времени. До появления маятниковых часов даже самые лучшие часы производили жалкое впечатление. Даже в идеальных условиях за день они отставали или уходили вперед на 15 минут. Маятниковые часы можно было сделать в сотни раз точнее. Они впервые давали реальную надежду на решение величайшей технологической задачи эпохи Галилея: найти способ определения долготы [25] в морских путешествиях. В отличие от широты, которую можно установить, просто глядя на Солнце и звезды, долгота не имеет аналога в физической среде — это искусственная конструкция. Но проблема ее измерения была весьма реальной. В эпоху мировых открытий моряки отправлялись в океаны, чтобы воевать или вести торговлю, но часто сбивались с пути или садились на мель, потому что не знали своего местонахождения. Правительства Португалии, Испании, Англии и Голландии предлагали огромные деньги любому, кто решит проблему долготы. Это была задача первостепенной важности.

Когда Галилей в последний год жизни пытался сконструировать маятниковые часы, он имел в виду именно задачу определения долготы. Ученые уже с 1500-х годов знали, что проблему можно решить с помощью очень точных часов. Штурман мог установить часы в порту отправления и выйти в море с домашним временем. Чтобы определить долготу судна при его движении на восток или запад, штурман мог свериться с часами в точный момент местного полудня (когда солнце находится выше всего в небе). Поскольку Земля делает полный оборот (360 градусов) за 24 часа, каждый час расхождения между местным и домашним временем соответствует 15 градусам разницы в долготе.

Однако в терминах расстояния 15 градусов на экваторе означает колоссальную тысячу миль. Следовательно, чтобы при такой схеме судно попадало в нужное место с допустимой ошибкой в несколько миль, точность хода часов должна была составлять несколько секунд в день. И эту точность требовалось поддерживать в бурном океане, при резких колебаниях давления воздуха и температуры, в условиях солености и влажности — факторах, способных привести к ржавлению механизма часов, растяжению пружин, загустеванию смазки, что могло ускорить, замедлить или даже остановить их ход

Галилей умер, так и не успев сконструировать часы, которые можно было бы использовать для определения долготы. Христиан Гюйгенс представил свои маятниковые часы Лондонскому королевскому обществу в качестве решения проблемы, однако их конструкцию сочли неудовлетворительной, поскольку часы были слишком чувствительны к изменениям в окружающей среде. Позднее Гюйгенс изобрел морской хронометр, в котором колебания регулировались спиральной пружиной, а не маятником — новаторский проект, проложивший дорогу карманным и современным наручным часам. В итоге проблема долготы была решена в середине 1700-х Джоном Харрисоном, английским часовщиком-самоучкой. При испытаниях в море в 1760-х годах его хронометр H4 смог измерить долготу с точностью до 10 миль, чего оказалось достаточно для получения награды в 20 тысяч фунтов стерлингов от британского парламента (эквивалентно нескольким миллионам современных долларов)*.

В нашу эпоху проблема навигации по-прежнему опирается на точное измерение времени. Рассмотрим систему глобального позиционирования [26]. Точно так же как механические часы были ключом

* Премия была установлена в 1714 году. Харрисон создал несколько хронометров H1, H2, H3, H4, постепенно улучшая конструкцию и получая от государства некоторые средства на работу. В 1773 году после вмешательства короля Георга III изобретатель (которому было уже 80 лет) наконец добился платы в сумме 8750 фунтов за свои достижения, однако формально официальной премии Харрисон не получал (объявленную награду так никому и не вручили). Впрочем, в течение многих лет работы часовщик получил от Комиссии долгот и парламента в сумме свыше 23 тысяч фунтов. *Прим. пер.*

к решению задачи определения долготы, атомные часы — это ключ к определению местоположения объектов на Земле с точностью до нескольких метров. Атомные часы — современная версия маятниковых часов Галилея. Они тоже следят за временем, отсчитывая колебания, только отслеживают не движения грузика, раскачивающегося вперед-назад, а подсчитывают колебания атомов при переходах между различными энергетическими состояниями, которых за одну секунду происходит 9 192 631 770. Хотя механизм и другой, принцип тот же. Повторяющиеся движения в противоположных направлениях можно использовать для определения времени.

В свою очередь, время может определить ваше местоположение. Когда вы используете GPS в своем телефоне или автомобиле, ваше устройство принимает беспроводные сигналы как минимум от четырех из двадцати четырех спутников системы глобального позиционирования, которые вращаются на орбите высотой около 20 тысяч километров. На каждом спутнике есть четверо атомных часов, синхронизированных между собой с точностью до миллиардной доли секунды. Различные спутники, которые видны вашему приемнику, направляют непрерывный поток сигналов, фиксируя время с точностью до наносекунды. Вот тут-то и нужны атомные часы. Их потрясающая временная точность преобразуется в не менее потрясающую пространственную точность, которую мы и привыкли ожидать от системы GPS.

Этот расчет опирается на триангуляцию — старый метод геопозиционирования, основанный на геометрии. В случае GPS он работает следующим образом: когда сигналы с четырех спутников поступают на приемник, ваше GPS-устройство сравнивает время их получения со временем их отправления и получает четыре разности, которые чуть-чуть отличаются, потому что спутники находятся от вас на разных расстояниях. Ваше устройство умножает эти разности на скорость света и получает расстояние до спутников. Поскольку положения спутников известны и точно контролируются, ваш GPS-приемник может провести триангуляцию и определить, в какой

точке на поверхности он располагается. Он может также определить высоту над уровнем моря и скорость. По сути, GPS преобразует очень точные измерения времени в очень точные измерения расстояния и тем самым — в очень точные измерения местоположения и движения.

Система глобального позиционирования была разработана армией США во время холодной войны. Первоначальная цель состояла в отслеживании положения американских подводных лодок с ядерным оружием и обеспечении оценок их текущего положения, чтобы в случае необходимости нанесения ядерного удара они могли сверхточно нацеливать свои межконтинентальные баллистические ракеты. Мирные приложения GPS включают точные модели сельского хозяйства, слепую посадку самолетов в сильном тумане и системы службы 911, автоматически рассчитывающие оптимальные маршруты для автомобилей скорой помощи и пожарных.

Однако GPS — это больше чем система местоположения и направления. Она позволяет синхронизировать время с точностью до сотни наносекунд, а это важно для координации банковских переводов и иных финансовых транзакций. Она также поддерживает синхронизацию мобильных телефонов и в сетях передачи данных, что позволяет более эффективно делить частоты в электромагнитном спектре.

Я подробно рассказываю об этом потому, что GPS — яркий пример скрытой полезности анализа. Как это часто случается, анализ работает за кулисами повседневной жизни. В случае GPS почти все аспекты системы зависят от анализа. Подумайте о беспроводной связи между спутниками и приемниками; анализ предсказал электромагнитные волны, которые после упомянутой ранее работы Максвелла сделали возможной беспроводную связь. Без анализа не было бы ни ее, ни GPS. Аналогично атомные часы в спутниках системы GPS используют квантово-механические колебания атомов цезия; анализ лежит в основе уравнений квантовой механики и способов их решения. Без анализа не было бы атомных часов. Я мог

бы продолжать: анализ лежит в основе математических методов расчета траекторий спутников и управления их движением, а также учета эйнштейновских релятивистских поправок при измерении времени, поскольку они двигаются с большой скоростью в сильном гравитационном поле, — но я надеюсь, что суть ясна. Анализ позволил создать многое из того, что привело к появлению глобальной системы позиционирования. Естественно, анализ не делал это в одиночку. Он был второстепенным, но в то же время очень важным игроком. Он входил в команду наряду с электротехникой, квантовой физикой, авиакосмической промышленностью и другими партнерами.

Давайте вернемся к молодому Галилею, сидящему в Пизанском соборе и размышляющему о колебаниях люстры. Теперь мы видим, что его мысли о маятниках и равном периоде колебаний оказали огромное влияние на ход развития цивилизации, причем не только в его, но и в нашу эпоху.

Кеплер и загадка движения планет

То, что Галилео Галилей делал для движения объектов на Земле, Иоганн Кеплер [27] делал для движения планет в небесах. Он разгадал старую задачу перемещения планет и исполнил мечту пифагорейцев, показав, что Солнечной системой управляет своеобразная небесная гармония. Подобно Пифагору с его струнами и Галилею с его маятниками и летающими телами, Кеплер открыл, что движение планет подчиняется математическим закономерностям. И, подобно Галилею, был очарован ими, хотя и огорчен, что не может их объяснить.

Как и Галилей, Кеплер родился в неблагополучной семье, но ситуация у него была значительно хуже: отец был наемным солдатом «с криминальными наклонностями» [28], как позднее вспоминал ученый, а мать (что вполне объяснимо) была «раздражительной» [29].

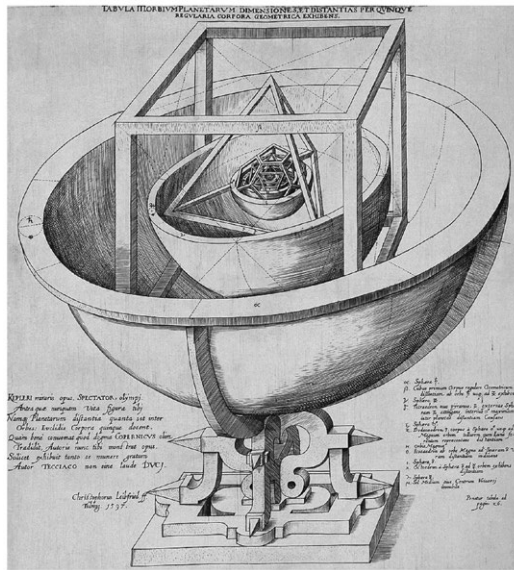
Вдобавок ко всему в детстве Кеплер заразился оспой и едва не умер, получив необратимые повреждения рук и зрения, из-за чего не мог бы во взрослом возрасте заниматься физическим трудом.

К счастью, он был умен. Будучи подростком, Иоганн изучал математику и коперниканскую астрономию в Тюбингене, где его признали обладателем «такого превосходного и величественного ума, что от него можно ожидать чего-то особенного» [30]. После получения степени магистра в 1591 году Кеплер изучал теологию в Тюбингене и планировал стать протестантским священником. Однако когда в протестантской школе в Граце умер преподаватель математики, церковные власти выбрали на это место Кеплера, хотя будущий ученый и неохотно отказался от духовной карьеры. Сегодня все, кто изучает физику и астрономию, знают о трех законах движения планет Кеплера. Однако часто упускается из виду история его мучительной, почти фанатичной борьбы за их открытие. Он десятилетиями кропотливо искал закономерности, движимый мистицизмом и верой, что в ночных положениях Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна должен быть некий божественный порядок.

Через год после приезда в Грац Кеплер решил, что ему открылась тайна космоса. Во время урока к нему внезапно пришло видение, как должны располагаться планеты вокруг Солнца. Идея заключалась в том, что планеты переносятся небесными сферами, вложенными друг в друга подобно матрешкам, а расстояния между ними определяются пятью платоновыми телами: куб, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Платон знал, а Евклид доказал, что других правильных многогранников не существует. Кеплеру их уникальность и симметрия казались вполне пригодными для вечности.

Он лихорадочно производил расчеты. «День и ночь я был поглощен вычислениями, чтобы увидеть, согласуется ли эта идея с орбитами Коперника, или мою радость развеет ветер. За несколько дней все заработало, и я наблюдал, как одно тело за другим точно занимало свое место между планетами» [31].

Он описал октаэдр вокруг сферы Меркурия, а через его вершины провел сферу Венеры, вокруг которой затем описал икосаэдр, а через его вершины прошла сфера Земли, и так он поступил со всеми планетами, сцепляя сферы и платоновы тела подобно трехмерной головоломке. Он изобразил получившуюся систему в разрезе на рисунке в своей книге «Тайна мироздания», вышедшей в 1596 году.



Его прозрение многое объясняло. Поскольку было всего пять платоновых тел и только шесть планет (включая Землю), это означало пять промежутков между ними. Все имело смысл. Геометрия управляла космосом. Он хотел стать теологом и теперь мог с удовлетворением написать одному из наставников: «Смотрите, как Бог прославляется моими усилиями в астрономии» [32].

На самом деле эта теория не совсем соответствовала имеющимся фактам, особенно в отношении положения Меркурия и Юпитера. Это несоответствие означало, что что-то было не так, но что? Неверна теория, данные или и то и другое? Астроном подозревал, что неверными могут быть данные, но не настаивал на правильности своих теоретических

построений (что было мудро, как мы теперь знаем, поскольку теория Кеплера не имела шансов на успех, ведь планет больше шести).

Тем не менее он не сдавался и продолжал размышлять о планетах, а вскоре добился успеха, когда Тихо Браге пригласил его в помощники. Тихо (как его всегда именовали историки) был лучшим астрономом-наблюдателем в мире. Его данные были на порядок точнее всех полученных ранее. Еще до появления телескопов он создал специальные инструменты, которые позволяли ему невооруженным глазом разрешать угловые положения планет с точностью до двух угловых минут, то есть до тридцатой доли градуса.

Чтобы понять, насколько мал этот угол, представьте себе полную Луну в ясную ночь и вытяните перед лицом мизинец. Его ширина — около 60 угловых минут, а Луна — примерно вдвое меньше. Поэтому, когда мы говорим, что Тихо Браге использовал разрешение в две минуты дуги, это означает, что если вы по всей ширине мизинца на равных расстояниях нарисуете 30 точек (или 15 точек поперек Луны), то Тихо сможет отличить эти точки между собой.

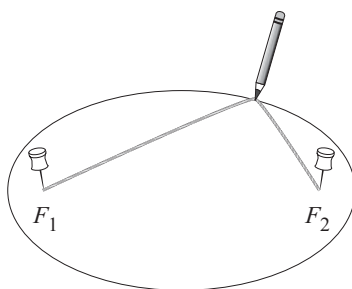
После смерти Тихо Браге в 1601 году Кеплер унаследовал его данные о Марсе и других планетах. Чтобы объяснять их движение, он пробовал одну теорию за другой, заставляя планеты двигаться то по эпициклам, то по яйцевидным кривым, то по кругам, где Солнце находилось не в центре. Но все эти модели давали расхождение с данными Тихо, что нельзя было игнорировать. «Дорогой читатель, — сокрушался Кеплер после одного такого вычисления, — если ты устал от столь утомительной процедуры, пожалей меня, ибо я проделал ее как минимум 70 раз» [33].

Первый закон Кеплера: эллиптические орбиты

В поисках объяснения движения планет Кеплер в конце концов попробовал хорошо известную кривую — эллипс. Как и парабола, эллипс изучался учеными античности. Из главы 2 мы узнали, что древнегреческие геометры определяли эллипс как овалоподобную кривую,

образованную при сечении конуса наклонной плоскостью, угол наклона которой меньше, чем у образующей конуса*. Если плоскость почти горизонтальна, то эллипс в сечении будет почти кругом; если же плоскость почти параллельна образующей, то эллипс будет сильно вытянутым и похожим на сигару. Если вы начнете менять наклон плоскости, эллипс будет принимать вид от округлого до сильно сжатого.

Есть еще один простой способ начертить эллипс — с помощью нескольких обычных предметов.



Возьмите карандаш, пробковую доску, лист бумаги, две кнопки и кусок нитки. Положите бумагу на доску. Прикрепите кнопками к бумаге концы нитки так, чтобы она немного провисала. Затем натяните нить кончиком карандаша и начните рисовать кривую, удерживая при этом нить натянутой. Когда карандаш обойдет вокруг обеих кнопок и вернется в исходную точку, получившаяся кривая и будет эллипсом.

Особую роль тут играет положение кнопок. Кеплер назвал их *фокусами* (или фокальными точками) эллипса. Они настолько же важны для эллипса, как центр для окружности. Окружность определяется как множество точек, расстояние от которых до данной точки (центра) — постоянная величина. Аналогично эллипс — это множество точек, сумма расстояний от которых до *двух* данных точек (фокусов) — постоянная величина. В нашей конструкции из нитки и двух

* Образующая конуса — прямая, соединяющая вершину с границей основания конуса. Все образующие конуса в совокупности дают боковую поверхность конуса. *Прим. пер.*

кнопок эта постоянная сумма двух расстояний в точности равна длине натянутой нити.

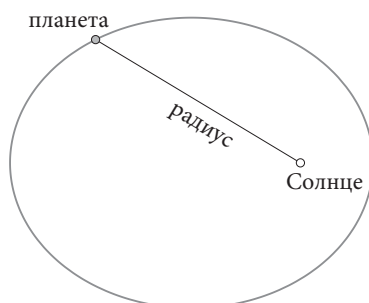
Первое величайшее открытие Кеплера — и на этот раз он не ошибся и не нуждался в пересмотре своих идей — состояло в том, что все планеты движутся по эллиптическим орбитам. Не окружность и не окружность в сочетании с круглыми эпициклами, как считали Аристотель, Птолемей, Коперник и даже Галилей. Нет. Эллипсы. Более того, он обнаружил, что Солнце находится в одном из фокусов эллиптической орбиты для всех планет.

Это было поразительно, именно на такую божественную подсказку Кеплер и надеялся. Планеты двигались в соответствии с геометрией. Пусть это и не геометрия пяти платоновых тел, как он предполагал изначально, но тем не менее его инстинктивные догадки были правильными. Геометрия действительно управляла небесами.

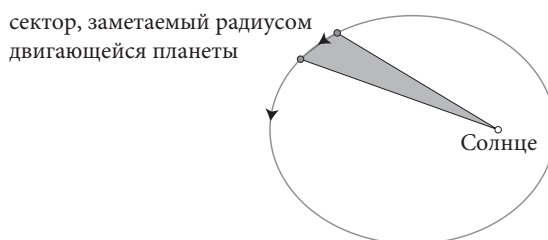
Второй закон Кеплера: равные площади за равное время

Кеплер обнаружил в имеющихся данных еще одну закономерность. Если первая касалась траектории планет, то эта — их скоростей. Сегодня она известна как второй закон Кеплера, который гласит: воображаемая линия, проведенная от Солнца к планете, заметает равные площади за равные промежутки времени, когда планета движется по своей орбите.

Чтобы разъяснить смысл этого закона, предположим, что мы смотрим, где сегодня на своей эллиптической орбите находится Марс. Соедините эту точку с Солнцем прямой линией.

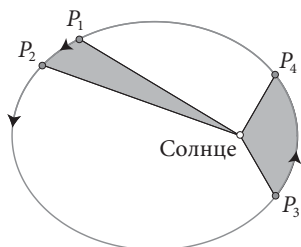


Теперь представьте эту линию как щетку дворника-стеклоочистителя, где Солнце находится в шарнире, а Марс — на кончике щетки (правда, стеклоочиститель движется в обоих направлениях, а наш отрезок — всегда в одну сторону, причем очень-очень медленно). По мере перемещения Марса по своей орбите в последующие ночи наш отрезок-стеклоочиститель замечает внутри эллипса какую-то площадь. Если мы снова посмотрим на Марс через какое-то время (скажем, через три недели), то наш отрезок заметет фигуру, называемую сектором.



Кеплер обнаружил, что площадь «трехнедельного» сектора остается неизменной, где бы ни находился Марс на своей орбите. Если мы посмотрим на Марс в любых двух точках его орбиты, разделенных равными промежутками времени, то все получающиеся секторы всегда будут иметь одинаковые площади, независимо от их места нахождения на орбите.

Попросту говоря, второй закон утверждает, что планеты движутся не с постоянной скоростью. Чем ближе они к Солнцу, тем быстрее перемещаются. Утверждение о заметании равных площадей за равные промежутки времени — способ сформулировать это точно.



Если время перехода из P_1 в P_2 равно времени перехода из P_3 в P_4 , то получающиеся секторы имеют равные площади.

Как Кеплер измерил площадь эллиптического сектора, учитывая, что у него одна изогнутая сторона? Он поступил так же, как и Архимед — разрезал сектор на много тонких ломтиков и аппроксимировал их треугольниками. Затем вычислил их площадь (это просто, потому что у них прямые стороны) и сложил их, чтобы оценить площадь исходного сектора. По сути, он применил архимедову версию интегрального исчисления к реальным данным.

Третий закон Кеплера и священный экстаз

Законы, которые мы обсуждали до сих пор — каждая планета движется по эллипсу с фокусом в Солнце, а ее радиус замечает равные площади за равные промежутки времени, — относятся к каждой планете в отдельности. Кеплер открыл их оба в 1609 году. Но ему потребовалось еще десять лет, чтобы открыть третий, «коллективный» закон, связывающий всю Солнечную систему единой нумерологической закономерностью. Он стал результатом многих месяцев яростных вычислений и появился спустя двадцать лет после мучительного промаха с платоновыми телами. В своем предисловии к «Гармонии мира» (1619) Кеплер в экстатическом восторге писал, что наконец-то увидел план Бога: «Ныне, после того как 18 месяцев назад впервые забрезжил рассвет, после того как 3 месяца назад наступил ясный день и лишь несколько дней назад взошло яркое солнце чудеснейшего зрелища, ничто не может остановить меня. Я отдаюсь священному экстазу. Не боясь насмешек смертных, я исповедуюсь открыто» [34].

Числовой закономерностью, так очаровавшей Кеплера, стало открытие, что квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу ее среднего расстояния от Солнца. Иными словами, отношение T^2 / a^3 одинаково для всех планет. Здесь T — это время оборота планеты вокруг Солнца (1 год для Земли, 1,9 года для Марса, 11,9 лет для Юпитера и так далее), а буквой a обозначено среднее расстояние

планеты от Солнца. Его определить несколько сложнее, потому что реальное расстояние до планеты меняется в силу того, что орбита эллиптическая: иногда она ближе к Солнцу, а иногда дальше. Чтобы учесть это, Кеплер определил a как среднее значение самого малого и самого большого расстояния.

Суть третьего закона проста: чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется и тем больше время ее оборота. Однако интересно то, что период обращения не пропорционален просто расстоянию. Например, период обращения нашей ближайшей соседки Венеры равен 61,5% от нашего года, но среднее расстояние от Солнца у нее — 72,3% от земного, а не 61,5%, как можно было бы наивно полагать. А все потому, что период *в квадрате* пропорционален расстоянию *в кубе* (а не в квадрате), поэтому зависимость между периодом и расстоянием сложнее, чем прямая пропорциональность.

Если T и a выразить в виде процентной доли от земного периода и земного расстояния, как мы сделали выше, то третий закон Кеплера упрощается до формулы: $T^2 = a^3$. Прямой пропорциональности нет. Чтобы посмотреть, насколько хорошо он работает, подставим параметры Венеры: $T^2 = (0,615)^2 \approx 0,378$, в то время как $a^3 = (0,723)^3 \approx 0,378$. Точность — три значащие цифры. Вот почему Кеплер был так взволнован. Не менее впечатляющие результаты и для остальных планет.

Кеплер и Галилей, сходство и различия

Кеплер и Галилей никогда не встречались, но они переписывались, обсуждали свои коперниканские взгляды и открытия, сделанные в астрономии. Когда некоторые люди отказывались смотреть в телескоп Галилея, опасаясь, что это инструмент дьявола, ученый написал Кеплеру: «Мой дорогой Кеплер, хотел бы я, чтобы мы посмеялись над

необычайной глупостью толпы. Что бы вы сказали о выдающихся философах этого университета, которые со ослиным упорством, несмотря на мои тысячекратные приглашения, отказывались смотреть на планеты или на Луну в мой телескоп?» [35]

В чем-то Кеплер и Галилей были похожи. Оба интересовались движением. Оба работали в области интегрального исчисления: Кеплер — над объемами криволинейных тел (например, винных бочек), Галилей — над центрами тяжести параболоидов. При этом они следовали духу Архимеда, разрезая в уме твердые тела на множество тоненьких слоев, похожих на ломтики салами.

Но в остальном они дополняли друг друга. Особенно это проявлялось в научных открытиях: Галилей занимался законами движения на Земле, а Кеплер — в Солнечной системе. Однако взаимодополняемость проникает еще глубже, вплоть до научного стиля и склонностей. Галилей был рациональным человеком, Кеплер — мистиком.

Галилей был интеллектуальным потомком Архимеда, очарованным механикой. В своей первой публикации он правдоподобно изложил легенду «Эврика!», показав, как Архимед с помощью ванны и весов смог определить, что корона правителя Гиерона сделана не из чистого золота, и вычислить точное количество серебра, которое подмешал в нее вороватый ювелир. Галилей продолжал развивать работы Архимеда на протяжении всей жизни, часто расширяя его механику — от равновесия к движению.

Кеплер же был скорее наследником Пифагора. Обладая неистовым воображением и нумерологическим складом ума, он повсюду видел закономерности. Он первым объяснил, почему снежинки имеют форму шестиугольника. Он размышлял о наиболее эффективном способе укладки пушечных ядер и предположил (правильно), что оптимальная упаковка такая же, как природа использует для упаковки зерен граната, а бакалейщики — для укладки апельсинов. Одержимость Кеплера геометрией — небесной и земной — граничила с иррациональностью. Но этот пыл сделал его тем, кем он был. Писатель

Артур Кестлер проницательно заметил: «Иоганн Кеплер был восхищен пифагорейской мечтой, и на этом фундаменте из фантазии с помощью таких же ненадежных рассуждений он построил прочное здание современной астрономии. Это один из самых впечатляющих эпизодов в истории мысли и противоядие от добродетельной веры, что прогрессом науки управляет логика» [36].

Грозовые тучи сгущаются

Как и все великие открытия, законы движения планет в небесах Кеплера и законы движения падающих тел на Земле Галилея вызвали больше вопросов, чем дали ответов. С научной точки зрения естественно было спросить о первопричинах. Откуда взялись эти законы? Лежала ли в их основе какая-то еще более глубокая истина? Например, казалось явно не случайным, что Солнце занимает такое особое место во всех планетных эллипсах — в одном из фокусов. Означает ли это, что Солнце каким-то образом влияет на планеты? Воздействует ли оно на них какой-то оккультной силой? Именно так думал Кеплер. Он задавался вопросом, не могут ли влиять на планеты какие-то магнитные явления, которые недавно изучал английский ученый Уильям Гильберт. Что бы это ни было, казалось, какая-то неведомая невидимая сила действовала на огромных расстояниях через пустоту пространства.

Работы Кеплера и Галилея поднимали и математические проблемы. В частности, кривые снова оказались в центре внимания. Галилей показал, что траектория брошенного тела — парабола, а круги Аристотеля уступили место эллипсам Кеплера. Другие научные и технологические достижения начала 1600-х только повысили интерес к кривым. В оптике форма изогнутой линзы определяет, насколько изображение увеличено, растянуто или размыто. Эти соображения

крайне важны при конструировании телескопов и микроскопов — новейших приборов, которые революционизировали астрономию и биологию соответственно. Французский ученый Рене Декарт задался вопросом, можно ли сделать линзу с совершенно резким изображением. Вопрос сводился к следующей задаче: какую форму должна иметь линза, чтобы все лучи света, исходящие из одной точки или идущие параллельно друг другу, гарантированно сходились бы в другой точке после прохождения через стекло?

Кривые, в свою очередь, поднимали вопросы о движении. Вторым закон Кеплера подразумевал, что планеты двигаются по своим эллипсам неравномерно — то ускоряясь, то замедляясь. Точно так же брошенные снаряды Галилея двигались с переменной скоростью по своим параболическим дугам. Они замедлялись при подъеме, замирали в верхней точке, а затем падали обратно на землю. То же самое было справедливо и для маятников. Они замедлялись по мере приближения к концу дуги и ускорялись по мере стремления к нижней точке, а затем снова снижали скорость у другого конца траектории. Как можно количественно характеризовать движение, у которого скорость каждый миг меняется?

И вот среди этого водоворота вопросов появился новый путь для европейских математиков: приток идей от исламских и индийских математиков предоставил им реальный шанс выйти за рамки методов Архимеда и открыть новые горизонты. Идеи с Востока обеспечили новые подходы к кривым и движению, а затем — внезапно — к дифференциальному исчислению.

Зарождение дифференциального исчисления

С современной точки зрения у анализа есть две стороны. Дифференциальное исчисление разбивает сложные задачи на бесконечное число более простых частей, а интегральное исчисление складывает их обратно, чтобы решить исходную задачу.

Если учесть, что разбиение естественным образом идет до обратного воссоздания, то новичкам кажется разумнее начинать с дифференциального исчисления. И действительно, именно так сегодня начинаются все курсы анализа. Они начинаются с производных — относительно простых методов нарезания и измельчения, а затем уже переходят к интегралам — гораздо более сложным методам сборки частей в единое целое. Студенты считают такой порядок изучения анализа более удобным, потому что сначала идет более легкий материал. Преподавателям он нравится, потому что при этом предмет кажется более логичным.

Но, как ни странно, история разворачивалась в обратном порядке. В работах Архимеда примерно в 250 году до нашей эры интегралы уже использовались фактически вовсю, в то время как производных никто не видел до 1600-х. Почему дифференциальное исчисление — более простая сторона предмета — появилось настолько позже интегрального? Причина в том, что оно выросло из *алгебры*, а алгебре потребовались столетия, чтобы вызреть, мигрировать и видоизмениться. В своей исходной форме в Китае, Индии и исламском мире [1] алгебра была полностью вербальной. Неизвестные были словами,

а не нынешними x и y . Уравнения — длинными предложениями, а задачи — целыми абзацами. Однако после того как около 1200 года алгебра появилась в Европе, она превратилась в искусство символов. Это сделало ее более абстрактной... и более мощной. Эта новая порода, символьная алгебра, затем соединилась с геометрией и породила еще более крепкий гибрид — аналитическую геометрию, которая, в свою очередь, породила целый зоопарк кривых, изучение которых и привело к дифференциальному исчислению. В данной главе мы рассмотрим, как это происходило.

Расцвет алгебры на Востоке

Упоминание Китая, Индии и исламского мира должно изменить впечатление, возможно, сложившееся к этому моменту, что создание анализа было делом европейцев. Хотя анализ действительно расцвел в Европе, его истоки лежат в другом месте. В частности, алгебра пришла из Азии и Ближнего Востока. Это слово происходит от арабского «аль-джебр», что означает «восполнение», или «восстановление». Подразумевается операция, применяемая при решении уравнений, когда число переносится из одной части в другую, меняя знак — становясь из отрицательного положительным («восстанавливаясь»)*. Точно так же и геометрия, как мы видели, зародилась в Египте; считается, что отец греческой геометрии Фалес изучал ее именно там. И великая теорема Пифагора придумана не Пифагором: она была известна вавилонянам как минимум за тысячу лет до него, как свидетельствуют глиняные таблички

* Название происходит от написанного в IX веке трактата Мухаммада ибн Мусы аль-Хорезми «Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала» — «Краткая книга о восполнении и противопоставлении». Под восполнением (аль-джебр) подразумевался перенос отрицательных членов в противоположную часть уравнения, чтобы они стали положительными (с отрицательными числами математики тогда не работали), под противопоставлением (аль-мукабала) — приведение подобных членов. *Прим. пер.*

из Междуречья, датируемые примерно 1800 годом до нашей эры. Нужно также иметь в виду, что, говоря о Древней Греции, мы подразумеваем огромную территорию, которая простиралась далеко за пределы Афин и Спарты. Она доходила до Египта на юге, до Италии и Сицилии на западе, включала средиземноморский берег Малой Азии, Ближний Восток, части Центральной Азии, Пакистана и Индии. Сам Пифагор был родом с острова Самос, расположенного у западного побережья Малой Азии (современная Турция). Архимед жил в Сиракузах — городе на юго-восточном побережье Сицилии. Евклид работал в Александрии — крупном портовом и научном центре в устье Нила в Египте.

После того как римляне завоевали греков, а особенно после сожжения Александрийской библиотеки и падения Западной Римской империи центр математики снова переместился на Восток. Сочинения Архимеда и Евклида перевели на арабский — равно как и труды Птолемея, Аристотеля и Платона. Ученые и писцы Константинополя и Багдада сохранили старые знания и добавили собственные идеи.

Как алгебра расцветала, а геометрия увядала

За столетия до появления алгебры геометрия существенно замедлила свое развитие. После смерти Архимеда в 212 году до нашей эры казалось, что никто не сравнится с ним на этом поле. Ну, почти никто. Около 250 года нашей эры китайский геометр Лю Хуэй усовершенствовал метод Архимеда для вычисления числа π *. Спустя два столетия Цзу Чунчжи использовал метод Ли Хуэя для многоугольника

* С помощью вписанного 3072-угольника он получил $\pi \approx 3,1416$. Затем, усовершенствовав свой метод, получил такое же приближение с помощью всего лишь 192-угольника. *Прим. пер.*

с 24 576 сторонами. Совершив по тем временам героические вычислительные подвиги, он сузил границы для π до восьми цифр:

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

Следующий шаг потребовал еще пяти столетий и был сделан арабским мудрецом Абу Али аль-Хасаном ибн аль-Хайсамом [2], известным на Западе как Альхазен. Он родился в Басре (Ирак) примерно в 965 году и работал в Каире во время золотого века ислама*, занимаясь всем — от теологии и философии до астрономии и медицины. В своих работах по геометрии Ибн аль-Хайсам вычислял объемы тел, которые Архимед никогда не рассматривал. Но какими бы впечатляющими ни были эти достижения, они были редкими признаками жизни для геометрии, да и ушло на них двенадцать столетий.

В течение того же длительного периода в алгебре и арифметике наблюдался быстрый и существенный прогресс. Индийские математики изобрели понятие нуля и десятичную позиционную систему счисления. В Египте, Ираке, Персии и Китае появились алгебраические методы решения уравнений. Во многом это было обусловлено практическими задачами, связанными с законами о наследстве, налогообложении, торговлей, бухгалтерией, вычислением процентов и прочими вопросами, где требовались числа и уравнения. В те времена, когда алгебра использовала словесные формулировки, решения давались в виде рецептов, пошаговых путей к ответу, как это разъяснялось в знаменитой книге Мухаммада ибн Мусы аль-Хорезми (около 780–850), имя которого осталось в названии пошаговых процедур — алгоритмов. Со временем купцы и исследователи принесли эту вербальную форму алгебры и индо-арабские десятичные цифры в Европу, а арабские сочинения стали переводить на латынь.

В Европе изучение алгебры как самостоятельной символьной системы стало процветать в эпоху Возрождения и достигло пика

* Золотой век ислама — период расцвета Арабского халифата, примерно с середины VIII до середины XIII века. *Прим. пер.*

примерно в 1500 году, когда она приняла современный вид — с буквами для обозначения цифр. Во Франции в 1591 году Франсуа Виет [3] обозначал неизвестные величины гласными буквами, например *A* и *E*, а постоянные величины — согласными, такими как *B* и *G*. (Сегодняшние обозначения неизвестных x , y , z и постоянных a , b , c появились спустя полвека в работе Рене Декарта). Замена слов буквами и символами значительно упростила работу с уравнениями и поиск решений.

Не менее серьезный прогресс произошел в области арифметики, когда Симон Стевин в Голландии показал, как использовать десятичные дроби [4]. При этом он разрушил старое аристотелевское различие между числами (означавшими целое количество неделимых единиц) и величинами (непрерывными количествами, которые можно было делить до бесконечности). До Стевина индо-арабские цифры уже использовались для целых чисел, но числа меньше единицы выражались обыкновенными дробями*. В новом подходе Стевина даже единицу можно было разделить на части и записать с помощью десятичной записи, ставя цифры после десятичной запятой**. Сегодня нам это кажется само собой разумеющимся, но тогда это была революционная идея, которая способствовала появлению анализа. Как только единица перестала быть священной и неделимой, все величины — целые, дробные иррациональные — слились в единое семейство чисел на равных основаниях. В результате анализ получил бесконечно точные действительные числа, необходимые для описания пространства, времени, движения и изменений.

Незадолго до того как геометрия скооперировалась с алгеброй, прозвучало последнее «ура!» в честь геометрических методов старой школы Архимеда. В начале XVII века Кеплер нашел объем

* Десятичные дроби изредка использовались и до Стевина, но широко распространились в Европе именно после его труда «Десятая» (De Thiende, 1585). *Прим. пер.*

** Десятичной запятой в те времена не было. Стевин указывал над каждой цифрой номер соответствующего разряда. *Прим. пер.*

криволинейных тел (типа винных бочек и бубликов), мысленно представляя их разрезанными на бесконечно тонкие диски, в то время как Галилей и его ученики Эванджелиста Торричелли и Бонавентура Кавальери [5] аналогичным образом вычисляли площади, объемы и положения центра тяжести различных форм — представляя их состоящими из бесконечных множеств линий и поверхностей. И хотя подход этих людей к бесконечности и бесконечно малым величинам был небрежным, а их методы не отличались строгостью, тем не менее они были мощными и интуитивно понятными. Они приводили к ответам гораздо быстрее и проще, чем метод исчерпывания, так что это казалось захватывающим достижением (хотя теперь мы знаем, что Архимед их опередил; та же идея содержалась в его «Метод», который в то время еще томился незамеченным в молитвеннике в монастыре).

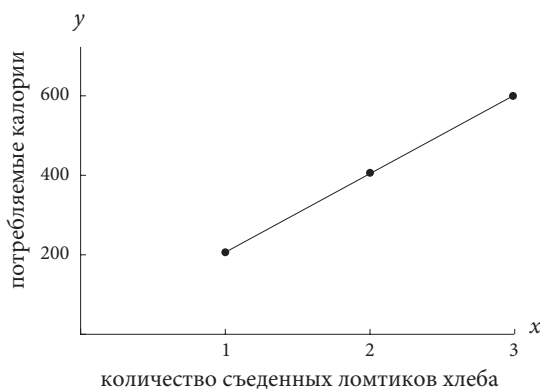
В любом случае, хотя прогресс новых последователей Архимеда в то время выглядел многообещающе, такому продолжению старого подхода не суждено было добиться успеха. Там, где было действие, появилась алгебра символов. А вместе с ней наконец были посеяны семена ее самых мощных ответвлений — аналитической геометрии и дифференциального исчисления.

Встреча алгебры с геометрией

Первый прорыв произошел примерно в 1630 году, когда два французских математика (вскоре ставшие соперниками) Пьер де Ферма и Рене Декарт независимо друг от друга связали алгебру и геометрию. Их работа привела к новой области математики — аналитической геометрии, действие в которой развивалось на координатной плоскости — арене, где уравнения оживали и принимали различные формы.

Сегодня мы используем координатную плоскость для построения графиков зависимости между переменными. Например, рассмотрим зависимость количества калорий от моих порой позорных привычек в еде. Иногда я позволяю себе пару кусочков хлеба с корицей и изюмом на завтрак. На упаковке написано, что каждый ломтик содержит колоссальные 200 калорий*. (Если бы я хотел есть более здоровую пищу, то мог бы довольствоваться зерновым хлебом, который покупает жена, в нем всего 130 калорий, но в нашем примере я предпочитаю хлеб с корицей и изюмом, потому что 200 — более удобное число с математической точки зрения, пусть и худшее в смысле калорийности, чем 130.)

Вот график числа калорий, которые я получаю вместе с одним, двумя или тремя ломтиками хлеба.



Поскольку в каждом кусочке 200 калорий, то в двух кусках их будет 400, а в трех — 600. Если нанести эти три точки на график, все они окажутся на прямой линии, то есть у нас получается линейная зависимость между числом съеденных кусков и количеством калорий. Если мы обозначим буквой x число кусков, а буквой y — число употребленных калорий, то линейную зависимость можно записать

* На самом деле, когда дело касается продуктов, речь всегда идет о т.н. больших калориях, или килокалориях (то есть тысячах калорий). *Прим. пер.*

в виде $y = 200x$. Эту формулу можно использовать для любого количества хлеба. Например, полтора ломтика дадут 300 калорий, и соответствующая точка будет лежать на той же построенной прямой. Поэтому имеет смысл соединять все точки на таких графиках.

Я понимаю, что все это может показаться очевидным, но тем не менее хотел подчеркнуть, что в прошлом это было очевидно не всегда — ведь кто-то же должен был придумать изображать зависимость на такой абстрактной диаграмме. Это не всегда очевидно и сегодня, по крайней мере для детей при их первом знакомстве с подобными графиками.

Здесь есть определенный творческий подход. Прежде всего представление употребления пищи в виде картинки. Это требует гибкости ума. В калориях нет ничего графического. На графике нет реалистичного изображения изюминок и завитков корицы, вложенных в хлеб. Наш график — абстракция, но он дает возможность взаимодействовать различным областям математики: области чисел, таких как число калорий и ломтиков хлеба, области отношений вроде $y = 200x$ и области форм, где есть две перпендикулярные оси, а точки лежат на прямой линии. Благодаря этому слиянию идей скромная диаграмма сочетает числа, зависимости и формы, позволяя объединять арифметику, алгебру и геометрию. Различные ветви математики столетиями работали по отдельности, а теперь слились воедино. (Вспомните, что древние греки ставили геометрию выше арифметики и алгебры и не позволяли им смешиваться, по крайней мере не часто.)

Еще одно слияние относится к горизонтальной и вертикальной осям. Их часто называют осью x и осью y — по переменным, которыми мы их обычно обозначаем. Эти оси — числовые прямые. Подумайте об этом термине: *числовые прямые*. Числа представлены в виде *точек* на какой-то *прямой*. Арифметика соединена с геометрией, причем еще до того, как мы наносим какие-то данные!

Древние греки просто бы истощно орали при таком нарушении протокола. Для них числа означали исключительно дискретные количества, например целые числа и дроби. Напротив, непрерывные количества, такие как длина какой-нибудь линии, считались величинами — принципиально другими сущностями, отличными от чисел. Таким образом, почти два тысячелетия от Архимеда до начала XVII века числа не рассматривались как эквивалент континуума точек на прямой. В этом смысле идея числовой прямой была радикальным нарушением. Сегодня мы даже не задумываемся об этом и ждем, что ученики начальной школы поймут, что числа могут быть наглядно представлены таким образом.

С точки зрения древних греков здесь имеется еще одно богухульство — график полностью пренебрегает сравнением подобного с подобным, скажем яблок с яблоками или калорий с калориями. Вместо этого он показывает ломтики хлеба на одной оси и калории на другой. Их нельзя сравнивать напрямую, и тем не менее мы, не моргнув глазом, делаем это с помощью графиков. Мы просто преобразуем калории и ломтики в числа, означающие действительные числа, бесконечные десятичные дроби, универсальную валюту современной математики. Греки проводили четкие различия между длинами, площадями и объемами, но для нас это просто действительные числа.

Уравнения как кривые

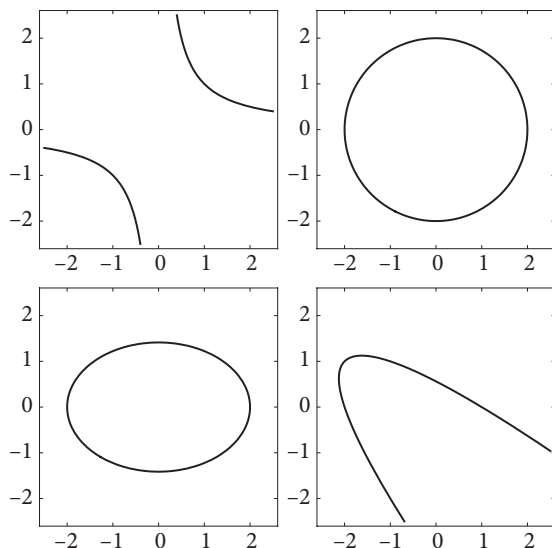
Безусловно, Ферма и Декарт никогда не использовали координатную плоскость для изучения таких осязаемых вещей, как хлеб с корицей и изюмом. Для них она была инструментом изучения чистой геометрии.

Работая независимо друг от друга, каждый из них заметил, что любое линейное уравнение (то есть уравнение, где переменные x и y появляются только в первой степени) дает прямую линию на координатной плоскости. Такая связь между линейными уравнениями и прямыми предполагала возможную связь между *нелинейными уравнениями и кривыми*. В линейное уравнение вроде $y = 200x$ переменные x и y входят в первой степени, а не возводятся во вторую, третью и любую более высокую степень. Ферма и Декарт поняли, что в ту же игру можно играть с другими степенями и уравнениями. Они могли бы составить любое уравнение, какое пожелают, сделать с x и y все что угодно — возвести одну переменную в квадрат, а другую в куб, перемножить их, сложить, да все что заблагорассудится, — а затем интерпретировать результат как кривую. С определенным везением она может оказаться интересной, возможно, даже такой, которую никто никогда не представлял, а Архимед никогда не изучал. Любое уравнение с x и y становилось новым приключением. Одновременно изменялась точка зрения: вместо того чтобы смотреть на кривую, вы начинали с уравнения и смотрели, какого рода кривую оно дает. Пересадите геометрию на заднее сиденье и дайте управлять алгебре.

Ферма и Декарт начали с рассмотрения квадратных уравнений. В них, кроме констант (например, 200) или линейных членов x и y , должны быть переменные во второй степени, то есть квадратичные члены, такие как x^2 , xy или y^2 . Возведение в квадрат традиционно интерпретировалось как поиск площади, то есть x^2 означало площадь квадрата со стороной x . В древности площадь считалась величиной, принципиально отличной от длины или объема. Однако для Ферма и Декарта x^2 было всего лишь еще одним действительным числом; это означало, что его можно отобразить на числовой прямой — ровно так же, как x , x^3 или любую иную степень x .

Сегодня предполагается, что даже школьники умеют строить графики уравнений наподобие $y = x^2$, и соответствующая кривая оказы-

вается параболой. Примечательно, что все уравнения, содержащие квадратичные члены по x и y , но не включающие члены более высоких степеней, дают кривые только четырех возможных типов: параболы, эллипсы, гиперболы и окружности. Это все. (Если не считать некоторых вырожденных случаев, когда появляются прямые, точки или графика нет вообще, но эти редкие странности мы можем смело игнорировать.) Например, квадратное уравнение $xy = 1$ дает гиперболу, $x^2 + y^2 = 4$ — окружность, а $x^2 + 2y^2 = 4$ — эллипс. Даже такая страшная на вид зависимость, как $x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = 2$, должна быть одним из четырех вышеуказанных вариантов. Оказывается, это парабола.



Ферма и Декарт первыми обнаружили это замечательное соответствие: квадратные уравнения относительно x и y представляют собой алгебраические аналоги конических сечений греков — четырех видов кривых, получающихся при сечении конуса под различными углами. Здесь, на новой арене Ферма и Декарта, вновь, подобно призракам из тумана, вынырнули классические кривые.

Вместе лучше

Новообретенная связь между алгеброй и геометрией оказалась благом для обеих областей. Каждая могла помочь компенсировать недостатки другой. Геометрия обращалась к правому полушарию мозга. Она была интуитивно понятной и наглядной, а истинность утверждений часто была видна с первого взгляда. Однако она требовала определенной изобретательности. В случае геометрии нередко не было ни единого намека, с чего начинать доказательство. Для этого требовались гениальные идеи.

Алгебра же была систематической. С уравнениями можно было разбираться спокойно, почти бездумно: вы могли добавить по одинаковой величине к их обеим частям, сократить слагаемые, выразить относительно неизвестной величины и выполнить дюжину других процедур и алгоритмов по стандартным рецептам. Алгебраические процессы могут успокаивать, как вязание. Но при этом алгебра страдала от пустоты. Ее символы были пусты. Они ничего не означали, пока им не придавали какое-то значение. Нечего было представлять наглядно. Алгебра была левополушарной и механической.

Однако вместе алгебра и геометрия были неудержимы. Алгебра дала геометрии систему. Вместо изобретательности теперь требовалось упорство. Она превращала сложные вопросы, нуждающиеся в понимании, в простые, хотя и трудоемкие вычисления. Использование символов освободило разум и сэкономило время и энергию.

Со своей стороны, геометрия придала алгебре смысл. Уравнения перестали быть бесплодными; теперь они воплощали извилистые геометрические формы. Как только уравнения стали рассматривать с точки зрения геометрии, появился целый новый континент кривых и поверхностей. Пышные джунгли геометрической флоры и фауны ждали, когда их обнаружат, каталогизируют, классифицируют и анатомируют.

Ферма против Декарта

Любой изучающий математику и физику обязательно столкнется с именами Ферма и Декарта. Однако никто из моих учителей или учебников не рассказывал об их соперничестве и о том, насколько злобным мог быть Декарт. Чтобы понять, что стояло на кону в их сражениях, вам нужно больше узнать об их жизни и амбициозных целях.

Рене Декарт (1596–1650) [6] был одним из самых амбициозных мыслителей всех времен. Дерзкий, интеллектуально бесстрашный и презирующий авторитеты, с раздутым эго, не уступавшим по масштабам его гению. Например, о греческом подходе к геометрии, который почитали все математики в течение двух тысяч лет, он пренебрежительно писал: «То, чему нас учили древние, настолько скудно и по большей части настолько ненадежно, что единственный подход к истине, на который я могу надеяться, — отказаться от всех путей, которыми они следовали» [7]. Что касается личных качеств, то он мог быть подозрительным и обидчивым. На самом известном его портрете изображен человек с изможденным лицом, надменными глазами и ехидными усами. Очень похож на мультяшного злодея.

Декарт намеревался построить человеческое знание на фундаменте разума, науки и скептицизма. Больше всего он известен своими философскими работами, которые увековечила знаменитая фраза *Cogito ergo sum* («Мыслю, следовательно, существую»). Другими словами, когда все находится под сомнением, несомненно как минимум одно: сомневающийся ум существует. Его аналитический подход, который, похоже, был вдохновлен строгой логикой математики, сегодня принято рассматривать как начало современной философии. В своей самой знаменитой книге «Рассуждение о методе» Декарт ввел новый бодрящий стиль размышления о философских проблемах, а также включил три приложения, представляющие интерес сами по себе: одно посвящено геометрии, в нем он представил свой подход к аналитической геометрии; второе — оптике, что имело большую важность в эпоху, когда телескопы,

микроскопы и линзы были новейшими технологиями; а третье — погоде, и о нем почти забыли, за исключением правильного объяснения природы радуги. Его обширного интеллекта хватало на все. Он рассматривал живое тело как систему механических устройств и помещал душу в эпифиз (шишковидное тело мозга). Он предложил грандиозную (но неверную) систему мира, согласно которой невидимые вихри пронизывали все пространство, а планеты носились, как листья в водовороте.

Декарт родился в состоятельной семье. В детстве он был болезненным ребенком, и ему разрешали оставаться в кровати и размышлять, сколько захочется, — привычка, которую он сохранил на всю жизнь, никогда не вставая до полудня. Мать умерла, когда ему исполнился всего год, но, к счастью, оставила ему значительное наследство, что позволило ему в дальнейшем вести праздную жизнь, полную приключений. Он нанялся в голландскую армию, но никогда не видел сражений*, и у него было достаточно времени для занятий философией. В Голландии он провел большую часть жизни, развивая свои идеи, общаясь и споря с другими великими мыслителями. В 1650 году он с неохотой перебрался в Швецию (которую презирал как «страну медведей, скал и льдин» [8]), согласившись стать наставником шведской королевы Кристины. К несчастью для Декарта, энергичная молодая королева вставала рано и настояла, чтобы занятия начинались в пять часов утра — безумное время для кого угодно, а тем более для Декарта, привыкшего подниматься в полдень. Та зима в Стокгольме выдалась самой холодной за последние десятилетия. Через несколько недель Декарт подхватил пневмонию и умер.

Пьер де Ферма (1601–1665) [9] был на пять лет моложе Декарта и вел спокойную размеренную жизнь представителя верхушки среднего класса. Днем он был юристом и провинциальным судьей в Тулузе, расположенной вдали от парижской суеты, а ночью — мужем

* После голландской армии в 1619 году Декарт поступил на баварскую службу и участвовал в Тридцатилетней войне — в частности, сражался в битве на Белой горе под Прагой в 1620 году. Вернувшись во Францию, он побывал на осаде Ла-Рошели. Повторно в Голландию на двадцать лет он уехал в 1628 году. *Прим. пер.*

и отцом. Придя с работы, он ужинал с женой и пятью детьми, а затем на несколько часов отдавался своей единственной истинной страсти — математике. В то время как Декарт был крупным мыслителем с колоссальными амбициями, Ферма был скромным, тихим, уравновешенным и наивным. Его цели были куда скромнее, чем у Декарта. Он не считал себя философом или ученым. Ему хватало математики. Он занимался ею как любитель, вкладывая душу. Ферма не видел необходимости публиковать свои результаты и не занимался этим. Он делал для себя небольшие заметки в книгах, которые читал, — в классических греческих трудах Диофанта и Архимеда, и время от времени отправлял свои идеи тем ученым, которые, по его мнению, могли бы их оценить. Он никогда не уезжал далеко от Тулузы и не встречался с крупными математиками своего времени, но переписывался с ними через Марена Мерсенна — францисканского монаха, математика и координатора научной жизни того времени.

Именно через Мерсенна и сцепились Ферма с Декартом [10]. Среди математиков живший в Париже Мерсенн был непререкаемым авторитетом. Во времена, предшествовавшие интернету, он связывал людей, ведя обширнейшую переписку. Однако ему в какой-то степени не хватало такта и осмотрительности. У него был талант разжигать конфликты: например, Мерсенн показывал полученные им личные письма и раскрывал конфиденциальные рукописи до их публикации. Вокруг него сложился круг математиков — не совсем, конечно, уровня Ферма или Декарта, но тем не менее достаточно сильных, которые, по-видимому, имели зуб на Декарта. Они всегда насмеялись над ним и его грандиозным «Рассуждением о методе».

Поэтому, когда Декарт услышал через Мерсенна, что некий тип в Тулузе — какой-то любитель по имени Ферма — утверждает, что разработал метод аналитической геометрии на десять лет раньше него и что тот же самый любитель (да кто он вообще такой?!) поставил под сомнение его теорию оптики, ученый счел, что ему в очередной раз строят козни. В последующие годы он яростно сражался

с Ферма и пытался погубить его репутацию [11]. В конце концов, Декарту было что терять. В «Рассуждении» он утверждал, что его аналитический метод — единственный истинный путь к знанию. И если Ферма мог превзойти его, даже не пользуясь его методом, то весь его проект оказывался под угрозой.

Декарт безжалостно чернил Ферма и в какой-то степени в этом преуспел. Работы Ферма до 1679 года никогда должным образом не публиковались. Его результаты распространялись устно или через письма, но по-настоящему были оценены только спустя долгое время после смерти. Сам Декарт добился успеха. Его «Рассуждение» стало знаменитым, и следующее поколение изучало аналитическую геометрию по нему. Даже сегодня школьники знают о декартовых координатах, хотя первым их придумал Ферма [12].

Поиск анализа, давно утерянного метода открытий

Споры между Ферма и Декартом велись в течение первой половины XVII века, когда математики мечтали найти метод анализа для геометрии [13]. Здесь слово «анализ» (как и в аналитической геометрии) следует понимать в архаическом смысле — как средство получения результатов, а не их доказательства. В то время было широко распространено подозрение, что древние располагали таким методом открытий, но намеренно скрывали его. Декарт, например, утверждал, что древние греки «обладали знаниями видов математики, весьма отличных от тех, что распространены в наше время... но я считаю, что эти авторы потом с каким-то низким коварством, поистине неблаговидным, скрыли это знание» [14].

Казалось, что символическая алгебра могла быть таким утраченным методом. Однако в более консервативных кругах она натолкнулась

на реакционный скептицизм. Когда поколение спустя Ньютон сказал: «Алгебра — это анализ для неумех в математике» [15], это было тонко завуалированное оскорбление Декарта, яркого примера «неумех», опирающихся на алгебру как на костыль при решении задач.

При такой атаке Ньютон придерживался традиционного различия между анализом и синтезом. При анализе человек решает задачу с конца, как будто ответ уже получен, а затем возвращается к началу в надежде найти путь к сделанным предположениям. Примерно так действуют школьники, когда, отталкиваясь от ответа, пытаются выяснить, как к нему добраться.

Синтез же идет другим путем. Он начинается с данных, а затем вы, шагая в темноте, пробуя разные варианты, каким-то способом шаг за шагом логически продвигаетесь к решению и в итоге получаете желаемый результат. Как правило, синтез намного сложнее анализа, поскольку вы никогда не знаете, как собираетесь добраться до решения, пока этого не сделаете.

Древние греки считали синтез более логичной и убедительной силой, нежели анализ. Они рассматривали синтез как единственный действенный способ *доказать* результат; анализ же был практическим способом *найти* результат. Если вам требовалось строгое доказательство, вы должны были использовать синтез. Вот почему Архимед применял свой аналитический метод уравнивания форм на качелях для поиска теорем, но затем переключался на синтетический метод исчерпывания, чтобы доказать их.

И хотя Ньютон смотрел на алгебраический анализ свысока, тем не менее в главе 7 мы увидим, что он использовал его с грандиозной эффективностью. Однако не Ньютон был его первым мастером, а Ферма. Изучать образ мышления Ферма очень интересно, потому что он элегантен и доступен, но в то же время чужд и удивителен. Его методы изучения кривых больше не применяются, поскольку в современных учебниках их вытеснили более совершенные способы.

Оптимизация багажной полки

Зачаточная версия дифференциального исчисления Ферма выросла из применения его алгебраических методов к задачам оптимизации [16]. Оптимизация — это изучение способов сделать что-то наилучшим образом. В зависимости от контекста *наилучший* может означать быстрейший, наибольший, самый дешевый, самый выгодный, наиболее эффективный или какое-то иное понятие оптимальности. Чтобы проиллюстрировать свои идеи самым простым способом, Ферма придумал несколько задач, очень похожих на те упражнения, которые мы, преподаватели математики, до сих пор задаем нашим ученикам. Так что они могут винить напрямую его.

Одна из этих задач, приспособленная к современным реалиям, выглядит примерно так. Представьте, что вы хотите сделать коробку, в которой помещается как можно больше вещей, при соблюдении двух ограничений. Во-первых, коробка должна быть квадратной в сечении, то есть ее ширина и длина должны быть по x сантиметров. Во-вторых, она должна помещаться на верхней багажной полке определенной авиакомпании. Согласно ее правилам перевозки багажа, сумма трех измерений любого предмета багажа (в нашем случае — суммы ширины, длины и высоты коробки) не должна превышать 45 дюймов. Какой выбор параметра x даст коробку наибольшего объема?

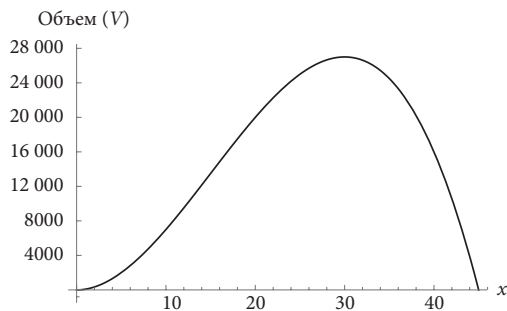
Один из способов решить задачу — использовать здравый смысл. Попробуйте несколько вариантов. Скажем, пусть длина и ширина коробки будут по 10 дюймов. Тогда на высоту останется 25 дюймов, потому что $10 + 10 + 25 = 45$. Объем коробки с такими размерами составит $10 \times 10 \times 25 = 2500$ кубических дюймов. Но, может быть, коробка кубической формы будет лучше? Поскольку у куба длина, ширина и высота одинаковы, то коробка должна иметь размеры $15 \times 15 \times 15$ дюймов, что даст объем 3375 кубических дюймов. Если вы повозитесь еще с некоторыми другими размерами, то придете к выводу, что именно куб — оптимальный выбор для формы коробки. И это действительно так.

Эта задача сама по себе не сложная, но она позволяет показать, как именно Ферма рассуждал в ходе ее решения, так как его подход привел к значительно более серьезным вещам.

Как и в большинстве алгебраических задач, первым делом следует перевести всю имеющуюся информацию в символы. Поскольку длина и ширина коробки равны x , то их сумма составит $2x$. А учитывая, что высота плюс ширина плюс длина не могут превышать 45 дюймов*, на высоту остается $45 - 2x$ дюймов. Таким образом, объем коробки равен $x \times x \times (45 - 2x)$ кубических дюймов. В результате умножения получаем $45x^2 - 2x^3$. Это и есть объем коробки. Обозначим его $V(x)$. Итак,

$$V(x) = 45x^2 - 2x^3.$$

Если мы сейчас на мгновение сжульничаем и с помощью компьютера построим график, отложив x по горизонтали, а V по вертикали, то увидим, как кривая возрастает и достигает максимума при $x = 15$ дюймов, как и ожидалось, а потом снова спускается к нулю.

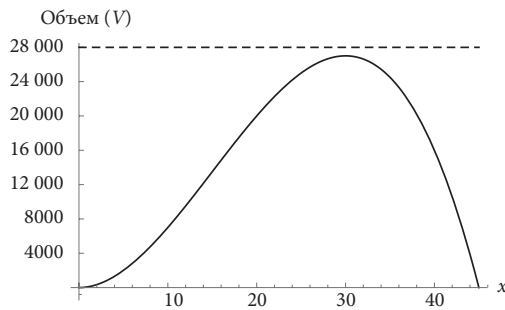
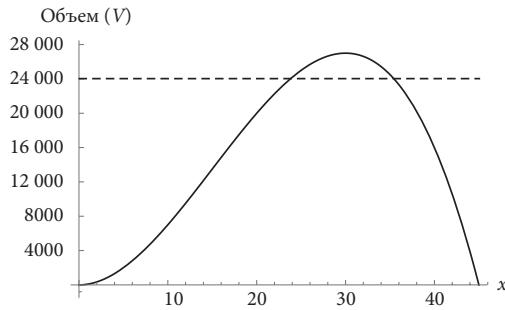


Широко используемый сегодня альтернативный способ найти это максимальное значение с помощью дифференциального исчисления — вычислить производную функции $V(x)$ и приравнять ее к нулю. В верхней точке кривой угол наклона равен нулю: кривая тут не поднимается и не опускается. Поэтому, если определять

* 1 дюйм = 2,54 см. Прим. пер.

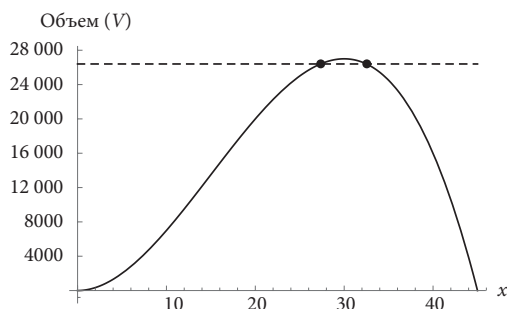
наклон через производную (как мы увидим в главе 6), то в точке максимума она должна быть равна 0. Немного алгебры и применения различных правил для производных — и мы получим для точки максимума то же самое значение $x = 30$.

Однако у Ферма не было компьютеров и графопостроителей, и, конечно же, он не оперировал понятием производной; наоборот, выдвинутые им идеи и *привели* к производным! Так как же он решал эту задачу? Он использовал особое свойство максимума: горизонтальная линия ниже максимума пересекает кривую в двух точках, как показано ниже, в то время как горизонтальные линии выше максимума вообще не пересекают кривую.



Это подсказывало интуитивную стратегию решения задачи. Представьте, что вы медленно поднимаете горизонтальную линию, начиная ниже максимума. По мере ее постепенного перемещения вверх

две точки пересечения с кривой двигаются по ней навстречу друг другу, словно бусины в ожерелье.



В максимуме эти две точки сливаются. Наблюдение за их слиянием и позволило Ферма определить максимум. Он вывел условие, при котором две точки сливаются в одну, образуя так называемое *двойное пересечение*. С такой идеей все остальное — чистая алгебра, простое манипулирование символами. Это выглядит так.

Предположим, что наши два пересечения происходят в точках $x = a$ и $x = b$. Тогда, поскольку по построению точки пересечения находятся на одной горизонтальной линии, должно быть справедливо $V(a) = V(b)$. Следовательно,

$$45a^2 - 2a^3 = 45b^2 - 2b^3.$$

Теперь полезно перегруппировать слагаемые. Перенесем квадраты в одну часть, а кубы в другую и получим

$$45a^2 - 45b^2 = 2a^3 - 2b^3.$$

Вспомнив школьную алгебру, разложим обе части на множители и получим

$$45(a-b)(a+b) = 2(a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Разделим обе части на общий множитель $a-b$. Это корректное действие, поскольку предполагается, что a и b различны (если бы они

были одинаковыми, то деление на $a - b$ означало бы деление на 0, что запрещено, как мы говорили в главе 1). В результате получим уравнение

$$45(a + b) = 2(a^2 + ab + b^2).$$

А теперь напрягитесь, чтобы разобраться в несколько смущающем логическом выводе. Ферма только что предполагал, что a и b не равны, но тем не менее утверждает, что выведенное уравнение останется верным, когда a и b станут равными — при слиянии в максимуме. Он пытается оправдать это соображение, прибегая к туманному понятию «квази-равенства» [17] («приближенного равенства», *adaequalitas*). Оно выражает идею, что a и b в точке максимума становятся в определенном смысле равными, но равными не по-настоящему (сегодня мы бы это сформулировали с помощью понятия предела или бесконечной близости). В любом случае он принимает $a \approx b$, где знак означает приближенное равенство, а затем бесцеремонно подставляет a вместо b в вышеуказанное уравнение и получает

$$45(2a) = 2(a^2 + a^2 + a^2).$$

Это уравнение упрощается до $90a = 6a^2$, откуда получаются два решения: $a = 0$ и $a = 15$. Первое, $a = 0$, дает коробку *минимального* объема с нулевой длиной и шириной, а значит и объем ее равен 0. Второе, $a = 15$, дает коробку *максимального* объема — как раз тот ответ, который мы и ожидали: оптимальная ширина и длина составляют по 15 дюймов.

С современной точки зрения рассуждения Ферма кажутся странными. Он находит максимум, не прибегая к производным. Сегодня, прежде чем решать задачи на оптимизацию, мы изучаем производные; Ферма поступал наоборот. Но это не имеет значения. Его идеи эквивалентны нашим.

Как Ферма помог ФБР

Наследие первых работ Ферма по оптимизации окружает нас повсюду. Наша нынешняя жизнь зависит от алгоритмов, которые решают задачи оптимизации с помощью условий, выражаемых производными. Современные задачи, как правило, намного сложнее, чем у французского математика, но дух остается тем же.

Одно важное применение касается больших массивов данных, когда их полезно кодировать как можно компактнее. Например, в базе ФБР миллионы отпечатков пальцев. Для их хранения, поиска и эффективного извлечения эта организация использует методы сжатия данных, основанные на анализе. Умные алгоритмы уменьшают размеры файлов с оцифрованными отпечатками без ущерба для важных деталей. То же самое верно при хранении нами на телефоне музыки или изображений. Вместо того чтобы сохранять каждую ноту и каждый пиксель, алгоритмы сжатия, используемые в форматах MP3 и JPEG [18], экономят место за счет преобразования информации в более эффективную форму. Они также позволяют нам быстро загружать песни и фотографии и отправлять их нашим близким, не слишком забывая их почтовые ящики.

Чтобы понять, какое отношение анализ и оптимизация имеют к сжатию данных, давайте рассмотрим статистическую задачу подбора какой-либо кривой, наилучшим образом соответствующей определенным данным, — задачу, которая возникает повсюду, от климатологии до бизнес-прогнозирования. Изучим данные, показывающие, как изменяется продолжительность дня в зависимости от времени года [19]. Как мы знаем, летом дни длиннее, а зимой короче, но как выглядит общая закономерность? На приведенном ниже графике я отобразил сведения для Нью-Йорка за 2018 год, отложив по горизонтальной оси время от 1 января слева до 31 декабря справа. Вертикальная ось показывает количество минут между рассветом и закатом в разное время года. Чтобы не загромождать картинку, я показал только точки для 27 дней — через каждые две недели, начиная с 1 января.

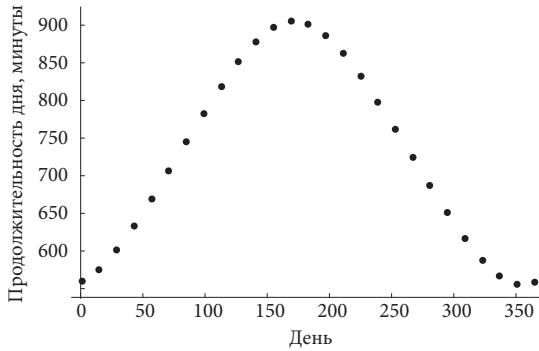
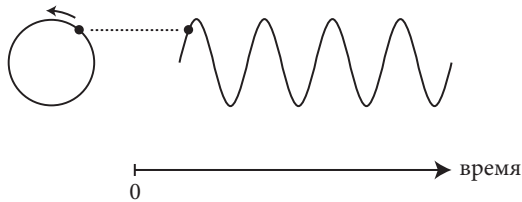


График показывает, что, как и ожидалось, в течение года продолжительность дня увеличивается и уменьшается. Самые длинные дни приходятся на период летнего солнцестояния (21 июня, что соответствует пику около 172-го дня примерно в середине графика), а самые короткие — зимнего солнцестояния, через полгода. В целом же картина напоминает некую плавную волну.

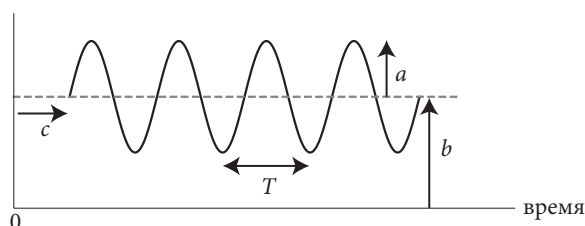
На уроках тригонометрии в школе учителя рассказывают об определенном виде такой кривой — синусоиде. Чуть позже я вам тоже более подробно объясню, что такое синусоида и почему она важна для анализа. А пока нам нужно знать, что синусоида связана с круговым движением. Чтобы увидеть связь, представьте себе точку, которая движется по окружности с постоянной скоростью. Если мы будем следить за ее положением на вертикали, рассматривая его как функцию от времени, то получится синусоида.



Поскольку окружности тесно связаны с циклами, синусоиды появляются везде, где есть циклические явления, — от смены времен года

до колебаний камертона и частоты переменного тока в 50 Гц (герц), используемого в лампах и электрических сетях. Раздражающее гудение различных бытовых приборов, как правило, представляет собой звук с частотой 50 Гц (1 Гц = 1 колебание в секунду). Это надежный признак переменного тока, вырабатываемого электрогенераторами, крутящимися с такой частотой. Там, где есть круговое движение, есть и синусоиды.

Любая синусоида полностью определяется четырьмя основными характеристиками: периодом, средним значением, амплитудой и фазой.



Эти четыре параметра истолковываются просто. Период T указывает, сколько времени требуется волне для прохождения одного полного цикла. Для рассматриваемых данных по продолжительности светового дня T составляет 365,25 дня (именно эта лишняя четверть дня — причина, по которой раз в четыре года нужен високосный год, чтобы поддерживать синхронизацию календаря с природными циклами). Среднее значение синусоиды b — это ее сдвиг по вертикали. Для нашего примера это типичное количество минут в световом дне в Нью-Йорке, усредненное по всем дням 2018 года. Амплитуда a волны говорит нам, сколько дополнительных минут света приходится на самый длинный день года по сравнению со средним днем. Наконец, фаза волны c сообщает день, когда волна на пути вверх пересекает свое среднее значение: это происходит около дня весеннего равноденствия.

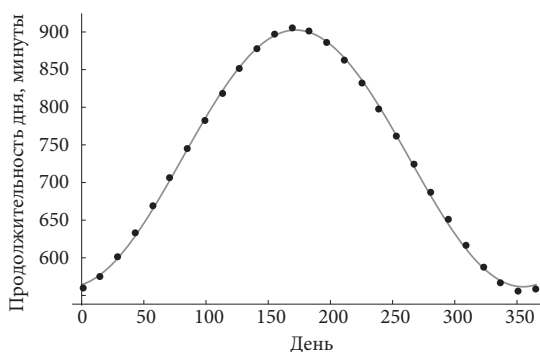
Эти четыре параметра — a, b, c, T — можно представлять как четыре рукоятки, которые позволяют регулировать форму и положение синусоиды. Они действуют так: b -рукоятка перемещает синусоиду

вверх и вниз; *c*-рукоятка двигает ее влево и вправо; *T*-рукоятка контролирует, как быстро волна колеблется, сжимая и растягивая ее по горизонтальной оси; и, наконец, *a*-рукоятка определяет, насколько сильный размах у колебаний.

Если бы мы могли каким-то образом настроить эти рукоятки так, чтобы синусоида проходила через все нарисованные нами ранее точки, то это позволило бы существенно сжать информацию и означало бы, что вместо 27 значений мы бы обошлись всего четырьмя параметрами такой подобранной синусоиды, то есть сжали бы данные в $27/4 = 6,75$ раза. В реальности же, поскольку у нас один из параметров — год, по сути, мы можем играть всего с тремя параметрами, что дает нам сжатие в $27/3 = 9$ раз. Такое уменьшение возможно, потому что наши данные не случайны. Они подчинены некоторой закономерности, а синусоида воплощает ее и делает за нас всю работу.

Единственная загвоздка — отсутствие синусоиды, которая бы идеально проходила через все точки. Этого следует ожидать при подгонке к реальным данным идеализированной модели: определенные расхождения неизбежны, но всегда есть надежда, что они окажутся незначительными. Для их минимизации требуется найти синусоиду, которая максимально близко подходит к нашим точкам. Вот тут-то и вступает анализ.

На рисунке ниже показана наилучшая синусоида, определяемая алгоритмом оптимизации, который я объясню чуть ниже.



Но сначала обратите внимание, что результирующая кривая подходит не идеально. Например, она недостаточно низка в декабре, когда дни очень короткие и данные попадают ниже кривой. Тем не менее простая синусоида, безусловно, отражает суть происходящего. В зависимости от наших целей такое качество приближения может оказаться достаточным.

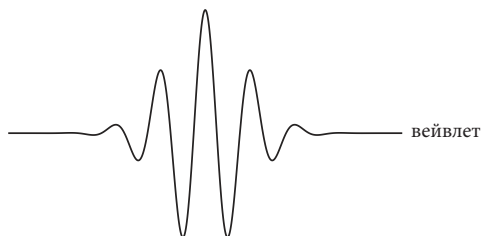
Но при чем тут анализ? Он помогает оптимально выбрать четыре параметра. Представьте, что вы поворачиваете эти четыре рукоятки, добиваясь наилучшей настройки, — нечто вроде поворота ручек на радиоприемнике для получения самого сильного сигнала. Фактически это то, что делал Ферма в задаче с багажной полкой, когда искал параметры самой вместительной коробки. Он менял единственный параметр x , длину боковой стороны коробки, и искал сигнал о максимальном объеме коробки. В нашем же случае требуется настроить четыре параметра. Однако основная идея та же. Мы должны добиться сигнала оптимальности, меняя четыре параметра.

Если подробнее, то работает это так. Мы вычисляем погрешность (иными словами, ошибку) для любого конкретного набора значений для четырех параметров, то есть разницу между соответствующей синусоидой и реальными данными во всех 27 точках года. Естественный критерий при выборе наилучшей кривой — чтобы общая ошибка по всем 27 точкам была настолько мала, насколько это возможно. Однако при этом общая ошибка — не самая удачная вещь, потому что нам не нужно, чтобы отрицательные ошибки компенсировали положительные и в результате складывалось ложное впечатление, что кривая подходит хорошо, хотя в реальности это не так. Отклонения вниз так же плохи, как и вверх, и от обоих нужно избавляться; нельзя допускать, чтобы они компенсировали друг друга. По этой причине математики рассматривают не ошибки, а *квадраты* ошибок. Такая мера отклонения будет всегда неотрицательной, и отклонения в разных точках не смогут при сложении аннулировать друг друга. (Это один из примеров практической пользы правила, что отрицательное

число, умноженное на отрицательное, будет положительным. Квадрат отрицательной ошибки дает положительную меру погрешности, как нам и нужно.) Итак, основная идея при подборе четырех параметров синусоиды — минимизировать общую квадратичную ошибку для кривой. Этот подход называется методом наименьших квадратов и работает лучше всего, когда данные подчинены какой-то закономерности, как в нашем случае.

Все это приводит к крайне важному общему выводу: именно закономерности в первую очередь и обеспечивают сжатие. Сжать можно только данные, следующие какому-то шаблону. Со случайными данными это не получится. К счастью, многие вещи, которые интересны людям — отпечатки пальцев, песни и лица, — хорошо структурированы и обладают закономерностями. Подобно тому как продолжительность дня следует простой синусоиде, фотография лица включает брови, дефекты кожи, скулы и прочие характерные признаки. В песнях есть мелодия, гармония, ритмы и динамика. В отпечатках имеются гребни, петли и завитки. Будучи людьми, мы мгновенно распознаем эти закономерности. Компьютеры тоже можно научить их распознавать. Синусоиды идеально подходят для отображения периодических закономерностей, но менее пригодны для представления более резко локализованных особенностей, таких как края ноздрей или родинок.

Для этой цели исследователи, работающие в различных областях, придумали кривые, которые называются вейвлетами [20]. Эти маленькие волны более локализованы, чем синусоиды. Они не распространяются в обоих направлениях, а сильно сконцентрированы во времени и пространстве.



Вейвлеты внезапно появляются, несколько раз колеблются, а затем исчезают. Они похожи на сигналы кардиомониторов или всплески активности, регистрируемые сейсмографами при землетрясениях. Они идеально подходят для изображения резкого всплеска при регистрации мозговых волн, толстого мазка на картине Ван Гога или морщины на лице.

ФБР использовало вейвлеты [21] для преобразования файлов с отпечатками пальцев. Со времени внедрения практики применения отпечатков в начале XX века они хранились в виде чернильных оттисков на бумажных носителях. К середине 1990-х фонды разрослись примерно до двух миллионов карточек и занимали почти половину гектара офисных площадей. Когда ФБР решило оцифровать эти досье, специалисты превратили их в полутоновые изображения с 256 уровнями серого цвета и разрешением в 500 точек на дюйм, вполне достаточным для улавливания всех мелких завитков, петель, краев гребней, разветвлений и прочих идентифицирующих деталей.

Проблема, однако, заключалась в том, что в то время на одной оцифрованной карте содержалось примерно 10 мегабайт данных, что делало невозможной быструю отправку таких файлов местным полицейским участкам. Не забывайте, что это происходило в середине 1990-х, когда самыми передовыми технологиями были модемы и факсы, а передача 10-мегабайтного файла занимала часы. К тому же обмениваться такими файлами, когда в качестве носителей чаще всего применялись дискеты на 1,5 мегабайта, достаточно трудно. Растущие требования по ускорению обработки ежедневно появляющихся тридцати тысяч новых карт с отпечатками и запросов о срочных проверках привели к острой необходимости модернизации системы. ФБР нуждалось в способе сжать файлы без искажений.

Вейвлеты идеально подходили для такой работы. Представляя отпечатки в виде комбинаций множества вейвлетов и оптимально регулируя соответствующие ручки с помощью анализа, математики

из Лос-Аламосской национальной лаборатории помогли ФБР [22] уменьшить файлы больше чем в двадцать раз. Это была революция в криминалистике. Благодаря идеям Ферма в современной форме (в сочетании с еще большей ролью вейвлет-анализа, информатики и обработки сигналов) 10-мегабайтный файл можно было сжать всего лишь до 500 килобайт, то есть до размера, вполне пригодного для отправки по телефонным линиям. И это можно было сделать, не жертвуя достоверностью. Эксперты-дактилоскописты высказали свое одобрение. То же самое сделали и компьютеры: сжатые файлы триумфально прошли через автоматическую систему идентификации ФБР. Это были хорошие новости для анализа и плохие — для преступников.

Принцип наименьшего времени

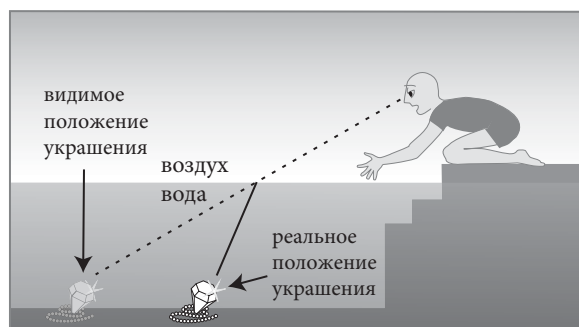
Интересно, что бы подумал Ферма о таком использовании своих идей? Он никогда особо не интересовался прикладной математикой. Ему нравилось заниматься наукой из любви к ней. Тем не менее он внес в прикладную математику один вклад непреходящей важности: первым вывел закон природы из более глубокого закона, используя анализ в качестве логического двигателя. Точно так же как Максвелл сделает с электричеством и магнетизмом два столетия спустя, Ферма перевел гипотетический закон природы на язык анализа, запустил двигатель, ввел в него один закон и получил на выходе другой как следствие первого. Сделав это, Ферма, бессистемный ученый, положил начало стилю рассуждений, который с тех пор доминирует в теоретической науке.

История началась в 1637 году, когда группа парижских математиков заинтересовалась мнением Ферма о последнем трактате Декарта, посвященном оптике. Декарт придерживался определенной теории

о том, как изгибается луч света при попадании из воздуха в воду или из воздуха в стекло (эффект, известный как преломление).

Любой, кто когда-нибудь играл с увеличительным стеклом, знает, что свет можно фокусировать, а направление луча — менять. В детстве мне нравилось поджигать листья на дорожке с помощью лупы: я поднимал и опускал ее, пока солнечные лучи не фокусировались в белое пятно большой яркости, из-за чего листья тлели и в итоге загорались. Менее зрелищным образом преломление используется в очках. Линзы в очках фокусируют лучи света так, чтобы они оказывались в нужном месте сетчатки — для исправления дефектов зрения.

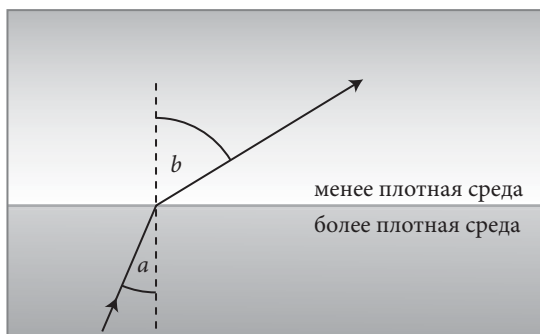
Отклонение луча также объясняет иллюзию, которую вы, возможно, наблюдали у плавательного бассейна в солнечный день. Предположим, что на дне бассейна находится некий блестящий предмет, скажем ювелирное украшение.



Вы смотрите на предмет через воду, но он оказывается совсем не там, где кажется, поскольку отраженные от него солнечные лучи преломляются на обратном пути из бассейна, переходя из воды в воздух. По той же причине рыбак, охотящийся на рыбу с острогой, должен целиться *ниже* ее видимого положения, чтобы попасть в нее.

Такие феномены преломления подчиняются простому правилу. Когда луч света переходит из менее плотной среды (например,

воздуха) в более плотную (воду или стекло), он меняет направление *в сторону* перпендикуляра между двумя средами. А при переходе из более плотной среды в менее плотную луч отклоняется *от* этого перпендикуляра, как показано на рисунке.



В 1621 году голландский ученый Виллеброрд Снелл уточнил это правило и выразил его количественно, проведя простой эксперимент. Меняя угол a входящего луча и наблюдая, как в результате меняется угол b выходящего луча, он обнаружил, что отношение $\sin a / \sin b$ для конкретной пары сред всегда остается постоянным. (Здесь $\sin$ обозначает синус — ту самую тригонометрическую функцию, волнистый график которой мы рассматривали при изучении продолжительности дня.)

Однако Снелл обнаружил, что значение $\sin a / \sin b$ зависит от материала двух сред. Воздух и вода давали одно постоянное соотношение, тогда как воздух и стекло — другое. Он понятия не имел, почему работает этот закон синусов. Он просто работал. Это был просто голый факт о свете.

Декарт повторно открыл закон синусов Снелла [23] и опубликовал его в своем труде 1637 года «Диоптрика», не подозревая, что как минимум три человека уже установили его раньше: Снелл в 1621 году, английский астроном Томас Хэрриот в 1602-м и персидский математик Абу Сад ал-Ала ибн Сахль еще в 984-м.

Декарт дал механическое объяснение закону синусов, в котором (ошибочно) предположил, что свет движется *быстрее* в более плотной среде. С точки зрения Ферма, это звучало странно и противоречило здравому смыслу. Пытаясь быть полезным и будучи наивным и простодушным человеком, тулузский провинциал изложил свои мягкие критические замечания по поводу теории Декарта и отправил их парижским математикам, которые поинтересовались его мнением.

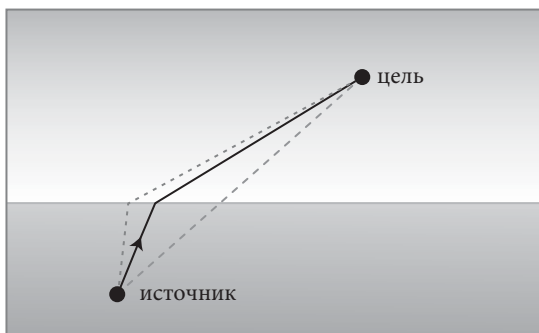
Ферма не знал, что эти люди были заклятыми врагами Декарта и использовали провинциального ученого для своих целей. И, как мог бы предвидеть даже ребенок, когда Декарт узнал о комментариях Ферма, он решил, что на него нападают. Он никогда не слышал об этом юристе из Тулузы. Для него Ферма был малоизвестным любителем-провинциалом, человеком, от которого можно легко отмахнуться, как от назойливого комара. В течение нескольких следующих лет Декарт относился к Ферма снисходительно и заявлял, что тот случайно натолкнулся на его результаты.

Однако перенесемся на двадцать лет вперед. В 1657 году, уже после смерти Декарта, врач и философ Марен Кюри де ла Шамбр попросил Ферма вернуться к старому вопросу о преломлении. Просьба Кюри побудила Ферма внимательно рассмотреть эту задачу, используя свои знания об оптимизации.

Ферма догадывался, что свет использует оптимальность. А точнее, он предположил, что свет всегда следует по пути наименьшего сопротивления между любыми двумя точками, что, по его мнению, означало, что он двигается по самому быстрому маршруту. Такой *принцип наименьшего времени* [24] объяснял, почему свет движется по прямой в однородной среде и почему при отражении от зеркала угол падения равен углу отражения. Но мог ли принцип наименьшего времени также верно объяснить, почему луч меняет направление при переходе из одной среды в другую? Мог ли он объяснить закон преломления?

Ферма не был в этом уверен. Такие вычисления не из легких. От источника в одной среде к целевой точке в другой свет может

двигаться бесконечным числом прямолинейных путей, каждый из которых изгибается на границе двух сред по-своему.



Вычислить минимум среди всех этих времен перемещения было сложно, в особенности на стадии зарождения дифференциального исчисления. У Ферма не было никаких инструментов, кроме старого метода двойного пересечения. К тому же он боялся получить неправильный ответ. Как он написал Кюри, «страх обнаружить после долгих и трудных вычислений какое-то неправильное и фантастическое соотношение, а также моя природная леность оставили этот вопрос в том же состоянии» [25].

Понадобилось пять лет, в течение которых Ферма работал над другими задачами, чтобы любопытство все же взяло верх. В 1662 году он заставил себя произвести нужные вычисления. Это было изнурительно и неприятно. Но, пробираясь сквозь заросли символов, он начал кое-что замечать. Слагаемые стали сокращаться. Алгебра работала. И вот он: закон синусов. В письме Кюри Ферма назвал эти вычисления «самыми необычными, самыми непредвиденными и самыми счастливыми» из всех, что он когда-либо делал. «Я был так удивлен этому неожиданному событию, что едва могу оправиться от изумления» [26].

Ферма применил свою зачаточную версию дифференциального исчисления к физике. До него этого никто не делал. Тем самым

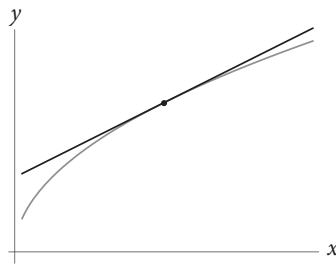
он показал, что свет двигается наиболее эффективным способом — не самым прямым путем, а самым быстрым. У света множество возможных путей, но он каким-то образом знает (или ведет себя так, словно знает), как добраться из одной точки в другую максимально быстро. Это стало важной подсказкой к тому, что анализ как-то встроен в операционную систему Вселенной.

Позже принцип наименьшего времени был обобщен до принципа наименьшего действия [27], где термин «действие» имеет технический смысл, в который нам сейчас незачем вдаваться. Было установлено: такой принцип оптимизации, согласно которому природа ведет себя наиболее экономным способом в каком-то точно определенном смысле, верно предсказывает законы механики. В XX веке принцип наименьшего действия был распространен на общую теорию относительности, квантовую механику и другие области современной физики. Он даже произвел сильное впечатление на философию XVII века, когда Готфрид Вильгельм Лейбниц сказал свою знаменитую фразу «Все к лучшему в этом лучшем из миров», и эта оптимистическая точка зрения была позднее спародирована Вольтером в «Кандиде». Идея использования принципа оптимальности для объяснения физических явлений и вывода следствий с помощью анализа зародилась именно с этого вычисления Ферма.

Схватка из-за касательных

Технические методы оптимизации Ферма также позволяли ему находить касательные к кривым. Эта задача по-настоящему приводила Декарта в бешенство.

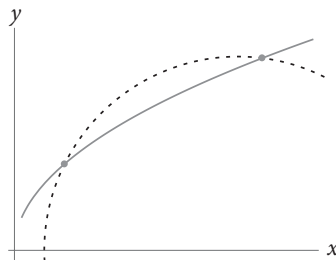
Слово «касательная» происходит от глагола «касаться». Эта прямая не пересекает кривую в двух точках, а соприкасается с ней в одной точке.



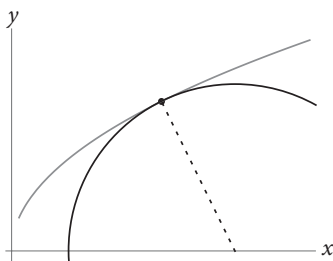
Условия касания аналогичны условиям максимума или минимума. Если мы берем прямую и пересекаем ею кривую, а затем начинаем непрерывно двигать прямую вверх или вниз, то касание возникает, когда две точки пересечения сливаются в одну.

Где-то в конце 1620-х годов Ферма научился находить касательные практически для всех алгебраических кривых (это означает, что кривая выражается многочленом различных степеней x и y ; функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными — это синусы, логарифмы и так далее). Благодаря своей идее двойного пересечения он мог вычислить все, что мы делаем сегодня с помощью производных.

У Декарта был собственный метод нахождения касательных [28]. В «Геометрии» 1637 года он с гордостью объявил о нем миру. Не подозревая, что Ферма уже решил эту задачу, Декарт независимо пришел к идее двойного пересечения, но для пересечения кривых использовал не прямые, а окружности. Вблизи точки касания типичная окружность либо пересекает кривую в двух точках, либо не пересекает вообще.



Меняя положение и радиус окружности, Декарт заставлял две точки пересечения сливаться в одну. В итоге окружность касалась кривой — бинго!



Это давало ученому возможность найти касательную к кривой. Одновременно у него получалась нормаль к кривой — прямая, перпендикулярная касательной в точке касания; по ней идет радиус построенной окружности.

Метод Декарта был верным, но неуклюжим. Приходилось производить массу вычислений, гораздо больше, чем в методе Ферма. Однако Декарт тогда даже не слышал о Ферма, поэтому в своей обычной самоуверенной манере полагал, что превзошел всех. В «Геометрии» он хвалился: «Я дам общий способ проведения прямых, пересекающих под прямыми углами кривые линии в любых точках. И я смею сказать, что эта задача является наиболее полезной и общей не только среди известных мне, но также среди всех тех задач, которые я когда-либо желал знать в геометрии»* [29].

Позднее, в 1637 году, когда Декарт узнал от своих корреспондентов в Париже, что Ферма опередил его в решении задачи о касательной примерно на десять лет, хотя так и не удосужился опубликовать его, он встревожился. В 1638 году он изучил метод Ферма, ища в нем дыры. Конечно же, их было много! В письме одному посреднику Декарт заявлял: «Я даже не хочу называть его имени, чтобы

* Цитируется по: Декарт Р. Геометрия. — М.; Л. : ГОНТИ НКТП СССР, 1938. Перевод А. П. Юшкевича. *Прим. ред.*

он не стыдился тех ошибок, что я обнаружил» [30]. Он оспаривал логику Ферма, которая, честно говоря, была расплывчатой и плохо объясненной. Но в конце концов, после обмена несколькими письмами, в которых Ферма спокойно пытался объяснить свои идеи, Декарт был вынужден согласиться, что рассуждения оппонента верны.

Однако, прежде чем признать поражение, он попытался озадачить тулузского математика, предложив ему найти касательную к кривой, определяемой кубическим уравнением $x^3 + y^3 = 3axy$, где величина a представляла собой константу. Декарт знал, что с помощью своего неуклюжего метода, использующего окружности, сам он не смог бы ее найти — алгебраические вычисления стали неуправляемыми, поэтому с уверенностью полагал, что и Ферма не справится с задачей с помощью своего метода с применением прямых. Однако Ферма был более сильным математиком и его метод был лучше, поэтому, к немалой досаде Декарта, он разобрался с задачей без особых усилий.

Глядя на землю обетованную

Ферма заложил основы анализа в его современной форме. Его принцип наименьшего времени показал, что оптимизация глубоко вплетена в ткань природы. Работы по аналитической геометрии и касательным проложили путь к дифференциальному исчислению, по которому вскоре последовали другие. А виртуозное владение алгеброй позволило ему определить площади под некоторыми кривыми, которые не смогли найти даже его самые выдающиеся предшественники. В частности, он вычислил площадь под кривой $y = x^n$ для любого положительного целого n (другие математики решили задачу для первых девяти случаев, $n = 1, 2, \dots, 9$, однако не смогли найти решение для всех n) [31]. Прорыв Ферма был колоссальным

шагом в сторону интегрального исчисления, который закладывал фундамент для будущих прорывов.

И тем не менее его исследования не дотянули до секрета [32], который вскоре откроют Ньютон и Лейбниц, — секрета, который революционизировал и объединил обе стороны анализа. Жаль, что это не удалось Ферма, ведь он подобрался очень близко. Недостающее звено имело отношение к тому, что он придумал, но не считал важным — нечто скрытое в его методе максимумов и касательных. Позднее это назовут производной. Их использование выйдет далеко за рамки кривых и касательных и включит все виды изменений.

Перекресток

Итак, мы подошли в нашей истории к перекрестку. Именно здесь анализ становится современным и переходит от загадки кривых к изучению загадок движения и изменений. Именно здесь анализ начинает интересоваться ритмами Вселенной, ее взлетами, падениями и закономерностями. Анализ больше не довольствуется статическим миром геометрии: он увлекается динамикой. Он спрашивает: каковы правила движения и изменений? Что мы можем уверенно предсказать о будущем?

За четыре столетия, прошедшие с тех пор, как анализ оказался на этом перекрестке, он ушел от алгебры и геометрии в сторону физики и астрономии, биологии и медицины, инженерии и технологий, то есть во все сферы, где есть нескончаемые перемены. Анализ математизировал время и вселил в нас надежду, что мир, в котором мы живем, при всех его несправедливостях, страданиях и хаосе, глубоко в своем сердце, где он следует математическим законам, может быть разумным. Иногда мы можем найти эти законы с помощью науки. Иногда можем понять их с помощью анализа. А иногда можем использовать, чтобы улучшить нашу жизнь, помочь обществу и изменить ход истории к лучшему.

Поворотный момент в истории анализа произошел в середине XVII века, когда загадки кривых, движения и изменений столкнулись на двумерной сетке — координатной плоскости Ферма и Декарта. В тот момент Ферма и Декарт понятия не имели, насколько универсальный инструмент создали. Они задумывали прямоугольную

систему координат для использования в чистой математике. Но с самого начала она тоже стала своего рода перекрестком, где уравнения встречались с кривыми, алгебра — с геометрией, а математики Запада — с коллегами с Востока. Далее, уже в следующем поколении, Исаак Ньютон, опираясь на их работы и на труды Кеплера и Галилея, объединил геометрию и физику в великом синтезе. Искра Ньютона зажгла тот огонь, который дал старт эпохе Просвещения и революции в западной науке и математике.

Однако для изложения этой истории нам нужно начать с арены, где все это происходило, — координатной плоскости. Когда сегодня учащиеся начинают заниматься анализом, они проводят на ней массу времени. Название соответствующего предмета — *математический анализ функций одной переменной*. Мы займемся этой темой в нескольких следующих главах. Сейчас же начнем с функций.

За столетия, прошедшие с тех пор, как кривые столкнулись с движением и изменениями, важность координатной плоскости существенно увеличилась. Сегодня она применяется везде для графического представления данных и выявления скрытых закономерностей. Мы можем использовать ее, чтобы увидеть, как одна переменная зависит от другой, как соотносятся x и y , когда все остальное постоянно. Такие отношения моделируются с помощью функций одной переменной. Символически это записывается как $y = f(x)$, что читается « y равно f от x ». Здесь f обозначает функцию, описывающую, как переменная y (называемая *зависимой* переменной) зависит от переменной x (*независимой* переменной), если предполагается, что все остальное зафиксировано и неизменно. Такие функции моделируют, как ведет себя мир в самом чистом виде. Причина вызывает прогнозируемый результат. Доза вызывает прогнозируемый эффект. Говоря формально, функция f — это правило, по которому каждому значению x сопоставляется некоторое значение y . Это похоже на машину ввода-вывода: на вход подается число x , а на выходе она выдает число y и делает это предсказуемо и надежно.

Галилей осознал мощь такого намеренного упрощения реальности за несколько десятилетий до Ферма и Декарта. Он аккуратно менял в своих экспериментах ровно одну вещь, не трогая все остальные. Он позволял шару катиться по наклонной плоскости и измерял, как далеко он продвинется за определенное время. Красиво и просто: расстояние как функция времени. Точно так же Кеплер изучал, сколько времени требуется планете для оборота вокруг Солнца, он связал этот период со средним расстоянием от светила. Одна переменная сравнивается с другой, период — с расстоянием. Это был путь к прогрессу и способ прочитать великую книгу природы.

В предыдущих главах мы уже встречались с примерами функций. Когда мы говорили о хлебе с корицей и изюмом, x было количеством съеденных ломтиков, а y — количеством потребленных калорий. В этом случае взаимосвязь выражалась уравнением $y = 200x$, что дает на координатной плоскости прямую линию. Еще один пример — изменение продолжительности дня в Нью-Йорке в 2018 году в зависимости от времени года. Там переменная x означала день года, а переменная y — количество минут светового дня, то есть время от восхода до захода солнца. Мы установили, что график в этом случае колеблется, словно синусоида: с самыми длинными днями летом и самыми короткими — зимой.

Функция функций

Некоторые функции настолько важны, что на инженерном калькуляторе для них отведены отдельные кнопки. Среди таких математических знаменитостей — x^2 , $\lg x$ или 10^x . Следует признать, что большинству людей они не нужны. Отсчитать сдачу или определить размер чаевых вполне можно и без них. В повседневной жизни арифметики обычно вполне достаточно. Вот почему, когда вы включаете на телефоне

приложение «Калькулятор», вам по умолчанию показывают базовый вариант с цифрами от 0 до 9, четырьмя арифметическими операциями — сложением, вычитанием, умножением и делением — и кнопкой для процентов. Этого хватает для ведения дел большинству из нас.

Однако для технических профессий числа — это только начало. Ученым, инженерам, финансовым аналитикам, медицинским исследователям приходится работать с *отношениями* между числовыми величинами, которые показывают, как одна величина влияет на другую. Для описания подобных взаимосвязей и необходимы функции. Они предоставляют инструменты, которые нужны для моделирования движения и изменения.

Вообще говоря, вещи могут меняться одним из трех способов: увеличиваться, уменьшаться или с ними может происходить и то и другое. Иными словами, они могут расти, снижаться или колебаться. Для разных случаев подходят разные функции. Поскольку на следующих страницах мы встретимся с различными функциями, имеет смысл вспомнить некоторые самые полезные из них.

Степенные функции

Для количественного выражения роста часто используются *степенные функции*, например x^2 или x^3 , где переменная x возводится в какую-нибудь степень.

Простейшая из таких функций — линейная, когда зависимая переменная y растет прямо пропорционально x . Например, если y — количество калорий, потребленных при съедании 1, 2 или 3 ломтиков хлеба с изюмом и корицей, то y растет в соответствии с уравнением $y = 200x$, где x — это число ломтиков, а 200 — количество калорий, приходящееся на каждый ломтик. Однако в данном случае отдельная кнопка x на калькуляторе не понадобится; мы просто умножаем 200 на количество ломтиков и получаем количество калорий.

А вот для следующей по иерархии степени роста (квадратичный рост) наличие отдельной кнопки x^2 будет весьма полезным. Квадратичный рост интуитивно не так понятен, как линейный. Например, если мы опять изменяем x с 1 до 2 и 3 и задаемся вопросом, как меняются соответствующие значения $y = x^2$, то видим, что они проходят значения $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$. Поэтому значения y прирастают все быстрее: сначала $\Delta y = 4 - 1 = 3$, потом $\Delta y = 9 - 4 = 5$. Если продолжать, будут появляться последующие нечетные числа: 7, 9, 11 и так далее. Таким образом, при квадратичном росте с увеличением x растет не только значение функции, но и само изменение значений. Сам рост растет быстрее.

Мы уже сталкивались с этой любопытной закономерностью в экспериментах Галилея с наклонной плоскостью, в которых он измерял время качения шаров. Он заметил, что, когда шар выходил из состояния покоя, он катился со временем все быстрее и с каждым последующим приращением времени проходил все большее расстояние, причем последовательно пройденные расстояния возрастали пропорционально нечетным числам 1, 3, 5 и так далее. Галилей пришел к выводу, что эта загадочная закономерность означает следующее: общее расстояние, пройденное шаром, пропорционально не времени, а *квадрату* времени. Таким образом, квадратичная функция x^2 возникла при изучении движения весьма естественно.

Показательные функции

В отличие от умеренно растущей степенной функции x или x^2 , показательная (или экспоненциальная) функция, например 2^x или 10^x , описывает гораздо более взрывной вид роста, который увеличивается подобно снежному кому и подпитывает сам себя. При экспоненциальном росте на каждом шаге происходит не *прибавление*

постоянной величины, как при линейном росте, а *умножение* на постоянный коэффициент.

Например, численность популяции бактерий, живущей в чашке Петри, удваивается каждые 20 минут. Если вначале было 1000 бактерий, то через 20 минут их станет 2000. Еще через 20 минут — 4000, а через последующие такие же 20-минутные интервалы — 8000, 16 000, 32 000 и так далее. В этом примере в игру вступает показательная функция 2^x . В частности, если мы измеряем время в 20-минутных интервалах, то в чашке после x единиц времени будет 1000×2^x бактерий. Подобный экспоненциальный рост характерен для многих быстрых процессов — от размножения настоящих вирусов до вирусного распространения информации в социальной сети.

Экспоненциальный рост также имеет отношение к увеличению денежных средств. Представьте себе сумму в 100 долларов, лежащую на банковском счете, при этом годовая ставка составляет 1 процент. Через год на счету будет $100 \times 1,01 = 101$ доллар. Через два года — $101 \times 1,01 = 102,01$. Через x лет на счете будет лежать $100 \times 1,01^x$ долларов.

У показательных функций вроде 2^x или $1,01^x$ числа 2 или 1,01 называются основаниями. Чаще всего используется основание 10. Никаких математических причин выбора именно этого числа не существует. Его распространение обусловлено случайностью биологической эволюции: у нас оказалось 10 пальцев. Соответственно, и десятичная система в нашей арифметике основана на степенях числа 10.

По той же причине показательная функция, с которой начинающие ученые сталкиваются обычно еще в школе, — это 10^x . Число x называется показателем экспоненциальной функции. Когда x равно 1, 2, 3 или любому иному целому положительному числу, эта величина указывает, сколько раз число 10 умножается на себя. Однако когда x равен 0, отрицательному или дробному числу, то значение 10^x определяется несколько сложнее. Сейчас мы это увидим.

Степени десятки

В науке масса ситуаций, требующих использования степени 10 для облегчения вычислений. В частности, так называемая экспоненциальная запись удобна для очень больших или очень маленьких чисел. Она использует степени 10, чтобы выразить число максимально компактно.

Возьмем число 21 триллион, о котором сегодня много говорят в связи с государственным долгом США. Его можно записать как 21 000 000 000 000 в десятичной системе счисления, либо как $21 \times 10^{12} = 2,1 \times 10^{13}$ в экспоненциальном представлении. Если по какой-то причине нам понадобится умножить это число, скажем, на миллиард, то гораздо проще написать $2,1 \times 10^{13} \times 10^9 = 2,1 \times 10^{13+9} = 2,1 \times 10^{22}$, чем отслеживать все нули в обычной десятичной записи.

С первыми тремя степенями 10 мы встречаемся каждый день.

1	$10^1 = 10$
2	$10^2 = 100$
3	$10^3 = 1000$

Обратите внимание на закономерность: в левой колонке x растет *аддитивно*, тогда как в правой 10^x растет *мультипликативно*, как мы и ожидаем при экспоненциальном росте. В левой колонке каждый шаг добавляет 1 к предыдущему числу, в то время как в правой — умножает предыдущее число на 10. Это интригующее соответствие между сложением и умножением — отличительная черта показательных функций в целом и степеней 10 в частности.

Из-за такого соответствия между колонками справедливо следующее: *сложение* двух чисел в левой колонке соответствует *умножению* чисел в правой колонке. Например, $1 + 2 = 3$ слева переводится в $10 \times 100 = 1000$ справа. Такой переход от сложения к умножению имеет смысл, потому что

$$10^{1+2} = 10^3 = 10^1 \times 10^2.$$

Таким образом, когда мы перемножаем степени 10, их показатели складываются, как в нашем случае 1 и 2. Общее правило таково:

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}.$$

Аналогичным образом *вычитание* в левой колонке соответствует *делению* в правой:

$$3 - 2 = 1 \text{ соответствует } 1000/100 = 10.$$

Эти изящные закономерности подсказывают, как продолжить обе колонки в сторону все меньших и меньших чисел. Принцип такой: всякий раз, вычитая 1 в левой колонке, делим на 10 в правой. Теперь снова посмотрим на верхние строки:

1	$10^1 = 10$
2	$10^2 = 100$
3	$10^3 = 1000$

Поскольку вычитание 1 слева соответствует делению на 10 справа, соответствие продолжается в новом ряду сверху, где будет $1 - 1 = 0$ слева и $10/10 = 1$ справа:

0	$10^0 = 1$
1	$10^1 = 10$
2	$10^2 = 100$
3	$10^3 = 1000$

Это рассуждение объясняет, почему 100 определяется как 1 (и должно определяться таким образом) — действие, которое озадачивает многих людей. Любой другой выбор нарушил бы закономерность. Это единственное определение, которое продолжает тенденции, установленные в двух колонках.

Действуя в том же духе, мы можем экстраполировать соответствие еще дальше, в область отрицательных чисел в левой колонке. Тогда справа появятся дроби, соответствующие степеням 10:

-2	$1/100$
-1	$1/10$

0	1
1	10
2	100
3	1000

Обратите внимание, что числа справа всегда остаются положительными, в то время как слева становятся нулем или отрицательными.

Потенциальная когнитивная ловушка при использовании степеней 10 заключается в том, что они могут заставить сильно различающиеся числа казаться ближе, чем они есть на самом деле. Чтобы избежать ее, имеет смысл сделать вид, что различные степени десяти образуют принципиально разные категории. Иногда человеческие языки делают это сами, присваивая различным степеням десятки собственные названия, как если бы это были неродственные виды. Например, для 10, 100 и 1000 у нас есть три не связанных между собой слова «десять», «сто» и «тысяча». Это хорошо и отражает правильную идею, что эти числа качественно различны, хотя и являются соседними степенями числа 10. Любой, кто ценит разницу между пятизначной и шестизначной зарплатой, знает, что один лишний нолик имеет очень большое значение.

Когда слова для обозначения степеней десятки звучат похоже, мы путаемся. Во время президентской кампании 2016 года сенатор Берни Сандерс часто выступал против чрезмерных налоговых льгот для «миллионеров и миллиардеров». Неважно, согласны вы с этой политикой или нет, но, к сожалению, его фраза звучала так, словно с точки зрения благосостояния миллионеры и миллиардеры сопоставимы. На деле же миллиардеры гораздо богаче миллионеров. Чтобы понять, насколько миллион отличается от миллиарда, подумайте о них так: миллион секунд — это чуть меньше двух недель, а миллиард секунд — это примерно 32 года. Первое — это продолжительность одного отпуска, второе — значительная часть жизни.

Это говорит о том, что со степенями десятки нужно обращаться с осторожностью. Это мощные средства сжатия, способные

уменьшить гигантские числа до размеров, которые нам проще оценить. По той же причине они так популярны среди ученых. В контекстах, где какие-то количества меняются на несколько порядков по величине, степени десятки часто применяют для создания удобной измерительной шкалы. Примеры включают шкалу pH кислотности и шкалу щелочности, шкалу Рихтера для магнитуды землетрясений, измерение громкости с помощью децибел. Скажем, если показатель pH раствора меняется с 7 (нейтральный раствор, как чистая вода) до 2 (кислый раствор, как лимонный сок), то концентрация ионов водорода увеличивается по величине на пять порядков, то есть в 10^5 , или в сто тысяч раз. Снижение показателя pH с 7 до 2 может показаться всего лишь пятью крошечными шажками, как бы совсем небольшим изменением, хотя на самом деле концентрация ионов водорода изменяется в сто тысяч раз.

Логарифмы

В рассмотренных выше примерах числа в правой колонке, например 100 и 1000, всегда были круглыми. Поскольку степени десятки настолько удобны, было бы здорово, если бы мы могли выражать аналогичным образом и некруглые числа. Возьмем, к примеру, 90. Раз 90 немного меньше 100, а $100 = 10^2$, то, видимо, 90 — это 10 в степени, немного меньшей, нежели 2. Но в какой именно?

Для ответа на такие вопросы и были изобретены десятичные логарифмы [1]. Если на калькуляторе вы наберете 90, а затем нажмете кнопку $\lg$, то получите

$$\lg 90 = 1,9542\dots$$

Это и есть ответ: $10^{1,9542\dots} = 90$.

Таким образом, логарифмы позволяют нам записать любое число как степень десятки. Это упрощает многие вычисления, а также

раскрывает удивительные связи между числами. Посмотрите, что произойдет, если мы умножим 90 на коэффициент 10 или 100, а затем снова найдем его логарифм:

$$\lg 900 = 2,9542\dots$$

и

$$\lg 9000 = 3,9542\dots$$

Обратите внимание на две поразительные вещи:

1. У всех таких логарифмов одинаковая дробная часть: 0,9542...
2. Умножение исходного числа 90 на 10 увеличивает его десятичный логарифм на 1. Умножение на 100 увеличивает логарифм на 2 и так далее.

Мы можем объяснить оба факта, обратившись к правилу: *логарифм произведения равен сумме логарифмов*. Из него следует, что

$$\lg 90 = \lg(9 \times 10) = \lg 9 + \lg 10 = 0,9542\dots + 1$$

и

$$\lg 900 = \lg(9 \times 100) = \lg 9 + \lg 100 = 0,9542\dots + 2$$

и так далее. Это объясняет, почему у десятичных логарифмов чисел 90, 900 и 9000 будет одинаковая дробная часть: 0,9542... Она соответствует логарифму числа 9, которое входит множителем в эти числа. Различные степени числа 10 дают целую часть этих чисел (в нашем случае 1, 2 и 3). Вследствие этого нам достаточно работать с десятичными логарифмами чисел от 1 до 10. Они отвечают за дробную часть. Логарифмы всех остальных положительных чисел можно будет выразить через них. У степеней десятки собственная работа: они отвечают за целую часть.

Общее правило для логарифмов в символической форме можно записать следующим образом:

$$\lg(a \times b) = \lg a + \lg b.$$

Другими словами, когда мы умножаем два числа и ищем логарифм произведения, результатом будет сумма (а не произведение!) логарифмов отдельных сомножителей. В этом смысле логарифмы заменяют задачу умножения задачей сложения, которая *намного* проще. Вот почему они, собственно, и были изобретены. Они неизмеримо ускорили вычисления. Вместо того чтобы прикладывать геркулесовые усилия для задач умножения, нахождения квадратных и кубических корней и прочего, математики свели такие вычисления к задачам сложения и эти расчеты стали производиться с помощью готовых таблиц логарифмов. В начале XVII века идея логарифмов уже витала в воздухе, но значительная заслуга в их популяризации принадлежит шотландскому математику Джону Неперу, который в 1614 году опубликовал свое «Описание удивительной таблицы логарифмов». Десять лет спустя Иоганн Кеплер с энтузиазмом использовал новые вычислительные инструменты при составлении астрономических таблиц для положений планет и других небесных тел. Логарифмы были суперкомпьютерами своей эпохи.

Многие люди считают логарифмы сложными, но их смысл можно понять, если провести аналогию с плотницкими работами. Логарифмы и другие функции подобны инструментам. У разных инструментов — разное назначение. Молотки предназначены для забивания гвоздей; дрели — для сверления отверстий; пилы — для разрезания на части. Аналогично показательные функции предназначены для моделирования роста, который подпитывает сам себя, а степенные функции — для моделирования менее агрессивных видов возрастания. Логарифмы полезны по той же причине, что и антистеплер, удаляющий скобки: они отменяют действие другого инструмента.

Конкретнее говоря, логарифмы отменяют действие показательных функций, и наоборот.

Рассмотрим показательную функцию 10^x и применим ее к какому-нибудь числу, например 3. В результате получим 1000. Чтобы отменить это действие, нажмем кнопку $\lg x$. Применив ее к числу 1000, мы вернемся к исходному числу 3. Функция $\lg x$ — логарифм по основанию 10 — отменяет действие функции 10^x . В этом смысле указанные функции являются обратными одна другой.

Кроме выполнения роли обратной к показательной функции, логарифмы также описывают многие природные явления. Например, наше восприятие высоты тона примерно логарифмическое. Когда высота тона поднимается на последовательные октавы, от одной ноты *до* до следующей, такое повышение соответствует последовательным удвоениям частоты соответствующих звуковых волн. Хотя при каждом повышении на октаву волны колеблются вдвое быстрее, мы слышим эти удвоения — которые представляют собой *мультипликативные* изменения частоты — как равные повышения в тоне, то есть равные *аддитивные* шаги. Поразительно! Наш мозг дурачит нас, заставляя считать, что 1 так же отстоит от 2, как 2 от 4, 4 от 8 и так далее. Каким-то образом мы ощущаем частоту (впрочем, как и громкость) логарифмически.

Натуральный логарифм и его показательная функция

Каким бы полезным ни было основание 10 в пору своего расцвета, в современном анализе оно редко используется, уступив место другому основанию, которое хоть и выглядит заумно, но оказывается куда более естественным, нежели 10. Оно называется числом e и примерно равно 2,718 (чуть позже я объясню, откуда оно берется), однако его численное значение неважно. Важно то, что показательная функция с этим основанием растет со скоростью, равной самой этой показательной функции.

Позвольте повторить это еще раз.

Скорость роста функции e^x в точности равна e^x .

Это чудесное свойство упрощает все вычисления с показательными функциями, если они выражены по основанию e . Ни одно другое основание не может похвалиться такой простотой. Работаем ли мы с производными, интегралами, дифференциальными уравнениями или другими инструментами анализа, показательные функции с основанием e всегда самые удобные, самые элегантные и самые красивые.

Помимо роли в упрощении анализа, основание e естественным образом возникает в сфере финансов и банковском деле. Следующий пример показывает, как оно появляется и как определяется.

Представьте, что вы положили в банк 100 долларов при немислимой, но крайне соблазнительной ставке в 100 процентов годовых. Это означает, что через год ваши 100 долларов превратятся в 200. Теперь начнем сначала и рассмотрим еще более благоприятный сценарий. Допустим, вы убедили банк начислять проценты дважды в год, чтобы вы могли пользоваться процентами с процентов по мере роста вклада. Сколько вы заработаете в этом случае? Учитывая, что вы просите банк начислять проценты вдвое чаще, справедливо, чтобы процентная ставка за полгода составила половину, то есть 50 процентов. Тогда через 6 месяцев вы получите $100 \times 1,5 = 150$ долларов. А за следующие 6 месяцев, в конце года, сумма вырастет еще на 50 процентов и на вашем счету будет $150 \times 1,50 = 225$ долларов. Это больше, чем вы получали по первоначальной договоренности, поскольку теперь вам начисляют проценты на проценты.

Теперь ответим на вопрос, что произойдет, если вы сможете убедить банк начислять проценты еще чаще, пропорционально уменьшая процентную ставку для каждого периода начисления? Станете ли вы баснословно богаты? К сожалению, нет. Если начислять проценты раз в квартал (то есть четыре раза в год), то в конце года на счету будет $100 \times 1,25^4 \approx 244,14$ доллара — не намного больше

по сравнению с 225. Если начислять проценты каждый день, то есть 365 раз в год, то вы получите в конце года всего лишь

$$100 \times \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 271,46.$$

Эта формула означает, что каждый день ваш вклад увеличивается на $1/365$ часть и это увеличение происходит 365 дней подряд.

Наконец, предположим, что начисление процентов происходит еще чаще. Пусть банк начисляет их n раз в год, где n — очень большое число, но при этом ставка пропорционально уменьшается и при каждом начислении составляет $1/n$. Тогда аналогично случаю с 365 начислениями для итоговой суммы получаем формулу

$$100 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Если устремить n к бесконечности, то итоговая величина вклада будет в 100 раз больше, чем предел величины $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при стремлении n к бесконечности. Этот предел и определяется как число e . Как его вычислить, вовсе не очевидно, но это предельное значение приблизительно равно 2,71828...

В банковском деле описанная финансовая конструкция называется *непрерывным начислением процентов*. Наши результаты показывают, что тут нет ничего чрезвычайного. В описанном примере через год ваш вклад составил бы $100 \times e \approx 271,83$ доллара. Это самый лучший возможный результат, но такая сумма всего на 37 центов больше, чем результат начисления раз в день.

Мы перепрыгнули через множество препятствий, чтобы определить e . В итоге e оказалось хитрым пределом. В него встроена бесконечность точно так же, как и в число π для окружностей. Вспомните, что π включает вычисление периметра многоугольников, вписанных в окружность. Такие многоугольники приближаются к окружности по мере того, как количество их сторон n стремится к бесконечности, а длина каждой стороны стремится к нулю. Число e определяется во многом сходным образом, за исключением того,

что появляется в другом контексте — при непрерывном начислении процентов.

Показательная функция с основанием e (ее часто называют экспонентой) обозначается e^x , подобно тому как показательная функция с основанием 10 записывается как 10^x . Поначалу это выглядит странно, но на структурном уровне никаких отличий от основания 10 нет. Все принципы и закономерности те же. Например, если мы хотим найти такое число x , чтобы e^x равнялось определенному числу, например 90, мы можем снова использовать логарифмы, как и раньше, но теперь в игру вступает логарифм по основанию e , который называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$. Чтобы найти такое число x , чтобы $e^x = 90$, включите инженерный калькулятор, введите 90, нажмите кнопку $\ln x$ и получите ответ:

$$\ln 90 \approx 4,4498.$$

Для проверки держите это число на экране и нажмите кнопку e^x . Должно получиться 90. Как и раньше, натуральный логарифм и экспонента отменяют действие друг друга, как степлер и антистеплер.

Как бы странно это ни звучало, натуральный логарифм крайне полезен на практике, хотя часто это и незаметно. Прежде всего он лежит в основе эмпирического правила, известного банкирам и инвесторам как «правило 72». Чтобы примерно оценить, через какое время удвоится ваш вклад при данной годовой ставке доходности, нужно разделить 72 на эту ставку. Например, при ставке 6 процентов годовых деньги удвоятся приблизительно через $72 / 6 = 12$ лет. Это эмпирическое правило следует из свойств натурального логарифма и экспоненциального роста и хорошо работает при низких процентных ставках*.

* Другие названия этого эмпирического правила — правило 69 или правило 70. Число 69 дает более точные результаты, однако у числа 72 больше делителей, поэтому оно удобнее для устного подсчета. *Прим. пер.*

Кроме того, натуральные логарифмы стоят за радиоуглеродным датированием древних деревьев и костей, а также применяются для определения подлинности произведений искусства. В одном известном случае картины, которые приписывались Вермееру [2], оказались подделками, что было выявлено с помощью распадающихся изотопов свинца и радия в краске. Как показывают эти примеры, натуральный логарифм сейчас проникает во все области, где есть экспоненциальное увеличение или уменьшение*.

Механизм экспоненциального изменения

Повторю самый важный момент, который выделяет e среди других оснований: скорость изменения функции e^x — это e^x . Следовательно, по мере подъема графика экспоненты ее наклон увеличивается в соответствии с текущей высотой. Чем выше поднимается график, тем круче становится. На языке анализа это утверждение звучит так: e^x — это ее собственная производная. Ни одна другая функция не может этим похвастаться**. Это самая удачная из всех функций, по крайней мере, когда дело касается анализа.

Хотя основание e и уникально, остальные показательные функции подчиняются аналогичному принципу возрастания. Разница только в том, что у них рост не строго *равен* текущему значению функции, а *пропорционален* ему. Тем не менее этой пропорциональности достаточно, чтобы обеспечить ту взрывную мощь, которую мы связываем с экспоненциальным ростом.

Объяснение для такой пропорциональности должно быть интуитивно понятным. Например, в случае бактерий крупные популяции растут быстрее, потому что чем больше клеток, тем больше

* Вообще говоря, все логарифмы, с любым основанием, абсолютно взаимозаменяемы, поскольку $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$. Поэтому утверждать, что, например, за радиоуглеродным анализом стоят именно натуральные алгоритмы, можно лишь с определенной натяжкой. *Прим. ред.*

** С точностью до постоянного множителя — этим свойством обладает любая функция вида $y(x) = Ce^x$, где C — произвольная константа. *Прим. ред.*

возможностей для деления и воспроизведения потомства. То же самое относится и к количеству денег на счете с постоянной ставкой годовых. Чем больше денег, тем больше начисляется процентов, а потому и сумма на счете растет быстрее.

Этот эффект также объясняет вой микрофона, когда он улавливает звук собственного динамика. Динамик содержит усилитель, который делает звук громче. Фактически он умножает уровень громкости на постоянный коэффициент. Если этот более громкий звук улавливается микрофоном, а затем снова отправляется к усилителю, то громкость звука будет многократно увеличиваться в цепи положительной обратной связи. Это вызывает экспоненциальный рост громкости, которая нарастает пропорционально текущему значению, что и приводит к ужасающему визгу.

По той же причине экспоненциальный рост имеет отношение к ядерным цепным реакциям. Когда ядро атома урана распадается, испускаются нейтроны, которые потенциально могут сталкиваться с ядрами других атомов и вызвать их расщепление. От этого появляются новые нейтроны и процесс пойдет далее. Если не остановить такое экспоненциальное увеличение количества нейтронов, оно может привести к ядерному взрыву.

Показательными функциями наряду с ростом можно описать и уменьшение. Оно происходит, когда величина уменьшается или потребляется со скоростью, пропорциональной ее текущему уровню. Например, половина атомов в отдельном куске урана распадается всегда за одно время — вне зависимости от того, сколько атомов в куске было изначально. Это время известно как период полураспада. Аналогичное понятие (например, период полувыведения) применимо и к другим областям. В главе 8 мы обсудим, что врачи узнали о СПИДе после того, как обнаружилось, что количество вирусных частиц в крови ВИЧ-инфицированных пациентов экспоненциально (с периодом полувыведения в двое суток) снизилось после ввода чудесного препарата под названием ингибитор протеазы.

Эти разнообразные примеры, от динамики цепных реакций и воя в микрофонах из-за обратной связи до накопления денег на банковских счетах, создают впечатление, что показательные функции и логарифмы прочно укоренились в тех областях анализа, которые имеют дело с изменениями во времени. И действительно, экспоненциальный рост и уменьшение — важные темы на современной стороне перекрестка анализа. Однако логарифмы впервые были обнаружены на другой стороне, еще тогда, когда анализ сосредоточивался на геометрии кривых. На самом деле натуральный логарифм появился давно, при изучении площади под гиперболой $y = 1/x$. Дело запуталось в 1640-х годах, когда было установлено, что площадь под гиперболой определяет функцию, которая ведет себя странно, похоже на логарифм (фактически это и был логарифм). Он подчинялся тем же правилам и преобразовывал задачу умножения в задачу сложения, как и другие логарифмы, но его основание оставалось неизвестным.

Предстояло еще многое узнать о площадях под кривыми. Это было одной из двух крупных задач, стоящих перед анализом. Вторая заключалась в создании более систематического метода нахождения касательных и наклонов кривых. Решение этих двух задач и обнаружение удивительной связи между ними вскоре привело анализ и весь мир к современному состоянию.

Словарь изменений

С точки зрения XXI века анализ часто рассматривается как математика изменений. Он количественно их оценивает с помощью двух важных понятий — производные и интегралы. Производные определяют скорость изменений, они и будут главной темой этой главы, а интегралы — накопление изменений и мы обсудим их в главах 7 и 8.

Производные отвечают на вопросы «Насколько быстро?», «Насколько круто?» или «Насколько чувствительно?». Все эти вопросы касаются *скорости изменений* в той или иной форме. Скорость изменения — это изменение зависимой переменной, деленное на изменение независимой переменной. Символьно скорость изменения записывается в виде $\Delta y / \Delta x$, то есть изменение y , деленное на изменение x . Иногда используются другие буквы, но структура записи та же. Например, если независимой переменной будет время, то естественнее записать эту величину как $\Delta y / \Delta t$, где t — время.

Наиболее известный пример скорости изменений — обычная скорость движения. Когда мы говорим, что автомобиль движется со скоростью 100 километров в час, эта величина рассматривается как скорость изменений, поскольку определяет скорость движения в виде $\Delta y / \Delta t$, то есть указывает, сколько проехал автомобиль ($\Delta y = 100$ километров) за данный промежуток времени ($\Delta t = 1$ час).

Аналогично скоростью изменений является и *ускорение*. Оно определяется как быстрота изменения скорости и обычно записывается

в виде $\Delta v / \Delta t$, где v — скорость. Когда американский производитель автомобилей Chevrolet заявляет, что одна из его мощных моделей V-8 Camaro SS может разогнаться от 0 до 60 миль в час за 4 секунды, он указывает ускорение в форме быстроты изменения: изменение скорости (от 0 до 60 миль в час) делится на промежуток времени (4 секунды).

Третий пример скорости изменений — *наклон* пандуса (наклонного ската). Он определяется как высота пандуса по вертикали Δy , деленная на его горизонтальную протяженность Δx . Чем больше наклон, тем круче скат. Американское законодательство требует, чтобы наклон пандусов для инвалидов колясок не превышал 1/12. Горизонтальная поверхность имеет нулевой наклон.

Из всех существующих различных скоростей изменений важнее и полезнее всего наклон кривой на координатной плоскости, поскольку он может заменить все остальные. В зависимости от того, что обозначают x и y , наклон кривой может указывать скорость движения, ускорение, ставку выплат, обменный курс, прибыль от инвестиций или любой иной вид скорости изменений. Например, когда мы строили график количества калорий y , содержащихся в x ломтиках хлеба с изюмом и корицей, он представлял собой прямую линию с наклоном 200 (калорий на ломтик). Такой наклон — геометрическая характеристика — сообщает нам, с какой скоростью хлеб передает калории, то есть выражает характеристику питательности. Аналогично на графике, показывающем зависимость пройденного автомобилем расстояния от времени, наклон будет указывать скорость машины. Таким образом, наклон — своего рода универсальный показатель скорости изменения. Поскольку любую функцию одной переменной можно изобразить в виде графика на координатной плоскости, мы можем найти скорость ее изменения, найдя наклон ее графика.

Ловушка здесь в том, что скорость изменений в реальном мире или в математике редко бывает постоянной. В этом случае ее определение

усложняется. Первый важный вопрос в дифференциальном исчислении — выяснить, что делать, когда скорость изменений не постоянна. Устройства GPS и спидометры решили эту задачу: они всегда знают, какую скорость показать, даже несмотря на то, что автомобиль при этом ускоряется или замедляется. Как они это делают? Какие вычисления производят? С помощью анализа, как мы сейчас увидим.

Так же как скорость движения не должна быть постоянной, так и наклоны не обязаны быть постоянными. Например, кривая вроде окружности или параболы (или любая другая гладкая линия, за исключением идеальной прямой) в одних местах будет круче, чем в других. Так происходит и в реальном мире. На горных тропах есть более крутые участки и более спокойные, плоские. Поэтому остается вопрос: как нам определить наклон, если он может меняться?

Первое, что нужно осознать, — это необходимость расширить наше представление о том, что такое скорость изменений. В алгебраических задачах, где пройденное расстояние равнялось произведению скорости на время, скорость всегда оставалась постоянной. Но в анализе это не так. Поскольку скорость движения, наклон и прочие величины изменяются вместе с изменениями независимой переменной x или t , их нужно рассматривать как функции. Скорости изменения — отныне не просто числа. Они должны стать функциями.

Именно это и делает понятие *производной*. Оно определяет скорость изменения как функцию, а также скорость изменения в заданной точке в данное время, даже если эта скорость переменная. В этой главе мы увидим, как определяются производные, что они означают и почему так важны.

Не секрет, что важность производных объясняется их вездесущностью. Законы природы на самом глубоком уровне выражаются с помощью производных — словно Вселенная знала о скорости изменений раньше нас. На более приземленном уровне производные появляются всякий раз, когда нам нужно количественно оценить,

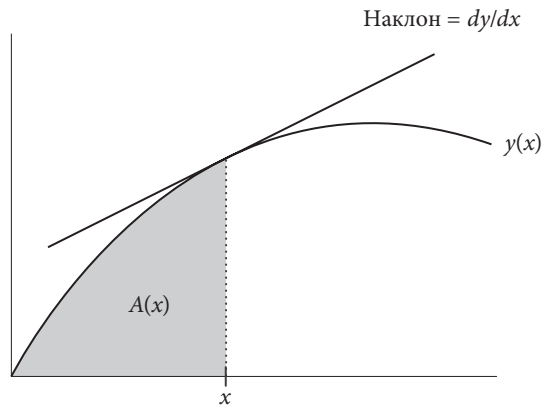
как изменения в одной величине подействуют на изменения в другой. Как повышение цены на какое-нибудь приложение повлияет на пользовательский спрос на него? Насколько повышение дозы статинов улучшает их способность снижать уровень холестерина у пациента или увеличивает риск появления побочных эффектов, например вреда для печени? Каждый раз, изучая взаимоотношения любого рода, мы хотим знать: если изменяется одна переменная, то насколько сильно меняется связанная с ней другая переменная? И в каком направлении — возрастая или убывая? Эти вопросы связаны с производными. Ускорение ракеты, рост населения, доходность инвестиций, перепад температур в миске с супом — все это производные.

В анализе производная обозначается dy/dx . Предполагается, что это напомним вам об обычной скорости изменений $\Delta y / \Delta x$, но теперь изменения dy и dx считаются бесконечно малыми. Это новая дикая идея, с которой мы будем работать медленно и осторожно, хотя она и не должна вызывать удивления. Мы знаем из принципа бесконечности, что путь к успеху в решении сложной задачи состоит в ее делении на бесконечно малые кусочки, их анализе и последующем сложении обратно с целью найти ответ. В контексте дифференциального исчисления небольшие изменения dy и dx — это те самые бесконечно малые кусочки. Их объединение — уже задача интегрального исчисления.

Три главные задачи анализа

Чтобы подготовиться к тому, что нас ждет впереди, нужно с самого начала представлять общую картину. В анализе есть три центральные задачи. Они схематически показаны на диаграмме ниже.

1. *Прямая задача*: дана кривая, найти ее наклон в любой точке.
2. *Обратная задача*: дан наклон кривой в любой точке, найти кривую.
3. *Задача площади*: дана кривая, найти площадь лежащей под ней области.



На диаграмме представлена некая обобщенная функция $y(x)$. Я не уточнял, что означают y или x , потому что это не имеет значения. Картинка отражает обобщенность — она просто изображает некоторую кривую на плоскости. Эта кривая может представлять любую функцию одной переменной, и поэтому ее можно применять в любой области математики, где используются такие функции, то есть фактически везде. Значимость наклона и площади я объясню позже. Сейчас же думайте о них так, как есть: это наклон и площадь, то есть те вещи, которые интересуют геометров.

Мы можем рассматривать эту кривую двумя способами — старым и новым. В начале XVII века, до появления анализа, такие кривые считались геометрическими объектами, интересными сами по себе. Математики стремились количественно выразить их геометрические характеристики. Получив какую-то кривую, они хотели иметь

возможность вычислять угол наклона касательной в каждой точке, длину дуги кривой, площадь под кривой и так далее. В XXI веке нас больше интересует функция, которая создала эту кривую, — функция, моделирующая какое-то природное явление или технологический процесс, в итоге отраженные в этой кривой. Кривая — это данные, но в их основе лежит нечто более глубокое. Сегодня мы думаем о кривой как о следах на песке, как о намеках на какой-то процесс, ее породивший. Мы интересуемся именно этим процессом (который моделируется функцией), а не следами, которые он после себя оставил.

Столкновение этих двух точек зрения — это столкновение загадки кривых и загадки движения и изменения. Именно так античная геометрия столкнулась с современной наукой. Хотя мы живем в нынешние времена, я предпочел рисовать картину исходя из старой точки зрения, потому что координатная плоскость прекрасно нам знакома. Она предлагает самый понятный способ восприятия трех центральных задач анализа, поскольку все они могут быть легко и наглядно представлены в геометрических терминах. (Те же идеи можно переформулировать в терминах движения и изменений с помощью динамических идей, например, используя скорость и расстояние вместо кривых и наклонов, однако мы сделаем это позже, когда лучше разберемся в геометрии.)

Эти вопросы следует интерпретировать в смысле функций. Иными словами, когда я говорю о наклоне кривой, я не имею в виду наклон в одной конкретной точке, а подразумеваю произвольную точку x . Наклон меняется, когда мы движемся вдоль кривой. Наша цель — понять, как он меняется в зависимости от точки x . Аналогично площадь под кривой также зависит от точки x . Я закрасил ее серым и обозначил $A(x)$. Эту площадь также следует рассматривать как функцию от x . По мере увеличения x вертикальная пунктирная линия сдвигается вправо и площадь увеличивается. Поэтому она зависит от выбранного значения x .

Таковы три главные задачи. Как можно узнать меняющийся наклон кривой? Как мы можем восстановить кривую по известному наклону? И как вычислить переменную площадь под кривой?

В контексте геометрии эти задачи могут показаться довольно сухими. Но как только мы взглянем на них с точки зрения XXI века как на задачи реального мира, движения и изменения, они приобретают феноменальный масштаб. Наклоны измеряют скорость изменений, площади — накопление изменений. Наклоны и площади возникают в любой области — физике, инженерии, финансах, медицине, словом, везде, где к ним есть интерес. Понимание этих задач и их решений открывает вселенную современного количественного мышления, по крайней мере в отношении функций одной переменной. Для полной ясности я должен упомянуть, что анализ включает гораздо больше: функции многих переменных, дифференциальные уравнения и тому подобное. Но всему свое время. Мы вернемся к ним позже.

В этой главе рассматриваются функции одной переменной и их производные (скорости их изменений); мы начнем с функций, которые меняются с постоянной скоростью, а затем перейдем к более сложным функциям, меняющимся с переменной скоростью. Именно тут дифференциальное исчисление показывает себя во всей красе — оно придает смысл постоянным изменениям.

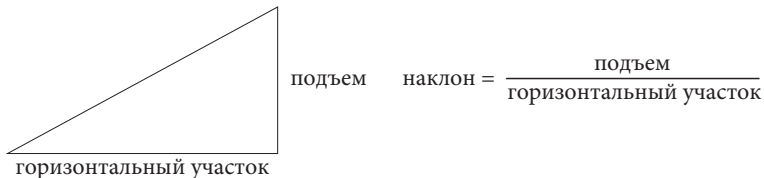
Освоившись со скоростью изменений, мы будем готовы заняться их накоплением, более сложной темой следующей главы. Там будет установлено, что прямая и обратная задачи, какими бы разными они ни казались, — это разлученные при рождении близнецы, и этот потрясающий результат называется *основной теоремой анализа*. Она показывает, что скорость изменений и их накопление связаны гораздо теснее, чем можно было подозревать, — открытие, которое объединило обе части анализа.

Однако начнем со скоростей изменений.

Линейные функции и их постоянные скорости изменения

Многие повседневные ситуации можно описать линейной зависимостью — когда одна переменная пропорциональна другой. Например:

1. Прошлым летом моя старшая дочь Лия получила свою первую работу в магазине одежды. Она зарабатывала 10 долларов в час, поэтому за два часа ей платили 20 долларов. В общем случае, когда она работала t часов, она зарабатывала $10t$ долларов.
2. Автомобиль едет по автостраде со скоростью 60 километров в час. Поэтому за один час он пройдет 60 километров, за два часа — 120 километров, а за t часов — $60t$ километров. Взаимосвязь здесь такова: $y = 60t$, где y — количество километров, пройденных за t часов.
3. Согласно американскому закону о людях с ограниченными возможностями, пандусы для инвалидных колясок не могут подниматься круче чем на 1 дюйм на каждые 12 дюймов расстояния по горизонтали. Для пандуса с такой максимально допустимой крутизной отношение между подъемом и горизонтальным участком определяется уравнением $y = x/12$, где y — подъем; x — протяженность по горизонтали.

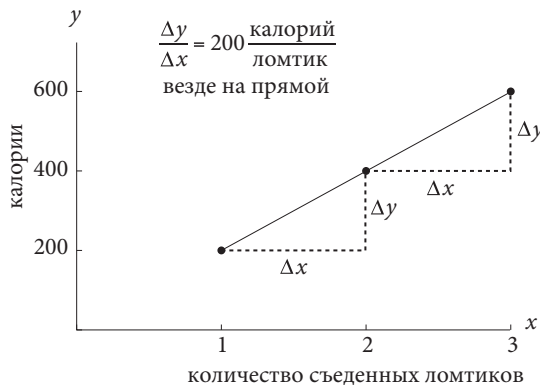


В каждом из этих случаев линейной зависимости зависимая переменная меняется с постоянной скоростью по отношению к независимой переменной. Ставка моей дочери — постоянные 10 долларов в час. Скорость автомобиля — постоянные 60 километров в час. Постоянный наклон пандуса для колясок — $1/12$, что определяется как отношение высоты к горизонтальной проекции. То же самое верно для хлеба с изюмом и корицей, который я так люблю: он добавляет в организм калории с постоянной скоростью 200 калорий на ломтик.

На языке анализа скорость изменения (коэффициент) всегда означает частное двух изменений: изменение величины y , деленное на изменение величины x , что символически записывается $\Delta y / \Delta x$. Например, если я съем еще два ломтика хлеба, я наберу еще 400 калорий. Поэтому соответствующий коэффициент равен:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{400 \text{ калорий}}{2 \text{ ломтика}},$$

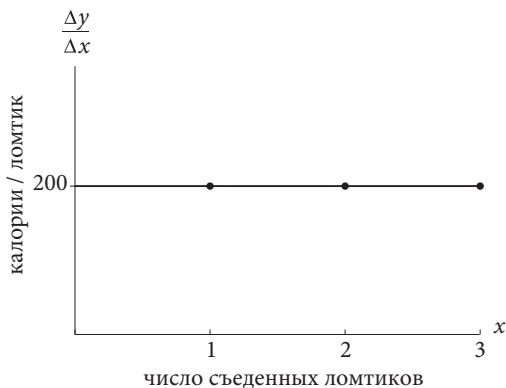
что дает 200 калорий на ломтик. Ничего удивительного. Но следует заметить, что этот коэффициент — константа. Он всегда одинаков, сколько бы ломтиков хлеба я ни съел.



Когда какой-то коэффициент постоянен, заманчиво считать его просто *числом*, как 200 калорий на ломтик, или 10 долларов в час, или

уклон в $1/12$. В данном случае это не нанесет вреда, но впоследствии приведет к проблемам. В более сложных случаях этот коэффициент не будет постоянным. Например, представьте себе прогулку по холмистой местности, где одни участки крутые, а другие более пологие. Теперь уклон — это функция вашего местоположения. Было бы ошибочно думать о нем просто как о числе. Точно так же, когда автомобиль ускоряется или когда планета обращается вокруг Солнца, их скорости обязательно изменяются. Поэтому крайне важно рассматривать их как функцию времени. Так что нам нужно сразу приобретать эту привычку. Надо прекратить думать о скорости изменений как о числах. *Эти коэффициенты — на самом деле функции.*

Потенциальная путаница возможна, когда эти функции — константы, как в случае рассмотренной линейной взаимосвязи. Вот почему в линейном случае не будет особого вреда считать их числами. Они не меняются при изменении независимой переменной. Моя дочь получала бы 10 долларов в час, сколько бы часов ни работала, а уклон пандуса для колясок составляет $1/12$ в любой его точке. Однако не дайте себя одурачить. Эти коэффициенты — все равно функции. Просто это постоянные функции. График постоянной функции — это горизонтальная линия, как показано на следующем рисунке для хлеба с изюмом и корицей, который всегда дает 200 калорий на ломтик.



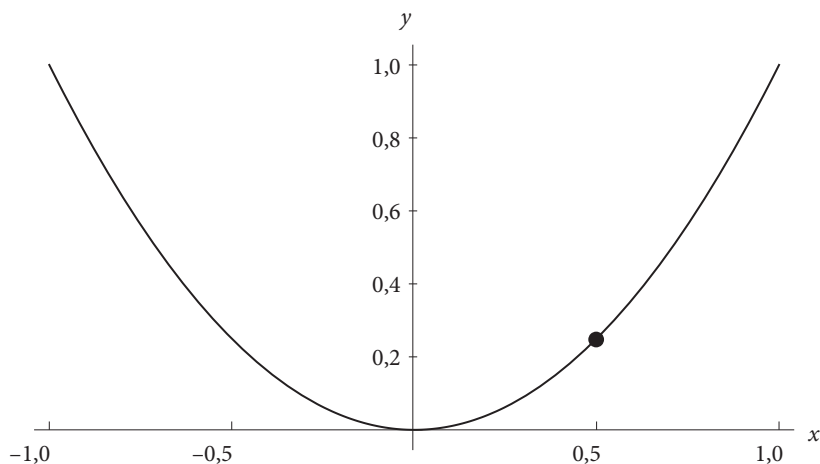
Когда в следующем разделе мы перейдем к нелинейным зависимостям, то увидим, что они на координатной плоскости дают не прямую, а кривую. В любом случае прямая или кривая всегда многое говорят о той взаимосвязи, которая их породила. Это словно фотография крупным планом или подпись. Это ключ к пониманию того, что их создало.

Обратите внимание на разницу между функцией и графиком функции. Функция — это бестелесное правило, которое берет на входе разные x и выдает на выходе по одному y для каждого x . В этом смысле функция бесплотна. Когда вы смотрите на нее, вам не на что смотреть. Это призрачная сущность, абстрактное правило. Например, оно может быть таким: «Дайте мне число, и я верну число, в 10 раз большее». Напротив, график функции — это видимая, почти осязаемая штука, некая форма, которую вы можете видеть. В частности, график только что описанной мною функции будет прямой, проходящей через начало координат, с угловым коэффициентом 10, то есть определяемой уравнением $y = 10x$. Однако сама функция — это не прямая. Функция — это *правило*, которое порождает эту прямую. Чтобы выявить саму функцию, вам нужно накормить ее x , дать выплюнуть y , повторить это для всех x и зафиксировать результаты. Когда вы это делаете, сама функция остается невидимой. То, что вы видите, — это ее график.

Нелинейная функция и ее скорость изменения

Когда функция не линейна, ее скорость изменения $\Delta y / \Delta x$ не будет постоянной величиной. В геометрических терминах это означает, что график функции представляет собой кривую с наклоном, который

меняется от точки к точке. В качестве примера рассмотрим параболу на следующем рисунке:



Это кривая $y = x^2$, которая соответствует простейшей нелинейной функции на калькуляторе, квадратичной функции x^2 . Такой пример даст нам некоторую практику с определением производной как наклона (углового коэффициента) касательной, а также разъяснит ограничения подобного определения.

Рассматривая параболу, мы видим, что одни ее части крутые, а другие относительно пологие. В точке $x = 0$ парабола горизонтальна, и мы без труда понимаем, что производная в этой точке должна равняться 0, потому что касательная линия в этой точке, очевидно, совпадает с осью x . Линия не поднимается и не опускается, а значит, ее наклон должен быть равен 0.

Однако на первый взгляд неясно, каков наклон параболы в других точках. Фактически он вообще неочевиден. Чтобы разобраться в этом, давайте проведем мысленный эксперимент в духе Эйнштейна и представим, что бы мы увидели, если бы начали смотреть на произвольную точку (x, y) с большим увеличением, словно увеличиваем масштаб при фотографировании, оставляя эту точку в центре кадра.

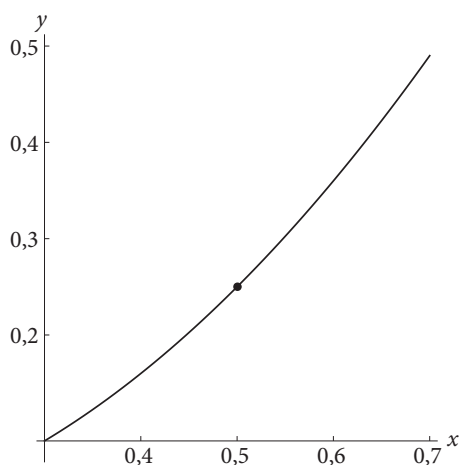
Это похоже на то, как будто мы смотрим на нее в микроскоп и постепенно добиваемся все большего увеличения. По мере увеличения прилегающий к точке кусок параболы будет все сильнее напоминать прямую. В пределе при *бесконечно большом* увеличении (это означает, что мы смотрим на *бесконечно маленький* кусочек кривой вокруг интересующей нас точки) данный увеличенный кусочек должен приблизиться к прямой. Тогда эта предельная прямая линия определяется как *касательная* в данной точке кривой, а угловой коэффициент как *производная* в этой точке.

Обратите внимание, что здесь мы используем принцип бесконечности — пытаемся упростить сложную кривую, нарезая ее на бесконечно маленькие отрезки. Именно это всегда происходит в анализе. Искривленные формы сложны; прямые формы просты, даже если их бесконечно много и они бесконечно малы. Вычисление производных таким способом — квинтэссенция математического анализа и одно из самых фундаментальных применений принципа бесконечности.

Чтобы провести этот мысленный эксперимент, нам нужно выбрать точку на параболе, в которой мы начнем проводить увеличение. Подойдет любая, но для численного удобства возьмем ту, которая соответствует значению $x = 1/2$. На рисунке выше она выделена. Ее координаты на плоскости таковы: $(1/2, 1/4)$, или в десятичной записи $(0,5; 0,25)$. Почему здесь $y = 1/4$? Мы выбираем точку, чтобы она лежала на параболе, а для всех точек (x, y) параболы должно выполняться соотношение $y = x^2$. Следовательно, в точке $x = 1/2$ значение y должно быть равно

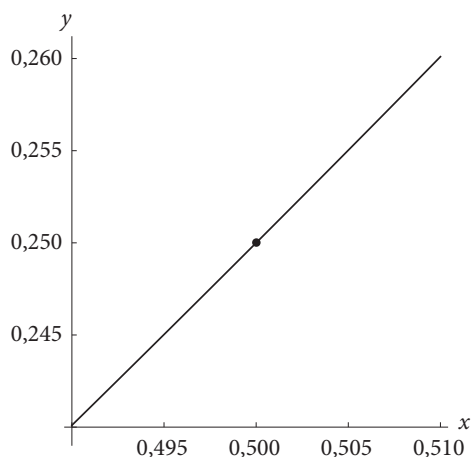
$$y = x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Теперь мы готовы производить увеличение в интересующей нас точке. Поместим точку $(x, y) = (0,5; 0,25)$ в центр поля микроскопа и с помощью компьютерной графики увеличим вокруг нее маленький участок кривой. На следующем рисунке показано первое увеличение.



При таком увеличении общая форма параболы теряется. Мы видим слегка искривленную дугу. Этот небольшой кусок параболы, лежащий между $x = 0,3$ и $x = 0,7$, кажется намного менее искривленным, чем параболы в целом.

Продолжим увеличение, взяв участок от $x = 0,49$ до $x = 0,51$. Получившаяся в результате линия выглядит еще более прямой, чем предыдущий отрезок, — едва ли не по-настоящему прямой линией, хотя это все еще маленькая часть параболы.



Тенденция ясна. По мере увеличения изображения участки параболы будут выглядеть все прямее. Измеряя отношение $\Delta y / \Delta x$ для этого почти прямого участка и увеличивая все сильнее и сильнее, мы можем найти предельное значение наклона $\Delta y / \Delta x$, когда Δx стремится к 0. Компьютерная графика настойчиво подсказывает, что наклон (угловой коэффициент) этой почти прямой линии становится все ближе к 1, что соответствует прямой под углом 45° .

С помощью алгебры мы можем доказать, что предельный наклон *в точности* равен 1. (В главе 8 мы покажем, как производятся подобные вычисления.) Более того, выполнение такого расчета не только для точки $x = 0,5$, но и для любой точки x показывает, что предельный наклон — а значит, и угловой коэффициент касательной — равен $2x$ для любой точки (x, y) параболы. На языке анализа это звучит так:

Производная функции x^2 равна $2x$.

Как бы ни был велик соблазн доказать это правило для производных, прежде чем двигаться дальше, давайте пока примем его и посмотрим, что оно означает. Прежде всего, оно говорит, что в точке $x = 0,5$ наклон равен $2x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, что мы и видим на рисунке. Оно также утверждает, что в нижней точке параболы в $x = 0$ наклон должен равняться $2 \times 0 = 0$, и мы убедились, что это тоже верно. Наконец, формула $2x$ говорит, что по мере движения по параболе вправо ее наклон будет возрастать; чем больше увеличивается x , тем больше должен быть наклон ($= 2x$), а это означает, что парабола должна становиться все круче и круче. Так на самом деле и есть.

Наш эксперимент помогает понять пару важных оговорок. Производная определена только в том случае, если по мере увеличения кривая приближается к какой-то предельной прямой линии. Это не относится к некоторым патологическим кривым. Например, если кривая имеет V-образную форму с острым углом в какой-то точке, то, как ни увеличивай окрестность этой точки, она продолжит выглядеть как угол. Этот угол никогда не исчезнет, независимо от степени увеличения кривой. Прямой линии никогда

не получится. Следовательно, V-образная кривая не имеет определенной касательной в этом угле, и поэтому у нее нет тут производной.

Если же кривая выглядит все более прямой при достаточном увеличении, то говорят, что она *гладкая*. В этой книге я исхожу из предположения, что кривые и процессы гладкие, как это делали родоначальники анализа. Однако в современном анализе мы научились справляться и с негладкими кривыми. Неудобства и патологии негладких кривых иногда возникают в областях, где бывают внезапные скачки или иные разрывности в поведении физических систем. Например, когда мы щелкаем выключателем электрической цепи, ток от состояния полного отсутствия внезапно переходит к состоянию наличия. График зависимости тока от времени показал бы резкий, почти вертикальный подъем, который аппроксимируется разрывным скачком в момент включения. Иногда удобнее смоделировать этот резкий переход как истинный разрыв значений функции, и в этом случае ток как функция времени не будет иметь производной в момент щелчка выключателем.

Значительная часть курса анализа в школе или колледже посвящена правилам вычисления производных, подобных установленным нами выше для x^2 , только для других функций, таких как «производная синуса равна косинусу» или «производная $\ln x$ равна $1/x$ ». Однако для наших целей более важно понять идею производной и увидеть, как это абстрактное определение применяется на практике. Для этого давайте обратимся к реальному миру.

Производная как скорость изменения продолжительности дня

В главе 4 мы рассматривали данные о сезонных изменениях продолжительности дня. Тогда нам нужно было проиллюстрировать идею о синусоидах, оптимальном подборе кривых и сжатии

данных; сейчас мы можем использовать те же данные для иллюстрации различных скоростей изменений и применить производные к другим задачам.

Исходные данные относились к количеству минут светового дня (времени между восходом и заходом солнца) в Нью-Йорке в 2018 году. В этом контексте производная — это скорость, с которой удлинялись или укорачивались дни. Например, 1 января время от рассвета до заката составляло 9 часов, 19 минут и 23 секунды. 2 января оно было немного больше: 9 часов, 20 минут и 5 секунд. Эти дополнительные 42 секунды дневного света (что эквивалентно 0,7 минуты) — мера того, насколько быстро удлинялся световой день за те конкретные сутки года. Продолжительность дня увеличивалась со скоростью примерно 0,7 минуты в сутки.

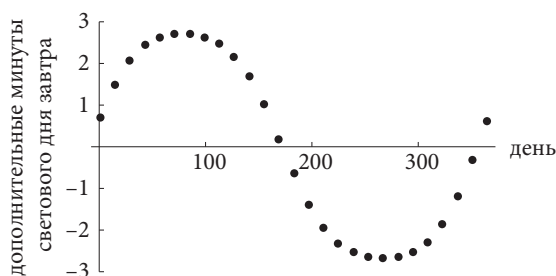
Для сравнения рассмотрим скорость изменений спустя две недели, 15 января. Между этими сутками и следующими продолжительность светового дня возросла на 90 секунд, то есть скорость увеличения составила 1,5 минуты в сутки, что более чем в два раза превышает показатель 0,7 минуты двумя неделями ранее. Таким образом, в январе продолжительность дня не просто увеличивается, а с каждым днем увеличивается все *быстрее*.

Эта приятная тенденция сохраняется еще несколько недель. С приходом весны дни становятся все длиннее, причем довольно быстро. В день весеннего равноденствия, 20 марта, скорость увеличения достигает восхитительных 2,72 минуты в сутки. Вы можете посмотреть на этот день на графике в главе 4. В этот 79-й день года, то есть примерно после четверти года, день увеличивается наиболее быстро. Это видно на графике — там, где он самый крутой, продолжительность дня растет быстрее всего, то есть производная максимальна — дни удлиняются с максимально возможной скоростью. Все это происходит весной.

Для грустного контраста взгляните на самые короткие дни в году. Здесь двойная печаль: эти мрачные зимние дни не только

удручающе коротки, но и меняются крайне медленно, что только добавляет оцепенения. Тем не менее это тоже логично. Самые короткие дни находятся в нижней части синусоиды, отображающей продолжительность дня, а в нижней части волна близка к горизонтальной линии (иначе это не было бы нижней частью — ситуация бы улучшалась или ухудшалась). В силу того что синусоида в нижней части почти горизонтальна, ее производная близка к нулю, а это означает, что скорость изменений стопорится (по крайней мере, на мгновение). В такие дни кажется, что весна не наступит никогда.

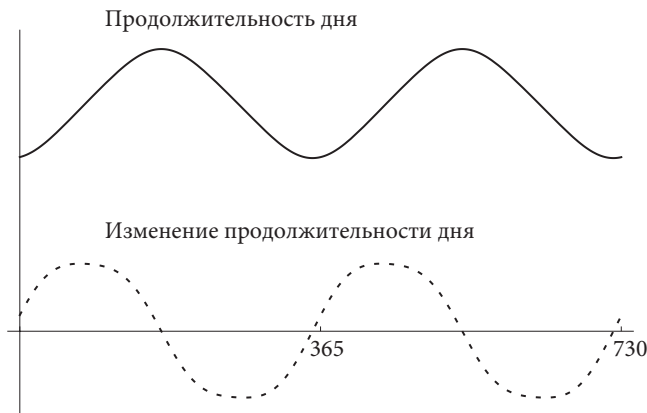
Я выделил два времени года, которые имеют большое эмоциональное значение для многих из нас, — период весеннего равноденствия и зимнего солнцестояния, однако не менее поучительно рассмотреть весь год в целом. Чтобы отслеживать сезонные колебания в скорости изменения продолжительности дня, я вычислял их через определенные интервалы времени, начиная с 1 января и далее через каждые две недели. Результаты представлены на следующем графике.



Вертикальная ось отображает ежедневную скорость изменений, то есть количество дополнительных минут светового дня при переходе от одних суток к другим. Горизонтальная ось — пронумерованные дни года, от 1 (1 января) до 365 (31 декабря).

Скорость изменений поднимается и падает, словно волна. Она начинается с положительных величин в конце зимы и начале весны, когда дни становятся длиннее, и достигает пика около 79-го дня (весеннее равноденствие, 20 марта). Как мы уже знаем, именно в это время дни прибывают особенно активно, примерно на 2,72 минуты в сутки. Однако после этого наступает спад. Скорость начинает падать и становится отрицательной после летнего солнцестояния на 172-й день (21 июня). Отрицательной она становится потому, что дни начинают укорачиваться: продолжительность следующего светового дня меньше предыдущего. Скорость достигает минимума примерно 22 сентября, когда день укорачивается сильнее всего, и остается отрицательной (хотя и не такой отрицательной) до зимнего солнцестояния на 355-й день (21 декабря), когда дни снова начинают прибывать, пусть пока и незаметно.

Любопытно сравнить эту волну с той, которую мы видели ранее в главе 4. Если их изобразить на одном графике и поменять масштаб так, чтобы амплитуды были сравнимы, получится следующий рисунок:



Здесь представлены данные за два года, чтобы подчеркнуть повторяемость волн. А для усиления эффекта сравнения я также соединил

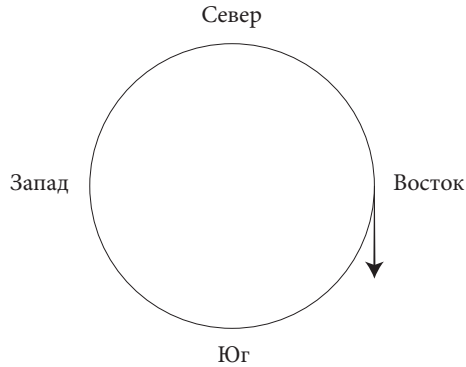
точки и убрал числа с вертикальной оси, чтобы сосредоточить внимание на форме волн и зависимости от времени.

Первое, что нужно отметить, — это рассинхронизация волн. Они не достигают пика одновременно. Волна продолжительности дня достигает пика примерно в середине года, тогда как волна скорости ее изменения — примерно тремя месяцами ранее. Если учесть, что каждой волне требуется двенадцать месяцев на полный цикл восходящего и нисходящего движения, то три месяца — это четверть цикла.

Следует также отметить, что волны напоминают друг друга по форме, но с определенными различиями. Несмотря на наличие родственных признаков, пунктирная волна менее симметрична, чем сплошная, а ее пики и впадины более плоские.

Я углубляюсь во все это, поскольку эти волны из реального мира позволяют разглядеть замечательное свойство синусоид: когда некая переменная изменяется по идеальной синусоиде, скорость ее изменений также меняется по идеальной синусоиде со сдвигом на четверть цикла. Это свойство самовоспроизведения характерно для синусоидальных волн. Другие волны им не обладают. Его можно было бы принять даже за *определение* синусоиды. В этом смысле наши данные намекают на уникальный феномен возрождения, присущий идеальным синусоидам. (Мы еще поговорим об этом в связи с анализом Фурье — мощной областью анализа, благодаря которой появились некоторые наиболее интересные современные применения.)

Теперь я попробую пояснить, откуда берется сдвиг на четверть цикла. Та же самая концепция объясняет, почему при вычислении скорости изменения синусоидальных волн снова получаются синусоидальные волны. Ключевой момент в данном случае заключается в том, что синусоиды связаны с равномерным круговым движением. Вспомните, что, когда точка движется по окружности с постоянной скоростью, ее движение вверх и вниз дает во времени синусоиду. (Впрочем, движение влево и вправо дает то же самое). С учетом всего этого рассмотрим следующую диаграмму:



На ней изображена точка,двигающаяся по окружности по часовой стрелке, но эта точка не подразумевает какой-то физический или астрономический объект. Это не Земля, вращающаяся вокруг Солнца, и не что-то связанное с временами года. Просто абстрактная точка,двигающаяся по окружности. Ее смещение к востоку (для краткости «восточность») увеличивается и уменьшается подобно синусоиде. Когда точка достигает максимального восточного положения, как на диаграмме, это аналогично максимуму синусоиды или самому длинному дню в году. Вопрос: что происходит дальше, когда точка занимает максимальное восточное положение, а синусоида находится на максимуме восточности? Как видно на диаграмме, в самом восточном положении наша точка направляется *на юг*, что показано стрелкой вниз. Но юг на компасе находится на 90 градусов от востока, а 90 градусов — это четверть цикла. Эврика! Вот откуда берется сдвиг на четверть цикла. Из-за геометрии окружности всегда существует смещение на четверть цикла между любой синусоидой и волной, полученной из нее в качестве производной, то есть в качестве скорости изменения. В этой аналогии направление движения стрелки подобно скорости изменения. Оно определяет, куда точка пойдет дальше и, следовательно, как она меняет свое положение. Более того, само направление стрелки тоже вращается по кругу, пока точка делает оборот, так что направление стрелки по компасу тоже

следует синусоиде. А поскольку направление по компасу подобно скорости изменения — вуаля! — скорость изменения тоже следует синусоидальной закономерности. Это то самое свойство самовосстановления, которое мы пытались понять. Синусоиды порождают синусоиды со сдвигом на 90 градусов. (Специалисты поймут, что я пытаюсь без формул объяснить, почему производная синуса — это косинус, который сам по себе — всего лишь синус, сдвинутый на четверть периода.)

Аналогичная 90-градусная фазовая задержка происходит и в других колебательных системах. Когда маятник раскачивается туда-сюда, его скорость достигает максимума, когда он проходит нижнюю точку, в то время как угол достигает максимума спустя четверть цикла, когда маятник займет крайнее положение. График зависимости угла и скорости от времени показывает две приблизительные синусоиды, колеблющиеся с разностью в 90 градусов по фазе.

Еще один пример — упрощенная биологическая модель взаимодействия «хищник — жертва». Представьте популяцию акул, охотящихся на популяцию каких-то рыб. Когда численность рыбы находится на максимуме, популяция акул растет с максимальной скоростью, потому что у нее есть много корма, и достигает максимального количества через четверть цикла, к моменту, когда численность рыб падает, потому что они стали жертвами масштабной охоты четвертью цикла ранее. Анализ такой модели показывает, что численности двух популяций колеблются с разницей в 90 градусов по фазе. Подобные колебания «хищник — жертва» наблюдаются в природе повсеместно, например в годовых популяциях зайца и рыси в Канаде, как было установлено промысловыми компаниями в 1880-х годах (хотя реальное объяснение этих колебаний, несомненно, гораздо сложнее, как это часто бывает в биологии).

Если вернуться к данным о продолжительности дня, то мы видим, что это не идеальные синусоиды. Кроме того, это дискретный набор точек, по одной в день, и между ними нет никаких данных. В результате отсутствует тот континуум точек, который нужен для

математического анализа. Поэтому для последнего примера производной обратимся к случаю, когда мы можем собирать данные с произвольным разрешением, вплоть до миллисекунды.

Производная как мгновенная скорость

Вечер 16 августа 2008 года в Пекине выдался безветренным. В 22:30 восемь быстрееших людей мира выстроились на стартовой линии для финального забега на 100 метров. Один из них, 21-летний ямайский спринтер по имени Усэйн Болт [1] был относительным новичком в этом состязании. Более известный забегами на 200 метров, он годами упрашивал своего тренера позволить ему пробежать более короткую дистанцию, и за последний год очень на ней преуспел.

Он был непохож на других спринтеров — долговязый, ростом 1,96 метра, с длинным резким шагом. В детстве он занимался футболом и крикетом, пока тренер не обратил внимание на его скорость и не предложил попробовать себя на беговой дорожке. Подростком Усэйн продолжал совершенствоваться как бегун, однако никогда не относился слишком серьезно ни к спорту, ни к себе. Он был озорным и обожал розыгрыши.

В тот вечер в Пекине, после того как всех финалистов представили и показали на экране, стадион затих [2]. Спринтеры поставили ноги в стартовые колодки и заняли исходное положение. Последовали команды: «На старт! Внимание!» — и выстрел из стартового пистолета.

Болт сорвался с колодок не так стремительно, как другие участники. Медленная реакция сделала его на старте седьмым из восьми спринтеров. Набирая скорость, через тридцать метров Болт был уже в середине. По-прежнему ускоряясь, как поезд-экспресс, он оставил между собой и другими бегунами огромный просвет.

На восьмидесяти метрах ямайский спринтер посмотрел вправо, чтобы взглянуть на соперников. Поняв, насколько сильно их опередил,

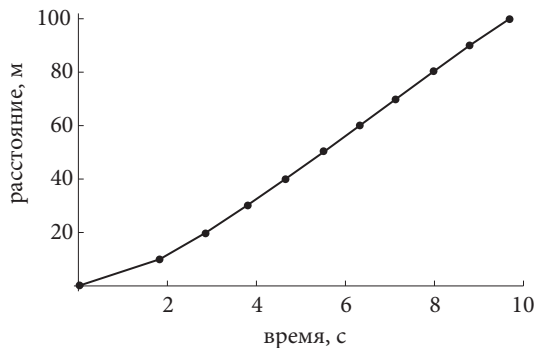
он заметно замедлился, опустил руки и хлопнул себя по груди, пересекая финишную черту. Одни комментаторы восприняли это как хвастовство, другие — как проявление радости, но в любом случае Болт явно не ощущал потребности мчаться в конце изо всех сил, что привело к спекуляциям на тему, насколько быстрее он мог бы бежать. Как бы то ни было, даже с такой жестикуляцией (и развязанными шнурками) он установил новый мировой рекорд — 9,69 секунды. Его критиковали за неспортивное поведение и неуважение, но Болт и не думал ни о чем подобном. Позднее он говорил репортерам: «Это всего лишь я. Люблю веселиться и просто быть расслабленным» [3].



Как быстро он бежал? Ну, 100 метров за 9,69 секунды означает скорость $100 / 9,69 = 10,32$ метра в секунду. В более привычных единицах это 37 километров в час. Однако это его *средняя* скорость в забеге. Он двигался медленнее в начале и конце и быстрее в середине.

Более подробную информацию можно получить из его промежуточного времени, зарегистрированного через каждые 10 метров дорожки стадиона. Первые 10 метров он пробежал за 1,83 секунды, что соответствует средней скорости 5,46 метра в секунду. Самыми быстрыми отрезками были 50–60, 60–70 и 70–80 метров. Каждый из этих 10-метровых отрезков он промчался за 0,82 секунды, то есть со средней скоростью 12,2 метра в секунду. Наконец, на последних 10 метрах, когда он расслабился и сбавил скорость, он замедлился до средней скорости 11,1 метра в секунду.

Человеческие существа плохо воспринимают числа, но хорошо научились распознавать закономерности, так что вместо того чтобы разглядывать числа, как мы только что делали, представим их наглядно. На следующем графике показано время, за которое ямайский спринтер последовательно преодолевал 10, 20, 30 метров и так далее — вплоть до результата 9,69 секунды, с которым он пересек финишную черту — отметку 100 метров.



Я соединил точки отрезками, чтобы глазам их легче было воспринимать, но имейте в виду, что реальные данные здесь только точки. Вместе точки и отрезки между ними образуют ломаную линию. Наклоны этих отрезков меньше всего слева, что соответствует самой низкой скорости Болта в начале забега. По мере движения вправо они изгибаются вверх, а значит, бегун ускоряется, а затем составляют практически прямую линию, указывающую на высокий и стабильный темп бега, который спринтер поддерживал большую часть дистанции.

Вполне естественно задаться вопросом, в какой момент он двигался с самой большой скоростью и в каком месте дистанции это происходило. Мы знаем, что самая высокая *средняя* скорость на 10-метровом участке была где-то между 50 и 80 метрами, но средняя скорость на 10-метровом отрезке — не совсем то, что нам нужно; нас интересует пиковая скорость. Представьте, что у Усэйна Болта есть спидометр. В какой именно момент спортсмен бежал быстрее всего? И насколько быстрее?

Здесь мы ищем способ измерить мгновенную скорость спринтера. Это понятие кажется почти парадоксальным. В любой момент времени Усэйн Болт располагался точно в одном месте, застыв, как на мгновенном снимке. Как можно говорить о его скорости в такой момент? Скорость может относиться только к некоторому промежутку времени, а не к отдельному мгновению.

Загадка мгновенной скорости восходит к истории математики и философии — примерно к 450 году до нашей эры, когда Зенон предлагал свои устрашающие парадоксы. Вспомните, что в апории об Ахиллесе и черепахе философ утверждал, что быстрый бегун никогда не обгонит медленного, хотя Болт и опроверг это тем вечером в Пекине. А в апории «Стрела» Зенон утверждал, что стрела в полете не может двигаться. Математики до сих пор окончательно не определились, что именно пытался донести до нас Зенон своими парадоксами, но я предполагаю, что его, как и Аристотеля и других греческих философов, беспокоили тонкости, связанные с понятием мгновенной скорости. Их беспокойство может объяснить, почему греческие математики всегда мало говорили о движении и изменении. Подобно бесконечности, эти неприятные темы, казалось, были изгнаны из вежливых бесед.

Спустя две тысячи лет после Зенона основатели дифференциального исчисления разгадали загадку мгновенной скорости. Их интуитивно понятное решение сводилось к определению мгновенной скорости как предела, а точнее, как предел средней скорости, вычисленной за все более короткие и короткие интервалы времени. Это похоже на то, что мы делали, когда увеличивали участок параболы. Тогда мы аппроксимировали все меньшие и меньшие кусочки кривой с помощью прямой, а затем задавались вопросом, что происходит в пределе при бесконечном увеличении. Изучив предельное значение наклона прямой, мы смогли определить производную в конкретной точке плавно изогнутой параболы.

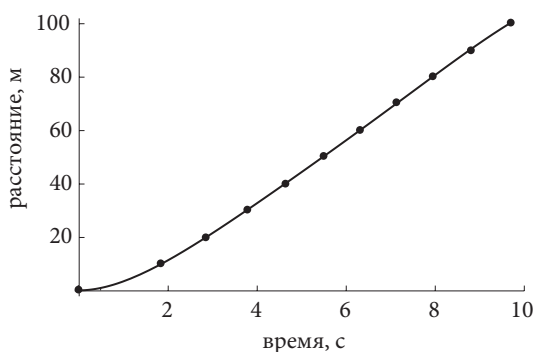
Сейчас по аналогии мы хотели бы аппроксимировать нечто, плавно изменяющееся во времени: перемещение Усэйна Болта по беговой дорожке. Идея заключается в замене графика пройденного расстояния

в зависимости от времени ломаной, которая состоит из отрезков, показывающих постоянную среднюю скорость за короткие интервалы времени. Если средняя скорость на каждом интервале стремится к какому-то пределу, когда интервалы становятся все короче, то это предельное значение мы и будем подразумевать под мгновенной скоростью в данный момент. Как и наклон в точке, скорость в определенный момент будет производной.

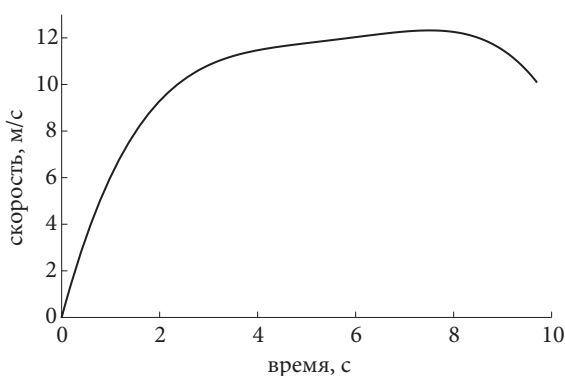
Чтобы добиться успеха, нужно предположить, что пройденное спринтером расстояние менялось плавно. В противном случае предел, который нас интересует, не будет существовать (как, собственно, и производная). Хотя интервалы станут укорачиваться, результаты не приблизятся ни к чему осмысленному. Но действительно ли расстояние плавно меняется как функция времени? Мы точно не знаем. У нас есть только данные о времени, затраченном Болтом на прохождение 10-метровых отрезков. Чтобы оценить его мгновенную скорость, нам нужно выйти за пределы этих данных и сделать обоснованное предположение о том, где он находился в моменты времени между этими точками.

Системный способ сделать такое предположение известен как интерполяция. Идея состоит в том, чтобы провести плавную кривую между доступными данными. Другими словами, мы хотим соединить точки не отрезками [4], как делали раньше, а наиболее правдоподобной гладкой кривой, проходящей через точки или хотя бы очень близко к ним. На эту кривую мы налагаем определенные ограничения: она должна быть плавной, не слишком сильно колебаться и проходить максимально близко ко всем точкам, а кроме того, показывать, что в начальный момент скорость Болта равнялась нулю, поскольку мы знаем, что на старте он был неподвижен. Этим критериям соответствуют много разных кривых. Статистики разработали массу методов для подбора кривых, отвечающих имеющимся данным. Все они дают сходные результаты, а учитывая, что они в любом случае предполагают какие-то допущения, не будем особо беспокоиться о том, какую кривую использовать.

Вот один пример плавной кривой, удовлетворяющей всем требованиям:



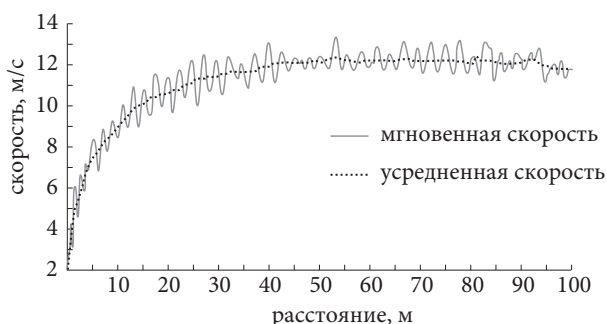
Поскольку эта кривая по определению гладкая, мы можем вычислить ее производную в каждой точке. Полученный график дает оценку скорости Усэйна Болта в каждый момент его рекордного забега в тот вечер в Пекине.



Исходя из графика, Болт достиг максимальной скорости около 12,3 метра в секунду примерно на трех четвертях дистанции. До этого бегун ускорялся, постоянно набирая скорость. Затем он замедлился настолько, что в момент пересечения финишной черты его скорость упала до 10,1 метра в секунду. График подтверждает то, что видели все: Болт резко сбавил темп в конце, особенно на последних двадцати метрах, когда расслабился и праздновал победу.

В следующем, 2009-м, году на чемпионате мира в Берлине Болт положил конец спекуляциям о том, насколько быстро он может бегать.

На этот раз никаких жестов и ударов в грудь. Он со всем усердием добежал до финиша и побил свой пекинский рекорд 9,69, показав еще более удивительный результат — 9,58 секунды. Поскольку событие было ожидаемым, специалисты по биомеханике приготовили лазерное оборудование [5], сходное по действию с радарами, используемыми полицией для ловли водителей-лихачей. Эти высокотехнологичные инструменты позволяли измерять положение спринтеров сто раз в секунду. Когда они вычислили мгновенную скорость Болта, получились такие результаты:



Незначительные колебания вокруг общего тренда отражают увеличения и снижения скорости, которые неизбежны во время бега. В конце концов, бег — это серия отталкиваний и приземлений. Скорость Болта немного менялась каждый раз, когда он приземлялся ногой на землю, притормаживал, а затем снова толкал себя вперед и взмывал в воздух. Какими бы интригующими ни были такие колебания, они раздражают специалистов по аналитике данных. Мы желаем видеть тренд, а не мелкие вихляния, и для этой цели предыдущий подход с аппроксимирующей кривой был не хуже, а, возможно, и лучше. После сбора всех данных высокого разрешения и наблюдения колебаний специалистам все равно пришлось их чистить. Они фильтровали их, чтобы выявить более значимый тренд.

Мне такие колебания преподносят важный урок. Я рассматриваю их как метафору, своего рода поучительную басню о природе моделирования реальных явлений с помощью анализа. Если мы попытаемся зайти с разрешением в своих измерениях слишком далеко и начнем смотреть на любое явление в мучительно мелких деталях во времени или пространстве, то станем замечать нарушение гладкости. В данных о скорости Усэйна Болта колебания сделали общий тренд похожим на ершик для чистки труб. То же самое произошло бы с любой формой движения, если бы мы могли измерять его в молекулярном масштабе. На этом уровне движение становится дерганным и весьма далеким от плавности. Анализ больше не может нам много рассказать об этом, по крайней мере, непосредственно. Тем не менее, если нас волнуют общие тенденции, сглаживания колебаний может оказаться вполне достаточно. Понимание природы движения и изменений во Вселенной, которые дает анализ, — это доказательство мощи сглаженности, хотя она может быть всего лишь приблизительной.

И последний урок. В математическом моделировании, как и во всей науке, всегда нужно выбирать, что подчеркивать, а чем пренебречь. Искусство абстрагирования заключается в понимании того, что существенно, а что нет, где сигнал, а где шум, что составляет тенденцию, а что — всего лишь колебания вокруг. Это искусство, потому что в таком выборе всегда присутствует элемент опасности; ведь он подходит довольно близко к принятию желаемого за действительное и интеллектуальной нечестности. Величайшие ученые, такие как Галилей и Кеплер, сумели пройти по краю этой пропасти.

Пикассо говорил: «Искусство — это ложь, которая заставляет нас осознать правду» [6]. То же самое можно сказать об анализе как модели природы. В первой половине XVII века он стал использоваться как мощная абстракция движения и изменения, а во второй его половине те же виды творческого выбора — ложь, раскрывающая правду, — подготовили почву для революции.

Тайный источник

Во второй половине XVII века Исаак Ньютон [1] в Англии и Готфрид Лейбниц в Германии навсегда изменили путь развития математики. Они взяли лоскутное одеяло идей о кривых и движении и превратили его в единое полотно математического анализа.

Когда Лейбниц в 1673 году ввел слово *calculus* (исчисление), он использовал с ним неопределенный артикль, а иногда говорил более ласково — «мое исчисление». Ученый употреблял это слово в общем смысле, как систему правил и алгоритмов для выполнения вычислений. Позже, когда его система стала более отлаженной и отшлифованной, артикль стал определенным. Однако сейчас, к сожалению, все артикли и притяжательные местоимения исчезли, осталось просто слово *calculus*, банальное и скучное.

Не только артикли, но и само слово *calculus* может рассказывать интересные истории. Оно происходит от латинского корня *calx*, означающего маленький камешек — напоминание о тех временах, когда ученые использовали камешки для подсчета, а значит, и для вычислений. Этот же корень дает такие слова, как *calcium* (кальций) и *chalk* (мел). Ваш дантист может применять это слово для обозначения зубного камня. Врачи употребляют его для желчных камней, камней в почках или в мочевом пузыре. По иронии судьбы, оба пионеры анализа — и Ньютон, и Лейбниц — умерли в мучительных болях, страдая от камней: у Ньютона были камни в мочевом пузыре, а у Лейбница — в почках...

Площади, интегралы и основная теорема анализа

Хотя при исчислениях когда-то использовались камешки, ко времени Ньютона и Лейбница исчисление вовсе занималось кривыми и их новомодными исследованиями с помощью алгебры. Тридцатью годами ранее Ферма и Декарт открыли, как использовать алгебру для нахождения максимумов, минимумов и касательных к кривым. Неуловимым оставалось поиск *площадей* кривых, или, точнее, площадей фигур, ограниченных кривыми.

Задача площади, изначально называемая квадратурой, или квадрированием кривых, поглощала и разочаровывала математиков два тысячелетия. Для отдельных частных случаев было придумано множество хитроумных трюков — от работ Архимеда по определению площади круга и квадратуры параболы до нахождения Пьером Ферма площади под кривой $y = x^n$. Однако в этих попытках не было системы. Задачи с областями решались по ситуации, от случая к случаю, как если бы математик каждый раз начинал работу заново.

С теми же сложностями математики сталкивались при определении объемов криволинейных тел и длин различных дуг. Даже Декарт полагал, что определение длины дуги выше человеческого понимания. В своей книге по геометрии он писал: «Отношение, существующее между прямыми и кривыми линиями, не известно человеку и даже, по моему мнению, не может быть известно» [2]. Все подобные задачи — длины кривых, площади и объемы — требуют нахождения бесконечных сумм бесконечно малых частей. Говоря современным языком, они все нуждаются в *интегралах*. Ни у кого не было надежной системы решения таких задач.

Именно это и изменилось после Ньютона и Лейбница. Они независимо друг от друга открыли и доказали основную теорему анализа, которая сделала эти задачи стандартными. Теорема связала

площади с наклонами, то есть интегралы с производными. Это было потрясающе. Словно в романе Диккенса, два с виду далеких персонажа оказались близкими родственниками. Интегралы и производные были кровной родней.

Влияние этой фундаментальной теоремы было ошеломляющим. Почти в мгновение ока площади стали сговорчивыми. С задачами, которые ранее пытались решить гении, теперь можно было справиться за минуты. Как писал Ньютон одному своему другу, «не существует кривой, выраженной каким-нибудь уравнением... чтобы я не мог меньше чем за четверть часа сказать, можно ли ее квадрировать» [3]. Понимая, насколько невероятным может прозвучать такое заявление для современников, он продолжал: «Это может показаться смелым утверждением... но мне это очевидно по источнику, откуда я черпаю, хотя я и не берусь доказывать это другим» [4].

Секретным источником Ньютона была основная теорема анализа. Хотя ни он, ни Лейбниц не были первыми, кто ее сформулировал [5], они получили все лавры, потому что впервые доказали ее во всей полноте, осознали ее огромную пользу и важность и построили вокруг нее целую алгоритмическую систему. Разработанные ими методы стали обычным делом. Интегралы были обезврежены и превратились в домашние задания для подростков.

Прямо сейчас миллионы школьников и студентов по всему миру решают задачи по математическому анализу, считая один интеграл за другим с помощью основной теоремы. При этом многие даже не замечают подарка, который им преподнесли. И это вполне понятно — ситуация похожа на старый анекдот про рыбу, которая спрашивает свою подругу: «Разве ты не благодарна за воду?» На что вторая рыба отвечает: «А что такое вода?» Учащиеся, имеющие дело с анализом, постоянно погружены в основную теорему и поэтому, естественно, воспринимают ее как должное.

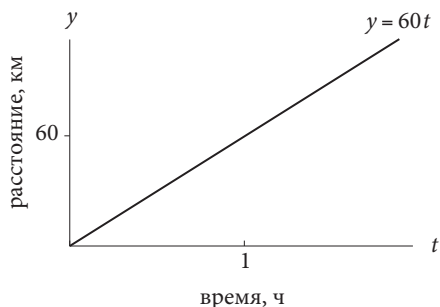
Визуализация основной теоремы с помощью движения

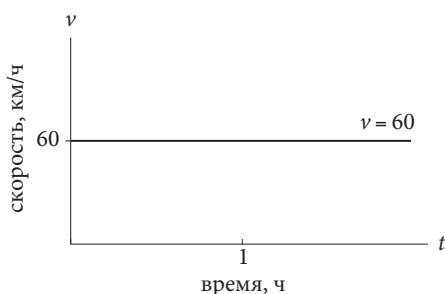
Основную теорему можно понять на интуитивном уровне, размышляя о расстоянии, которое проходит двигающийся объект, например бегун или автомобиль. Познакомившись с таким способом мышления, мы поймем, о чем она говорит, почему верна и почему так важна. Это не просто трюк для нахождения площадей. Это ключ к предсказанию будущего для всего, что нас волнует (в тех случаях, когда это возможно), и к раскрытию секретов движения и изменений во Вселенной.

Основная теорема пришла Ньютону в голову, когда он рассмотрел задачу определения площади с динамической точки зрения. Ему пришла в голову идея внести в эту картину время и движение. Пусть площадь меняется, решил он, и пусть она постоянно увеличивается.

Простейшая иллюстрация его идеи возвращает нас к знакомой задаче с автомобилем, движущимся с постоянной скоростью, для которого пройденное расстояние равно скорости, умноженной на время. Каким бы элементарным ни был этот пример, он все же отражает суть основной теоремы и поэтому подойдет для начала ее рассмотрения.

Представьте, что машина едет по шоссе со скоростью 60 километров в час. Если мы построим график зависимости расстояния от времени и график зависимости скорости от времени, то они будут выглядеть так:

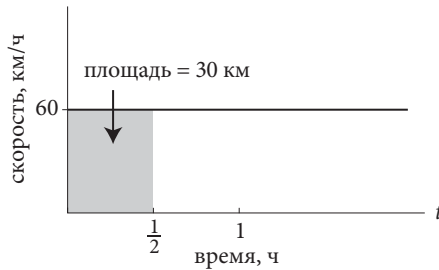




Сначала посмотрим на расстояние в зависимости от времени. Через один час автомобиль проедет 60 километров, через два часа — 120 километров и так далее. В целом расстояние и время связаны соотношением $y(t) = 60t$, где $y(t)$ — расстояние, пройденное за время t . Я буду называть $y(t) = 60t$ *функцией расстояния*. Как показано на верхнем рисунке, график функции расстояния — это прямая с наклоном (угловой коэффициент) 60 километров в час. Эта величина сообщает нам скорость автомобиля в любой момент (если бы мы ее еще не знали). В более сложных ситуациях скорость может меняться, но сейчас это простая постоянная функция, $v(t) = 60$ для любых значений t . Она отображена на нижнем рисунке в виде горизонтальной линии.

Посмотрев, как скорость проявляет себя на графике расстояния (как наклон прямой), теперь переиначим вопрос и спросим: как расстояние проявляет себя на графике скорости? Иными словами, есть ли на графике скорости какая-нибудь визуальная или геометрическая особенность, которая позволила бы нам увидеть, какое расстояние преодолел автомобиль за любое конкретное время t ? Да, есть. *Пройденное расстояние — это площадь под кривой скорости (в нашем случае это прямая линия) до момента времени t .*

Чтобы понять, почему это так, предположим, что машина проехала какое-то определенное время, например полчаса. В этом случае она проедет 30 километров, поскольку $60 \times \frac{1}{2} = 30$. Но суть всего этого в том, что мы можем узнать это расстояние в виде площади серого прямоугольника под прямой между моментами времени $t = 0$ и $t = \frac{1}{2}$ часа.



Высота этого прямоугольника — 60 километров в час, основание — $\frac{1}{2}$ часа. Это дает нам площадь 30 километров, что и будет пройденным расстоянием.

То же самое рассуждение работает для *любого* времени t . Основанием прямоугольника будет t , высота — по-прежнему 60, поэтому площадь равна $60t$. И действительно, именно это расстояние мы и ожидаем найти, $y = 60t$.

Таким образом, как минимум в этом примере, где скорость всегда постоянна, а кривая скорости — просто прямая линия, ключ к определению пройденного расстояния — поиск площади под кривой скорости. Открытие Ньютона состояло в том, что это равенство между площадью и расстоянием верно *всегда*, даже если скорость непостоянна. *Как бы неравномерно ни двигался объект, площадь под кривой скорости к моменту t всегда равна общему расстоянию, пройденному за время t .* Это один из вариантов основной теоремы. Он кажется слишком простым, чтобы претендовать на истину, но тем не менее это она и есть.

Ньютон пришел к нему, думая о площади как о переменной величине, а не о фиксированной мере, как тогда было принято в геометрии. Он ввел в геометрию время, рассматривая ее как физику. Если бы Ньютон жил сегодня, возможно, он бы визуализировал приведенный выше рисунок с помощью анимации, например в виде кинеографа*, а не мгновенного снимка. Чтобы сделать это,

* Кинеограф — система создания анимированного изображения, когда отдельные кадры рисуются на отдельных страничках тетради. Если быстро перелистывать эти страницы, получается эффект анимации. *Прим. пер.*

снова взгляните на картинку выше, но теперь представьте, что это один кадр фильма или одна страничка в кинеографе. Как будет меняться серый прямоугольник, если мы начнем просматривать анимацию? Мы увидим, что он расширяется вправо. Почему? Потому что длина его основания равна t и она увеличивается со временем. Если бы мы могли делать по кадру для каждого момента и последовательно их воспроизводить, словно пролистывая странички в кинеографе, то увидели бы, как анимированная версия серого прямоугольника расширяется вправо. Это походило бы на поршень или лежащий на боку шприц, который втягивает серую жидкость.

Эта серая жидкость представляет собой увеличивающуюся площадь прямоугольника. Мы представляем, что эта площадь «накапливается» под кривой скорости $v(t)$. В нашем случае площадь, накопленная к моменту времени t , равна $A(t) = 60t$, что совпадает с расстоянием, пройденным автомобилем, $y(t) = 60t$. Таким образом, накопленная площадь под кривой скорости дает расстояние как функцию времени. Это вариант основной теоремы для движения.

Постоянное ускорение

Мы прокладываем дорогу к Ньютонovu общему геометрическому случаю основной теоремы, в котором фигурирует произвольная кривая $y(t)$ и площадь $A(t)$ под ней. Идея накопления площади — ключевая для объяснения теоремы, но я понимаю, что к ней следует немного привыкнуть. Поэтому давайте применим ее еще к одной конкретной задаче о движении, прежде чем перейдем к общему случаю.

Рассмотрим объект, движущийся с постоянным ускорением. Это означает, что он перемещается все быстрее и быстрее с равномерно

увеличивающейся скоростью. Это немного напоминает то, как вы нажимаете на педаль газа в своем автомобиле, и он разгоняется из состояния покоя. Через одну секунду машина достигнет скорости, предположим, 10 километров в час, через две — 20 километров в час, через три — 30 километров в час и так далее. В этом гипотетическом примере автомобиль каждую секунду добавляет к своей скорости 10 километров в час. Такое изменение скорости, 10 километров в час за секунду, называется *ускорением* автомобиля. (Для простоты проигнорируем тот факт, что машина не может ускоряться бесконечно и что ускорение не строго постоянно, когда вы давите на педаль газа.)

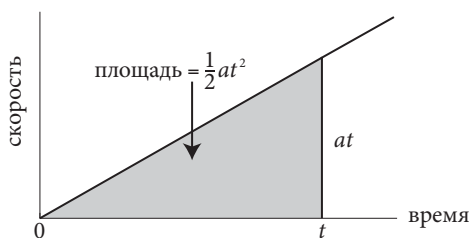
В нашем идеализированном примере скорость в любой момент времени задается уравнением $v(t) = 10t$. Здесь число 10 означает ускорение автомобиля. Если бы ускорение было другой константой, допустим a , то формула приняла бы более общий вид $v(t) = at$.

Мы хотим знать, как далеко уедет машина за время t , если начать с момента 0. Иными словами, какой функцией времени определяется пройденное расстояние? Было бы ужасной ошибкой использовать школьную формулу, когда расстояние равно произведению скорости на время, поскольку она верна только для движения с постоянной скоростью, а в нашем случае это не так. Наоборот, у нас скорость увеличивается с каждой секундой. Мы больше не в сонном мире постоянных скоростей, а в захватывающем мире постоянного ускорения.

Ученые Средневековья уже знали ответ на этот вопрос. Уильям Хейтсбери, философ и логик из Мертон-колледжа в Оксфорде, решил эту задачу около 1335 года, а Николай Орем, французский теолог и математик, около 1350 года дополнительно разъяснил ее, представив наглядно. К сожалению, их работы не получили широкой известности и вскоре были забыты. Примерно 250 лет спустя Галилей показал, что равноускоренное движение — не какая-то абстракция. Именно так двигаются тяжелые предметы (например, металлические

шары), когда падают на Землю или катятся по слегка наклонной плоскости. В обоих случаях скорость шаров растет пропорционально времени $v = at$, как и ожидается при движении с постоянным ускорением.

Итак, мы знаем, что скорость увеличивается линейно $v = at$. А как увеличивается *расстояние*? Согласно основной теореме, пройденное расстояние равно площади под кривой скорости, накопленной к моменту t . Поскольку у нас кривая скорости — это наклонная прямая $v = at$, то соответствующую площадь нетрудно вычислить. Это площадь треугольника, изображенного ниже.



Как и серый прямоугольник в предыдущей задаче, серый треугольник тоже будет расширяться со временем вправо. Разница в том, что прямоугольник увеличивался строго горизонтально, а треугольник растет в обоих направлениях. Для вычисления площади заметим, что в любой момент времени основание треугольника равно t , а высота — текущей скорости объекта, то есть $v = at$. Поскольку площадь треугольника составляет половину произведения длины основания на высоту, она равна $\frac{1}{2} \times t \times at = at^2 / 2$. Согласно основной теореме площадь под кривой скорости говорит нам, какое расстояние прошло тело:

$$y(t) = \frac{1}{2} at^2.$$

Итак, если тело начинает движение из состояния покоя, а затем равномерно ускоряется, то пройденное расстояние пропорционально

квадрату затраченного времени. Именно это Галилей открыл экспериментально и очаровательным образом выразил в виде закона нечетных чисел, как мы видели в главе 3. Ученые в Средние века тоже это знали* [6].

Но вот чего не знали ни в Средневековье, ни даже во времена Галилея, так это того, как поведет себя скорость, если ускорение не будет простой константой. Другими словами, если нам известно, что тело движется с произвольным ускорением $a(t)$, то что можно сказать о его скорости $v(t)$?

Это похоже на обратную задачу, о которой я упоминал в предыдущей главе. Чтобы правильно ее понять, крайне важно оценить, что мы знаем и чего не знаем.

Ускорение определяется как быстрота изменения скорости. Поэтому, если нам дана скорость $v(t)$, то найти соответствующее ускорение $a(t)$ просто. Это *решение прямой задачи*. Мы могли бы ее решить, вычислив быстроту изменения данной нам скорости во многом так же, как в предыдущей главе вычисляли наклон параболы, расположив ее под микроскопом. Чтобы найти скорость изменения известной функции, нужно всего лишь прибегнуть к определению производной и к правилам вычисления производных для различных функций.

Однако обратную задачу делает сложной именно то, что нам *не* дана функция скорости. Наоборот, нас просят ее *найти*. Предполагается, что у нас есть ускорение, то есть быстрота изменения скорости, в виде функции от времени, и нам нужно выяснить, какая именно функция скорости будет иметь такую быстроту изменений. Как нам решать задачу *в обратном направлении*, чтобы получить неизвестную скорость из известной быстроты ее изменений? Словно

* Разумеется, знали не в такой форме. И у Хейтсбери, и у Орема теорема об ускорении гласила, что расстояние, пройденное телом при равноускоренном движении, равно длине промежутка времени, умноженной на скорость тела в середине этого промежутка времени (то есть на среднюю скорость). При этом у Орема эта идея была изображена графически. *Прим. пер.*

детская игра: «Я загадал функцию скорости, быстрота изменения которой такая-то и такая-то. Какую функцию скорости я загадал?»

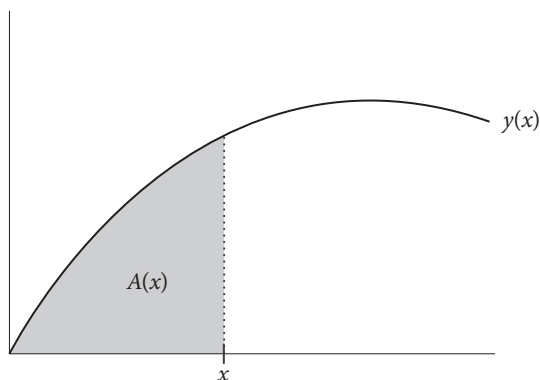
Та же головоломка, связанная с необходимостью в обратных рассуждениях, возникает при попытке вывести расстояние из скорости. Так же как ускорение — это быстрота изменения скорости, скорость — это быстрота изменения расстояния. Рассуждать в прямом направлении просто: если мы знаем расстояние, пройденное движущимся телом, как функцию времени, как в случае с Усэйном Болтом, бегущим по дорожке в Пекине, то нетрудно вычислить скорость тела в каждый момент времени. Мы выполнили такой расчет в предыдущей главе. Однако рассуждать в обратном направлении трудно. Если бы я сообщил вам скорость Усэйна Болта в каждый момент забега, вы бы смогли найти положение бегуна в каждый момент времени? В более общем виде: при наличии произвольной функции скорости $v(t)$ вы бы смогли найти соответствующую функцию расстояния $y(t)$?

Основная теорема Ньютона пролила свет на эту весьма трудную обратную задачу поиска неизвестной функции по данной скорости ее изменения и во многих случаях позволила полностью ее решить. Ключевой момент — переформулировать ее как вопрос о площадях, которые изменяются.

Доказательство основной теоремы с помощью малярного валика

Основная теорема анализа стала кульминацией восемнадцати веков развития математической мысли. С помощью динамических средств она ответила на статический геометрический вопрос, который Архимед мог задавать в Древней Греции в 250 году до нашей эры, или Лю Хуэй в Китае в 250 году, или ибн аль-Хайсам в Каире в 1000-м, или Кеплер в Праге в 1600-м.

Рассмотрим фигуру, подобную серой области на приведенном рисунке.



Есть ли способ точно вычислить площадь такой произвольной формы, как показанная на рисунке, учитывая, что кривая, ограничивающая ее сверху, может быть почти произвольной? В частности, это не обязательно должна быть классическая кривая. Это может быть некая экзотическая кривая, определяемая каким-нибудь уравнением на координатной плоскости — в джунглях, открытых Ферма и Декартом. А что, если эта кривая определена каким-то физическим процессом, например траекторией двигающейся частицы или луча света? Существует ли какой-то способ находить площадь под такой кривой и делать это системным образом? Такова *задача площади* — третья центральная задача анализа, о которой я упоминал ранее, и самая насущная математическая задача середины 1600-х годов. Это была последняя неразгаданная загадка кривых. Исаак Ньютон подошел к ней с новой стороны, используя идеи, подсказанные загадками движения и изменения.

Исторически единственный шанс решить такие задачи сводился к поиску какого-то хитроумного способа разрезать криволинейную область на полоски или разбить на осколки, а затем пересобрать эти кусочки в уме или взвесить на воображаемых качелях, как это делал Архимед. Однако примерно в 1665 году Ньютон впервые совершил крупный прорыв в решении этой задачи за почти за два тысячелетия.

Он объединил идеи исламской алгебры и французской аналитической геометрии, но пошел гораздо дальше.

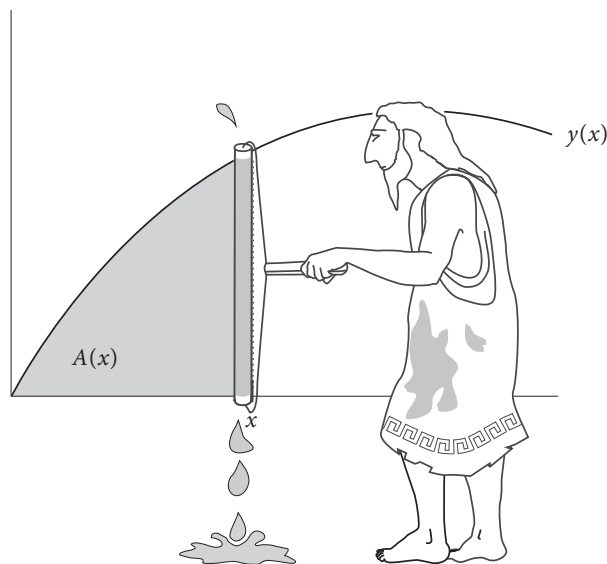
Согласно его новой системе, первый шаг состоял в том, чтобы отразить нужную область на координатной плоскости и определить уравнение, которое описывает верхнюю кривую, ограничивающую область. Для этого требовалось вычислить, насколько выше оси x расположена эта кривая, то есть для каждого значения x получить соответствующее значение y (как показано на рисунке выше пунктирной линией). Такое вычисление преобразовывало кривую в уравнение, связывающее x и y , что позволяло применять инструменты алгебры. Тридцатью годами ранее Ферма и Декарт уже поняли это и использовали такие методы для поиска касательных к кривым, что само по себе было большим достижением.

Но они упускали из виду тот факт, что сами по себе касательные не так уж важны. Куда важнее *угловые коэффициенты*, отражающие их наклоны, поскольку именно они привели к понятию производной. Как мы видели в предыдущей главе, производные естественным образом возникают в геометрии как наклоны кривых. Производные также возникают в физике как другой вид изменений, например скорость. Таким образом, производные представляются связующим звеном между наклонами и скоростями и, более широко, между геометрией и движением. Как только идея производной прочно обосновалась в голове Ньютона, ее способность перебросить мост между геометрией и движением привела к окончательному успеху. Именно производная наконец разрешила задачу площади.

Глубоко скрытые связи между этими идеями — наклоны и площади, кривые и функции, скорость изменения и производные — вышли из тени, когда Ньютон взглянул на них с динамической точки зрения. Поразмышляйте над приведенным выше графиком и представьте, что x двигается направо с постоянной скоростью. Вы можете даже думать об x как о времени: Ньютон часто так и делал. По мере движения x площадь серой области непрерывно меняется. Поскольку

она зависит от x , ее следует рассматривать как функцию от x , так что запишем ее в виде $A(x)$. Когда мы хотим подчеркнуть, что эта площадь является функцией x (в противопоставление фиксированному числу), мы будем называть ее *функцией накопления площади*, а иногда просто *функцией площади*.

Мой преподаватель анализа в старших классах, мистер Джоффри, предлагал яркую запоминающуюся метафору для этого «текучего» сценария, когда x скользит, а вместе с ним меняется площадь. Он просил нас представить волшебный малярный валик, который движется по горизонтали. Двигаясь вправо, он окрашивает в серый цвет участок под кривой.



Пунктирная линия в точке x обозначает текущее положение этого воображаемого малярного валика, пока он движется вправо. При этом для гарантии аккуратного окрашивания валик мгновенно каким-то волшебным образом растягивается или сжимается в вертикальном направлении — в точности от кривой вверху до оси x внизу, но их не пересекая. Волшебство тут в том, что валик при движении

всегда меняет свою длину до величины $y(x)$, чтобы безукоризненно окрашивать площадь нужной фигуры.

Сочинив такой неправдоподобный сценарий, зададимся вопросом: с какой *скоростью* серая площадь увеличивается по мере перемещения x вправо? Или, что эквивалентно, с какой скоростью ложится краска, когда малярный валик находится в точке x ? Для ответа на вопрос подумайте, что произойдет в следующий бесконечно малый интервал времени. Валик перемещается вправо на бесконечно малый промежуток dx . Когда он проходит такое крошечное расстояние, его длина в вертикальном направлении практически не меняется, поскольку при столь бесконечно малом перемещении у него почти нет времени на изменение длины (этот тонкий момент мы обсудим в следующей главе). В течение этого короткого интервала валик фактически окрашивает высокий тонкий прямоугольник с высотой y и бесконечно малой шириной dx , бесконечно малая площадь которого равна $dA = y dx$. Разделив части этого уравнения на dx , мы получим скорость, с которой накапливается площадь. Она определяется соотношением

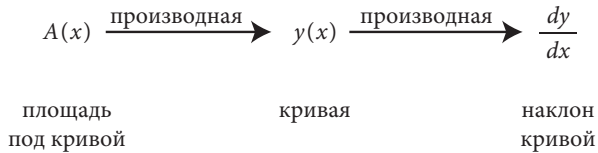
$$\frac{dA}{dx} = y.$$

Эта аккуратная формула говорит, что общая окрашенная площадь под кривой увеличивается со скоростью, равной текущей высоте y малярного валика. Это логично: чем длиннее валик в данный момент, тем больше краски он наносит в следующее мгновение и тем быстрее накапливается окрашенная площадь.

Приложив еще немного усилий, мы могли бы доказать, что эта геометрическая версия теоремы эквивалентна версии с движением, которую мы использовали ранее, где утверждалось, что накопленная площадь под кривой скорости равна расстоянию, пройденному двигающимся телом. Однако у нас есть более срочные задачи. Нам нужно понять, что означает эта теорема, почему она так важна и как она в итоге изменила мир.

Значение основной теоремы

Следующая диаграмма подытоживает то, что мы только что узнали.



На ней показаны три функции, которые нас интересуют, и взаимосвязи между ними. Наша кривая находится в середине, ее неизвестный наклон — справа, а неизвестная площадь под ней — слева. Как мы видели в главе 6, именно эти три функции фигурируют в трех основных задачах анализа. Имея кривую y , мы пытаемся вычислить ее наклон и площадь.

Надеюсь, эта диаграмма проясняет, почему я назвал поиск наклона «прямой задачей». Чтобы найти наклон для кривой, мы просто следуем по стрелке вправо. Для определения наклона мы вычисляем производную y . Это прямая задача (1), которую мы обсуждали в предыдущей главе.

А вот чего мы не знали прежде, но узнали из основной теоремы сейчас, это то, что площадь A и кривая y *тоже* связаны производной: основная теорема гласит, что производная A — это y . Это потрясающий факт. Он позволяет нам определить площадь под произвольной кривой, решив тем самым древнюю задачу, почти две тысячи лет ставившую в тупик величайшие умы. Эта картинка подсказывает путь к ответу. Но прежде чем откупоривать шампанское, нужно осознать, что основная теорема дает нам не совсем то, что мы хотим. Она не дает нам непосредственно площадь, но рассказывает, как ее получить.

Святой Грааль интегрального исчисления

Как я уже пытался разъяснить, основная теорема не полностью решает задачу площади. Она предоставляет информацию о скорости ее изменения, но саму площадь нам еще нужно получить.

Языком символов основная теорема сообщает нам, что $dA/dx = y$, где $y(x)$ — имеющаяся у нас функция. Однако нам по-прежнему нужно найти $A(x)$, удовлетворяющее этому уравнению. Погодите минутку! Это же означает, что мы внезапно снова столкнулись с *обратной задачей*! Вот так поворот! Мы пытались решить задачу площади, центральную задачу номер 3 в списке из главы 6, и вдруг столкнулись с обратной задачей, центральной задачей номер 2 в том же списке. Я называю ее обратной задачей, потому что, как показывает диаграмма выше, поиск A по y означает движение против стрелки, движение *назад* относительно производной. В этом случае детская игра может выглядеть примерно так: «Я задумал функцию площади $A(x)$, производная которой равна $12x + x^{10} - \sin x$. Какую функцию я задумал?»

Разработка метода решения обратной задачи — не только для $12x + x^{10} - \sin x$, но и для произвольной кривой $y(x)$ — стала святым Граалем для анализа. Точнее, святым Граалем для *интегрального* исчисления. Решение обратной задачи позволило бы раз и навсегда закрыть тему нахождения площади. Имея $y(x)$, мы бы знали площадь $A(x)$ под ней. Решив обратную задачу, мы бы также решили задачу площади. Именно это я имел в виду, когда говорил, что эти две задачи — близнецы, разлученные при рождении. Это две стороны одной медали.

Решение обратной задачи имеет гораздо более серьезные последствия по следующей причине: с точки зрения Архимеда, площадь — это бесконечная сумма бесконечно малых прямоугольных полос, а значит, в этом смысле площадь *интеграл*. Это объединенная (интегрированная) совокупность всех сложенных вместе кусочков,

накопление бесконечно малых изменений. И так же как производные оказались важнее наклонов, интегралы оказались важнее площадей. Площади необходимы для геометрии, интегралы — *для всего*, в чем мы убедимся в следующих главах.

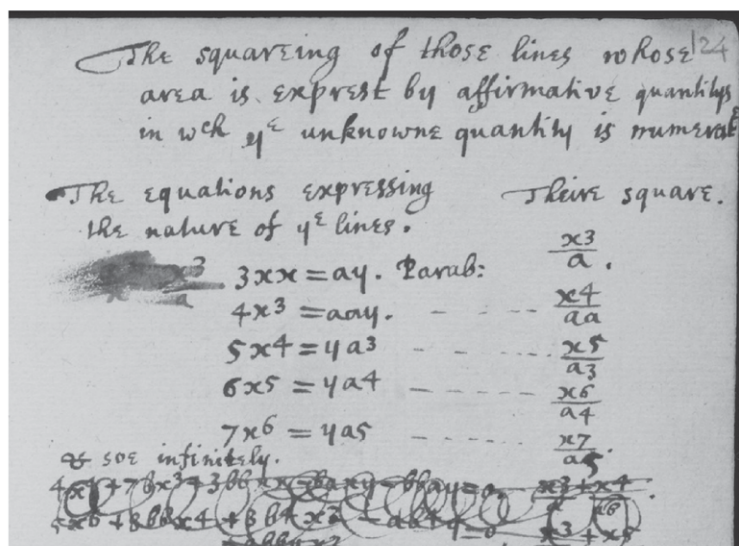
Один из способов подойти к сложной обратной задаче — игнорировать ее. Отложите ее в сторону. Замените более простой прямой задачей (для данной функции $A(x)$ вычислите ее скорость изменения dA/dx ; согласно основной теореме, это должно равняться величине y , которую мы ищем). Прямая задача намного проще, потому что мы знаем, с чего начать. Мы можем начать с известной функции площади $A(x)$, а затем узнать скорость ее изменения с помощью стандартных формул для производных. Получившаяся скорость изменения dA/dx далее должна играть роль парной функции y , как нас убеждает основная теорема: $dA/dx = y$. Сделав это, мы получим пару партнерских функций, $A(x)$ и $y(x)$, которые представляют функцию площади и соответствующую кривую. Есть надежда, что если нам посчастливится наткнуться на какую-то задачу, где нужно найти площадь под этой конкретной кривой $y(x)$, то соответствующей функцией площади будет как раз $A(x)$. Это не системный подход, и он срывается только в случае, если нам повезет, но, по крайней мере, он прост и у нас есть с чего начать. Чтобы повысить шансы на успех, мы можем создать огромную справочную таблицу с сотнями функций площадей и их соответствующими кривыми, то есть с множеством пар $(A(x), y(x))$. Тогда размеры и разнообразие такой таблицы повысят наши шансы наткнуться на пару, которая подходит для решения интересующей нас задачи. И как только мы найдем эту пару, нам больше ничего не нужно делать — ответ будет прямо в таблице.

Например, в следующей главе мы увидим, что производная x^3 равна $3x^2$. Мы получим этот результат, решив прямую задачу, просто взяв производную. Однако самое замечательное — что это говорит нам о том, что x^3 может играть роль $A(x)$, а $3x^2$ — роль $y(x)$. Не вспотев, мы решили задачу площади для $3x^2$ (если нам когда-нибудь понадо-

бится именно она). Продолжая в том же духе, мы можем заполнить таблицу и другими степенями x . Аналогичные вычисления покажут, что производная x^4 равна $4x^3$, производная x^5 равна $5x^4$ и в целом производная x^n равна nx^{n-1} . Все это простые решения прямой задачи для степенных функций. Поэтому столбцы в нашей таблице будут выглядеть примерно так:

Кривая $y(x)$	Ее функция площади $A(x)$
$3x^2$	x^3
$4x^3$	x^4
$5x^4$	x^5
$6x^5$	x^6
$7x^6$	x^7

В своей тетради 22-летний Исаак Ньютон составил для себя похожую таблицу [7].



Обратите внимание, что его язык несколько отличался от нашего. Кривые в левом столбце — это «Уравнения, выражающие природу

линий y ». Их функции площади — это «их квадратуры» (поскольку он рассматривал задачу нахождения площади как квадрирование кривых). Он также ощущал необходимость вставлять различные степени a , произвольной единицы длины, чтобы все величины имели правильную размерность. Например, его нижняя правая величина $A(x)$ в пятой строке сверху — это x^7 / a^5 (а не просто x^7 , как у нас сейчас), потому что в его представлении эта величина отображает площадь, а потому должна иметь размерность площади (длину в квадрате). Все это размещено через несколько страниц после «Метода квадрирования тех кривых, которые можно квадрировать» — объявления о рождении основной теоремы анализа. Вооруженный этой теоремой, Ньютон заполнил еще много страничек списком «кривых» и их «квадратур». В руках Ньютона машина анализа включилась и заработала.

Следующей задачей — на самом деле фантазией — стал поиск метода квадрировать *любую* кривую, а не только степенные функции. Возможно, из-за общих слов это не выглядит особо блестящей фантазией. Поэтому позвольте мне сформулировать так: эта задача содержит в себе суть всего, что делает сложным интегральное исчисление. Если бы она была решена, это запустило бы цепную реакцию вроде толкания костяшек домино: одна задача рушилась бы за другой. Ее решение можно было бы использовать для ответа на вопрос, который, по мнению Декарта, находится вне человеческого понимания, — поиска длины дуги произвольной кривой. Можно было бы найти площадь любой фигуры на плоскости — даже похожей по форме на амёбу. Можно было бы вычислить площадь поверхности, объем и положение центра тяжести сфер, параболоидов, урн, бочек и других поверхностей, которые получаются путем вращения кривой вокруг оси, подобно вазе на гончарном круге. Одним махом решились бы классические задачи о криволинейных формах, над которыми размышлял Архимед и другие великие математические умы в течение восемнадцати столетий.

Это позволило бы справиться не только с этими, но и с другими задачами. Решение такой задачи сделало бы возможным прогнозирование положения двигающихся объектов — например, где окажется планета в определенной точке своей орбиты, даже если планета подвергается какой-то другой силе притяжения, отличной от действующей в нашей Вселенной. Вот что я имею в виду, называя эту задачу святым Граалем, заветной мечтой интегрального исчисления. Ее решение привело бы к устранению множества других проблем.

Вот почему так важно умение находить площадь под произвольной кривой. Из-за своей тесной связи с обратной задачей задача площади касается не только площадей. Она относится не только к формам, соотношениям между расстоянием и скоростью или таким же узким вещам. Это совершенно общая вещь. С современной точки зрения задача площади относится к прогнозированию взаимоотношений между всем, что меняется с переменной скоростью, и накапливающимся во времени результатом таких изменений. Это переменный приход денег на банковский счет и накопленная сумма на нем. Это темпы роста мирового населения и общая численность людей на планете. Это изменение концентрации химиотерапевтического препарата в крови пациента и накопленное воздействие этого препарата со временем. Это влияет на то, насколько эффективной или токсичной будет химиотерапия. Площадь важна, потому что важно будущее.

Новая математика Ньютона идеально подходила для меняющегося мира. Соответственно, он и образовал новые термины от слова *flux* — поток, движение. Сами меняющиеся во времени величины он назвал *флюэнтами*, а их производные по времени — *флюксиями*. Он определил две основные задачи.

1. Даны флюэнты, как найти их флюксии?
2. Это эквивалентно упомянутой ранее прямой задаче — легкой задаче нахождения наклона кривой или, в более

общем виде, нахождению скорости изменения или производной для известной функции. Такая процедура сегодня называется *дифференцированием*.

3. Даны флюксии, как найти их флюэнты?
4. Это эквивалентно обратной задаче и представляет собой ключ к решению задачи площади. Это сложная задача нахождения кривой по ее наклону или, в более общем виде, нахождения неизвестной функции по скорости ее изменений (по ее производной). Такая процедура сегодня известна как *интегрирование*.

Вторая задача намного сложнее первой. Кроме того, она гораздо важнее для прогнозирования будущего и проникновения в код Вселенной. Прежде чем мы посмотрим, как далеко удалось зайти Ньютону, я попробую объяснить, почему она так сложна.

Локальное против глобального

Причина, по которой интегрирование намного сложнее дифференцирования, связана с различием между локальным и глобальным. Локальные задачи простые, глобальные — сложные.

Дифференцирование — это локальная операция. Как мы уже видели, когда вычисляем производную, это похоже на вид под микроскопом. Мы увеличиваем участок кривой или функции в поле зрения. По мере увеличения на этом участке кривая становится все менее и менее изогнутой. Мы видим ее масштабированную версию — крохотный наклонный пандус-скат с приращением Δy по вертикали и Δx по горизонтали. При бесконечном увеличении в пределе получается некоторая прямая линия, касательная к точке, находящейся в центре поля зрения нашего микроскопа. Угловой коэффициент этой касательной дает нам производную в данной точке. Роль

микроскопа — помочь нам сосредоточиться на той части кривой, которая нас интересует. Все остальное игнорируется. В этом смысле поиск производной — локальная операция. Она отбрасывает все детали за пределами бесконечно малой окрестности одной интересующей нас точки.

Интегрирование — это глобальная операция. Вместо микроскопа мы используем телескоп. Мы пытаемся взглянуть вдаль — или далеко вперед, хотя в этом случае нам нужен хрустальный шар. Естественно, такие задачи гораздо сложнее. Все мешающие события имеют значение и не могут быть отброшены. По крайней мере, так кажется.

Позвольте провести аналогию, позволяющую выявить различия между локальным и глобальным, между дифференцированием и интегрированием и прояснить, почему интегрирование так трудно и так важно с научной точки зрения. Эта аналогия возвращает нас в Пекин к рекордному забегу Усэйна Болта. Вспомните, что для определения его скорости в каждый момент времени мы подбирали гладкую кривую, соответствующую данным о его местоположении на дорожке в зависимости от времени. Затем, чтобы найти его скорость, скажем в момент 7,2 секунды, мы использовали подобранную кривую для оценки его положения через малое время после этого момента, например в 7,25, а затем смотрели на изменение расстояния, деленное на изменение времени, и получали оценку скорости в этот момент. Все это были локальные вычисления. Единственная информация, которая использовалась, — это то, как спринтер двигался в течение нескольких сотых долей секунды в окрестности нужного момента. Все, что он делал в оставшуюся часть гонки — до и после этой окрестности, — не имело никакого значения. Вот что я имею в виду под локальностью.

Напротив, представьте, что бы произошло, если бы нам вручили бесконечно длинную таблицу с указанием скорости Болта в каждый момент времени и попросили вычислить, где он будет

через 7,2 секунды после старта. Когда он срывался с колодок, мы могли бы использовать его первоначальную скорость для оценки места, где он оказался, скажем, через сотую долю секунды, умножив стартовую скорость на этот промежуток времени. Зная новое положение бегуна и скорость, мы могли бы снова оценить, где он окажется через следующую сотую долю секунды. И так, шаг за шагом, подключая информацию о скорости, соответствующую очередной сотой доле секунды, мы могли бы и далее в течение всего забега обновлять местоположение спринтера. Это тяжелая работа — с точки зрения расчетов. Именно она и делает глобальные вычисления такими сложными. Нам нужно рассчитать каждый шагок, чтобы получить желаемый ответ для далекого будущего, в нашем случае — для момента времени 7,2 секунды после выстрела стартового пистолета.

А теперь представьте, насколько было бы полезно, если бы мы каким-то образом смогли перемотать события вперед и запрыгнуть прямо к интересующему нас моменту! Именно это обеспечивало решение обратной задачи интегрирования. Это дало бы нам кратчайший путь, червоточину во времени и преобразовало бы глобальную задачу в локальную. Вот почему решение обратной задачи похоже на поиск святого Грааля для анализа.

И впервые эта задача, как и многие другие, была решена студентом.

Одинокий мальчик

Исаак Ньютон родился в каменном фермерском доме на Рождество 1642 года [8]. Кроме даты, в его рождении не было ничего благоприятного. Он родился недоношенным и таким крохотным, что, как якобы выразилась его мать, мог поместиться в пивную кружку. У него

не было отца: старший Исаак Ньютон, фермер-йомен*, умер тремя месяцами ранее, оставив после себя ячмень, мебель и несколько овец**.

Когда ребенку было три года, его мать Анна снова вышла замуж и оставила мальчика на попечение бабушки по материнской линии Марджери Эйскоу. На этом настаивал новый муж матери, Барнабас Смит (иногда его имя переводят как Варнава Смит); он был богат, вдвое старше нее и хотел иметь молодую жену, но без ребенка***. Вполне понятно, что Исаак обижался на отчима и понимал, что мать его бросила. Позже в список своих грехов до девятнадцати лет он включил такую запись: «13. Угрожал отцу и матери Смитам сжечь их вместе с домом». Следующий пункт был еще мрачнее: «14. Желал смерти и надеялся на нее для некоторых». А далее следовало: «15. Бил многих. 16. Возникали нечистые мысли, слова, поступки и мечтания».

Он был беспокойным, одиноким маленьким мальчиком, у которого не было друзей, зато имелась масса свободного времени. Он самостоятельно занимался научными исследованиями, построил на ферме солнечные часы, наблюдая за игрой света и тени на стене. В 1653 году, когда Исааку исполнилось 10 лет, мать снова овдовела и вернулась домой с тремя маленькими детьми — двумя дочерьми и сыном. Она отправила Исаака в школу в Грэнтеме, в восьми милях от дома, — слишком далеко, чтобы ходить туда каждый день пешком. Поэтому мальчик поселился у аптекаря и химика Уильяма Кларка, где познакомился с разными лекарственными препаратами — узнал, как их кипятить, смешивать, растирать пестиком в ступке.

* Йомены — свободные мелкие землевладельцы, которые при этом сами занимались обработкой земли. *Прим. пер.*

** При такой формулировке может сложиться впечатление о бедности семьи Ньютонов. Однако это не так: после смерти Исаака Ньютона осталась очень неплохая по тем временам сумма примерно в 500 фунтов и несколько сотен гектаров земли. *Прим. пер.*

*** На самом деле практически втрое. На момент второго брака (в январе 1646 года) Анне (1623–1679) было 22 года, а Барнабасу Смиту (1582–1653) — 62. Нужно добавить, что по условиям брака Смит предоставил Ньютону участок земли, а также принял предложение отремонтировать семейный дом. *Прим. пер.*

Школьный учитель Генри Стокс обучил его латыни, азам теологии, греческому, ивриту, а также некоторым полезным для фермеров расчетам по математике, связанным с геодезией; а кроме того, и более глубоким вещам — например, как Архимед оценил число π . Хотя в школьных документах мальчика характеризовали как бездельника и невнимательного ученика*, когда Исаак оставался вечером у себя в комнате один, он рисовал на стенах фигуры — окружности и многоугольники, как у Архимеда.

В шестнадцать лет мать забрала его из школы и заставила управлять семейной фермой. Он ненавидел это занятие; в результате дошло до того, что его свиньи бегали по полям соседей, а заборы развалились, из-за чего местный суд оштрафовал его. Не обошлось и без ссор с матерью и сводными сестрами. Исаак часто уходил в поле, ложился там и читал в одиночестве. Он строил водяные колеса в ручье и наблюдал, какие вихри они создают в потоке.

Наконец мать сделала доброе дело и по настоянию своего брата Уильяма Эйскоу и учителя Стокса позволила Исааку вернуться в школу. В 1661 году Ньютон успешно ее окончил и поступил в Тринити-колледж в Кембридже в качестве студента-сайзера. Так тогда называли тех, с кого не брали денег за обучение, но они зарабатывали себе на жизнь, помогая более богатым студентам. Иногда Исаак питался их обедками. (Мать могла себе позволить содержать сына, но этого не делала.) В колледже у него было мало друзей, и такая ситуация сохранилась в течение всей его жизни. Он никогда не был женат и, насколько известно, никогда не заводил романов. Он редко смеялся.

Первые два года обучения в колледже были посвящены аристотелевской схоластике, что в то время было стандартом. Но затем разум юноши зашевелился. Прочитав книгу по астрологии, он заинтересовался математикой и обнаружил, что не в состоянии понять ее без

* В первый год в Грэнтеме он стал семьдесят восьмым по успеваемости из восьмидесяти школьников. *Прим. пер.*

знания тригонометрии, а тригонометрию — без знания геометрии, поэтому засел за «Начала» Евклида. Сперва все описанные результаты казались ему очевидными, но все изменилось, когда он добрался до теоремы Пифагора.

В 1664 году Исааку назначили стипендию, и он всерьез погрузился в математику. Изучив стандартные труды того времени, он быстро освоил основы десятичной арифметики, символическую алгебру, пифагоровы тройки, перестановки, кубические уравнения, конические сечения и бесконечно малые. Особенно его увлекли два автора — Декарт с его аналитической геометрией и касательными и Джон Валлис с исследованиями бесконечного и поиском площадей фигур.

Игра со степенными рядами

Изучая зимой 1664–1665 годов трактат Валлиса «Арифметика бесконечного», Ньютон наткнулся на нечто волшебное [9]. Это был новый способ поиска площадей под кривыми — способ, который был одновременно и простым, и общим.

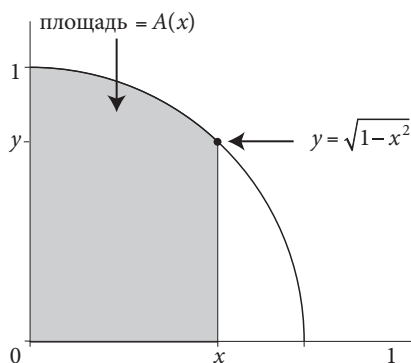
По сути, он превратил принцип бесконечности в алгоритм. Традиционный принцип бесконечности предлагает вычислять площадь сложной области, представляя ее в виде бесконечного ряда более простых областей. Ньютон следовал этой стратегии, но модернизировал ее, используя в качестве строительных блоков не формы, а символы. Вместо обычных осколков, полосок или многоугольников он использовал степени x , такие как x^2 или x^3 . Сегодня мы называем такую стратегию *методом разложения функций в степенные ряды*.

Ньютон рассматривал степенные ряды как естественное обобщение бесконечных десятичных дробей. В конце концов, бесконечная десятичная дробь — это не что иное, как бесконечный ряд степеней чисел 10 и 1/10. Цифры в подобного рода записи говорят нам, сколько степеней 10 и 1/10 здесь содержится. Например, числу $\pi = 3,14...$ соответствует такой ряд:

$$3,141\dots = 3 \times 10^0 + 1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \Delta.$$

Конечно, чтобы записать любое число этим способом, мы должны разрешить себе использовать *бесконечное* количество цифр — именно это требует бесконечная дробь. По аналогии Ньютон предположил, что он может составить любую кривую или функцию из бесконечного числа степеней x . Фокус состоял в том, чтобы выяснить, сколько их нужно для искомой комбинации. В ходе своих изысканий он разработал несколько методов поиска нужных сочетаний.

Ньютон наткнулся на свой метод, размышляя о площади круга. Обобщив старую задачу, он обратил внимание на конструкцию, которую раньше никто не замечал. Вместо того чтобы смотреть на стандартные формы вроде целого круга или четверти круга, он занялся фигурой необычной формы — «круговым сегментом» ширины x , где величина x могла быть произвольным числом от 0 до 1, а радиус круга составлял 1.



Это был первый творческий шаг. Преимуществом использования величины x было то, что Ньютон мог непрерывно регулировать форму области, словно поворачивая какую-то рукоятку. Небольшое значение x , близкое к 0, давало тонкий вертикальный сегмент круга,

тонкую полоску, стоявшую на его краю. Увеличение x утолщало сегмент. Приближение x к 1 давало знакомую форму четверти круга. Меняя x в ту или иную сторону, Ньютон мог получать все промежуточные формы.

С помощью раскованного экспериментирования, распознавания закономерностей и вдохновенных догадок (стиля мышления, почерпнутого из книги Валлиса) Ньютон обнаружил, что площадь круглого сегмента можно выразить с помощью следующего бесконечного степенного ряда:

$$A(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots$$

То, откуда взялись все эти диковинные дроби и почему все степени x здесь нечетные числа, было секретным «соусом» Ньютона. Он «приготовил» его с помощью рассуждения, которое можно изложить следующим образом [10]. (Не стесняйтесь пропустить остальную часть абзаца, если вам это рассуждение не особо интересно. А если вас, наоборот, интересуют подробности, ищите их в примечаниях.) Ньютон начал работать с круговым сегментом, используя аналитическую геометрию. Он написал уравнение окружности в виде $x^2 + y^2 = 1$, откуда получил для y выражение $y = \sqrt{1 - x^2}$. Далее он доказал, что квадратный корень эквивалентен степени $1/2$, то есть $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; обратите внимание, что $1/2$ стоит справа от скобок. Затем, поскольку ни он, ни кто-либо другой не знал, как находить площади сегментов с половинными степенями, то обошел эту проблему (второй творческий шаг) и решил ее для целых степеней. Искать площади для *целых* степеней было просто; он знал это из книги Валлиса. Таким образом, Ньютон вычислил площади сегментов для степеней 1, 2, 3 и так далее: $y = (1 - x^2)^1$, $y = (1 - x^2)^2$, $y = (1 - x^2)^3$. Он разложил эти выражения с помощью биномиальной теоремы и увидел, что они стали суммами степенных функций, площади для которых он уже свел в таблицу, которую мы видели на странице из его рабочей тетради. Затем он нашел закономерности в площадях сегментов

как функций от x . На основании закономерности, замеченной для целых степеней, он угадал ответ (третий творческий шаг) для половинной степени, после чего проверил его различными методами. Ответ для степени $1/2$ привел его к формуле для $A(x)$ — удивительно-му степенному ряду с экстравагантными дробями, показанными выше.

Производная степенного ряда для площади сегмента круга дала ему не менее удивительный ряд для площади самого круга:

$$y = \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

Хотя еще многое предстояло сделать, тем не менее это уже был замечательный результат. Ньютон составил окружность из бесконечного количества более простых частей — более простых с точки зрения интегрирования и дифференцирования. Все составляющие были степенными функциями вида x^n , где n — целое число. Для всех отдельных степенных функций было легко посчитать и производные, и интегралы (функции площади). Точно так же численные значения x^n можно вычислить с помощью простой арифметики, используя только многократное умножение, а затем снова преобразовать в ряд с помощью всего лишь четырех арифметических действий. Тут не нужно было беспокоиться о квадратных корнях и прочих хлопотных функциях. Если бы Ньютону удалось найти такие степенные ряды для *других* кривых, а не только для кругов, их можно было бы тоже проинтегрировать безо всяких проблем.

Это поразительно, Исааку Ньютону едва исполнилось 22 года, а он уже нашел путь к святому Граалю анализа. Преобразуя кривые в степенные ряды, он мог систематически находить площади под ними. Обратная задача для степенных функций была парой пустяков, если учесть уже табулированные Ньютоном пары функций. Поэтому так же просто можно было разобраться с любой кривой, если ее можно было выразить в виде суммы степенного ряда. Таков был его алгоритм. И он был невероятно мощным.

Затем он попробовал другую кривую, гиперболу с уравнением $y = 1/(1+x)$, и обнаружил, что и ее можно записать в виде степенного ряда

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Этот ряд, в свою очередь, привел его к ряду для площади области под гиперболой на отрезке от 0 до x , гиперболического аналога кругового сегмента, изученного им ранее. Этот ряд определяет функцию, которую Ньютон назвал гиперболическим логарифмом, а мы сегодня именуем натуральным логарифмом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

Логарифмы привлекали Ньютона по двум причинам. Во-первых, они позволяли во много раз ускорять вычисления, во-вторых, были применимы к сложной проблеме в теории музыки, над которой он работал: как разделить октаву на идеально равные музыкальные интервалы, не жертвуя при этом приятной гармонией традиционной шкалы. (На языке теории музыки Ньютон использовал логарифмы, чтобы оценить, насколько точно равномерное деление октавы может аппроксимировать традиционную систему чистого строя.)

Благодаря чудесам интернета и историкам из проекта Newton вы можете прямо сейчас перенестись в 1665 год и посмотреть на работу молодого Ньютона. Его рабочие записи из колледжа есть в бесплатном доступе по адресу <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/>. Загляните через его плечо и найдите страницу 223 (в оригинале 105v), вы увидите, как он сравнивает музыкальные и геометрические прогрессии. Взгляните на нижнюю часть страницы, чтобы понять, как он соединяет свои вычисления с логарифмами. Затем перейдите на страницу 43 (в оригинале 20r) и ознакомьтесь с тем, как он выполняет квадратуру гиперболы и использует свой степенной ряд, чтобы вычислить натуральный логарифм числа 1,1 с пятьюдесятью знаками.

Разве обычный человек станет вычислять логарифмы с точностью до пятидесяти знаков? Казалось, он упивался новообретенной силой, которую ему дали степенные ряды. Позже, размышляя над экстравагантностью своих расчетов, он несколько конфузливо признался: «Стыдно сказать, в какое число мест я тащил тогда эти вычисления, не имея при этом никаких других дел; ибо тогда я действительно получал слишком много удовольствия от таких изобретений» [11].

Если вас это утешит, то никто не совершенен. Когда Ньютон впервые выполнил эти вычисления, он допустил мелкую арифметическую ошибку. Его расчеты были верны только до 28-й цифры. Позднее он обнаружил ошибку и исправил ее.

После атаки на натуральный логарифм Ньютон применил степенные ряды к тригонометрическим функциям, которые возникают каждый раз там, где есть окружности, циклы и треугольники, то есть в астрономии, геодезии или навигации. Однако здесь Ньютон не был первым. Более двух веков назад математики из Кералы в Индии открыли степенные ряды для синуса, косинуса и арктангенса [12]. В начале 1500-х Джьештадева и Нилаканта Сомаяджи приписали эти формулы Мадхаве из Сангамаграмы (около 1350 — около 1425), основателю Керальской школы математики и астрономии, который вывел их и выразил в стихах примерно за двести пятьдесят лет до Ньютона. В известном смысле логично, что степенные ряды появились в Индии. Именно здесь родились десятичные дроби, а, как мы видели, Ньютон полагал, что делает для кривых примерно то же, что бесконечные десятичные дроби для арифметики.

Суть в том, что степенные ряды вооружили Ньютона универсальным инструментом анализа. С ними он мог брать интегралы, находить корни алгебраических уравнений и вычислять значения неалгебраических функций, таких как синусы, косинусы и логарифмы. Как заметил ученый, «с их помощью анализ справляется, я бы сказал, со всеми задачами» [13].

Ньютон как мастер мэшапа

Я не верю, что Ньютон делал это сознательно, но в своей работе со степенными рядами он вел себя как мастер математического мэшапа*. Он подошел к задаче площади в геометрии через принцип бесконечности древних греков и сплавил его с индийскими десятичными дробями, исламской алгеброй и французской аналитической геометрией.

Некоторые математические заимствования видны в структуре его уравнений. Например, сравните бесконечный ряд чисел, использованный Архимедом при квадрировании параболы:

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots,$$

с бесконечным рядом *символов*, которые Ньютон использует при квадрировании гиперболы:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

Если вы подставите $x = -\frac{1}{4}$ в ряд Ньютона, он станет рядом Архимеда. В этом смысле ряд Ньютона вобрал в себя ряд Архимеда как частный случай.

Более того, сходство в их работе распространяется и на рассматриваемые ими геометрические задачи. Оба берут сегменты; Архимед использует свой ряд для квадрирования (нахождения площади) сегмента параболы, а Ньютон — свой усовершенствованный степенной ряд

$$A_{\text{круг}}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \dots$$

для квадрирования кругового сегмента и другой степенной ряд

$$A_{\text{гипер}}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

для квадрирования сегмента гиперболы.

* Мэшап (англ. mash-up — «смешивать композиции», буквально «толочь») — музыкальное произведение, которое создается путем наложения двух или нескольких исходных. Прим. пер.

На самом деле ряды Ньютона неизмеримо мощнее, чем ряд Архимеда, потому что позволяли находить площади не одного, а бесконечного количества круговых и гиперболических сегментов. Вот что дал ученому абстрактный символ x . Он позволил ему непрерывно и безболезненно менять задачи; менять форму сегментов, сдвигая x влево или вправо, и в результате то, что казалось одним бесконечным рядом, на деле оказывалось бесконечным семейством бесконечных рядов, по одному ряду для каждого конкретного x . Такова мощь степенных рядов. Они дали возможность одним махом решить бесконечно много задач.

Однако повторюсь: Ньютон не решил бы ни одной задачи, если бы не стоял на плечах гигантов. Он объединил, синтезировал и обобщил идеи своих великих предшественников. Он унаследовал принцип бесконечности от Архимеда; научился касательным у Ферма; родиной десятичных дробей была Индия; переменные восходят к арабской алгебре; представление кривых на координатной плоскости позаимствовано из трудов Декарта; раскованные ухищрения с бесконечностью, дух экспериментирования и открытость к допущениям и индукции пришли от Валлиса. Он смешал все это вместе, чтобы создать нечто новое — то, что мы до сих пор используем для решения задач анализа: универсальный метод степенных рядов.

Частный анализ

Пока Ньютон работал со степенными рядами зимой 1664–1665 годов, Европу захлестнула страшная эпидемия, двигавшаяся, подобно волне, от Средиземного моря в Голландию. Когда бубонная чума достигла Лондона, она еженедельно убивала сначала сотни, а затем и тысячи людей. Летом 1665 года Кембриджский университет был временно закрыт. Ньютон отправился домой в семейную усадьбу в Линкольншире.

В течение следующих двух лет он стал лучшим математиком в мире. Но изобретения современного анализа было недостаточно, чтобы занять его ум. Он также открыл закон всемирного тяготения (закон обратных квадратов для гравитации) и применил его к движению Луны, изобрел телескоп-рефлектор и экспериментально показал, что белый свет состоит из всех цветов радуги. Ему не было еще и двадцати пяти. Как он позднее вспоминал, «в те дни я был в расцвете сил юности и думал о математике и философии больше, чем когда-либо впоследствии» [14].

В 1667 году, когда чума утихла, Ньютон вернулся в Кембридж и продолжил свои уединенные занятия. К 1671 году он свел разрозненные части анализа в единое целое. Он разработал метод разложения функций в степенные ряды, значительно улучшил существующие теории касательных, используя идеи движения, установил и доказал основную теорему анализа, которая решила задачу площадей, составил таблицы кривых и их функций площадей и свел все это в хорошо настроенную систематизированную вычислительную машину.

Но за стенами Тринити-колледжа он был невидим. Как, собственно, и хотел. Свой секретный источник он держал при себе. Замкнутый и подозрительный, он болезненно относился к критике и ненавидел спорить с кем бы то ни было, особенно с теми, кто его не понимал. Как он позднее объяснял, ему не нравится, когда его «изводят мелкие недоучки в математике» [15].

У него была еще одна причина для беспокойства: он знал, что его работа может быть подвергнута нападкам с точки зрения логики. Он использовал алгебру, а не геометрию и беспечно играл с бесконечностью, первородным грехом анализа. Джона Валлиса, чья книга так повлияла на молодого Ньютона, когда тот был студентом, жестко критиковали за то же самое. Томас Гоббс [16], политический философ и второсортный математик, назвал «Арифметику бесконечного» «паршой символов» [17] за то, что она опирается на алгебру,

и «гнусной книгой» [18] за использование бесконечности. И Ньютон должен был признать, что его собственная работа была всего лишь анализом, а не синтезом. Она годилась для открытий, но не для доказательств. Он преуменьшал значение своих методов работы с бесконечностью, считая их «недостойными публичных выступлений» [19], а много лет спустя сказал: «Наша обманчивая алгебра вполне пригодна для поиска результатов, но совершенно не годится для создания текстов и передачи их потомкам» [20].

По этим и другим причинам Ньютон скрывал свои достижения. И все же какая-то его часть жаждала признания. Он был сильно расстроен и подавлен, когда Николас Меркатор опубликовал в небольшой книжке *Logarithmotechnia*, вышедшей в 1668 году, тот же самый ряд для натурального логарифма, который Ньютон открыл тремя годами ранее. Шок и разочарование оттого, что его опередили, побудили Ньютона написать в 1669 году короткую рукопись и распространить ее частным образом среди его немногих доверенных приверженцев. Книга с полным названием «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (*De Analysi*) выходила далеко за пределы логарифмов. В 1671 году он расширил ее до своего главного труда по анализу — «Трактата о методах рядов и флюксий», известного также как *De Methodis*, однако рукопись не увидела свет при его жизни; он тщательно берег ее и хранил для личного пользования. *De Analysi* была опубликована только в 1711 году, а *De Methodis* появилась только после смерти ученого, в 1736 году.

Наследие Ньютона включало пять тысяч страниц неопубликованных математических рукописей, так что миру потребовалось время, чтобы открыть для себя Исаака Ньютона. Однако в стенах Кембриджа его считали гением. В 1669 году Исаак Барроу, первый лукасовский профессор математики* и человек, которого с наибольшим

* Лукасовский профессор математики — это именная профессура в Кембридже, которую учредил в 1663 году Генри Лукас. Среди тех, кто занимал эту почетную должность после Барроу и Ньютона, были Бэббидж, Стокс, Дирак, Хокинг и другие первоклассные ученые. Прим. пер.

основанием можно назвать наставником Ньютона, ушел в отставку и рекомендовал его на свое место.

Это была идеальная должность для Ньютона. Впервые в жизни он был финансово обеспечен. Здесь не требовалось много преподавать. У него не было аспирантов, а студенты неохотно посещали его лекции, что тоже было неплохо, так как они все равно его не понимали. Они не знали, как относиться к этой странной сухопарой монашеской фигуре в алом одеянии, с мрачным лицом и серебристыми волосами до плеч.

После окончания работы над *De Methodis* ум ученого оставался таким же лихорадочным, как и всегда, однако не анализ теперь составлял его главный интерес. Он углубился в библейские пророчества и хронологию, оптику и алхимию, разделял свет на цвета с помощью призм, экспериментировал с ртутью, нюхал химические вещества, и иногда пробовал их на вкус, топил днем и ночью печь, пытаясь превратить свинец в золото. И, как и Архимед, пренебрегал питанием и сном. Он искал секреты Вселенной и не желал ни на что отвлекаться.

Но отвлечься пришлось: в 1676 году он получил письмо из Парижа от некоего Лейбница. У того было несколько вопросов о степенных рядах.

Измышления разума

Как Лейбниц узнал о неопубликованной работе Ньютона? Это было несложно. Слухи об открытиях английского ученого ходили много лет. В 1669 году Исаак Барроу в надежде продвинуть своего протеже послал копию *De Analysi* без указания автора своему знакомому математику Джону Коллинзу, который находился в то время в центре переписки между британскими и континентальными математиками. Коллинз был поражен результатами, изложенными в книге, и спросил Барроу об авторе. С разрешения Ньютона Барроу раскрыл его имя: «Я рад, что работа моего друга доставила вам такое удовольствие. Его зовут мистер Ньютон; он сотрудник нашего колледжа, очень молодой... но необычайно гениальный и сведущий в этих вещах» [1].

Коллинз никогда не умел хранить секреты. Он дразнил своих корреспондентов отрывками из *De Analysi* и поражал их результатами Ньютона, не объясняя, откуда они взялись. В 1675 году он показал степенные ряды Ньютона для синуса и арксинуса датскому математику Георгу Бору, а тот сообщил о них Лейбницу. Лейбниц отправил письмо секретарю Лондонского королевского общества, родившемуся в Германии, но постоянно жившему в Лондоне дипломату и ученому Генри Ольденбургу: «Я вижу, что он [Бор] принес нам эти работы, которые кажутся мне весьма изобретательными, а последний ряд особенно выделяется определенной редкой элегантностью, так что я был бы признателен, достославный сэр, если бы вы прислали мне доказательство» [2].

Ольденбург передал эту просьбу Ньютону, но тот не слишком обрадовался. Отправить доказательство? Ха! Вместо этого он через Ольденбурга ответил Лейбницу целыми страницами загадочных устрашающих формул, которыми был набит труд *De Analysi*. За пределами узкого круга знакомых Ньютона никто не видел подобной математики. Вдобавок Ньютон подчеркнул, что этот материал устарел: «Я пишу довольно коротко, поскольку эти теории давно стали мне неприятны — до такой степени, что я уже почти пять лет от них воздерживаюсь» [3].

Однако Лейбница такое замечание не остановило, и он написал ответ, надеясь расшевелить Ньютона и извлечь еще какую-нибудь информацию. Во всем этом он был новичком. Дипломат, логик, лингвист и философ, он только недавно заинтересовался высшей математикой. Он много общался с Христианом Гюйгенсом, ведущим математическим умом Европы, поэтому был в курсе последних событий. Всего за три года занятий Лейбниц обогнал всех на континенте. Все, что ему сейчас требовалось, — выяснить, что знает Ньютон... и что утаивает.

Чтобы выудить информацию из англичанина, Лейбниц попробовал другой подход. Он попытался произвести на него впечатление, но просчитался. Он предложил Ньютону некоторые собственные наработки, а именно один бесконечный ряд, которым гордился: под видом подарка, но фактически как намек, что он достоин того, чтобы ему раскрыли секрет.

Ньютон ответил через Ольденбурга спустя два месяца, 24 октября 1676 года. Он начал с лести, назвав Лейбница «весьма выдающимся» [4] и похвалив его бесконечный ряд, отметив, что он «заставляет нас также надеяться на другие великие вещи от него» [5]. Следовало ли воспринимать такие комплименты всерьез? По-видимому, нет, поскольку следующая строка была полна ядовитого сарказма: «Разнообразие способов достижения одной и той же цели доставило мне большое удовольствие, поскольку мне уже известны три способа получения рядов такого рода, так что я едва ли мог ожидать, что мне

сообщат какой-то новый» [6]. Другими словами, *спасибо за то, что показали мне то, что я умею делать тремя другими способами.*

В оставшейся части письма Ньютон просто играл с Лейбницем. Он раскрыл некоторые свои методы для бесконечных рядов, объясняя их в педагогической манере, более подходящей для школьников. К счастью для потомков, эти части письма настолько прозрачны, что мы можем точно понять, что имел в виду Ньютон.

Но когда он добрался до своих самых ценных открытий (революционных методов из второго трактата по анализу, *De Methodis*, включая основную теорему, которая еще не стала известной), вежливое изложение Ньютона закончилось: «Основания таких операций на деле достаточно очевидны, но поскольку я не могу продолжить их объяснение сейчас, я предпочту скрыть их в таком виде: *басссдае13ефф7и3л9н4о4qrr4s8t12vx*. На этом основании я также пытался упростить теории, касающиеся нахождения квадратур кривых и получил некоторые общие теоремы» [7].

С помощью этого шифрования Ньютон раскрыл Лейбницу свой самый заветный секрет, фактически говоря ему: *«Я знаю нечто, чего не знаешь ты, и даже если ты впоследствии откроешь это, эта криптограмма докажет, что я знал это раньше»**.

А вот чего Ньютон не знал — так это того, что Лейбниц уже открыл этот секрет самостоятельно.

* Код Ньютона *басссдае13ефф7и3л9н4о4qrr4s8t12vx* означает количество букв (6 букв *a*, 2 буквы *c* и так далее) и полностью записывается так: *аааааа сс d ае ееееееееееее ff iiiiiii lll nnnnnnnnnn oooo qqqq rr ssss tttttttt uuuuuuuuuuuuuu x* (*ae* — это латинский диграф [составной письменный знак], а *u* и *v* в латыни долгое время были вариантами одной буквы, поэтому у Ньютона *12v* означает общее количество *u* и *v*). Этот набор букв — анаграмма латинской фразы *Data aequatione quotcunque ntes quantitates involvente, invenire: et vice versa* («Задано уравнение с любым количеством флюэнт, найти флюксии; и наоборот»), с помощью которой Ньютон описал суть своих открытий. Такие анаграммы были широко распространены в XVII–XIX веках, поскольку одновременно выполняли две функции: надежно скрывали открытие (например, ученый хотел сначала произвести его надежную проверку) и одновременно подтверждали авторство (ведь шансы на то, что из этих букв можно составить описание какого-то другого открытия, крайне малы). *Прим. пер.*

В мгновение ока

Между 1672-м и 1676 годом Лейбниц создал собственную версию анализа. Как и Ньютон, он установил и доказал основную теорему, осознал ее значимость и построил вокруг нее алгоритмическую систему. Он писал, что с ее помощью смог «в мгновение ока» [8] вывести почти все теоремы о квадратурах и касательных, известные в то время, — за исключением тех, которые Ньютон по-прежнему скрывал от мира.

Когда Лейбниц написал два письма Ньютону в 1676 году, любопытствуя и прося доказательств, он понимал, что излишне напорист, но ничего не мог с собой поделать. Как он однажды признался своему другу, «я часто ощущаю себя обремененным недостатком, который в этом мире имеет большое значение, а именно нехваткой изысканных манер, поэтому часто порчу первое впечатление о себе» [9].

Тощий, сутулый и бледный [10], Лейбниц был не из тех, чья внешность привлекает внимание, но его ум был прекрасен. Он был самым разносторонним гением [11] в век гениев, среди которых были Декарт, Галилей, Ньютон и Бах.

Хотя Лейбниц создал свой вариант анализа через десятилетие после Ньютона, обычно по нескольким причинам его считают соавтором. Он первым опубликовал результаты, причем в стройной удобоваримой форме, да и воспользовался продуманными элегантными обозначениями, которые актуальны до сих пор. Более того, Лейбниц привлекал последователей, которые распространяли его слово с евангельским рвением. Они написали влиятельные учебники и проработали предмет с плодотворной детальностью. Позднее, когда Лейбница обвиняли в краже анализа у соперника, эти ученики яростно его защищали и с тем же запалом контратаковали Ньютона.

Подход Лейбница к анализу более элементарен, чем у Ньютона, и во многих случаях интуитивнее [12]. Это также объясняет, почему изучение производных издавна называется *дифференциальным* исчислением, а операция взятия

производной — *дифференцированием*. Причина в том, что при подходе Лейбница истинное сердце анализа — понятие дифференциала, производные же вторичны и являются позднейшим продуктом.

Сегодня мы забываем, насколько важны были дифференциалы. Современные учебники преуменьшают их значимость, переопределяют и обеляют их, поскольку они (ах!) бесконечно малы. В этом качестве они кажутся парадоксальными, странными и пугающими, поэтому многие учебники — просто на всякий случай — запирают бесконечно малые где-то на чердаке, как мать Нормана Бейтса в фильме «Психо». Но на самом деле их не стоит бояться. Правда.

Давайте же с ними познакомимся.

Бесконечно малые величины

Бесконечно малая величина — весьма туманная вещь. Предполагается, что это самое крохотное число, которое вы можете себе представить, но при этом не равное нулю. Короче говоря, бесконечно малая величина меньше, чем все, но больше, чем ничто. Еще парадоксальнее то, что бесконечно малые величины бывают разных размеров.

Бесконечно малая часть бесконечно малой величины — еще неизмеримо меньше. Мы могли бы назвать это бесконечно малой величиной второго порядка.

Точно так же как существуют бесконечно малые величины, существуют бесконечно малые длины и бесконечно малые времена. Бесконечно малая длина — это не точка, она больше точки, но меньше, чем любая длина, которую вы можете себе представить. Аналогично бесконечно малый временной интервал — это не мгновение, не одна точка во времени, но он короче любого мыслимого промежутка времени.

Понятие бесконечно малых величин возникло как способ говорить о пределах. Вспомните пример из главы 1, где мы рассматривали

последовательность правильных многоугольников, которая началась с равностороннего треугольника и квадрата и продолжалась пятиугольниками, шестиугольниками и другими правильными многоугольниками со все большим числом сторон. Мы отмечали, что чем больше сторон рассматриваем, тем больше многоугольник становится похож на окружность. У нас возникало искушение сказать, что окружность — это многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, но мы прикусили язык, поскольку это понятие, казалось, вело к бессмыслице.

Мы также обнаружили, что если взять любую точку на окружности и смотреть на нее в микроскоп, то любая крохотная дуга, содержащая эту точку, будет при увеличении выглядеть все прямее и прямее. В пределе с бесконечным увеличением она будет идеально прямой. В этом смысле действительно полезно думать об окружности как о бесконечном множестве прямых фрагментов и, следовательно, как о многоугольнике с бесконечным числом бесконечно малых сторон.

И Ньютон, и Лейбниц пользовались бесконечно малыми величинами, но в то время как Ньютон впоследствии отказался от них в пользу флюксий (которые представляют собой отношение бесконечно малых первого порядка и поэтому конечны и респектабельны, как, собственно, производные), у Лейбница был более прагматичный взгляд [13]. Он не беспокоился о том, существуют ли они на самом деле. Он считал их полезным и эффективным способом переформулировать рассуждения о пределах. Он также рассматривал их как удобные бухгалтерские средства, которые высвобождают воображение для более продуктивной работы. Как он объяснял одному коллеге: «С философской точки зрения я верю в бесконечно малые числа не больше, чем в бесконечно большие. Я рассматриваю те и другие как измышления разума, предназначенные для сжатого изложения, пригодного для анализа» [14].

А что сегодня по этому поводу думают математики? Существуют ли *в реальности* бесконечно малые величины? Это зависит от того, что вы подразумеваете под реальностью. Физики говорят нам, что

бесконечно малые в реальном мире не существуют. В идеальном мире математики на обычной прямой действительных чисел бесконечно малым величинам места нет, однако они существуют в некоторых нестандартных числовых системах, обобщающих действительные числа*. Для Лейбница и его последователей они существовали как измышления разума, которые оказались удобными и пришлось к стати. Вот так мы и станем о них думать.

Куб чисел, близких к 2

Чтобы посмотреть, насколько поучительными могут быть бесконечно малые, давайте возьмем конкретный пример. Рассмотрим арифметическую задачу. Сколько будет 2 в кубе (то есть $2 \times 2 \times 2$)? Естественно, 8. А как насчет $2,001 \times 2,001 \times 2,001$? Понятно, что чуть больше 8, но насколько именно?

То, что мы сейчас ищем, — это способ мышления, а не численный ответ. Общий вопрос таков: если мы незначительно меняем в задаче входное число (в данном случае с 2 на 2,001), то как оно изменится на выходе? В данном случае с 8 на 8 плюс нечто, и структуру этого нечто мы и хотим понять.

Поскольку совладать с искушением подглядеть ответ нелегко, давайте посмотрим, что нам скажет калькулятор. Набираем 2,001, нажимаем кнопку x^3 и получаем:

$$(2,001)^3 = 8,012006001.$$

Структура числа после десятичной запятой такова:

$$0,012006001 = 0,012 + 0,000006 + 0,000000001.$$

* Например, нестандартный анализ Абрахама Робинсона, где рассматриваются гипердействительные числа. *Прим. пер.*

Подумайте об этом так: малое плюс сверхмалое плюс сверхсверхмалое.

Мы можем пояснить такую конструкцию с помощью алгебры. Предположим, что величина x (в нашем случае 2) слегка изменяется и становится равной $x + \Delta x$ (в нашем примере 2,001). Символ Δx означает *приращение* x , то есть небольшое изменение x (у нас $\Delta x = 0,001$). И когда мы спрашиваем, чему равно $(2,001)^3$, мы на самом деле спрашиваем, чему равно $(x + \Delta x)^3$. Перемножив его (используя треугольник Паскаля или формулу бинома), получаем:

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

В нашей задаче, где $x = 2$, это уравнение принимает вид

$$(2 + \Delta x)^3 = 2^3 + 3(2)^2\Delta x + 3(2)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Теперь мы видим, почему добавка к 8 состоит из трех частей различной величины. Малая, но главная часть равна $12\Delta x = 12 \times 0,001 = 0,012$. Оставшиеся части $6(\Delta x)^2$ и $(\Delta x)^3$ отвечают за сверхмалую 0,000006 и сверхсверхмалую 0,000000001 величины. Чем больше множителей Δx входит в слагаемое, тем оно меньше. Вот почему они ранжируются по размеру. Каждое лишнее умножение на маленькое число Δx делает малую величину еще меньше.

В этом небольшом примере хорошо видна ключевая идея дифференциального исчисления. Во многих ситуациях, касающихся причины и следствия, дозы и реакции, входа и выхода, а также иной взаимосвязи между переменной x и зависящей от нее переменной y , небольшое изменение на входе Δx приводит к небольшому изменению на выходе Δy . Это небольшое изменение, как правило, организовано структурированным способом, который мы можем изучить, а именно: изменение на выходе организовано иерархически из нескольких частей. Они ранжированы по размеру от малого вклада до сверхмалого и еще меньших вкладов. Такая градация позволяет нам сосредоточиться на части, пусть и малой, но вносящей основной

вклад, и пренебречь всеми остальными частями — сверхмалыми и еще меньшими. Именно в этом и состоит основная идея. Хотя малое изменение мало, оно колоссально по сравнению с другими (как в нашем примере число 0,12 огромно по сравнению с 0,000006 и 0,000000001).

Дифференциалы

Такой способ мышления, когда мы пренебрегаем всеми вкладами в правильный ответ, кроме самой крупной, львиной доли, может показаться только приблизительным. И это так, если изменения на входе вроде числа 0,001, добавленного нами к 2, — это *конечные* изменения. Но если мы рассмотрим *бесконечно малые* изменения на входе, то наш метод мышления станет точным. Ошибок не будет. Львиная доля становится всем. И, как мы уже говорили в этой книге, бесконечно малые изменения — именно то, что нам нужно, чтобы понимать наклоны, мгновенные скорости и площади криволинейных областей.

Чтобы посмотреть, как это работает на практике, давайте вернемся к примеру выше, когда мы пытались вычислить куб числа, слегка превышающего 2. Только теперь изменим число с 2 на $2 + dx$, где dx — бесконечно малое приращение Δx . Это понятие по своей сути не отличается осмысленностью, так что не думайте о нем слишком усердно. Главное тут — знать, что понимание того, как это работает, упрощает вычисления.

Предыдущая формула $(2 + \Delta x)^3 = 8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, в частности, теперь сокращается до более простой:

$$(2 + dx)^3 = 8 + 12dx.$$

Что произошло с остальными слагаемыми вида $6(dx)^2 + (dx)^3$? Мы их отбросили. Ими можно пренебречь. Эти сверхмалые

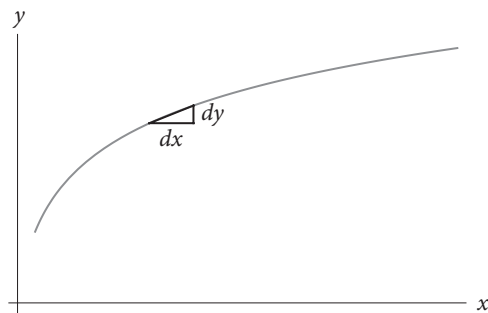
и сверхсверхмалые величины пренебрежимо малы по сравнению с $12dx$. Но почему тогда мы сохранили $12dx$? Разве эта величина не пренебрежимо мала по сравнению с 8? Да, но если бы мы отбросили еще и ее, то не учли бы вообще никаких изменений, и ответ остался бы 8. Поэтому рецепт таков: для изучения бесконечно малых изменений сохраните слагаемые, включающие dx в первой степени, и игнорируйте все остальные.

Такой способ мышления, использующий бесконечно малые величины вроде dx , можно переформулировать в терминах пределов и сделать совершенно кошерным и строгим. Современные учебники действуют именно так. Но быстрее и проще использовать бесконечно малые величины. Специальный термин для них в этом контексте — *дифференциалы*. Это название проистекает от их представления в виде разностей Δx и Δy , когда эти разности в пределе стремятся к нулю*. Это похоже на то, что мы видели, когда рассматривали параболу под микроскопом и наблюдали, как кривая становится все прямее и прямее при увеличении.

Производные через дифференциалы

Позвольте вам показать, насколько простыми становятся некоторые идеи, если подходить к ним через дифференциалы. Например, что такое наклон кривой, если рассматривать ее в виде графика на координатной плоскости? Как мы узнали из нашей работы с параболой в главе 6, наклон — это производная, определяемая как предел $\Delta y / \Delta x$, когда Δx стремится к нулю. А чем он будет в терминах дифференциалов? Просто dy / dx . Словно кривая составлена из крохотных прямых линий.

* Термин «дифференциал» образован от латинского слова *differentia* — «разность». *Прим. пер.*



Если мы представим dy как бесконечно малое приращение по вертикали, а dx — как бесконечно малое приращение по горизонтали, то наклон будет просто их отношением, как и всегда для наклонного пандуса, и, следовательно, составит dy / dx .

Чтобы применить этот подход к конкретной кривой (например, $y = x^3$, которую мы использовали, возводя в куб числа, слегка превосходящие 2), вычислим dy следующим образом. Пишем:

$$y + dy = (x + dx)^3.$$

Как и раньше, раскрываем скобки справа и получаем

$$(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3.$$

Теперь в соответствии с нашим рецептом отбрасываем слагаемые $(dx)^2$ и $(dx)^3$, потому что они не входят в львиную долю. Таким образом, у нас получается

$$y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2 dx.$$

А поскольку $y = x^3$, упрощаем уравнение до вида

$$dy = 3x^2 dx.$$

Деление обеих частей на dx дает соответствующий наклон

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

В точке $x = 2$ это дает наклон $3 \times (2)^2 = 12$. То же число 12, что мы видели ранее. Именно поэтому изменение с 2 до 2,001 давало нам $(2,001)^3 \approx 8,012$. Это означает, что бесконечно малое изменение x около 2 (назовем его dx) преобразуется в бесконечно малое изменение y около 8 (назовем его dy), которое в 12 раз больше ($dy = 12dx$).

Между прочим, аналогичные рассуждения показывают, что для любого положительного n производная $y = x^n$ равна $dy/dx = \Delta x^{n-1}$; этот результат мы уже упоминали ранее. При небольших дополнительных усилиях мы могли бы распространить его на отрицательные, дробные и иррациональные n .

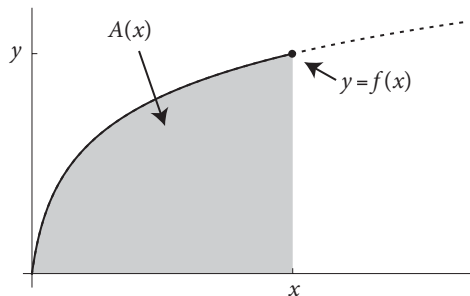
Большое преимущество бесконечно малых в целом и дифференциалов в частности состоит в том, что они облегчают вычисления. Они срезают путь. Освобождают разум для более творческого мышления, так же как алгебра делала это для геометрии в давние годы. Вот за это Лейбниц и обожал дифференциалы. Он писал своему наставнику Гюйгенсу: «Мой анализ обеспечил мне практически без размышлений огромную часть открытий, которые относятся к этой теме. Что мне больше всего нравится в моем анализе, так это то, что он предоставляет те же преимущества перед древними в геометрии Архимеда, которые Виет и Декарт дали нам в геометрии Евклида или Аполлония, освобождая нас от необходимости работать с воображением» [15].

Единственное, что нехорошо с бесконечно малыми величинами, — это то, что они не существуют, по крайней мере в системе действительных чисел. Да, и еще одно — они парадоксальны. Они не казались бы осмысленными, даже если бы существовали. Один из последователей Лейбница, Иоганн Бернулли, понял, что они обязаны удовлетворять бессмысленным уравнениям вроде $x + dx = x$, хотя dx — это не ноль. Хм. Ну нельзя же получить все сразу! Бесконечно малые величины действительно дают правильные ответы, как только мы научимся с ними работать, а предоставляемые ими выгоды с лихвой компенсируют все психические расстройства, которые они могут вызывать. Они подобны лжи Пикассо, которая помогает нам осознать истину.

В качестве еще одной демонстрации мощи бесконечно малых величин Лейбниц использовал их для вывода закона синусов для преломления света, предложенного Снеллом. Вспомните главу 4: когда свет переходит из одной среды в другую (скажем, из воздуха в воду), он изгибается в соответствии с математическим законом, который не раз был установлен в течение столетий. Ферма объяснил его своим принципом наименьшего времени, но изо всех сил пытался решить задачу оптимизации, которую подразумевал его принцип. С помощью своих дифференциалов Лейбниц с легкостью вывел закон синусов [16] и с явной гордостью отметил, что «другие весьма ученые мужи искали многими хитроумными способами то, что человек, сведущий в этом анализе, может достичь в этих строках, как по волшебству» [17].

Основная теорема анализа через дифференциалы

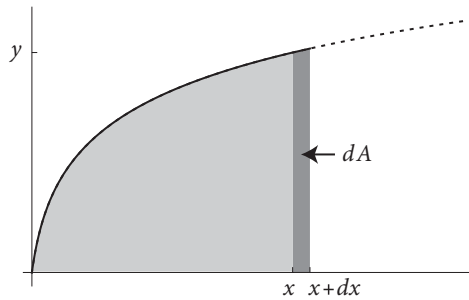
Еще одним триумфом дифференциалов Лейбница стало то, что они сделали основную теорему прозрачной. Вспомним, что она относится к функции накопления площади $A(x)$, которая определяет площадь под кривой $y = f(x)$ в интервале от 0 до x . Теорема гласит, что при сдвиге x вправо площадь под кривой накапливается со скоростью самой $f(x)$. Таким образом, $f(x)$ является производной $A(x)$.



Чтобы понять, откуда берется этот результат, предположим, что мы увеличиваем x на бесконечно малую величину dx . Как изменится

площадь $A(x)$? По определению, она изменится на величину dA , то есть новая площадь равна старой плюс ее приращение, $A + dA$.

Основная теорема получается сразу же, как только мы наглядно представим, чему должно равняться dA . Как видно из рисунка ниже, площадь изменяется на бесконечно малую величину dA , которая представляет собой узкую вертикальную полоску между x и $x + dx$.



Эта полоска — прямоугольник с высотой y и основанием dx . Поэтому его площадь равна произведению этих величин, то есть $y dx$ или, если угодно, $f(x) dx$.

В действительности такая полоска будет прямоугольником только при бесконечно малом приращении. В реальности для полоски конечной ширины Δx изменение площади ΔA будет состоять из двух частей. Основной вклад внесет прямоугольник площади $y \Delta x$. Намного меньше по площади маленький, криволинейный сверху, похожий на треугольник кусочек, располагающийся над этим прямоугольником.



Вот еще один случай, когда мир бесконечно малых величин приятнее реального. В реальном мире нам пришлось бы учитывать площадь этой крышечки, а это сделать непросто, поскольку она зависит от формы кривой. Но когда ширина прямоугольника стремится к нулю и «становится» dx , площадь крышечки оказывается пренебрежимо малой по сравнению с площадью прямоугольника. Это сверхмалая величина по сравнению с малой величиной.

В результате получается, что $dA = y dx = f(x)dx$. Бум! И вот вам основная теорема анализа. Или, как это более вежливо переформулируют в нынешние дни (в наше заблудшее время, когда дифференциалы отвергнуты ради производных),

$$\frac{dA}{dx} = y = f(x).$$

Это в точности то, что мы установили в главе 7 с помощью примера с малярным валиком.

И последнее: когда мы рассматриваем площадь под кривой как сумму бесконечного числа бесконечно узких прямоугольных полосок, то записываем это как*

$$A(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Этот символ с длинной шеей, похожий на лебедя — фактически растянутая буква S , которая напоминает нам, что здесь происходит суммирование**. Это суммирование определенного рода, характерное для интегрального исчисления, подразумевающее сумму бесконечного количества бесконечно узких полосок, объединенных в единую связную область. Символ называется знаком интеграла. Лейбниц ввел его в рукописи 1677 года и опубликовал в 1686-м. Это самый

* В этой записи смешиваются два разных x — тот x , что в левой части, совпадает с верхним пределом интегрирования в правой, но вот под знаком интеграла и в дифференциале — на деле другой. Фактически этот второй «немой», поскольку интегрировать можно по любой переменной. Чтобы не путаться, лучше использовать другую переменную интегрирования, так что этот интеграл может быть записан, например, как $A(x) = \int_0^x f(t) dt$. *Прим. пер.*

** Буква S от лат. *summa* «сумма». *Прим. пер.*

узнаваемый символ математического анализа. Число 0 под этим знаком и величина x над ним указывают на конечные точки интервала на оси x , над которым выстроены прямоугольники. Эти точки называются пределами интегрирования.

Как Лейбниц пришел к дифференциалам и основной теореме?

Ньютон и Лейбниц пришли к основной теореме анализа разными путями. Ньютон — размышляя о движении, постоянном спутнике математики. Лейбниц же зашел с другой стороны. Хотя у него не было математического образования, ранее он какое-то время занимался целыми числами, сочетаниями и перестановками, а также дробями и суммами определенного рода.

Более глубоко погружаться в эту науку он начал после встречи с Христианом Гюйгенсом. В то время Лейбниц находился с дипломатической миссией в Париже и был очарован рассказами Гюйгенса о последних достижениях в математике, поэтому захотел узнать больше. С чудесной педагогической прозорливостью (или это была удача?) Гюйгенс поставил перед учеником задачу, которая и привела немецкого математика к основной теореме [18].

Гюйгенс предложил Лейбницу вычислить бесконечную сумму:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = ?$$

(Точки в знаменателе означают умножение.) Чтобы понять задачу, начнем для разминки с простого варианта. Предположим, что сумма не бесконечна, а содержит, скажем, только 99 слагаемых. Иными словами, нам нужно вычислить

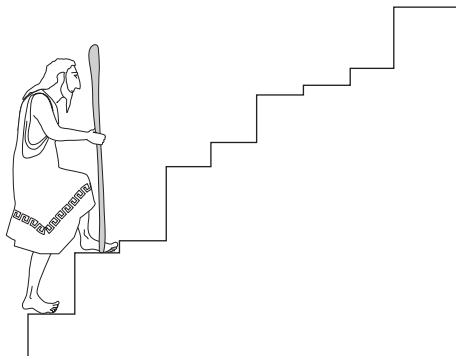
$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Если вы не найдете какого-то хитроумного трюка, то расчеты будут утомительными, хотя и несложными. При достаточном терпении (или при наличии компьютера) и упорстве можно сложить

все 99 дробей. Однако пропала бы суть, а она тут в том, чтобы найти *элегантное* решение. Элегантные решения ценятся в математике не только потому, что красивы, но и потому, что сильны. Проливаемый ими свет часто можно использовать для решения *других* задач. В нашем случае элегантный свет, быстро обнаруженный Лейбницем, позволил ему открыть основную теорему анализа.

Он решил задачу Гюйгенса с помощью блестящего трюка. Когда я увидел его впервые, у меня было ощущение, что я наблюдаю за фокусником, извлекающим кролика из шляпы. Если вы хотите испытать схожие эмоции, пропустите аналогию, которую я сейчас проведу. Но если предпочитаете понимать то, что кроется за этим волшебством, смотрите на то, что за ним стоит.

Представьте человека, который поднимается по очень длинной лестнице с разной высотой ступенек.



Предположим, что наш герой решил измерить общую высоту подъема — от нижней ступени до верхней. Как ему это сделать? Ну, он всегда может сложить высоту всех отдельных ступенек. Такая мало вдохновляющая стратегия походила бы на сложение 99 дробей в вышеописанной сумме S . Так можно сделать, но эта работа не из приятных, потому что лестница у нас неправильная. А если

в ней миллионы ступенек, то складывать их высоту — напрасный труд. Должен существовать способ получше.

И он есть — использовать *альтиметр* (высотомер). Это устройство, которое измеряет высоту над уровнем моря или земли. Если бы у Зенона на рисунке был высотомер, он бы решил задачу, просто определив высоту верхней точки, высоту нижней точки, а затем вычел бы одно из другого. Вот и все: общий подъем по вертикали равен разности этих двух величин. Такая разность равна сумме высот всех ступенек. Какой бы неправильной ни была лестница, это правило верно всегда. Его успех опирается на тот факт, что данные высотомера тесно связаны с величиной ступенек: для каждой ступеньки ее высота равна разности между последовательными показаниями высотомера. Иными словами, высота ступеньки — это разность высот ее вершины и ее основания.

Сейчас вы, вероятно, думаете: *какое отношение имеет альтиметр к исходной задаче сложения большого числа сложных дробей?* Ну, прежде всего, если бы мы смогли найти аналог высотомера для сложной суммы, она стала бы легкой. Это было бы эквивалентно разности между показаниями в верхней и нижней точке, что фактически и придумал Лейбниц. Он нашел высотомер для суммы S . Это позволило ему записать каждый член в этой сумме в виде разности двух последовательных показаний высотомера, что, в свою очередь, дало возможность вычислить сумму с помощью вышеописанной идеи. Затем он применил высотомер и к другим задачам. В итоге все это привело Лейбница к основной теореме анализа.

Вооружившись такой аналогией, давайте снова вернемся к сумме S .

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Теперь перепишем каждое слагаемое в виде разности двух других чисел — точно так же, как высота каждой ступеньки была разностью между показанием альтиметра вверху ступеньки и внизу. Начнем с первого слагаемого:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}.$$

Правда, пока не очевидно, куда это приведет, но оставайтесь с нами. Сейчас мы увидим, насколько полезно переписать дробь $1/(1 \cdot 2)$ в виде разности двух аликвотных дробей $1/1$ и $1/2$. (*Аликвотной* называется дробь, числитель которой равен 1. Эти последовательные дроби станут играть роль последовательных показаний альтиметра.) Если арифметическое преобразование выше кажется неясным, попробуйте воспроизвести его справа налево. Справа мы вычитаем дробь $1/2$ из дроби $1/1$; в середине приводим их к общему знаменателю; слева упрощаем числитель.

Аналогично мы можем переписать в виде разности двух аликвотных дробей все остальные слагаемые в сумме S :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{3-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{4-3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

и так далее. В результате наша сумма S примет такой вид:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right).$$

Теперь мы видим метод в этом безумии*. Взгляните повнимательнее на структуру суммы. Почти все слагаемые входят в нее дважды, один раз с плюсом, а другой — с минусом. Например, число $1/2$ сначала вычитается, а потом добавляется и в результате пропадает. То же верно для $1/3$: оно встречается дважды и исчезает. Остальные дроби, до $1/99$ включительно, ведут себя так же. Исключения — первое и последнее слагаемое в сумме S , у которых нет парных элементов с другим знаком. В результате, когда дым рассеивается, остаются только они. Поэтому результат таков:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{100}.$$

* Отсылка к английской поговорке о скрытой цели, восходящей к «Гамлету». Полоний комментирует поведение Гамлета: «Хоть это и безумие, но в нем есть метод» (акт 2, сцена 2). *Прим. пер.*

Это вполне логично в свете аналогии с лестницей и снова говорит нам, что общая сумма высот всех ступенек определяется как высота вверх минус высота вниз.

К слову, S упрощается до $99/100$. Это и есть ответ на задачу с 99 слагаемыми. Лейбниц понял, что с помощью того же трюка может справиться с любым числом слагаемых. Если в сумме будет N членов, а не 99, то в результате получится:

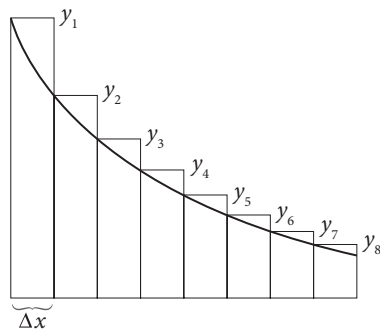
$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}.$$

Все это проясняет ответ на изначальный вопрос Гюйгенса: когда N стремится к бесконечности, слагаемое $1/(N+1)$ стремится к нулю, а потому S стремится к 1. Следовательно, это предельное значение 1 и будет ответом для задачи Гюйгенса.

Ключевой идеей, позволившей Лейбницу найти эту сумму, была ее весьма конкретная структура: оказалось, что ее можно переписать в виде суммы последовательных разностей (в данном случае в виде разности аликвотных дробей). Такая структура привела к масштабным сокращениям, как мы видели выше. Подобные суммы сегодня в математике называют *телескопическими*, поскольку они напоминают те старые складные подзорные трубы, которые вы могли видеть в фильмах про пиратов. Аналогия тут в том, что исходная сумма предстает в разложенной форме, но вследствие разностной структуры ее можно привести к более компактному виду. При этом выживают только слагаемые без партнеров, с которыми их можно сократить, — те, которые находятся на концах телескопа.

Естественно, Лейбниц задался вопросом, применим ли трюк с телескопированием к другим задачам. Такую идею стоило реализовать, учитывая, насколько мощной она могла быть. Если бы он, столкнувшись с длинным списком чисел, которые требуется сложить, мог записать каждое число в виде разности последовательных чисел (которые еще нужно определить), телескопический трюк сработал бы снова.

Это заставило Лейбница задуматься о площадях. Ведь определение площади под какой-то кривой на координатной плоскости сводится к суммированию длинного списка чисел — площадей множества тонких вертикальных прямоугольных полосок.



На этом рисунке отражена идея, к которой он пришел. Здесь только восемь прямоугольных полос, но вы должны попробовать представить такую же картинку с миллионами и миллиардами более тонких прямоугольников или, еще лучше, бесконечно много бесконечно тонких прямоугольников. К сожалению, это трудно нарисовать или визуализировать, поэтому-то я и использую только восемь прямоугольников.

Для простоты предположим, что у всех прямоугольников одинаковая ширина. Назовем ее Δx . Высоты прямоугольников равны $y_1, y_2, \dots, y_8$. Тогда общая площадь всех аппроксимирующих прямоугольников составит

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_8 \Delta x.$$

Такую сумму восьми чисел было бы удобно «телескопировать», если бы мы нашли какие-нибудь волшебные числа $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$, разности которых дают площади прямоугольников

$$y_1 \Delta x = A_1 - A_0,$$

$$y_2 \Delta x = A_2 - A_1,$$

$$y_3 \Delta x = A_3 - A_2$$

и так далее, вплоть до $y_8 \Delta x = A_8 - A_7$. Тогда общая площадь всех прямоугольников телескопически сложилась бы так:

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_8 \Delta x = (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) + \dots + (A_8 - A_7) = A_8 - A_0.$$

А теперь подумайте, что будет, если мы выполним предельный переход к бесконечно узким полоскам. Их ширина Δx превратится в дифференциал dx . Их переменные высоты $y_1, y_2, \dots, y_8$ станут $y(x)$ — функцией, которая определяет высоту бесконечно узкого прямоугольника, стоящего над точкой x . Сумма бесконечного числа таких прямоугольников станет интегралом $\int y(x) dx$. При этом, как и в предыдущих случаях телескопирования, сумма $A_8 - A_0$ превращается в $A(b) - A(a)$, где a и b — значения x на левом и правом краю области. Вариант телескопирования для бесконечно малых величин дает нам *точную* площадь под кривой:

$$\int_a^b y(x) dx = A(b) - A(a).$$

Но как найти эту волшебную функцию $A(x)$, которая сделает все это возможным? Что ж, давайте посмотрим на все вышеописанные уравнения вида $y_1 \Delta x = A_1 - A_0$. Они превращаются в

$$y(x) dx = dA,$$

поскольку прямоугольники становятся бесконечно тонкими. Если записать тот же результат в терминах производных, а не дифференциалов, поделив обе части на dx , то мы получим

$$\frac{dA}{dx} = y(x).$$

Вот так мы находим аналоги волшебных чисел $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$, вызывающих телескопирование. В пределе для бесконечно тонких

полосок они определяются неизвестной функцией $A(x)$, производная которой — как раз наша функция $y(x)$.

Все это — обратная задача и основная теорема анализа в версии Лейбница. Он писал: «Поиск площадей фигур сводится к следующему: по заданному ряду найти суммы или (для лучшего объяснения) по заданному ряду найти другой, разности которого совпадают с членами данного ряда» [19]. Таким образом, разности и телескопические суммы привели Лейбница к дифференциалам и интегралам, а от них — к основной теореме, равно как флюксии и расширяющиеся площади привели Ньютона к тому же тайному источнику.

Борьба с ВИЧ с помощью анализа

Хотя дифференциалы — это измышления разума, с момента их изобретения они весьма глубоко повлияли на наш мир, общество и нашу жизнь. В качестве современного примера рассмотрим вспомогательную роль, которую они сыграли в понимании и лечении ВИЧ, вируса иммунодефицита человека [20].

В 1980-х годах десятки тысяч жизней в США и сотни тысяч по всему миру стала уносить загадочная болезнь. Никто не знал, что это, откуда она взялась и что ее вызывает, но ее воздействие было явным — она настолько ослабляла иммунную систему больных, что они оказывались уязвимы для редких видов рака, пневмонии и оппортунистических инфекций*. Смерть от болезни была медленной, мучительной и уродливой. Врачи назвали болезнь синдромом приобретенного иммунодефицита, или СПИДом. Больные и врачи были в отчаянии. Никакого лекарства не просматривалось.

* Оппортунистические инфекции — это заболевания, которыми люди со здоровой иммунной системой обычно не болеют. *Прим. пер.*

Первые исследования показали, что виноват ретровирус. Механизм его действия был коварен: вирус атаковал и инфицировал белые кровяные тельца, называемые Т-хелперами, — ключевой компонент иммунной системы. Оказавшись внутри, вирус захватывал генетический аппарат клетки и заставлял его создавать новые вирусы. Затем эти новые вирусные частицы выходили из клетки, попадали в кровоток и прочие жидкости организма и искали новые клетки для заражения. Иммунная система реагировала на это вторжение попыткой вычистить вирусные частицы из крови и убить как можно больше зараженных Т-лимфоцитов, но при этом убивала важную часть самой себя.

Первый антиретровирусный препарат для лечения ВИЧ появился в 1987 году. Хотя он и замедлял ВИЧ, мешая процессу вторжения, он не демонстрировал ожидаемой эффективности и вирус часто приобретал устойчивость к нему. В 1994 году появился другой класс препаратов — ингибиторы протеазы. Они препятствовали ВИЧ, внедряясь во вновь образованные вирусные частицы, мешая их созреванию и превращая их в незаразные. Хотя ингибиторы протеазы также не были панацеей, они оказались настоящей находкой.

Вскоре после появления ингибиторов протеазы группа исследователей под руководством доктора Дэвида Хо (ранее учился физике в Калифорнийском технологическом институте, поэтому, вероятно, хорошо знаком с анализом) и специалиста по математической иммунологии Алана Перельсона провела исследование, которое изменило взгляды врачей на ВИЧ и произвело настоящую революцию в методах лечения болезни. До работы Хо и Перельсона было известно, что нелеченая ВИЧ-инфекция, как правило, проходит три стадии [21]: первичная острая стадия продолжительностью несколько недель, хроническая и парадоксально бессимптомная стадия длительностью до десяти лет и терминальная стадия СПИДа.

На первой стадии вскоре после заражения ВИЧ у человека появляются симптомы, сходные с гриппозными: лихорадка, сыпь, головная боль, а количество Т-хелперов (также известных как CD4-клетки)

в крови резко падает. Нормальное количество Т-лимфоцитов составляет около 1000 клеток на кубический миллиметр крови; после первичного заражения ВИЧ их число падает до нескольких сотен. Поскольку Т-лимфоциты помогают организму бороться с инфекцией, их уменьшение серьезно ослабляет иммунную систему. Между тем количество вирусных частиц в крови (известное как вирусная нагрузка) резко возрастает, а затем, когда иммунная система начинает борьбу с ВИЧ-инфекцией, падает. Гриппозные симптомы пропадают, больному становится лучше.

В конце первой стадии вирусная нагрузка стабилизируется на определенном уровне, который, как ни странно, может поддерживаться годами. Врачи называют этот уровень точкой отсчета. Пациент без лечения может прожить десяток лет без ВИЧ-симптомов, а данные лабораторных исследований ничего не покажут, кроме постоянной вирусной нагрузки и низкого, постепенно падающего количества Т-лимфоцитов. Однако в итоге бессимптомная стадия заканчивается и начинается СПИД, для которого характерно дальнейшее снижение количества Т-лимфоцитов и резкое повышение вирусной нагрузки. Как только у нелеченого больного развивается полномасштабный СПИД, оппортунистические инфекции, рак и иные осложнения обычно приводят к его смерти за два-три года.

Ключ к разгадке тайны находился в длительной бессимптомной стадии. Что происходит в это время? Спит ли ВИЧ в организме? Другие вирусы, как известно, впадают в спячку. Например, вирус генитального герпеса скрывается в нервных узлах, чтобы ускользнуть от иммунной системы. Вирус ветряной оспы делает то же самое, годами скрываясь в нервных клетках, но иногда просыпаясь и вызывая опоясывающий лишай. Причина латентности ВИЧ была неизвестна, однако Хо и Перельсон ее выяснили.

В ходе исследования 1995 года они давали больным ингибитор протеазы не в качестве лечения, а для сбора сведений. Прием препарата провоцировал активную реакцию организма пациента, что

и позволило Хо и Перельсону — впервые в истории — отследить динамику иммунной системы в борьбе с ВИЧ. Они обнаружили, что после приема ингибитора протеазы количество вирусных частиц в организме больного падало экспоненциально быстро. Скорость снижения была невероятной: иммунная система каждые *два дня* выводила половину всех вирусных частиц в кровотоке.

Дифференциальное исчисление позволило Хо и Перельсону смоделировать это экспоненциальное снижение и извлечь из него удивительные следствия. Сначала они представили изменяющуюся концентрацию вируса в крови как неизвестную функцию $V(t)$, где t — время после введения ингибитора протеазы. Затем они выдвинули гипотезу об изменении концентрации вируса dV за бесконечно малый интервал времени dt . Их данные указывали на то, что каждый день из крови удаляется постоянная доля вируса, так что, возможно, это свойство сохранится и при экстраполяции на бесконечно малые интервалы dt . Поскольку величина dV/V — это относительное изменение концентрации вируса, их модель можно было записать символами в виде такого уравнения:

$$\frac{dV}{V} = -c dt.$$

Здесь коэффициент пропорциональности c — это скорость выведения, мера того, насколько быстро организм избавляется от вируса.

Приведенное уравнение — пример *дифференциального уравнения*. Оно связывает дифференциал функции dV с самой функцией V , а также с дифференциалом dt времени. Проинтегрировав обе части с помощью основной теоремы, Перельсон и Хо решили его относительно $V(t)$ и обнаружили, что справедливо соотношение

$$\ln[V(t)/V_0] = -ct,$$

где V_0 — первоначальная вирусная нагрузка, а $\ln$ — натуральный логарифм (та самая логарифмическая функция, которую изучали Ньютон и Меркатор в 1660-е годы). Отсюда можно найти, что

$$V(t) = V_0 e^{-ct},$$

где e — основание натуральных логарифмов. Это подтверждало, что вирусная нагрузка в модели действительно снижалась экспоненциально. Наконец, подобрав экспоненту в соответствии с экспериментальными данными, Хо и Перельсон оценили ранее неизвестное значение скорости выведения c .

Для тех, кто предпочитает использовать производные, уравнение модели можно записать так:

$$\frac{dV}{dt} = -cV.$$

Здесь dV/dt — это производная V . Она показывает, насколько быстро растет или падает концентрация вируса. Положительное значение производной означает повышение, отрицательное — снижение. Поскольку концентрация V положительна, величина $-cV$ должна быть отрицательной, поэтому и производная должна быть отрицательной, что означает снижение концентрации, как и показал эксперимент. Кроме того, пропорциональность между dV/dt и V означает, что чем ближе V к нулю, тем медленнее спад. На интуитивном уровне это замедление спада V подобно тому, что происходит, когда вы наполняете раковину водой, а затем открываете сток. Чем меньше воды в раковине, тем медленнее она стекает, поскольку уменьшается давление воды, заставляющее ее течь. При такой аналогии количество вируса подобно количеству воды, а стекание — оттоку вируса в результате работы иммунной системы.

Смоделировав действие ингибитора протеазы, Перельсон и Хо скорректировали свое уравнение, чтобы описать условия до введения препарата. Они предположили, что уравнение будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = P - cV.$$

В этом уравнении P означает исходный (не замедленный) темп репродукции вирусных частиц — еще один параметр, неизвестный в то время. Перельсон и Хо предполагали, что до введения ингибитора протеазы в каждый момент зараженные клетки продуцировали новые вирусные частицы, которые потом заражали новые клетки, и так далее. Именно возможность такого взрывного распространения и делает ВИЧ настолько разрушительным.

Однако на бессимптомной стадии, похоже, существует некое равновесие между воспроизводством вируса и его выведением иммунной системой. На этом установившемся уровне вирус размножается с такой же скоростью, как и выводится. Это позволило понять, почему вирусная нагрузка может не меняться годами. В аналогии с водой это подобно происходящему при одновременном открытии и крана, и стока. Вода достигает стабильного уровня, когда поступление жидкости равно ее оттоку.

Если на некотором уровне концентрация вируса не меняется, то ее производная должна быть равна нулю: $dV / dt = 0$. Следовательно, стабильная вирусная нагрузка удовлетворяет соотношению

$$P = cV_0.$$

Перельсон и Хо использовали это простое уравнение, чтобы оценить жизненно важный параметр, который никто не мог измерить ранее: количество вирусных частиц, ежедневно удаляемых иммунной системой. Оказалось, что эта величина — *миллиард* вирусных частиц в день.

Число получилось неожиданно огромным и впечатляющим. Оно указывало на то, что во внешне, казалось бы, спокойные десять лет бессимптомной стадии в организме больного ежедневно происходит титаническая борьба. Каждый день иммунная система выводит миллиард вирусных частиц, а зараженные клетки порождают миллиард новых. Иммунная система вела яростную тотальную войну с вирусом и боролась с ним практически до полной остановки.

В 1996 году Хо, Перельсон и их коллеги провели полномасштабное исследование, чтобы лучше понять, что они, возможно, упустили в 1995 году. На этот раз они собирали сведения о вирусной нагрузке через более короткие интервалы времени после введения ингибитора протеазы, поскольку хотели получить больше информации о начальном запаздывании, которое наблюдалось при поглощении, распределении и проникновении препарата в клетки-мишени. После введения препарата исследователи измеряли вирусную нагрузку пациентов каждые два часа в течение шести часов, затем каждые шесть часов в течение двух суток, а потом один раз в день в течение недели. Перельсон усовершенствовал модель с дифференциальным уравнением, чтобы учесть запаздывание и отследить динамику еще одной важной переменной — изменяющегося количества зараженных Т-лимфоцитов.

Когда ученые заново провели эксперимент, сравнили данные и прогнозы модели и снова оценили параметры, они получили еще более ошеломляющий результат: каждый день производилось и выводилось из организма *десять миллиардов* вирусных частиц. Более того, было обнаружено, что инфицированные Т-лимфоциты живут всего пару дней. Удивительно короткая продолжительность жизни добавила еще один кусочек головоломки с учетом того, что как раз падение числа Т-лимфоцитов — отличительный признак ВИЧ-инфекции и СПИДа.

Открытие, что репликация ВИЧ происходит настолько ошеломляюще быстро, изменило сам подход врачей к лечению ВИЧ-положительных пациентов. До работы Хо и Перельсона врачи ждали, пока ВИЧ выйдет из предполагаемой спячки, прежде чем назначать противовирусные препараты. Считалось, что это позволяет беречь силы до тех пор, пока иммунная система не станет по-настоящему нуждаться в помощи, поскольку вирус часто становился устойчивым к действию лекарств, а тогда уже ничего не могло помочь. Поэтому обычно склонялись к мнению, что разумнее подождать, пока заболевание продлится достаточно долго.

Работа Хо и Перельсона в корне изменила эту точку зрения [22]. Спячки не было. ВИЧ и организм ежесекундно сцеплялись в отчаянной схватке, и иммунная система нуждалась в любой возможной помощи, причем как можно скорее после критичных первых дней заражения. И теперь было понятно, почему ни одно лекарство не действовало долго. Вирус воспроизводился так быстро и мутировал с такой скоростью, что мог найти способ противостоять практически любому медицинскому препарату.

Математика Перельсона помогла количественно оценить, сколько лекарств нужно использовать в комбинации, чтобы подавить и победить ВИЧ. Учитывая измеренную скорость мутации ВИЧ, величину его генома и только что полученную оценку для ежедневно продуцируемых вирусных частиц, он математически показал, что ВИЧ много раз в день генерирует все возможные мутации на всех основаниях генома. Поскольку даже одна мутация может вызвать резистентность к лекарству, на успех лечения одним препаратом надежды было мало. У двух препаратов, введенных одновременно, шансов было больше, однако расчеты Перельсона показывали, что каждый день происходила и значительная доля двойных мутаций. А вот комбинацию из трех препаратов вирусу одолеть было бы трудно [23]. Согласно математическим расчетам, шансы на то, что вирус сможет одновременно подвергнуться трем мутациям, чтобы противостоять комбинированной терапии из трех лекарств, составляли примерно 10 миллионов к одному. Когда Хо и его коллеги в клинических исследованиях протестировали коктейль из трех препаратов на ВИЧ-инфицированных пациентах, результаты оказались замечательными. Уровень вируса в крови падал вдвое каждые две недели и после следующего месяца уже не выявлялся.

Это не означало, что ВИЧ исчез. Последующие эксперименты показали, что вирус может агрессивно восстанавливаться, если пациенты сделают перерыв в лечении. Проблема в том, что ВИЧ может скрываться в различных частях тела. Он может находиться

в небольшом количестве в тайных местах, куда лекарствам нелегко проникнуть, или залегать в латентно инфицированных клетках и покоиться, не воспроизводя себя, — хитрый способ избежать действия препаратов. В любой момент эти спящие клетки могут проснуться и начать атаковать организм. Вот почему так важно, чтобы ВИЧ-инфицированные больные продолжали принимать лекарства даже тогда, когда вирусная нагрузка невелика или не обнаруживается.

И хотя тройная комбинированная терапия не может устранить ВИЧ, она превращает его в хроническое заболевание, с которым можно справиться — по крайней мере тем, у кого есть доступ к лечению. Это дало надежду там, где ее практически не было.

В 1996 году журнал Time назвал Дэвида Хо человеком года [24]. В 2017-м Алан Перельсон получил премию Американского физического общества [25], присуждаемую за исследования в области биологической физики, за «весомый вклад в теоретическую иммунологию, который спасает жизни». Он по-прежнему использует математический анализ и дифференциальные уравнения для изучения динамики вирусов. Последние работы ученого связаны с вирусом гепатита С [26], от которого страдают около 170 миллионов человек по всему миру и который ежегодно убивает примерно 350 тысяч. Он — основная причина развития цирроза и рака печени. В 2014 году с помощью математических разработок Перельсона были созданы безопасные и удобные для приема (один раз в день) таблетки для лечения гепатита С. Невероятно, но они излечивают почти всех больных.

Логическая вселенная

Во второй половине XVII века анализ бесконечно малых претерпел метаморфозы, став настолько системным, полезным и мощным, что многие историки уверяют, что именно тогда он и был «изобретен». Согласно этой точке зрения, до Ньютона и Лейбница существовал некий протоанализ, а после них — анализ. Я бы так не сказал. Для меня анализ зародился еще во времена Архимеда, обуздавшего бесконечность.

Как бы там ни было, между 1664-м и 1676 годом анализ пережил драматические изменения, а вместе с ним изменился и мир. В науке это позволило читать книгу природы, о чем мечтал Галилей. В области технологий положило начало промышленной революции и информационному веку. А в философии и политике наложило отпечаток на современные представления о правах человека, обществе и законах.

Я бы не стал говорить, что анализ изобрели в конце XVII века, скорее, я бы описал произошедшее как эволюционный прорыв, аналогичный поворотному событию в биологической эволюции. На заре жизни организмы были относительно простыми. Это были одноклеточные создания, нечто вроде нынешних бактерий. Эра такой одноклеточной жизни продолжалась около трех с половиной миллиардов лет, то есть большую часть истории Земли. Однако примерно полмиллиарда лет назад возникло невероятное разнообразие многоклеточной жизни, названное биологами кембрийским

взрывом*. Буквально за несколько десятков миллионов лет — доли секунды по меркам эволюции — внезапно появились многие из основных типов животных. Аналогично и анализ стал «кембрийским взрывом» для математиков [1]. С его появлением начали развиваться самые разные области математики. Их происхождение видно по их названиям, связанным с анализом, по прилагательным, таким как *дифференциальный*, *интегральный* и *аналитический* — например, дифференциальная геометрия, интегральные уравнения или аналитическая теория чисел. Эти области высшей математики подобны многим видам многоклеточной жизни. При такой аналогии микробы математики — это самые ранние ее темы: числа, формы, задачи со словами. Подобно одноклеточным организмам они доминировали в математике большую часть ее истории. Однако после «кембрийского взрыва» анализа триста пятьдесят лет назад появились и стали процветать новые формы математической жизни, изменившие окружающий ландшафт.

Большая часть истории жизни — рассказ о движении организмов в сторону усложнения, которое строится на предшественниках. Это же справедливо и для математического анализа. Но куда ведет эта история? Есть ли какое-то направление у эволюции анализа? Или она, как некоторые говорят о биологической эволюции, не направлена и случайна?

В рамках чистой математики эволюция анализа была историей скрещивания и его преимуществ. Старые области математики обрели новую жизнь после скрещивания с анализом. Например, давнее изучение чисел и их закономерностей оживилось благодаря появлению инструментов, основанных на анализе, таких как интегралы, бесконечные суммы и степенные ряды. Получившийся гибрид называется аналитической теорией чисел. Аналогичным образом дифференциальная геометрия использовала анализ, чтобы

* Из слов автора может сложиться впечатление, что многоклеточные организмы появились после кембрийского взрыва. Это не так — они встречались и в докембрии. *Прим. пер.*

пролить свет на структуру гладких поверхностей, и открыла новые горизонты, о которых даже не подозревала, — невообразимые криволинейные формы в четырех измерениях и выше. В этом смысле «кембрийский взрыв» анализа сделал математику более абстрактной и более мощной, а также придал ей ореол семейственности. Анализ выявил сеть скрытых взаимосвязей, соединяющих воедино все ее части.

В прикладной математике эволюция анализа — это история нашего расширяющегося понимания изменений. Как мы уже видели, анализ начался с изучения кривых, где изменения были изменениями направления, и продолжился изучением движения, когда изменения стали изменениями местоположений. После своего «кембрийского взрыва», и особенно с развитием дифференциальных уравнений, анализ перешел к изучению изменений в более общем смысле. Сегодня дифференциальные уравнения помогают нам предсказывать распространение эпидемий, место появления урагана и сколько платить за опцион на покупку акций в будущем*. Во всех областях человеческой деятельности дифференциальные уравнения стали основой для описания изменений в вещах вокруг и внутри нас, от субатомного уровня до самых дальних уголков космоса.

Логика природы

Самый ранний триумф дифференциальных уравнений изменил ход развития западной культуры. В 1687 году Исаак Ньютон предложил систему мира [2], которая демонстрировала силу разума и положила начало эпохе Просвещения [3]. Он открыл несколько уравнений — законы движения и тяготения, — которые смогли объяснить

* Опцион — вид сделки, когда покупатель (продавец) получает право купить (продать) некий актив в будущем по заранее установленной цене. *Прим. пер.*

загадочные закономерности, обнаруженные Галилем и Кеплером в падении тел на Земле и в орбитах планет Солнечной системы, и тем самым устранил пропасть между земным и небесным. После Ньютона существовала только одна Вселенная, с одинаковыми законами, действовавшими везде и всегда.

В своем фундаментальном трехтомном шедевре «Математические начала натуральной философии» (чаще называемом просто «Начала») Ньютон применил свои теории к самым разным вещам: форме Земли с ее слегка выпуклой талией, вызванной центробежными силами при вращении; ритму приливов и отливов; эксцентрическим орбитам комет; движению Луны — задаче настолько сложной, что Ньютон даже пожаловался своему другу Эдмунду Галлею, что от нее у него «разболелась голова, и он так часто не мог уснуть, что больше не думал об этом» [4].

Сегодня при изучении физики студентам сначала преподают классическую механику — механику Ньютона и его последователей, после чего сообщают, что ее вытеснили теория относительности Эйнштейна и квантовая теория Планка, Эйнштейна, Бора, Шрёдингера, Гейзенберга и Дирака. В этом, безусловно, немало правды. Новые теории опровергли представления Ньютона о пространстве и времени, массе и энергии, да и самом детерминизме, заменив его в случае квантовой теории более вероятностным, статистическим описанием природы.

Однако это не изменило роли анализа. И в теории относительности, и в квантовой механике законы природы по-прежнему записываются на языке анализа, с предложениями в виде дифференциальных уравнений. Для меня величайшее наследие Ньютона заключено именно в этом. Он показал, что природа логична. Причина и следствие в мире ведут себя во многом так же, как доказательство в геометрии, когда одна истина вытекает из другой, с той лишь разницей, что в мире одно *событие* вытекает из другого, а в нашем разуме — одна *идея* из другой.

Эта сверхъестественная связь между природой и математикой восходит к пифагорейской мечте. Связь между музыкальной гармонией и числами, открытая пифагорейцами, побудила их провозгласить, что *всё* есть число. В чем-то они были правы. Числа важны для работы Вселенной, собственно, как и формы: в книге природы, о которой мечтал Галилей, слова были геометрическими фигурами. Но какими бы важными ни были числа и фигуры, не они настоящие движущие силы в этой игре. В драме Вселенной формы и числа подобны актерам; их незримо направляет невидимое присутствие и логика дифференциальных уравнений.

Ньютон первым проник в эту логику Вселенной и построил вокруг нее систему. До него это было невозможно из-за отсутствия необходимых понятий. Архимед не был знаком с дифференциальными уравнениями. Не знали их и Галилей, Кеплер, Декарт и Ферма. Лейбниц знал, но не обладал такой склонностью к науке, как Ньютон, и его математической виртуозностью. Тайная логика природы была дарована только Ньютону.

Центральной частью его теории стало дифференциальное уравнение движения:

$$F = ma.$$

Это одно из самых важных уравнений в истории. Оно говорит, что сила F , приложенная к телу, равна произведению массы тела m на его ускорение a . Это дифференциальное уравнение, поскольку ускорение является производной (скоростью изменения скорости тела) или, в терминах Лейбница, отношением двух дифференциалов:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Здесь dv — это бесконечно малое изменение скорости тела v за бесконечно малый интервал времени dt . Таким образом, зная силу F , действующую на тело, и его массу m , мы можем использовать соот-

ношение $F = ma$ для вычисления его ускорения по формуле $a = F / m$. В свою очередь, это ускорение определяет, как будет двигаться тело. Оно сообщает нам, как будет меняться скорость тела в следующее мгновение, а скорость говорит нам, как изменится положение тела. В этом смысле формула $F = ma$ — это своеобразный оракул. Она предсказывает будущее поведение тела, один крохотный шаг за другим.

Рассмотрим самую простую и унылую ситуацию, какую только можно представить: одно изолированное тело в пустой Вселенной. Как оно будет двигаться? Что ж, поскольку вокруг нет ничего, что будет толкать или тянуть его, сила, действующая на тело, равна нулю: $F = 0$. Тогда, учитывая, что масса m не равна нулю (будем считать, что тело имеет какую-то массу), закон Ньютона дает $a = F / m = 0$, откуда следует, что $dv / dt = 0$. Однако равенство $dv / dt = 0$ означает, что скорость одиночного тела не изменяется в течение бесконечно малого интервала времени dt . Она не изменится и в следующий, и в последующий интервал времени. А значит, когда $F = 0$, тело сохраняет свою скорость неизменной. Это закон инерции Галилея: в отсутствие внешней силы покоящееся тело остается в покое, а движущееся продолжает двигаться с постоянной скоростью. Его скорость и направление движения не меняются. Мы только что вывели этот принцип как логическое следствие более глубокого закона движения Ньютона $F = ma$.

Похоже, что Ньютон еще в колледже понял, что ускорение пропорционально силе. Из трудов Галилея он знал, что, если на тело не действует никакая сила, оно либо остается в покое, либо движется по прямой с постоянной скоростью. Он понял, что сила нужна не для создания движения, а для создания изменений в движении. Именно сила ответственна за то, что тела ускоряются, замедляются или отклоняются от прямой линии. Это понимание было значительным шагом вперед по сравнению с аристотелевским мышлением. Аристотель не воспринимал инерцию. Он полагал, что сила нужна только

для того, чтобы заставить тело двигаться. И, справедливости ради, это верно в ситуациях, где есть значительное трение. Если вы попробуете двигать по полу письменный стол, вам придется постоянно толкать его; как только вы прекратите это делать, стол остановится. Однако для планет, летящих в космическом пространстве, или яблок, падающих на землю, трение не так актуально. В этих случаях сила трения пренебрежимо мала и ее можно игнорировать, не упуская сути явления.

В ньютоновской картине мира доминирующая сила — это тяготение, а не трение. Так и должно быть, учитывая, как тесно Ньютон и тяготение связаны в сознании людей. Когда большинство людей думают об ученом, они тут же вспоминают о том, что Ньютон открыл гравитацию, когда ему на голову упало яблоко [5]. Внимание, спойлер: это не так. Ньютон не открывал гравитацию; люди уже знали, что тяжелые предметы падают. Но никто не знал, насколько далеко распространяется гравитация. Не заканчивается ли она в небе?

Ньютон предположил, что гравитация может распространяться до Луны, а возможно, и дальше. Его идея состояла в том, что движение Луны по орбите — это нечто вроде бесконечного падения на Землю. Но, в отличие от падающего яблока, Луна не падает на Землю, потому что одновременно по инерции движется в сторону. Это похоже на полет одного из пушечных ядер Галилея, летящего в сторону и падающего одновременно, двигаясь по какой-то криволинейной траектории; за исключением того, что Луна перемещается так быстро, что не достигает искривленной поверхности сферической Земли. Поскольку орбита нашего спутника отклоняется от прямой линии, Луна ускоряется — не в том смысле, что меняет скорость, а в том, что меняет направление движения. С прямолинейного пути ее сбивает непрекращающееся притяжение Земли. Результирующее ускорение называется центростремительным ускорением, то есть направленным к центру — в нашем случае к центру Земли.

Из третьего закона Кеплера Ньютон заключил, что сила тяжести ослабевает с расстоянием, что объясняет, почему более удаленные планеты дольше обращаются вокруг Солнца. Согласно его расчетам, если Солнце притягивает планеты с помощью такого же рода силы, как та, что притягивает яблоко к Земле и удерживает на орбите Луну, то эта сила должна ослабевать обратно пропорционально *квадрату* расстояния. Таким образом, если бы расстояние между Землей и Луной можно было бы как-то удвоить, то сила притяжения между ними уменьшилась бы в четыре раза (в 2^2 , а не в 2 раза). Если бы расстояние утроилось, сила уменьшилась бы в девять раз, а не в три. Следует признать, что в расчеты Ньютона входили некоторые сомнительные предположения, в частности о том, что гравитация действует на расстоянии мгновенно, словно расстояния в космосе не имеют значения. Он понятия не имел, как такое возможно, но закон обратных квадратов его заинтересовал.

Чтобы проверить его количественно, он оценил центростремительное ускорение Луны, поскольку она обращается вокруг Земли на известном расстоянии (примерно в 60 раз превышающем радиус Земли) с известным периодом обращения (около 27 дней), а затем сравнил ускорение Луны с ускорением падающих тел на Земле, которое Галилей измерял в своих экспериментах с наклонной плоскостью. Ньютон обнаружил, что эти две величины отличаются коэффициентом, который обнадеживающе близок к 3600, то есть к 60^2 . Но ведь именно это и предсказывал закон обратных квадратов. Поскольку Луна находится в 60 раз дальше от центра Земли, чем падающее с дерева яблоко, ее ускорение должно быть в 60^2 раз меньше. Позже Ньютон вспоминал, что «сравнил силу, необходимую для удержания Луны на ее орбите, с силой тяжести на поверхности Земли и обнаружил, что они неплохо соответствуют» [6].

В то время мысль, что сила тяготения может распространяться на Луну, казалось безумной. Вспомните, что в доктрине Аристотеля все, что ниже Луны, считалось тленным и несовершенным, а все, что

выше, — идеальным, вечным и неизменным. Ньютон разрушил эту парадигму. Он объединил небо и землю и показал, что и то и другое описывается одними и теми же законами физики.

Примерно через двадцать лет после открытия закона обратных квадратов* Ньютон сделал перерыв в своем увлечении алхимией и библейской хронологией и вернулся к вопросу движения под действием силы гравитации. Его подтолкнули к этому коллеги и соперники из Лондонского королевского общества. Они предложили ему разобраться с гораздо более сложной, по сравнению с предыдущими, задачей, которую никто из них не знал, как решить: если предположить, что сила притяжения со стороны Солнца убывает по закону обратных квадратов, то как бы двигались планеты? «По эллипсам» [7], — сразу же ответил Ньютон, когда Эдмунд Галлей задал ему этот вопрос. Удивленный Галлей спросил, откуда он знает, на что ученый ответил: «Я это вычислил». Когда Галлей убедил его опубликовать это доказательство, Ньютон вернулся к своей старой работе. В неистовом приливе активности, почти столь же яростном, как во время чумы, Ньютон написал «Начала».

Приняв три закона движения и закон тяготения за аксиомы и используя анализ в качестве дедуктивного инструмента, Ньютон доказал, что отсюда логически следуют все три закона Кеплера [8].

* Ньютон не открывал закон обратных квадратов. Впервые идею, что движение планет может обеспечить сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния, высказал в 1645 году французский астроном Исаа́зль Буйо. Затем к ней приходили и другие ученые. Роберт Гук в 1679 году в явном виде сформулировал этот закон в письме к Ньютону и попросил математически обосновать его (что Ньютон и сделал). Однако Ньютон оспаривал приоритет Гука, ссылаясь на работы Буйо и Борелли, а также обсуждение этой идеи с Кристофером Реном еще до письма Гука. Ученый утверждал, что даже если бы впервые услышал об этом законе от Гука, то у него были некоторые права на него, потому что, в отличие от Гука, он его доказал: «Без моих демонстраций, с которыми господин Гук еще не знаком, никакой рассудительный философ не может поверить в его точность». Более того, по словам Ньютона, он знал об этом законе и раньше. Однако доказательств этому нет. В записях ученого 1669 года есть утверждение, что в случае кругового планетного движения «стремление отступить» (что позднее назовут центробежной силой) обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, однако это не совсем то (хотя идеологически близко), и на язык центростремительной силы Ньютон перешел только после переписки с Гуком в 1679–1680 годах. Тем не менее эти записи показывают, что какие-то основания оспаривать приоритет Гука у Ньютона были. Специалисты продолжают спорить, что именно Ньютон позаимствовал у Гука (значительная часть личных бумаг Гука уничтожена или исчезла). *Прим. пер.*

То же самое было верно для закона инерции Галилея, изохронности маятников, правила нечетных чисел для скатывания шаров и параболических дуг, по которым летят предметы. Все они были следствием закона обратных квадратов и соотношения $F = ma$. Такое обращение к дедуктивным рассуждениям потрясло коллег ученого и обеспокоило их по философским соображениям. Многие из них были эмпириками: они полагали, что логика применима только внутри самой математики, а природу нужно изучать путем экспериментов и наблюдений. Их ошеломила мысль, что природа обладает внутренним математическим ядром и что ее явления можно логически вывести из эмпирических аксиом вроде законов тяготения и движения.

Задача двух тел

Вопрос, который Галлей задал Ньютону, был чудовищно трудным. Он требовал преобразовать локальную информацию в глобальную, что было основной трудностью интегрального исчисления и прогнозирования, как мы обсуждали в главе 7.

Подумайте о том, как можно спрогнозировать гравитационное взаимодействие двух тел. Чтобы упростить задачу, представьте, что одно из них (Солнце) бесконечно массивно и поэтому неподвижно, в то время как другое (планета) движется вокруг него. Изначально планета находится на некотором расстоянии от Солнца, в определенном месте, и движется в заданном направлении с заданной скоростью. В следующий момент скорость планеты перемещает ее в новое положение, бесконечно близкое к тому, где она была момент назад. Поскольку местоположение изменилось, чуть-чуть изменилось и гравитационное притяжение от Солнца — и по направлению, и по величине. Эта новая сила (вычисляемая по закону обратных квадратов) влечет планету дальше и меняет ее скорость и направление

движения на новую бесконечно малую величину (вычисляемую по формуле $F = ma$) за следующий бесконечно малый момент времени. Процесс продолжается до бесконечности. Чтобы построить полную орбиту планеты, нужно как-то объединить, сложить вместе все эти бесконечно малые локальные шажки.

Таким образом, использование $F = ma$ в задаче двух тел — это еще одно упражнение в применении принципа бесконечности. Архимед и другие ученые использовали его для загадки кривых, Ньютон же первым применил его к загадке движения. Какой бы безнадежной ни казалась задача двух тел, Ньютон сумел решить ее с помощью основной теоремы анализа. Вместо того чтобы двигать планету вперед момент за моментом, он использовал анализ, чтобы толкать ее вперед огромными скачками, словно по волшебству. Его формулы могли предсказать, где окажется планета и с какой скоростью она будет двигаться в любой будущий момент времени, какой только можно пожелать.

Принцип бесконечности и основная теорема анализа потребовались Ньютону еще в одном отношении. При первом подходе к задаче двух тел он идеализированно представлял Солнце и планету точечными объектами. Мог ли он смоделировать их более реалистично — как колоссальные сферические объекты, коими они на самом деле и есть, — и все равно решить задачу? А если бы мог, изменились бы при этом результаты?

Это были крайне трудные вычисления при уровне развития анализа в те времена. Только представьте, что потребуется, чтобы найти чистое притяжение колоссального шара Солнца и меньшего, но все равно гигантского шара Земли. Каждый атом Солнца притягивает каждый атом Земли. Сложность в том, что все атомы находятся на разных расстояниях друг от друга. Атомы в дальней половине Солнца оказывают более слабое гравитационное воздействие на Землю, чем атомы в ближней половине. Более того, атомы в левой и правой половинах Солнца тянут Землю в разных направлениях

и с разной силой в зависимости от их собственного расстояния от нашей планеты. Все эти воздействия нужно сложить. Свести воедино все части задачи было сложнее, чем все когда-либо ранее сделанное в интегральном исчислении. Сегодня же мы ее решаем с помощью пугающего тройного интеграла.

Ньютону удалось справиться с тройным интегралом и обнаружить нечто настолько красивое и простое, что даже сегодня оно кажется почти невероятным. Он установил, что можно безнаказанно считать, будто вся масса сферического Солнца сосредоточена в его центре, и то же самое верно для Земли. Его вычисления показали, что орбита планеты в любом случае будет одной и той же. Иными словами, он мог заменить гигантские шары бесконечно малыми точками, не допуская при этом никакой ошибки. Воистину ложь, раскрывающая правду!

Однако в расчетах Ньютона содержались другие приближения, влияние которых было более серьезным и проблематичным. Ради простоты он полностью проигнорировал гравитационное воздействие остальных планет. К тому же он продолжал считать, что гравитация действует мгновенно. Он знал, что оба допущения не могут быть верными, но без них ничего не получалось. Ньютон также признавался, что не имеет понятия, что собой представляет гравитация и почему она подчиняется математическому описанию, которое он дал. Он понимал, что критики отнесутся с подозрением ко всей его программе. Чтобы сделать работу максимально убедительной и доходчивой, он изложил ее на языке геометрии — золотом стандарте строгости, принятом в то время. Но это была не традиционная евклидова геометрия, а своеобразная неповторимая смесь классической геометрии и анализа. Это был анализ в геометрических одеждах.

Тем не менее он сделал все возможное, чтобы придать работе классический вид. Стилль его «Начал» приближен к евклидовым «Началам». Следуя формату классической геометрии, Ньютон начинает с аксиом и постулатов — своих законов движения

и тяготения — и рассматривает их как базовые камни фундамента. На их основе он строит здание из лемм, предложений, теорем и доказательств, выведенных друг из друга с помощью логики и составляющих неразрывную цепочку вплоть до исходных аксиом. Так же как Евклид подарил миру свои бессмертные тринадцать книг «Начал»*, так и Ньютон дал миру три собственные книги. Без ложной скромности третью он назвал «Системой Мира».

Его система рисовала природу в виде механизма. В последующие годы ее часто будут сравнивать с часовым механизмом, его вращающимися шестеренками и растягивающимися пружинами: все части последовательно двигаются — настоящее чудо причины и следствия. Применяя основную теорему анализа, вооружившись степенными рядами, изобретательностью и удачей, Ньютон мог точно решать свои дифференциальные уравнения. Вместо того чтобы двигаться вперед момент за моментом, он мог совершить существенный скачок и предсказать положение своего часового механизма далеко в будущем, как делал в задаче двух тел для планеты, вращающейся вокруг Солнца.

Спустя столетия после Ньютона его систему усовершенствовали многие математики, физики и астрономы. Ей настолько доверяли, что, когда движение планет не согласовывалось с прогнозами, астрономы полагали, что упускают что-то важное. Именно так в 1846 году был открыт Нептун [9]. Неправильности в орбите Урана наводили на мысль о наличии за ним неизвестной планеты — невидимого соседа, который вносит гравитационные возмущения в движение Урана. Расчеты предсказали положение предполагаемой планеты, и когда астрономы направили туда телескоп, там она и оказалась**.

* Следует помнить, что Евклид был систематизатором и сообщал (без упоминания авторства) результаты других греческих математиков — Теэтета, Архита, Евдокса, Гиппократы и так далее. Неизвестно, какие результаты в «Началах» принадлежат самому Евклиду. *Прим. пер.*

** Положение Нептуна рассчитали независимо друг от друга Адамс и Леверье. На самом деле Нептун оказался в 12° от положения, предсказанного Адамсом, и в 1° от положения, предсказанного Леверье. Для сравнения: видимый диаметр Луны составляет примерно $0,5^\circ$. *Прим. пер.*

Ньютон и «Скрытые фигуры»

К середине XX века казалось, что физика окончательно отошла от ньютоновской механики. Квантовая теория и теория относительности отправили старую рабочую лошадку на покой. Но даже тогда она получила последнее «ура» благодаря космической гонке США и СССР.

В начале 1960-х годов Кэтрин Джонсон [10], математик-вычислитель и героиня фильма «Скрытые фигуры», использовала задачу двух тел, чтобы вернуть астронавта Джона Гленна — первого американца, совершившего виток вокруг Земли, — с орбиты домой*. Во многом Джонсон создала новый подход. В ее работе двумя телами были Земля и космический аппарат, а не планета и Солнце, как у Ньютона. Она использовала анализ, чтобы спрогнозировать положение космического корабля, который движется по орбите вокруг Земли, вращающейся под ним, и рассчитать его траекторию для успешного входа в атмосферу. Для этого ей нужно было учесть множество факторов, которыми пренебрегал Ньютон; среди них наиболее существенным было то, что Земля на самом деле отличается от идеального шара и слегка сплюснута на полюсах. Учет всех этих деталей был в данном случае вопросом жизни и смерти. Капсула должна войти в атмосферу под правильным углом, иначе она сгорит. Кроме того, она должна приводниться в нужном месте океана, поскольку, если она попадет в воду слишком далеко от места, где ее ожидают, Гленн может утонуть, прежде чем к капсуле кто-нибудь доберется.

В итоге 20 февраля 1962 года Джон Гленн совершил три оборота вокруг Земли, а затем в соответствии с расчетами Джонсон вошел в атмосферу и благополучно приземлился в северной части Атлантического океана. Он стал национальным героем, а позднее был

* Почти за год до полета Гленна (20.02.1962) ту же задачу регулярно решали советские математики, возвращая с орбиты не только летавших в космос в 1961 году Юрия Гагарина и Германа Титова, но и беспилотные искусственные спутники Земли.
Прим. ред.

избран в сенат. Мало кто знал, что он отказывался лететь, пока Кэтрин Джонсон лично не проверит все сделанные в последнюю минуту расчеты*. Он доверил ей свою жизнь.

Кэтрин Джонсон была вычислителем в Национальном управлении по аэронавтике и исследованию космического пространства в те времена, когда расчетами занимались не компьютеры, а женщины. Она работала там и тогда, когда помогла Алану Шепарду стать первым американцем в космосе**, и тогда, когда рассчитала траекторию для первой высадки на Луну. В течение десятилетий ее работа была неизвестна широкой публике. К счастью, сейчас ее новаторский вклад (и вдохновляющая история жизни) широко признаны. В 2015 году в возрасте 97 лет она получила Президентскую медаль Свободы от Барака Обамы. А год спустя NASA назвала в ее честь одно из зданий. На церемонии открытия представитель NASA напомнил [11], что «миллионы людей по всему миру наблюдали за полетом Шепарда, но в тот момент не знали, что расчеты, которые привели его в космос и безопасно вернули домой, выполнены нашей сегодняшней почетной гостьей Кэтрин Джонсон».

* Автор не совсем верно излагает факты. Полет Гленна был первым, параметры которого рассчитывали компьютеры IBM. Гленн не доверял компьютеру и попросил Джонсон проверить расчеты с помощью ее настольного механического калькулятора. Кэтрин проверила и согласилась с вычислениями. *Прим. пер.*

** В отличие от ситуации с Юрием Гагариным, вопрос с первым американским астронавтом не так однозначен. Алан Шепард в 1961 году совершил суборбитальный полет (то есть не сделал полного витка вокруг Земли): он летал всего 15 минут и спустился в 486 километрах от точки старта, но при этом поднялся выше границы, которая считается границей космоса. Джон Гленн в 1962 году первым из американцев сделал полный оборот вокруг планеты. В результате и того и другого часто называют первым американским астронавтом. Заметим, что Гленну принадлежит другой, пока что никем не побитый рекорд: на сегодняшний день он самый пожилой человек, побывавший в космосе — свой второй полет в космос он совершил в возрасте 77 лет. *Прим. пер.*

Анализ и Просвещение

Ньютоновская картина мира с математикой у руля распространилась далеко за пределы науки. В гуманитарной сфере она сказалась на настроении поэтов-романтиков — Уильяма Блейка, Джона Китса и Уильяма Вордсворта. На шумной вечеринке в 1817 году Вордсворт и Китс среди прочих признали, что Ньютон уничтожил поэзию радуги, сведя ее к разложению луча света в призме. Они подняли бокалы с залихватским тостом: «За здоровье Ньютона и конфуз в математике» [12].

Более теплый прием Ньютону оказала философия, где его идеи повлияли на Вольтера, Дэвида Юма, Джона Локка и других мыслителей эпохи Просвещения. Их захватила мощь рассуждений и успехи его системы, изображавшей Вселенную в виде часового механизма, приводимого в движение причинностью. Его эмпирически-дедуктивный подход, основанный на фактах и работающий на анализе, уничтожил априорную метафизику ранних философов (вспомним Аристотеля). Помимо науки, он наложил свой отпечаток на все концепции Просвещения — от детерминизма и свободы до естественного права и прав человека.

Рассмотрим, к примеру, влияние Ньютона на Томаса Джефферсона — архитектора, изобретателя, фермера, третьего президента Соединенных Штатов и автора Декларации независимости [13]. Отголоски влияния Ньютона прослеживаются по всей Декларации. С самого начала фраза «Мы считаем очевидными истинами» отражает структуру документа. Как Евклид в своих «Началах», а Ньютон — в своих, Джефферсон начал с аксиом, самоочевидных истин, а затем с помощью логики вывел из них ряд неизбежных следствий, важнейшим из которых было право колоний выйти из-под британского правления. Согласно Декларации, такое право предоставляют законы природы и творец природы. (Кстати, обратите внимание на пост-ньютоновский деизм, подразумеваемый в порядке Джефферсона: Бог

следует после законов природы и только в подчиненной роли, как «бог природы»^{*}.) Довод подкрепляется причинами, побуждающими народ к отделению от британской короны. Эти причины играют роль ньютоновских сил, приводящих в движение часовой механизм и неизбежно ведущих к последствиям — в данном случае к Американской революции.

Если вам это кажется слишком надуманным, учтите, что Джефферсон почитал Ньютона. В мрачном акте преданности он приобрел копию посмертной маски ученого. А после ухода с президентского поста писал 21 января 1812 года старому другу Джону Адамсу о том, как приятно уйти из политики: «Я отказался от газет в обмен на Тацита и Фукидида, Ньютона и Евклида и ощущаю себя намного счастливее» [14].

Увлечение Джефферсона идеями Ньютона отразилось и на его интересах в сельском хозяйстве. Он задумался о наилучшей форме отвала плуга [15] (отвал — это криволинейная часть плуга, которая поднимает и переворачивает почву, срезанную лемехом), то есть поставил вопрос в рамках эффективности: какую форму должен иметь отвал, чтобы оказывать наименьшее сопротивление поднимающемуся дерну? Поверхность отвала должна быть горизонтальной в передней части, чтобы он мог поддевать почву, а далее форма должна постепенно искривляться вплоть до перпендикулярности грунту в задней части, чтобы он мог переворачивать почву и отваливать ее в сторону.

Джефферсон попросил своего друга-математика решить эту оптимизационную задачу. Во многом его вопрос напоминал другой, сформулированный самим Ньютоном в «Началах», — о форме твердого тела, оказывающего наименьшее сопротивление при движении сквозь воду. Руководствуясь этой теорией, Джефферсон создал деревянный отвал собственной конструкции и снабдил им свой плуг.

^{*} В оригинале the Laws of Nature and of Nature's God. *Прим. пер.*



В 1798 году он сообщал: «Пятилетний опыт позволяет мне сказать, что на практике он соответствует тому, что обещал в теории» [16]. Так ньютоновский анализ пришел на помощь сельскому хозяйству.

От дискретных систем к непрерывным

По большей части Ньютон применял анализ к одному или двум телам — качающемуся маятнику, летящему ядру, обращающейся вокруг Солнца планете. Решение дифференциальных уравнений для трех и более тел было кошмаром, как он понял на собственном горьком опыте. Задача взаимного притяжения Солнца, Земли и Луны уже вызывала у него головную боль. Так что об изучении всей Солнечной системы не могло быть и речи; это выходило за рамки возможностей анализа Ньютона. Как он выразился в одной из неопубликованных работ, «если я не сильно ошибаюсь, одновременное рассмотрение стольких причин движения превышает силу человеческого разума»* [17].

* В отличие от задачи двух тел, задача трех тел не имеет аналитического решения в общем виде (известны только решения в ряде частных случаев). *Прим. пер.*

Однако, как ни странно, при увеличении числа объектов до *бесконечности* дифференциальные уравнения снова становились полезны, если эти объекты образовывали сплошную среду, а не дискретное множество. Вспомните разницу: дискретный набор частиц подобен набору шариков, разложенных на полу. Он дискретен в том смысле, что вы можете прикоснуться к одному шарiku, потом провести пальцем по пустому пространству, затем коснуться другого шарика и так далее. Между шариками есть промежутки. В непрерывной же среде, скажем, такой, как гитарная струна, все частицы держатся вместе, и вы ведете палец вдоль струны, не отрывая. Конечно, это не совсем так, поскольку струна, как и все материальные объекты, дискретна в атомном масштабе. Но уместнее рассматривать струну как непрерывный континуум. Этот подход освобождает нас от необходимости работать с триллионами и триллионами частиц.

Обращаясь к загадкам движения и изменения непрерывных сред — как вибрируют гитарные струны, создавая музыку, или как передается тепло от горячих мест к холодным, — анализ сделал следующий большой шаг к изменению мира. Однако предварительно он изменился сам. Необходимо было расширить понимание того, что такое дифференциальные уравнения и что они могут описывать.

Обыкновенные дифференциальные уравнения
и уравнения в частных производных

Когда Исаак Ньютон объяснял эллиптические орбиты планет, а Кэтрин Джонсон вычисляла траекторию полета космического корабля Джона Гленна, оба использовали класс дифференциальных уравнений под названием *обыкновенные дифференциальные уравнения* [18]. Слово «обыкновенный» не нужно воспринимать как уничижительное. Этим термином обозначаются дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную.

Например, в уравнениях Ньютона для задачи двух тел положение планеты было функцией времени. Планета постоянно меняла

свое местоположение в соответствии с соотношением $F = ma$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение определяет, насколько изменится положение планеты через бесконечно малый интервал времени. В этом примере положение планеты — зависимая переменная, поскольку оно зависит от времени — независимой переменной. Точно так же время было независимой переменной в динамической модели ВИЧ Алана Перельсона. Он моделировал, как менялась концентрация вирусных частиц в крови после приема антиретровирусного препарата. Вопрос заключался в изменении во времени: насколько концентрация вируса меняется от момента к моменту. Здесь концентрация играла роль зависимой переменной, а время — независимой.

В целом обыкновенное дифференциальное уравнение описывает, как что-то (положение планеты, концентрация вируса и так далее) меняется на бесконечно малую величину в результате бесконечно малого изменения чего-то другого (например, времени). «Обыкновенным» такое уравнение считается потому, что в нем ровно одна независимая переменная.

Любопытно, что абсолютно неважно, сколько в нем *зависимых* переменных. Пока независимая переменная одна, уравнение считается обыкновенным. Например, для определения положения космического корабля в трехмерном пространстве нужны три числа: назовем их x , y и z . Они указывают, где (слева-справа, вверх-вниз, впереди-сзади) находится корабль относительно некоторой произвольной точки, именуемой началом координат, или точкой отсчета. Поскольку корабль движется, то x , y и z меняются в зависимости от времени. Таким образом, они являются функциями времени. Чтобы подчеркнуть это, мы могли бы записать их в виде $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения идеально подходят для дискретных систем, состоящих из одного или нескольких тел. Они могут описывать движение космического корабля, входящего в атмосферу; маятника, раскачивающегося вперед и назад; или

одной планеты, обращающейся вокруг Солнца. Загвоздка в том, что нам нужно представить любой объект в идеализированном виде — как точку, бесконечно малый объект без пространственной протяженности. Тогда мы можем считать его точкой с координатами x , y и z . Аналогичный подход срабатывает, когда имеется много точечных частиц: армада крохотных космических кораблей, цепочка маятников, соединенных пружинами, Солнечная система из восьми или девяти планет и бесчисленного количества астероидов. Все такие системы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

За столетия после Ньютона математики и физики разработали множество оригинальных способов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и, соответственно, прогнозирования систем реального мира, которые они описывают. Эти методы включали развитие идей Ньютона о степенных рядах, идей Лейбница о дифференциалах, хитроумные преобразования, которые позволяют применять основную теорему анализа, и так далее. Это масштабная индустрия, и она продолжает функционировать по сей день.

Однако не все системы дискретны — по крайней мере, не все из них следует рассматривать таким образом, как мы видели на примере гитарной струны. Следовательно, не все системы можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чтобы понять, почему, давайте посмотрим на воображаемую тарелку супа, остывающего на кухонном столе.

Конечно, тарелка супа на каком-то уровне представляет дискретное множество хаотично двигающихся молекул. Однако нет никаких возможностей их рассмотреть, измерить или иным образом количественно выразить их перемещения, поэтому никому не приходит в голову использовать обыкновенные дифференциальные уравнения для модели охлаждения супа. Придется иметь дело со слишком большим количеством частиц, движение которых нерегулярно, беспорядочно и неизвестно.

Гораздо удобнее думать о супе как о континууме. Это не совсем верно, но разумно. При аппроксимации континуумом мы считаем, что суп существует в каждой точке трехмерного объема тарелки. Температура T в определенной точке (x, y, z) зависит от времени t . Вся эта информация содержится в функции T . Как мы вскоре убедимся, существуют дифференциальные уравнения для описания того, как эта функция меняется во времени и пространстве. Такое уравнение уже не будет обыкновенным дифференциальным уравнением, ведь в нем не одна независимая переменная, а фактически четыре — t , x , y и z . Это новый зверь — *уравнение в частных производных* [19], названное так потому, что производные берутся по отдельным переменным.

Уравнения в частных производных намного разнообразнее обыкновенных. Они описывают непрерывные системы, движущиеся и изменяющиеся *одновременно* в пространстве и времени или в двух или нескольких измерениях пространства; провисшую форму гамака, распространение загрязняющего вещества в озере или поток воздуха над крылом истребителя.

Такие уравнения крайне трудны в решении, на их фоне обыкновенные дифференциальные уравнения, которые сами по себе тоже сложные, кажутся детской забавой. Но они чрезвычайно важны. Наша жизнь зависит от них каждый раз, когда мы поднимаемся в небо.

Дифференциальные уравнения в частных производных
и Boeing 787

Полет современного самолета — это чудо математического анализа. Но так было не всегда: на заре авиации первые летательные аппараты создавали по аналогии с птицами и воздушными змеями, применяя инженерную смекалку и метод проб и ошибок. Например, братья Райт для разработки системы управления аэропланом в полете и преодоления присущей ему неустойчивости опирались на свои знания о велосипедах.

Однако по мере совершенствования конструкции самолетов для их проектирования требовалось применять все более сложные средства. Аэродинамические трубы давали инженерам возможность проверять аэродинамические свойства аппаратов еще на земле. Модели, представлявшие миниатюрные копии реальных самолетов, позволяли проектировщикам проверять пригодность к полетам без создания полномасштабных моделей.

После Второй мировой войны авиационные инженеры добавили в свой арсенал компьютеры. Исполины на электронных лампах, которые использовались для взлома шифров, артиллерийских вычислений и прогноза погоды, помогали в создании современных реактивных самолетов. Компьютеры применялись для решения уравнений в частных производных, которые неизбежно возникали в процессе конструирования.

Было несколько причин для привлечения столь изощренной математики. Прежде всего — сложная геометрия самолета. Это не шар, не воздушный змей и не планер из бальсы. Форма самолета намного сложнее — крылья, фюзеляж, двигатели, хвост, закрылки и шасси. Все они отклоняют воздух, проносящийся мимо аппарата с огромной скоростью. И всякий раз, когда набегающий воздух отклоняется, он воздействует на все, что его отклоняет (это знает любой, кто когда-нибудь высовывал руку из окна автомобиля, мчащегося по шоссе). Если крыло самолета правильной формы, набегающий воздух стремится его поднять. Если самолет достаточно быстро двигается по взлетно-посадочной полосе, эта сила поднимает его в воздух и удерживает там. Однако наряду с подъемной силой, действующей перпендикулярно потоку набегающего воздуха, существует сила — лобовое сопротивление, — действующая параллельно потоку. Это сопротивление подобно трению. Оно мешает движению летательного аппарата и замедляет его, что требует более активной работы двигателей и повышенного расхода топлива. Вычисление величины подъемной силы и силы сопротивления для реалистичной формы

самолета — чрезвычайно сложная задача, выходящая далеко за пределы человеческих возможностей. Но такие задачи необходимо решать — они крайне важны при проектировании самолетов.

Рассмотрим Boeing 787 Dreamliner [20]. В 2011 году крупнейшая в мире авиакосмическая компания Boeing выпустила реактивный самолет нового поколения, предназначенный для перевозки 200–300 пассажиров на большие расстояния. Утверждалось, что лайнер на 60 процентов тише и на 20 процентов экономичнее, чем Boeing 767, который он должен был заменить. Одна из самых инновационных особенностей — применение углепластика для фюзеляжа и крыльев. Эти композитные материалы космической эры легче и прочнее алюминия, стали и титана — традиционных материалов, применяемых для реактивных самолетов. Поскольку углепластик легче металла, он экономит топливо и позволяет самолету летать быстрее.

Но, пожалуй, самая новаторская вещь в Boeing 787 — активное применение математики и вычислений, которые превосходили аналогичную деятельность для всех предыдущих моделей самолетов. Анализ и компьютеры сэкономили компании Boeing массу времени — моделирование нового опытного образца намного быстрее, чем его строительство. Это также сэкономило деньги компании — компьютерные вычисления куда дешевле, чем испытания в аэродинамической трубе, стоимость которых за последние десятилетия взлетела буквально до небес. Дуглас Болл, главный инженер отдела технологий и исследований компании, отметил в интервью, что при разработке Boeing 767 в 1980-х годах компания сконструировала и протестировала семьдесят семь прототипов крыльев. Спустя 25 лет, используя суперкомпьютеры для моделирования крыльев Boeing 787, компания построила и протестировала всего семь экземпляров.

Уравнения в частных производных применялись в этом процессе всевозможными способами. Например, наряду с расчетами подъемной силы и сопротивления математики компании применяли анализ, чтобы спрогнозировать, как будут изгибаться крылья лайнера

на скорости 900 километров в час. Когда на крыло действует подъемная сила, она заставляет его изгибаться вверх и скручиваться. Явление, которого инженеры обычно хотят избежать, — опасный эффект под названием аэроупругий флаттер [21], скверный вариант трепетания оконных жалюзи, когда дует ветерок. В лучшем случае такие нежелательные колебания крыльев приведут к ухабистому полету, в худшем — создадут цикл с положительной обратной связью: при колебаниях крылья меняют поток воздуха над собой так, что колебания только усиливаются. Известно, что флаттер повреждает крылья самолетов, проходящих летные испытания, вызывая проблемы с конструкцией и катастрофы (как произошло в 1997 году на авиашоу с истребителем Lockheed F-117 Nighthawk). Если серьезный флаттер случится на коммерческом рейсе, это поставит под угрозу жизни сотен пассажиров.

Уравнения, описывающие аэроупругий флаттер, тесно связаны с теми, которые мы упоминали при обсуждении лицевой пластики. Там разработчики модели в духе Архимеда аппроксимировали мягкие ткани и череп пациента с помощью сотен тысяч многогранников и многоугольников. В таком же ключе математики компании Boeing аппроксимировали крыло с помощью сотен тысяч крохотных кубиков, призм и тетраэдров. Эти простые формы играли роль строительных блоков. Каждому из них приписывалась определенная жесткость и эластичность, как и при лицевой пластике, а затем эти блоки подвергали сжатию и растяжению. Уравнения в частных производных, используемые в теории упругости, предсказывают поведение каждого элемента под воздействием этих сил. Наконец, с помощью суперкомпьютера все эти реакции объединили и использовали для прогнозирования общей вибрации крыла.

Аналогичным образом уравнения в частных производных использовались для оптимизации процесса сгорания в двигателях авиалайнера. Это особенно сложная задача для моделирования. Здесь взаимодействуют три области: химия (топливо участвует в сотнях

химических реакций при высокой температуре), теплопередача (тепло перераспределяется внутри двигателя, поскольку химическая энергия преобразуется в механическую, вращающую лопадки турбин) и динамика текучих сред (горячие газы закручиваются в камере сгорания, и предсказание их поведения — чрезвычайно сложная задача с учетом турбулентности). Как и прежде, команда Boeing использовала Архимедов подход — они разделили задачу на части, решили каждую из них, а затем свели их воедино. Это принцип бесконечности в действии — стратегия «разделяй и властвуй», на которой зиждется весь анализ. Здесь ему помогали суперкомпьютеры и численный метод решения уравнений, известный как метод конечных элементов. Но в основе всего лежит анализ, воплощенный в дифференциальных уравнениях.

Вездесущность уравнений в частных производных

Применение анализа в современной науке — это в значительной степени упражнение по формулировке, решению и интерпретации уравнений в частных производных. Уравнения Максвелла для электромагнитных волн — это уравнения в частных производных. Таковы же законы упругости, акустики, теплопередачи, текучести и газовой динамики. Список можно продолжать: модель Блэка — Шоулза для определения теоретической цены опционов [22] или модель Ходжкина — Хаксли [23], описывающая распространение электрических импульсов по нервным волокнам, — все это тоже уравнения в частных производных.

Даже на переднем крае современной физики математическую инфраструктуру по-прежнему обеспечивают дифференциальные уравнения в частных производных. Обратимся к общей теории относительности Эйнштейна [24]. Она переосмысливает гравитацию как проявление кривизны четырехмерной ткани пространства-времени. Стандартная метафора предлагает нам представить пространство-время как эластичную деформируемую ткань наподобие поверхности

батута. В обычном состоянии она туго натянута, но если положить на нее нечто тяжелое, скажем, шар для боулинга, то она может изгибаться. Точно так же массивное небесное тело, например Солнце, может изгибать вокруг себя ткань пространства-времени. Теперь вообразите нечто гораздо меньшее, допустим, маленький шарик (изображающий планету), который катится по искривленной поверхности батута. Поскольку она прогибается под весом шара для боулинга, она искривляет траекторию шарика. Вместо того чтобы двигаться по прямой линии, он следует контурам искривленной поверхности и вращается вокруг шара для боулинга. Вот почему, по словам Эйнштейна, планеты движутся вокруг Солнца. Они не ощущают никакой силы, а просто следуют по пути наименьшего сопротивления в искривленной ткани пространства-времени.

Какой бы непостижимой ни была эта теория, в ее математической основе лежат уравнения в частных производных. То же самое верно для квантовой механики, теории микромира. Ее основное уравнение — уравнение Шрёдингера [25] — тоже использует частные производные. В следующей главе мы подробнее рассмотрим такие уравнения, чтобы вы имели представление о том, что это такое, откуда они берутся и почему так важны для повседневной жизни. Как мы увидим, уравнения в частных производных не только описывают остывающую на столе тарелку супа, но и объясняют, как он нагревается в микроволновой печи.

Создание волн

До начала 1800-х понятие тепла оставалось загадкой. Что это такое? Может, жидкость, похожая на воду? Казалось, это действительно текучая субстанция, но вы не могли ни поддержать ее в руках, ни увидеть. Вы могли измерить тепло косвенно, отслеживая температуру горячего предмета по мере его остывания, но никто не знал, что происходит внутри остывающего предмета.

Секреты тепла раскрыл человек, который часто ощущал холод. Осиротев в девятилетнем возрасте, Жан-Батист Фурье [1], будучи подростком, страдал астматическим расстройством. Повзрослев, он пришел к выводу, что тепло важно для здоровья. Он поддерживал высокую температуру в своей комнате и даже летом кутался в теплую одежду. Фурье был одержим теплом во всех аспектах своей научной деятельности. Он создал концепцию глобального потепления и первым объяснил, как парниковый эффект регулирует среднюю температуру Земли.

В 1807 году Фурье использовал анализ для решения задачи теплопроводности [2]. Он вывел уравнение в частных производных, которое позволяло ему предсказывать изменение температуры остывающего предмета, скажем предварительно раскаленного железного стержня. Он обнаружил, что может решить такую задачу, как бы неравномерно ни распределялась температура по длине стержня на момент начала охлаждения. Стержень мог иметь горячие и холодные места, но аналитический метод Фурье без проблем справлялся с задачей.

Представьте себе длинный тонкий цилиндрический железный стержень, неравномерно нагретый в кузнечном горне, так что

по всей его длине одни его участки горячие, а другие — холодные. Для простоты предположим, что вокруг стержня есть идеально изолирующая муфта, не позволяющая теплу уходить, поэтому единственный путь его передачи — распространение вдоль по стержню от горячих участков к холодным. Фурье постулировал (и эксперименты подтвердили это), что скорость передачи тепла в данной точке стержня пропорциональна разности температуры в этой точке и средней температуры соседних точек. Когда я говорю о *соседних точках*, я действительно говорю о *соседах* — вообразите две точки по сторонам от нашей, где каждая к ней бесконечно близка.

В этих идеализированных условиях физика теплопередачи проста. Если точка холоднее соседей, она нагревается. Если горячее — остывает. Чем сильнее перепад температур, тем быстрее температура выравнивается. Если температура в точке равна средней температуре соседей, все уравнивается и теплопередача не происходит, температура точки в следующий момент останется той же.

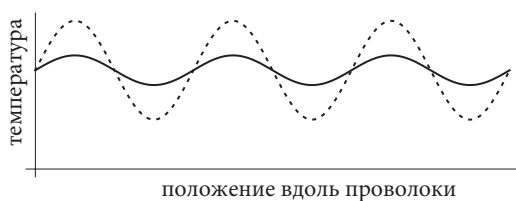
Этот процесс сравнения мгновенной температуры точки с мгновенной температурой ее соседей привел Фурье к уравнению в частных производных, которое сегодня известно как уравнение теплопроводности. Оно включает производные по двум независимым переменным: время (t) и положение на стержне (x).

Самая сложная часть задачи, которую поставил перед собой Фурье, состояла в беспорядочном исходном распределении горячих и холодных точек на стержне. Чтобы решить ее, Фурье предложил схему, которая казалась безумно оптимистичной, но почти безрасудной. Он утверждал, что *любое* исходное распределение температуры можно заменить эквивалентной суммой простых синусоид.

Синусоиды стали его строительными блоками. Он выбрал их, потому что они упрощали задачу. Он знал, что если исходная температура подчинялась синусоидальной закономерности, то и по мере остывания это свойство будет сохраняться.



В этом был ключ: синусоиды не двигаются. Они просто остаются на месте. Правда, они затухали по мере того, как их горячие точки остывали, а холодные нагревались, но с этим легко было справиться: это просто означало, что колебания температуры со временем уменьшаются. Как показано на следующем рисунке, распределение температуры, первоначально представленное пунктирной синусоидой, постепенно уменьшает размах и превращается в сплошную синусоиду.



Важно было то, что во время такого сглаживания синусоидальные волны оставались неподвижны. Они были *стоячими волнами*.

Таким образом, выяснив, как разделить исходное распределение температуры на отдельные синусоиды, Фурье мог бы решить задачу теплопередачи для каждой волны по отдельности. Он уже знал ответ на этот вопрос: каждая синусоида затухала экспоненциально со скоростью, зависящей от того, сколько гребней и впадин она имела. Волны с большим количеством гребней затухали быстрее, потому что горячие и холодные точки у них располагались ближе друг к другу, что приводило к более быстрому теплообмену между ними и более быстрому установлению равновесия. Зная, как затухает каждый синусоидальный строительный блок, Фурье мог сложить эти результаты и решить исходную задачу.

Загвоздка была в том, что Фурье вызвал к жизни *бесконечный ряд* синусоидальных волн. Он снова призвал в анализ голема бесконечности и сделал это еще более безрассудно, нежели его предшественники. Вместо бесконечной суммы треугольных осколков или чисел он бесцеремонно использовал бесконечную сумму волн. Это напоминало то, что делал Ньютон с помощью рядов из степенных функций x^n , за исключением того, что он никогда не утверждал, что может представить в виде такой суммы произвольные кривые, а тем более ужасы вроде разрывных функций или функций с острыми углами. Фурье же утверждал именно это — кривые со скачками и углами его не пугали. Кроме того, волны Фурье логичным образом возникали из самого дифференциального уравнения в том смысле, что были естественными колебаниями, естественными стоячими формами. Они были приспособлены для теплопередачи. Степенные функции Ньютона не претендовали на звание строительных блоков; синусоиды Фурье — претендовали. Они органично подходили для решения поставленной задачи.

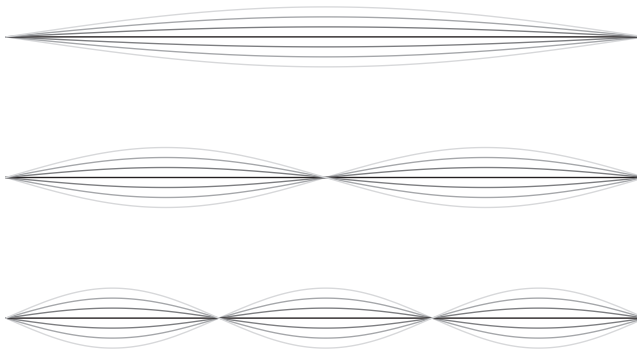
Хотя столь смелое использование синусоид в качестве строительных блоков вызвало споры и подняло трудные проблемы строгости, на решение которых математикам потребовалось целое столетие, сегодня идея Фурье играет важную роль в таких технологиях, как компьютерные синтезаторы речи или МРТ.

Теория движения струны

Синусоидальные волны также появляются в музыке. Это естественные формы колебаний струн гитар, скрипок и фортепиано. Применяя механику Ньютона и дифференциалы Лейбница к идеализированной модели натянутой струны, можно получить уравнение в частных производных для таких колебаний. В подобной модели струна рассматривается как непрерывный массив бесконечно малых

частиц, составленных в ряд и соединенных с соседями с помощью упругих сил. В любой момент времени t каждая частица в струне движется в соответствии с действующими на нее силами. Эти силы создаются натяжением струны, когда соседние частицы взаимодействуют друг с другом. При этом каждая частица перемещается в соответствии с ньютоновским законом $F = ma$. Это происходит в каждой точке x по всей длине струны. Таким образом, получающееся дифференциальное уравнение зависит и от t , и от x и представляет собой еще один пример уравнения в частных производных. Оно называется волновым уравнением [3], поскольку, как и ожидалось, предсказывает, что типичное движение колеблющейся струны — это волна.

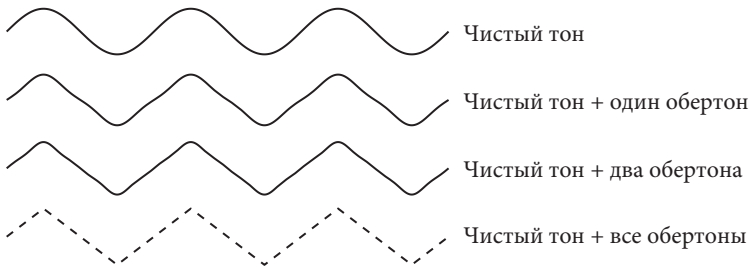
Как и в случае теплопередачи, некоторые синусоиды особенно полезны, поскольку при колебаниях регенерируют сами себя. Если концы струны фиксированы, то эти синусоидальные волны не распространяются, а стоят на месте. Если сопротивление воздуха и внутреннее трение струны пренебрежимо малы, то идеальная струна, начав синусоидальные колебания, будет колебаться вечно; при этом частота ее колебаний никогда не изменится. По этим причинам синусоиды служат идеальными строительными блоками и для задачи струн.



Другие формы колебаний могут быть сконструированы из бесконечных сумм синусоид. Например, в клавишинах 1700-х струну часто натягивали плектром, придавая треугольную форму, а затем отпускали.



Хотя треугольная волна и имеет угол, ее можно представить в виде бесконечной суммы идеально гладких синусоид. Иными словами, для получения углов не нужны углы. На рисунке ниже я аппроксимировал треугольную волну, показанную пунктиром в нижней части, тремя все более точными приближениями с помощью синусоид.



Первое приближение — это одиночная синусоида с наилучшей возможной амплитудой (*наилучшей* в том смысле, что она минимизирует общую квадратичную ошибку для разницы с треугольной волной — ту самую меру оптимальности, которую мы встречали в главе 4). Второе приближение — это оптимальная сумма двух синусоид, а третье — наилучшая сумма трех синусоид. Треугольная волна будет удовлетворять соотношению, установленному Фурье:

$$\text{треугольная волна} = \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \frac{1}{49} \sin 7x + \dots$$

Эта бесконечная сумма называется рядом Фурье для треугольной волны. Обратите внимание на интересные числовые закономерности в нем. В синусоидах, которыми являются слагаемые, используются

только нечетные числа 1, 3, 5, 7..., а соответствующие амплитуды — это величины, обратные квадратам этих нечетных чисел, причем знаки плюс и минус чередуются. К сожалению, я не могу быстро объяснить, почему все устроено именно так; для этого нам пришлось бы углубиться в дебри анализа, чтобы понять, откуда берутся эти волшебные амплитуды. Но главное в том, что Фурье умел их вычислять. Он мог синтезировать треугольную волну и любую иную произвольную сложную кривую из более простых синусоид.

Масштабная идея Фурье лежит в основе музыкальных синтезаторов. Чтобы увидеть, почему это так, рассмотрим звучание какой-нибудь ноты, например *ля* первой октавы. Для создания такого звука мы можем ударить по камертону, настроенному на колебания с соответствующей частотой 440 Гц. Камертон состоит из рукояти и двух металлических зубцов. Если ударить по нему резиновым молоточком, зубцы начинают колебаться назад и вперед 440 раз каждую секунду. Эти колебания воздействуют на окружающий воздух: когда зубец движется наружу, он сжимает воздух, а когда назад — разрежает его. В результате создается синусоидальное изменение давления в воздухе, которое наши уши воспринимают как чистый тон, скучный и бесцветный. Ему не хватает того, что музыканты называют тембром. Мы могли бы сыграть одну и ту же ноту *ля* на скрипке или фортепиано, и они прозвучали бы теплее и красочнее. Несмотря на то что эти инструменты тоже издают колебания с эталонной частотой 440 Гц, они звучат не так, как камертон (и не похоже друг на друга) из-за различных обертонов (это музыкальный термин для волн наподобие $\sin 3x$ или $\sin 5x$ в вышеприведенной формуле для треугольной волны). Обертоны придают ноте красочности, добавляя частоты, кратные основной. В дополнение к синусоиде с частотой 440 Гц синтезированная треугольная волна включает синусоидальный обертон с втрое большей частотой ($3 \times 440 = 1320$ Гц). Этот обертон не такой мощный, как основная синусоида $\sin x$. Его амплитуда составляет всего $1/9$ от основной, а остальные обертоны

с другими нечетными числами еще слабее. На музыкальном языке эти амплитуды определяют громкость обертонов. Богатство звучания скрипки связано с определенным сочетанием более тихих и более громких обертонов.

Мощь идеи Фурье состоит в том, что звук *любого* музыкального инструмента можно синтезировать с помощью бесконечного набора по-разному настроенных камертонов. Все, что для этого требуется, — ударить по ним с нужной силой и в нужное время, и — невероятно — но раздастся звук скрипки, фортепиано или даже трубы или гобоя, хотя мы использовали не более чем бесцветные синусоиды. По сути, именно так работали первые электронные синтезаторы: они воспроизводили звук любого инструмента, сочетая большое количество синусоидальных волн.

В старших классах я брал уроки электронной музыки, и это дало мне представление, на что способны синусоиды. Это было в темные времена 1970-х, когда электронную музыку создавал большой ящик, напоминавший обычный коммутатор. Мы с одноклассниками втыкали кабели в разные разъемы, поворачивали ручки и получали звуки с помощью синусоидальных, прямоугольных и треугольных волн. Насколько я помню, синусоидальные волны обладали чистым открытым звуком, как у флейты. Квадратные звучали пронзительно, как сигналы пожарной тревоги. Треугольные издавали металлический звук. С помощью одной рукоятки мы могли менять частоту волны, повышая или понижая тон. Другой можно было корректировать амплитуду, увеличивая или уменьшая громкость. Подключив сразу несколько кабелей, мы могли складывать волны и обертоны в различных сочетаниях, как это делал Фурье, но для нас этот опыт был практическим: мы слышали создаваемые нами звуки. Мы могли видеть формы волн на осциллографе одновременно с их прослушиванием. Вы можете попробовать найти соответствующие видео в интернете. Поищите нечто вроде *звука треугольных волн*, и найдете интерактивные демонстрации, которые позволят вам почувствовать, будто вы сидите в моем классе в 1974 году и играете с волнами ради собственного удовольствия.

Еще более значимый аспект работы Фурье состоял в том, что он сделал первый шаг к использованию анализа в качестве предсказателя того, как может двигаться и изменяться континуум частиц. Это был огромный шаг вперед по сравнению с трудами Ньютона о движении дискретного множества частиц. За последующие столетия ученые развили методы Фурье и теперь предсказывают поведение других непрерывных сред — например, флаттера на крыле Boeing 787, внешнего вида пациента после лицевой пластики, потока крови по артериям или перемещения земной поверхности после землетрясения. Сегодня эти методы используются в науке и технике повсеместно. Их применяют для изучения ударных волн при термоядерном взрыве; радиоволн для связи; волн в кишечнике, которые помогают усваивать питательные вещества и перемещать продукты жизнедеятельности в нужном направлении; патологических электрических волн в мозге, связанных с эпилепсией и болезнью Паркинсона; а также волн заторов на автострадах с раздражающим явлением фантомных пробок, когда движение замедляется без всяких видимых причин. Идеи Фурье и их различные вариации позволили объяснить все эти явления с математической точки зрения — иногда с помощью формул, иногда путем сложного компьютерного моделирования, так что мы можем объяснить и предсказать эти явления, а в некоторых случаях и управлять ими или устранить их.

Почему синусоиды?

Прежде чем перейти от синусоидальных волн к их двумерным и трехмерным аналогам, давайте выясним, что же делает синусоиды такими особенными. В конце концов, строительными блоками могут быть и другие функции, и иногда они работают лучше синусоидальных волн. Например, чтобы улавливать локальные особенности вроде отпечатков

пальцев, ФБР применило вейвлеты. Вейвлеты часто превосходят синусоиды во многих задачах обработки изображений или сигналов — в таких областях, как анализ землетрясений, реставрация или установление подлинности произведений искусства, распознавание лиц.

Так почему же именно синусоидальные волны так хорошо подходят для решения волнового уравнения, уравнения теплопроводности и других дифференциальных уравнений в частных производных? Их преимущество в том, что у них очень специфичные производные. Собственно говоря, производная синусоиды — это та же синусоида, только сдвинутая на четверть цикла. Это замечательное свойство. Оно не выполняется для других типов волн. Как правило, кривая любого рода после дифференцирования изменяется. Ее форма становится другой. Дифференцирование весьма травматический опыт для большинства кривых. Но не для синусоид. После дифференцирования синусоида невозмутимо отряхивается, оставаясь все той же синусоидой. Единственная получаемая ею травма — по сути, и не травма вовсе — это сдвиг волны во времени. Она достигает пика на четверть цикла раньше, чем исходная.

Мы наблюдали несовершенную версию этого явления в главе 4, когда рассматривали увеличение продолжительности светового дня в Нью-Йорке в 2018 году и сравнивали его с ежедневными изменениями продолжительности дня и их скоростью от одних суток к следующим. Мы видели, что обе кривые выглядели примерно синусоидальными, но скорость изменения продолжительности дня создавала волну, сдвинутую на три месяца раньше, чем волна исходных данных. Попросту говоря, самый длинный день в 2018 году был 21 июня, а самое быстрое удлинение дня — на три месяца раньше, 20 марта. Именно этого мы и ожидаем от синусоидальных данных. Если бы данные о длине дня представляли собой *идеальную* синусоидальную волну и мы бы смотрели на разницу не между сутками, а между соседними *моментами*, то мгновенная скорость изменений («производная» волна) сама была бы идеальной синусоидой,

сдвинутой ровно на четверть цикла. Также из главы 4 мы узнали, почему происходит такой сдвиг на четверть. Это вытекает из глубокой связи между синусоидами и равномерным движением по окружности. (Вы можете вернуться к этим рассуждениям, если сейчас объяснение кажется вам туманным.)

Сдвиг на четверть цикла обладает поразительными следствиями. Это означает, что, взяв *две* производные, мы дважды сдвинемся на четверть цикла, то есть в общей сложности на половину цикла. А значит, бывший пик превращается во впадину и наоборот. Синусоида перевернулась. В математических терминах это записывается в виде формулы

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \sin x \right) = -\sin x,$$

где символ дифференцирования Лейбница d/dx означает «взятие производной от выражения, стоящего справа». Формула показывает, что взять две производные от синуса равнозначно умножению на -1 . Такая замена двух производных простым умножением — фантастическое упрощение. Получение второй производной — полноценная операция анализа, в то время как умножение на -1 — это школьная арифметика.

Но зачем, можете вы спросить, кому-то вообще понадобилось брать эти две производные? Потому что это делает природа, причем постоянно. Вернее, постоянно делают наши *модели* природы. Например, в ньютоновском законе движения $F = ma$ ускорение a подразумевает две производные. Вспомните, что ускорение — это производная скорости, а скорость — производная расстояния. Следовательно, ускорение — это *производная производной* расстояния, или, проще говоря, вторая производная расстояния. Вторые производные встречаются в физике и технологии повсеместно. Они присутствуют не только в упомянутом уравнении Ньютона, но и в уравнении теплопроводности и волновом уравнении.

Вот почему синусоидальные волны так хорошо подходят для таких уравнений. Для них вторые производные сводятся к простому

умножению на -1 . Фактически операции анализа, которые затрудняют изучение уравнения теплопроводности и волнового уравнения, перестают быть проблемами. Анализ пропадает, поскольку заменяется умножением. Именно это значительно упрощает задачи о движении струны и о теплопередаче для синусоидальных волн. Если бы из них можно было сконструировать произвольную кривую, то она унаследовала бы все достоинства синусоид. Единственная загвоздка — для построения произвольной кривой пришлось бы складывать бесконечное количество синусоид, но это небольшая цена.

Это объясняет, почему синусоиды особенные. У физиков тоже есть собственная точка зрения, и ее стоит понять. Для физика самое замечательное в синусоидах (в контексте задач о колебаниях и теплопередаче) то, что они образуют *стоячие волны*. Они не двигаются вдоль по струне или стержню, а остаются на месте. Они колеблются вверх-вниз, но никогда не распространяются. Еще более примечательно, что стоячие волны колеблются с единственной частотой*. Это редкость в мире волн. Большинство волн — это сочетание многих частот, так же как белый свет — сочетание всех цветов радуги. В этом отношении стоячая волна — это чистая волна, а не смесь.

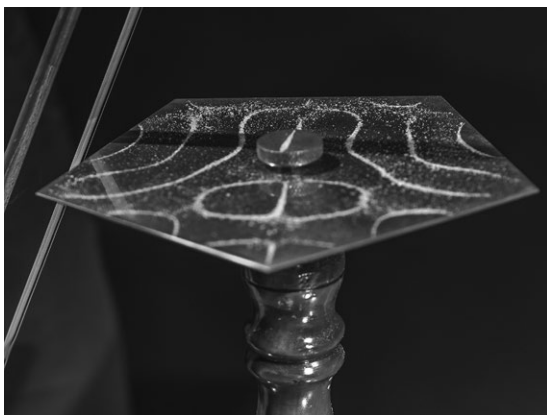
Визуализация вибраций: фигуры Хладни

Теплый звук гитары и жалобное звучание скрипки связаны с колебаниями, возникающими в деке и корпусе инструмента, в древесине и во внутренних полостях, где звуковые волны колеблются и резонируют. Эти схемы колебаний определяют качество и голос инструмента. Именно это делает творения Страдивари такими особенными — его выразительные уникальные схемы колебаний в древесине и воздухе.

* Это не совсем так — стоячая волна также может иметь обертоны, но *спектр* стоячей волны носит дискретный характер. *Прим. ред.*

Мы до сих пор в точности не знаем, почему одни скрипки звучат лучше других, но ключевым соображением должны быть способы вибрации.

В 1787 году немецкий физик и создатель музыкальных инструментов Эрнст Хладни опубликовал статью, рассказывающую о любопытном способе визуализации этих вибраций. Вместо того чтобы использовать сложные формы (скрипки или гитары), он играл на гораздо более простом инструменте — тонкой металлической пластине, проводя по ее краю скрипичным смычком. При этом он смог заставить пластину вибрировать и звучать (немного похоже на то, как можно заставить звучать наполовину наполненный бокал, проводя пальцем по его ободку). Чтобы визуализировать колебания, Хладни насыпал на пластину мелкий песок. Когда смычок заставлял пластину колебаться, песок слетал с наиболее активно колеблющихся частей и оседал на тех, которые вообще не вибрировали. Получающиеся кривые линии называли фигурами Хладни* [4].



Возможно, вы видели демонстрацию фигур Хладни в музеях науки. Металлическую пластину помещают на громкоговоритель, покрывают

* В 1680 году, более чем за столетие до Хладни, этот опыт провел Роберт Гук, который водил скрипичным смычком по краю стеклянной пластины и наблюдал возникающие фигуры. *Прим. пер.*

песком, а затем приводят в движение генератор звукового сигнала. Поскольку частота звука в громкоговорителе регулируется, пластина может вибрировать в различных резонансных режимах. Каждый раз, когда громкоговоритель переходит на новую резонансную частоту, песок перестраивается в другую фигуру. Пластина делится на соседние области, которые колеблются в противоположных направлениях и разделены узловыми линиями, где она остается неподвижной.

Вероятно, вам кажется странным, что некоторые части пластины не двигаются. Но это не должно удивлять. То же самое мы видели у синусоидальных волн на струне. Точки, в которых струна не двигается, — это узлы колебаний. На пластине есть аналогичные узлы, только здесь это не отдельные точки: они соединены между собой, образуя узловые прямые и кривые линии. Это и есть кривые, обнаруженные Хладни в своих экспериментах. В то время они считались настолько удивительными, что ученого пригласили показать их самому императору Наполеону. Наполеон обладал достаточными знаниями в области математики и техники и был настолько заинтригован, что объявил конкурс и призвал величайших математиков Европы объяснить причину появления этих узоров.

Необходимой математической теории в то время еще не было. Выдающийся ученый Жозеф Лагранж полагал, что эта проблема недостижима и никому не под силу с ней справиться. Действительно, за нее решил взяться всего один человек. Это была Софи Жермен [5].

Величайшее мужество

Софи Жермен самостоятельно изучила математику в юном возрасте. Она родилась в состоятельной семье и увлеклась математикой, прочитав книги об Архимеде из библиотеки отца. Когда родители узнали, чем дочь занимается по ночам, они стали забирать у нее свечи

и даже ночные рубашки. Но Софи не сдавалась: закутывалась в одеяла и работала при свете украденных свечей. В конце концов семья смирилась и дала свое благословение.

Софи Жермен, как и всем женщинам той эпохи, не разрешалось посещать университет, поэтому она продолжала заниматься самообразованием, иногда получая записи лекций из соседней Политехнической школы на имя Антуана-Огюста Леблана — учащегося, который оттуда ушел. Не подозревая о его решении, руководство школы продолжало печатать для него конспекты лекций и наборы задач. Софи сдавала работы от его имени, пока один из преподавателей, великий ученый Лагранж, не обратил внимание на заметное улучшение прежде ужасной успеваемости меье Леблана. Лагранж пожелал с ним встретиться и был крайне восхищен и удивлен, узнав, кто на самом деле скрывается за этим именем. Он взялся опекать Жермен.

Первые достижения девушки относились к теории чисел: она внесла важный вклад в одну из самых сложных нерешенных проблем — великую теорему Ферма. Когда Жермен почувствовала, что совершила прорыв, она написала крупнейшему в мире специалисту по теории чисел (и одному из величайших математиков всех времен), Карлу Гауссу, снова воспользовавшись псевдонимом Антуан Леблан. Гаусс восхищался своим загадочным корреспондентом, и в течение трех лет они вели оживленную переписку. Ситуация омрачилась в 1806 году, когда армия Наполеона оккупировала немецкий город Брауншвейг, где жил Гаусс. Опасаясь за жизнь ученого, Софи Жермен попросила друга своей семьи, генерала Жозефа Мари де Пернетти, позаботиться о безопасности Гаусса. Когда ученый узнал, что обязан своей безопасностью некой неизвестной ему мадемуазель Софи Жермен, он был озадачен, так как у него не было знакомых с таким именем. Спустя три месяца Жермен в письме раскрыла свое имя. Гаусс был ошеломлен, узнав, что переписывался с женщиной. Признавая всю глубину ее идей и прекрасно понимая, какие предрассудки

и преграды ей пришлось преодолевать, он признал, что «несомненно, она должна обладать величайшим мужеством, весьма необычайными талантами и превосходным гением» [6].

Поэтому, когда Софи услышала о конкурсе по решению загадки фигур Хладни, она приняла вызов. Она оказалась единственным, достаточно смелым человеком, который попытался разработать всю необходимую теорию с нуля. Ее решение включало создание нового раздела механики — теории упругости для плоских тонких двумерных пластин, что выходило далеко за рамки предыдущих более простых теорий для одномерных струн и стержней. Она построила свою теорию на принципах силы, смещений и кривизны и использовала методы анализа, чтобы выписать и решить соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных для колеблющихся пластин Хладни и чудесных узоров, которые на них появлялись. Однако пробелы в знаниях и нехватка формального образования привели к недостаткам в решении, которые обнаружили судьи. Они посчитали, что задача решена не полностью, и продлили конкурс еще на два года, а затем еще на два. С третьей попытки Жермен таки получила награду парижской Академии наук, став первой женщиной, удостоившейся такой чести.

Микроволновые печи

Фигуры Хладни позволяют наглядно представить стоячие волны в двух измерениях. В повседневной жизни мы имеем дело с трехмерным аналогом фигур Хладни каждый раз, когда пользуемся микроволновой печью [7]. Внутри печи находится трехмерное пространство, и когда вы включаете ее, оно наполняется стоячими волнами. Хотя вы не можете увидеть эти электромагнитные колебания воочию, их можно визуализировать косвенно — подобно тому как Хладни делал это с помощью песка.

Возьмите тарелку, предназначенную для микроволновой печи, и покройте ее полностью тонким слоем мягкого тертого сыра (или

используйте что-нибудь иное, что будет лежать ровно и легко плавиться, например тонкую плитку шоколада или кондитерскую посыпку маршмеллоу). Перед тем как ставить тарелку в печь, обязательно выньте вращающийся столик. Это важно, потому что тарелка с сыром (или с чем-то иным) должна стоять неподвижно, чтобы можно было обнаружить горячие точки. Как только вы все это сделаете, включите микроволновую печь на тридцать секунд, не больше. Затем выньте тарелку. Вы увидите места, где сыр расплавился полностью — это горячие точки. Они соответствуют пучностям микроволн — местам, где колебания имеют наибольшую амплитуду, то есть особенно сильны. Они похожи на гребни и впадины синусоидальной волны или те места на пластине в опыте Хладни, где песка *нет* (поскольку сильные колебания его стряхнули).

В случае стандартной микроволновой печи, которая создает частоту 2,45 ГГц (то есть волны колеблются с частотой 2,45 миллиарда раз в секунду), вы должны обнаружить, что расстояние между соседними расплавленными местами составляет примерно 2,5 дюйма, или 6 сантиметров. Имейте в виду, что это расстояние между пиком и впадиной, то есть только *половина* длины волны. Чтобы получить полную длину, эту величину нужно удвоить. Таким образом, для стоячих волн в микроволновой печи длина волны составляет примерно 5 дюймов, или 12 сантиметров.

Кстати, с помощью микроволновой печи вы можете вычислить скорость света. Умножьте частоту колебаний (она указана на раме дверцы) на длину волны, которую вы измерили в своем эксперименте, и получите скорость света или величину, близкую к ней. Вот как это будет выглядеть для приведенных мною чисел. Частота — 2,45 ГГц. Длина волны — 12 сантиметров. Умножив эти числа, получаем 29,4 миллиарда сантиметров в секунду. Довольно близко к принятому значению скорости света — около 30 миллиардов сантиметров в секунду. Весьма неплохо для столь грубого измерения!

Как микроволновые печи связаны с радарам

В конце Второй мировой войны компания Raytheon Company искала новые сферы применения для своих магнетронов — мощных электронных ламп, используемых в радарх. Магнетрон — это электронный аналог свистка. Так же как свисток излучает звуковые волны, магнетрон излучает волны электромагнитные. Они могут отражаться от летящего самолета, и тогда можно определить расстояние до него и его скорость. Сегодня радары используются для отслеживания движения чего угодно — от судов и автомобилей до бейсбольных мячей, теннисных подач и погодных явлений.

Однако после войны, в 1946 году, Raytheon Company не знала, что делать со всеми магнетронами, которые производила. Но однажды инженер Перси Спенсер заметил, что, пока он работал с магнетроном, шоколадный батончик у него в кармане превратился в липкую массу. Он понял, что микроволны могут эффективно разогревать пищу. Чтобы изучить эту идею, он попробовал направить магнетрон на яйцо, помещенное в чайник, и оно взорвалось прямо в лицо одному из его коллег. Спенсер также продемонстрировал, что таким способом можно изготавливать попкорн. Связь между радаром и микроволновой печью дала название первой модели микроволновой печи — Radarange*. До конца 1960-х годов идея не пользовалась коммерческим успехом. Первые микроволновые печи были слишком большими (почти 6 футов, около 1 метра 80 сантиметров, в высоту) и очень дорогими — эквивалент десятков тысяч долларов в пересчете на нынешние деньги. Но со временем микроволновые печи стали достаточно миниатюрными и дешевыми для того, чтобы их могли себе позволить обычные семьи. Сегодня в промышленно развитых странах они есть как минимум у 90% семей.

История ра дара и микроволновых печей — свидетельство взаимосвязанности наук. Подумайте о том, что сюда вошло: физика,

* Radarange (англ.) — дальность действия радара. *Прим. пер.*

электротехника, материаловедение, химия и старое доброе случайное изобретение. Не последнюю роль сыграл и анализ. Он предоставил язык для описания волн и инструменты для их изучения. Волновое уравнение, которое появилось в связи с колеблющимися струнами в музыке, использовал Максвелл для предсказания существования электромагнитных волн. А оттуда недалеко было до электронных ламп, транзисторов, компьютеров, радаров и микроволновых печей. При этом незаменимыми оказались методы Фурье. И, как мы вскоре увидим, его методы сыграли определенную роль в появлении нового способа применения высокоэнергетических электромагнитных волн. Эти гораздо более энергичные волны были случайно обнаружены в самом конце XIX века. Никто не знал, что они собой представляют, поэтому в честь неизвестной величины их называли икс-лучами. Иначе — рентгеновским излучением, в честь первооткрывателя.

Компьютерная томография и визуализация мозга

Микроволны хороши для разогревания пищи, но для заглядывания внутрь наших тел лучше приспособлены рентгеновские лучи. Они позволяют проводить неинвазивную диагностику переломов, трещин черепа и искривлений позвоночника. К сожалению, обычное рентгеновское излучение нечувствительно к слабым изменениям плотности тканей. Это ограничивает их полезность при изучении мягких тканей и органов. Более современная форма визуализации, называемая КТ-исследованием, или компьютерной томографией [8], в сотни раз чувствительнее обычных рентгеновских лучей. Ее точность произвела настоящую революцию в медицине.

Слово «*томография*» означает процесс визуализации чего-либо путем разделения на слои-срезы*. При этом методе рентгеновские лучи используются для построения изображения какого-то органа

* Слово «томография» образовано от греческих корней *τομή* «разрезание, сечение» и *γράφω* «пишу, рисую, описываю». *Прим. пер.*

или ткани по одному срезу за раз. Когда пациента помещают в томограф, рентгеновские лучи проходят через его тело под разными углами и записываются детекторами на другой стороне. Имея всю эту информацию — с разных точек под разными углами, — можно гораздо четче реконструировать, через что именно прошли рентгеновские лучи. Другими словами, компьютерная томография — это не просто рассматривание, а умозаключения и вычисления. В действительности самая блестящая и революционная часть КТ — это использование сложной математики. С помощью анализа, рядов Фурье, методов обработки сигнала и компьютеров программное обеспечение определяет свойства ткани, органа или кости, через которые проходят рентгеновские лучи, а затем создает детальную картину этой части тела.

Чтобы понять, какова во всем этом роль анализа, сначала нужно понять, какую проблему решает томография и каким образом.

Представьте себе, как излучение проходит через ткани мозга. По мере прохождения лучи обнаруживают серое вещество, белое вещество, возможные опухоли, сгустки крови и так далее. Эти ткани поглощают энергию излучения в большей или меньшей степени — в зависимости от их типа. Цель томографии — составить карту поглощения по всему срезу. На основе этой информации КТ может обнаружить наличие опухолей или сгустков. КТ не видит мозг непосредственно; она видит схему поглощения рентгеновских лучей в мозге.

Математика здесь работает так. Когда рентгеновский луч проходит через данную точку среза мозга, он теряет часть энергии. Эта потеря похожа на ослабление видимого света, который проходит через солнцезащитные очки и становится менее ярким. Сложность тут в том, что на пути луча встает целая последовательность различных мозговых тканей, а потому они подобны целому ряду солнечных очков, одни перед другими, и все с разной степенью прозрачности, которую мы не знаем. Как раз ее-то мы и хотим выяснить!

Из-за изменчивости степени поглощения для различных тканей, когда лучи проходят сквозь мозг и попадают в детектор на противоположной стороне аппарата, их интенсивность снижается на разные величины. Чтобы вычислить результирующий эффект всех этих затуханий, нужно определить, насколько снижается интенсивность при бесконечно малом продвижении луча через ткань, а затем соответствующим образом скомбинировать все результаты. Такой расчет сводится к интегралу.

Появление здесь интегрального исчисления не должно вызывать удивления. Это самый естественный способ найти подход к решению столь сложной задаче. Как всегда, мы обращаемся к принципу бесконечности. И прежде всего представляем, что путь луча делится на бесконечное количество бесконечно малых шагов, затем выясняем, как интенсивность ослабляется на каждом из них, после чего складываем все эти изменения, чтобы вычислить суммарное ослабление вдоль линии движения луча.

К сожалению, сделав это, мы получим только небольшую часть информации. Мы узнаем общее ослабление рентгеновских лучей только вдоль одного конкретного пути луча. Это мало что говорит нам о срезе мозга в целом. Это мало что говорит даже о том конкретном пути, по которому шел рентгеновский луч. Это просто суммарное ослабление по всей линии, а не закон, по которому происходит ослабление в каждой ее точке.

Позвольте мне предложить такую аналогию: подумайте, сколькими способами можно сложить целые числа, чтобы получить 6. Так же как число 6 может оказаться результатом сложения $5 + 1$, или $2 + 4$, или $3 + 3$, так и итоговое ослабление рентгеновских лучей может оказаться результатом самых различных последовательностей локальных ослаблений. Например, было сильное затухание в начале пути и слабое — в конце. А может, и наоборот. Или, возможно, затухание было постоянным по всей протяженности. Мы не можем выбрать истинный вариант, имея всего одно измерение.

Но как только мы осознаем эту трудность, тут же понимаем, как с ней справиться. Нужно испускать лучи по *множеству* разных направлений. В этом суть компьютерной томографии. Пропуская рентгеновские лучи через одну точку в разных направлениях и повторяя этот процесс для различных точек, мы в принципе можем определить коэффициенты ослабления интенсивности в любой точке мозга. Это не совсем то же самое, что *смотреть* на мозг, но почти настолько же эффективно, поскольку предоставляет информацию о том, какие типы ткани расположены в тех или иных областях мозга.

Таким образом, математическая задача — собрать информацию от всех измерений по всем прямым в единую связную двумерную картину на определенном срезе мозга. Именно здесь на помощь пришел анализ Фурье. Он позволил южноафриканскому физика Аллану Кормаку решить проблему такой обратной сборки [9]. Кормак обратился к анализу Фурье, поскольку за этой задачей скрывается окружность — окружность всех направлений, по которым рентгеновские лучи можно запускать в двумерный срез.

Вспомните, что окружности всегда связаны с синусоидами, а синусоиды — строительные блоки для рядов Фурье. Записав задачу обратной сборки в терминах рядов Фурье, Кормак смог свести двумерную задачу обратной сборки к более простой одномерной задаче. По сути, он избавился от 360° возможных углов. Затем, проявив недюжинное математическое мастерство, он сумел решить одномерную задачу обратной сборки. В итоге по измерениям, сделанным по всем возможным направлениям, он смог определять свойства тканей внутри. Он построил карту поглощений, а это почти то же, что и увидеть сам мозг.

В 1979 году Кормак разделил с Годфри Хаунсфилдом Нобелевскую премию по физиологии и медицине за разработку компьютерной томографии. Ни тот ни другой не были врачами. Кормак разрабатывал математическую теорию томографии на основе анализа Фурье с конца 1950-х годов. Хаунсфилд, британский инженер-электрик, в сотрудничестве с рентгенологами изобрел сканер в начале 1970-х.

Изобретение сканера-томографа — еще одно подтверждение необъяснимой эффективности математики. В этом случае идеи, которые позволили воплотить в жизнь КТ-сканирование, существовали уже более полувека и не имели никакого отношения к медицине.

Следующая часть истории началась в конце 1960-х. Хаунсфилд уже испытал прототип своего изобретения на мозге свиней и отчаянно пытался найти врача-рентгенолога, который помог бы ему работать с людьми, но доктора отказывались с ним встречаться. Все считали его ненормальным, зная, что рентгеновские лучи не показывают мягкие ткани. Например, обычный рентгеновский снимок головы показывал череп, но при этом мозг выглядел как невыразительное облако: опухоли, кровоизлияния и тромбы были не видны. Однако Хаунсфилд утверждал обратное.

Наконец один рентгенолог согласился его выслушать. Разговор не удался. В конце беседы скептически настроенный врач вручил Хаунсфилду банку с человеческим мозгом, пораженным опухолью, и предложил найти эту опухоль с помощью сканера. Как же он был ошеломлен, когда Хаунсфилд вскоре предоставил ему изображения мозга, где отображались не только опухоль, но и места кровотечения.

Слухи о томографе распространились, что привлекло к исследованиям других специалистов. Когда в 1972 году Хаунсфилд опубликовал свои результаты, они потрясли медицинский мир. Рентгенологи внезапно смогли применять рентгеновские лучи, чтобы видеть опухоли, кисты, серое вещество, белое вещество и заполненные жидкостями полости в мозге.

Когда-то волновая теория и анализ Фурье начинались с исследования музыки. По иронии судьбы в ключевой момент развития компьютерной томографии музыка снова оказала неоценимую помощь. Революционные идеи пришли к Хаунсфилду, когда он в середине 1960-х работал в компании Electric and Musical Industries. Сначала он занимался радаром и управляемым оружием, а затем обратился к разработке первого в Британии компьютера, целиком построенного

на транзисторах. После таких ошеломляющих успехов ЕМІ решила поддержать Хаунсфилда и предоставить ему для следующего проекта все, что ему потребуется. В тот момент ЕМІ купалась в деньгах и могла себе позволить рисковать. Прибыли компании удвоились после того, как она подписала контракт с группой из Ливерпуля под названием Beatles [10].

Хаунсфилд обратился к руководству с идеей визуализации внутренних органов с помощью рентгеновских лучей, и глубокие карманы ЕМІ позволили ему сделать первый шаг. Он придумал собственный подход к решению математической задачи обратной сборки, не зная, что Кормак уже решил ее десять лет назад. А Кормак, в свою очередь, не знал, что австрийский математик Иоганн Радон решил ее на сорок лет раньше как чисто математическую проблему, не предполагая практического применения. Математические инструменты, необходимые для компьютерной томографии, на полвека опередили свое время.

В своей Нобелевской речи Кормак упомянул, что он и его коллега Тодд Квинто позднее познакомились с результатами Радона и пытались обобщить их на трехмерные и даже четырехмерные области. Должно быть, аудитории было трудно это понять. Зачем кому-то изучать четырехмерный мозг? Кормак объяснял [11]:

Какая польза от этих результатов? Я не знаю ответа. Они почти наверняка дадут какие-то теоремы в теории дифференциальных уравнений в частных производных, и некоторые из них могут найти применение в МРТ или ультразвуковом сканировании, однако это вовсе не обязательно. Да и несущественно. Мы с Квинто изучаем эти темы, поскольку они интересны сами по себе как математические проблемы, и в этом вся суть науки.

Будущее анализа

Название этой главы может вызвать недоумение у тех, кто считает анализ законченным. Какое у него может быть будущее? Он же закончен, разве нет? Именно это на удивление часто можно услышать в математических кругах. В нынешней интерпретации анализ начался взрывом благодаря прорыву Ньютона и Лейбница. Их открытия привели к золотой лихорадке 1700-х, когда озорные, почти головокружительные исследования позволяли разгуляться голему бесконечности. Предоставив ему полную свободу действий, математики получили множество впечатляющих результатов, но также породили массу бессмыслицы и сумятицы. Поэтому в 1800-х следующие поколения математиков, более строго относившиеся к своей работе, снова загнали голема в клетку. Они убрали из анализа бесконечность и бесконечно малые величины, укрепили фундамент предмета и окончательно прояснили, что на самом деле означают пределы, производные, интегралы и действительные числа. Примерно к 1900 году операции по зачистке были закончены.

На мой взгляд, такое представление об анализе слишком однобоко. Ведь анализ — это не только работы Ньютона, Лейбница и их последователей. Его история началась намного раньше и развивается до сих пор. Для меня анализ определяется его кредо: чтобы решить сложную задачу о чем-то непрерывном, разрежьте ее на бесконечно много частей, решите их и, собрав затем ответы воедино, сможете понять смысл исходного целого. Я назвал это кредо принципом бесконечности.

Принцип бесконечности существовал с самого начала: в работах Архимеда с криволинейными формами; во время научной революции; в ньютоновской системе мира; есть он и сейчас — в наших домах, наших автомобилях и наших офисах. Он помог нам разработать GPS, мобильные телефоны, лазеры и микроволновые печи. ФБР использовало его для сжатия миллионов файлов отпечатков пальцев. Аллан Кормак применил для создания теории КТ-сканирования. И ФБР, и Кормак решали сложную задачу, собрав ее из более простых частей: вейвлеты для отпечатков пальцев, синусоиды для компьютерной томографии. С этой точки зрения анализ — это обширная коллекция идей и методов, используемых для изучения чего угодно: любой закономерности, любой кривой, любого движения, любого природного процесса, системы или явления, которые меняются плавно и непрерывно, а потому могут стать основой для принципа бесконечности. Это широкое определение выходит далеко за рамки анализа Ньютона и Лейбница и включает его потомков: анализ функций нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, анализ Фурье, теорию функций комплексной переменной и многие другие разделы высшей математики, где появляются пределы, производные и интегралы. С этой точки зрения анализ не завершен. Он по-прежнему развивается.

Но здесь я в меньшинстве. Фактически я его и составляю. Никто из моих коллег по математическому факультету не согласится с тем, что все это анализ, и не без оснований: это было бы абсурдно. Иначе половину курсов в учебной программе пришлось бы переименовать. Наряду с Анализом 1, 2 и 3, у нас был бы Анализ с 4 по 38*. Прямо скажем, не очень наглядно. Поэтому

* Преподавание в американских университетах строится не так, как у нас. В частности, математический анализ делится на отдельные курсы, и типичное разбиение таково: Calculus 1 (пределы, производная, введение в интегрирование), Calculus 2 (интегралы и ряды), Calculus 3 (анализ функций многих переменных). Иногда встречается и Calculus 4, куда в зависимости от учебного заведения могут попадать дифференциальные уравнения, векторный анализ, кратные интегралы и так далее. *Прим. пер.*

мы даем собственные названия каждой ветви анализа и затемняем непрерывную связь между ними. Мы разрезаем анализ на мелкие потребляемые части. Какая ирония, учитывая, что и сам анализ делит непрерывные вещи на части, чтобы облегчить их понимание. Позвольте уточнить: я не возражаю против разных названий курсов. Я всего лишь хочу сказать, что такая нарезка может ввести в заблуждение и заставить нас забыть, что все эти части взаимосвязаны и составляют нечто большее. Цель этой книги — показать анализ как единое целое, помочь ощутить его красоту, единство и величие.

Так что же ожидает анализ в будущем? Как говорится, предсказывать всегда трудно, особенно будущее*, но я с уверенностью могу предположить, что в ближайшие годы будут преобладать следующие тенденции:

1. Новые приложения анализа к общественным наукам, музыке, искусству и гуманитарным дисциплинам.
2. Продолжение использования анализа в медицине и биологии.
3. Преодоление случайностей, присущих финансам, экономике и погоде.
4. Анализ на службе больших данных и наоборот.
5. Постоянная работа с нелинейностью, хаосом и сложными системами.
6. Развитие партнерства между анализом и компьютерами, включая искусственный интеллект.
7. Расширение границ анализа в квантовой области.

* Эту фразу приписывают самым разным людям — от Марка Твена до Нильса Бора.
Прим. пер.

Это очень широкий охват. И, вместо того чтобы говорить понемногу о каждой из упомянутых тем, я сосредоточусь на некоторых из них. После краткого знакомства с дифференциальной геометрией ДНК, где тайна кривых встречается с тайной жизни, мы рассмотрим ряд исследований, которые, я надеюсь, вы сочтете представляющими интерес с философской точки зрения. К ним относятся проблемы прогнозов, связанные с увеличением хаоса, теорией сложности, компьютерами и искусственным интеллектом. Однако для того, чтобы все это обрело смысл, нам нужно рассмотреть основы нелинейной динамики. Изучение такого контекста позволит лучше понять стоящие перед нами задачи.

Индекс сверхспирализации ДНК

Анализ традиционно применялся в «точных» науках — физике, астрономии и химии. Но в последние десятилетия проник в биологию и медицину — в такие области, как эпидемиология, популяционная биология, нейробиология и диагностическая визуализация. На протяжении всего нашего рассказа мы сталкивались с примерами математической биологии, начиная от использования анализа для прогнозирования результатов лицевой пластики до моделирования борьбы ВИЧ с иммунной системой. Однако все они были связаны с какими-либо аспектами загадки изменения, самой современной навязчивой идеи анализа. Следующий же пример взят из старой загадки кривых, которая обрела новую жизнь в трехмерной структуре ДНК.

Загадка связана с тем, как молекула ДНК, аномально длинная и содержащая всю генетическую информацию о человеке, упакована в клетках. Каждая из примерно 10 триллионов клеток нашего организма содержит около двух метров ДНК. Если уложить эти молекулы последовательно друг за другом, то они дойдут до Солнца и обратно

несколько десятков раз. Скептик может возразить, что на деле это сравнение вовсе не так впечатляюще, как звучит: оно просто отражает огромное количество клеток в нашем организме. Более информативное сравнение — с размером клеточного ядра, контейнера, содержащего ДНК. Диаметр типичного ядра — около пяти миллионных метра, то есть оно в 400 тысяч раз меньше, чем ДНК, которая должна туда помещаться. Такой коэффициент сжатия эквивалентен тому, как если бы мы в теннисный мячик пытались впихнуть 30-километровую веревку. К тому же ДНК нельзя набивать в ядро случайным образом. Молекула не должна запутываться. Упаковывать надо упорядоченно, чтобы ферменты могли ее читать и переводить в белки, необходимые для функционирования клетки. Упорядоченная упаковка также важна для того, чтобы ДНК можно было аккуратно копировать, когда клетка готова делиться.

Эволюция решила проблему упаковки с помощью катушек — то же самое решение мы используем при хранении длинного куска нитки. ДНК в клетках намотана на «молекулярные катушки», состоящие из особых белков, именуемых гистонами. Чтобы добиться дальнейшей компактности, эти катушки соединяются встык, как бусины на ожерелье, а затем ожерелье сворачивается в шнуровидные волокна, которые сами скручиваются в хромосомы. Эти витки витков уплотняют ДНК настолько, что она помещается в тесную квартирку ядра.

Однако катушки не были исходным решением проблемы упаковки, предложенным природой. Самые ранние существа на Земле были одноклеточными организмами, лишенными ядер и хромосом. У них не было катушек, как их нет у современных бактерий и вирусов. В таких случаях генетический материал уплотняется с помощью механизма, основанного на геометрии и упругости. Представьте, что вы туго натянули резиновую ленту, а затем закручиваете ее с одного конца, удерживая пальцами. Сначала при каждом последовательном повороте резиновая лента дает оборот вокруг оси. Эти обороты

копятся, но резиновая лента остается прямой до тех пор, пока такое скручивание не достигнет некоего порога. Здесь резинка внезапно переходит в третье измерение и начинается извиваться, словно корчась от боли. Такое скручивание приводит к скомкиванию и компактификации ленты. То же самое делает и ДНК.

Это явление известно как сверхспирализация. Оно часто встречается в циклах ДНК. Хотя мы склонны представлять ДНК в виде вытянутой молекулы с двумя свободными концами, во многих случаях она замыкается, образуя кольцо. Это похоже на то, как если бы вы взяли ремень, перекрутили один его конец на несколько оборотов, а потом застегнули пряжку. После этого число оборотов у ремня не изменить. Оно фиксировано. Если вы станете где-нибудь перекручивать ремень, то в другом месте появятся встречные перекручивания, чтобы компенсировать ваши. Здесь работает закон сохранения. То же самое происходит, когда вы храните садовый шлаг уложенным на полу кольцами друг на друга. При попытке вытянуть шланг в прямую он начнет скручиваться у вас в руках — кольца преобразуются в скручивания. Преобразование может также идти в другом направлении, от скручиваний к кольцам, как с резиновой лентой, которая после ряда скручиваний начинает изгибаться в пространстве. ДНК примитивных организмов использует такое изгибание. Определенные ферменты могут разрезать ДНК, скручивать ее, а затем снова склеивать. Когда молекула ДНК для минимизации энергии ослабляет скручивание, закон сохранения приводит к сверхспирализации молекулы — в итоге она становится более компактной. Получающаяся линия молекулы ДНК больше не лежит в одной плоскости, а изгибается в трех измерениях.

В начале 1970-х американский математик Брок Фуллер дал первое математическое описание трехмерного искажения ДНК. Он предложил величину, которую назвал *индексом сверхспирализации* ДНК [1], и вывел для нее формулы, используя производные и интегралы, а также доказал ряд теорем об этой величине, которые

формализовали закон сохранения для скручиваний и колец спирали. С тех пор изучение геометрии и топологии ДНК [2] — процветающая область науки. С помощью теории узлов математики [3] выяснили механизмы определенных ферментов, которые могут скручивать ДНК, разрезать ее, вносить в нее узлы или связи. Такие ферменты изменяют топологию ДНК и поэтому называются топоизомеразы. Они могут разорвать нити ДНК и снова восстановить их и важны для деления и роста клеток. Они оказались эффективными мишенями для химиотерапевтических препаратов против рака [4]. Механизм действия не вполне ясен, но считается, что такие препараты (ингибиторы топоизомеразы), блокируя действие топоизомеразы, могут селективно повреждать ДНК раковых клеток, что заставляет их совершать самоубийство. Хорошие новости для пациента, плохие — для опухоли.

При применении анализа к сверхспиральной ДНК двойная спираль молекулы считается непрерывной кривой. Как обычно, анализ работает с непрерывными объектами. В реальности это только модель: ДНК — дискретный набор атомов и в ней нет ничего непрерывного. Однако при хорошем приближении ее можно рассматривать как непрерывную кривую, как идеальную резиновую ленту. Преимущество такого подхода — возможность применять аппарат теории упругости и дифференциальной геометрии, двух отпочковавшихся ветвей анализа, чтобы вычислять, как ДНК деформируется под воздействием сил со стороны белков, окружающей среды и при взаимодействии с собой.

Более важный момент заключается в том, что анализ, как обычно, проявляет творческий подход, обращаясь с дискретными объектами как с непрерывными, чтобы пролить свет на их поведение. Такое моделирование приближенное, но весьма полезное. В любом случае это единственный возможный вариант. Без предположения о непрерывности нельзя применить принцип бесконечности. А без него нет ни анализа, ни дифференциальной геометрии, ни теории упругости.

Я ожидаю, что в будущем мы увидим еще больше примеров непрерывного применения анализа и математики к принципиально дискретным биологическим объектам: генам, клеткам, белкам и прочим актерам на биологической сцене. Слишком много можно получить от приближения континуумом, чтобы отказаться им пользоваться. Пока мы не разработаем новую форму анализа, которая будет работать для дискретных систем так же хорошо, как традиционный анализ для континуумов, при математическом моделировании жизни нас по-прежнему будет направлять принцип бесконечности.

Детерминизм и его пределы

Наши следующие две темы — развитие нелинейной динамики и влияние компьютеров на анализ. Я выбрал их потому, что они весьма интригующи с философской точки зрения, поскольку могут навсегда изменить природу прогнозирования и привести к новой эпохе в анализе — и в науке в целом, — где человеческая проницательность может начать угасать, хотя наука сама по себе все еще будет развиваться. Чтобы прояснить, что я имею в виду под этим несколько апокалиптическим предупреждением, нам нужно понять, как вообще возможно предсказание, что оно означало классически и как наши классические представления пересматриваются в связи с открытиями, сделанными за последние десятилетия в нелинейных системах, хаосе и сложных системах.

В начале 1800-х французский математик и астроном Пьер-Симон Лаплас [5] довел детерминизм ньютоновской вселенной в виде часового механизма до логического завершения. Он представил богоподобный интеллект (сегодня именуемый демоном Лапласа), который мог бы отследить положение всех атомов во Вселенной и всех действующих на них сил. Он писал: «Будь такой разум также

достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу... для него ничего не было бы неясного, и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое»* [6].

По мере приближения к XX веку такая экстремальная формулировка определения Вселенной как часового механизма стала казаться с научной и философской точек зрения несостоятельной сразу по нескольким различным причинам. Одна из причин была обусловлена анализом, и мы должны благодарить за это Софью Ковалевскую [7]. Ковалевская родилась в 1850 году и выросла в аристократической семье в Москве. Когда ей было одиннадцать лет, она обнаружила, что буквально окружена анализом, поскольку стена ее спальни была оклеена листами из курса лекций, которые ее отец посещал в юности. Позднее она писала, что «в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаюсь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны следовать друг за другом»**. Она стала первой в истории женщиной — профессором математики.

Хотя Ковалевская рано проявила склонность к математике, российские законы не позволяли ей поступить в университет. Она вступила в фиктивный брак, который причинил ей много страданий в последующем, но, по крайней мере, позволил выехать в Германию***, где она поразила своим талантом нескольких профессоров. Однако даже там Ковалевской официально не разрешали посещать занятия. Она договорилась о частных уроках с Карлом Вейерштрассом и по его рекомендации была удостоена докторской степени за решение нескольких важных задач в анализе, динамике и уравнениях в частных производных. В конце концов она стала профессором

* Лаплас П.-С. Опыт философии теории вероятностей. *Прим. пер.*

** Ковалевская С. Воспоминания детства. *Прим. пер.*

*** Чтобы получить загранпаспорт, требовалось разрешение родителей или мужа. Отец, генерал-лейтенант Василий Васильевич Корвин-Круковский, не желал, чтобы дочь продолжала обучение, и такое разрешение давать отказывался. Поэтому Софья вышла замуж за Владимира Ковалевского. Фиктивный брак впоследствии стал реальным, у пары родилась дочь. *Прим. пер.*

Стокгольмского университета и преподавала там восемь лет, однако в 41 год умерла от воспаления легких. В 2009 году лауреат Нобелевской премии Элис Манро опубликовала о ней рассказ под названием «Слишком много счастья».

Взгляды Ковалевской на границы детерминизма сформировались вследствие ее работ по динамике твердых тел. Твердое тело — это математическая абстракция объекта, который нельзя согнуть или деформировать; все его точки жестко соединены друг с другом. Примером может служить волчок. Это твердое тело, состоящее из бесконечного количества точек, а потому более сложный механический объект, чем одноточечные частицы, которые рассматривал Ньютон. Движение твердых тел важно для астрономии — так описываются самые разные явления, от хаотического кувыркания Гипериона [8], маленького спутника Сатурна, похожего на картофелину, до размеренного вращения капсулы космического корабля или спутника.

Изучая динамику твердых тел, Ковалевская получила два важных результата. Первый относился к вращению тела, движение которого можно проанализировать полностью, — так же как Ньютон решил задачу двух тел. Два случая разрешимости задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки были уже известны; Ковалевская нашла третий.

Еще важнее было доказательство, что других разрешимых случаев не существует: она нашла последний. Все остальные не поддаются интегрированию, то есть их динамику нельзя определить с помощью формул в духе Ньютона. И проблемы тут не в недостаточной искусности; Ковалевская доказала, что просто не может существовать формул определенного вида (на математическом языке — мероморфной функции времени), которые могли бы описать вращение тела. Таким образом, она ограничила возможности анализа. Если даже вращающийся волчок мог бросить вызов демону Лапласа, никакой надежды — даже в принципе — найти формулу судьбы Вселенной не было.

Нелинейность

Неразрешимость, обнаруженная Софьей Ковалевской, связана со структурой уравнений для вращающегося твердого тела: эти уравнения *нелинейны*. Здесь нас не интересует технический смысл *нелинейности*. Для наших целей достаточно ощутить разницу между линейными и нелинейными системами, а для этого рассмотрим несколько примеров из повседневной жизни.

Чтобы проиллюстрировать, на что похожи линейные системы, предположим, что на весах одновременно взвешиваются два человека — просто ради смеха. Их общая масса будет суммой отдельных масс. Причина в том, что весы — это линейное устройство. Массы людей не взаимодействуют друг с другом и не делают ничего невыристого, о чем нам следовало бы знать. Например, тела не сговариваются друг с другом, чтобы выглядеть легче, и не вредят друг другу, чтобы казаться тяжелее. Массы просто складываются. В линейной системе, подобной весам, целое равно сумме частей. Это первое ключевое свойство линейности. Второе свойство — причины пропорциональны следствиям. Представьте, что вы натягиваете тетиву лука. Чтобы оттянуть ее на определенное расстояние, требуется определенная сила, а чтобы расстояние увеличилось вдвое, нужно приложить вдвое больше силы. Причина и следствие пропорциональны. Эти два свойства — пропорциональность между причиной и следствием и равенство целого сумме частей — суть того, что значит быть линейным.

Однако многое в природе устроено гораздо сложнее. Когда части системы взаимодействуют, сотрудничают или конкурируют друг с другом, происходят нелинейные взаимодействия. Большая часть нашей повседневной жизни нелинейна: если вы одновременно станете слушать две любимые песни, то не получите двойного удовольствия. То же касается употребления алкоголя или лекарственных препаратов, где эффект взаимодействия может даже привести

к смерти. Напротив, сочетание арахисового масла и джема прекрасно. Они не просто складываются — они усиливают воздействие друг друга*.

Нелинейность отвечает за богатство мира, его красоту и сложность, а нередко и непостижимость. Например, вся биология нелинейна, как и социология. Вот почему гуманитарные науки сложны и математизируются в последнюю очередь.

То же различие между линейностью и нелинейностью относится и к дифференциальным уравнениям, но здесь ситуация менее интуитивно понятна. Единственное, что нужно сказать, — когда дифференциальные уравнения нелинейны, как в случае вращения твердого тела, исследованного Ковалевской, их крайне сложно решать. Со времен Ньютона математики по возможности избегали нелинейных дифференциальных уравнений. Они считаются противными и непокорными.

Напротив, линейные уравнения милы и покладисты. Математики любят их, поскольку они просты. Для их решения существует отлично развитая теория. Действительно, примерно до 1980-х годов традиционное образование в области прикладной математики было практически полностью посвящено изучению методов использования линейности. Годы уходили на освоение рядов Фурье и прочих методов, пригодных для решения линейных уравнений.

Большое преимущество линейности — возможность редукционистского мышления. Чтобы решить линейную задачу, мы можем разбить ее на простейшие части, решить каждую по отдельности и сложить вместе для получения общего ответа. Свое уравнение теплопередачи (которое было линейным) Фурье решил с помощью именно такой редукционистской стратегии. Он разложил сложное распределение температуры на синусоиды, выяснил, как будет

* Бутерброды с арахисовым маслом и джемом очень популярны в США. Существует даже неофициальный Национальный день арахисового масла и джема, отмечающийся в стране 2 апреля. *Прим. пер.*

меняться каждая синусоида по отдельности, а затем снова скомбинировал их, чтобы спрогнозировать, как будет меняться общая температура вдоль нагретого металлического стержня. Стратегия сработала, потому что уравнение теплопередачи линейно. Оно делится на части, не теряя своей сути.

Софья Ковалевская помогла нам осознать, насколько иным становится мир, когда мы сталкиваемся с нелинейностью. Она поняла, что нелинейность накладывает ограничения на человеческую гордыню. Когда система нелинейна, ее поведение порой невозможно предсказать с помощью формул, даже если оно полностью детерминировано. Иными словами, детерминизм не предполагает предсказуемости. Потребовалось движение волчка — детской игрушки, — чтобы сделать нас более смиренными в отношении того, что мы можем хотя бы надеяться узнать.

Хаос

В ретроспективе мы можем более ясно понять, почему у Ньютона болела голова, когда он пытался решить задачу трех тел. Такая задача неизбежно нелинейна — в отличие от задачи двух тел, которую можно сделать линейной. Нелинейность вызвана не переходом от двух тел к трем, а структурой самих уравнений. Для двух тел, притягивающих друг друга, нелинейность можно устранить с помощью удачной замены переменных в дифференциальных уравнениях. Для трех и большего количества тел это не получится.

Потребовалось много времени, чтобы полностью оценить уничтожающие последствия нелинейности. Математики веками ломали голову над задачей трех тел, но даже при наличии определенного прогресса никто не мог разобраться с нею до конца. В конце 1800-х годов французский математик Анри Пуанкаре полагал, что

решил ее, но в вычислениях закралась ошибка [9]. Когда он ее исправил, задача ему по-прежнему не поддавалась, зато он обнаружил нечто более важное — явление, которые мы сегодня называем *хаосом*.

Хаотические системы причудливы [10]. Маленькое изменение начальных условий может привести к огромным отличиям в конце. А все потому, что эти маленькие начальные изменения растут экспоненциально быстро. Любая крохотная ошибка или возмущение растут настолько быстро, что в долгосрочной перспективе система становится непредсказуемой. Хаотические системы не случайны — они детерминированы и потому предсказуемы в краткосрочном периоде. Но в долгосрочном из-за высокой чувствительности к начальным условиям во многих отношениях выглядят действительно случайными.

Хаотические системы можно неплохо прогнозировать до определенного момента, называемого горизонтом предсказуемости [11]. До него детерминизм системы обеспечивает прогнозируемость. Например, горизонт предсказуемости для всей Солнечной системы рассчитан примерно на четыре миллиона лет [12]. Для времени, намного меньшего, чем эта величина (например, для одного года, необходимого для вращения Земли вокруг Солнца), все работает, как часы. Но стоит нам продвинуться на несколько миллионов лет, как все резко меняется. Мелкие гравитационные возмущения между всеми телами Солнечной системы накапливаются до такой степени, что мы больше не можем точно прогнозировать ее поведение.

Существование горизонта предсказуемости вытекало из работы Пуанкаре. До него считалось, что ошибки будут расти во времени линейно, а не экспоненциально: если удвоить время, то удвоится и ошибка. При линейном росте ошибок для более длительного прогнозирования достаточно улучшить качество измерения. Но когда ошибки растут *экспоненциально* быстро, говорят, что система чувствительна к начальному состоянию. В этом случае долгосрочное прогнозирование становится невозможным. Это с философской точки зрения разочаровывающее послание хаоса.

Важно понять, что в этом нового. Люди всегда знали, что для больших сложных систем, таких как погода, трудно делать предсказания. Сюрпризом стало то, что столь же непредсказуемой оказалась система куда проще — вращающееся вокруг точки твердое тело или три притягивающихся тела. Это был шок и еще один удар по наивному лапласовскому смешиванию детерминизма и предсказуемости.

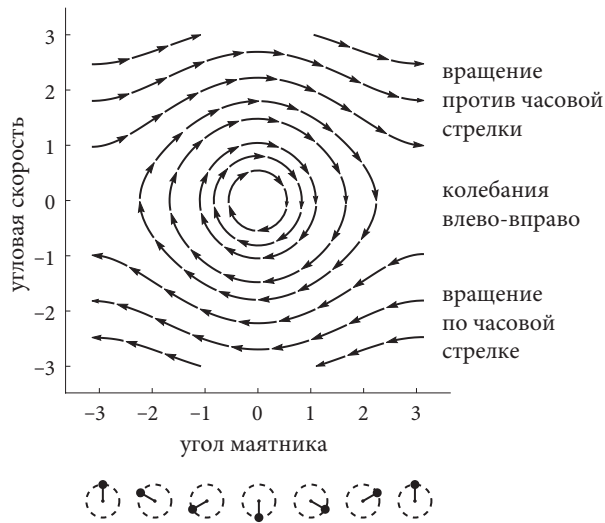
Если говорить о плюсах, то в хаотических системах благодаря их детерминистскому характеру сохраняются остатки порядка. Пуанкаре разработал новые методы анализа нелинейных систем, включая хаотические, и нашел способ извлечь из них скрытый порядок. Вместо формул и алгебры он использовал рисунки и геометрию. Его качественный подход помог посеять семена в таких областях, как топология и теория динамических систем. Благодаря его основополагающей работе теперь мы гораздо лучше понимаем порядок и хаос.

Наглядный подход Пуанкаре

Чтобы привести пример подхода Пуанкаре [13], рассмотрим колебания простого маятника — такого, как изучал Галилей. Используя закон движения Ньютона и учитывая силы, действующие на маятник при раскачивании, мы можем нарисовать абстрактную картинку, показывающую, как меняются угол и скорость маятника в любой момент времени. Эта картинка — по сути, перевод на визуальный язык того, что говорит закон Ньютона. В ней нет ничего нового по сравнению с содержанием дифференциального уравнения. Это просто еще один способ взглянуть на ту же самую информацию.

Рисунок выглядит как метеорологическая карта: на таких картах мы видим стрелки, показывающие локальное направление движения атмосферного фронта в данный момент. Это тот же тип информации, которую предоставляет дифференциальное уравнение.

Ту же информацию содержат инструкции по обучению танцам: поставьте левую ногу сюда, правую ногу туда и так далее. Такая карта называется схемой *векторного поля*. Маленькие стрелки на ней — это векторы, показывающие, как будут меняться угол и скорость маятника в следующий момент, если в данный момент они именно таковы. Изображение векторного поля для маятника выглядит примерно так:



Прежде чем анализировать эту картинку, четко усвойте: она абстрактна в том смысле, что не показывает реалистичный портрет маятника. Узор из поворачивающихся стрелок не похож на груз, подвешенный на веревке. Фотография маятника тоже так не выглядит. (Чтобы дать вам представление, что происходит, под диаграммой векторного поля размещены рисунки положений маятника.) Вместо реалистичного изображения маятника схема векторного поля дает абстрактную картину изменения его положения от одного момента к другому. Каждая точка на схеме представляет собой возможную комбинацию угла и скорости маятника в какой-то момент. Горизонтальная ось показывает угол отклонения маятника, вертикальная — его скорость. В любое мгновение знание этих двух чисел определяет

динамическое *состояние* маятника. Они предоставляют нам информацию, необходимую для предсказания угла и скорости маятника через мгновение, затем еще через мгновение и так далее. Все, что от нас требуется, — следовать за стрелками.

Круговое расположение стрелок около центра диаграммы соответствует простому колебательному движению маятника, когда он отклоняется от вертикального положения и возвращается в него. Волнообразная форма расположения стрелок вверх и вниз соответствует вращению маятника с прохождением верхней точки — подобно пропеллеру. Ни Ньютон, ни Галилей никогда не рассматривали такие вихревые движения; они находились за пределами того, что можно вычислить классическими методами. Однако на рисунке Пуанкаре они отчетливо видны. Такой качественный подход к дифференциальным уравнениям теперь постоянно используется во всех областях, где появляется нелинейная динамика, — от лазерной физики до нейробиологии.

Нелинейность идет на войну

Нелинейную динамику можно весьма успешно применять на практике. В умелых руках британских математиков Мэри Картрайт [14] и Джона Литтлвуда методы Пуанкаре помогли защитить Великобританию от нацистских налетов. В 1938 году Управление научных и промышленных исследований британского правительства обратилось в Лондонское математическое общество за помощью в решении проблемы, связанной со сверхсекретными разработками в области радиолокации. Инженеры, работавшие над проектом радара, были озадачены шумными беспорядочными колебаниями, которые наблюдались в усилителях, особенно при работе устройств с мощными высокочастотными радиоволнами. Они опасались каких-то неполадок с оборудованием.

Просьба правительства привлекла внимание Картрайт. Она уже изучала модели колебательных систем, подчиняющихся подобным «крайне неприятно выглядящим дифференциальным уравнениям» [15], как она описывала их позднее*. Они с Литтлвудом стали искать источник беспорядочных колебаний в электронике радара. Усилители были нелинейными и могли реагировать хаотично при слишком быстрых или сильных воздействиях.

Спустя десятилетия физик Фримен Дайсон вспоминал, как слушал лекцию Картрайт о ее работе в 1942 году. Он писал:

Вся разработка радаров во время Второй мировой войны зависела от мощных усилителей, и добиться того, чтобы они делали то, что им положено делать, было вопросом жизни и смерти. Солдаты допекали плохо работающими усилителями и винили производителей в их хаотическом поведении. Картрайт и Литтлвуд обнаружили, что производители не виноваты. Виновато было само уравнение [16].

Идеи Картрайт и Литтлвуда позволили государственным инженерам обойти проблему, управляя усилителями в режимах, где они вели себя более предсказуемо. Картрайт очень скромно оценивала свой вклад. Когда она прочитала, что Дайсон написал о ее работе, она отругала его за то, что он придал ей слишком большое значение.

Дама** Мэри Картрайт скончалась в 1998 году в возрасте 97 лет. Она стала первой женщиной-математиком, избранной в Лондонское королевское общество. Она оставила строгие указания, чтобы на поминальной службе не произносили хвалебных речей.

* Строго говоря, когда правительство обратилось за помощью к математикам, Картрайт была незнакома с динамикой, поэтому обратилась за помощью к Литтлвуду, который уже работал в этой области во время Первой мировой войны. *Прим. пер.*

** В 1969 году Картрайт получила звание Дамы-Командора Ордена Британской империи. *Прим. пер.*

Альянс между анализом и компьютерами

Необходимость решать дифференциальные уравнения во время войны подстегнула развитие вычислительной техники. Механические и электронные мозги, как их в те дни иногда называли, можно было применять для вычисления траекторий ракет и артиллерийских снарядов при реалистичных условиях — с учетом сопротивления воздуха и направления ветра. Эта информация требовалась артиллеристам для поражения целей: все необходимые баллистические расчеты производились заранее и сводились в стандартные таблицы и диаграммы. Для такой задачи нужны были машины с высокой производительностью. При математическом моделировании компьютеры могли продвигать идеализированный снаряд по траектории его полета — один маленький шаг за другим, используя подходящее дифференциальное уравнение для определения нового положения и скорости снаряда. Объединяя все эти маленькие приращения, компьютер получал решение. Только машина могла выполнять все необходимые сложения и умножения — правильно, быстро и без усталости.

Наследие анализа очевидно в названиях некоторых ранних компьютеров*. Одним из них было механическое устройство под названием дифференциальный анализатор. Его задача заключалась в решении дифференциальных уравнений, необходимых для составления артиллерийских таблиц. Другая машина называлась ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer — Электронный числовой интегратор и вычислитель). Здесь слово «интегратор» использовалось в математическом смысле и относилось к взятию интегралов или интегрированию дифференциальных уравнений. Полностью готовый в 1945 году, ЭНИАК стал одним из первых перепрограммируемых компьютеров общего назначения. Наряду

* В те годы было более распространено название ЭВМ — электронно-вычислительная машина. *Прим. ред.*

с составлением таблиц стрельбы он также оценивал техническую осуществимость водородной бомбы.

Хотя развитие компьютеров стимулировало военное применение анализа и нелинейной динамики, и эти машины, и разработанная теория нашли себе сферы приложения и в мирное время. В 1950-е годы ученые начали использовать их для решения задач, возникающих в их собственных дисциплинах, а не только в физике. Например, британские биологи Алан Ходжкин и Эндрю Хаксли [17] с помощью компьютера пытались понять, как нервные клетки общаются друг с другом и как электрические сигналы проходят по нервным волокнам. Они провели кропотливые эксперименты по расчету потока ионов калия и натрия через мембрану очень большого и удобного для экспериментирования нервного волокна — гигантского аксона кальмара* и в результате эмпирически выяснили, как эти потоки зависят от напряжения на мембране и как это напряжение изменяется при движении ионов. Но чего они не могли вычислить без компьютера, так это скорость и форму нервного импульса, проходящего по аксону. Для определения его движения требовалось решить нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для напряжения как функции от времени и пространства. Эндрю Хаксли решил его за три недели с помощью ручного механического калькулятора.

В 1963 году Ходжкин и Хаксли получили Нобелевскую премию за открытие ионной основы работы нервных клеток. Их подход вдохновил всех, кто интересовался применением математики к биологии. Она определенно выглядела перспективной областью для использования анализа. Математическая биология [18] — место, где есть простор для нелинейных дифференциальных уравнений. Опираясь на ньютоновские аналитические методы, геометрические методы в стиле Пуанкаре и максимально задействуя потенциал

* Аксон — длинный отросток нервной клетки, по которому идут нервные импульсы. Диаметр аксона составляет несколько микронов, однако у некоторых беспозвоночных они намного толще. В частности, у кальмаров они могут достигать миллиметра и более, почему и используются для физиологических исследований. *Прим. пер.*

компьютеров, специалисты по математической биологии выводят и добиваются прогресса в решении дифференциальных уравнений, описывающих сердечные ритмы, распространение эпидемий, работу иммунной системы, взаимодействие генов, развитие рака и многие другие загадки жизни. Ничего этого мы бы не сделали без анализа.

Сложные системы и проклятие высокой размерности

Самое серьезное ограничение подхода Пуанкаре связано с человеческим мозгом, который не может представить себе пространства из более чем трех измерений. Естественный отбор настроил нашу нервную систему на восприятие трех измерений обычного пространства — вверх-вниз, влево-вправо, вперед-назад. Как бы мы ни старались, мы не можем изобразить четвертое измерение (я не имею в виду — мысленным взглядом). Однако с помощью символов мы можем попробовать работать с любым числом измерений: Ферма и Декарт показали нам, как это делать. Их координатная плоскость научила нас связывать числа и размерность пространства. Направление влево-вправо соответствовало числу x , вверх-вниз — числу y . Добавив новые числа, мы получим новые измерения. Для трех измерений достаточно x , y и z . Почему бы не взять четыре измерения или пять? Ведь букв еще много.

Возможно, вы слышали, что время — это четвертое измерение. Действительно, в специальной и общей теории относительности Эйнштейна пространство и время слиты в единую сущность, пространство-время, и представлены на четырехмерной математической арене. Грубо говоря, обычное пространство соответствует первым трем осям, а время — четвертой. Эту конструкцию можно рассматривать как обобщение двумерной координатной плоскости Ферма и Декарта.

Но сейчас мы говорим не о пространстве-времени. Ограничение, присущее подходу Пуанкаре, касается гораздо более абстрактной сферы. Это обобщение абстрактного *пространства состояний*, с которым мы познакомились, когда рассматривали векторное поле для

маятника. Тогда мы построили абстрактное пространство с одной осью для угла маятника и с другой — для его скорости. В каждое мгновение угол и скорость качающегося маятника имели конкретные значения, а значит, в тот момент они соответствовали какой-то определенной точке на плоскости для угла и скорости. Стрелки на этой плоскости (похожие на инструкции для танцоров) показывали, как это состояние меняется от момента к моменту — в соответствии с дифференциальным уравнением Ньютона для маятника. Следуя этим стрелкам, мы могли предсказать, как будет двигаться маятник. В зависимости от того, где началось движение, он мог колебаться влево-вправо или вообще вращаться. И вся эта информация содержалась в картинке.

Здесь важно понять, что пространство состояний маятника имеет *два* измерения, поскольку *двух* переменных — угла и скорости — достаточно для предсказания будущего поведения маятника. Они дают ровно ту информацию, в которой мы нуждались для прогнозирования угла и скорости в следующий момент, затем в следующий и так далее. В этом смысле маятник по своей сути — двумерная система. Его пространство состояний имеет два измерения.

Проклятие высокой размерности проявляется при столкновении с системами сложнее маятника. Возьмем, к примеру, задачу, от которой у Ньютона болела голова, — задачу трех тел. Пространство ее состояний имеет восемнадцать измерений. Чтобы понять, почему, посмотрим на одно из тел. В любой момент оно находится в какой-то точке трехмерного пространства, а потому его положение можно установить с помощью трех чисел x , y и z . Оно также может двигаться, и для определения его скорости нам нужно знать еще три числа — проекции его скорости на все три оси. Следовательно, для одного тела требуется *шесть* чисел: три пространственные координаты и три числа для его скорости. Положение и скорость тела определяются точкой в шестимерном пространстве. Поскольку тел три, то получается, что в пространстве состояний для трех тел должно быть

$6 \times 3 = 18$ измерений. Таким образом, при подходе Пуанкаре изменяющееся состояние системы с тремя взаимодействующими телами представляется одной точкой, движущейся в восемнадцатимерном пространстве. Со временем эта абстрактная точка вычерчивает траекторию, подобную траектории кометы или артиллерийского снаряда, за исключением того, что это происходит не в трех измерениях, а на фантастической арене Пуанкаре — в восемнадцатимерном пространстве задачи трех тел.

Когда мы применяем нелинейную динамику к биологии, нам часто приходится представлять пространства еще более высокой размерности. Например, в нейробиологии мы должны отслеживать все меняющиеся концентрации ионов калия, натрия, кальция, хлора и прочих, участвующих в уравнениях Ходжкина и Хаксли для мембраны. Современные версии этих уравнений могут включать сотни переменных, представляющих изменяющиеся концентрации ионов в нервной клетке, изменяющееся напряжение на клеточной мембране, а также изменяющуюся способность мембраны пропускать различные ионы и позволять им попадать в клетку или выходить из нее. Абстрактное пространство состояний в этом случае имеет сотни измерений, по одному для каждой переменной: одно для концентрации калия, второе для концентрации натрия, третье для напряжения, четвертое для проводимости натрия, пятое для проводимости калия и так далее. В любой конкретный момент все эти переменные принимают определенные значения. Уравнения Ходжкина — Хаксли (или их обобщения) дают этим переменным инструкции по перемещению, указывающие, как им двигаться дальше по их траекториям. Таким образом, динамику нервных клеток, клеток мозга или сердца можно прогнозировать, причем иногда с удивительной точностью, с помощью компьютеров, вычисляющих эти траектории в пространстве состояний. Плоды такого подхода используются при изучении нервных патологий и сердечных аритмий, а также для разработки улучшенных дефибрилляторов.

Сегодня математики регулярно имеют дело с абстрактными пространствами, обладающими произвольным количеством измерений. Мы говорим об n -мерном пространстве и разработали геометрию и анализ для произвольного числа измерений. Как мы видели в главе 10, Аллан Кормак, создатель теоретического обоснования КТ-сканирования, заинтересовался, как компьютерная томография будет работать в четырех измерениях, исключительно из научного любопытства, которое нередко приводит к великим открытиям. Когда Эйнштейну понадобилась четырехмерная геометрия для искривленного пространства-времени в общей теории относительности, он был рад узнать, что она уже существует благодаря Бернхарду Риману, который создал ее десятилетиями ранее по соображениям чистой математики.

Так что о любопытстве в математике можно говорить долго. Часто оно приводит к научным и практическим результатам, предвидеть которые невозможно. Оно также доставляет ученым удовольствие само по себе и выявляет скрытые связи между различными частями математики. По всем этим причинам последние двести лет ученые активно занимались изучением многомерных пространств.

Однако даже при наличии какой-то абстрактной системы для работы в многомерных пространствах визуализировать их трудно. А если уж до конца быть честным, то невозможно. Наш мозг к этому не приспособлен. Мы так не устроены.

Это когнитивное ограничение наносит серьезный удар по программе Пуанкаре, по крайней мере для размерности выше трех. Его подход к нелинейной динамике зависит от визуальной интуиции. Если мы не можем вообразить, что произойдет в случае четырех, восемнадцати или ста измерений, его подход нам особо не поможет. Это стало большой помехой для прогресса в области сложных систем, где как раз и нужны многомерные пространства, чтобы разобраться в тысячах биохимических реакций, происходящих в здоровой клетке, или объяснить, как гибнут клетки, пораженные раком. Если мы хотим

научиться объяснять клеточную биологию с помощью дифференциальных уравнений, нужно научиться решать их в виде формул (но Софья Ковалевская продемонстрировала, что мы этого не можем) или представлять наглядно (что не позволяет наш ограниченный мозг).

Вот почему математика сложных нелинейных систем обескураживает. Кажется, что всегда будет трудно, а может, и вообще невозможно добиться прогресса в решении наиболее сложных проблем нашего времени — от поведения экономик, общества и клеток до работы иммунной системы, генов, мозга и сознания.

Еще одна трудность состоит в том, что мы даже не знаем, скрывают ли эти системы какие-либо закономерности, подобные тем, что были открыты Кеплером и Галилеем. Для нервных клеток это, очевидно, верно, а как насчет экономики или общества? Во многих областях, где мы не обнаружили закономерностей, человеческое знание находится все еще на догалилеевском, докеплеровском уровне. Тогда как мы можем строить более глубокие теории, которые позволили бы понять эти закономерности? Биология, психология и экономика еще не ньютоновские, потому что они пока даже не галилеевские и не кеплеровские. Нам предстоит еще долгий путь.

Компьютеры, искусственный интеллект и тайна понимания

В этот момент с требованием их услышать в дискуссию вступают сторонники компьютеров. Они утверждают, что с помощью компьютеров и искусственного интеллекта все эти проблемы исчезнут. И вполне могут оказаться правы. Компьютеры уже давно помогают нам в решении дифференциальных уравнений, исследовании нелинейной динамики и сложных систем. Когда Ходжкин и Хаксли прокладывали путь к пониманию работы нервных клеток, они решали уравнения в частных производных на ручном механическом калькуляторе. Когда инженеры компании Boeing проектировали в 2011 году Boeing 787 Dreamliner, они для расчета подъемной силы

и лобового сопротивления самолета, а также выяснения способов предотвращения флаттера крыльев применяли суперкомпьютеры.

Изначально компьютеры были просто вычислительными машинами, о чем говорит их название*, но сейчас они нечто гораздо большее. Они достигли уровня искусственного интеллекта. Например, Google Translate сегодня на удивление хорошо справляется с идиоматическим переводом, а некоторые медицинские системы искусственного интеллекта диагностируют болезни точнее лучших врачей.

Тем не менее я не поверю, если кто-то скажет, что Google Translate понимает тонкости языков или что медицинские системы ИИ разбираются в болезнях. Могут ли компьютеры быть столь проникательными? Если да, то могут ли они поделиться с нами своим пониманием тех вещей, которые нас действительно волнуют, таких как сложные системы [19], которые находятся в центре большинства нерешенных проблем в науке?

Чтобы проанализировать аргументы за и против вероятности компьютерного понимания, рассмотрим развитие компьютерных шахмат [20]. В 1997 году программа Deep Blue, созданная IBM, сумела обыграть чемпиона мира Гарри Каспарова в матче из шести партий. Хотя в тот момент эта победа стало неожиданностью, большой загадки в ней не было. Машина могла оценивать двести миллионов позиций в секунду. У нее не было понимания, но была скорость, она никогда не уставала, никогда не ошибалась и не забывала, о чем думала минуту назад. Она играла как компьютер, механически и на материальном расчете. Компьютер мог пересчитать Каспарова, но не мог его передумать. Нынешнее поколение сильнейших шахматных программ — Stockfish или Komodo — все еще играют в том же бесчеловечном стиле. Они любят выигрывать фигуры и строят железную защиту. Но хотя они намного сильнее любого игрока-человека, у них нет творческих способностей и понимания.

* Английское слово computer произведено от глагола compute — вычислять. *Прим. пер.*

Все изменилось с появлением машинного обучения. Компания DeepMind, принадлежащая Google, 5 декабря 2017 года вывела на арену программу AlphaZero, использующую методы глубокого обучения, которая ошеломила шахматный мир. Программа научилась играть в шахматы, играя против самой себя и извлекая уроки из ошибок. За считанные часы она стала лучшим шахматистом в истории. Она не только могла бы легко победить лучших гроссмейстеров мира (им даже не стоило пытаться), но и сокрушила действующего чемпиона мира среди программ. В матче из ста партий против реально грозной программы, AlphaZero выиграла 28 раз и сыграла 72 партии вничью, не проиграв ни одной*.

Самое страшное, что AlphaZero демонстрировала понимание. Она играла так, как не играл ни один компьютер, — интуитивно, красиво, в романтическом атакующем стиле. Программа использовала гамбиты и шла на риск. В некоторых партиях она парализовала и просто игралась с соперником, что выглядело злобно и по-садистски. И программа действовала неимоверно творчески, делая ходы, о которых ни один гроссмейстер или компьютер не мог даже мечтать. AlphaZero объединила дух человека и мощь машины. Это было первое знакомство человечества с новым ужасающим видом интеллекта.

Предположим, мы могли бы нацелить AlphaZero или подобную программу (назовем ее _____) на величайшие нерешенные проблемы теоретической науки, иммунологии, биологии рака или сознания. Продолжим фантазировать и допустим, что в этих явлениях существуют какие-то галилеевские или кеплеровские закономерности, которые созрели до того, чтобы быть обнаруженными, но только с помощью интеллекта, превосходящего наш. Если предположить,

* К этому результату были претензии, поскольку по условиям программа Stockfish была отрезана от дебютного справочника, который считался ее сильной стороной, использовался неудобный для _____ контроль времени и компьютерное оборудование у AlphaZero было лучше. Однако потом проводились и другие матчи при самых разных условиях, и везде побеждала AlphaZero (хотя и проигрывала небольшое количество партий). *Прим. пер.*

** Zero — ноль, _____ — бесконечность (англ.). *Прим. пер.*

что такие законы существуют, сможет ли этот сверхчеловеческий разум их найти? Я не знаю. Никто не знает. К тому же все это может быть чисто теоретическими измышлениями, поскольку таких законов может и не существовать.

Но если они все же существуют и AI смогла бы их установить, она стала бы для нас оракулом. Мы бы сидели у ее ног и слушали. Мы бы не понимали, почему она всегда права, а порой не понимали бы даже то, что она говорит, но всегда могли бы проверить ее вычисления с помощью экспериментов или наблюдений. Казалось бы, что машина знает все. Мы превратились бы в зрителей, разинувших рот от удивления и пребывающих в замешательстве. Даже если бы она могла объяснить свою работу, мы бы не поняли ее рассуждений. В этот момент эпоха понимания, начавшаяся с Ньютона, подошла бы к концу и началась бы некая новая эпоха понимания.

Научная фантастика? Возможно. Но я думаю, что такой сценарий не исключен. В некоторых областях математики и других наук мы уже ощущаем закат понимания [21]. Существуют теоремы, доказанные компьютерами, и в этих доказательствах не может разобраться ни один человек. Теоремы верны, но мы не понимаем, почему. На данном этапе машины не могут объясниться.

Рассмотрим старую знаменитую математическую задачу под названием задача четырех красок. В ней говорится, что при определенных разумных ограничениях любую карту на плоскости или на сфере можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в одинаковый цвет. (Посмотрите на типичную карту Европы, Африки или любого другого континента, кроме Австралии, и поймете, что я имею в виду.) Теорема о четырех красках была доказана в 1976 году с помощью компьютера, но ни один человек не мог проверить все шаги в рассуждении. Хотя с тех пор доказательство проверяли и упрощали, все равно в нем имеется часть, где используются прямые вычисления, — ровно так, как компьютеры играли в шахматы до появления AlphaZero. Появление

этого доказательства у многих математиков вызвало раздражение. Они и так считали, что теорема о четырех красках верна. Им не надо было это подтверждать. Они хотели понять, *почему* она верна, а компьютерное доказательство в этом не помогло.

Рассмотрим еще одну геометрическую задачу четырехсотлетней давности, поставленную Иоганном Кеплером. В ней требуется определить самый эффективный способ наиболее плотно упаковать одинаковые сферы в трехмерном пространстве (это сродни задаче, как в магазине уложить в деревянный ящик как можно больше апельсинов). Будет ли эффективнее всего укладывать сферы одинаковыми слоями, один непосредственно на другой? Или лучше расположить слои так, чтобы каждая сфера оказывалась в выемке, которую образуют четыре сферы в слое под ней? (Апельсины укладывают именно так.) Если да, то можно ли считать этот способ наилучшим? Или существует расположение сфер с еще большей плотностью, причем, возможно, без регулярной структуры? Гипотеза Кеплера заключалась в том, что упаковка из продуктовых магазинов самая лучшая*. Однако доказано это было только в 1998 году. Томас Хейлс при помощи своего студента Сэмюэла Фергюсона и 180 000 строк компьютерного кода свел гипотезу к большому, но конечному числу случаев. Затем с помощью перебора и использования оригинальных алгоритмов программа проверила гипотезу. Математическое сообщество пожало плечами. Теперь мы знаем, что гипотеза Кеплера верна, но по-прежнему не знаем, почему. У нас нет понимания. И компьютер Хейлса нам этого объяснить не смог.

Но что произойдет, если настроить на решение таких задач программу Такая машина могла бы выдавать красивые доказательства — столь же красивые, как шахматные партии, которые она играла против Ее доказательства были бы интуитивно

* Строго говоря, существует два вида наилучших упаковок — гранецентрированная кубическая упаковка и гексагональная плотная упаковка. Но их можно перевести друг в друга путем сдвига слоев. *Прим. пер.*

понятны и элегантны. Они были бы, по словам венгерского математика Пала Эрдёша, доказательствами прямо из Книги [22]. Эрдэш любил повторять, что у Бога есть Книга, в которую тот включает идеальные доказательства, и фраза, что какое-то доказательство взято из Книги, была его наилучшей возможной похвалой. В частности, это значит, что доказательство раскрывает, *почему* теорема верна, а не заставляет нас принудительно согласиться с какими-то уродливыми и трудными рассуждениями. Я могу себе представить не слишком отдаленный день, когда искусственный интеллект предоставит нам доказательство из Книги. Но на что будут в тот момент похожи анализ, медицина, социология и политика?

Заключение

При правильном использовании бесконечности анализ может раскрыть секреты Вселенной. Мы видели, как это происходит снова и снова, но все равно каждый раз воспринимаем это как чудо. Система рассуждений, созданная людьми, каким-то образом находится в гармонии с природой. Она надежна не только в масштабах, в которых была изобретена — в масштабах повседневной жизни, с волчками и мисками супа, — но и в мельчайших масштабах атомов и колоссальнейших масштабах космоса. Так что тут не может быть порочного круга. Это не тот случай, когда мы вводим в анализ уже известные нам вещи, а анализ выдает нам их обратно; нет, анализ говорит нам о тех вещах, которых мы никогда не видели, никогда не могли увидеть и никогда не увидим. Иногда он говорит нам о вещах, которые никогда не существовали, но могли бы существовать — если бы только у нас хватило ума вызвать их к жизни.

Для меня это величайшая загадка всего: почему Вселенная постижима и почему анализ согласуется с ней? У меня нет ответа, но я надеюсь, что вы согласитесь: над этим стоит подумать. А сейчас позвольте мне представить три последних примера сверхъестественной эффективности анализа.

Восемь знаков после запятой

Первый пример возвращает нас к тому, с чего мы начинали, — к замечанию Ричарда Фейнмана, что анализ — это язык, на котором говорит Бог. Пример связан с собственной работой Фейнмана по расширению квантовой механики, которое называется квантовой электродинамикой, сокращенно КЭД [1]. КЭД — это квантовая теория, объясняющая взаимодействие света и материи. Она объединяет теорию электромагнетизма Максвелла, специальную теорию относительности Эйнштейна и квантовую теорию Гейзенберга и Шрёдингера. Фейнман был одним из главных создателей КЭД, и, рассмотрев его теорию, я могу понять, отчего он так восхищался анализом. Его теория переполнена им и по тактике, и по стилю. Она изобилует степенными рядами, интегралами, дифференциальными уравнениями и включает множество трюков с бесконечностью.

Еще важнее то, что это самая точная теория из когда-либо созданных [2]. С помощью компьютеров физики все еще занимаются суммированием рядов, возникающих в КЭД, используя так называемые диаграммы Фейнмана, чтобы делать прогнозы о свойствах электронов и других частиц. Сравнивая эти прогнозы с весьма точными экспериментальными измерениями, они показали, что теория согласуется с реальностью с точностью до восьми знаков после запятой, то есть лучше, чем *одна стомиллионная*.

Это причудливый способ сказать, что теория фактически верна. Всегда трудно найти удобные аналогии для осмысления таких больших чисел, но давайте я попробую представить это так: сто миллионов секунд — это 3,17 года, поэтому получить нечто с точностью до одной стомиллионной — все равно что планировать щелкнуть пальцами ровно 3,17 года и отсчитать это время с точностью до секунды без помощи часов.

В этом есть нечто удивительное с философской точки зрения. Дифференциальные уравнения и интегралы квантовой

электродинамики — это творения человеческого разума. Разумеется, они базируются на экспериментах и наблюдениях, так что до определенной степени в них встроена реальность. Но тем не менее они — продукт воображения. Это не рабское подражание действительности. Это изобретения. И, что удивительно, выписывая какие-то каракули на бумаге и проводя определенные вычисления с помощью методов, аналогичных разработанным Ньютоном и Лейбницем, но усовершенствованных в реалиях XXI века, мы можем предсказать самые потаенные свойства природы, причем с точностью до восьми знаков! Ни один из прогнозов человечества не был таким точным, как прогнозы квантовой электродинамики.

Я думаю, это важное уточнение, поскольку оно опровергает расхожую фразу, что наука подобна религии и другим системам верований и что у нее нет особых прав на истину. Ну уж нет. Любая теория, которая согласуется с реальностью с точностью в одну стомиллионную, — это не просто вопрос веры или чьего-то мнения. Для этого не нужны восемь знаков после запятой. Множество теорий в физике оказались ошибочными. Но не эта. По крайней мере, пока. Несомненно, какие-то отклонения имеются, как и в любой теории, но она определенно близка к истине.

Открытие позитрона

Второй пример сверхъестественной эффективности анализа связан с более ранним расширением квантовой механики. В 1928 году британский физик Поль Дирак [3] пытался найти способ согласовать специальную теорию относительности с основными принципами квантовой механики применительно к электрону, движущемуся со скоростью, близкой к скорости света. Он выдвинул теорию, которая показалась ему красивой. Дирак выбрал ее в основном исходя

из эстетических соображений. У него не было для нее никаких конкретных эмпирических подтверждений, кроме ощущения художника, что красота — это признак истинности. Уже сами эти ограничения — совместимость с теорией относительности и квантовой механикой, а также математическая элегантность — сильно связывали ему руки. После борьбы различных теорий он нашел одну, которая отвечала его эстетическим пожеланиям. Иными словами, она определялась стремлением к гармонии. Как и любой хороший ученый, Дирак пытался проверить свою теорию, извлекая из нее прогнозы. А поскольку он был физиком-теоретиком, это означало использование анализа.

Когда он установил дифференциальное уравнение, которое сейчас известно как уравнение Дирака, и продолжил анализировать его в течение нескольких следующих лет, то обнаружил, что из него вытекает несколько поразительных прогнозов. Первый — *существование антивещества*, другими словами, частицы, эквивалентной электрону, но с положительным зарядом. Сначала он думал, что частица может быть протоном, но от этой идеи пришлось отказаться, поскольку масса предсказанных частиц была почти в две тысячи раз меньше, чем у протона*. Такая маленькая положительно заряженная частица не была известна. И все же уравнение предсказывало ее существование. Дирак назвал ее антиэлектроном. В 1931 году он опубликовал статью, в которой предсказал, что когда эта еще не выявленная частица столкнется с электроном, они аннигилируют [4]. «Это не требует никаких изменений в формальном изложении при использовании абстрактных символов, — писал он и сухо добавлял: — При таких обстоятельствах было бы удивительно, если бы Природа не воспользовалась этим» [5].

* На самом деле Дирак с самого начала полагал, что новая частица должна иметь массу электрона. Но в то время было известно всего две частицы — электрон и протон, и ученый не рискнул постулировать существование новой частицы, а решил опубликовать свою теорию как теорию электронов и протонов. Но математики быстро установили, что разница в массах частиц теоретически невозможна, так что новая частица должна была обязательно иметь массу электрона. *Прим. пер.*

В следующем году физик-экспериментатор Карл Андерсон в ходе изучения космических лучей увидел странный след в камере Вильсона. Какая-то частица двигалась по изогнутому пути, как электрон, но траектория изгибалась в противоположном направлении, словно у нее был положительный заряд. Он не знал о предсказании Дирака, но понял смысл увиденного*. Когда Андерсон опубликовал статью об открытии в 1932 году, редактор предложил назвать частицу позитроном. Название прижилось. Дирак получил Нобелевскую премию за свое уравнение в 1933 году, Андерсон был награжден за открытие позитрона в 1936-м.

С тех пор позитроны начали спасать жизни. Они лежат в основе ПЭТ — *позитронно-эмиссионной томографии* [6], метода медицинской визуализации, позволяющего врачам видеть области аномальной метаболической активности в мягких тканях головного мозга или других органов. Неинвазивным образом, не требующим хирургического вмешательства или иного опасного проникновения в череп, ПЭТ может помочь обнаружить опухоли в мозге и амилоидные бляшки, связанные с болезнью Альцгеймера.

Таков еще один прекрасный пример полезного и практичного использования анализа. Поскольку анализ — это язык Вселенной, а также логический механизм для извлечения ее секретов, Дирак смог написать дифференциальное уравнение для электрона, которое сообщило ему нечто новое, истинное и красивое о природе. Это натолкнуло его на мысль о новой частице и вероятности ее существования. Этого требовали логика и красота. Но не сами по себе — они должны были согласовываться с известными фактами и подходить под известные теории. Когда все это было соединено, картина выглядела почти так, как если бы сами символы привели к существованию позитрона.

* Собственно говоря, это явление наблюдали многие физики и до Андерсона, но считали неточностями эксперимента. Андерсон же объяснил суть происходящего. *Прим. пер.*

Тайна постижимой Вселенной

В качестве третьего примера сверхъестественной эффективности анализа уместно закончить наше путешествие в компании Альберта Эйнштейна [7]. Он воплощал в себе множество затронутых нами тем: благоговение перед гармонией природы, убежденность в том, что математика — это триумф воображения, удивление перед постижимостью Вселенной.

Нигде эти темы не прослеживаются так отчетливо, как в его общей теории относительности [8]. В этом главном труде его жизни Эйнштейн перевернул представления Ньютона о пространстве и времени и переопределил взаимоотношения между материей и гравитацией. Для Эйнштейна гравитация — это уже не сила, которая мгновенно действует на расстоянии, а почти осязаемая вещь, искривление в ткани Вселенной, проявление кривизны пространства и времени. Кривизна — идея, восходящая к зарождению математического анализа, к античному увлечению кривыми линиями и кривыми поверхностями, — в руках Эйнштейна стала свойством не только форм, но и самого пространства. Как если бы координатная плоскость Ферма и Декарта зажила собственной жизнью. Вместо того чтобы быть ареной для драмы, пространство стало самостоятельным актером. В теории Эйнштейна материя указывает пространству-времени, как ему искривляться, а кривизна говорит материи, как ей двигаться. Такой танец между ними делает теорию нелинейной.

И мы знаем, что это означает: понять соответствующие уравнения точно будет непросто. По сей день нелинейные уравнения общей теории относительности скрывают множество секретов. Эйнштейн смог докопаться до некоторых из них благодаря своим математическим способностям и упорству. Например, он предсказал, что свет от звезд будет отклоняться при прохождении мимо Солнца на пути к нашей планете, и это предсказание было подтверждено во время солнечного

затмения 1919 года. Известие попало на первую полосу газеты New York Times, а Эйнштейн стал звездой мирового масштаба.

Теория также предсказывала, что гравитация может оказывать странное влияние на время [9]: оно может ускоряться или замедляться при движении объекта через гравитационное поле. Как бы странно это ни звучало, именно так и обстоят дела в действительности. Это необходимо учитывать при работе спутников системы глобального позиционирования, поскольку они двигаются высоко над Землей. Гравитационное поле там слабее, что делает искривление пространства-времени меньше, а поэтому часы идут быстрее, чем на Земле. Без поправки на этот эффект часы спутников системы GPS не будут показывать точное время, а станут опережать наземные часы примерно на 45 микросекунд в день. Может показаться, что это не так уж и много, однако учтите, что вся система глобального позиционирования для правильной работы требует наносекундной точности, а 45 микросекунд — это 45 000 наносекунд. Без учета теории относительности ошибки в положениях будут накапливаться по десятку километров каждый день и вся система окажется бесполезной буквально за считанные минуты.

Дифференциальные уравнения общей теории относительности дают несколько других прогнозов, таких как расширение Вселенной или существование черных дыр. Когда эти объекты предсказали, они казались диковинными, однако все оказалось правдой.

Нобелевская премия по физике в 2017 году была присуждена за обнаружение еще одного невероятного эффекта, предсказанного общей теорией относительности: гравитационных волн [10]. Теория гласила, что пара черных дыр, вращающихся друг вокруг друга, будет менять пространство-время вокруг себя, ритмично его растягивая и сжимая. Возникающее возмущение в ткани пространства-времени должно распространяться во все стороны со скоростью света, подобно ряби на воде. Эйнштейн сомневался, что такую волну можно заметить, и опасался, что это может оказаться математической иллюзией.

Команда, получившая Нобелевскую премию, разработала и сконструировала самый чувствительный детектор из когда-либо существовавших. И 14 сентября 2015 года он зарегистрировал дрожание пространства-времени, которое было в тысячу раз меньше диаметра протона. Для сравнения: это все равно что измерить расстояние до ближайшей звезды с точностью до диаметра человеческого волоса.

Я пишу эти заключительные строки ясной зимней ночью и вышел полюбоваться ночным небом. Глядя на звезды над головой и черноту космоса, невозможно не испытать благоговения перед силой человеческого разума и бесконечностью Вселенной.

Как мы, *гомо сапиенс*, ничтожный биологический вид на ничтожной планете, плывущей в средненькой по размеру галактике, сумели предсказать, как задрожат пространство и время при столкновении двух черных дыр в просторах Вселенной на расстоянии миллиарда световых лет от нас? Мы знали, как должна выглядеть эта волна, еще до того, как она добралась до нас. И благодаря математическому анализу, компьютерам и Эйнштейну оказались правы.

Эта гравитационная волна — едва различимый шепот, самый слабый из когда-либо услышанных человеком. Она отправилась в путь еще до того, как мы стали приматами, до того, как мы были млекопитающими, еще во времена нашего микробного прошлого. Когда она прибыла к нам в тот день 2015 года, мы поняли, что означает этот слабый шепот — потому что мы ожидали, мы слушали и мы знали матанализ.

От автора

Писать о матанализе для широкой публики — одновременно определенный вызов и неимоверное удовольствие. Я люблю анализ со времен изучения в школе и давно мечтал поделиться своей любовью с широким кругом читателей, но все как-то не удавалось. Постоянно что-то мешало. Нужно было писать статьи, работать с аспирантами, готовиться к занятиям, воспитывать детей и выгуливать собаку. Но около двух лет назад меня осенило, что мой возраст (готов спорить, что и ваш тоже) увеличивается со скоростью один год за год, и поэтому мне показалось, что сейчас самое подходящее время поделиться радостью анализа с другими людьми. Поэтому моя первая благодарность вам, дорогие читатели. Я мысленно представлял вас десятилетиями. И вот вы здесь. Спасибо!

Как оказалось, написать книгу, которую всегда хотелось написать, труднее, чем ожидалось. Я так долго был погружен в анализ, что мне было трудно смотреть на него глазами новичка. К счастью, мне помогали многие очень умные, щедрые и терпеливые люди, которые имели весьма смутное представление об анализе и его значимости, а потому определенно не тратили каждую минуту бодрствования на математические размышления, как это делаем мы с коллегами.

Спасибо моему литературному агенту Катинке Мэтсон. Давным-давно, когда я вскользь заметил, что анализ — одна из величайших из когда-либо существовавших идей, вы сказали, что хотели бы прочитать об этом книгу. Что ж, вот она. Большое спасибо, что верили в меня и этот проект.

Мне посчастливилось работать с двумя блестящими редакторами, Эймоном Доланом и Алексом Литтлфилдом. Эймон, я даже не знаю как вас отблагодарить. Наше сотрудничество было фантастическим — от начала и до конца. Вы были тем читателем, которого я себе представлял: смекалистым, слегка скептическим, любопытным и увлеченным. Лучше всего то, что вы обнаружили структуру моего повествования раньше меня и направляли меня твердой, но ласковой рукой. Я прощаю вас за то, что требовали от меня один черновой вариант за другим, потому что с каждым разом вы делали книгу лучше. Честно говоря, без вас я бы не справился. Алекс, спасибо за то, что довел эту рукопись до финиша, и за приятную совместную работу.

Если говорить об удовольствии, то какая же это все-таки радость, когда ваши ошибки исправляет Трейси Роу. Трейси, мне даже захотелось написать еще одну книгу — просто ради благожелательного образования, которое вы даете мне при каждой совместной работе.

Помощник редактора Розмари Макгиннесс, спасибо вам за жизнерадостность, эффективность и внимание к деталям. И спасибо всем в издательстве Houghton Harcourt за вашу сложную работу и за то, что составляете такую отличную команду. Мне повезло работать с вами.

Как и для других моих книг, иллюстрации для этой сделала Марджи Нельсон. Как всегда, спасибо за воображение и дух сотрудничества.

Спасибо, коллеги Майкл Барани, Билл Данхэм, Пол Гинспарг и Манил Сури, за то, что любезно прочитали разделы этой книги или целые черновики, улучшили формулировки, исправили ошибки (кто же знал, что было целых два Меркатора?!) и предлагали полезные советы, выискивая блох в той веселой манере, на которую надеется каждый ученый. Майкл, я так много узнал из твоих комментариев и хотел бы показать тебе книгу пораньше. Билл, ты герой. Пол, ты такой, каким был всегда (и лучший в этом). Манил, спасибо, что внимательно прочитал первый вариант книги, и желаю удачи

с твоей новой книгой — не могу дождаться, когда она выйдет, чтобы скорее ее прочитать.

Том Гилович, Герберт Хуэй и Линда Вудард, спасибо, что вы такие хорошие друзья. Вы позволяли мне болтать об этой книге почти два года с момента ее зарождения и никогда не колебались в своей поддержке и, насколько я могу судить, внимании. Алан Перельсон и Джон Стиллвелл, я безмерно восхищаюсь вашей работой и весьма польщен, что вы поделились со мной своими мыслями об этой книге. Спасибо также Родриго Тецуо Аржентону, Тони Дероузу, Питеру Шрёдеру, Тунчу Тезелу и Стефану Захову, которые позволили мне обсудить их исследования и воспроизвести их опубликованные иллюстрации.

Мюррэю: кто у нас хороший парень? Конечно, ты. Ты слышал, как я говорил это миллион раз, и даже если ты не понимаешь, что это означает, я знаю, что смысл ты улавливаешь...

Наконец, спасибо моей жене Кэрол и дочерям Джо и Лии, за любовь и поддержку, за то, что терпели мою рассеянность, которая наверняка раздражала даже больше обычного. Парадокс Зенона о приближении к стене половинными шагами приобрел в нашей семье новое значение, когда казалось, что этот проект подходит к концу, но никак не может до него добраться. Я так благодарен вам за терпение и очень вас люблю.

Благодарности за иллюстрации

Страница 86	Питер Шрёдер
Страница 87	Entertainment Pictures / Alamy
Страница 88	Entertainment Pictures / Alamy
Страница 90	Стефан Захов, институт Цузе в Берлине (ZIB)
Страница 92	Стефан Захов, институт Цузе в Берлине (ZIB)
Страница 97	Тунч Тезел
Страница 210	WENN Ltd / Alamy
Страница 235	Воспроизведено с любезного разрешения уполномоченных лиц библиотеки Кембриджского университета. MS-ADD-04000—000—00259.tif (MS Add. 4000, page 124r).
Страница 302	Фонд Томаса Джефферсона в Монтичелло
Страница 324	Изображение воспроизведено с любезного разрешения Родриго Тецуо Аржентона

Предметно-именной указатель

- Алгебра, 129, 140
- Алгоритм, 132
 - оптимизации, 154
- Ампер, Андре-Мари, 13
- Аналитическая геометрия, 134
- Андерсон, Карл, 370
- Апория, 47
- Аристарх, 98
- Аристотель, 96
- Архимед, 37, 58
- Архимедов винт, 93
- Бесконечно малая величина, 258
- Бесконечность, 19, 30
 - актуальная, 41
 - потенциальная, 41
- Биология, математическая, 355
- Блок, 59
- Браге, Тихо, 120
- Бруно, Джордано, 47, 100
- Буйо, Исмаэль, 293
- Вайзер, Мартин, 89
- Валлис, Джон, 251
- Везалий, Андреас, 99
- Вейвлет, 156, 321
- Векторное поле, 351
- Виет, Франсуа, 133
- Волна
 - стоячая, 314, 323
 - электромагнитная, 14
- Волновое уравнение, 316
- Высшая математика, 286
- Гагарин, Юрий, 298
- Галилей, Галилео, 94, 100, 125
- Галлей, Эдмунд, 293
- Гаусс, Карл Фридрих, 326
- Гелиоцентрическая система, 98
- Геометрия, 30, 65, 140
 - аналитическая, 134
- Геоцентрическая система, 96, 99
- Герц, Генрих, 14
- Гипотеза Кеплера, 364
- Гиппас, 65
- Гоббс, Томас, 251
- Гравитация, 10, 251, 293, 371
 - влияние на время, 372
 - волна, 372
- Гук, Роберт, 293, 324
- Гюйгенс, Христиан, 110, 114, 255
- Движение
 - ретроградное, 97
- Декарт, Рене, 128, 133, 134, 141
- Деление на ноль, 44
- Десятичные дроби, 133
- Джефферсон, Томас, 300
- Джобс, Стив, 87
- Дирак, Поль, 18, 368
- Дискретность, 51, 302
- Дифференциал, 263
- Дифференциальная геометрия, 286
- Дифференциальное исчисление, 10, 129, 257
- Дифференциальное уравнение, 10, 279, 287
 - в частных производных, 306
 - зависимые переменные, 304
 - обыкновенное, 303
- Дифференцирование, 238, 258
- ДНК, 341

- Дойфлхард, Петер, 89
- Доказательство
 - двойное, 73
 - от противного, 49
- Дробь
 - аликвотная, 272
- Евдокс, 64
- Жермен, Софи, 325
- Задача
 - двух тел, 294
 - обратная, 233
 - площади, 218, 228
 - четырёх красок, 363
- Закон
 - Архимеда, 59
 - всемирного тяготения, 251
 - движения Ньютона, 289
 - инерции Галилея, 290
 - Кеплера, 118
 - второй, 122, 124
 - первый, 122
 - обратных квадратов, 251, 292
 - преломления, 160
 - рычага, 59
 - Снелла, 160
- Захов, Стефан, 89
- Зенон Элейский, 47
- Изменение
 - скорости, 187
- Интеграл, 218, 233
- Интегральное исчисление, 129, 233
- Интегрирование, 238, 239
- Интерполяция, 213
- Информация
 - сжатие, 156
- Исчисление
 - дифференциальное, 10, 129
 - интегральное, 129
- Кавальери, Бонавентура, 134
- Картрайт, Мэри, 352
- Касательная, 199
- Квадратура, 218
- Квантовая механика, 29, 53, 163, 368
- Квантовая электродинамика, 367
- Квинто, Тодд, 335
- Кембрийский взрыв, 286
- Кеплер, Иоганн, 18, 24, 94, 117, 125
- Классическая механика, 288
- Клинопись, 30
- Ковалевская, Софья, 344
- Композитные материалы, 308
- Компьютер, 354
- Континуум, 20, 303, 306
- Конус, 32
- Коперник, Николай, 99
- Кормак, Аллан, 333
- Космические лучи, 370
- Космонавтика, 298
- Кривая, 22
- Кривизна пространства и времени, 371
- Кэмерон, Джеймс, 86
- Кэрролл, Льюис, 53
- Лагранж, Жозеф Луи, 325
- Лазер, 28
- Лаплас, Пьер-Симон, 343
- Лейбниц, Готфрид Вильгельм, 163, 217, 254, 257
- Литтлвуд, Джон, 352
- Логарифм, 177
 - десятичный, 177
 - натуральный, 183
- Любопытство, 359
- Магнетрон, 329
- Максвелл, Джеймс Клерк, 14
- Максвелла уравнения, 310
- Маркони, Гульельмо, 15
- Математическая биология, 355
- Маятник, 109
- Мгновенная скорость, 106
- Меркатор, Николас, 252
- Мерсенн, Марен, 143

- Механика
 - квантовая, 29, 53, 288
 - классическая, 288
- Моделирование, 216
- Модель, 322
 - Блэка — Шоулза, 310
 - Ходжкина — Хаксли, 310
- Нелинейная динамика, 343
- Нелинейность, 346, 348
- Непер, Джон, 179
- Ньютон, Исаак, 26, 217, 240
- Обертон, 318
- Оптимизация, 146, 154
- Орем, Николай, 224
- Основная теорема анализа, 193
- Отношение, 171
- Парадокс, 47
 - Зенона, 48
 - ахиллес и черепаха, 48
 - дихотомия, 48
 - стрела, 51
- Параллакс, 98
- Перельсон, Алан, 277
- Пифагор, 17
- Пифагорейцы, 289
- Плавучесть, 94
- Планета, 96
- Планк, Макс, 55
- Планковская длина, 56
- Планковское время, 56
- Погода, 350
- Подъемная сила, 307
- Попов, Александр, 14
- Правило, 72, 183
- Предел, 38
- Принцип
 - бесконечности, 18, 21, 199
 - наименьшего времени, 161
 - наименьшего действия, 163
 - равновесия, 94
 - Ферма, 161
- Приращение, 261
 - бесконечно малое, 262
- Производная, 189, 199
 - вторая, 322
 - частная, 306
- Пропорция, 83
- Птолемей, Клавдий, 99
- Пуанкаре, Анри, 348
- Радиолокация, 352
- Радон, Иоганн, 335
- Райт, братья, 306
- Рассел, Бертран, 47
- Расстояние, 225
- Расширение Вселенной, 372
- Риман, Бернхард, 359
- Рычаг, 59
- Ряд
 - бесконечный, 315
 - степенной, 243
 - Фурье, 317
- Свет
 - природа, 14
- Сжатие информации, 156
- Сила
 - подъемная, 307
- Симметрия, 31
- Синусоида, 152, 206
- Скорость, 290
 - движения, 187
 - изменения, 187
 - мгновенная, 106
- Снелл, Виллеброрд, 160
- Спенсер, Перси, 329
- Степенной ряд, 243
- Степень, 174
- Стоячая волна, 314, 323
- Сумма
 - телескопическая, 273
- Сфера, 32
- Теорема
 - о четырех красках, 363

- основная анализа, 193, 266
- Пифагора, 63
- Ферма, великая, 326
- Теория
 - узлов, 342
- Теория относительности, 54, 163, 288, 356
 - общая, 310, 371
- Теплопередача, 310
- Теплопроводность, 312
- Тесла, Никола, 15
- Титов, Герман, 298
- Томография, 89, 330
- Торричелли, Эванджелиста, 134
- Точка, 305
- Триангуляция, 86, 115
- Турбулентность, 310
- Уравнение
 - волновое, 316
 - Максвелла уравнения, 310
 - Шрёдингера, 311
- Ускорение, 187, 224, 290
- Фарадей, Майкл, 13
- Фейнман, Ричард, 9, 367
- Ферма, Пьер де, 134, 142
- Фигуры Хладни, 324
- Философия, 84
- Флаттер, 309
- Флюксия, 237
- Флюэнта, 237
- Фуллер, Брок, 341
- Функция, 169
 - линейная, 194
 - нелинейная, 197
 - одной переменной, 169
 - площади, 230
 - показательная, 172
 - основание, 173
 - степенная, 171
 - производная, 265
 - экспоненциальная, 172
- Фурье, Жан-Батист Жозеф, 312
- Хаксли, Эндрю, 355
- Хаос, 349
- Хаунсфилд, Годфри, 333
- Хейтсбери, Уильям, 224
- Хладни, Эрнст, 324
- Ходжкин, Алан, 355
- Холмс, Шерлок, 73
- Цилиндр, 32
- Черная дыра, 372
- Число
 - действительное, 66
 - иррациональное, 65
 - целое, 65
- Шкала Рихтера, 177
- Шрёдингер, Эрвин, 54
- Шрёдингера уравнение, 311
- Эйнштейн, Альберт, 28, 371
- Экспонента, 183
- Экспоненциальная запись, 174
- Эллипс, 120
 - фокус, 121
- Эпоха Просвещения, 300
- Эрдёш, Пал, 365
- Эффект
 - туннельный, 53

Примечания

Введение

1. Wouk, *The Language God Talks*, 5.
2. Альтернативное мнение можно найти в книгах: Barrow and Tipler, *Anthropic Cosmological Principle*; Rees, *Just Six Numbers*; Davies, *The Goldilocks Enigma*; Livio, *Is God a Mathematician?*; Tegmark, *Our Mathematical Universe*; и Carroll, *The Big Picture*. С философскими аспектами анализа можно познакомиться в Simon Friederich, *Fine-Tuning*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/fine-tuning/>.
3. Adams, *Hitchhiker's Guide*, и Gill, *Douglas Adams' Amazingly Accurate Answer*.
4. Wouk, *The Language God Talks*, 6.
5. Исторические аспекты проблемы представлены в книгах: Boyer, *The History of the Calculus*, и Grattan-Guinness, *From the Calculus*. Dunham, *The Calculus Gallery*; Edwards, *The Historical Development*; и Simmons, *Calculus Gems*, которые рассказывают историю анализа на примере некоторых наиболее красивых задач и их решений.
6. Stewart, *In Pursuit of the Unknown*; Higham et al., *The Princeton Companion*; и Goriely, *Applied Mathematics*, передают дух, широту и практическую прикладную математики.
7. Kline, *Mathematics in Western Culture*, и Newman, *The World of Mathematics*, соединяют математику с более широкой культурой. Я провел много времени в старших классах, читая эти два шедевра.
8. О математике и физике смотрите Maxwell, *On Physical Lines of Force*, и Purcell, *Electricity and Magnetism*. О понятиях и истории смотрите Kline, *Mathematics in Western Culture*, 304–21; Schaffer, *The Laird of Physics*; и Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 11. Биографию

Максвелла и Фарадея смотрите в книге: Forbes and Mahon, Faraday, Maxwell.

9. Stewart, In Pursuit of the Unknown, глава 8.
10. Einstein, Physics and Reality, 51. Этот афоризм часто передают так: «Самая непостижимая вещь во Вселенной — то, что она постижима». Другие примеры цитат Эйнштейна, подлинных или приписываемых ему, смотрите в книгах: Calaprice, The Ultimate Quotable Einstein, и Robinson, Einstein Said That.
11. Wigner, The Unreasonable Effectiveness; Hamming, The Unreasonable Effectiveness; и Livio, Is God a Mathematician? См. <https://coollib.net/b/322251/>
12. Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia, 4—5; Burkert, Lore and Science; Guthrie, Pythagorean Sourcebook; и C. Huffman, Pythagoras, <https://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/pythagoras/>. Martínez в книгах Cult of Pythagoras и Science Secrets развенчивает многие мифы о пифагорейцах с осторожностью и уничижительным юмором.
13. Katz, History of Mathematics, 48–51, и Burton, History of Mathematics, раздел 3.2, обсуждают пифагорейскую математику и философию.
14. Ball, A Century Ago Einstein Sparked, и Pais, Subtle Is the Lord. Оригинальная статья: Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung.

Глава 1

1. Burton, History of Mathematics, и Katz, History of Mathematics, дают полномасштабное (хотя и без подробностей) введение в историю математики от античных времен до XX столетия. На более серьезном математическом уровне тема представлена в Stillwell, Mathematics and Its History. В качестве масштабного гуманистического подхода подойдет книга Kline, Mathematics in Western Culture.
2. Смотрите раздел 4.5 в книге Burton, History of Mathematics; главы 2 и 3 в книге: Katz, History of Mathematics; главу 4 в книге Stillwell, Mathematics and Its History.
3. Katz, History of Mathematics, раздел 1.5, представляет различные подходы к измерению площади круга, сделанные в различных мировых культурах. Первое доказательство было представлено Архимедом; смотрите Dunham, Journey Through Genius, глава 4, и Heath, The Works of Archimedes, 91–93.
4. Henry Mendell, Aristotle and Mathematics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics/>.

5. Katz, *History of Mathematics*, 56, и Stillwell, *Mathematics and Its History*, 54, обсуждают аристотелевскую разницу между актуальной бесконечностью и потенциальной бесконечностью.
6. Опираясь на новые свидетельства, Martínez, *Burned Alive*, утверждает, что Бруно был сожжен за свою космологию, а не за теологию. Смотрите также A. A. Martínez, *Was Giordano Bruno Burned at the Stake for Believing in Exoplanets?*, *Scientific American* (2018), <https://blogs.scientificamerican.com/observations/was-giordano-bruno-burned-at-the-stake-for-believing-in-exoplanets/>. Также смотрите D. Knox, *Giordano Bruno*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/bruno/>.
7. Эссе Рассела о Зеноне и бесконечности *Mathematics and the Metaphysicians*, воспроизведено в книге Newman, *The World of Mathematics*, vol. 3, 1576–90.
8. Mazur, *Zeno's Paradox*. Смотрите также Burton, *History of Mathematics*, 101–2; Katz, *History of Mathematics*, раздел 2.3.3; Stillwell, *Mathematics and Its History*, 54; John Palmer, *Zeno of Elea*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/zeno-elea/>; и Nick Huggett, *Zeno's Paradoxes*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/>.
9. Greene, *The Elegant Universe*, главы 4 и 5.
10. Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 14.
11. Greene, *The Elegant Universe*, 127–31, объясняет, почему физики полагают, что на ультрамикроскопическом уровне планковской длины пространство распадается в квантовую пену. Философскую точку зрения смотрите в: S. Weinstein and D. Rickles, *Quantum Gravity*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/entries/quantum-gravity/>.

Глава 2

1. Очерки о его жизни смотрите в Netz and Noel, *The Archimedes Codex*, и C. Rorres, *Archimedes*, <https://www.math.nyu.edu/~crrorres/Archimedes/contents.html>. Научную биографию смотрите в работе M. Clagett, *Archimedes*, в книге Gillispie, *Complete Dictionary*, vol. 1, с дополнениями, сделанными Ф. Ачерби (F. Acerbi) в томе 19. Математика Архимеда имеется в выдающихся книгах Stein, *Archimedes*, и Edwards, *The Historical Development*, глава 2, также смотрите Katz, *History of Mathematics*, разделы 3.1–3.3, и Burton, *History of Mathematics*, раздел 4.5. Собрание работ Архимеда представлено в книге Heath, *The Works of Archimedes*.

2. Martínez, Cult of Pythagoras, глава 4, знакомит с происхождением многих легенд об Архимеде, включая рассказ об «Эврике» и трагическую историю его смерти от руки римского солдата во время осады Сиракуз в 212 году до нашей эры. Хотя вполне вероятно, что Архимед погиб во время этой осады, нет никаких оснований полагать, что его последними словами были: «Не трогай мои крути!»
3. Плутарх цитируется по переводу «Марцелла» Джона Драйдена, доступному онлайн на <http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html>. Конкретные фрагменты об Архимеде и осаде Сиракуз также доступны на сайте <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Siege/Plutarch.html>.
4. <http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html>.
5. Там же.
6. Рассказ об «Эврике» в том виде, в котором он был впервые изложен Витрувием, на латинском и английском языках, можно найти на сайте <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Crown/Vitruvius.html>. На сайте также есть детский вариант этой истории в изложении писателя Джеймса Болдуина, взятый из книги *Thirty More Famous Stories Retold* (New York: American Book Company, 1905). К сожалению, Болдуин и Витрувий представляют архимедово решение задачи о золотой короне в чрезмерно упрощенном виде. Rorres предлагает более правдоподобный расчет на <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html>, а также догадки Галилея о том, как Архимед мог решать эту задачу: <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Crown/bilancetta.html>.
7. <http://classics.mit.edu/Plutarch/marcellu.html>.
8. Stein, Archimedes, глава 11, подробно показывает, как Архимед это делал. Приготовьтесь получить некую порцию скучной арифметики.
9. Никто не знает, кто первым доказал, что квадратный корень из 2 является иррациональным числом или (что эквивалентно) диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Известна старая байка, что за это бросили в море пифагорейца Гиппаса. Martínez, Cult of Pythagoras, глава 2, прослеживает происхождение этого мифа и опровергает его. То же самое делает американский кинематографист Эррол Моррис в длинном и чрезвычайно странном эссе в *New York Times*; смотрите Errol Morris, *The Ashtray: Hippasus of Metapontum* (Part 3), *New York Times*, March 8, 2001, <https://opinionator.blogs.nytimes.com/2011/03/08/the-ashtray-hippasus-of-metapontum-part-3/>.
10. Перевод оригинального текста Архимеда содержится в книге: Heath, *The Works of Archimedes*, 233–52. Подробности рассуждения

с треугольными осколками, которые я обошел вниманием, смотрите в книгах: Edwards, *The Historical Development*, 35–39; Stein, *Archimedes*, глава 7; Laubenbacher and Pengelley, *Mathematical Expeditions*, раздел 3.2; и Stillwell, *Mathematics and Its History*, раздел 4.4. Много обзоров на эту тему можно найти в интернете. Один из самых понятных принадлежит Марку Ридеру (Mark Reeder) и представлен на сайте на сайте <https://sites.google.com/bc.edu/mark-reeder/publications?authuser=0>. Другой, авторства Р. А. Г. Сили (R. A. G. Seely), находится по адресу <http://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf>. Возможно, более простым вам покажется подход с помощью аналитической геометрии, который использует Simmons, *Calculus Gems*, раздел В.3.

11. Arthur Conan Doyle, *The Sign of the Four* (London: Spencer Blackett, 1890), <https://www.gutenberg.org/files/2097/2097-h/2097-h.htm>.
12. Оригинал текста смотрите в книге: Heath, *The Works of Archimedes*, 326 и далее. Применение метода к квадратуре параболы можно найти в книгах Laubenbacher and Pengelley, *Mathematical Expeditions*, раздел 3.3, и Netz and Noel, *The Archimedes Codex*, 150–57. Применение метода к некоторым другим задачам о площадях, объемах и центрах тяжести смотрите в книгах: Stein, *Archimedes*, глава 5, и Edwards, *The Historical Development*, 68–74.
13. Цитируется по книге: Stein, *Archimedes*, 33.
14. Цитируется по книге: Netz and Noel, *The Archimedes Codex*, 66–67.
15. Heath, *The Works of Archimedes*, 17.
16. Dijksterhuis, *Archimedes*, 317.
17. Heath, *The Works of Archimedes*, 17.
18. Stein, *Archimedes*, 39–41.
19. Heath, *The Works of Archimedes*, 1.
20. Смотрите Netz and Noel, *The Archimedes Codex*; авторы с пафосом излагают историю утерянной рукописи и ее повторного обнаружения. Этому событию посвящен эпизод американского научно-популярного документального сериала *Nova*, а сопутствующий сайт содержит хронологию, интервью и интерактивные инструменты; смотрите <http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/>, а также Stein, *Archimedes*, глава 4.
21. Rorres, *Archimedes in the Twenty-First Century*.
22. О математике, которая стоит за фильмами, созданными с помощью компьютерных технологий, смотрите книгу McAdams et al., *Crashing Waves*.
23. Zorin and Schröder, *Subdivision for Modeling*, 18.

24. DreamWorks, «Why Computer Animation Looks So Darn Real», July 9, 2012, <https://mashable.com/2012/07/09/animation-history-tech/#uYHyf6hO.Zq3>.
25. Подробности создания «Шрека» ищите на сайте <http://cinema.com/articles/463/shrek-production-information.phtml>.
26. «NVIDIA Collaborates with Weta to Accelerate Visual Effects for Avatar», http://www.nvidia.com/object/wetadigital_avatar.html, и Barbara Robertson, «How Weta Digital Handled Avatar», Studio Daily, January 5, 2010, <http://www.studiodaily.com/2010/01/how-weta-digital-handled-avatar/>.
27. «NVIDIA Collaborates with Weta».
28. Burr Snider, «The Toy Story Story», Wired, December 1, 1995, <https://www.wired.com/1995/12/toy-story/>.
29. Там же.
30. Ian Failes, Geri's Game' Turns 20: Director Jan Pinkava Reflects on the Game-Changing Pixar Short, November 25, 2017, <https://www.cartoonbrew.com/cgi/geris-game-turns-20-director-jan-pinkava-reflects-game-changing-pixar-short-154646.html>. Фильм можно посмотреть на <https://www.youtube.com/watch?v=9IYRC7g2ICg>.
31. DeRose et al., Subdivision Surfaces. С особенностями компьютерной анимации можно познакомиться на уроках в Академии Хана, созданных в сотрудничестве с Pixar по адресу: <https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/modeling-character>. Учащиеся и учителя могут также попробовать другие уроки, предлагаемые в Pixar in a Box по адресу: <https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar>. Это отличный способ увидеть, как математика используется для создания кино.
32. DreamWorks, Why Computer Animation Looks So Darn Real.
33. Deuffhard et al., Mathematics in Facial Surgery; Zachow et al., Computer-Assisted Planning; и Zachow, Computational Planning.
34. Rorres, Archimedes in the Twenty-First Century, глава 6, и <https://www.math.nyu.edu/~crrorres/Archimedes/Screw/Applications.html>.
35. Справедливости ради, у Архимеда есть одна работа, связанная с движением, хотя это некая искусственная форма движения, обусловленная математикой, а не физикой. Смотрите его труд «О спиралях», воспроизведенный в книге: Heath, The Works of Archimedes, 151–88. Здесь Архимед предвосхитил современные идеи полярной системы координат и параметрических уравнений для точки, движущейся в плоскости. В частности, он рассмотрел точку, равномерно движущуюся в радиальном направлении от начала координат, в то время как сам этот радиальный луч равномерно вращается. Ученый показал, что траектория

такой точки будет кривой, известной сегодня как спираль Архимеда. Затем, найдя сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2$ и применив метод исчерпывания, он нашел площадь, ограниченную одним витком спирали и радиальным лучом. Смотрите книги Stein, Archimedes, глава 9; Edwards, The Historical Development, 54–62; и Katz, History of Mathematics, 114–15.

Глава 3

1. Galileo, The Assayer (1623). Фрагменты переведены в работе: Stillman Drake, Discoveries and Opinions of Galileo (New York: Doubleday, 1957), 237–38, <https://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm>.
2. Johannes Kepler, The Harmony of the World, перевод: E. J. Aiton, A. M. Duncan, and J. V. Field, Memoirs of the American Philosophical Society 209 (1997): 304.
3. Там же.
4. Plato, Republic (Hertfordshire: Wordsworth, 1997), 240.
5. Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia, 17–20.
6. Katz, History of Mathematics, 406.
7. Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia, 24–25, и James Evans, Aristarchus of Samos, Encyclopedia Britannica, <https://www.britannica.com/biography/Aristarchus-of-Samos>.
8. Evans, Aristarchus of Samos.
9. Katz, History of Mathematics, 145–57.
10. Martínez, Burned Alive.
11. Проект Galileo на <http://galileo.rice.edu/galileo.html> — превосходный онлайн-ресурс, посвященный жизни и работе ученого. Прекрасная биография Галилея для широкой аудитории — книга Fermi and Bernardini, Galileo and the Scientific Revolution, впервые опубликованная в 1961 году. Хорошим знакомством с Галилеем станет Asimov's Biographical Encyclopedia, 91–96, то же самое можно сказать о книге Kline, Mathematics in Western Culture, 182–95. О научных трудах смотрите работы Drake, Galileo at Work, и Michele Camerota, Galilei, Galileo в Gillispie, Complete Dictionary, 96–103.
12. <http://galileo.rice.edu/fam/marina.html>.
13. Sobel, Galileo's Daughter. Письма сестры Марии Челесте своему отцу можно найти по адресу: <http://galileo.rice.edu/fam/daughter.html#letters>
14. Книга есть в бесплатном доступе по адресу: <http://oll.libertyfund.org/titles/galilei-dialogues-concerning-two-new-sciences>.
15. Kline, Mathematics in Western Culture, 188–90.

16. Galileo, Discourses, 179, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_607.
17. Там же, 190, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_516.
18. Там же, 178, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_607.
19. Там же, 109, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_242.
20. Fermi and Bernardini, Galileo and the Scientific Revolution, 17–20, и Kline, Mathematics in Western Culture, 182.
21. Galileo, Discourses, 140, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_338.
22. Там же, 139, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_335.
23. Там же, 138, http://oll.libertyfund.org/titles/753#Galileo_0416_329.
24. Strogatz, Sync, глава 5, и Richard Newrock, What Are Josephson Junctions? How Do They Work?, Scientific American, <https://www.scientificamerican.com/article/what-are-josephson-juncti/>.
25. Sobel, Longitude.
26. Thompson, Global Positioning System, и <https://www.gps.gov>.
27. О жизни и трудах Кеплера смотрите Owen Gingerich, Johannes Kepler, в Gillispie, Complete Dictionary, vol. 7, в интернете по адресу <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14>, с дополнениями, сделанными J. R. Voelkel в томе 22. Смотрите также Kline, Mathematics in Western Culture, 110–25; Edwards, The Historical Development, 99–103; Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia, 96–99; Simmons, Calculus Gems, 69–83; и Burton, History of Mathematics, 355–60.
28. Цитируется по: Gingerich, Johannes Kepler, <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14>.
29. Там же.
30. Там же.
31. Там же.
32. Там же.
33. Кеплер в Astronomia Nova, цитируется по Owen Gingerich, The Book Nobody Read: Chasing the Revolutions of Nicolaus Copernicus (New York: Penguin, 2005), 48.
34. Цитируется по: Gingerich, Johannes Kepler, <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/johannes-kepler#kjen14>.
35. Цитируется по: Martínez, Science Secrets, 34.
36. Koestler, The Sleepwalkers, 33.

Глава 4

1. Katz, *Ideas of Calculus*; Katz, *History of Mathematics*, главы 6 и 7; и Burton, *History of Mathematics*, 238–85.
2. Katz, *Ideas of Calculus*, и J. J. O'Connor and E. F. Robertson, Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham.html>.
3. Katz, *History of Mathematics*, 369–75.
4. Там же, 375–78.
5. Alexander, *Infinitesimal*, обсуждает их споры с иезуитами по поводу бесконечно малых, которые считались опасными не только с математических, но и с религиозных позиций.
6. О его жизни смотрите Clarke, Descartes; Simmons, *Calculus Gems*, 84–92; и Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 106–8. Краткое изложение его математики и физики для широкой аудитории смотрите в книгах: Kline, *Mathematics in Western Culture*, 159–81; Edwards, *The Historical Development*; Katz, *History of Mathematics*, разделы 11.1 и 12.1; и Burton, *History of Mathematics*, раздел 8.2. Серьезный исторический анализ его трудов по математике и физике смотрите в работах: Michael S. Mahoney, *Descartes: Mathematics and Physics*, в Gillispie, *Complete Dictionary*, также онлайн в *Encyclopedia Britannica*, <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/descartes-mathematics-and-physics>.
7. René Descartes, *Les Passions de l'Ame* (1649), Цитируется по: Guicciardini, Isaac Newton, 31.
8. Henry Woodhead, *Memoirs of Christina, Queen of Sweden* (London: Hurst and Blackett, 1863), 285.
9. Оптимальное рассмотрение можно найти в книге Mahoney, *Mathematical Career*. Живо и увлекательно о Ферма (словно автор был одним из участников описываемых событий) — Simmons, *Calculus Gems*, 96—105. Если вы не читали Симмонса, обязательно прочитайте.
10. Mahoney, *Mathematical Career*, глава 4.
11. Там же, 171.
12. Я согласен с оценкой в книге Simmons, *Calculus Gems*, 98, как следует распределять заслуги в отношении аналитической геометрии: «На первый взгляд кажется, что труд Декарта выглядит аналитической геометрией, но не является ею; в то время как труд Ферма так не выглядит, но является ею». Более взвешенные взгляды смотрите в книгах: Katz, *History of Mathematics*, 432–42, and Edwards, *The Historical Development*, 95–97.
13. Guicciardini, Isaac Newton, и Katz, *History of Mathematics*, 368–69.

14. Декарт, правило 4 в «Правилах для руководства ума» (1629), как Цитируется по Katz, History of Mathematics, 368–69.
15. Цитируется по: Guicciardini, Isaac Newton, 77.
16. Mahoney, Mathematical Career, 199–201, обсуждает работу Ферма по задаче максимизации, рассмотренной в основном тексте.
17. Там же, 162–65, и Katz, History of Mathematics, 470–72.
18. Austin, What Is... JPEG?, и Higham et al., The Princeton Companion, 813–16.
19. Сайт Timeanddate.com предоставит вам информацию для любого интересующего вас места.
20. Доступное введение в вейвлет-анализ и многочисленные приложения смотрите в: Dana Mackenzie, Wavelets: Seeing the Forest and the Trees, в Beyond Discovery: The Path from Research to Human Benefit, проекте Национальной Академии наук: <http://www.nasonline.org/publications/beyond-discovery/wavelets.pdf>. Затем попробуйте Kaiser, Friendly Guide, Cipra, Parlez-Vous Wavelets?, или Goriely, Applied Mathematics, глава 6. Daubechies, Ten Lectures — знаковая серия лекций по вейвлетам Добеши.
21. Bradley et al., FBI Wavelet/ Scalar Quantization.
22. Bradley and Brislawn, The Wavelet/Scalar Quantization; Brislawn, Fingerprints Go Digital; и <https://www.nist.gov/itl/iad/image-group/wsqs-bibliography>.
23. Kwan et al., Who Really Discovered Snell's Law?, и Sabra, Theories of Light, 99–105.
24. Mahoney, Mathematical Career, 387–402.
25. Там же, 398.
26. Там же, 400 (мой перевод слов Ферма с французского).
27. Принцип наименьшего времени Ферма предвосхитил более общий принцип наименьшего действия. Занимательное и глубоко поучительное обсуждение этого принципа, включая его основания в квантовой механике, смотрите в: R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, «The Principle of Least Action», Feynman Lectures on Physics, vol. 2, глава 19 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1964), и Feynman, QED.
28. Katz, History of Mathematics, 472–73.
29. Цитируется по: Grattan-Guinness, From the Calculus, 16.
30. Цитируется по: Mahoney, Mathematical Career, 177.
31. Simmons, Calculus Gems, 240–41; и Katz, History of Mathematics, 481–84.
32. Katz, History of Mathematics, 485, автор объясняет, почему, по его ощущениям, Ферма не заслуживает звания изобретателя анализа, и приводит убедительные аргументы.

Глава 5

1. Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 2, и Katz, *History of Mathematics*, раздел 10.4.
2. Braun, *Differential Equations*, раздел 1.3.

Глава 6

1. Bolt, *Faster than Lightning*.
2. Jonathan Snowden, *Remembering Usain Bolt's 100m Gold in 2008*, *Bleacherreport.com* (August 19, 2016), <https://www.olympicchannel.com/en/stories/news/detail/back-to-beijing-usain-bolt-s-100m-world-record-with-an-untied-shoelace/>, и Eriksen et al., *How Fast*. Видео его потрясающего выступления смотрите на <https://www.youtube.com/watch?v=qs1bf8L9n10>
3. Snowden, *Remembering Usain Bolt's*.
4. Мой анализ основан на работе A. Oldknow, *Analysing Men's 100m Sprint Times with TI-Nspire*, <https://rcuk-portscience.wikispaces.com/file/view/Analysing+men+100m+Nspire.pdf>. Детали этих двух исследований могут слегка отличаться, поскольку мы использовали разные методы аппроксимации, но в целом наши заключения одинаковы.
5. Graubner and Nixdorf, *Biomechanical Analysis*.
6. Цитата из *Picasso Speaks, The Arts* (May 1923), взято на http://www.gallerywalk.org/PM_Picasso.html из Alfred H. Barr Jr., *Picasso: Fifty Years of His Art* (New York: Arno Press, 1980).

Глава 7

1. Биографическую информацию смотрите в книге: Gleick, *Isaac Newton*. Смотрите также Westfall, *Never at Rest*, и I. B. Cohen, *Isaac Newton* в томе 10 Gillispie, *Complete Dictionary*, с дополнениями Г. Смита (G. E. Smith) и У. Ньюмана (W. Newman) в томе 23. О математике Ньютона смотрите Whiteside, *The Mathematical Papers*, тома 1 и 2; Edwards, *The Historical Development*; Grattan-Guinness, *From the Calculus*; Rickey, *Isaac Newton*; Dunham, *Journey Through Genius*; Katz, *History of Mathematics*; Guicciardini, *Reading the Principia*; Dunham, *The Calculus Gallery*; Simmons, *Calculus Gems*; Guicciardini, *Isaac Newton*; Stillwell, *Mathematics and Its History*; и Burton, *History of Mathematics*.
2. René Descartes, *The Geometry of René Descartes: With a Facsimile of the First Edition*, перевод: David E. Smith и Marcia L. Latham (Mineola, NY: Dover, 1954), 91. В течение двадцати лет было показано, что Декарт

ошибался в отношении невозможности найти точную длину дуг кривых; смотрите Katz, *History of Mathematics*, 496–98.

3. Я осовременнил здесь устаревший слог Ньютона для облегчения чтения. Письмо 193 от Ньютона Коллинзу от 8 ноября 1676 года, в книге: Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 179. Опушенный материал касается технических подробностей о классе триномиальных уравнений, к которым относится его заявление. Смотрите A Manuscript by Newton on Quadratures, рукопись 192, там же, 178.
4. Письмо 193 от Ньютона Коллинзу от 8 ноября 1676 года, там же, 180. Я снова упростил стиль изложения Ньютона.
5. Katz, *History of Mathematics*, 498–503, показывает, что Джеймс Грегори и Исаак Барроу связывали задачу определения площади с задачами о касательных и тем самым предвосхищали основную теорему, но заключает, что «никто из этих людей в 1670 году не мог соединить такие методы в реальный вычислительный инструмент для решения задач». Во врезке на странице 521 автор приводит убедительные аргументы, что Ньютон и Лейбниц (в отличие от «Ферма, Барроу и кого бы то ни было еще») заслуживают похвалы за изобретение анализа.
6. Katz, *History of Mathematics*, раздел 8.4.
7. Вы можете познакомиться в интернете с тетрадью, в которой Ньютон писал в колледже. Адрес страницы, приведенной в основном тексте: <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/260>.
8. Мой рассказ о ранних годах жизни Ньютона основан на книге: Gleick, *Isaac Newton*.
9. Whiteside, *The Mathematical Papers*, том 1, 96–142, и Katz, *History of Mathematics*, раздел 12.5. Эдвардс дает увлекательный обзор трудов Валлиса по интерполяции и бесконечным произведениям и показывает, как из попыток обобщить эти результаты появилась работа Ньютона о бесконечных рядах; смотрите Edwards, *The Historical Development*, глава 7. Мы знаем, когда Ньютон сделал эти открытия, потому что он датировал их в записи на странице 14v своей тетради (<https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/32>). Ньютон писал: «В году 1664 незадолго перед Рождеством я... позаимствовал работы Валлиса и впоследствии сделал эти Примечания... зимой 1664–1665 годов. В то время я нашел метод бесконечных рядов. А летом 1665 года, изгнанный из Кембриджа чумой, я вычислил площадь гиперболы... тем же самым методом».
10. Edwards, *The Historical Development*, 178–87, и Katz, *History of Mathematics*, 506–59, показывают этапы размышлений Ньютона, когда он получал свои результаты для степенных рядов.

11. Письмо 188 от Ньютона Ольденбургу от 24 октября 1676 года, в книге: Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 133.
12. Katz, *Ideas of Calculus*; Katz, *History of Mathematics*, 494–96.
13. Эта строка появляется в знаменитом первом письме (*epistola prior*) — ответе Ньютона на первый запрос Лейбница, отправленном через Генри Ольденбурга в качестве посредника; смотрите письмо 165 от Ньютона Ольденбургу от 13 июня 1676 года, в книге: Turnbull, *Correspondence of Isaac Newton*, 39.
14. Черновик письма Ньютона Пьеру де Майзо, написанный в 1718 году, когда Ньютон пытался доказать свой приоритет в изобретении анализа перед Лейбницем; доступен в интернете по адресу: <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03968/1349> в собрании библиотеки Кембриджского университета. Полная цитата захватывает дух: «В начале года 1665 я нашел метод аппроксимирующих рядов и правило для разложения любой степени любого бинорма в такой ряд. В том же году в мае я установил метод касательных Грегори и Слюза, в ноябре у меня был прямой метод флюксий; в следующем году в январе — теория цветов; в следующем мае я пришел к обратному методу флюксий. В том же самом году я начал думать о тяготении, простирающемся до орбиты Луны, и (узнав, как оценить силу, с которой шар, вращающийся внутри сферы, давит на поверхность сферы) из правила Кеплера о времени обращения планет, находящемся в отношении полуторной степени (три к двум) к их расстояниям от центров их орбит, я вывел, что силы, которые удерживают планеты на их орбитах, должны быть обратно пропорциональны квадратам расстояний от центров, вокруг которых они обращаются: таким образом сравнил силу, необходимую для удержания Луны на ее орбите, с силой тяжести на поверхности Земли, и обнаружил, что они весьма хорошо соответствуют. Все это было в два чумных года — 1665 и 1666. В те дни я был в расцвете сил юности и думал о математике и философии больше, чем когда-либо впоследствии».
15. Цитируется по: Whiteside, *The Mathematical Principles*, отсылка к его ссылке 2.
16. Alexander, *Infinitesimal*, излагает историю яростных сражений Гоббса с Валлисом, которые были настолько же политическими, насколько математическими. Глава 7 говорит о Гоббсе как человеке, мнящем себя геометром.
17. Цитируется по: Stillwell, *Mathematics and Its History*, 164.
18. Там же.
19. Цитируется по: Guicciardini, *Isaac Newton*, 343.
20. Там же.

Глава 8

1. Письмо от Исаака Барроу к Джону Коллинзу от 20 августа 1669 года, Цитируется по: Gleick, Isaac Newton, 68.
2. Письмо 158 от Лейбница к Ольденбургу от 2 мая 1676 года, в книге: Turnbull, Correspondence of Isaac Newton, 4. Больше о переписке между Ньютоном и Лейбницем можно найти в работе: Mackinnon, Newton's Teaser. Guicciardini, Isaac Newton, 354–61, дает особенно четкий и полезный анализ игры в математические кошки-мышки в письмах между Ньютоном и Лейбницем. Оригиналы писем есть в Turnbull, Correspondence of Isaac Newton; в частности смотрите письма 158 (первоначальная просьба Лейбница, отправленная Ньютону через Ольденбурга), 165 (первое письмо Ньютона, *epistola prior*, краткое и отпугивающее), 172 (просьба Лейбница о разъяснениях), 188 (второе письмо Ньютона, *epistola posterior*, которое написано вежливее и яснее, но предназначено для демонстрации того, кто тут хозяин) и 209 (Лейбниц отвечает ударом на удар, хотя и вежливо, и дает понять, что тоже владеет анализом).
3. Одна из самых известных колкостей в *epistola prior*, письме 165 от Ньютона Ольденбургу от 13 июня 1676 года. Смотрите Turnbull, Correspondence of Isaac Newton, 39.
4. Письма 188 от Ньютона Ольденбургу от 24 октября 1676 года, там же, 130.
5. Там же.
6. Там же.
7. Там же. Шифрование скрывает знание Ньютоном основной теоремы и центральных проблем анализа: «задано уравнение с любым количеством флюэнт, найти флюксии, и наоборот». Смотрите также стр. 153, прим. 25.
8. Письмо от Лейбница маркизу Лопиталю, 1694, фрагменты в Child, Early Mathematical Manuscripts. Также Цитируется по книге: Edwards, The Historical Development, 244.
9. Mates, Philosophy of Leibniz, 32.
10. Там же.
11. О жизни Лейбница смотрите работы Hofmann, Leibniz in Paris; Asimov, Asimov's Biographical Encyclopedia; и Mates, Philosophy of Leibniz. О философии Лейбница смотрите Mates, Philosophy of Leibniz. О математике Лейбница смотрите Child, Early Mathematical Manuscripts; Edwards, The Historical Development; Grattan-Guinness, From the Calculus; Dunham, Journey Through Genius; Katz, History of Mathematics;

- Guicciardini, *Reading the Principia*; Dunham, *The Calculus Gallery*; Simmons, *Calculus Gems*; Guicciardini, *Isaac Newton*; Stillwell, *Mathematics and Its History*; и Burton, *History of Mathematics*.
12. Особенно хороша работа Edwards, *The Historical Development*, глава 9. Смотрите также Katz, *History of Mathematics*, раздел 12.6, и Grattan-Guinness, *From the Calculus*, глава 2.
 13. Например, он писал: «Мы должны прикладывать усилия, чтобы уберечь чистую математику от метафизических споров. Мы достигнем этого, если перестанем беспокоиться, реальны ли бесконечно большие и бесконечно малые в величинах, в числах или в линиях, а будем использовать бесконечно большие и бесконечно малые как подходящие выражения для сокращения рассуждений». Цитируется по: Guicciardini, *Reading the Principia*, 160.
 14. Лейбниц в письме де Боссу* в 1706 году. Цитируется по: Guicciardini, *Reading the Principia*, 159.
 15. Цитируется там же, 166.
 16. Edwards, *The Historical Development*, 259.
 17. Цитируется там же.
 18. Там же, 236–38. На самом деле Лейбница интересовала сумма величин, обратных треугольным числам, которая вдвое больше суммы, рассмотренной в тексте книги. Смотрите также Grattan-Guinness, *From the Calculus*, 60–62.
 19. Из письма Эренфриду Вальтеру фон Чирнхаусу** в 1679 году. Цитируется по Guicciardini, *Reading the Principia*, 145.
 20. Статистику для ВИЧ и СПИД смотрите на сайте <https://ourworldindata.org/hiv-aids/>. Историю вируса и попыток с ним бороться смотрите на сайте <https://www.avert.org/professionals/history-hiv-aids/overview>.
 21. The Stages of HIV Infection, AIDSinfo, <https://aidsinfo.nih.gov/understanding-hiv-aids/fact-sheets/19/46/the-stages-of-hiv-infection>.
 22. Ho et al., *Rapid Turnover*; Perelson et al., *HIV-1 Dynamics*; Perelson, *Modelling Viral and Immune System*; и Murray, *Mathematical Biology* 1.
 23. Результаты вероятностных расчетов впервые появились в работе: Perelson et al., *Dynamics of HIV-1*.
 24. Gorman, Dr. David Ho.
 25. Американское математическое общество, премия Макса Дельбрюка 2017 года в биологической физике, <https://www.aps>.

* Бартоломеус де Босс — иезуитский теолог и философ. Прим. пер.

** Немецкий философ и математик. Прим. пер.

org/programs/honors/prizes/prizerecipient.cfm?first_nm=Alan&last_nm=Perelson&year=2017.

26. Multidisciplinary Team Aids Understanding of Hepatitis C Virus and Possible Cure, Los Alamos National Laboratory, March 2013, <http://www.lanl.gov/discover/publications/connections/2013-03/understanding-hep-c.php>. Введение в математическое моделирование гепатита С смотрите в работе: Perelson and Guedj, *Modelling Hepatitis C*.

Глава 9

1. О многих направлениях, отпочковавшихся от анализа с 1700-х до нашего времени, смотрите Kline, *Mathematics in Western Culture*; Boyer, *The History of the Calculus*; Edwards, *The Historical Development*; Grattan-Guinness, *From the Calculus*; Katz, *History of Mathematics*; Dunham, *The Calculus Gallery*; Stewart, *In Pursuit of the Unknown*; Higham et al., *The Princeton Companion*; и Goriely, *Applied Mathematics*.
2. Peterson, *Newton's Clock*; Guicciardini, *Reading the Principia*; Stewart, *In Pursuit of the Unknown*; и Stewart, *Calculating the Cosmos*.
3. Kline, *Mathematics in Western Culture*, 234–86, о значительном влиянии, которое труды Ньютона оказали на ход западной философии, религии, эстетики и литературы, а также на науку и математику. Смотрите также W. Bristow, *Enlightenment*, <https://plato.stanford.edu/entries/enlightenment/>.
4. D. Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, том 2 (Edinburgh: Thomas Constable, 1855), 158.
5. Об удивительной истории этого яблока смотрите Gleick, *Isaac Newton*, 55–57, и примечание 18 на стр. 207. Смотрите также Martínez, *Science Secrets*, глава 3.
6. Черновик письма Ньютона Пьеру де Майзо, написанный в 1718 году; доступен в интернете по адресу: <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03968/1349> в собрании Библиотеки Кембриджского университета.
7. Asimov, *Asimov's Biographical Encyclopedia*, 138, дает одну из версий этой известной истории.
8. Katz, *History of Mathematics*, 516–19, описывает геометрические аргументы Ньютона. Guicciardini, *Reading the Principia*, обсуждает, как современники Ньютона реагировали на «Начала» и в чем состояла их критика (некоторые их возражения звучали убедительно). Современный вывод законов Кеплера из закона обратных квадратов дается в книге: Simmons, *Calculus Gems*, 326–35.

9. Jones, John Couch Adams, и Sheehan and Thurber, John Couch Adams's Asperger Syndrome.
10. Shetterly, Hidden Figures, обеспечил Кэтрин Джонсон то признание, которое она давно заслуживала. Больше о ее жизни читайте на сайте <https://www.nasa.gov/content/katherine-johnson-biography>. О ее вкладе в развитие математики смотрите Skopinski and Johnson, Determination of Azimuth Angle. Также смотрите <https://www.worldcat.org/title/determination-of-azimuth-angle-at-burnout-for-placing-a-satellite-over-a-selected-earth-position/oclc/52200446> и <https://ima.org.uk/5580/hidden-figures-impact-mathematics/>.
11. Sarah Lewin, «NASA Facility Dedicated to Mathematician Katherine Johnson», Space.com, May 5, 2016, <https://www.space.com/32805-katherine-johnson-langley-building-dedication.html>.
12. Цитируется по: Kline, Mathematics in Western Culture, 282. Источник описания вечеринки — дневник хозяина, художника Бенджамина Хейдона, фрагменты в: Ainger, Charles Lamb, 84–86.
13. Cohen, Science and the Founding Fathers, убедительно обосновывает влияние Ньютона на Джефферсона и «эхо Ньютона» в Декларации независимости; также смотрите The Declaration of Independence, [http://math.virginia.edu/history/Jefferson/jeff_r\(4\).htm](http://math.virginia.edu/history/Jefferson/jeff_r(4).htm). Больше о Джефферсоне и математике ищите в лекции Джона Фовела: John Fauvel, When I Was Young, Mathematics Was the Passion of My Life': Mathematics and Passion in the Life of Thomas Jefferson по адресу: http://math.virginia.edu/history/Jefferson/jeff_r.htm.
14. Письмо Томаса Джефферсона Джону Адамсу от 21 января 1812 года найдете по адресу: <https://founders.archives.gov/documents/Jefferson/03-04-02-0334>.
15. Cohen, Science and the Founding Fathers, 101. Смотрите также Moldboard Plow, Thomas Jefferson Encyclopedia, <https://www.monticello.org/site/plantation-and-slavery/moldboard-plow>, и Dig Deeper — Agricultural Innovations, <https://www.monticello.org/site/jefferson/dig-deeper-agricultural-innovations>.
16. Письмо Томаса Джефферсона сэру Джону Синклеру от 23 марта 1798 года, <https://founders.archives.gov/documents/Jefferson/01-30-02-0135>.
17. Hall and Hall, Unpublished Scientific Papers, 281.
18. Об обыкновенных дифференциальных уравнениях и их применении смотрите Simmons, Differential Equations. Также смотрите Braun, Differential Equations; Strogatz, Nonlinear Dynamics; Higham et al., The Princeton Companion; и Goriely, Applied Mathematics.

19. Об уравнениях в частных производных и их применении смотрите Farlow, *Partial Differential Equations*, и Haberman, *Applied Partial Differential Equations*. Смотрите также Higham et al., *The Princeton Companion*, and Goriely, *Applied Mathematics*.
20. Norris and Wagner, Boeing 787, и <http://www.boeing.com/commercial/787/by-design/#/featured>.
21. Jason Paur, Why ‘Flutter’ Is a 4-Letter Word for Pilots, *Wired* (March 25, 2010), <https://www.wired.com/category/gamelif/?p=21063>.
22. Szpiro, *Pricing the Future*, и Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 17.
23. Ermentrout and Terman, *Mathematical Foundations*, и Rinzel, *Discussion*.
24. Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 13, и Ferreira, *Perfect Theory*. Смотрите также Greene, *The Elegant Universe*, and Isaacson, *Einstein*.
25. Stewart, *In Pursuit of the Unknown*, глава 14.

Глава 10

1. Körner, *Fourier Analysis*, and Kline, *Mathematics in Western Culture*, глава 19. О его жизни и трудах смотрите Dirk J. Struik, *Joseph Fourier*, *Encyclopedia Britannica*, <https://www.britannica.com/biography/Joseph-Baron-Fourier>. Смотрите также Grattan-Guinness, *From the Calculus*; Stewart, *In Pursuit of the Unknown*; Higham et al., *The Princeton Companion*; и Goriely, *Applied Mathematics*.
2. Математическая составляющая уравнения теплопроводности Фурье обсуждается в книгах: Farlow, *Partial Differential Equations*, Katz, *History of Mathematics*, и Haberman, *Applied Partial Differential Equations*.
3. О математике колеблющихся струн, рядах Фурье и волновом уравнении смотрите Farlow, *Partial Differential Equations*; Katz, *History of Mathematics*; Haberman, *Applied Partial Differential Equations*; Stillwell, *Mathematics and Its History*; Burton, *History of Mathematics*; Stewart, *In Pursuit of the Unknown*; и Higham et al., *The Princeton Companion*.
4. Оригинальные изображения воспроизведены на сайтах <https://publicdomainreview.org/collections/chladni-figures-1787/> и <http://www.sites.hps.cam.ac.uk/whipple/explore/acoustics/ernstchladni/chladniplates/>. Современную демонстрацию смотрите на видео Стива Моулда (Steve Mould) под названием *Random Couscous Snaps into Beautiful Patterns*, https://www.youtube.com/watch?v=CR_XL192wXw&feature=youtu.be и видео от Physics Girl под названием *Singing Plates — Standing Waves on Chladni Plates*, <https://www.youtube.com/watch?v=wYoxOJDrZzw>.

5. Ее теория фигур Хладни обсуждается в книге: Bucciarelli and Dworsky, Sophie Germain. Биографию смотрите на сайтах: <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain.htm>, <http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/sophie-germain.html>.
6. Цитируется по: Newman, *The World of Mathematics*, том 1, 333.
7. Весьма доступное объяснение того, как работает микроволновая печь, а также демонстрация предложенного мною эксперимента, содержатся в ролике *How a Microwave Oven Works*, <https://www.youtube.com/watch?v=kp33ZprO0Ck>. Чтобы измерить скорость света с помощью микроволновки, вы можете также использовать шоколадку, как показано здесь: <https://www.youtube.com/watch?v=GH5W6xEeY5U>. О предыстории микроволновых печей и сладкой липкой массе, оказавшейся в кармане Перси Спенсера, смотрите Matt Blitz, *The Amazing True Story of How the Microwave Was Invented by Accident*, *Popular Mechanics* (February 23, 2016), <https://www.popularmechanics.com/technology/gadgets/a19567/how-the-microwave-was-invented-by-accident/>.
8. Kevles, *Naked to the Bone*, 145–72; Goriely, *Applied Mathematics*, 85–89; и https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/. Первая статья, в которой решается проблема восстановления с помощью анализа и рядов Фурье: Cormack, *Representation of a Function*.
9. Подробнее о компьютерной томографии с помощью анализа, рядов Фурье и интегральных уравнений: Cormack, *Representation of a Function*. Нобелевская лекция автора доступна в сети по адресу: https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-lecture.pdf.
10. Историю Годфри Хаунсфилда, группы Beatles и изобретения томографа смотрите в работе: Goodman, *The Beatles*, и https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/perspectives.html.
11. Цитата появляется на странице 563 его Нобелевской лекции: <https://www.nobelprize.org/prizes/medicine/1979/cormack/facts/>.

Глава 11

1. Fuller, *The Writhing Number*. Смотрите также Pohl, *DNA and Differential Geometry*.
2. Bates and Maxwell, *DNA Topology*, и Wasserman and Cozzarelli, *Biochemical Topology*.
3. Ernst and Sumners, *Calculus for Rational Tangles*.
4. Liu, *DNA Topoisomerase Poisons*.

5. Kline, Mathematics in Western Culture; C. Hoefer, Causal Determinism, <https://plato.stanford.edu/entries/determinism-causal/>.
6. Laplace, Philosophical Essay on Probabilities, 4.
7. Cooke, Mathematics of Sonya Kovalevskaya, и Goriely, Applied Mathematics, 54–57. Ее часто называют другими именами, мне привычнее Соня Ковалевская. В сети ее биографию можно найти на сайтах: Becky Wilson, Sofia Kovalevskaya, Biographies of Women Mathematicians, <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/kova.htm>.
8. Wisdom et al., «Chaotic Rotation».
9. Diacu and Holmes, Celestial Encounters.
10. Gleick, Chaos; Stewart, Does God Play Dice?; и Strogatz, Nonlinear Dynamics.
11. Lighthill, The Recently Recognized Failur».
12. Sussman and Wisdom, Chaotic Evolution.
13. Gleick, Chaos; Stewart, Does God Play Dice?; Strogatz, Nonlinear Dynamics; и Diacu and Holmes, Celestial Encounters.
14. McMurran and Tattersall, Mathematical Collaboration, и L. Jardine, Mary, Queen of Maths, BBC News Magazine, <https://www.bbc.com/news/magazine-21713163>. Биографию смотрите по адресу: <http://www.ams.org/notices/199902/mem-cartwright>.
15. Цитируется по: L. Jardine, Mary, Queen of Maths.
16. Dyson, Review of Nature's Numbers.
17. Ermentrout and Terman, Mathematical Foundations; Rinzel, Discussion; и Edelstein-Keshet, Mathematical Models.
18. Введение в математическое моделирование эпидемий, сердечных ритмов, рака и опухолей мозга смотрите в книге: Edelstein-Keshet, Mathematical Models; Murray, Mathematical Biology 1; и Murray, Mathematical Biology 2.
19. Mitchell, Complexity.
20. Предысторию AlphaZero и компьютерных шахмат ищите на сайте <https://www.technologyreview.com/s/609736/alpha-zeros-alien-chess-shows-the-power-and-the-peculiarity-of-ai/>. Оригинал препринта, описывающий AlphaZero, находится по адресу: <https://arxiv.org/abs/1712.01815>. Видео анализа партий между AlphaZero и Stockfish смотрите на <https://www.youtube.com/watch?v=Ud8F-cNsa-k> и <https://www.youtube.com/watch?v=6z1o48Sgrck>.
21. Davies, Whither Mathematics?, <https://www.ams.org/notices/200511/comm-davies.pdf>.
22. Hoffman, The Man Who Loved Only Numbers.

Заключение

1. Feynman, QED, и Farmelo, The Strangest Man.
2. Peskin and Schroeder, Introduction to Quantum Field Theory, 196–98. Базовые сведения смотрите на сайте <http://scienceblogs.com/principles/2011/05/05/the-most-precisely-tested-theo/>.
3. О жизни и трудах Дирака смотрите Farmelo, The Strangest Man. Статья 1928 года, которая вводит уравнение Дирака: Dirac, The Quantum Theory.
4. Dirac, Quantised Singularities.
5. Там же, 71.
6. Kevles, Naked to the Bone, 201–27, и Higham et al., The Princeton Companion, 816–23. О позитронах в ПЭТ смотрите Farmelo, The Strangest Man, и Rich, Brief History.
7. Isaacson, Einstein, и Pais, Subtle Is the Lord.
8. Ferreira, Perfect Theory, и Greene, The Elegant Universe.
9. Больше информации о GPS и релятивистском замедлении времени вы найдете в книге Stewart, In Pursuit of the Unknown, и на сайте <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/gps.html>.
10. Levin, Black Hole Blues — это лиричное повествование о поиске гравитационных волн. Больше информации смотрите на сайтах <https://brilliant.org/wiki/gravitational-waves/> и https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2017/press.html. О роли анализа, компьютеров и численных методов в этом открытии смотрите R. A. Eisenstein, Numerical Relativity and the Discovery of Gravitational Waves, <https://arxiv.org/pdf/1804.07415.pdf>.

Библиография

- Adams, Douglas. *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. London: Pan Books, 1979.
- Ainger, Alfred. Charles Lamb. New York: Harper and Brothers, 1882.
- Alexander, Amir. *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*. New York: Farrar, Straus and Giroux, 2014.
- Asimov, Isaac. *Asimov's Biographical Encyclopedia of Science and Technology*. Rev. ed. New York: Doubleday, 1972.
- Austin, David. «What Is... JPEG?,» *Notices of the American Mathematical Society* 55, no. 2 (2008): 226–29. <http://www.ams.org/notices/200802/tx080200226p.pdf>.
- Ball, Philip. «A Century Ago Einstein Sparked the Notion of the Laser» *Physics World* (August 31, 2017). <https://physicsworld.com/a/a-century-ago-einstein-sparked-the-notion-of-the-laser/>.
- Barrow, John D., and Frank J. Tipler. *The Anthropic Cosmological Principle*. New York: Oxford University Press, 1986.
- Bates, Andrew D., and Anthony Maxwell. *DNA Topology*. New York: Oxford University Press, 2005.
- Bolt, Usain. *Faster than Lightning: My Autobiography*. New York: Harper-Sport, 2013.
- Boyer, Carl B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Mineola, NY: Dover, 1959.
- Bradley, Jonathan N., and Christopher M. Brislawn. «The Wavelet/Scalar Quantization Compression Standard for Digital Fingerprint Images.» *IEEE International Symposium on Circuits and Systems* 3 (1994): 205–8.
- Bradley, Jonathan N., Christopher M. Brislawn, and Thomas Hopper. «FBI Wavelet/Scalar Quantization Standard for Gray-Scale Fingerprint Image Compression.» *Proc. SPIE 1961, Visual Information Processing II* (27 August 1993). DOI: 10.1117/12.150973; <https://doi.org/10.1117/12.150973>; http://helmut.knaust.info/class/201330_NREUP/spie93_Fingerprint.pdf.

- Braun, Martin. *Differential Equations and Their Applications*. 3rd ed. New York: Springer, 1983.
- Brislaw, Christopher M. «Fingerprints Go Digital.» *Notices of the American Mathematical Society* 42, no. 11 (1995): 1278–83.
- Bucciarelli, Louis L., and Nancy Dworsky. *Sophie Germain: An Essay in the History of Elasticity*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, 1980.
- Burkert, Walter. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Translated by E. L. Minar Jr. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972.
- Burton, David M. *The History of Mathematics*. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
- Calaprice, Alice. *The Ultimate Quotable Einstein*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011.
- Carroll, Sean. *The Big Picture: On the Origins of Life, Meaning, and the Universe Itself*. New York: Dutton, 2016.
- Child, J. M. *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago: Open Court, 1920.
- Cipra, Barry. «Parlez-Vous Wavelets?» *What's Happening in the Mathematical Sciences* 2 (1994): 23–26.
- Clarke, Desmond. *Descartes: A Biography*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- Cohen, I. Bernard. *Science and the Founding Fathers: Science in the Political Thought of Thomas Jefferson, Benjamin Franklin, John Adams, and James Madison*. New York: W. W. Norton, 1995.
- Cooke, Roger. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York: Springer, 1984.
- Cormack, Allan M. «Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications.» *Journal of Applied Physics* 34, no. 9 (1963): 2722–27.
- Daubechies, Ingrid C. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- Davies, Brian. «Whither Mathematics?» *Notices of the American Mathematical Society* 52, no. 11 (2005): 1350–56.
- Davies, Paul. *The Goldilocks Enigma: Why Is the Universe Just Right for Life?* London: Allen Lane, 2006.
- DeRose, Tony, Michael Kass, and Tien Truong. «Subdivision Surfaces in Character Animation.» *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (1998): 85–94. DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/280814.280826>; <https://graphics.pixar.com/library/Geri/paper.pdf>.

- Deuffhard, Peter, Martin Weiser, and Stefan Zachow. «Mathematics in Facial Surgery.» *Notices of the American Mathematical Society* 53, no. 9 (2006): 1012–16.
- Diacu, Florin, and Philip Holmes. *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996.
- Dijksterhuis, Eduard J. *Archimedes*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.
- Dirac, Paul A. M. «Quantised Singularities in the Electromagnetic Field.» *Proceedings of the Royal Society of London A* 133 (1931): 60–72. DOI: 10.1098/rspa.1931.0130.
- . «The Quantum Theory of the Electron.» *Proceedings of the Royal Society of London A* 117 (1928): 610–24. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- Drake, Stillman. *Galileo at Work: His Scientific Biography*. Chicago: University of Chicago Press, 1978.
- Dunham, William. *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
- . *Journey Through Genius*. New York: John Wiley and Sons, 1990.
- Dyson, Freeman J. «Review of Nature's Numbers by Ian Stewart.» *American Mathematical Monthly* 103, no. 7 (August/September 1996): 610–12. DOI: 10.2307/2974684.
- Edelstein-Keshet, Leah. *Mathematical Models in Biology*. 8th ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- Edwards, C. H., Jr. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer, 1979.
- Einstein, Albert. «Physics and Reality.» *Journal of the Franklin Institute* 221, no. 3 (1936): 349–82.
- . «Zur Quantentheorie der Strahlung (On the Quantum Theory of Radiation).» *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917): 121–28. English translation at <http://web.ihep.su/dbserv/compas/src/einstein17/eng.pdf>.
- Eriksen, H. K., J. R. Kristiansen, Ø. Langangen, and I. K. Wehus. «How Fast Could Usain Bolt Have Run? A Dynamical Study.» *American Journal of Physics* 77, no. 3 (2009): 224–28.
- Ermentrout, G. Bard, and David H. Terman. *Mathematical Foundations of Neuroscience*. New York: Springer, 2010.
- Ernst, Claus, and DeWitt Sumners. «A Calculus for Rational Tangles: Applications to DNA Recombination.» *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 108, no. 3 (1990): 489–515.
- Farlow, Stanley J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Mineola, NY: Dover, 1993.

- Farmelo, Graham. *The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Mystic of the Atom*. New York: Basic Books, 2009.
- Fermi, Laura, and Gilberto Bernardini. *Galileo and the Scientific Revolution*. Mineola, NY: Dover, 2003.
- Ferreira, Pedro G. *The Perfect Theory*. Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2014.
- Feynman, Richard P. *QED: The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986.
- Forbes, Nancy, and Basil Mahon. *Faraday, Maxwell, and the Electromagnetic Field: How Two Men Revolutionized Physics*. New York: Prometheus Books, 2014.
- Fuller, F. Brock. «The Writhing Number of a Space Curve.» *Proceedings of the National Academy of Sciences* 68, no. 4 (1971): 815–19.
- Galilei, Galileo. *Discourses and Mathematical Demonstrations Concerning Two New Sciences* (1638). Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio, with an introduction by Antonio Favaro. New York: Macmillan, 1914. <http://oll.libertyfund.org/titles/753>.
- Gill, Peter. *42: Douglas Adams' Amazingly Accurate Answer to Life, the Universe and Everything*. London: Beautiful Books, 2011.
- Gillispie, Charles C., ed. *Complete Dictionary of Scientific Biography*. 26 vols. New York: Charles Scribner's Sons, 2008. Available electronically through the Gale Virtual Reference Library.
- Gleick, James. *Chaos: Making a New Science*. New York: Viking, 1987.
- . *Isaac Newton*. New York: Pantheon, 2003.
- Goodman, Lawrence R. «The Beatles, the Nobel Prize, and CT Scanning of the Chest.» *Thoracic Surgery Clinics* 20, no. 1 (2010): 1–7. [https://www.thoracic.theclinics.com/article/S1547-4127\(09\)00090-5/fulltext](https://www.thoracic.theclinics.com/article/S1547-4127(09)00090-5/fulltext). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.thorsurg.2009.12.001>.
- Goriely, Alain. *Applied Mathematics: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2018.
- Gorman, Christine. «Dr. David Ho: The Disease Detective.» *Time* (December 30, 1996). <http://content.time.com/time/magazine/article/0,9171,135255,00.html>.
- Grattan-Guinness, Ivor, ed. *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910: An Introductory History*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1980.
- Graubner, Rolf, and Eberhard Nixdorf. «Biomechanical Analysis of the Sprint and Hurdles Events at the 2009 IAAF World Championships in Athletics.» *New Studies in Athletics* 26, nos. 1/2 (2011): 19–53.

- Greene, Brian. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions and the Quest for the Ultimate Theory*. New York: W. W. Norton, 1999.
- Guicciardini, Niccolò. *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.
- . *Reading the Principia: The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- Guthrie, Kenneth S. *The Pythagorean Sourcebook and Library*. Grand Rapids, MI: Phanes Press, 1987.
- Haberman, Richard. *Applied Partial Differential Equations*. 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.
- Hall, A. Rupert, and Marie Boas Hall, eds. *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.
- Hamming, Richard W. «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics.» *American Mathematical Monthly* 87, no. 2 (1980): 81–90. <https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Hamming.html>.
- Heath, Thomas L., ed. *The Works of Archimedes*. Mineola, NY: Dover, 2002.
- Higham, Nicholas J., Mark R. Dennis, Paul Glendinning, Paul A. Martin, Fadil Santosa, and Jared Tanner, eds. *The Princeton Companion to Applied Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2015.
- Ho, David D., Avidan U. Neumann, Alan S. Perelson, Wen Chen, John M. Leonard, and Martin Markowitz. «Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection.» *Nature* 373, no. 6510 (1995): 123–26.
- Hoffman, Paul. *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth*. New York: Hachette, 1998.
- Hofmann, Joseph E. *Leibniz in Paris 1672–1676: His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.
- Isaacson, Walter. *Einstein: His Life and Universe*. New York: Simon and Schuster, 2007.
- Isacoff, Stuart. *Temperament: How Music Became a Battleground for the Great Minds of Western Civilization*. New York: Knopf, 2001.
- Jones, H. S. *John Couch Adams and the Discovery of Neptune*. Cambridge: Cambridge University Press, 1947.
- Kaiser, Gerald. *A Friendly Guide to Wavelets*. Boston: Birkhäuser, 1994.
- Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*. 2nd ed. Boston: Addison Wesley Longman, 1998.
- . «Ideas of Calculus in Islam and India.» *Mathematics Magazine* 68, no. 3 (1995): 163–74.

- Kevles, Bettyann H. *Naked to the Bone: Medical Imaging in the Twentieth Century*. Rutgers, NJ: Rutgers University Press, 1997.
- Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture*. London: Oxford University Press, 1953.
- Koestler, Arthur. *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*. New York: Penguin, 1990.
- Körner, Thomas W. *Fourier Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- Kwan, Alistair, John Dudley, and Eric Lantz. «Who Really Discovered Snell's Law?» *Physics World* 15, no. 4 (2002): 64.
- Laplace, Pierre Simon. *A Philosophical Essay on Probabilities*. Translated by Frederick Wilson Truscott and Frederick Lincoln Emory. New York: John Wiley and Sons, 1902.
- Laubenbacher, Reinhard, and David Pengelley. *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*. New York: Springer, 1999.
- Levin, Janna. *Black Hole Blues and Other Songs from Outer Space*. New York: Knopf, 2016.
- Lighthill, James. «The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics.» *Proceedings of the Royal Society of London A* 407, no. 1832 (1986): 35–50.
- Liu, Leroy F. «DNA Topoisomerase Poisons as Antitumor Drugs.» *Annual Review of Biochemistry* 58, no. 1 (1989): 351–75.
- Livio, Mario. *Is God a Mathematician?* New York: Simon and Schuster, 2009.
- Mackinnon, Nick. «Newton's Teaser.» *Mathematical Gazette* 76, no. 475 (1992): 2–27.
- Mahoney, Michael S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665*. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- Martínez, Alberto A. *Burned Alive: Giordano Bruno, Galileo and the Inquisition*. London: Reaktion Books, 2018.
- . *The Cult of Pythagoras: Math and Myths*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 2012.
- . *Science Secrets: The Truth About Darwin's Finches, Einstein's Wife, and Other Myths*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 2011.
- Mates, Benson. *The Philosophy of Leibniz: Metaphysics and Language*. Oxford: Oxford University Press, 1986.
- Maxwell, James Clerk. «On Physical Lines of Force. Part III. The Theory of Molecular Vortices Applied to Statical Electricity.» *Philosophical Magazine* (April/May 1861): 12–24.
- Mazur, Joseph. *Zeno's Paradox: Unraveling the Ancient Mystery Behind the Science of Space and Time*. New York: Plume, 2008.

- McAdams, Aleka, Stanley Osher, and Joseph Teran. «Crashing Waves, Awesome Explosions, Turbulent Smoke, and Beyond: Applied Mathematics and Scientific Computing in the Visual Effects Industry.» *Notices of the American Mathematical Society* 57, no. 5 (2010): 614–23. <https://www.ams.org/notices/201005/rtx100500614p.pdf>.
- McMurrin, Shawnee L., and James J. Tattersall. «The Mathematical Collaboration of M. L. Cartwright and J. E. Littlewood.» *American Mathematical Monthly* 103, no. 10 (December 1996): 833–45. DOI: 10.2307/2974608.
- Mitchell, Melanie. *Complexity: A Guided Tour*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- Murray, James D. *Mathematical Biology* 1. 3rd ed. New York: Springer, 2007.
- . *Mathematical Biology* 2. 3rd ed. New York: Springer, 2011.
- Netz, Reviel, and William Noel. *The Archimedes Codex: How a Medieval Prayer Book Is Revealing the True Genius of Antiquity's Greatest Scientist*. Boston: Da Capo Press, 2007.
- Newman, James R. *The World of Mathematics*. 4 vols. New York: Simon and Schuster, 1956.
- Norris, Guy, and Mark Wagner. *Boeing 787 Dreamliner*. Minneapolis: Zenith Press, 2009.
- Pais, A. *Subtle Is the Lord*. Oxford: Oxford University Press, 1982.
- Perelson, Alan S. «Modelling Viral and Immune System Dynamics.» *Nature Reviews Immunology* 2, no. 1 (2002): 28–36.
- Perelson, Alan S., Paulina Essunger, and David D. Ho. «Dynamics of HIV-1 and CD4+ Lymphocytes in Vivo.» *AIDS* 11, supplement A (1997): S17—S24.
- Perelson, Alan S., and Jeremie Guedj. «Modelling Hepatitis C Therapy — Predicting Effects of Treatment.» *Nature Reviews Gastroenterology and Hepatology* 12, no. 8 (2015): 437–45.
- Perelson, Alan S., Avidan U. Neumann, Martin Markowitz, John M. Leonard, and David D. Ho. «HIV-1 Dynamics in Vivo: Virion Clearance Rate, Infected Cell Life-Span, and Viral Generation Time.» *Science* 271, no. 5255 (1996): 1582–86.
- Peskin, Michael E., and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boulder, CO: Westview Press, 1995.
- Peterson, Ivars. *Newton's Clock: Chaos in the Solar System*. New York: W. H. Freeman, 1993.
- Pohl, William F. «DNA and Differential Geometry.» *Mathematical Intelligencer* 3, no. 1 (1980): 20–27.
- Purcell, Edward M. *Electricity and Magnetism*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

- Rees, Martin. *Just Six Numbers: The Deep Forces That Shape the Universe*. New York: Basic Books, 2001.
- Rich, Dayton A. «A Brief History of Positron Emission Tomography.» *Journal of Nuclear Medicine Technology* 25 (1997): 4–11. <http://tech.snmjournals.org/content/25/1/4.full.pdf>.
- Rickey, V. Frederick. «Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics.» *College Mathematics Journal* 18, no. 5 (1987): 362–89.
- Rinzel, John. «Discussion: Electrical Excitability of Cells, Theory and Experiment: Review of the Hodgkin-Huxley Foundation and an Update.» *Bulletin of Mathematical Biology* 52, nos. 1/2 (1990): 5–23.
- Robinson, Andrew. «Einstein Said That — Didn't He?» *Nature* 557 (2018): 30. <https://www.nature.com/articles/d41586-018-05004-4>.
- Rorres, Chris, ed. *Archimedes in the Twenty-First Century*. Boston: Birkhäuser, 2017.
- Sabra, A. I. *Theories of Light: From Descartes to Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- Schaffer, Simon. «The Laird of Physics.» *Nature* 471 (2011): 289–91.
- Schrödinger, Erwin. *Science and Humanism*. Cambridge: Cambridge University Press, 1951.
- Sheehan, William, and Steven Thurber. «John Couch Adams's Asperger Syndrome and the British Non-Discovery of Neptune.» *Notes and Records* 61, no. 3 (2007): 285–99. <http://rsnr.royalsocietypublishing.org/content/61/3/285>. DOI: 10.1098/rsnr.2007.0187.
- Shetterly, Margot Lee. *Hidden Figures: The American Dream and the Untold Story of the Black Women Mathematicians Who Helped Win the Space Race*. New York: William Morrow, 2016.
- Simmons, George F. *Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2007.
- . *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. 3rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2016.
- Skopinski, Ted H., and Katherine G. Johnson. «Determination of Azimuth Angle at Burnout for Placing a Satellite Over a Selected Earth Position.» *NASA Technical Report, NASA-TN-D-233, L-289* (1960). <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19980227091.pdf>.
- Sobel, Dava. *Galileo's Daughter: A Historical Memoir of Science, Faith, and Love*. New York: Walker, 1999.
- . *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*. New York: Walker, 1995.
- Stein, Sherman. *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1999.

- Stewart, Ian. *Calculating the Cosmos*. New York: Basic Books, 2016.
- . *Does God Play Dice?: The New Mathematics of Chaos*. Oxford: Blackwell, 1990.
- . *In Pursuit of the Unknown: Seventeen Equations That Changed the World*. New York: Basic Books, 2012.
- Stillwell, John. *Mathematics and Its History*. 3rd ed. New York: Springer, 2010.
- Strogatz, Steven. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- . *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York: Hyperion, 2003.
- Sussman, Gerald Jay, and Jack Wisdom. «Chaotic Evolution of the Solar System.» *Science* 257, no. 5066 (1992): 56–62.
- Szpiro, George G. *Pricing the Future: Finance, Physics, and the Three-Hundred-Year Journey to the Black-Scholes Equation*. New York: Basic Books, 2011.
- Tegmark, Max. *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. New York: Knopf, 2014.
- Thompson, Richard B. «Global Positioning System: The Mathematics of GPS Receivers.» *Mathematics Magazine* 71, no. 4 (1998): 260–69. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/cms_upload/Thompson07734.pdf.
- Turnbull, Herbert W., ed. *The Correspondence of Isaac Newton, Volume 2, 1676–1687*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.
- Wardhaugh, Benjamin. «Musical Logarithms in the Seventeenth Century: Descartes, Mercator, Newton.» *Historia Mathematica* 35 (2008): 19–36.
- Wasserman, Steven A., and Nicholas R. Cozzarelli. «Biochemical Topology: Applications to DNA Recombination and Replication.» *Science* 232, no. 4753 (1986): 951–60.
- Westfall, Richard S. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- Whiteside, Derek T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volume 1*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- . *The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volume 2*. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.
- Whiteside, Derek T. «The Mathematical Principles Underlying Newton's Principia Mathematica.» *Journal for the History of Astronomy* 1, no. 2 (1970): 116–38. <https://doi.org/10.1177/002182867000100203>.
- Wigner, Eugene P. «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.» *Communications on Pure and Applied Mathematics*

- 13 (1960): 1–14. <https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html>.
- Wisdom, Jack, Stanton J. Peale, and François Mignard. «The Chaotic Rotation of Hyperion.» *Icarus* 58, no. 2 (1984): 137–52.
- Wouk, Herman. *The Language God Talks: On Science and Religion*. Boston: Little, Brown, 2010.
- Zachow, Stefan. «Computational Planning in Facial Surgery.» *Facial Plastic Surgery* 31 (2015): 446–62.
- Zachow, Stefan, Hans-Christian Hege, and Peter Deuffhard. «Computer-Assisted Planning in Cranio-Maxillofacial Surgery.» *Journal of Computing and Information Technology* 14, no. 1 (2006): 53–64.
- Zorin, Denis, and Peter Schröder. «Subdivision for Modeling and Animation.» *SIGGRAPH 2000 Course Notes*, chapter 2 (2000). <http://multires.caltech.edu/pubs/sig00notes.pdf>.

Где купить наши книги

Специальное предложение для компаний

Если вы хотите купить сразу более 20 книг, например для своих сотрудников или в подарок партнерам, мы готовы обсудить с вами специальные условия работы. Для этого обращайтесь к нашему менеджеру по корпоративным продажам: +7 (495) 792-43-72, b2b@mann-ivanov-ferber.ru

Книготорговым организациям

Если вы оптовый покупатель, обратитесь, пожалуйста, к нашему партнеру — торговому дому «Эксмо», который осуществляет поставки во все книготорговые организации.

142701, Московская обл., г. Видное, Белокаменное ш., д. 1;

+7 (495) 411-50-74; reception@eksmo-sale.ru

Адрес издательства «Эксмо»

125252, Москва, ул. Зорге, д. 1;
+7 (495) 411-68-86; info@eksmo.ru /
www.eksmo.ru

Санкт-Петербург

СЗКО Санкт-Петербург, 192029,
г. Санкт-Петербург, пр-т Обуховской
Обороны, д. 84е;
+7 (812) 365-46-03 / 04; server@szko.ru

Нижний Новгород

Филиал «Эксмо» в Нижнем Новгороде,
603094, г. Нижний Новгород,
ул. Карпинского, д. 29; +7 (831) 216-15-91,
216-15-92, 216-15-93, 216-15-94;
reception@eksmonn.ru

Ростов-на-Дону

Филиал «Эксмо» в Ростове-на-Дону,
344023, г. Ростов-на-Дону, ул. Страны
Советов, 44а; +7 (863) 303-62-10;
info@rnd.eksmo.ru

Самара

Филиал «Эксмо» в Самаре, 443052,
г. Самара, пр-т Кирова, д. 75/1, лит. «Е»;
+7 (846) 269-66-70 (71...73);
RDC-samara@mail.ru

Екатеринбург

Филиал «Эксмо» в Екатеринбурге,
620024, г. Екатеринбург,
ул. Новинская, д. 2щ;
+7 (343) 272-72-01 (02...08)

Новосибирск

Филиал «Эксмо» в Новосибирске,
630015, г. Новосибирск, Комбинат-
ский пер., д. 3; +7 (383) 289-91-42;
eksmo-nsk@yandex.ru

Хабаровск

Филиал «Эксмо» Новосибирск
в Хабаровске, 680000, г. Хабаровск,
пер. Дзержинского, д. 24, лит. «Б», оф. 1;
+7 (4212) 910-120; eksmo-khv@mail.ru

Казахстан

«РДЦ Алматы», 050039, г. Алматы,
ул. Домбровского, д. 3а;
+7 (727) 251-59-89 (90, 91, 92);
RDC-almaty@eksmo.kz

Украина

«Эксмо-Украина», Киев, 000 «Форс
Украина», 04073, г. Киев, Московский пр-т,
д. 9; +38 (044) 290-99-44;
sales@forsukraine.com



Если у вас есть замечания и комментарии к содержанию, переводу, редактуре и корректуре, то просим написать на be_better@m-i-f.ru, так мы быстрее сможем исправить недочеты.

НЕЙРОБИОЛОГИЯ
ТЕОРИЯ ИГР
ЛИНГВИСТИКА
ЭКОНОМИКА
АСТРОФИЗИКА
И МНОГОЕ ДРУГОЕ

МИФ Научпоп

**Весь научпоп
на одной странице:
mif.to/science**

**Узнавай первым
о новых книгах,
скидках и подарках
из нашей рассылки
mif.to/sci-letter**

#mifbooks    

Научно-популярное издание

Строгац Стивен
Бесконечная сила

Как математический анализ
раскрывает тайны Вселенной

Шеф-редактор *Ренат Шагабутдинов*

Ответственный редактор *Наталья Шульпина*

Литературный редактор *Татьяна Сковородникова*

Арт-директор *Алексей Богомолов*

Дизайнер *Наталья Савиных*

Верстка *Олег Бачурин*

Корректоры *Елена Попова, Ольга Танская*

ООО «Манн, Иванов и Фербер»

123104, Россия, г. Москва, Б. Козихинский пер., д. 7, стр. 2

mann-ivanov-ferber.ru

facebook.com/mifbooks

instagram.com/mifbooks

vk.com/mifbooks



Стивен Строгац — математик мирового уровня, автор бестселлера «Удовольствие от X» — увлекательно объясняет, что такое математический анализ и каковы его основные принципы.

Как однажды сказал Ричард Фейнман: «Матанализ — это язык, на котором говорит Бог». Строгац делает этот язык доступным для всех, рассказывая об истории исчислений и показывая, как невозможное число — бесконечность — делает возможным решение бесконечного количества реальных проблем. Без матанализа у нас не было бы радио, телевидения, микроволновок, GPS, УЗИ, компьютеров и многих других достижений человечества. Если что-то и заслуживает того, чтобы называться тайной Вселенной, то это исчисление, уверен автор.

Развивая идею Фейнмана, Строгац утверждает, что матанализ, как и другие области математики, — гораздо больше, чем язык. Это также невероятно мощная система мышления, позволяющая нам преобразовывать одно уравнение в другое, выполняя различные символические операции, подчиняющиеся определенным правилам. Эти правила коренятся в логике. Даже если вам кажется, что математики просто перетасовывают символы, на самом деле они выстраивают длинные цепочки логических рассуждений.

Вполне может быть, что это самая захватывающая книга из всех, что мне довелось прочитать. Если вам хотя бы немного интересна математика и ее роль в мире, я настоятельно рекомендую это творение! Она будет полезна каждому ученику, учителю и просто любому человеку.

Джо Боулер, автор книг «Безграничный разум» и «Математическое мышление»

ISBN 978-5-00169-590-5



9 785001 695905 >

Максимально
полезные книги на сайте
mann-ivanov-ferber.ru

**издательство
МАНН, ИВАНОВ И ФЕРБЕР**



facebook.com/mifbooks



vk.com/mifbooks



instagram.com/mifbooks