ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
◆
МОСКВА
◆
КРАСНОДАР
◆
2009
◆

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛЕКЦИИ И ПРАКТИКУМ

Под общей редакцией
И. М. ПЕТРУШКО

Издание четвертое, стереотипное

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*ДОПУЩЕНО Министерством образования РФ
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям:
«Технические науки»,
«Техника и технологии»*

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.161.1.я73
К 93

К 93 Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / Под общ. ред. И. М. Петрушко. 4-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0578-7

Содержание пособия охватывает следующие разделы программы: введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной, которые изучаются в первом семестре. Учебное пособие содержит 17 практических занятий.

В каждом занятии приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество примеров для самостоятельной работы.

Учебное пособие может быть использовано как при очной, так и при дистанционной форме обучения.

Предназначено для студентов вузов.

ББК 22.161.1.я73

Коллектив авторов
Игорь Мелетиевич ПЕТРУШКО
(общая редакция),
Леонид Антонович КУЗНЕЦОВ,
Галина Геннадьевна КОШЕЛЕВА,
Александр Анатольевич МАСЛОВ,
Александр Яковлевич ЯНЧЕНКО

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга является конспектом лекций и практических занятий по разделам математического анализа, которые изучаются в технических вузах в I семестре. Она является составной частью комплекса для организации дистанционного обучения по курсу «Высшая математика», разработанного на кафедре высшей математики МЭИ.

Материал пособия разделен в соответствии с планами занятий. В книге отражен опыт многолетнего преподавания высшей математики в МЭИ. В ней рассматриваются введение в математический анализ и дифференциальное исчисление функции одного переменного.

При написании пособия авторы стремились не отходить от привычного для студентов построения лекционного материала, однако дано более подробное его изложение, иллюстрированное большим количеством решенных примеров и задач. В конце каждой лекции студентам предлагается ряд вопросов для самоконтроля за усвоением изучаемого материала, а в конце каждого занятия приведены примеры для самостоятельного решения. Все это в совокупности отличает данную книгу от аналогичных изданий.

Курс «Высшая математика» для дистанционного обучения рассчитан на 780 часов, изучается на протяжении первых четырех семестров и подразделяется на две части: теоретическую, основу которой составляет изучение лекций и практическую, включающую практические занятия, выполнение обязательных заданий и индивидуальных типовых расчетов.

Теоретический раздел курса построен в виде лекций по высшей математике, читаемых на различных факультетах МЭИ, и содержит более подробное изложение тех особенностей курса, на которых «спотыкаются» большинство студентов. В этих лекциях рассматривается достаточно большой практический материал, иллюстрирующий то или иное положение теоретического курса, чтобы студент мог более полно понять доказательство соответствующих теорем или более точно применить курс к практическому материалу.

В конце каждой лекции имеется список контрольных вопросов для проверки усвоения студентом того или иного раздела лекции. Отвечая на эти вопросы и сравнивая их с ответами, студент может без посторонней помощи оценить, насколько глубоко им освоена лекция, и может ли он самостоятельно приступить к решению задач, предлагаемых в разделе «Семинарские занятия».

Раздел «Семинарские занятия» курса «Высшая математика» построен по типу обычных семинарских занятий для студентов очного отделения МЭИ. В нем содержится более подробное объяснение решений примеров, позволяющее изучить методику решения, понять трудности, возникающие при этом. Приведен достаточно большой ряд задач для самостоятельного решения. Начало решения примеров и задач отмечено знаком $\triangleleft$, а конец — знаком $\triangleright$.

Каждый раздел «Семинарских занятий» заканчивается контрольной работой и соответствующими индивидуальными типовыми расчетами, которые проверяются преподавателями МЭИ с проставлением оценок. Типы возможных вариантов, приведенные в конце раздела, позволяют студенту провести самоконтроль перед тем, как получить основную контрольную работу.

Изучаются разделы теории вероятностей, математической статистики и базовые разделы уравнений в частных производных.

Приступая к изучению высшей математики, необходимо знать, что математику нельзя изучать пассивно, нужно стараться глубоко вникать в смысл математических понятий и теорем, пытаться самостоятельно решать математические задачи. Результатами изучения курса высшей математики должны быть развитие аналитического мышления, овладение навыками решения математических задач, выработка умения самостоятельно ставить задачи и выбирать или разрабатывать методы их решения.

Предлагаемые материалы для изучения высшей математики содержат конспекты лекций и разработки для практических занятий, а также вопросы и задачи для самоконтроля в процессе изучения.

После изучения каждой лекции следует попытаться ответить на контрольные вопросы к ней. Если ответ вызывает затруднение, или нет уверенности в его правильности, нужно вернуться к соответствующему месту в лекции (оно указывается в каждом вопросе ссылкой на определение, теорему, замечание или пример).

Если в тексте лекции нет прямого ответа на поставленный вопрос, то посмотрите ответы, следующие за контрольными вопросами.

Практические занятия нужно начинать с повторения теоретического материала, используемого при решении задач (он кратко изложен в тексте каждого занятия). Затем попытайтесь решить все примеры и задачи, содержащиеся в занятии. Не спешите смотреть решения в тексте занятия. Некоторые из задач вполне сможете решить самостоятельно, если предварительно хорошо усвоили теоретический материал. Однако в том случае, если самостоятельно не справляетесь с решением задачи, не отчаивайтесь. При решении некоторых задач используются специальные приемы, которые не рассматриваются в лекционном материале, но излагаются в тексте практических занятий. Со временем, когда у вас разовьется аналитическое мышление, вы научитесь и самостоятельно изобретать методы решения задач, а пока осваивайте их по тексту практических занятий.

Для закрепления навыков, которые у вас несомненно появятся после разбора всех примеров и задач, приведенных с решениями, необходимо самостоятельно решить примеры или задачи, содержащиеся в конце занятия, правильность решений вы можете проконтролировать по ответам, приведенным там же.

Математика не терпит бессистемности. Для ее освоения необходимо регулярно заниматься. В помощь вам, для организации эффективного изучения математики к каждому ее разделу (модулю), прилагается календарный план, который содержит рекомендации о последовательности изучения лекционного материала и практических занятий.

Изучение каждого раздела завершается выполнением контрольной работы, которая направляется для проверки и оценки преподавателю, ведущему курс.

По окончании учебного семестра сдается очный экзамен в письменно-устной форме.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Е. Б. Зарецкую, В. И. Иванову, Т. В. Лошкину за большую помощь, оказанную в подготовке рукописи к изданию.

КУРС ЛЕКЦИЙ

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В этом разделе рассматриваются понятия предела функции и ее непрерывности. Теория пределов является логическим фундаментом дифференциального и интегрального исчислений — основных разделов математического анализа.

§ 1.1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1.1. Совокупность значений функции

$$x_n = f(n)$$

натурального аргумента n называется *числовой последовательностью* и обозначается $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ или кратко $\{x_n\}$.

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами* последовательности.

Определение 1.2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого, хотя бы сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Для краткого выражения этого определения удобно использовать логические кванторы:

$\forall$ — квантор общности (читается «для любого» или «для всех»).

$\exists$ — квантор существования (читается «существует» или «найдется»).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{если } \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Условие $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что x_n отличается от a меньше, чем на ε. Если ε мало, то значение x_n близко к a. Из определения предела последовательности следует, что если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то значения x_n близки к a при всех номерах n, больших некоторого числа N. А так как ε может быть сколь угодно малым, то члены последовательности $\{x_n\}$ сколь угодно близки к числу a для всех достаточно больших номеров n.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

В развернутом виде имеем

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Очевидно, с ростом n, члены последовательности уменьшаются и становятся сколь угодно мало отличающимися от 0 для всех достаточно больших n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Докажем это, исходя из определения предела.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{если } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Положим $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon}: \quad \forall n > N \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$. Здесь в развернутом виде имеем

$$1,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \cdots,\ \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2},\ \cdots.$$

Докажем, что и здесь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} = 0.$$

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} - 0\right| = \frac{1}{n}\left|\sin\frac{\pi n}{2}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{если } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon}: \quad \forall n > N \quad \left| \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} - 0 \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует доказываемое.

Замечание 1.1. Члены последовательности могут быть все отличными от предела (пример 1.1), но могут и быть равными ему (пример 1.2).

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим последовательность

$$\{(-1)^n\}, \quad \text{или} \quad -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots .$$

Покажем, что эта последовательность не имеет предела.

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 1$, так как с ростом n значения $(-1)^n$ не становятся сколь угодно близкими к 1. Например, при $\varepsilon = 1$ условие близости $|(-1)^n - 1| < \varepsilon = 1$ не выполняется при всех нечетных n и, следовательно, не существует такое число N, чтобы *для всех* $n > N$ было $|(-1)^n - 1| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq -1$, так как условие $|(-1)^n - (-1)| < \varepsilon = 1$ не выполняется при всех четных n.

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$, так как при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ условие $|(-1)^n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ не выполняется при всех n.

По аналогичным причинам и никакое другое число a не является пределом последовательности $\{(-1)^n\}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \overline{\exists}$$

(в символе $\overline{\exists}$ черточка сверху означает отрицание существования).

ПРИМЕР 1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad \overline{\exists}$.

Докажите самостоятельно.

Теорема 1.1 (о единственности предела). *Если предел последовательности существует, то он единственен.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и в то же время $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1: \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

(запись $A \Rightarrow B$ означает «из A следует B»).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2: \quad \forall n > N_2 \quad |x_n - b| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$, т. е. N есть наибольшее из N_1 и N_2 или, если $N_1 = N_2$, то $N = N_1 = N_2$. Тогда

$$\forall n > N \qquad |x_n - a| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |x_n - b| < \varepsilon,$$

откуда следует

$$|x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

и

$$|(x_n - a) - (x_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon,$$

т. е.

$$|b - a| < 2\varepsilon.$$

Но, если $a \neq b$, то последнее условие не может выполняться, например, при $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$. Для *любого* $\varepsilon > 0$ оно может выполняться только при $a = b$, что и означает единственность предела последовательности.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что

$$\forall n \quad |x_n| \leqslant M.$$

В примерах 1.1–1.4 все последовательности ограниченные, так как $\forall n$ $|x_n| \leqslant 1$ ($M = 1$).

Рассмотрим примеры неограниченных последовательностей (т. е. неявляющихся ограниченными).

ПРИМЕР 1.5. $\{n\}$ или $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Здесь $x_n = n$ и $\bar{\exists} M > 0$, такое чтобы $\forall n$ $|x_n| \leqslant M$. Какое бы большое число M мы ни взяли, $|x_n|$ будет больше M при $n > M$. Следовательно, $\{n\}$ — неограниченная последовательность.

ПРИМЕР 1.6. $\{n \sin \frac{\pi n}{2}\}$, или $1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 5,\ 0,\ -7,\ \ldots,$ $n \sin \frac{\pi n}{2}, \ldots$

Здесь $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$. И хотя все члены последовательности с четными номерами равны 0, но $\bar{\exists} M > 0$, такое чтобы неравенство $|x_n| \leqslant M$ выполнялось *для всех* n. Следовательно, рассматриваемая последовательность не ограничена.

Теорема 1.2. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Возьмем какое либо число $\varepsilon > 0$. Для этого числа

$$\exists N: \quad \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Используя свойство модуля суммы, получаем

$$|x_n| = |a + (x_n - a)| \leqslant |a| + |x_n - a| < |a| + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\forall n > N_1 \quad |x_n| < |a| + \varepsilon.$$

Пусть N — наименьшее натуральное число, большее или равное N_1.

Положим

$$M = \max\left(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + \varepsilon\right).$$

(Для конечного набора чисел наибольшее значение всегда существует.)

Тогда

$$\forall n \quad |x_n| \leqslant M,$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема доказана.

Следствие. *Если последовательность не ограничена, то она не имеет предела.*

Последовательности $\{n\}$, $\left\{n \sin \frac{\pi n}{2}\right\}$, рассмотренные в примерах 1.5, 1.6, не имеют пределов. Если бы они имели пределы, то должны были бы по теореме 1.2 быть ограниченными, а они не ограничены.

§ 1.2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1.4. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0.$$

Из определения предела последовательности вытекает, что если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon$$

и, следовательно, все члены последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно малы по абсолютной величине.

Теорема 1.3 (об арифметических операциях над бесконечно малыми последовательностями). *Если последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые, а $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то последовательности*

$$\{\alpha_n+\beta_n\}, \{\alpha_n-\beta_n\}, \{\alpha_n x_n\}, \{\alpha_n\beta_n\},$$

являются бесконечно малыми.

Доказательство.

1. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$.

Так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то для числа $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1: \quad \forall n>N_1 \quad |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$\exists N_2: \quad \forall n>N_2 \quad |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $N=\max(N_1,N_2)$. Тогда $\forall n>N$ будут выполняться оба неравенства

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как число $\varepsilon>0$ было выбрано произвольно, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N=\max(N_1,N_2):\forall n>N \quad |\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon,$$

т. е. $(\alpha_n+\beta_n)$ — бесконечно малая последовательность.

2. Аналогично доказывается, что $(\alpha_n-\beta_n)$ — бесконечно малая последовательность.

3. Так как $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то

$$\exists M>0:\forall n \quad |x_n|\leqslant M.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$.

Так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то для числа $\frac{\varepsilon}{M}$

$$\exists N:\forall n>N \quad |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Отсюда следует, что

$$|\alpha_n x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то приходим к выводу, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |\alpha x_n| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\{\alpha_n x_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

4. Так как $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0;$$

по теореме 1.2 последовательность $\{\beta_n\}$ ограничена и по только что доказанному последовательность $\{\alpha_n \beta_n\}$ является бесконечно малой.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1.7. Рассмотрим последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \text{(см. пример 1.1).}$$

Следовательно, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — бесконечно малая последовательность.

$$\forall n \quad \left|\sin\frac{\pi n}{2}\right| \leqslant 1.$$

Следовательно, $\{\sin\frac{\pi n}{2}\}$ — ограниченная последовательность, а рассматриваемая последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ — бесконечно малая.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} = 0.$$

Заметим, что здесь предел произведения $\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$ существует, хотя предел множителя $\sin\frac{\pi n}{2}$ не существует (см. пример 1.4).

§ 1.3. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 1.4. *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.1}$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Доказательство необходимости. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если положить $\alpha_n = x_n - a$, то получаем

$$x_n = a + \alpha_n$$

и $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, так как

$$\forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Следовательно, условие 1.1 выполняется и его необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть теперь, наоборот, выполняется условие 1.1. Тогда, так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad |\alpha_n| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

и, следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, что и доказывает достаточность условия 1.1.

Определение 1.5. Если $x_n = C$ ($n = 1, 2, \ldots$), то последовательность $\{x_n\}$ называется *постоянной.*

Заметим, что такая последовательность является ограниченной, так как

$$\forall n \quad |x_n| = |C| \quad (M = |C|).$$

Справедливы следующие утверждения (правила вычисления пределов).

Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

а $\{C\}$ — постоянная последовательность, то нижеперечисленные пределы существуют и

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$,
2°. $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
3°. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
4°. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
5°. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ при дополнительном условии

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0.$$

Доказательство 1°. Следует непосредственно из определения предела, так как

$$|C - C| = 0 < \varepsilon \quad \forall n,$$

т. е. условие $|C - C| < \varepsilon$ выполняется $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall n$ (можно считать $N = 0$).

Доказательство 2°. По теореме 1.4

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

$$Cx_n = Ca + C\alpha_n.$$

По теореме 1.3 $\{C\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность ($\{C\}$ — ограниченная последовательность).

Следовательно, по теореме 1.4

$$\lim_{n\to\infty} (Cx_n) = Ca = C\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство 3°. По теореме 1.4

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности.

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

По теореме 1.3 $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно, по теореме 1.4,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство 4°.

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = (ab) + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

По теореме 1.3 последовательно устанавливаем, что являются бесконечно малыми последовательности

$$\{a\beta_n\}, \{b\alpha_n\}, \{\alpha_n\beta_n\}, \{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$$

и, следовательно, по теореме 1.4

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство 5°. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то для всех достаточно больших n члены последовательности x_n в силу близости к a тоже $\neq 0$ и отношение $\frac{y_n}{x_n}$ определено. (Условие близости $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно условию $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и, если ε достаточно мало $(\varepsilon < |a|)$, то $x_n \neq 0$.) Для простоты будем считать, что $x_n \neq 0 \quad \forall n$.

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{b+\beta_n}{a+\alpha_n} = \frac{b}{a} + \left(\frac{b+\beta_n}{a+\alpha_n} - \frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a} + \frac{a\beta_n - b\alpha_n}{a^2 + a\alpha_n}.$$

Последовательности $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$ и, следовательно, $\{a\beta_n - b\alpha_n\}$ — бесконечно малые.

Рассмотрим последовательность

$$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{a^2 + a\alpha_n}\right\}.$$

Покажем, что она ограничена.

Так как $\{a\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то для

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2} \quad \exists N\colon \quad \forall n > N_1 \quad |a\alpha_n| < \frac{a^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$a^2 + a\alpha_n > \frac{a^2}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{a^2 + a\alpha_n} < \frac{2}{a^2}.$$

Пусть N — минимальное натуральное число, большее или равное N_1. Положим $M = \max\left(|z_1|, \cdots, |z_N|, \frac{2}{a^2}\right)$. Тогда

$$\forall n \quad |z_n| \leqslant M,$$

т. е. последовательность $\left\{\frac{1}{a^2+a\alpha_n}\right\}$ действительно ограничена.

По теореме 1.3 последовательность

$$\left\{(a\beta_n - b\alpha_n)\cdot\frac{1}{a^2 + a\alpha_n}\right\}$$

является бесконечно малой и по теореме 1.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{b}{a}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}.$$

Определение 1.6. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1,$$

то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются *эквивалентными*. Обозначение: $x_n\sim y_n$.

Заметим, что в этом случае и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=1,$$

так как по правилам 5° и 1°

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n}{y_n}}=\frac{1}{1}=1.$$

ПРИМЕР 1.8. $(2n^2+3)\sim 2n^2$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{3}{2}\cdot 0\cdot 0=1.$$

ПРИМЕР 1.9. $(4n^2-n)\sim 4n^2$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{4}\cdot 0=1.$$

Теорема 1.5. *Если $x_n\sim x'_n, y_n\sim y'_n$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}$, то*

$$\exists\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\quad и\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}.$$

Доказательство.

$$\exists\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x'_n}=1;\quad \exists\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{y'_n}=1;\quad \exists\lim_{n\to\infty}\frac{y'_n}{y_n}=1\quad\Rightarrow$$

x'_n, y'_n, y_n отличны от нуля при достаточно больших n и

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{x_n}{x'_n}\cdot\frac{x'_n}{y'_n}\cdot\frac{y'_n}{y_n}.$$

По правилу 4°

$$\exists\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}\cdot 1=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}.$$

Теорема означает, что при вычислении предела отношения члены отношения можно заменять на эквивалентные.

ПРИМЕР 1.10.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}2=2.$$

§ 1.4. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1.7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой,* если

$$\forall M>0 \quad \exists N: \quad \forall n>N \quad |x_n|>M.$$

Выполнение условия $|x_n|>M$ для любого числа $M>0$, в частности, хотя бы как угодно большого, означает, что значения $|x_n|$ сколь угодно велики для всех достаточно больших номеров n.

ПРИМЕР 1.11. Рассмотрим последовательность

$$\{n^3\} \quad \text{или} \quad 1, 2^3, \ldots, n^3, \ldots .$$

Очевидно, с ростом n члены последовательности растут и становятся сколь угодно большими при больших n. $|n^3|=n^3>$ $>M$, если $n>\sqrt[3]{M}$.

Положив $N=\sqrt[3]{M}$, получим

$$\forall M>0 \quad \exists N=\sqrt[3]{M}: \quad \forall n>N \quad |n^3|>M.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая.

Если последовательность $\{n^3\}$ бесконечно большая, то она не ограничена, так как не существует число $M>0$, такое, чтобы для всех достаточно больших n выполнялось условие $|x_n|\leqslant M$. Наоборот, какое бы большое число $M>0$ мы ни взяли, найдется такое N, что для всех номеров $n>N$ будет выполняться неравенство противоположного смысла $|x_n|>M$.

Из неограниченности бесконечно большой последовательности вытекает, что она не имеет предела (см. следствие из теоремы 1.2). Однако для бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ принято писать

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

и говорить, что она имеет *бесконечный* предел. Пределы последовательностей, не являющихся бесконечно большими, при сопоставлении с бесконечными пределами называют *конечными*. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*.

Следует иметь ввиду, что не все теоремы о конечных пределах распространяются на бесконечные пределы, но можно показать, что теорема 1.5 о замене последовательностей на эквивалентные при вычислении пределов остается справедливой и ее можно применять к бесконечным пределам.

ПРИМЕР 1.12.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty.$$

Замечание. Если последовательность бесконечно большая, то она не ограничена. Но не следует думать, что любая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Например, последовательность

$$\{n\sin\frac{\pi n}{2}\}, \text{или } 1,\ 0,\ -3,\ 0,\ 5,\ 0,\ -7,\ldots,\ n\sin\frac{\pi n}{2},\ldots$$

не ограничена (условие $|x_n| \leqslant M$ не выполняется ни при каком M при больших нечетных n), но не является бесконечно большой (условие $|x_n| > M$ не выполняется при всех четных n).

§ 1.5. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если

$$\forall n \quad x_n \leqslant x_{n+1} (x_n \geqslant x_{n+1}),$$

т. е. с ростом n члены последовательности могут только возрастать (убывать).

Если выполняется строгое неравенство

$$\forall n \quad x_n < x_{n+1} (x_n > x_{n+1}),$$

то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей (строго убывающей)*.

Определение 1.9. Возрастающие и убывающие последовательности, включая строго возрастающие и строго убывающие, называются *монотонными* последовательностями.

Теорема 1.6. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.*

Доказательство теоремы здесь не рассматривается.

Рассмотрим последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Покажем, что она является строго возрастающей и ограниченной.

Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

При замене n на $n+1$ каждая скобка вида

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

увеличивается (так как $1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}$) и добавляется одно слагаемое (положительное). Поэтому $\forall n \; x_n < x_{n+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \{x_n\}$ — строго возрастающая последовательность.

Далее, учитывая, что

$$1-\frac{k}{n}<1(k=1,2,\ldots,n-1)$$

и что $$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}\quad (n=3,4,\cdots)$$

получаем

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{\frac{1}{2}}=3.$$

(Применена формула суммы членов геометрической последовательности.)

Таким образом, $$0<x_n<3.$$

Следовательно, $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность.

По теореме 1.6 она имеет конечный предел. Этот предел определяет широко используемое в математике число e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Можно показать, что e — иррациональное число и что с точностью до 10^{-15}

$$e=2{,}718281828459045.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение предела последовательности.

2. Будет ли число a пределом последовательности $\{x_n\}$, если условие $|x_n-a|<\varepsilon$ выполняется для всех четных номеров $n>N$? (см. определение 1.2).

3. Могут ли члены последовательности быть равными ее пределу? (см. замечание 1.1 и пример 1.1).

4. Может ли одна и та же последовательность иметь два различных предела? (см. теорему 1.1).

5. Сформулируйте определение ограниченной последовательности (см. определение 1.3).

6. Докажите, что последовательность $\left\{n\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ является неограниченной (см. пример 1.6). При каких n не будет выполняться неравенство $|x_n|\leqslant 100$.

7. Может ли неограниченная последовательность иметь предел? (см. следствие из теоремы 1.2).

8. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности (см. определение 1.4).

9. Сформулируйте и докажите теоремы о сумме бесконечно малых последовательностей и о произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую (см. теорему 1.3).

10. Какие последовательности называются эквивалентными? (см. определение 1.6).

11. При каком значении C будет верно $(2n^2+3) \sim Cn^2$? (см. пример 1.8).

12. Какую теорему можно использовать при вычислении предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - n + 4}{2n^2 + n - 4}?$$

(см. теорему 1.5). Чему равен предел?

13. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности (см. определение 1.7).

14. Может ли бесконечно большая последовательность быть ограниченной? (см. определения 1.3, 1.7 и пример 1.11).

15. Какие последовательности называются монотонными? (см. определения 1.8, 1.9).

16. Чему равен предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n?$$

Что используется при обосновании существования этого предела? (см. теорему 1.6).

Ответы

2. Будет, если условие $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется и для всех нечетных номеров $n > N$. В противном случае (если такого N не существует) не будет.

6. При $n = 2k + 1, k \geqslant 50$ (k — целое).

11. При $C = 2$.

12. Предел равен 4.

Лекция 2

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

§ 2.1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Будем называть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих:

условию $a < x < b$ *интервалом* (a, b);

условию $a \leqslant x \leqslant b$ *отрезком* $[a, b]$;

условию $a \leqslant x < b$ *полуинтервалом* $[a, b)$;

условию $a < x \leqslant b$ *полуинтервалом* $(a, b]$;

условиям $x > a$, $x < a$, $x \geqslant a$, $x \leqslant a$ соответственно *бесконечными интервалами* $(a, +\infty), (-\infty, a)$ и *бесконечными полуинтервалами* $[a, +\infty), (-\infty, a]$.

Множество всех действительных чисел будем называть *бесконечным интервалом* $(-\infty, +\infty)$.

Все интервалы, полуинтервалы и отрезки будем называть *промежутками.*

При изображении чисел точками числовой оси интервалы, отрезки и полуинтервалы будут являться *отрезками числовой оси*, содержащими или не содержащими точки a и b или одну из них, а бесконечные интервалы и полуинтервалы (кроме интервала $(-\infty, +\infty)$) — *лучами*, содержащими или не содержащими точку a. Интервал $(-\infty, +\infty)$ будет являться *всей числовой осью.*

Любой интервал (a, b), содержащий точку $x_0 (x_0 \in (a, b))$, будем называть *окрестностью точки* x_0 и обозначать символом $O(x_0)$.

Окрестность $O(x_0)$ с удаленной точкой x_0 будем называть *проколотой окрестностью точки* x_0 и обозначать $\dot{O}(x_0)$.

Интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ будем называть *δ-окрестностью точки* x_0 и обозначать $\delta(x_0)$.

δ-окрестность точки x_0 с удаленной точкой x_0 будем называть *проколотой δ-окрестностью точки* x_0 и обозначать $\dot{\delta}(x_0)$.

§ 2.2. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Определение 2.1. Пусть функция $f(x)$ определена на $(x_0, +\infty)$. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или в $+\infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall x > N \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Обозначение:
$$a = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Выясним геометрический смысл понятия. Для этого построим полосу, ограниченную прямыми $y = a+\varepsilon$ и $y = a-\varepsilon$, которую будем называть ε-полосой (рис. 2.1).

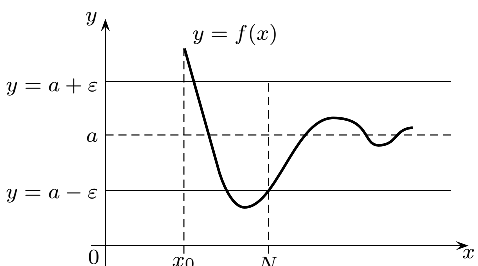


Рис. 2.1

Условие $\forall x > N$ $|f(x) - a| < \varepsilon$ означает, что при $x > N$ график функции $f(x)$ находится в ε-полосе. Таким образом, если $a = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то при стремлении x к $+\infty$, т. е. при неограниченном росте x, наступит такой момент (когда x станет равным N), после которого график функции $f(x)$ попадет в ε-полосу и останется там навсегда.

Так как число ε может быть сколь угодно малым (положительным), то значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к числу a для всех достаточно больших значений аргумента x.

В частности, они могут быть и равными числу a для отдельных значений x или даже для всех x на каком-либо промежутке.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

При $x \to +\infty$ ее значения положительны и становятся сколь угодно малыми. Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Пусть произвольно выбрано число $\varepsilon > 0$. При $x > 0$ $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$, если $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\forall x > N \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon}: \quad \forall x > N \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

График функции $\frac{1}{x}$ при $x > N$ находится в ε-полосе, ограниченной прямыми $y = \varepsilon$ и $y = -\varepsilon$ (рис. 2.2).

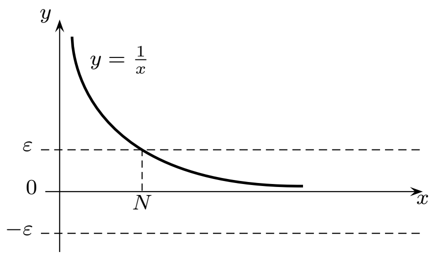


Рис. 2.2

При $x \to +\infty$ значения функции становятся и остаются отличающимися от нуля на величину, меньшую сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, как только x становится большим, чем число N. В общем случае, как и в этом примере, число N зависит от ε и с уменьшением ε число N увеличивается.

Определение 2.2. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве E, если

$$\exists M > 0: \quad \forall x \in E \quad |f(x)| \leqslant M.$$

ПРИМЕР 2.2. Функция $\sin x$ ограничена на $(-\infty, +\infty)$, так как $\forall x \in (-\infty, +\infty) \quad |\sin x| \leqslant 1 \quad (M = 1)$.

ПРИМЕР 2.3. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ ограничена на $(1, +\infty)$, так как

$$\forall x \in (1, +\infty) \quad \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \quad (M = 1).$$

Но эта функция не является ограниченной (не ограничена) на $(0, 1)$, так как не существует такое число $M > 0$, чтобы выполнялось условие

$$\forall x \in (0, 1) \quad \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M.$$

Пример 2.3 показывает, что одна и та же функция на одних промежутках в области определения может быть ограниченной, а на других — неограниченной.

Определение 2.3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной при* $x \to +\infty$, если существует такое число N, что функция $f(x)$ является ограниченной на $(N, +\infty)$.

ПРИМЕР 2.4. Функция $\frac{1}{x}$ ограничена при $x \to +\infty$, так как (см. пример 2.3) она ограничена на $(1, +\infty)$ $\quad (N = 1)$.

Теорема 2.1. *Если* $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, *то функция* $f(x)$ *ограничена при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Для $\varepsilon = 1$ $\exists N\colon \quad \forall x > N$, т. е. $\forall x \in (N, +\infty)$, $|f(x) - a| < 1$.

По свойству модуля суммы

$$|f(x)| = |(f(x) - a) + a| \leqslant |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Положив $M = 1 + |a|$, получим

$$\forall x \in (N, +\infty) \quad |f(x)| < M,$$

т. е. функция $f(x)$ ограничена на $(N, +\infty)$ и, следовательно, она ограничена при $x \to +\infty$.

Отличие определения 2.1 предела функции в $+\infty$ от определения 1.2 предела последовательности состоит по существу лишь в том, что выполнение условия $|f(x) - a| < \varepsilon$ близости $f(x)$ к a требуется для всех *действительных* значений аргумента $x > N$, а не только для всех *натуральных* его значений $n > N$. Для последовательности это не требуется, так как последовательность определяется только для натуральных значений аргумента. Легко понять, что теоремы о пределах последовательностей и правила их вычисления переносятся на пределы функции в $+\infty$. Доказательства их совершенно аналогичны доказательствам для пределов последовательностей.

Определение 2.4. Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty, x_0)$. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ (или в $-\infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall x < N \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Обозначение:
$$a = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

ПРИМЕР 2.5. Докажем, что

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

При $x < 0$ $\quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{-x} < \varepsilon$, если $-x > \frac{1}{\varepsilon}$ и $x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = -\frac{1}{\varepsilon}\colon \quad \forall x < N$$
$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

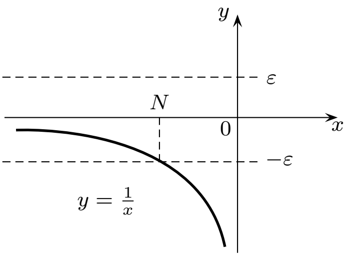


Рис. 2.3

График функции $\frac{1}{x}$ при $x < N$ находится в ε-полосе, ограниченной прямыми $y = \varepsilon$ и $y = -\varepsilon$ (рис. 2.3).

В определении 2.4 выполнение $\forall \varepsilon > 0$ условия $\forall x < N$ $|f(x) - a| < \varepsilon$ означает, что при $x \to -\infty$, т. е. при неограниченном уменьшении x, значения $f(x)$ становятся и остаются сколь угодно близкими к числу a. Как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$ значения $f(x)$ будут отличаться от a меньше чем на ε, как только x станет меньше N.

Определение 2.5. Если существуют пределы функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ и они равны одному и тому же числу a, то число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ (или в ∞).

Обозначение:
$$a = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

ПРИМЕР 2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ (см. примеры 2.1 и 2.5).

График функции $\frac{1}{x}$ находится в ε-полосе, ограниченной прямыми $y=\varepsilon$ и $y=-\varepsilon$ при $x>N=\frac{1}{\varepsilon}$ и при $x<-N=-\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. при $|x|>N$ (рис. 2.4).

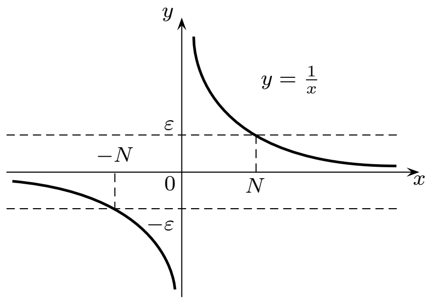


Рис. 2.4

Заметим, что вообще, если $a=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, то

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N>0\colon\quad\forall|x|>N\quad|f(x)-a|<\varepsilon.\tag{2.1}$$

В самом деле, $\forall\varepsilon>0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\quad\Rightarrow\quad\exists N_1\colon\quad\forall x>N_1\quad|f(x)-a|<\varepsilon;$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=a\quad\Rightarrow\quad\exists N_2\colon\quad\forall x<N_2\quad|f(x)-a|<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|f(x)-a|<\varepsilon\quad\forall x>|N_1|$ и $\forall x<-|N_2|$, а если $N=\max(|N_1|,|N_2|)$, то $\forall x>N$ и $\forall x<-N$, т. е. $\forall|x|>N$. Таким образом, условие (2.1) выполняется. Обратно, из выполнения условия (2.1) следует, что

$$|f(x)-a|<\varepsilon\quad\forall x>N\quad\text{и}\quad\forall x<-N.$$

Стало быть,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\quad\text{и}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=a,$$

а значит и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

Таким образом, условие (2.1) равносильно условию в определении (2.5).

Заметим, что, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не существует (если бы он существовал, то пределы в $+\infty$ и в $-\infty$ были бы равны).

Теоремы о пределах последовательностей и правила их вычисления распространяются и на пределы функций в $-\infty$ и в ∞.

ПРИМЕР 2.7.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

ПРИМЕР 2.8.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

§ 2.3. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Пределы функции в бесконечности используют при исследовании функций, определенных на бесконечных промежутках $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ или $(-\infty,+\infty)$. Для получения наглядного представления о поведении графиков таких функций за пределами чертежа можно использовать асимптоты.

Пусть функция $f(x)$ определена на $(a,+\infty)$. Рассмотрим ее график и прямую

$$y = kx + b. \tag{2.2}$$

Введем обозначение

$$\alpha(x) = f(x) - (kx+b). \tag{2.3}$$

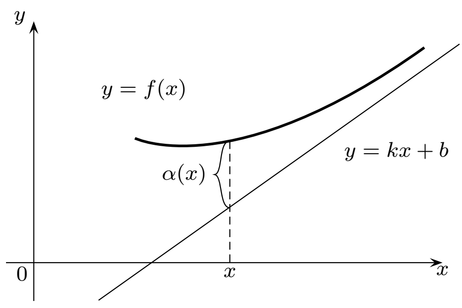


Рис. 2.5

Величина α выражает разность ординат точек графика функции и прямой при одном и том же значении x (см. рис. 2.5).

Определение 2.6. Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$, то прямая (2.2) называется *правой асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Если прямая (2.2) является правой асимптотой графика функции, то при $x \to +\infty$ график неограниченно приближается к асимптоте. А поскольку функция α может, в общем случае, принимать значения равные нулю, то график может пересекать свою асимптоту (или даже совпадать с асимптотой, если функция линейная: $f(x) = kx + b$).

Пусть прямая (2.2) является правой асимптотой графика $y = f(x)$. Тогда из (2.4) следует

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0.$$

Рассмотрим следующие пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(k + b\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\alpha(x)\right) = \\ = k + b\cdot 0 + 0\cdot 0 = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(b + \alpha(x)) = b + 0 = b.$$

Таким образом, если прямая (2.2) является асимптотой графика $y = f(x)$, то существуют конечные пределы, определяющие параметры асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx). \tag{2.4}$$

Справедливо и обратное: если существуют конечные пределы (2.5), то прямая (2.2) является правой асимптотой графика $y = f(x)$, так как из (2.5) следует

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty}((f(x) - kx) - b) = b - b = 0. \tag{2.5}$$

Если хотя бы один из пределов (2.5) не существует, либо равен ∞, то график $y = f(x)$ не имеет правой асимптоты (иначе оба предела существовали бы).

Определение 2.7. Если $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x) = 0$, то прямая (2.2) называется *левой асимптотой* графика $y = f(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$, то прямая (2.2) называется *двусторонней асимптотой* (или просто *асимптотой*) графика функции $y = f(x)$.

При $k \neq 0$ асимптоты называются *наклонными*, при $k = 0$ — *горизонтальными*.

Аналогично вышеизложенному устанавливается, что существование конечных пределов вида (2.5), с замененным стремлением $x \to +\infty$ на $x \to -\infty$ или $x \to \infty$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы прямая (2.2) была соответственно левой или двусторонней асимптотой графика $y = f(x)$.

ПРИМЕР 2.9. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

Найдем асимптоту ее графика. Используя примеры 2.7 и 2.8, получаем:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Следовательно, прямая

$$y = x$$

является наклонной асимптотой (двусторонней) графика функции.

Заметим, что при малых $|x|$ значения x^2 будут малы по сравнению с 1 и

$$f(x) \approx \frac{x^3}{1} = x^3.$$

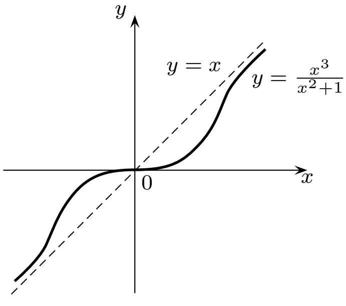


Рис. 2.6

Это означает, что вблизи точки $x = 0$ график функции будет мало отличаться от кубической параболы.

Принимая это во внимание, можно построить эскиз графика рассматриваемой функции (рис. 2.6).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$ (см. определения 2.1, 2.4, 2.5 и условие (2.1)).

2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 2m \leqslant x < 2m+1, \\ 1 & \text{при} \quad 2m+1 \leqslant x < 2m+2, m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Будет ли $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$?

3. Сформулируйте определение ограниченности функции $f(x)$ на E, при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$, при $x \to \infty$ (см. определения 2.2, 2.3 и ответ 3).

4. Будет ли функция $f(x)$, рассматриваемая в вопросе 2, ограниченной на области определения E, при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$, при $x \to \infty$?

5. Сформулируйте определения асимптот графика функции правой, левой, двусторонней, наклонной, горизонтальной (см. определения 2.6 и 2.7).

Ответы

2. Не будет, так как при $\varepsilon = 1$ условие $|f(x) - 1| < \varepsilon$ не будет выполняться при $2m \leqslant x < 2m+1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, для $\varepsilon = 1$ не существует такое N, чтобы условие $|f(x) - 1| < \varepsilon$ выполнялось для *всех* $x > N$.

По аналогичным причинам и никакое другое число не является пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

3. Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x \to -\infty$ (при $x \to \infty$), если существует такое число $N > 0$, что функция $f(x)$ является ограниченной на $(-\infty, -N)$ (на $(-\infty, -N) \cup (N, +\infty)$), т. е.

$$\forall x < -N \quad (\forall |x| > N) \quad |f(x)| \leqslant M.$$

4. Функция $f(x)$ будет ограниченной на E и при $x \to +\infty$, так как $\forall x \in E$ и $\forall x \in (0, +\infty)$ $\quad |f(x)| \leqslant 1 \quad (M = 1)$. Ограниченность при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$ не имеет смысла, так как функция $f(x)$ не определена при $x < 0$.

Лекция 3

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

§ 3.1. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

Будем говорить, что x стремится к x_0 слева и писать $x \to x_0 - 0$, если x растет, но остается меньшим, чем x_0.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (x_1, x_0).

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0 - 0$ (или *в точке* x_0 *слева*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall x \in (N, x_0) \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Обозначения:

$$a = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{или} \quad a = f(x_0 - 0).$$

Если $a = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, то при $x \to x_0 - 0$ значения функции будут отличаться от a на величину, меньшую сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, как только x попадает в интервал (N, x_0) (рис. 3.1).

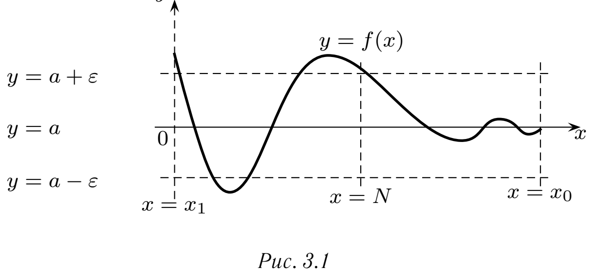


Рис. 3.1

Не исключено, что значения функции будут таковыми всюду на (x_1, x_0) и тогда можно положить $N = x_1$. Но в общем случае N зависит от ε и с уменьшением ε число N увеличивается. При этом интервал (N, x_0) сужается и все значения $x \in (N, x_0)$ становятся близкими к x_0. Это означает, другими словами, что значения функции $f(x)$ сколько угодно близки к a для всех значений аргумента $x < x_0$, достаточно близких к x_0. В частности, они могут быть и равными числу a где-либо.

Сопоставим определение 3.1 с определением 2.1 предела функции при $x \to +\infty$. Если учесть, что

$$x > N \iff x \in (N, +\infty),$$

(т. е. что эти два условия равносильны), то определению 2.1 можно придать вид:

$$a = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

$$\text{если} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall x \in (N, +\infty) \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

В такой форме оно аналогично определению 3.1. Благодаря этой аналогии теоремы о пределах и правила их вычисления переносятся на пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$. При этом в теореме об ограниченности функции, имеющей предел, рассматривается ограниченность функции при $x \to x_0 - 0$, под которой понимается ее ограниченность на интервале вида (b, x_0).

Будем говорить, что x стремится к x_0 справа и писать $x \to \to x_0 + 0$, если x уменьшается, но остается большим, чем x_0.

Определение 3.2. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (x_0, x_1).

Число a называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0 + 0$ (или *в точке* x_0 *справа*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall x \in (x_0, N) \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Обозначения:

$$a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

или

$$a = f(x_0 + 0).$$

Если

$$a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

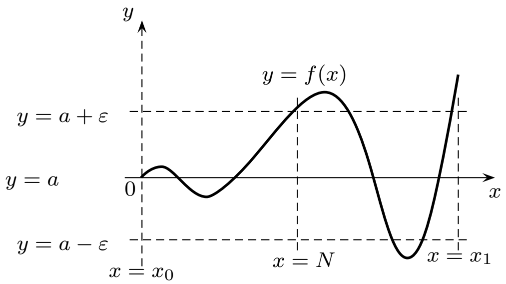


Рис. 3.2

то при $x \to x_0 + 0$ значения функции $f(x)$ будут отличаться от a на величину, меньшую сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, как только x попадает в интервал (x_0, N) (рис. 3.2), иными словами, значения функции сколь угодно близки к a (в частности, может быть, где-либо равны a) для всех значений аргумента $x > x_0$, достаточно близких к x_0.

Легко видеть, учитывая равносильность условий

$$x < N \iff x \in (-\infty, N),$$

что определение 3.2 аналогично определению предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

Теоремы о пределах и правила их вычисления распространяются и на пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (при этом соответствующим образом вводится и рассматривается понятие ограниченности функции $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$).

§ 3.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$ называют *односторонними пределами* этой функции. Если они оба равны одному и тому же числу a,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a, \qquad (3.1)$$

то число a называют *двусторонним пределом* (или просто *пределом*) функции $f(x)$ в точке x_0. Правда, обычно понятие двустороннего предела функций вводят посредством другого, равносильного сформулированному, определения (см. ниже определение 3.3).

Из условий (3.1) следует, что

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_1 \text{ и } N_2: \quad \forall x\in(N_1,x_0) \text{ и } \forall x\in(x_0,N_2) \quad |f(x)-a|<\varepsilon.$$

(рис. 3.3).

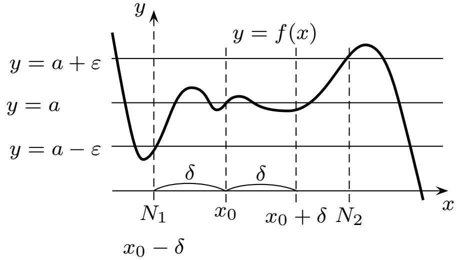


Рис. 3.3

Положим $\delta = \min(x_0 - N_1, N_2 - x_0)$ (на рисунке $\delta = x_0 - - N_1$). Тогда, если $x \in \dot{\delta}(x_0)$, то $x \in (N_1, x_0)$ или $x \in (x_0, N_2)$. Следовательно,

$$\forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Таким образом, если условия (3.1) выполняются, то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |f(x) - a| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Обратно, из условия (3.2) следуют условия (3.1).

В самом деле, задав произвольное число $\varepsilon > 0$, определим по нему соответствующую условию (3.2) проколотую окрестность $\dot{\delta}(x_0)$ и положим $N = x_0 - \delta$. Тогда, если $x \in (N, x_0)$, то $x \in \dot{\delta}(x_0)$ и, в силу (3.2), $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N=x_0-\delta: \forall x\in(N,x_0) \quad |f(x)-a|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x)=a.$$

Аналогично, полагая $N = x_0 + \delta$, можно доказать, что и

$$\lim_{x\to x_+0} f(x) = a.$$

Итак, условие (3.2) равносильно условиям (3.1). Именно его и используют обычно для определения двустороннего предела функции.

Определение 3.3. Пусть функция $f(x)$ определена в $\dot{O}(x_0)$.

Число a называется *(двусторонним) пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$ (или *в точке* x_0), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Обозначение:
$$a = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Равносильность условий (3.2) и (3.1) может быть представлена следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Для того чтобы существовал двусторонний предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *равный* a, *необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны* a *оба двусторонних предела* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Доказательством теоремы являются приведенные выше рассуждения.

Замечание 3.1. Условие близости $|f(x) - a| < \varepsilon$ иногда удобно представлять в равносильном виде $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ или $f(x) \in \varepsilon(a)$ ($\varepsilon(a)$ — ε-окрестность точки a).

Замечание 3.2. При определении пределов функции $f(x)$ в точке x_0 значение $f(x)$ в точке x_0 не рассматривается ($x \to x_0$, но $x \neq x_0$), оно может быть даже не определено. Это усложняет понятие предела. Но, с другой стороны, благодаря этому расширяется множество функций, имеющих предел в точке, и, что особенно важно, оказывается возможным определить как пределы функций в точке, основные понятия математического анализа, — производную и интеграл.

Теоремы о пределах и правила их вычисления распространяются на пределы функции в точке (ограниченность функции при $x \to x_0$ определяется как ее ограниченность в $\dot{O}(x_0)$). Доказательства по сути аналогичны рассмотренным выше, хотя их оформление имеет некоторую специфику, которую мы проиллюстрируем ниже при доказательстве ряда теорем, в частности, тех, в которых устанавливаются свойства пределов, ранее не рассматривавшиеся.

Теорема 3.2. *(о переходе к пределу в неравенстве). Если*

$$\forall x \in \dot{O}(x_0) \quad f(x) \leqslant g(x)$$

и существуют пределы $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim_{x \to x_0} g(x)$, *то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Доказательство методом от противного. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и допустим, что $A > B$. Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы ε-окрестности точек A и B не пересекались (рис. 3.4). Для этого достаточно положить $\varepsilon < \frac{A-B}{2}$.

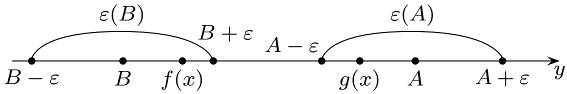


Рис. 3.4

Для выбранного числа ε

$$\exists \dot{\delta}_1(x_0):\quad \forall x \in \dot{\delta}_1(x_0)\quad f(x) \in \varepsilon(A)$$

и

$$\exists \dot{\delta}_2(x_0):\quad \forall x \in \dot{\delta}_2(x_0)\quad f(x) \in \varepsilon(B).$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\dot{\delta}(x_0)$ будет совпадать с той из окрестностей $\dot{\delta}_1(x_0), \dot{\delta}_2(x_0)$, размер которой является меньшим (или с обеими, если их размеры одинаковы) (рис. 3.5 $\delta=\delta_1$).

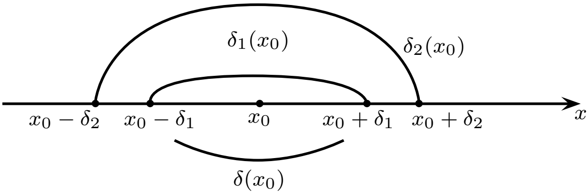


Рис. 3.5

По этой причине $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)\quad f(x) \in \varepsilon(A)$, а $g(x) \in \varepsilon(B)$ и, значит, $f(x) > g(x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, допущение, что $A > B$ неверное и $A \leqslant B$. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Строгое неравенство $f(x) < g(x)$ при переходе к пределу может перейти в равенство. Например, если $f(x) = -|x|$, а $g(x) = |x|$, то

$$f(x) < g(x)\quad \forall x \neq 0,$$

т. е. в любой окрестности $\dot{O}(0)$, но, очевидно (рис. 3.6),

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

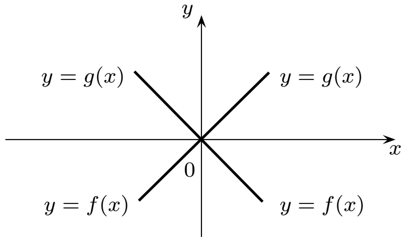


Рис. 3.6

Из замечания следует, что теорему 3.2 нельзя усилить. Нельзя утверждать, что всегда

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 3.3 (о пределе промежуточной функции). *Если*

$$\forall x \in \dot{\delta}_0(x_0) \quad \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x) \tag{3.3}$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \Psi(x) = A,$$

то в точке x_0 существует предел функции $f(x)$ и он тоже равен A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}_1(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}_1(x_0) \quad \varphi(x) \in \varepsilon(A)$$

и

$$\exists \dot{\delta}_2(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}_2(x_0) \quad \Psi(x) \in \varepsilon(A).$$

Положим $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$.

Тогда $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ $\varphi(x) \in \varepsilon(A), \Psi(x) \in \varepsilon(A)$ и выполняются условия (3.3). Следовательно, и $f(x) \in \varepsilon(A) \forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ (рис. 3.7), так как в каждой точке $x \in \dot{\delta}(x_0)$ значение $f(x)$ является промежуточным между значениями $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ ($f(x)$ — промежуточная функция).

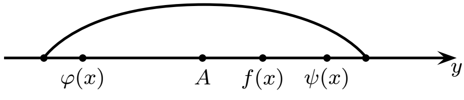


Рис. 3.7

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(A) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

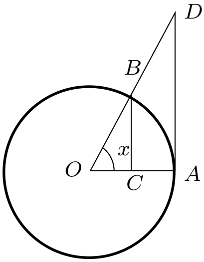


Рис. 3.8

Пусть в круге радиуса R с центром в точке O (рис. 3.8)

$$\angle AOB = x, \quad BC \perp OA, \quad AD \perp OA$$

и, следовательно,

$$OC = R\cos x, \quad BC = R\sin x,$$
$$AD = R\,\mathrm{tg}\,x.$$

Очевидно,

пл. $\triangle COB <$ пл. сек. $AOB <$ пл. $\triangle AOD$.

Отсюда следует, что $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x \cos x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi R^2 < \frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x,$$

а разделив на $\frac{1}{2}R^2 \sin x$,

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

переходя к обратным величинам,

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

и меняя части неравенств местами, получаем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}. \tag{3.4}$$

В силу четности всех трех функций в (3.4) эти неравенства будут верными и $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, а следовательно, $\forall x \in \dot{\delta}_0(0)$ при $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Так как $\cos 0 = 1$, а вблизи $x = 0$ значения $\cos x$ сколь угодно близки к 1 $\forall x$, достаточно близких к 0 (вспомните график $\cos x$), то

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

(Более аккуратное обоснование см. ниже в лекции № 4.) И, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Учитывая (3.4), по теореме 3.3 получаем
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.5}$$
Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ называют *первым замечательным пределом.*

Второй замечательный предел —
$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.6}$$
Обоснование его существования для натуральных значений $x = n$ было рассмотрено в конце лекции № 1. Доказывается, что предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ равен e также и при $x \to +\infty, x \to \to -\infty$, а следовательно, и при $x \to \infty$.

Часто встречается и еще одна форма второго замечательного предела, которая получается из (3.6) путем замены x на $\frac{1}{x}$ и соответственно $x \to \infty$ на $x \to 0$.
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{3.7}$$

§ 3.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение 3.4. Пусть функция $f(x)$ определена в $\dot{O}(x_0)$. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если
$$\forall M > 0 \quad \exists\dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |f(x)| > M.$$

Так же, как для бесконечно большой последовательности устанавливается, что функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, не является ограниченной при $x \to x_0$ и конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не имеет, но принято говорить, что ее предел бесконечный:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

ПРИМЕР 3.2. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно большой при $x \to 0$. В самом деле (рис. 3.9),
$$\forall M > 0 \quad \exists\dot{\delta}(0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(0)$$
$$f(x) > M \quad |f(x)| > M.$$
$$\lim_{x\to 0} {}^1\!/\!_{x^2} = \infty.$$

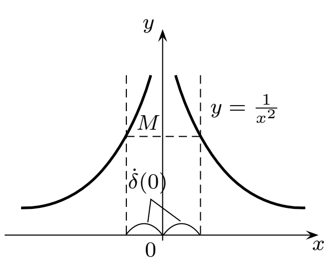


Рис. 3.9

ПРИМЕР 3.3. Функция $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ также является бесконечно большой при $x \to 0$. В самом деле (рис. 3.10),

$$\forall M > 0 \quad \exists \dot{\delta}(0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(0) \quad f(x) < -M \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$

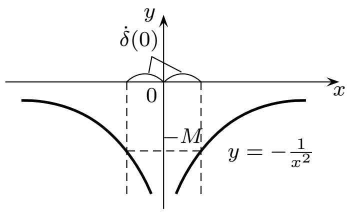


Рис. 3.10

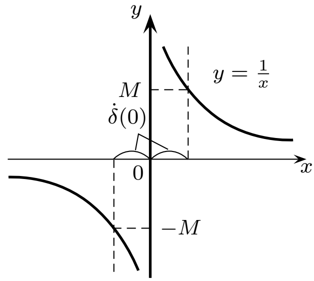


Рис. 3.11

ПРИМЕР 3.4. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ (рис. 3.11)

Для произвольного $M > 0$ построим $\dot{\delta}(0)$ как указано на рис 3.11. В этом случае $\forall x \in \dot{\delta}(0) f(x) > M$ при $x > 0$ и $f(x) < -M$ при $x < 0$. Следовательно, $\forall x \in \dot{\delta}(0) |f(x)| > M \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, т. е. функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Среди бесконечно больших функций выделяют бесконечно большие положительные и отрицательные.

Определение 3.5. Если

$$\forall M > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(x) > M \quad (\text{или } f(x) < -M),$$

то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$ *положительной* (или *отрицательной*) и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad (\text{или} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty).$$

Из анализа, проведенного в примерах 3.2 и 3.3, следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

Рассматривают и односторонние бесконечно большие функции и следующие обозначения для них $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ или $f(x_0 + 0) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ или $f(x_0 - 0) = \infty$.

Среди них также выделяют бесконечно большие положительные и отрицательные.

ПРИМЕР 3.5. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ вблизи $x = 0$. Так как она определена лишь при $x > 0$, то вблизи $x = 0$ ее можно исследовать только при $x \to 0+0$. Очевидно (рис. 3.12), что

$$\forall M > 0 \quad \exists N: \quad \forall x \in (0, N) \quad f(x) > M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

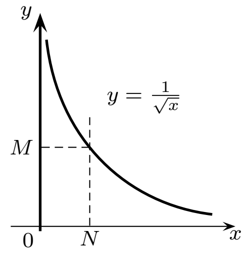


Рис. 3.12

т. е. функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ — положительная бесконечно большая при $x \to 0+0$.

Определение 3.6. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Характер асимптотического приближения графика $y = f(x)$ к прямой $x = x_0$ иллюстрируется ниже на нескольких примерах (рис. 3.13).

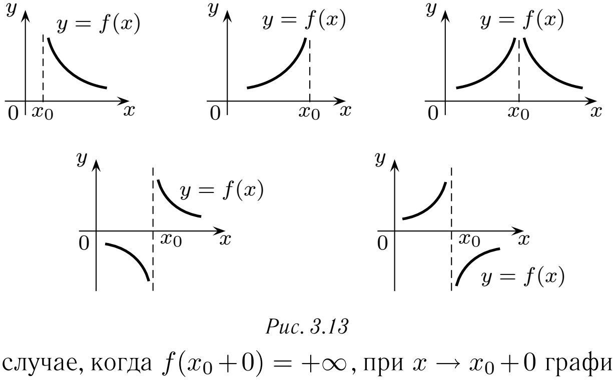


Рис. 3.13

В случае, когда $f(x_0+0) = +\infty$, при $x \to x_0+0$ график $y = f(x)$ неограниченно приближается к прямой $x = x_0$ так, что ординаты его точек становятся и остаются сколь угодно большими, а абсциссы — сколь угодно близкими к x_0. Подобным же образом можно охарактеризовать и другие случаи.

Заметим, что во всех рассмотренных выше примерах 3.2–3.5 прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения пределов функции $f(x)$ в точке x_0 односторонних (слева и справа) и двустороннего (см. определения 3.1–3.3).

2. Как связаны односторонние и двусторонний пределы? (см. теорему 3.1).

3. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$?

4. Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенствах и о пределе промежуточной функции (см. теоремы 3.2, 3.3).

5. Какие пределы называют замечательными? (см. формулы (3.5), (3.6), (3.7)).

6. Сформулируйте определения бесконечно большой функции, бесконечно большой положительной, бесконечно большой отрицательной (см. определения 3.4, 3.5).

7. Чем отличается конечный и бесконечный пределы функции?

8. Как связано существование $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ с существованием $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

9. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты функции (см. определение 3.6). Охарактеризуйте поведение графика функции вблизи вертикальной асимптоты (см. рис. 3.13).

Ответы

3. Не существует. Например, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \neq 0$, так как при $\varepsilon = 1$ условие $|\sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$ не выполняется в точках $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) и, следовательно, не может выполняться для *всех* $x \in \dot{\delta}(0)$, как бы мала ни была окрестность $\dot{\delta}(0)$ ($x_k \in \dot{\delta}(0)$ для *всех* достаточно больших $|k|$, а $\sin\frac{1}{x_k} = \pm1$).

По аналогичным причинам и никакое другое число не является пределом функции $\sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

7. Конечный предел это число. О бесконечном пределе функции в точке x_0 говорят, когда она конечного предела в этой точке не имеет и является бесконечно большой при $x \to x_0$.

8. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (см. примеры 3.2, 3.3), но

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad\not\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \not\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

(см. пример 3.4).

Лекция 4

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 4.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Рассмотрим графики двух функций ($y = f(x)$ и $y = g(x)$), приведенных на рис. 4.1, 4.2.

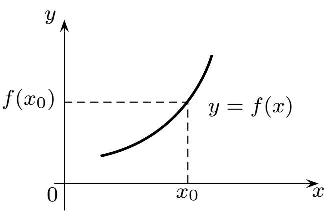


Рис. 4.1

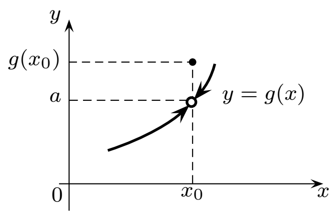


Рис. 4.2

Сравним поведение этих функций вблизи точки x_0. Очевидно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

На графике $y = g(x)$ точка с абсциссой x_0 выколота и является изолированной от кривой. И хотя $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ существует, но он равен не $g(x_0)$, а ординате выколотой точки:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0).$$

Определение 4.1. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $O(x_0)$, называется непрерывной в точке x_0, если

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

и он равен значению функции $f(x)$ в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.1}$$

Функция $f(x)$, рассмотренная выше, непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ не является непрерывной (разрывна) в точке x_0.

Доказывается, что все основные элементарные функции

$$a^x,\ \log_a x,\ x^\alpha,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{th} x,\ \operatorname{cth} x$$

непрерывны в каждой внутренней точке ОДЗ.

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

(Использовано при выводе первого замечательного предела, см. (3.5).)

Условие (4.1) непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 равносильно (см. теорему 1.3) условию

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{4.2}$$

При нарушении этого условия точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. В зависимости от вида нарушения условия (4.2) точки разрыва имеют различный характер и классифицируются следующим образом.

1. Если
$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$. (Значение $f(x_0)$ может быть и не определено.)

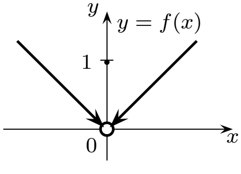


Рис. 4.3

ПРИМЕР 4.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{при } x \neq 0; \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

На рис. 4.3 показан график функции $f(x)$.

Очевидно, $f(0-0) = f(0+0) = 0$, но $f(0) = 1$. Следовательно, $x = 0$ — точка устранимого разрыва функции $f(x)$. Заметим, что если положить $f(0) = 0$, то разрыв устраняется.

2. Если
$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

то x_0 называется *точкой разрыва с конечным скачком* функции $f(x)$. (Значение $f(x_0)$ может быть любым, а может быть и не определено.)

ПРИМЕР 4.2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \geqslant 0; \\ x+1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

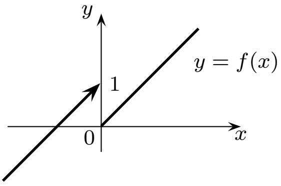


Рис. 4.4

Здесь (рис. 4.4) $f(0-0) = 1$, $f(0+0) = 0$. Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва с конечным скачком функции $f(x)$. При переходе через точку $x = 0$ значения функции $f(x)$ меняются скачком от значений, сколь угодно близких к 1 при $x < 0$ к значению, равному 0 в точке $x = 0$ и значениям, сколь угодно близким к 0 при $x > 0$.

3. Конечный скачок и устранимый разрыв функции $f(x)$ называются *разрывами I рода*. Их отличительным признаком является существование конечных односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Все другие разрывы называются *разрывами II рода*. В точке разрыва II рода хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $f(x) = 5^{1/x}$ $(x \neq 0)$. Заметив, что

$$\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} -\infty & \text{при } x \to 0-0, \\ +\infty & \text{при } x \to 0+0, \end{cases}$$

нетрудно определить односторонние пределы:

$$f(0-0) = 0, \quad f(0+0) = +\infty.$$

Так как $f(0+0) = +\infty$, то $x = 0$ — точка разрыва функции $f(x)$ II рода.

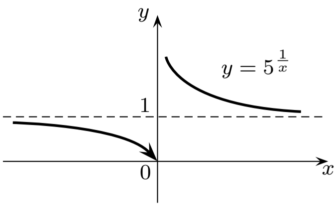


Рис. 4.5

Проведенное исследование позволяет охарактеризовать поведение функции $f(x)$ вблизи точки $x = 0$ (см. ее график на рис. 4.5). Чтобы получить более полное представление о графике функции, следует учесть, что:

1) $f(0+0) = +\infty \Rightarrow x = 0$ — вертикальная асимптота графика;

2) $x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow 5^{1/x} \to 1$, причем $5^{1/x} > 1$ при $x > 0$ и $5^{1/x} < 1$ при $x < 0$.

Нетрудно убедиться, что прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой графика функции. В самом деле

$$\lim_{x\to\infty} 5^{1/x} = 1 \Rightarrow \qquad (\text{см. } (2.5))$$
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} 5^{1/x} = 0 \cdot 1 = 0,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} 5^{1/x} = 1.$$

$y = kx + b \Rightarrow y = 1$ — горизонтальная асимптота.

§ 4.2. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Условие (4.1), определяющее непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(f(x_0)) \tag{4.3}$$

(см. определение 3.3). Но так как $f(x) \in \varepsilon(f(x_0))$ и при $x = x_0$ ($f(x_0)$ является центром ε-окрестности $f(x_0)$, то в (4.3) выколотую окрестность $\dot{\delta}(x_0)$ можно заменить «полной» окрестностью $\delta(x_0)$. В результате приходим к следующему равносильному (4.1) условию непрерывности на языке «$\varepsilon - \delta$»:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 в том и только в том случае, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_0)\colon \quad \forall x \in \delta(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(f(x_0)) \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 (о переходе к пределу под знаком непрерывной функции). *Пусть дана сложная функция $y = f(u(x))$. Если существует конечный предел внутренней функции $u(x)$ в точке x_0 равный A:*

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = A,$$

а внешняя функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет предел в точке x_0 равный $f(A)$ т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x\to x_0} u(x)). \tag{4.5}$$

Утверждение теоремы означает возможность переноса знака предела под знак непрерывной функции (перехода к пределу под знаком непрерывной функции).

Доказательство. Непрерывность функции $f(u)$ в точке $u = A$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1(A)\colon \quad \forall u \in \delta_1(A) \quad f(u) \in \varepsilon(f(A)), \tag{4.6}$$

а равенство

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = A \Rightarrow \forall \delta_1 > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad u(x) \in \delta_1(A)$$

из (4.6) при $u = u(x)$ получаем

$$\forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(u(x)) \in \varepsilon(f(A)). \tag{4.7}$$

Таким образом, по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ разыскивается окрестность $\delta_1(A)$, а по ней $\dot{\delta}(x_0)$, в которой выполняется (4.7), т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(u(x)) \in \varepsilon(f(A)).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x)) = f(A),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 4.1 позволяет вычислить пределы, которые наряду с замечательными пределами, рассмотренными в лекции № 3 (см. (3.5)–(3.7)), относят также к числу замечательных,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Здесь функция $\ln(1+x)^{1/x}$ рассматривается как сложная функция: $u = (1+x)^{1/x}$ — внутренняя функция, $y = \ln u$ — внешняя функция. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ (см. (3.7)), а функция $\ln u$ непрерывна в точке $u = e$ как одна из основных элементарных функций. Условия теоремы 4.1 выполнены, что и дало возможность перейти к пределу под знаком логарифма.

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Если ввести $y = e^x - 1$, то $x = \ln(1+y)$ и, учитывая, что $y \to 0$ при $x \to 0$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{4.9}$$

Теорема 4.2 (о непрерывности сложной функции). *Если функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Определение 4.2. Применяя теорему 4.1 и условие непрерывности (4.1), получаем

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x\to x_0} u(x)) = f(u(x_0)),$$

откуда и вытекает, в силу (4.1), непрерывность функции $f(u(x))$ в точке x_0.

Теорема 4.3 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, а C — постоянная, то в точке x_0 непрерывны функции $f(x) + g(x)$; $Cf(x)$; $Cg(x)$; $f(x)g(x)$ и, при добавочном условии $g(x_0) \neq 0$, функция $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Доказательство. Применяя правила вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0),$$

следовательно, сумма $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0. Совершенно аналогично доказывается непрерывность остальных функций.

В математическом анализе очень широко используются элементарные функции. Основные элементарные функции уже упомянуты выше и отмечено, что все они непрерывны в каждой точке области определения.

В общем случае, *элементарными функциями* называют функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции образования сложной функции. Из теорем 4.3 и 4.2, очевидно, вытекает, что все элементарные функции (вместе с основными) также непрерывны в каждой точке их области определения.

Теорема 4.4 (об устойчивости знака непрерывной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то $f(x) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки x_0, причем знак $f(x)$ в этой окрестности совпадает со знаком $f(x_0)$.*

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы окрестность $\varepsilon(f(x_0))$ не содержала нуль (рис. 4.6).

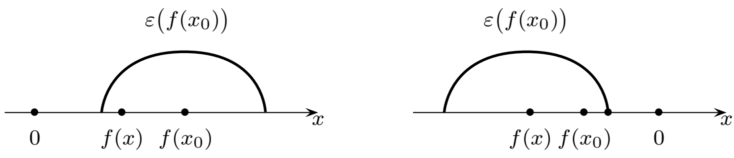


Рис. 4.6

Тогда, в силу условия непрерывности (4.4),

$$\exists \delta(x_0): \quad \forall x \in \delta(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(f(x_0)),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Наряду с условиями непрерывности (4.1) и (4.4) широко используется еще одна его форма.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в $O(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — соответствующее приращение функции.

Тогда, учитывая, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \Delta y = 0$$

и

$$x \to x_0 \Longleftrightarrow \Delta x \to 0,$$

получаем необходимое и достаточное условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{4.10}$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и условия непрерывности (см. определение 4.1 и формулы (4.1), (4.2), (4.10)).

2. Может ли функция, непрерывная в точке, не иметь предела в этой точке?

3. Может ли функция, не определенная в некоторой точке, быть непрерывной в этой точке?

4. Перечислите виды точек разрыва и соответствующие им условия (см. пп. 1, 2, 3).

5. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции (см. теорему 4.1).

6. Какие функции называются элементарными? С помощью каких теорем устанавливается их непрерывность? (см. теоремы 4.2, 4.3).

7. Может ли функция $f(x)$ быть положительной в точке x_0 и отрицательной во всех остальных точках ее области определения.

Ответы

2. Не может (см. определение 4.1).

3. Не может (см. определение 4.1).

7. Может, если функция $f(x)$ разрывна в точке x_0. Не может, если она непрерывна в точке x_0 (см. теорему 4.4 об устойчивости знака непрерывной функции).

Лекция 5

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

§ 5.1. ПОНЯТИЕ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

В условии непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (см. определение 4.1):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

рассматривается двусторонний предел. Если его заменить односторонним пределом, то мы придем к понятию *односторонней непрерывности*.

Определение 5.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если

$$\exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0),$$

то функция называется непрерывной слева в точке x_0.

Наряду с непрерывностью функции в точке рассматривают ее непрерывность на разных промежутках. Например, функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке интервала.

Более сложным является понятие непрерывности функции на отрезке.

Определение 5.2. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она:

1) непрерывна на интервале (a, b);
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

Обозначение: $f(x) \in C[a, b]$.

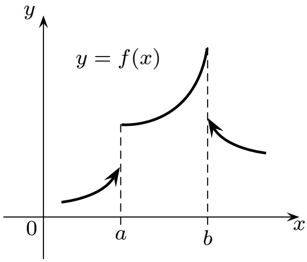


Рис. 5.1

Замечание 5.1. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ может быть разрывной в точках a и b.

Например, на рис. 5.1 показан график функции $y = f(x)$, которая непрерывна на $[a, b]$, но имеет разрывы с конечными скачками функции в точках a, b (она непрерывна в этих точках лишь «изнутри» отрезка).

§ 5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Функции, непрерывные на отрезке, обладают целым рядом замечательных свойств, которые оформим в виде теорем.

Теорема 5.1 (о существовании нуля функции). *Если функция $f(x) \in C[a, b]$ и на концах отрезка $[a, b]$ имеет значения, противоположные по знаку, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a, b)$ в которой значение*

$$f(\xi) = 0.$$

Доказательство теоремы здесь не рассматривается.

Ее геометрический смысл состоит в том, что график функции, удовлетворяющей условиям теоремы, обязательно пересечет ось Ox (рис. 5.2).

Заметим, что если функция $f(x)$ разрывна на $[a, b]$, то даже при выполнении условия о противоположности знаков значений

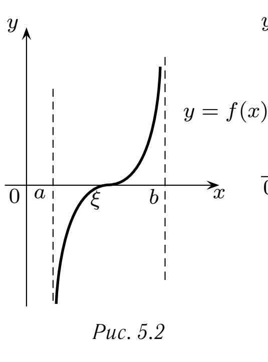


Рис. 5.2

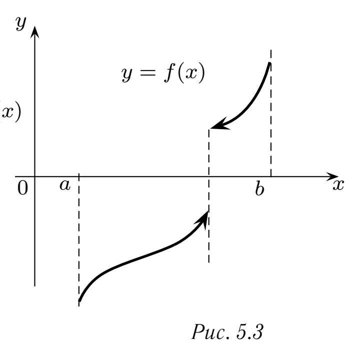


Рис. 5.3

$f(a)$ и $f(b)$ функция $f(x)$ может не обращаться в нуль на (a, b), а ее график может не пересекать ось Ox (рис. 5.3).

Теорема 5.1 широко используется в приближенных вычислениях при решении уравнений на этапе отделения корней уравнения, когда устанавливаются промежутки, содержащие корни.

ПРИМЕР 5.1. Пусть дано уравнение $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Функция $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ всюду определена и непрерывна

$$f(0) = -1 < 0,$$
$$f(1) = 1 > 0.$$

Значит на концах отрезка $[0, 1]$ функция $f(x)$ принимает значения, противоположные по знаку.

По теореме 5.1 существует точка $\xi \in (0, 1)$, в которой $f(\xi) = 0$, т. е. данное уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.

На теореме 5.1 основан наиболее простой и широко используемый метод приближенного решения уравнений, называемый методом бисекции (или методом половинного деления). Проиллюстрируем его суть, применив к решению уравнения, рассмотренного в примере 5.1. Было установлено, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$. Разделим этот интервал пополам и в точке деления $x = 1/2$ определим знак функции $f(x)$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$. Так как $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, а $f(1) > 0$, то корень имеется на интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Теперь разделим интервал $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ пополам. В точке деления $f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$, а интервале $f(1) > 0$. Значит есть корень на интервале $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$. При следующем делении получим $f\left(\frac{7}{8}\right) > 0$ и так как $f(1) > 0$, а $f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$, то это значит, что корень находится на интервале $\left(\frac{3}{4}, \ \frac{7}{8}\right)$. Продолжая этот процесс половинного деления, очевидно, можно получить интервал, содержащий корень, сколь угодно малой длины. Если установлено, что корень $\xi \in (\alpha, \beta)$, то, положив $\xi \approx \frac{\alpha+\beta}{2}$, можно утверждать, что корень найден с погрешностью меньшей $\frac{\beta-\alpha}{2}$ (рис. 5.4).

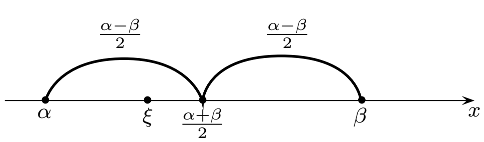


Рис. 5.4

Теорема 5.2 (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Если функция* $f(x) \in C[a,b]$, *то она принимает на* (a,b) *все промежуточные значения между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Эта теорема легко доказывается с помощью теоремы 5.1. Но так как теорему 5.1 мы не доказывали, то опустим доказательство и этой теоремы.

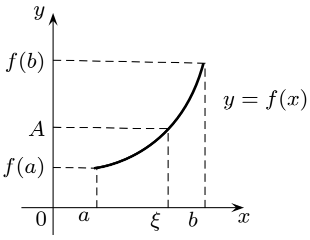


Рис. 5.5

Суть теоремы заключается в следующем. Если, например, $f(a) < A < f(b)$, то A — промежуточное значение между $f(a)$ и $f(b)$. В силу теоремы для любого такого A $\exists c \in (a,b)$: $f(c) = A$, т. е. график функции $y = f(x)$ на (a,b) обязательно имеет точку с ординатой, равной A (рис. 5.5).

Определение 5.3. Число M называется наибольшим значением функции $f(x)$ на $[a,b]$, если

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant M \quad \text{и} \quad \exists \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = M.$$

Обозначение:

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Определение 5.4. Число m называется наименьшим значением функции $f(x)$ на $[a,b]$, если

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geqslant m \quad \text{и} \quad \exists \xi \in [a,b]: \quad f(\xi) = m.$$

Обозначение:

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Теорема 5.3 (Вейерштрасса). *Если функция* $f(x) \in C[a,b]$, *то на* $[a,b]$ *она ограничена и имеет наибольшее и наименьшее значения.*

Доказательство не рассматривается.

Замечание 5.2. Утверждение теоремы может быть неверным для функции непрерывной не на отрезке, а на интервале или полуинтервале.

ПРИМЕР 5.2. Функция $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ непрерывна, но не ограничена и не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений (рис. 5.6).

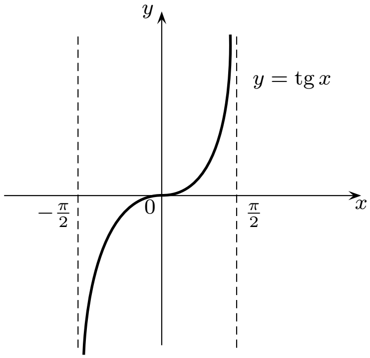


Рис. 5.6

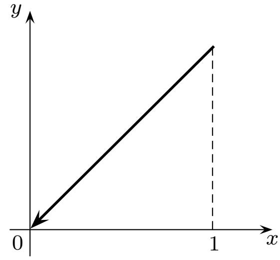


Рис. 5.7

ПРИМЕР 5.3. Функция $f(x) = x$ на $(0, 1]$ непрерывна, ограничена $(\forall x \in (0,1] \quad |f(x)| \leqslant 1)$, имеет

$$\max_{x \in (0,1]} f(x),$$

но не имеет

$$\min_{x \in (0,1]} f(x)$$

(неравенство $f(x) > 0$ выполняется в строгом смысле, не существует точки ξ на $(0, 1]$, в которой $f(x)$ было бы равно 0) (рис. 5.7).

Контрольные вопросы

1. Следует ли из непрерывности функции в точке непрерывность функции в этой точке слева и справа? Верно ли обратное?
2. Сформулируйте определение функции, непрерывной на отрезке (см. определение 5.2).
3. Перечислите свойства функций, непрерывных на отрезке (см. теоремы 5.1–5.3).
4. Сформулируйте определения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке (см. определения 5.2, 5.3).
5. Изложите суть метода половинного деления для решения уравнения (см. теорему 5.1 и пример 5.1).

Ответы

1. Следует (см. определение 5.1 и условие непрерывности (4.4) в лекции № 4). Обратное также верно (обоснование см. там же).

Лекция 6

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

§ 6.1. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 6.1. Функция $\alpha(x)$, определенная в $\dot{O}(x_0)$, называется бесконечно малой функцией при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

На языке «$\varepsilon - \delta$» это означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

ПРИМЕР 6.1. Функция $\alpha(x) = x$ — бесконечно малая при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} x = 0.$$

Функция $\sin x$ — бесконечно малая при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0.$$

Функция $\cos x$ — бесконечно малая при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Функция $\cos x$ не является бесконечно малой при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Замечание 6.1. Одна и та же функция при стремлении ее аргумента к различным значениям может быть бесконечно малой, а может и не быть таковой (бесконечная малость имеет локальный характер).

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами: если при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции, а $f(x)$ — ограниченная при $x \to x_0$, то функции

$$\alpha(x)+\beta(x), \alpha(x)-\beta(x), \alpha(x)f(x), \beta(x)f(x)$$

будут бесконечно малыми при $x \to x_0$.

Доказательства этих свойств аналогичны соответствующим доказательствам для последовательностей (см. теорему 1.3). Специфические черты оформления проявляются лишь в рассмотрении промежутков, на которых выполняются условия бесконечной малости и ограниченности. При доказательстве теорем 3.2 и 3.3 эта специфика уже выявлялась. Проиллюстрируем ее еще раз на примере доказательства того, что произведение бесконечно малой функции при $x \to x_0$ на ограниченную при $x \to 0$ является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

Доказательство. Сравните с доказательством теоремы 1.3. Так как функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$, то

$$\exists M > 0 \quad \text{и} \quad \dot{\delta}_1(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}_1(x_0) \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то для числа $\frac{\varepsilon}{M}$

$$\exists \dot{\delta}_2(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}_2(x_0) \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ будут одновременно выполняться неравенства $|f(x)| \leqslant M$ и $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$, следовательно, $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ $|\alpha(x)f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |\alpha(x)f(x)| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\alpha(x)f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

ПРИМЕР 6.2.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

так как при $x \to 0$ функция x — бесконечно малая, а $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant$ $\leqslant 1$ $\forall x \neq 0$ и, значит, функция $\sin\frac{1}{x}$ ограничена при $x \to 0$, следовательно, $x\sin\frac{1}{x}$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$.

Любопытно отметить, что этот предел существует, несмотря на то, что

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

не существует. Последнее верно потому, что при $x\to 0$ аргумент синуса $\frac{1}{x}\to\infty$ и значения $\sin\frac{1}{x}$ бесчисленное множество раз изменяются в диапазоне от -1 до $+1$. Поэтому, например, при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ условие близости $\left|\sin\frac{1}{x}-a\right|<\frac{1}{2}$ ни для какого числа a не будет выполняться $\forall x\in\dot{\delta}(0)$, какую бы маленькую окрестность $\dot{\delta}(0)$ мы ни взяли.

Имеет место аналогичная теореме 1.4 и аналогично доказываемая.

Теорема 6.1. *Для того, чтобы существовал*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a,$$

необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить в виде

$$f(x)=a+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Эта теорема используется для обоснования правил вычисления пределов суммы, разности, произведения и частного функций, аналогичных правилам для пределов последовательностей и пределов функции в бесконечности.

§ 6.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИМИ ФУНКЦИЯМИ

Теорема 6.2. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ (значения которой являются обратными к значениям функции $f(x)$) — бесконечно малая при $x\to x_0$.*

Доказательство. Зададим произвольное число $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x\to x_0$, то для числа $M=\frac{1}{\varepsilon}$:

$$\exists\dot{\delta}(x_0):\quad \forall x\in\dot{\delta}(x_0)\quad |f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$, во-первых, $f(x) \neq 0$ и $\frac{1}{f(x)}$ имеет смысл, а во-вторых, $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon,$$

т. е. $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Теорема 6.3. *Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\forall x \in \dot{\delta}_1(x_0) \quad \alpha(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.*

Доказательство. Зададим произвольное число $M > 0$. Так как $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то для числа $\varepsilon = \frac{1}{M}$:

$$\exists \dot{\delta}_2(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}_2(x_0) \quad |\alpha(x)| < \frac{1}{M}.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$, во-первых, $\alpha(x) \neq$ $\neq 0$ и $\frac{1}{\alpha(x)}$ имеет смысл, а во-вторых, $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M$.

Таким образом,

$$\forall M > 0 \quad \exists \dot{\delta}(x_0): \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > M,$$

т. е. $\frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

При вычислении пределов для выявления бесконечно больших функций (пределы которых считаются бесконечными) удобно использовать следующую теорему.

Теорема 6.4. *Если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0, \ a \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \quad и \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad \alpha(x) \neq 0,$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty.$$

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{0}{a} = 0,$$

т. е. $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Так как $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ $\alpha(x) \neq 0$, то $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ и $\frac{\alpha(x)}{f(x)} \neq 0$.

По теореме 6.3 функция $\frac{f(x)}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, что и доказывает теорему.

ПРИМЕР 6.3. Найти

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4)=8\neq 0,\ \lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

и

$$x-2\neq 0 \quad \text{при} \quad x\neq 2,$$

то

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}=\infty.$$

§ 6.3. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to$ $\to x_0$.

Определение 6.2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с $\beta(x)$, а $\beta(x)$ — бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с $\alpha(x)$.

ПРИМЕР 6.4. $\alpha(x)=x^2$ и $\beta(x)=x$ — бесконечно малые функции при $x\to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0,$$

то x^2 — бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с x, а x — бесконечно малая низшего порядка малости по сравнению с x^2.

(Вообще из бесконечно малых при $x\to 0$ степенных функций x^n и x^m высшего порядка малости будет та, у которой показатель степени больше.)

Замечание 6.2. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$$

(см. теорему 6.2) и, следовательно, $\alpha(x)$ — бесконечно малая *низшего порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$, а $\beta(x)$ — бесконечно малая *высшего порядка малости* по сравнению с $\alpha(x)$.

Определение 6.3. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0, \infty,$$

то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости.

ПРИМЕР 6.5. $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = x$ — бесконечно малые функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

(см. (3.5)), то $\sin x$ и x — бесконечно малые одного порядка малости.

Замечание 6.3. Если конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми*.

ПРИМЕР 6.6. $\alpha(x) = x\sin\frac{1}{x}$ (см. пример 6.2) и $\beta(x) = x$ — бесконечно малые функции при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ \bar{\exists},$$

то бесконечно малые $x\sin\frac{1}{x}$ и x не сравнимы.

В математическом анализе очень широко используется символ o («о» маленькое).

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{6.1}$$

то говорят, что α есть «о» маленькое от β и пишут

$$\alpha = o(\beta) \quad \text{при } x \to x_0.$$

Здесь функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ могут быть и не бесконечно малыми. Если же они являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, то $\alpha = o(\beta) \iff \alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с $\beta(x)$.

ПРИМЕР 6.7. Так как
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0,\ldots,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=0,\ldots$$
то $x^2=o(x)$; $x^3=o(x)$; …; $x^n=o(x)$; … при $x\to 0$.

Из этих «равенств», конечно, не следует, что $x^2=x^3=\ldots=x^n=\ldots$ (они не транзитивны: их нельзя читать справа налево). Дело в том, что здесь под $o(x)$ понимается не одна конкретная функция, а целый класс функций.

В общем случае под $o(\beta)$ при $x\to x_0$ понимают множество всех функций $\alpha(x)$, для которых выполняется условие (6.1), и для каждой конкретной функции $\alpha(x)$ из этого множества вместо равенства $\alpha=o(\beta)$ можно писать условие $\alpha\in o(\beta)$.

Справедливы следующие утверждения:

1°. Если $\alpha_1\in o(\beta)$ и $\alpha_2\in o(\beta)$, то $(\alpha_1\pm\alpha_2)\in o(\beta)$.

2°. Если $\alpha\in o(\beta)$ и C — постоянная, то $(C\alpha)\in o(\beta)$.

3°. Если $\alpha_1\in o(\beta^m)$ и $\alpha_2\in o(\beta^n)$, то $(\alpha_1\alpha_2)\in o(\beta^{m+n})$.

В самом деле,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2}{\beta}=0,$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{C\alpha}{\beta}=C\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=0,$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta^{m+n}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha_1}{\beta^m}\frac{\alpha_2}{\beta^n}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta^m}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_2}{\beta^n}=0.$$

Обычно свойства $1^\circ-3^\circ$ выражают формулами:

1°. $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$.

2°. $o(C\beta)=o(\beta)$.

3°. $o(\beta^m)o(\beta^n)=o(\beta^{m+n})$.

Следует иметь ввиду, что в правых частях этих равенств под символами $o(\beta), o(\beta^{m+n})$ понимаются *классы функций*, а в левых частях — символы $o(\beta), o(C\beta), o(\beta^m), o(\beta^n)$ выражают лишь *отдельных представителей* соответствующих классов функций (любых, но конкретных функций из этих классов).

Наряду с символом $o(\beta)$ рассматривают символ $O(\beta)$ («О» большое от β), под которым понимают множество всех функций $\alpha(x)$, для которых выполняется условие
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq\infty.$$

Очевидно, $o(\beta)\subset O(\beta)$, т. е. $o(\beta)$ содержится в $O(\beta)$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции. Что оно означает на языке «$\varepsilon - \delta$»? (см. определение 6.2).

2. В чем заключается локальный характер бесконечной малости? (см. пример 6.1 и замечание 6.1).

3. Что можно сказать о произведении бесконечно малой функции на ограниченную? (см. пример 6.2).

4. Сформулируйте теорему о виде представления функции, имеющей предел (см. теорему 6.1).

5. Сформулируйте теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями (см. теоремы 6.2–6.4).

6. Как сравнивают бесконечно малые функции? (см. определения 6.2, 6.3 и замечания 6.2, 6.3).

7. Что означает символ o («о» маленькое)? (см. формулу 6.1).

Лекция 7

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

§ 7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены и отличны от нуля в $\dot{O}(x_0)$.

Определение 7.1. Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \tag{7.1}$$

то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$.

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Замечание 7.1. Из условия (7.1) вытекает:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \frac{1}{1} = 1$$

и, следовательно, $\beta(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to x_0$.

(Отношение эквивалентности коммутативно.)

ПРИМЕР 7.1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(см. (3.5)).

ПРИМЕР 7.2. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(см. (4.8)).

§ 7.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, при $x \to x_0$, то

$$\alpha(x)\beta(x) \sim \alpha_1(x)\beta_1(x) \quad \text{при } x \to x_0 .$$

2°. Если $\alpha_1(x) \sim C_1\beta(x)$ и $\alpha_2(x) \sim C_2\beta(x)$, при $x \to x_0$, где C_1, C_2 — постоянные и $C_1 \neq C_2$, то $(\alpha_1(x) - \alpha_2(x)) \sim (C_1\beta(x) - C_2\beta(x))$ при $x \to x_0$ (условие $C_1 \neq C_2$ существенно).

Доказательство 1°.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta}{\beta_1}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Доказательство 2°.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{C_1\beta - C_2\beta} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(C_1 - C_2)\beta} =$$

$$= \frac{1}{C_1 - C_2} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha_1}{\beta} - \frac{\alpha_2}{\beta}\right) = \frac{1}{C_1 - C_2} \lim_{x\to x_0} \left(C_1 \frac{\alpha_1}{C_1\beta} - C_2 \frac{\alpha_2}{C_2\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1 - C_2}(C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 1) = 1.$$

ПРИМЕР 7.3. $\sin x \cdot \ln(1+x) \sim x^2$ при $x \to 0$ (см. примеры 7.1 и 7.2).

ПРИМЕР 7.4. $\sin 2x - \ln(1+x) \sim 2x - x = x$.

Теорема 7.1 (о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов). *Предел при $x \to x_0$ отношения двух функций не изменится, если каждую функцию (или только одну из них) заменить на эквивалентную при $x \to x_0$.*

Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$.

1) Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = a,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta_1}\right) = 1 \cdot a \cdot 1 = a.$$

2) Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

(см. теорему 6.2).

По уже доказанному

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 0,$$

и по теореме 6.3

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \infty.$$

В обоих случаях

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$$

при замене α и β на эквивалентные функции α_1 и β_1, соответственно, не меняется.

3) Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} \quad \bar{\exists},$$

то и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \bar{\exists},$$

иначе, по доказанному существовал бы и

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta},$$

который получается из

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

путем замены α_1 и β_1 на эквивалентные им соответственно функции α и β.

На практике теорема 7.1 используется при вычислении пределов отношений бесконечно малых функций.

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \beta(x),$$

но хотя бы один из них не равен нулю, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ можно находить либо как отношение пределов

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x)}, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} \beta(x) \neq 0,$$

либо, используя теорему 6.4:

$$\text{если} \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0, \text{но} \lim_{x\to x_0} \alpha(x) \neq 0, \text{то} \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty.$$

Если же оба предела равны нулю (отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в этом случае называется неопределенностью вида $\frac{0}{0}$), то одним из основных методов для вычисления предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

(для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$) является метод замены бесконечно малых функций на эквивалентные, основанный на теореме 7.1.

ПРИМЕР 7.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2}=\frac{1}{2},$$

так как $\frac{x}{2}\to 0$ при $x\to 0$ и $\sin^2\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}=(\frac{x}{2})^2$.

Для применения указанного метода вычисления пределов можно использовать следующую таблицу бесконечно малых функций, эквивалентных при $x\to 0$:

1°) $\sin x\sim x$;
2°) $\operatorname{tg} x\sim x$;
3°) $\arcsin x\sim x$;
4°) $\operatorname{arctg} x\sim x$;
5°) $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;
6°) $e^x-1\sim x$;
7°) $a^x-1\sim x\ln a$;
8°) $\ln(1+x)\sim x$;
9°) $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$;
10°) $(1+x)^m-1\sim mx$.

Эквивалентности 1°) и 8°) обоснованны в примерах 7.1 и 7.2; эквивалентность 5° следует из примера 7.5.

Докажем 2°).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Для доказательства 3°) введем $y=\arcsin x$. Тогда $x=\sin y$. Так как $y\to 0$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=\frac{1}{1}=1.$$

Аналогично доказывается 4°).

Для доказательства 10°) введем $y = (1+x)^m - 1$, тогда $1+y = (1+x)^m$ и $\ln(1+y) = m\ln(1+x)$. Так как $y \to 0$ при $x \to$ $\to 0$, то при $x \to 0$ $\ln(1+y) \sim y$, $m\ln(1+x) \sim mx \Longrightarrow y \sim mx$, т. е. $(1+x)^m - 1 \sim mx$.

На теореме 7.1 основан еще один прием вычисления предела отношения функций, по сути, правда, совпадающий с изложенным выше методом, но несколько отличающийся по форме. Так как

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta + o(\beta)}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{o(\beta)}{\beta}\right) = 1 + 0 = 1,$$

то $(\beta + o(\beta)) \sim \beta$ при $x \to x_0$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta + o(\beta)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\gamma(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta + o(\beta)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta}.$$

Полученный результат означает, что при вычислении предела отношения функций в членах отношения можно отбрасывать бесконечно малые высшего порядка малости (если такие есть).

ПРИМЕР 7.6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + 5x^2}{x + 6x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

Здесь $5x^2$ и $6x^3$ отброшены потому, что $5x^2 = o(x)$ и $6x^3 = o(x)$ при $x \to 0$.

Отметим также, что на практике таблица эквивалентностей употребляется в более общем виде.

Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5) $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$;
6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$;
8) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
9) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$;
10) $(1+\alpha(x))^{\mathrm{m}} - 1 \sim m\alpha(x)$.

§ 7.3. УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Пусть
$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{при } x \to x_0\,. \tag{7.2}$$

Тогда
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right) = 0;$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha-\beta}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = 0\cdot 1 = 0,$$
т. е.
$$\alpha-\beta = o(\alpha) \quad \text{и} \quad \alpha-\beta = o(\beta) \quad \text{при} \quad x\to x_0. \tag{7.3}$$

Обратно, из $\alpha-\beta = o(\beta)$ при $x \to x_0$ следует, что
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta+o(\beta)}{\beta} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{o(\beta)}{\beta}\right) = 1+0 = 1 \Longrightarrow \text{формула (7.2)}.$$
и, аналогично, из $\alpha-\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$ следует, что
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Longrightarrow \text{формула (7.2)}.$$

Таким образом, условия (7.3) являются необходимыми, а каждое из них и достаточным для эквивалентности (7.2).

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to \to x_0$, то (7.3) означает, что разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция высшего порядка малости по сравнению с каждой из них. Из (7.3) следует также, что
$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta + o(\beta) \text{ при } x\to x_0\,. \tag{7.4}$$

На основании (7.4) таблицу бесконечно малых функций, эквивалентных при $x \to 0$ можно представить в виде так называемых *асимптотических* формул (или разложений):

1) $\sin x = x + o(x)$;
2) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$;
3) $\arcsin x = x + o(x)$;
4) $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$;
5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$;
6) $e^x = 1 + x + o(x)$;
7) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;
8) $\ln(1+x) = x + o(x)$;
9) $\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + o(x)$;
10) $(1+x)^m = 1 + mx + o(x)$.

Асимптотические формулы можно использовать при вычислении пределов.

ПРИМЕР 7.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\operatorname{tg} x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2+o(x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1}=\frac{3}{2}.$$

При вычислении предела слагаемые $o(x^2)$ в числителе и в знаменателе были отброшены как бесконечно малые функции при $x\to 0$ высшего порядка малости по сравнению с x^2.

Контрольные вопросы

1. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? (см. определение 7.1).
2. Как используются эквивалентные бесконечно малые функции при вычислении пределов? (см. теорему 7.1 и пример 7.5).
3. Что можно сказать о разности двух эквивалентных бесконечно малых функций? (см. формулу (7.3)).
4. Какие формулы называются асимптотическими? (см. формулу (7.4) и основанную на ней таблицу).
5. Как используются асимптотические формулы при вычислении пределов? (см. пример 7.7).

Лекция 8

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

§ 8.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Дифференциальное исчисление — один из основных разделов математического анализа. Центральным понятием является понятие производной функции и ее дифференциала. Основные теоремы (теорема Ролля, Лагранжа, Коши, Лопиталя и теоремы, в которых обосновывается важнейшая формула математического анализа — формула Тейлора) позволяют построить мощный аппарат для исследования поведения функций.

§ 8.2. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Дадим аргументу x_0 некоторое приращение Δx (положительное или отрицательное). Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 8.1. Конечный предел отношения приращения Δy к вызвавшему его приращению Δx, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0. Этот предел обозначается символом $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{8.1}$$

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ в произвольной точке x употребляются и другие обозначения:

$$y'(x), y'_x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Конкретные значения производной при $x = x_0$ обозначаются через

$$y'(x_0), f'(x_0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ |_{x=x_0}.$$

Отметим, что формулу (8.1) можно записать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{8.2}$$

§ 8.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости XOY и пусть на этой плоскости задана кривая, описываемая уравнением $y = f(x)$. Проведем касательную к кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Возьмем на кривой точку M_1 и проведем секущую M_0M_1. При изменении точки M_1 положение секущей будет меняться (рис. 8.1).

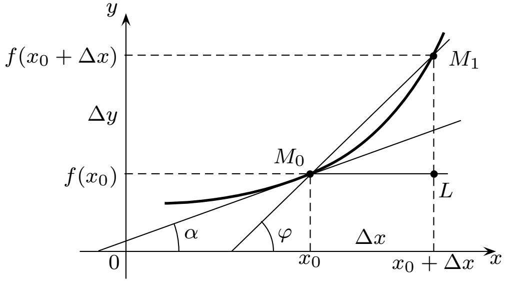


Рис. 8.1

Определение 8.2. Если при стремлении точки M_1 к фиксированной точке M_0 секущая M_0M_1 независимо от способа стремления точки M_1 к M_0, стремится к одному и тому же предельному положению, то прямая, являющаяся этим предельным положением, называется *касательной к кривой в точке* M_0.

Получим уравнение этой касательной.

Обозначим координаты точки M_1 через $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ и пусть φ — угол наклона секущей M_0M_1 с осью Ox. Тогда, как видно из рисунка, угловой коэффициент секущей M_0M_1 равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (8.3)$$

Если же устремить к точке M_0 точку M_1, т. е. устремить Δx к 0, то в случае существования производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ угол φ будет стремиться к некоторому пределу α, где

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, прямая, составляющая с положительным направлением оси Ox угол α и проходящая через точку M_0, и будет исходной касательной; ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ равен $f'(x_0)$.

Значение производной $f'(x_0)$ равняется угловому коэффициенту касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Знание углового коэффициента касательной и точки $M_0(x_0, f(x_0))$, через которую эта касательная проходит, позволяет написать уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (8.4)$$

Определение 8.3. Прямая называется перпендикулярной к кривой в точке M_0, если она перпендикулярна касательной к кривой в точке M_0. Эта прямая называется нормалью к этой кривой.

Из аналитической геометрии известно: для того, чтобы две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$k_1k_2 = -1. \qquad (8.5)$$

Следовательно, угловой коэффициент нормали $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$ при $f'(x_0) \neq 0$ ($kf'(x_0) = -1$).

Уравнение нормали к графику функции, проходящей через точку $M_0(x_0, f(x_0))$, запишется в следующем виде:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (8.6)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали $x = x_0$.

Замечание 8.1. Если в точке x_0, $f(x_0) < \infty$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty,$$

то касательная к кривой $y = f(x)$ существует в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, она вертикальна и ее уравнение

$$x = x_0;$$

уравнение соответствующей нормали

$$y = f(x_0).$$

§ 8.4. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть точка M движется по прямой. Расстояние S движущейся точки, отсчитываемое от некоторого начального положения A, зависит от времени t, т. е.

$$S = S(t).$$

Пусть в момент времени t_0 точка находится на расстоянии $S_0 = S(t_0)$ от точки A, а в момент $t_0 + \Delta t$ — на расстоянии $S_1 = S(t_0 + \Delta t)$ от точки A. Следовательно, за время Δt перемещение точки составило $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Это отношение определяет среднюю скорость движения точки за время Δt.

Предел отношения $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью движения материальной точки в момент времени t_0:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Таким образом, скорость $V(t)$ есть производная пути $S(t)$ по времени t:

$$V(t) = S'(t).$$

Примеры на вычисление производной:

1) $y = x^2, \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x.$$

2) $y=\sin x, \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$.

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{2}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

так как
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

§ 8.5. ОДНОСТОРОННИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 8.4. Если существует предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x\to +0$ (т. е. $\Delta x\to 0; \Delta x>0$), то этот предел называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0+0)$:
$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(f(x_0)+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 8.5. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x\to -0$ (т. е. $\Delta x\to 0; \Delta x<0$), то этот предел называется левой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0-0)$:
$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{(f(x_0)+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание 8.2. Для того, чтобы существовала производная в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовали левая и правая производные в этой точке и они были бы равны.

§ 8.6. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теорема 8.1. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть существует производная в точке x_0, т. е.
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда по теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Но тогда,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) =$$
$$= f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0.$$

А это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратите внимание, что *обратное утверждение неверно*, т. е. не всякая непрерывная в точке x_0 функция имеет производную в этой точке.

ПРИМЕР 8.1. Функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$. Покажем, что она в этой точке не имеет производной.

Найдем $y'(+0)$

$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x| + 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично,

$$y'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, у функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ существует левая производная $y'(-0) = -1$ и существует правая производная $y'(+0) = 1$, но они не равны $y'(-0) \neq y'(+0)$ и, следовательно, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

§ 8.7. ТЕОРЕМА О ПРОИЗВОДНЫХ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ДВУХ ФУНКЦИЙ

Теорема 8.2. *Пусть функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют производные в точке* x_0. *Тогда в этой точке имеют производные их сумма, произведение и, при дополнительном условии* $v(x_0) \neq 0$, *их частное, причем: а)* $(u+v)' = u' + v'$; *б)* $(uv)' = uv' + u'v$; *в)* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Докажем формулу *а)*.

Рассмотрим функцию $F(x) = u(x) + v(x)$. Ее приращение при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x$ равно:

$$\Delta F = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$
$$= u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно, отношение $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ примет вид

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0),$$

т. е.

$$(u+v)'\Big|_{x=x_0} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Докажем формулу *б)*.

Обозначим через $G(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$$\Delta G = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)v(x_0 + \Delta x) -$$
$$- u(x_0)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= [u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0 + \Delta x) + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]u(x_0).$$

Следовательно,

$$G'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} v(x_0 + \Delta x) + \right.$$
$$\left. + u(x_0) \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) +$$
$$+ u(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0).$$

Здесь мы воспользовались необходимым условием существования производной в точке x_0: если функция $v(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x) = v(x_0).$$

Таким образом мы доказали формулу

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Докажем формулу в).

Обозначим через $T(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ и будем предполагать, что $v(x_0) \neq 0$. Так как функция $v(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0 (опять-таки необходимое условие существования производной в точке x_0), и, так как $v(x_0) \neq 0$, то по теореме о сохранении знака непрерывной функции, существует целая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех x, принадлежащих $U(x_0)$, $v(x) \neq 0$. Тогда для всех $x = x_0 + \Delta x$, принадлежащих $U(x_0)$:

$$\begin{aligned}
\Delta T = T(x_0+\Delta x) - T(x_0) &= \frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \\
&= \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \\
&= \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0)+u(x_0)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)-v(x_0+\Delta x)u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \\
&= \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)-v(x_0+\Delta x)u(x_0)+u(x_0)v(x_0)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \\
&= \frac{v(x_0)(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0))}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \\
&= \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'\Big|_{x=x_0} = T'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \\
= \frac{v(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x_0)}.$$

Как уже отмечалось в пункте *б)*

$$\lim_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x)=v(x_0)\neq 0,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x_0);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x_0),$$

поэтому

$$T'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-v'(x_0)u(x_0)}{v^2(x_0)},$$

т. е. формула *в)*, при условии $v(x_0)\neq 0$, доказана.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Замечание 8.3. Если $y=Cu(x)$, где C — постоянная, то $y'=Cu'(x)$.

$y'=(Cu)'=C'u+Cu'=Cu'$, так как $C'=0$. Таким образом, *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

§ 8.8. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Производная функции $y=x^\alpha$, $x>0$, $\alpha\neq 0$:

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha;$$

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^\alpha\left((1+\frac{\Delta x}{x_0})^\alpha-1\right)}{\Delta x}=x_0^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x_0})^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x_0}x_0}=$$

$$=x_0^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x_0})^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x_0}}=\alpha x_0^{\alpha-1}.$$

Следовательно,

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

для всех x, при которых $\alpha x^{\alpha-1}$ определена.

2. Производная функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

3. Производная функции $y = \ln x$:

$$y' = (\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x} x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}.$$

4. Производная функции $y = \log_a x$:

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a};$$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

5. Производная функции $y = \cos x$:

$$y' = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

6. Производная функции $y = \operatorname{tg} x$:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7. Производная функции $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Замечание 8.4. В заключение лекции приведем две формулы, полезные для практического приложения:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n)' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \ldots + c_n f_n',$$

$$(f_1 f_2 f_3 \ldots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_{n-1} f_n'.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$ в точке x_0 (см. определение 8.1).

2. Сформулируйте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (см. определение 8.2).

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x$ в точке $M_0(1, 3)$.

4. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии существования производной в заданной точке (см. теорему 8.1).

5. Найдите левую $f'(x_0 - 0)$ и правую $f'(x_0 + 0)$ производные, если:

1) $f(x) = |x + 1|$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = |\ln x|$, $x_0 = 1$.

6. Докажите, что если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = 0$ и $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

7. Найдите $f'(a)$, если $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

8. Найдите $f'(0)$, если

$$f(x) = x(x + 1)\ldots(x + 1998).$$

9. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0. Что можно сказать о существовании производной у функции $F(x) = f(x) + g(x)$ в точке x_0?

Ответы

3. Так как $f'(x) = 2x + 2$, то $f'(1) = 4$. Следовательно, уравнение касательной в точке $M_0(1, 3)$ имеет вид

$$y - 3 = 4(x - 1), \quad \text{т. е. } y - 4x + 1 = 0.$$

5. Из определений 8.4 и 8.5 следует:

1) $f'(-1 - 0) = -1$, $f'(-1 + 0) = 1$;

2) $f'(1 - 0) = -1$, $f'(1 + 0) = 1$.

6. По определению производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$ (см. определение 8.1) имеем

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x},$$

так как $\Delta x = x - 0 = x$.

7. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a)$.

8. $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+1998)}{x} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1998 = 1998!$

9. Функция $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке x_0. Доказательство будем вести от противного. Пусть $F(x)$ имеет производную в точке x_0, но тогда функция $g(x) = F(x) - f(x)$ обязана иметь производную, как разность двух функций, имеющих производную в точке x_0 (см. теорему 8.2), это противоречит утверждению, что функция $g(x)$ не имеет производной. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Лекция 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 9.1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение 9.1. Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение представимо в виде

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{9.1}$$

где A — постоянное число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение 9.2. Выражение $A\Delta x$ называют *главной линейной частью приращения* Δf.

Заметим, что при $A \neq 0$ это название оправдано, так как функция $\alpha(\Delta x)\Delta x$ есть функция высшего порядка малости по отношению к $A\Delta x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{A\Delta x} = \frac{1}{A} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Определение 9.3. Главная линейная часть приращения Δf, т. е. выражение $A\Delta x$, называется *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается символом* $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}y = A\Delta x. \tag{9.2}$$

Замечание 9.1. Так как при $A \neq 0$, $A\cdot\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ — функция бесконечно малая высшего порядка малости по отношению к $A\Delta x$, то

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y. \tag{9.3}$$

§ 9.2. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Теорема 9.1. *Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы у нее существовала производная в этой точке. При этом*

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Но тогда
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A,$$

и, следовательно, $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) = A$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть точка имеет производную в точке x_0, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией имеем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x); \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0, \tag{9.4}$$

т. е. функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Отметим, что $A = f'(x_0)$.

Замечание 9.2. Используя теорему 9.1, получаем

$$\mathrm{d}f = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x; \quad \text{т. е. } \mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x.$$

Замечание 9.3. Дифференциалом независимой переменной $\mathrm{d}x$ условимся считать приращение Δx, т. е.

$$\mathrm{d}x \equiv \Delta x.$$

Отсюда вытекает формула $\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

§ 9.3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Теорема 9.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение Δf представимо в виде

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x; \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0;$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание 9.4. Обратное утверждение неверно, так как непрерывная функция не обязана иметь производную (смотри предыдущую лекцию) и, следовательно, не обязана быть дифференцируемой в точке x_0.

§ 9.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть мы имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$ и пусть $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 (рис. 9.1).

Проведем касательную к этой кривой в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Как известно, угловой коэффициент касательной M_0K равен $f'(x_0)$ и $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α — угол между касательной M_0K и осью Ox. При изменении абсциссы x_0 на $\Delta x = M_0L$,

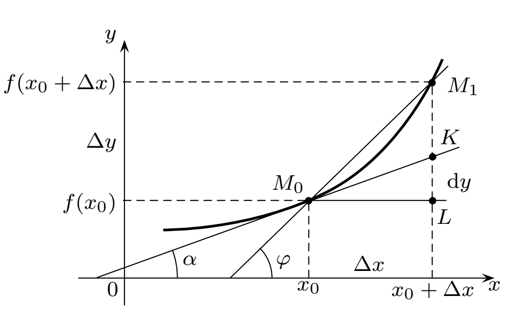


Рис. 9.1

ордината соответствующей точки кривой изменится на величину $\Delta y = LM_1$, а ордината точки касательной на величину $LK = ML\operatorname{tg}\alpha$;

$$LK = f'(x_0)\Delta x \equiv \mathrm{d}y.$$

Таким образом обосновано следующее

Определение 9.4. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 равен приращению, которое получает ордината точки касательной к кривой $y = f(x)$ с абсциссой в точке x_0 при переходе из точки касания в точку с абсциссой $x_0 + \Delta x$.

§ 9.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

Теорема 9.3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то и функции $C_1f(x) + C_2g(x)$, где C_1, C_2 — постоянные числа, $f(x)g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, а если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке*

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(C_1f(x) + C_2g(x)) = C_1\mathrm{d}f + C_2\mathrm{d}g,\\ \mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g,\\ \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}.\end{gathered} \tag{9.5}$$

Доказательство формул (9.5) основывается на представлении дифференциала

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

Действительно,

а) $\mathrm{d}(C_1f(x) + C_2g(x)) = (C_1f(x) + C_2g(x))'\big|_{x=x_0}\mathrm{d}x =$

$= C_1f'(x_0)\mathrm{d}x + C_2g'(x_0)\mathrm{d}x = C_1\mathrm{d}f + C_2\mathrm{d}g.$

б) $\mathrm{d}(fg) = (fg)'\big|_{x=x_0}\mathrm{d}x = (f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0))\mathrm{d}x =$

$= g(x_0)f'(x_0)\mathrm{d}x + f(x_0)g'(x_0)\mathrm{d}x = g(x_0)\mathrm{d}f + f(x_0)\mathrm{d}g.$

в) $\mathrm{d}\frac{f}{g} = \left(\frac{f}{g}\right)'\big|_{x=x_0}\mathrm{d}x = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}\mathrm{d}x =$

$$= \frac{g(x_0)f'(x_0)\mathrm{d}x - f(x_0)g'(x_0)\mathrm{d}x}{g^2(x_0)} = \frac{g(x_0)\mathrm{d}f - f(x_0)\mathrm{d}g}{g^2(x_0)}.$$

ПРИМЕР 9.1. Докажите (по определению), что функция $y = x^2$ дифференцируема в точке $x_0 = 3$.

$$f(3) = 3^2 = 9;$$
$$x = 3 + \Delta x;$$
$$\Delta f = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 9 + 6\Delta x + \Delta x^2 - 9 = 6\Delta x + \Delta x \Delta x.$$

В нашем случае $A = 6$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция $y = x^2$ дифференцируема в точке x_0.

ПРИМЕР 9.2. Что можно сказать о дифференцируемости произведения двух недифференцируемых функций?

Ответ. Оно бывает и дифференцируемым и недифференцируемым.

Например:

1) $y_1 = |x|$, $y_2 = |x|$ — две недифференцируемые функции в точке 0, а их произведение $y = |x| \cdot |x| = x^2$ — дифференцируемая в точке 0 функция.

2) $y_1 = |x| + 1$ — недифференцируемая функция в точке 0, $y_2 = |x|$ — также недифференцируемая функция в точке 0. Их произведение $y = (|x| + 1) \cdot |x| = x^2 + |x|$ является недифференцируемой в точке 0 функцией.

§ 9.6. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Применение дифференциала в приближенных вычислениях основано на формуле (9.3) замечания 9.1:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)\mathrm{d}x,$$

в котором положим $\mathrm{d}x \equiv \Delta x$.

ПРИМЕР 9.3. Вычислите $\sqrt[4]{15,8}$. В нашем случае

$$f(x) = \sqrt[4]{x}; x_0 = 16; \Delta x = -0,2; f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2;$$
$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad f'(x_0) = \frac{1}{32}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{15,8} \equiv f(15,8) \approx 2 + \frac{1}{32}(-0,2) = 2 - \frac{1}{160} = 1\frac{159}{160}.$$

§ 9.7. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 9.4. *Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $F(x) = f(u(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$F'(x_0) = (f(u(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)u'(x_0). \tag{9.6}$$

Доказательство. Дадим аргументу $x = x_0$ приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда оно вызовет приращение функции $u = u(x)$; $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, которое, в свою очередь вызовет приращение функции $y = f(u)$; $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. Так как функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то ее приращение Δf представимо в виде (см. формулу (9.4)):

$$\Delta f = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \tag{9.7}$$

где $\alpha(\Delta u)$ — бесконечно малая функция при $\Delta u \to 0$.

До сих пор, нам было безразлично определена ли $\alpha(\Delta u)$ при $\Delta u = 0$. Но нам бы хотелось, чтобы формула (9.7) была бы справедлива для всех значений Δu из достаточно малой окрестности нуля, поэтому доопределим функцию $\alpha(\Delta u)$ в точке $\Delta u = 0$; $\alpha(0) = 0$. Тогда формула (9.7) будет верна для всех Δu из некоторой окрестности нуля.

С другой стороны, функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0 и, следовательно,

$$\Delta u = u'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x;$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = 0$$

и $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а вместе с $\Delta u \to 0$ и $\alpha(\Delta u) \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Таким образом,

$$\Delta f = f'(u_0)[u'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x] + \alpha(\Delta u)[u'(x_0)\Delta x + \\ + \beta(\Delta x)\Delta x] = f'(u_0)u'(x_0)\Delta x + [\beta(\Delta x)f'(u_0) + \alpha(\Delta u)u'(x_0) + \\ + \beta(\Delta x)\alpha(\Delta u)]\Delta x = f'(u_0)u'(x_0)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x.$$

Здесь

$$\gamma(\Delta x) = (\beta(\Delta x)f'(u_0) + \alpha(\Delta u)u'(x_0) + \beta(\Delta x)\alpha(\Delta u));$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\gamma(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)f'(u_0) + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)u'(x_0) + \\ + \lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)\alpha(\Delta u)) = 0.$$

Следовательно, функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная $F'(x_0) = (f(u(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)u'(x_0)$.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 9.4. Найти производные у следующих функций:

а) $y = \cos^3 x; y' = 3\cos^2 x(\cos x)' = 3\cos^2 x(-\sin x)$;

б) $y = 5^{\mathrm{tg}(1/\sqrt{x})}$; $y' = 5^{\mathrm{tg}(1/\sqrt{x})}\ln 5\left(\mathrm{tg}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

$$=5^{\mathrm{tg}(1/\sqrt{x})}\ln 5\frac{1}{\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=5^{\mathrm{tg}(1/\sqrt{x})}\ln 5\frac{1}{\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right);$$

в) $y = \sin^2(x^3+3)$; $y' = 2\sin(x^3+3)(\sin(x^3+3))' =$

$$= 2\sin(x^3+3)\cos(x^3+3)(x^3+3)' =$$
$$= 2\sin(x^3+3)\cos(x^3+3)3x^2 = 3x^2\sin 2(x^3+3).$$

§ 9.8. ИНВАРИАНТНОСТЬ (НЕИЗМЕНЯЕМОСТЬ) ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Теорема 9.5. *Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $u = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$\mathrm{d}(f(u(x)) = f'(u_0)u'(x_0)\mathrm{d}x.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 9.4 и замечания 9.2, так как

$$\mathrm{d}f(u(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x)))\mathrm{d}x = f'(u_0)u'(x_0)\mathrm{d}x. \tag{9.8}$$

Замечание 9.5. Так как $u'(x_0)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, то формулу (9.8) можно записать в виде

$$\mathrm{d}f(u(x)) = f'(u_0)\mathrm{d}u. \tag{9.9}$$

Последняя формула показывает, что дифференциал функции выражается формулой одного и того же вида (одной и той же формы), как в случае функции от независимой переменной, так и в случае функции от функции.

Это свойство дифференциала называют *инвариантностью*.

Следует обратить внимание на то, что инвариантна (т. е. неизменна) именно лишь форма дифференциала, так как в содержании формулы дифференциала функции от функции есть существенное отличие от содержания формулы дифференциала функции от независимой переменной.

Действительно, если для функции $y = f(u(x))$, где u — независимая переменная, в формуле дифференциала $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$ имеем $\mathrm{d}u = \Delta u$, то в формуле дифференциала $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$, где u — функция некоторой переменной x, $\mathrm{d}u$ в общем случае не есть приращение, *а лишь главная линейная часть приращения*

$$\Delta u = \mathrm{d}u + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение дифференцируемости функции в точке x_0 (см. определение 9.1).

2. Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 ? (см. определение 9.3).

3. Будет ли функция $y = |x|$ дифференцируемой функцией для всех $x \in \in (-\infty, +\infty)$?

4. Можно ли утверждать, что дифференцируемая на интервале (a, b) функция непрерывна на этом интервале? Верно ли обратное утверждение? (см. теорему 9.2 и замечание 9.4).

5. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции (см. теорему 9.4).

6. Найдите производную следующей функции $y = 2^{\cos^3 x^2}$.

7. Пусть функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 5; \\ ax + b, & x > 5. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была бы дифференцируемой в точке $x = 5$.

8. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$, если

$$y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x).$$

9. Для функции $y = 5x^3 - 3x^2 + 10$ определите: 1) $\Delta f(1)$; 2) $\mathrm{d}f(1)$ и сравните их, если $\Delta x = 0,1$.

10. Вычислите приближенно $\sqrt{35}$.

Ответы

3. Нет, так как функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$ (см. пример 8.1).

6. $y' = 2^{\cos^3 x^2} \cdot \ln 2 \cdot 3\cos^2 x^2 \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x = -6x \cdot 2^{\cos^3 x^2} \cdot \ln 2 \times$ $\times \cos^2 x^2 \cdot \sin x^2$.

7. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке $x_0 = 5$, нужно, чтобы она была непрерывной в этой точке и имела в ней производную. Следовательно, в точке $x_0 = 5$ должны выполняться равенства:

$$\lim_{x \to 5-0} f(x) = \lim_{x \to 5+0} f(x) = f(5); \qquad \lim_{x \to 5-0} f'(x) = \lim_{x \to 5+0} f'(x),$$

т. е. $25 = 5a + b$; $10 = a$.

Следовательно, функция $f(x)$ будет дифференцируемой в точке $x_0 = 5$, если $a = 10$; $b = -25$.

8. $\mathrm{d}y = 2\cos x \sin x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$.

9. $\Delta f(1) = 0{,}925$; $\mathrm{d}f(1) = 0{,}9$.

10. $\sqrt{35} = \sqrt{36-1}$; $x_0 = 36$; $\Delta x = -1$, $\sqrt{35} \approx 6 - \frac{1}{12} = 5\frac{11}{12}$.

Лекция 10

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 10.1. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Определение 10.1. Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* на (a, b), если для любых x_1 и x_2 принадлежащих интервалу (a, b), $x_1 < x_2$, следует, $f(x_1) < f(x_2)$. Функция $f(x)$ называется *строго убывающей* на (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b), $x_1 < x_2$, следует $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 10.2. Функции, строго убывающие на (a, b), и функции, строго возрастающие на (a, b), называются *строго монотонными* на (a, b).

Теорема 10.1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b). Тогда в соответствующем интервале (a, b) значений этой функции существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, также строго монотонная и непрерывная на интервале (a, b).*

§ 10.2. ТЕОРЕМА О ПРОИЗВОДНОЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 10.2. *Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b), содержащем точку x_0. Пусть в точке x_0 она имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$. Тогда для обратной функции $x = g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ тоже существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство. Придадим значению $y = y_0$ произвольное приращение Δy. Тогда функция $x = g(y))$ обратная к функции $y = f(x)$ получит приращение Δx. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$, в виду строгой монотонности самой функции $y = f(x)$, и $\Delta x \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{10.1}$$

Устремим теперь Δy к нулю. В силу непрерывности функции $x = g(y)$ (см. теорему 10.1) и $\Delta x \to 0$. Но тогда, знаменатель правой части стремится к пределу $f'(x_0) \neq 0$. Следовательно, существует предел и левой части равенства (10.1), а он представляет собой производную функции $x = g(y)$ в точке y_0. Окончательно, имеем

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

§ 10.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Известно, что производная $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона к оси Ox касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Но обратная функция $x = g(y)$ имеет тот же график, лишь независимая переменая для нее откладывается по оси Oy. Поэтому $g'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол наклона той же касательной к оси Оу. Таким образом, формулу запишем в виде:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \beta).$$

Найдем производные обратных тригонометрических функций

$$1) \quad y = \arcsin x;\ -1 < x < 1;\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $x = \sin y$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, при этом функция $x = \sin y$ имеет для точек интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ положительную производную $x'_y = \cos y$ и, следовательно, строго монотонна в силу теоремы 10.2.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$2) \quad y = \arccos x;\ -1 < x < 1;\ 0 < y < \pi.$$

$$x = \cos y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\sin y \neq 0.$$

Таким образом,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

3) функция $y = \operatorname{arctg} x$; $x \in (-\infty, +\infty)$ служит обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$. Таким образом,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

4) функция $y = \operatorname{arcctg} x; x \in (-\infty, +\infty)$ служит обратной к функции $x = \operatorname{ctg} y$. Таким образом,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 10.4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Гиперболическими функциями называются следующие функции:

1) гиперболический синус (см. рис. 10.1*а*):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

2) гиперболический косинус (см. рис. 10.1*б*):

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

3) гиперболический тангенс (см. рис. 10.1*в*):

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

4) гиперболический котангенс (см. рис. 10.1*г*):

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Функции $\operatorname{sh} x$; $\operatorname{th} x$; $\operatorname{ch} x$ определены для всех значений x. Функция $\operatorname{cth} x$ определена всюду, за исключением точки $x = 0$.

Гиперболические функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Гиперболические функции обладают многими свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций, а именно:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1.$$

Докажем, например последнюю формулу:

$$\operatorname{ch}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x};$$

$$\operatorname{sh}^2x=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x};$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}=1.$$

§ 10.5. ГРАФИКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

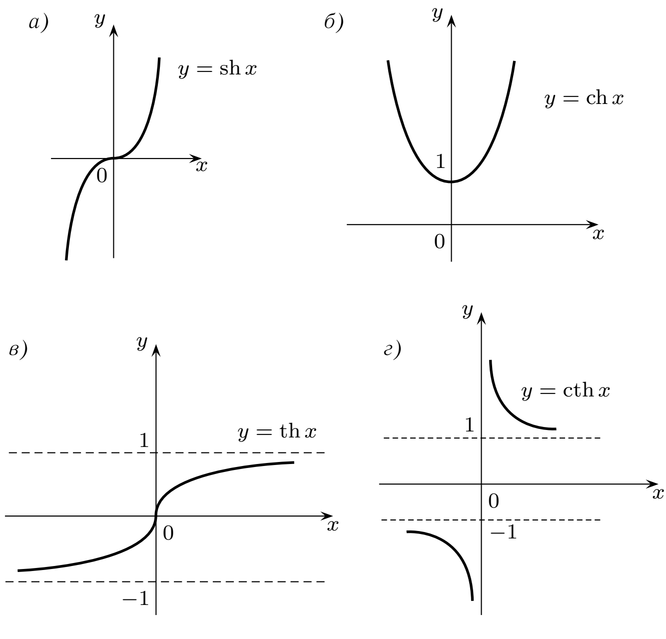


Рис. 10.1

§ 10.6. ПРОИЗВОДНЫЕ

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 10.7. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

	$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
1	const	0	10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	e^x	e^x	12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	a^x	$a^x \ln a$	13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
6	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
7	$\sin x$	$\cos x$	16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
8	$\cos x$	$-\sin x$	17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Контрольные вопросы

1. Докажите формулу

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

2. Докажите формулу

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Ответы

1. Так как, по определению,

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[2e^{2x} + 2e^{-2x}\right] = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x. \end{aligned}$$

2. Используйте определение функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Исследуем вопрос о производной показательно-степенной функции

$$y = u(x)^{v(x)},$$

где $u(x) > 0$ и $v(x)$ — функции от x, имеющие в заданной точке x производные $u'(x)$; $v'(x)$.

Прологарифмируем равенство $y = u^v$

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Следовательно,

$$y = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Таким образом,

$$y' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \right) = u^v \left(\frac{1}{u} u'v + v \ln u \right),$$

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v (\ln u) v'.$$

§ 11.1. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть задана функция $f(x)$ на интервале (a, b) и пусть она дифференцируема в каждой точке этого интервала. Следовательно, у нее в каждой точке $x \in (a, b)$ существует производная $f'(x)$, которая, в свою очередь, является функцией от x.

Определение 11.1. Если функция $f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производная в этой точке x_0 называется второй производной от функции $f(x)$ и обозначается символом $f''(x_0)$ (или $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$);

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left.\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=x_0}.$$

Определение 11.2. n-й производной от функции $f(x)$ (при $n \geqslant 2$) называется первая производная от $(n-1)$-й производной функции $f(x)$ при условии, что она существует

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Порядок производной берется в скобки для того, чтобы ее нельзя принять за показатель степени.

Общие формулы для производных любого порядка

$$(cu)^{(n)} = cu^{(n)};$$
$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

§ 11.2. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА

$$(u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

или

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} c_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где

$$u^{(0)} = u(x);$$
$$v^{(0)} = v(x);$$
$$c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ПРИМЕР 11.1. Докажите формулу

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right). \qquad (11.1)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

Действительно, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, т. е. формула верна при $n = 1$. Пусть она верна при $n - 1$, т. е. предположим, что равенство

$$(\sin x)^{(n-1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

справедливо. Но тогда,

$$(\sin x)^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^{(n-1)} = \\ = (\sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) = \\ = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Тем самым справедливость формулы (11.1) установлена. Аналогично доказываются и формулы:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right),$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad n \geqslant 1.$$

ПРИМЕР 11.2. Вычислите $(x^3 \cdot e^x)^{(100)}$.

Воспользуемся формулой Лейбница, положив

$$u(x) = e^x; \quad v(x) = x^3; \quad (e^x)^{(k)} = e^x; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$(x^3 \cdot e^x)^{(100)} = x^3 \cdot e^x + 100 \cdot 3 \cdot x^2 e^x + \frac{100 \cdot 99}{2!} 6xe^x + \\ + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} 6e^x = e^x(x^3 + 300x^2 + 29700x + 970200).$$

§ 11.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Пусть имеем функцию $f(x)$, где x — независимая переменная, принадлежащая интервалу (a, b). Дифференциал этой функции $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ есть некоторая функция от x. Но от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$. Второй же сомножитель $\mathrm{d}x$ является приращением независимой переменной x и от значения этой переменной не зависит.

Определение 11.3. Дифференциал от дифференциала функции называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка этой функции и обозначается через $\mathrm{d}^2 y (\mathrm{d}^2 y \equiv \mathrm{d}(\mathrm{d}y))$.

Найдем выражение второго дифференциала:

$$d^2y = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Принято записывать степень дифференциала опуская скобки, т. е. вместо $(dx)^2$ пишут dx^2.

Определение 11.4. Дифференциалом n-го порядка (при $n \geqslant 2$) называют первый дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала: $d^n y = d(d^{(n-1)}y)$.

Легко получить формулу вычисления n-го дифференциала

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{11.2}$$

(Отметим, что из формулы (11.2) становится понятным обозначение $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.)

§ 11.4. НАРУШЕНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ФОРМЫ ЗАПИСИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

Рассмотрим случай, когда x является, в свою очередь, функцией от другой переменной

$$y = f(x); \quad x = \varphi(u).$$

В силу инвариантности первого дифференциала имеем

$$dy = f'(x)dx. \tag{11.3}$$

Причем, в правой части формулы (11.3) от переменной u зависит не только функция $f(x)$, но и дифференциал dx:

$$dx = \varphi'(u)du.$$

Следовательно,

$$d^2y = d(f'(x)dx) = \\ = (df'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Вообще говоря, $d^2x \not\equiv 0$, так как $d^2x = \varphi''(u)du^2$.

Следовательно, *для дифференциалов второго и более высокого порядка инвариантность формы записи в общем случае не имеет место.*

§ 11.5. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ, И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предположим, что эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, которая тоже имеет производную.

Тогда $y = \psi(\Phi(x))$ есть сложная функция от x и можно поставить вопрос о ее производной.

Теорема 11.1. *Пусть 1) функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t_0; 2) $\varphi'(t_0) \neq 0$; 3) для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная функция $t = \Phi(x)$ в окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда уравнения*

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

задают параметрически функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$, дифференцируемую в точке x_0, причем

$$f'_x(x_0) = \frac{\Psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Доказательство. Из условия 3) теоремы 11.1 вытекает, что функция $y = f(x)$ может быть определена как сложная функция:

$$y = \psi(t); \quad t = \Phi(x)\colon y = f(x) \equiv \psi(\Phi(x)).$$

Следовательно, вычисляя производную $f'(x_0)$ как производную сложной функции, имеем

$$f'(x_0) = \psi'(t_0)\Phi'(t_0).$$

Но $\Phi'(x_0)$ как производная обратной функции, вычисляется по формуле $\Phi'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Замечание 11.1. Пусть условия теоремы 11.1 выполняются для любых $t \in (\alpha, \beta)$, тогда

$$f'_x(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{при любом} \quad t \in (\alpha, \beta) \quad \text{и} \quad x = \varphi(t).$$

ПРИМЕР 11.3. Как найти вторую производную от функции, заданной параметрически?

Формула $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ позволяет рассмотреть функцию $f'(x)$ как сложную функцию с промежуточной переменной t:

$$f'(x) = \frac{\psi'(\Phi(x))}{\varphi'(\Phi(x))}.$$

Поэтому,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(\Phi(x))}{\varphi'(\Phi(x))}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Контрольные вопросы

1. Вычислите производные функций: 1) $y = x^x$; 2) $y = e^{e^x}$.
2. Используя формулу Лейбница, найдите $y^{(20)}(x)$, если $y(x) = x^2 \sin x$.
3. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x до второго порядка включительно. Вычислите $\mathrm{d}^2 y$, если $y(x) = e^u$.
4. Выразите дифференциал $\mathrm{d}^2 y$ от сложной функции $y = y(u(x))$ через производные функции $y = y(u)$ и дифференциалы функции $u = u(x)$.
5. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые и взаимно обратные функции. Выразите $x''(y)$ через y' и y''.
6. Покажите, что функция $y = \operatorname{ch} x$ удовлетворяет уравнению $y'' - y = 0$.
7. Сформулируйте и докажите теорему о существовании производной функции, заданной в параметрическом виде (см. теорему 11.1).

Ответы

1. 1) $y = x^x = e^{x\ln x}, y' = e^{x\ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$;
2) $y = x^{e^x} = e^{e^x \ln x}, y' = e^{e^x \ln x}(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}) = e^x x^{e^x}(\ln x + \frac{1}{x})$.

2. Используем формулу Лейбница, положив в ней $u(x) = \sin x$, $v(x) = x^2$. Тогда

$$(x^2 \sin x)^{(20)} = (\sin x)^{(20)} x^2 + 20(\sin x)^{(19)} 2x + \frac{20\cdot 19}{2}(\sin x)^{(18)} \cdot 2 =$$

$$= x^2 \sin(x + 10\pi) + 40x \sin(x + \frac{19}{2}\pi) + 380 \sin(x + 9\pi) =$$

$$= x^2 \sin x - 40x \cos x - 380.$$

3. $\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(e^u \mathrm{d}u) = e^u \mathrm{d}u\mathrm{d}u + e^u \mathrm{d}(\mathrm{d}u) = e^u \mathrm{d}u^2 + e^u \mathrm{d}^2 u$.
4. $\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(y'\mathrm{d}u) = \mathrm{d}(y')\mathrm{d}u + y'\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = y''\mathrm{d}u^2 + y'\mathrm{d}^2 u$.
5. $x''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x'(y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'(x)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = -\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}.$$

Лекция 12

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 12.1. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ

Теорема 12.1 (Теорема Ролля). *Пусть 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) существует производная $f'(x)$, по крайней мере, в интервале (a,b); 3) на концах отрезка функция принимает равные значения: $f(a)=f(b)$.*

Тогда в интервале (a,b) существует такая точка $c; (a<c<b)$, что $f'(c)=0$.

По условию теоремы $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда, в силу второй теоремы Вейерштрасса, она на этом отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. существуют такие точки $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$, что

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]} f(x);$$

$$f(x_2)=m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

и для всех $x\in[a,b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

1. Если $m=M$, то $f(x)\equiv \mathrm{const}=m$ и, следовательно, $f'(x)\equiv 0$ во всем интервале (a,b). В этом случае точка c — любая точка интервала.

2. Пусть $m\neq M$. Тогда одна из точек x_1, x_2 лежит внутри интервала (a,b) (может быть обе точки лежат в интервале (a,b), но, по крайней мере, одна из них всегда внутри интервала (a,b)). Пусть, например $x_1\in(a,b)$. Так как $f(x)\leqslant f(x_1)$ для всех $x\in$ $\in[a,b]$, то при любом (достаточно малом) Δx соответствующее приращение $\Delta f = f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\leqslant 0$.

Таким образом, с одной стороны

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leqslant 0, \quad (\Delta f \leqslant 0,\ \Delta x > 0);$$

с другой стороны,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geqslant 0, \quad (\Delta f \leqslant 0,\ \Delta x < 0).$$

Мы получили, что в точке x_1 должны выполняться сразу два неравенства: $f'(x_1) \geqslant 0$ и $f'(x_1) \leqslant 0$. Это возможно лишь в случае, когда $f'(x_1) = 0$; и в качестве точки c возьмем точку x_1. Теорема доказана.

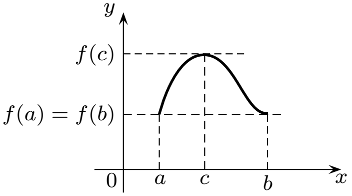


Рис. 12.1

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если ординаты крайних точек кривой равны, то найдется, по крайней мере, одна точка кривой, в которой касательная к этой кривой параллельна оси Ox (рис. 12.1).

Замечание 12.1. Условия теоремы Ролля существенны. Например, функция $y = |x|$; $x \in [-1, 1]$, удовлетворяет условиям 1) и 3) теоремы Ролля. У нее существует производная всюду, за исключением одной точки ($x = 0$). Но нет такой точки c, в которой $f'(c) = 0$, так как

$$f'(x) = -1 \quad \forall x \in [-1, 0) \text{ и } f'(x) = 1, \quad \forall x \in (0, 1].$$

Теорема 12.2 (Лагранжа). *Пусть функция 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) существует производная $f'(x)$ хотя бы в интервале (a, b).*

Тогда в интервале (a, b) существует, по крайней мере, одна такая точка c, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство. Пусть

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Следовательно, $f(b) - f(a) = Q(b-a)$.

Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - Q(x-a)$. Отметим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно,

1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ как разность непрерывных на $[a,b]$ функций;

2) существует производная $\varphi'(x)$ по крайней мере в интервале (a,b)

$$\varphi'(x) = f'(x) - Q;$$

3) на концах отрезка $[a,b]$ функция $\varphi(x)$ принимает равные значения:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0,$$
$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - Q(b-a) = 0. \qquad (12.1)$$

В силу теоремы Ролля существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\varphi'(c) = 0, \quad \varphi'(c) = f'(c) - Q = 0, \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема доказана.

Геометрически теорема Лагранжа означает, что на кривой AB всегда найдется такая точка $M(c, f(c))$, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 12.2).

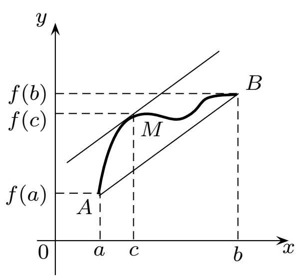


Рис. 12.2

Замечание 12.2. Доказанная формула $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$; $(a<c<b)$ носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений.

Положив $c = a + \Theta(b-a)$, $0 < \Theta < 1$, получим

$$f(b) - f(a) = f'(a + \Theta(b-a))(b-a).$$

Замечание 12.3. Заметим, что теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа: если к условиям теоремы Лагранжа добавить условие $f(a) = f(b)$, то получаем, что $f'(c) = 0$.

ПРИМЕР 12.1. Докажите, что между двумя корнями дифференцируемой функции лежит, по крайней мере, один корень производной.

Доказательство. Пусть задана дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ и пусть $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, но тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_1, x_2]$ всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$, так как любая дифференцируемая на отрезке $[x_1, x_2]$ непрерывна на этом отрезке. У нее по условию существует производная в интервале (x_1, x_2), и на концах отрезка $[x_1, x_2]$ она принимает равные значения: $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует, по крайней мере, одна точка $c \in (x_1, x_2)$, в которой $\varphi'(c) = 0$.

ПРИМЕР 12.2. Докажите, что для любых x_1 и x_2

$$|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 и пусть $x_1 < x_2$. Тогда функция $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет на отрезке $[x_1, x_2]$ условиям теоремы Лагранжа: $y = \operatorname{arctg} x$ непрерывна всюду, значит она непрерывна и на отрезке $[x_1, x_2]$. У нее существует всюду производная

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Тогда по теореме Лагранжа, найдется такая точка $c \in (x_1, x_2)$, что

$$\frac{\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1 + c^2}.$$

Следовательно,

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \frac{1}{1 + c^2}|x_2 - x_1| \leqslant |x_2 - x_1|.$$

Теорема 12.3 (Коши). *Пусть 1) функция $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$; 2) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b); 3) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Тогда на интервале (a, b) существует, по крайней мере, одна точка с такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{12.2}$$

(Формула (12.2) носит название формулы Коши.)

Доказательство. Установим вначале, что знаменатель левой части равенства (12.2) отличен от нуля. Если бы $g(b) = g(a)$, то функция $g(x)$ удовлетворяла бы всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, b]$ и по теореме Ролля в интервале (a, b) существовала бы точка c_1, в которой $g'(c_1) = 0$, что противоречит условию 3) теоремы Коши.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)). \tag{12.3}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. В самом деле, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как непрерывны функции $f(x)$ и $g(x)$ на этом отрезке. Производная $F'(x)$ существует в интервале (a, b), причем

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

и на концах отрезка $[a, b]$ функция $F(x)$ принимает равные значения:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0.$$

Применяя теорему Ролля, получаем: существует такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$. Отсюда следует

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Разделив в последнем равенстве на $g'(c)$, что можно сделать, так как $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 12.4. Отметим, что теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши, так как она вытекает из нее, если положить $g(x) \equiv x$.

§ 12.2. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Теорема 12.4 (Правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0, кроме быть может самой точки x_0.*

Если
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
и отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to x_0$ имеет предел, то
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.4}$$

Доказательство. В условиях теоремы ничего не сказано о значениях и свойствах функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = x_0$. Это объясняется тем, что при решении вопроса о пределе функции в данной точке безразлично, определены ли они в самой точке или нет, а если и определены, то безразлично также, чему равны значения этих функций в этой точке. Поэтому независимо от того определены ли $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = x_0$ или нет, положим $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Этим условия теоремы не будут нарушены. Но зато теперь
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(x_0); \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0),$$
т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$. Поэтому на отрезке $[x_0, x]$, если $x > x_0$, или на отрезке $[x, x_0]$, если $x < x_0$, где x — любая точка некоторой окрестности точки x_0, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши.

Рассмотрим случай отрезка $[x_0, x]$, $x > x_0$. По теореме Коши существует, по крайней мере, одна такая точка c, что верно равенство
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{12.5}$$

Если таких точек будет больше одной, то в качестве точки c в равенстве (12.5) возьмем какую-нибудь из них. Тогда точка c будет функцией от x, имеющей вполне определенное значение для каждого x, причем $c \to x_0 + 0$, когда $x \to x_0 + 0$.

По условию теоремы при $x \to x_0$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ имеет предел. Этот предел не зависит от способа стремления x к точке x_0. Поэтому при $x \to x_0 + 0$, и $c \to x_0 + 0$, отношение $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ имеет предел, совпадающий с пределом отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$:

$$\lim_{c\to x_0+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Но из последнего равенства и равенства (12.5) немедленно следует, что

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{12.6}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{12.7}$$

Равенства (12.6) и (12.7) позволяют утверждать справедливость равенства (12.4).

Теорема доказана.

ПРИМЕР 12.3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x(1-\cos x)} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Замечание 12.5. Следует отметить, что если отношение производных не имеет предела, то это еще не может служить основанием для утверждения, что отношение функций не имеет предела. Например, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; $g(x) = x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

но
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x^2}$$

не имеет предела при $x \to 0$.

Замечание 12.6. При вычислении

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

иногда приходится применять правило Лопиталя несколько раз. Так, если условиям теоремы удовлетворяют не только функции $f(x)$ и $g(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то для вычисления

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

можно опять воспользоваться правилом Лопиталя. Это сведет вычисление

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

к вычислению

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}, \quad \text{т. д.}$$

ПРИМЕР 12.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Правило Лопиталя легко распространяется на случай, когда x стремится к бесконечности.

Теорема 12.5. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в полуинтервале $[b,+\infty)$,*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)\neq 0$ в интервале $(b,+\infty)$. Если существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

и они равны

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Положим $x=\frac{1}{y}$. Тогда, если $x\to+\infty$, то $y\to+0$, и

$$\lim_{y\to+0}f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to+0}g\left(\frac{1}{y}\right)=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{y\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Аналогично устанавливается правило Лопиталя при $x\to-\infty$.

§ 12.3. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ (ДРУГИЕ ВИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ)

Правило Лопиталя может быть использованным при вычислении следующих пределов:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x);\quad \text{если } \lim_{x\to x_0}f(x)=0;\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

Для этой цели неопределенность $0\cdot\infty$ приводится к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, к которой возможно применить правило Лопиталя:

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad \text{или}\quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

ПРИМЕР 12.5.

1. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to+0}x=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x));\quad \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty;\quad \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty.$

Неопределенность $(\infty-\infty)$ легко сводится к неопределенности типа $\frac{0}{0}$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$, если имеется один из трех случаев:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0;\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0;$

б) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1;\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty;$

в) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0.$

В этом случае предлагается выражение

$$y = f(x)^{g(x)}$$

представить в виде

$$y = e^{g(x)\ln f(x)}$$

и воспользоваться правилом Лопиталя при вычислении предела

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x).$$

ПРИМЕР 12.6.

$$\lim_{x\to+0} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x} = e^0 = 1,$$

так как

$$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x = \lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

ПРИМЕР 12.7.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}^2 x\ln\cos x} = e^{-\frac{1}{2}},$$

так как

$$\lim_{x\to0}\operatorname{ctg}^2 x\ln\cos x = \lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\lim_{x\to0}\cos^2 x = \lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \\ = \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x 2x} = -\frac{1}{2}$$

(напоминаем, что

$$\lim_{x\to0}\cos x = 1 \quad \text{и} \quad \sin x \sim x$$

при $x\to0$).

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.
2. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ на интервале $(-1, 1)$. Почему несправедлива теорема Ролля для функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$? (см. замечание 12.1).
3. Пусть функция $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Покажите, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет три действительных корня.
4. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.
5. Проверьте выполнение условий теоремы Лагранжа для функции
$$f(x) = 1 + x + x^2$$
на отрезке $[0, 2]$. Найдите соответствующее значение C.

6. Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите неравенство $|\sin x - \sin y| \leqslant \leqslant |x - y|$ (см. упражнение 12.2).

7. Можно ли применять теорему Лагранжа к функции $y = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$?

8. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

9. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $f(x) \equiv \mathrm{const}, \forall x \in [a, b]$.

10. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя.

11. Можно ли применять правило Лопиталя к нахождению предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)}?$$

Вычислите сам предел (см. замечание 12.4).

Ответы

2. К функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ нельзя применять теорему Ролля, так как, хотя функция $f(x)$ и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, но производная не существует в точке $x = 0$, т. е. не выполняется условие 2) теоремы.

3. Применим к функции $f(x)$ теорему Ролля на отрезке $[0, 1]$. Так как функция $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ непрерывна и имеет непрерывную производную для всех значений x, то для применения к ней теоремы Ролля необходимо проверить условие 3) теоремы: $f(0) = 0, f(1) = 0$. Но тогда по теореме Ролля, существует такая точка $C_1 \in (0, 1)$, что $f'(C_1) = 0$.

Аналогично, применяя теорему Ролля к нашей функции на отрезке $[1, 2]$, получаем, что существует такая точка $C_2 \in (1, 2)$, что $f'(C_2) = 0$. Применяя к функции $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ теорему Ролля на отрезке $[2, 3]$ (заметим, что $f(2) = f(3) = 0$), получаем существование такой точки $C_3 \in (2, 3)$, в которой $f'(C_3) = 0$.

Таким образом, мы доказали существование трех точек C_1, C_2, C_3, в которых $f'(x) = 0$.

5. Функция $f(x) = 1 + x + x^3$ непрерывна на всей числовой оси и имеет на ней непрерывную производную $f'(x) = 3x^2 + 1$. Следовательно, она удовлетворяет на отрезке $[0, 2]$ условиям теоремы Лагранжа и

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 1}{2} = f'(c), \quad C \in (0, 2),$$

$$f'(C) = 5, \quad 3C^2 + 1 = 5, \quad 3C^2 = 4, \quad C^2 = \frac{4}{3}, \quad C = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7. Нельзя, так как функция $y = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ хотя и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, но не имеет производную в точке $x = 0$.

9. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b]$ и применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[a, x_0]$:

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(C) = 0.$$

Следовательно, $f(x_0) = f(a)$, $\forall x_0 \in (a, b]$ и тем самым, $f(x) \equiv \mathrm{const}$.

Лекция 13

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 13.1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

Теорема 13.1 (Тейлора). *Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка, а в интервале (a,b) существует n-я производная функции $f(x)$. Тогда существует такая точка ξ, принадлежащая (a,b), что*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n. \quad (13.1)$$

Доказательство. Обозначим через R_n разность между значениями функции $f(b)$ и выражения

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}.$$

$$R_n = f(b) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right].$$

Но тогда

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n. \quad (13.2)$$

Будем искать остаток R_n в виде $M(b-a)^n$ (очевидно, что такое число M существует: $M = \frac{R_n}{(b-a)^n}$).

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + M(b-a)^n. \quad (13.3)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + M(b-x)^n$$

(заметим, что функция $\varphi(x)$ легко получается, если в правой части равенства (13.3) вместо a подставить x).

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ всем условиям теоремы Ролля. Действительно, в силу условий, налагаемых на функцию $f(x)$ теоремой Тейлора, имеем:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует производная $\varphi'(x)$, по крайней мере, в интервале (a,b), причем

$$\varphi'(x) = f'(x) + f''(x)(b-x) - f'(x) + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \\ - \frac{2f''(x)(b-x)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \\ - \frac{n-1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2} - Mn(b-x)^{n-1} = \\ = \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - Mn(b-x)^{n-1}. \quad (13.4)$$

3) на концах отрезка $[a,b]$ функция $\varphi(x)$ принимает одинаковые значения

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + M(b-a)^n = f(b)$$

(см. формулу (13.3))

$$\varphi(b) = f(b).$$

Следовательно, по теореме Ролля в интервале (a, b) существует, по крайней мере, одна такая точка ξ, что $\varphi'(\xi) = 0$. Таким образом,

$$\varphi'(\xi) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(b-\xi)^{n-1} - Mn((b-\xi)^{n-1} = 0. \tag{13.5}$$

Сокращая в формуле (13.5) на выражение $n(b-\xi)^{n-2} \neq 0$; $(\xi \in (a, b))$, получаем

$$M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n(n-1)!} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

и, следовательно,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Теорема доказана.

Замечание 13.1. Выражение $R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$ называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа, а сама формула (13.2) носит название *формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Замечание 13.2. Положим в формуле (13.2) n равным 1.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(b-a).$$

Перенеся $f(a)$ в левую часть и разделив полученное выражение на $(b-a)$, получаем формулу Лагранжа

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Это означает, что теорема Тейлора является обобщением теоремы Лагранжа.

Замечание 13.3. В равенстве (13.2) вместо a и b можно взять произвольные точки x_0 и x из отрезка $[a, b]$. Тогда формулу Тейлора для функции $f(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (13.6)$$

где точка ξ лежит между точками x и x_0; $\xi = x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Положив в формуле (13.6) $x_0=0$, имеем

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n. \quad (13.7)$$

Формула (13.7) носит название *формулы Маклорена* с остаточным членом в форме Лагранжа.

§ 13.2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ПЕАНО

Очень часто при использовании формулы Тейлора нет необходимости в знании конкретного значения остаточного члена. Важно знать лишь поведение остаточного члена при стремлении x к x_0, а именно, знать его порядок малости.

Теорема 13.2 (Пеано). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Тогда для любой точки x из этой окрестности справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \quad (13.8)$$

Доказательство. По теореме Тейлора для всех $x\in U(x_0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (13.6).

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (13.9)$$

По условию теоремы Пеано $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0 и, следовательно,

$$f^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(x_0)+[f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)]=f^{(n)}(x_0)+\alpha(x),$$

где $\alpha(x) = f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)$ стремится к нулю при $x \to x_0$, так как точка ξ лежит между точками x и x_0 и при $x \to x_0$ точка $\xi \to x_0$ и, в силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ в точке x_0, $f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(x_0)$. Таким образом,

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \alpha(x); \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0,$$

и формула (13.9) записывается в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ и

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (13.10)$$

Теорема доказана.

Замечание 13.4. Формула (13.10) носит название *формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, а выражение $R_n = o((x - x_0)^n)$ в формуле (13.10) носит название остаточного члена в форме Пеано.

Замечание 13.5. Если в формуле (13.10) положить $x_0 = 0$, то получим формулу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \qquad (13.11)$$

которая носит название *формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано*.

§ 13.3. ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим формулу Маклорена для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1 + x), (1 + x)^\alpha.$$

1. Пусть $f(x) = e^x$. Так как

$$(e^x)^{(k)} = e^x, k = 1,\ 2, \ldots,$$

то $f(0)=1$; $f^{(k)}(0)=1$ и, следовательно, имеем

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

где r_n — остаточный член формулы Тейлора:

в форме Лагранжа

$$r_n=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

в форме Пеано

$$r_n=o(x^n).$$

2. Пусть $f(x)=\sin x$, тогда $\sin^{(k)}x=\sin(x+\pi k/2)$; $k=1$, $2,\ldots$, следовательно,

$$f(0)=0;\quad f^{(2m)}(0)=\sin\pi m=0;$$
$$f^{(2m-1)}(0)=\sin(\pi m-\pi/2)=$$
$$=\sin(\pi(m-1)+\pi/2)=\cos(\pi(m-1))=(-1)^{m-1}.$$

Поэтому,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+r_{2m}(x),$$

где r_{2m} — остаточный член формулы Тейлора:

в форме Лагранжа

$$r_{2m}=\frac{\sin(\theta x+\pi m+\pi/2)}{(2m+1)!}x^{2m+1},$$

в форме Пеано

$$r_{2m}=o(x^{2m});$$

(отметим, что при разложении $\sin x$ по формуле Маклорена берется $n=2m$ и что $f^{(2m)}(0)=0$).

3. Аналогично, пусть $f(x)=\cos x$. Тогда, $\cos^{(k)}x=\cos(x+\pi k/2)$; $k=1,\ 2,\ \ldots$, следовательно, $f(0)=1$; $f^{(2m)}(0)=\cos\pi m=(-1)^m$; $f^{(2m-1)}(0)=\cos(\pi m-\pi/2)=0$.

Поэтому

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+r_{2m+1}(x),$$

где r_{2m+1} — остаточный член формулы Тейлора:

в форме Лагранжа

$$r_{2m+1} = \frac{\cos(\theta x + \pi(m+1))}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

в форме Пеано

$$r_{2m+1} = o(x^{2m+1});$$

(отметим, что при разложении $\cos x$ по формуле Маклорена берется $n = 2m+1$).

4. Рассмотрим теперь функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Так как $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, то

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}; k = 2, 3, \ldots,$$

поэтому, $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$; $k = 2, 3, \ldots$, и, следовательно, учитывая, что $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

где r_n — остаточный член формулы Тейлора:

в форме Лагранжа

$$r_n = \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)} x^{n+1},$$

в форме Пеано

$$r_n = o(x^n).$$

5. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$;

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)}; k = 1, 2, \ldots,$$

поэтому $f(0) = 1$; $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$; $k = 1, 2, \ldots$, и

$$(1+x)^\alpha = \\ = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x),$$

где r_n — остаточный член формулы Тейлора:

в форме Лагранжа

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

в форме Пеано

$$r_n = o(x^n).$$

§ 13.4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

1. Бином Ньютона ($\alpha = m$ — натуральное число).

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots 1}{m!}x^m,$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + mx^{m-1} + x^m.$$

2. $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

§ 13.5. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Тейлора в окрестности некоторой точки, заменить многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора (правая часть формулы Тейлора без остаточного члена). Величина погрешности при этом задается величиной остаточного члена.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает регулярный метод выделения главной части в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве основаны применения формулы Тейлора к вопросам анализа.

§ 13.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0; \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора (если это возможно) функции $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки x_0, ограничиваясь при этом в многочлене Тейлора лишь первыми, не равными нулю, членами, т. е.

$$f(x) = a(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m); \quad a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x-x_0)^l + o((x-x_0)^l); \quad b \neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)}{b(x-x_0)^l + o((x-x_0)^l)} =$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} 0, & m > l; \\ \frac{a}{b}, & m = l; \\ \infty, & m < l. \end{cases}$$

Неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$ следует преобразовывать к неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и применять метод выделения главной части.

Для раскрытия неопределенностей 0^0; 0^∞; ∞^∞ с помощью формулы Тейлора их вначале логарифмируют.

ПРИМЕР 13.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

ПРИМЕР 13.2.

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]^2 - x^2}{x^2[x + o(x^2)]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x^4}{3!} + o(x^4)}{x^2(x^2 + o(x^2))} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^4}{3!}}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

ПРИМЕР 13.3.

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+\sin x)} = e^1 = e,$$

так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x + o(x^2))}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x^2) + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. теорему 13.1).
2. Сформулируйте и докажите теорему Пеано (см. теорему 13.2).
3. Оцените погрешность формулы

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

4. Запишите формулу Тейлора $2n$-го порядка для функции $y = \cos^2 x$.
5. Найдите $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Ответы

3. Используя формулу Тейлора для функции e^x, имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + r_n,$$

где

$$r_n = \frac{e^{\theta x}}{7!} x^7, \quad 0 < \theta < 1.$$

Положим $x = 1$. Тогда

$$r_n = \frac{e^\theta}{7!}, \quad 0 < \theta < 1, |r_n| < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680} < 0,001.$$

4. Так как $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, то

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

5. $\sin 10^\circ \approx 0,1736$.

Для доказательства этого факта нужно воспользоваться тем, что $10^\circ = \frac{\pi}{18}$ радиан, и формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y = \sin x$ при $n = 2m - 1 = 3$.

Лекция 14

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

§ 14.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. УСЛОВИЯ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Определение 14.1. Функция $f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей) на отрезке* $[a,b]$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого отрезка, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняются неравенства

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Определение 14.2. Функция $f(x)$ называется *строго убывающей (строго возрастающей) (рис. 14.1, 14.2) на отрезке* $[a,b]$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого отрезка, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняются неравенства

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

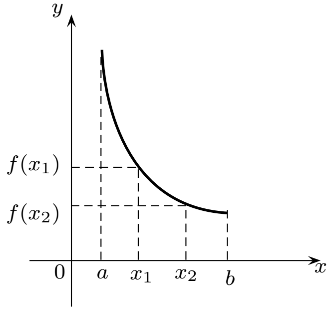


Рис. 14.1

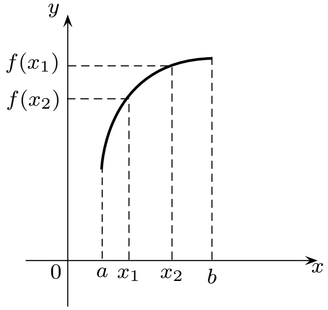


Рис. 14.2

Определение 14.3. Функции неубывающие и невозрастающие на отрезке $[a,b]$ называются *монотонными на* $[a,b]$, а функции строго возрастающие и строго убывающие на $[a,b]$, называются *строго монотонными на* $[a,b]$.

Определение 14.4. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, а сама точка x_0 называется *точкой роста функции* $f(x)$, если существует такая окрестность $\delta(x_0)$ точки x_0, что

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0), \quad f(x) < f(x_0),$$

и

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta), \quad f(x) > f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *убывающей в точке* x_0, а сама точка x_0 называется *точкой убывания функции* $f(x)$, если существует такая окрестность $\delta(x_0)$, точки x_0, что

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0), \quad f(x) > f(x_0),$$

и

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta), \quad f(x) < f(x_0).$$

§ 14.2. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 14.1. *Пусть 1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$; 2) существует производная $f'(x)$, по крайней мере, в (a,b). Для того, чтобы функция $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех $x \in (a,b)$.*

Доказательство проведем для случая неубывающей на $[a,b]$ функции.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ — неубывающая на $[a,b]$ функция, т. е. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$; из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$, и точку $x_0+\Delta x \in (a,b)$, найдем

$$f'(x_0) = f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

так как $\Delta x > 0$ и $f(x_0+\Delta x) \geqslant f(x_0)$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ для любых $x \in (a,b)$. Возьмем произвольные x_1 и x_2 из $[a,b]$, $x_1 < x_2$. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на $[x_1, x_2]$. По теореме Лагранжа существует такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, т. е. функция $f(x)$ неубывающая на $[a, b]$. Теорема доказана.

§ 14.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОЙ МОНОТОННОСТИ

Теорема 14.2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема по, крайней мере, в интервале (a, b). Тогда, если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на $[a, b]$.*

Доказательство. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из $[a, b]$, $x_1 < x_2$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на $[x_1, x_2]$, получаем, что существует такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0,$$

следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$. Таким образом, функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.

Теорема доказана.

Замечание 14.1. Условие $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$ не является необходимым условием для строго возрастающей функции на $[a, b]$.

Например, функция $y = x^3$ строго возрастает на $[-1, 1]$. Однако $f'(x) = 3x^2$ обращается в 0 в точке $x = 0$.

§ 14.4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ВОЗРАСТАНИЯ (УБЫВАНИЯ) ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Теорема 14.3. *Пусть существует произвольная функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), тогда функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.*

Доказательство. По определению производной в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0.$$

Следовательно, существует такое число $\delta > 0$, что для всех $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Пусть $0 < \Delta x < \delta$. Тогда $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, при $x_0 < x_0 + \Delta x$. Если $\Delta x < 0$, то $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, т. е. $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ при $x_0 < x_0 + \Delta x$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает в точке x_0.

Теорема доказана.

§ 14.5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

Определение 14.5. Точка x_0 (в которой функция $f(x)$ непрерывна) называется *точкой локального максимума (локального минимума) функции* $f(x)$ (рис. 14.3), если существует такая окрестность $\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in \delta(x_0)$; $f(x) \leqslant f(x_0)$; $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

Определение 14.6. Точки локального максимума и локального минимума называются *точками экстремума*. Значения функции в этих точках называются *экстремумами функции*.

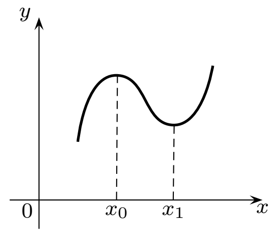


Рис. 14.3

Определение 14.7. Точка x_0 (в которой функция $f(x)$ непрерывна) называется *точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума)*, если существует такая окрестность $\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in \delta(x_0)$, $x \neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$; $(f(x) > f(x_0))$.

ПРИМЕР 14.1.

$$y = \sin x; \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Точка $x_1 = -\pi/2$ — точка строгого локального минимума, а точка $x_1 = \pi/2$ — точка строгого локального максимума функции $y = \sin x$ на $[-\pi, \pi]$.

§ 14.6. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Теорема 14.4. *Если точка x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная функции $f(x)$ либо равна 0, либо не существует.*

Доказательство будем вести от противного.

Пусть в точке x_0 есть экстремум и пусть в точке x_0 существует производная функции $f(x)$ и $f'(x_0) \neq 0$. Пусть, например $f'(x_0) > 0$. Но тогда, по теореме 14.3 функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 и, следовательно существует такая окрестность $\delta(x_0)$ точки x_0, что $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$, $f(x_0) < f(x)$ и $\forall x \in (x_0 - - \delta, x_0)$, $f(x_0) > f(x)$. Тем самым, в точке x_0 нет экстремума. Получаем противоречие.

Теорема доказана.

§ 14.7. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. В силу теоремы Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке $[a, b]$. Если она достигает своего наибольшего значения внутри интервала (a, b), то это значение будет одним из локальных максимумов (наибольшим). Наибольшее значение может достигаться и на концах отрезка. Поэтому чтобы его найти, надо сравнить между собой все максимумы функции $f(x)$ в интервале и значения на концах отрезка. Наибольшее из этих значений и является наибольшим значением $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Аналогично исследуется вопрос о наименьшем значении функции $f(x)$. Можно предложить рецепт нахождения наибольшего и наименьшего значений функций $f(x)$ на $[a, b]$.

Найдем точки подозрительные на экстремум, принадлежащие (a, b), т. е. точки x_1, $x_2, \ldots, x_n$, в которых $f'(x)$ либо равна 0, либо не существует, и составим таблицу:

x	a	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	b
y	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_k)$	$f(b)$

Наибольшее из чисел $\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), f(b)\}$ — есть наибольшее значение функции $f(x)$ на $[a, b]$, а наименьшее из чисел $\{f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ f(b)\}$ — есть наименьшее значение функции $f(x)$ на $[a, b]$.

§ 14.8. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Исследование на экстремум с помощью первой производной.

Теорема 14.5. *Пусть 1) функция $f(x)$ непрерывна и определена в точке x_0; 2) существует (конечная) производная $f'(x)$ в некоторой δ окрестности точки x_0, за исключением быть может самой точки x_0. Тогда, если $f'(x)$ при переходе точки x через x_0 (слева направо) изменяет знак с «$+$» на «$-$», то точка x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$, а если с «$-$» на «$+$», то точка x_0 — точка локального минимума. Если же при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то в точке x_0 нет экстремума.*

Доказательство. Пусть для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$; $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$, в силу теоремы 6.2, строго возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ и, следовательно, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) < f(x_0)$. А так как для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$; $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ и $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Таким образом, существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$, т. е. точка x_0 — точка локального максимума.

Если для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ и $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$; $f(x) > f(x_0)$. А так как для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ и $f(x) > f(x_0)$: $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Таким образом, существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$: $f(x) < f(x_0)$, т. е. точка x_0 — точка локального минимума.

Пусть для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) < 0$ и для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x) < 0$. Тогда, функция $f(x)$ строго убывает на отрезках $[x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta]$ и, следовательно, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f(x) < f(x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$: $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, следовательно, в точке x_0 нет экстремума.

Аналогично, если для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) > 0$ и для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x) > 0$, то, функция $f(x)$ строго возрастает на отрезках $[x_0 - \delta, x_0]$ и $[x_0, x_0 + \delta]$ и, следовательно, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f(x) < f(x_0)$ и $f(x) < f(x_0) \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, следовательно, в точке x_0 нет экстремума. Теорема доказана.

Теорема 14.6. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производные* $f'(x_0)$ *и* $f''(x_0)$*, причем* $f'(x_0) = 0$*, а* $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$)*. Тогда точка* x_0 *есть точка локального минимума (локального максимума) функции* $f(x)$.

Доказательство. Существование второй производной в точке x_0 влечет за собой существование производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и, тем более, непрерывность функции в некоторой окрестности $U(x_0)$.

Так как $f''(x_0) > 0$, то из теоремы 14.3 следует, что $f'(x)$ возрастает в точке x_0, т. е. существует такая окрестность $\delta(x_0)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) < 0$, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x) > 0$ это означает, что в точке x_0 — локальный минимум.

Если $f''(x_0) < 0$, то по теореме 14.3 $f'(x)$ убывает в точке x_0, т. е. существует такая окрестность $\delta(x_0)$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) > 0$, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x) < 0$, т. е. в точке x_0 — локальный максимум.

Теорема доказана.

§ 14.9. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭКСТРЕМУМ С ПОМОЩЬЮ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 14.7. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную* $f^{(n)}(x_0)$ *непрерывную в точке* x_0*. Пусть, также,*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n *— нечетное число, то в точке* x_0 *нет экстремума, а если* n *— четное число, то в точке* x_0 *— экстремум, причем, если* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, то в точке* x_0 *— локальный минимум, а если* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, то в точке* x_0 *— локальный максимум.*

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение строго возрастающей функции на отрезке $[a, b]$ (см. определение 14.2).
2. Какая точка x_0 называется точкой роста функции $f(x)$? (см. определение 14.4).
3. Сформулируйте и докажите необходимое условие монотонности на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 14.1).

4. Сформулируйте и докажите достаточное условие строгой монотонности на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 14.2).

5. Докажите, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 2\pi]$.

6. Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

7. Сформулируйте определение точек экстремума функций (см. определения 14.5 и 14.6).

8. Сформулируйте и докажите необходимое условие экстремума (см. теорему 14.4).

9. Сформулируйте и докажите достаточные условия экстремума по первой производной (см. теорему 14.5).

10. Исходя из определения минимума, докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум.

Ответы

5. Функция $f(x) = x - \sin x$ имеет производную $f'(x) = 1 - \cos x$, которая на интервале $(0, 2\pi)$ строго больше нуля. Следовательно, в силу теоремы 14.2 функция $x - \sin x$ строго возрастает на отрезке $[0, 2\pi]$.

6. Нет, например, функция $x - \sin x$ строго монотонна на отрезке $[0, 2\pi]$ (см. пример 5), а ее производная $f'(x) = 1 - \cos x$ не является монотонной на этом отрезке: $f(0) = 0, f(\pi) = 2, f(2\pi) = 0$ (см. определения 14.1 и 14.2).

10. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ строгий минимум, так как $\forall x \neq 0$ функция $f(x) > 0$, а $f(0) = 0$ (см. определение 14.7).

Лекция 15

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ

§ 15.1. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и, тем самым, имеет в каждой точке $(x_0, f(x_0)), x_0 \in (a, b)$ графика функции касательную, уравнение которой имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение 15.1. Кривая графика функции $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b), если все точки графика лежат ниже любой ее касательной на этом интервале (рис. 15.1) (формально $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при всех x, $x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$).

Определение 15.2. Кривая графика функции $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз на интервале (a, b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале (рис. 15.2) (формально $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при всех $x, x_0 \in (a, b), x \neq x_0$).

Кривую, обращенную выпуклостью вверх будем называть *выпуклой*, а выпуклостью вниз — *вогнутой*.

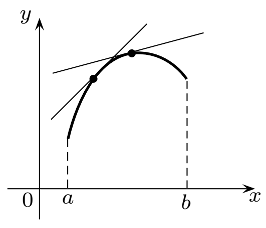


Рис. 15.1

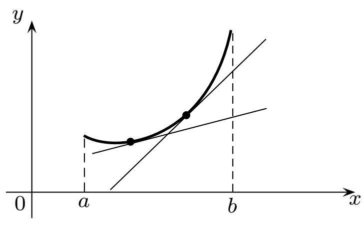


Рис. 15.2

§ 15.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫПУКЛОСТИ (ВОГНУТОСТИ)

Теорема 15.1. *Если во всех точках интервала* (a, b) *вторая производная функции* $f(x)$ *отрицательна, т. е.* $f''(x) < 0$*, то кривая* $y = f(x)$ *выпукла на этом интервале.*

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Теорема будет доказана, если докажем, что все точки кривой на (a, b) лежат ниже этой касательной, т. е. что ордината любой точки кривой $y = f(x)$ меньше ординаты касательной при одном и том же значении x.

Уравнение касательной к кривой в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{15.1}$$

Разложим функцию $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2; \tag{15.2}$$

$$\xi = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad \Delta x = x - x_0.$$

Вычитая (15.1) из (15.2), получаем

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 < 0,$$

$$\forall x \in (a, b), \quad x \neq x_0.$$

Тем самым, мы доказали, что любая точка кривой $y = f(x)$ лежит ниже касательной к этой кривой, каковы бы ни были значения x и x_0 на интервале (a, b). А это и означает, что кривая выпукла.

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 15.2. *Если во всех точках интервала* (a, b) *вторая производная функции* $f(x)$ *положительна, т. е.* $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$*, то кривая* $f(x)$ *на этом интервале вогнута.*

§ 15.3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение 15.3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба кривой* $y = f(x)$, если она отделяет выпуклую часть кривой $y = f(x)$ от вогнутой части (рис. 15.3).

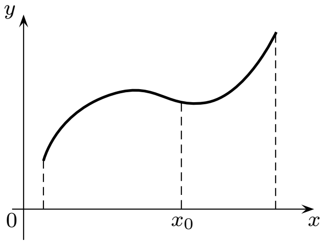


Рис. 15.3

Теорема 15.3. *Пусть кривая определена уравнением* $y = f(x)$. *Если* $f''(x_0)=0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует и при переходе через значение* x_0 *производная* $f''(x)$ *меняет знак, то точка кривой* $(x_0, f(x_0))$ *есть точка перегиба. (Предполагается, что в точке* x_0 $f(x)$ *непрерывна и имеет конечную или бесконечную* $f'(x_0)$*).*

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$ при некотором δ. Тогда, на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ кривая выпукла, а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ — вогнута. Следовательно, точка $A = (x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба.

Если же $f''(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ кривая $y = f(x)$ вогнута, а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ — выпукла. Следовательно, точка $A = (x_0, f(x_0))$ также является точкой перегиба.

Теорема доказана.

Сформулируем более общую теорему.

Теорема 15.4. *Пусть функция* $f(x)$ *обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n+1)}(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и* $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. *Тогда, если* n *— четное число, то точка* $(x_0, f(x_0))$ *есть точка перегиба. Если* n *— нечетное число, то кривая выпукла в некоторой окрестности точки* x_0, *если* $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, *или вогнута в некоторой окрестности точки* x_0, *если* $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

Замечание 15.1. Говорят, что кривая $y = f(x)$ имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ перегиб, если производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна либо $= \infty$, либо $-\infty$.

§ 15.4. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Теорема 15.5. *Пусть для функции $f(x)$ в точке x_0 существует и непрерывна вторая производная. Если точка $M_0(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство будем вести от противного.

Пусть в точке x_0 существует непрерывная вторая производная и $f''(x_0) \neq 0$. Предположим, например, что $f''(x_0) > 0$. Тогда существует такая окрестность точки x_0, в которой $f''(x) > 0$. Но тогда, по теореме 15.2, кривая $y = f(x)$ в этой окрестности вогнута и, следовательно, точка $(x_0, f(x_0))$ не есть точка перегиба. Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) < 0$.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 15.1. Найдите перегибы и определите интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = e^{-x^2}.$$

Найдем y' и y''.

$$y' = -2xe^{-x^2}; \qquad y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Так как вторая производная существует всюду, то найдем те точки x, при которых $y'' = 0$.

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0, \quad 2x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} y'' &> 0, \quad \text{при } x < -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y'' &< 0, \quad \text{при } -\tfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y'' &> 0, \quad \text{при } x > \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, кривая $y = e^{-x^2}$ на интервале $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — вогнута, на интервале $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — выпукла, на интервале $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ — вогнута. Таким образом, точки $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ и $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ есть точки перегиба графика функции $y = e^{-x^2}$.

Заметим, что из равенства $y' = -2xe^{-x^2}$ следует, что при $x < 0$: $y' > 0$, т. е. функция $y = e^{-x^2}$ возрастает при $x < 0$, а при $x > 0$: $y' < 0$, т. е. функция $y = e^{-x^2}$ убывает при $x > 0$. Таким образом, в точке $x = 0$ функция $y = e^{-x^2}$ имеет максимум, равный 1.

§ 15.5. ОБЩИЙ ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Для качественного исследования функции $y = f(x)$ целесообразно прежде всего провести следующие исследования:

1) определить область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;

3) выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных);

4) найти интервалы возрастания и убывания функции;

5) найти точки максимума и минимума функции, а также минимальные и максимальные значения;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;

7) найти точки пересечения графика функции с осью Ox.

По полученным данным легко строится эскиз графика функции.

В качестве примера построим график функции

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}. \tag{15.3}$$

Будем следовать изложенной выше схеме.

1. Поскольку функция (15.3) представляет собой рациональную дробь, то она определена и непрерывна всюду, за исключением точки $x = 0$, в которой обращается в нуль знаменатель.

2. Функция общего вида.

3. Выясним вопрос о существовании асимптот. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty,$$

то график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. Далее, из существования пределов

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{6}{x^3}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 - 2x^3}{4x^2} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{-5 + \frac{14}{x} - \frac{6}{x^2}}{4} = -\frac{5}{4}$$

вытекает, что и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту

$$y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}.$$

4. Для нахожения интервалов возрастания и убывания вычислим первую производную нашей функции

$$y' = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Так как и сама функция и ее производная не существуют при $x = 0$, то получаем следующие области сохранения знака y':

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Знак y'	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
Поведение функции	Возрастает		Убывает		Возрастает		Убывает		Возрастает

5. Из приведенной таблицы легко видеть, что функция имеет следующие точки экстремума:

максимум при $x = -3$, причем $f(-3) = -\frac{49}{12}$;
максимум при $x = 1$, причем $f(1) = \frac{5}{4}$;
минимум при $x = 2$, причем $f(2) = \frac{9}{8}$.

6. Для нахождения интервалов сохранения направления выпуклости или вогнутости вычислим вторую производную

$$y'' = \frac{7x - 9}{x^4} = \frac{7(x - \frac{9}{7})}{x^4}.$$

Имея в виду, что сама функция и ее производные не существуют в точке $x = 0$, мы получим следующие интервалы сохранения знака y'':

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 9/7)$	$9/7$	$(9/7, +\infty)$
Знак y''	$-$		$-$	0	$+$
Выпуклость или вогнутость	Выпуклость		Выпуклость	Перегиб	Вогнутость

Из приведенной таблицы очевидно, что график функции имеет перегиб в точке $\left(\frac{9}{7}, f\left(\frac{9}{7}\right)\right)$. Отметим, что $f\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{913}{756}$.

7. Остается найти точки пересечения графика с осью Ox. Эти точки соответствуют вещественным корням уравнения

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Легко видеть, что

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6).$$

Поскольку квадратный трехчлен $(x^2 - 2x + 6)$ не имеет вещественных корней (его дискриминант равен отрицательному числу), то рассматриваемое уравнение имеет один вещественный корень $x = \frac{1}{2}$, так что график функции пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. По полученным данным строим эскиз рассматриваемой функции (рис. 15.4).

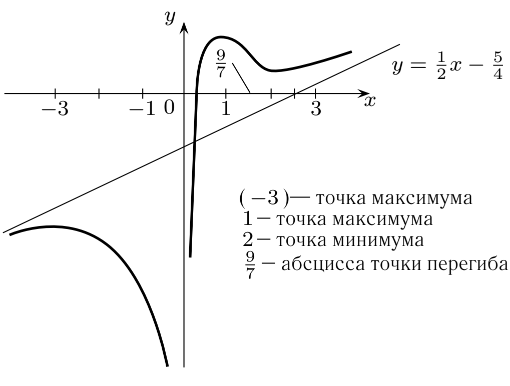


Рис. 15.4

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости кривой на (a, b) (см. теорему 15.1).

2. Какая точка называется точкой перегиба графика функции? (см. определения 15.3 и 15.4).

3. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба (см. теорему 15.5).

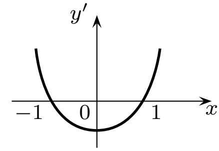
4. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба (см. теорему 15.3).

5. Исследуйте знаки максимума и минимума функции $x^3 - 3x + q$ и выявите условия, при которых уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет три действительных корня.

Ответы

5. Рассмотрим функцию $y = x^3 - 3x + q$ и найдем точки экстремума этой функции. Вычислим производную $y' = 3x^2 - 3$ и приравняем к 0 (необходимое условие экстремума, теорема 14.4):

$$3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1.$$



Используя достаточные условия экстремума (см. теорему 14.5), найдем точки экстремума нашей функции. Для этой цели рассмотрим области сохранения знака первой производной $y' = 3(x-1)(x+1)$ методом интервала.

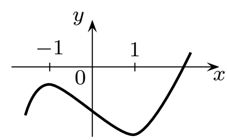
Таким образом, в точке $x_1 = -1$ первая производная меняет знак с «$+$» на «$-$», следовательно, точка $x_1 = -1$ — точка максимума функции $y(x)$. В точке $x_1 = +1$ первая производная меняет знак с «$-$» на «$+$», следовательно, точка $x_1 = +1$ — точка минимума функции $y(x)$.

Рассмотрим значение функции $y = x^3 - 3x + q$ в этих точках.

$$y(-1) = 2 + q; \qquad y(+1) = q - 2.$$

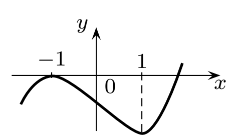
Таким образом, возможны следующие случаи:

1) $q < -2$.



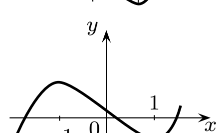
Так как $y(-1) < 0$ $y(+1) < 0$, то график функции схематически выглядит следующим образом, и уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет один корень;

2) $q = -2$.



Так как $y(-1) = 0$ $y(+1) < 0$, то график функции схематически выглядит следующим образом, уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет два корня;

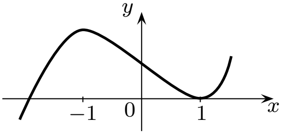
3) $-2 < q < 2$.



Так как $y(-1) > 0$ $y(+1) < 0$, то график функции схематически выглядит следующим образом, и уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет три корня;

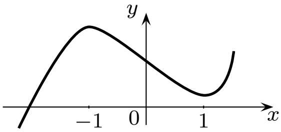
4) $q = 2$.

Так как $y(-1) > 0 \quad y(+1) = 0$, то график функции схематически выглядит следующим образом, и уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет два корня;



5) $q > 2$.

Так как $y(-1) > 0 \quad y(+1) > 0$, то график функции схематически выглядит следующим образом, и уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет один корень.



Таким образом, уравнение имеет три действительных корня только при $-2 < q < 2$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

ПРЕДЕЛЫ

Занятие 1

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1.1. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Совокупность значений функции $x_n = f(n)$ натурального аргумента n называется *последовательностью*.

Число a называется *пределом* последовательности x_1, x_2, $\ldots$, x_n, $\ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Используя логические кванторы общности $\forall$ (читается «для любого» или «для всех») и существования $\exists$ (читается «существует» или «найдется»), определение предела последовательности можно выразить кратко

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon\ \ \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$.

ПРИМЕР 1.1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$\lhd$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, положив $N = \frac{1}{\varepsilon}$, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon}: \quad \forall n > N \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 1.2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

$\lhd$ $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$, если $n^2>\frac{1}{\varepsilon}$ или $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Положив $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, получим

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}:\quad\forall n>N\quad\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon\quad\Longrightarrow\lim_{n\to 0}\frac{1}{n^2}=0.$$

(Запись $A\Longrightarrow B$ означает, что из A следует B.) $\rhd$

Если $x_n=C$ ($n=1,\,2,\,\ldots$), то последовательность называется *постоянной.*

При вычислении пределов последовательностей можно использовать следующие теоремы.

Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, а C — постоянная, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}Cx_n=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$, если $y_n\neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$.

ПРИМЕР 1.3. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2-n+1}.$$

$\lhd$ Числитель и знаменатель являются многочленами второй степени. Деля их на n^2 (на старшую степень) и учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\quad\text{(см. примеры 1.1, 1.2)},$$

получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2-n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n-1/n^2}{2-1/n+1/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n-1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n+1/n^2)}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}1/n-\lim\limits_{n\to\infty}1/n^2}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}1/n+\lim\limits_{n\to\infty}1/n^2}=\frac{1+0-0}{2-0+0}=\frac{1}{2}.\quad\rhd$$

§ 1.2. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

ПРИМЕР 1.4. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n-1}{2n^2-n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является бесконечно малой.

$\lhd$ Покажем, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-n+1} = 0.$$
Выражение для x_n представляет собой отношение двух многочленов. Старшая степень в этих многочленах n^2. Разделим числитель и знаменатель на n^2 и воспользуемся сформулированными выше теоремами для подсчета предела
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n-1/n^2}{2-1/n+1/n^2} = \frac{0}{2} = 0.$$
Следовательно, последовательность x_n — бесконечно малая. $\rhd$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если
$$\exists M > 0: \quad \forall n \quad |x_n| \leqslant M.$$

Примерами ограниченных последовательностей являются последовательности
$$\{\sin n\}(\forall n \quad |\sin n| \leqslant 1);$$
$$\{\operatorname{arctg}(1/n)\}(\forall n\; 0 < \operatorname{arctg}(1/n) \leqslant \pi/4 \Longrightarrow |\operatorname{arctg}(1/n)| \leqslant \pi/4);$$
$$\{\operatorname{arctg} n\}(\forall n \quad |\operatorname{arctg} n| \leqslant \pi/2).$$

Простейшим примером *неограниченной* последовательности (не являющейся ограниченной) может служить последовательность
$$x_n = n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Каким бы большим не было число M,
$$x_n > M \quad \text{при } n > M.$$

Следовательно, не существует такого числа $M > 0$, чтобы неравенство $|x_n| \leqslant M$ выполнялось $\forall n$.

При отыскании некоторых пределов удобно использовать следующую теорему.

Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ — ограниченная, то последовательность $\{x_n y_n\}$ является бесконечно малой.

ПРИМЕР 1.5. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-n+1}\sin n.$$

$\triangleleft$ Так как последовательности

$$x_n = \frac{n-1}{2n^2-n+1}, \quad y_n = \sin n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

являются, соответственно, бесконечно малой (см. пример 9.2) и ограниченной, то последовательность $\{x_n y_n\}$ является бесконечно малой и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2-n+1}\sin n = 0. \quad \triangleright$$

§ 1.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall M > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad |x_n| > M.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

и говорят, что предел последовательности бесконечный.

ПРИМЕР 1.6. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

$\triangleleft$ $|n^2| = n^2 > M$, если $n > \sqrt{M}$. Положив $N = \sqrt{M}$, получим

$$\forall M>0 \quad \exists N=\sqrt{M}: \quad \forall n>N \quad |n^2|>M \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2=\infty. \quad \triangleright$$

Нетрудно показать, что $\forall \alpha > 0$ и $a \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} an^\alpha = \infty.$$

Для выявления бесконечных пределов удобно использовать теорему:

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

ПРИМЕР 1.7. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+5}{n+4}.$$

$\lhd$ Для нахождения предела воспользуемся сформулированной выше теоремой:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+5}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n}^2}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n}^2}=\infty,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)=1\neq 0,$$

а

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)=0. \quad \rhd$$

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1.$$

В этом случае пишут

$$x_n\sim y_n.$$

ПРИМЕР 1.8. Доказать, что

$$(n^3+n-1)\sim n^3, \quad (8n^3-n^2+4)\sim 8n^3.$$

$\lhd$ Действительно, разделив числители и знаменатели дробей на n^3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n-1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^2-1/n^3}{1}=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-n^2+4}{8n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-1/n+4/n^3}{8}=1.$$

Равенство этих пределов единице и означает эквивалентность соответствующих последовательностей. $\rhd$

В общем случае при $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_m$ и $a_1\neq 0$

$$(a_1n^{\alpha_1}+a_2n^{\alpha_2}+\ldots+a_mn^{\alpha_m})\sim a_1n^{\alpha_1}. \tag{1.1}$$

При вычислении пределов последовательностей очень удобно использовать следующую теорему.

Если $x_n \sim x'_n$, $y_n \sim y'_n$; $y_n \neq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x'_n}{y'_n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{y'_n}. \tag{1.2}$$

ПРИМЕР 1.9. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - n^2 + 4}{n^3 + n - 1}.$$

$$\lhd \quad \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - n^2 + 4}{n^3 + n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 8 = 8. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 1.10. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3}{n^4 + n^2 + 1}.$$

$\lhd$ Учитывая (1.1) и заменяя числитель и знаменатель на эквивалентные последовательности, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3}{n^4 + n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 1.11. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n^2 + 4}{9n^2 - 2}.$$

$$\lhd \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n^2 + 4}{9n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{9n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9} n^2 = \infty. \quad \rhd$$

Сопоставление примеров 1.9–1.11 позволяет понять, что если $P_m(n)$, $P_k(n)$ — многочлены степеней m и k соответственно, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_m(n)}{P_k(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } m < k; \\ a, & \text{при } m = k; \\ \infty, & \text{при } m > k. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь a — отношение коэффициентов при старших степенях многочленов.

ПРИМЕР 1.12. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{2n + 5}.$$

$\lhd$ Не следует думать, что числитель является многочленом второй степени. В самом деле

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = (n^2+2n+1) - (n^2-2n+1) = 4n.$$

Таким образом, числитель и знаменатель являются многочленами первой степени и предел равен отношению коэффициентов при старших степенях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+5} = \frac{4}{2} = 2,$$

а замена на эквивалентные каждого из слагаемых

$$(n+1)^2 \sim n^2, \quad (n-1)^2 \sim n^2,$$

привела бы к неправильному результату, так как

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 \not\sim n^2 - n^2 = 0. \quad \rhd$$

Заметим, что если $x_n \sim n^\alpha, y_n \sim n^\alpha$, то

$$(c_1 x_n + c_2 y_n) \sim (c_1 + c_2) n^\alpha, \tag{1.4}$$

лишь при условии $(c_1+c_2) \neq 0$.

(Если $(c_1+c_2)=0$, то отношение $(c_1x_n+c_2y_n)/(c_1+c_2)n^\alpha$ и его предел теряют смысл.)

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+2}{3n^2+3n-4}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3n-2}{(n^2-2)^2}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n-1}{2n^2-n-2}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2-(n-1)^2}{3n^2}$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3-(n-3)^3}{(n+3)^2+(n-3)^2}$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(3n+1)}{3n^3+n^2}$.

Ответы:

1. $\frac{4}{3}$;
2. 0;
3. ∞;
4. 0;
5. 9;
6. $\frac{1}{3}$.

Рассмотренные приемы вычисления пределов отношения двух многочленов распространяются и на пределы дробей, содержащих иррациональности.

§ 1.4. ПРИЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ДРОБЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

ПРИМЕР 1.13. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2n+3}}{n-3}.$$

$\lhd$ Разделим числитель и знаменатель дроби на n. Учитывая, что

$$\frac{\sqrt[3]{8n^3-2n+3}}{n}=\sqrt[3]{\frac{8n^3-2n+3}{n^3}}=\sqrt[3]{8-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}},$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2n+3}}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-2/n^2+3/n^3}}{1-3/n}=\frac{\sqrt[3]{8}}{1}=2.\quad\rhd$$

ПРИМЕР 1.14. Доказать, что

$$\sqrt{9n^4+n+4}\sim 3n^2;\qquad \sqrt[3]{8n^6-n^4+2}\sim 2n^2.$$

$$\lhd\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^4+n+4}}{3n^2}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n^4+n+4}{n^4}}=$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^4}}=\frac{1}{3}\cdot 3=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^6-n^4+2}}{2n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^6-n^4+2}{n^6}}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^6}}=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

Из равенства единице пределов этих отношений и следует доказываемое. $\rhd$

Заметим, что вообще, если $x_n\sim n^\alpha$, то

$$\sqrt[m]{x_n}\sim n^{\alpha/m}. \tag{1.5}$$

ПРИМЕР 1.15. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^4+n+4}}{\sqrt[3]{8n^6-n^4+2}}.$$

$\lhd$ Применяя теорему о замене последовательностей на эквивалентные при вычислении пределов (формула 1.2) и учитывая эквивалентность последовательностей, рассмотренных в примере 1.14, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^4+n+4}}{\sqrt[3]{8n^6-n^4+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.16. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7n}}{2n+1}.$$

$\triangleleft$ Учитывая соотношения 1.5 и 1.2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/3}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^{1/3}}=0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 1.17. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}-\sqrt[5]{n^4+2}}.$$

$\triangleleft$ Так как $\sqrt[4]{n^7+2}\sim n^{7/4}$; $\qquad \sqrt[3]{n^2+1}\sim n^{2/3}$;

$$\sqrt[5]{n^4+2}\sim n^{4/5}; \qquad \sqrt{n^3+1}\sim n^{3/2},$$

а в силу 1.1,

$$\frac{7}{4}>\frac{2}{3} \implies \left(\sqrt[4]{n^7+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)\sim n^{7/4};$$
$$\frac{3}{2}>\frac{4}{5} \implies \left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt[5]{n^4+2}\right)\sim n^{3/2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}-\sqrt[5]{n^4+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/4}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}n^{1/4}=\infty. \quad \triangleright$$

Сопоставление примеров 1.15–1.17 показывает, что правило (1.3) обобщается на пределы дробей, содержащих иррациональности, если под m и k понимать показатели степеней n^m и n^k в эквивалентных числителю и знаменателю последовательностях, а под a — отношение коэффициентов при них (получающихся при извлечении корней из коэффициентов при старших степенях в подкоренных выражениях).

ПРИМЕР 1.18. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-5}\right).$$

◁ Здесь $\sqrt{n^2+3n+1} \sim n, \quad \sqrt{n^2-5} \sim n$, но

$$\left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-5}\right) \not\sim n - n = 0$$

(см. пример 1.12 и 1.4), и такая замена на эквивалентные привела бы к ошибочному результату.

Для вычисления предела в этом случае разность корней умножим и разделим на сопряженное выражение (сумму корней). Учитывая, что

$$\left(\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-5}\right) \sim (n+n) = 2n,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-5} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-5}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-5}\right)}{\sqrt{n^2+3n+1} + \sqrt{n^2-5}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n+1)-(n^2-5)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+6}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}.$$

(При замене корней на эквивалентные в исходном выражении предел получился бы равным нулю.) ▷

ПРИМЕР 1.19. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right).$$

◁ Применяя прием, аналогичный использованному в примере 1.18, получим

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n} = 0. \quad ▷$$

ПРИМЕР 1.20. Найти

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+4} - n\right).$$

◁ Здесь $\sqrt[3]{n^3+4} \sim n$, но в исходном выражении такую замену выполнять нельзя, так как

$$\left(\sqrt[3]{n^3+4} - n\right) \not\sim (n-n) = 0$$

(см. предыдущий пример). В этом случае умножением и делением на неполный квадрат суммы

$$\sqrt[3]{n^3+4} + n\sqrt[3]{n^3+4} + n^2$$

получим разность кубов в числителе

$$\left(\sqrt[3]{n^3+4}\right)^3 - n^3 = n^3+4-n^3 = 4 \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+4}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\left(\sqrt[3]{(n^3+4)^2}+n\sqrt[3]{n^3+4}+n^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2+n^2+n^2} = \frac{4}{3}. \quad ▷$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+1}{\sqrt[4]{n^4+3n-1}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7n+1}}{\sqrt[3]{3n^2-1}}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5-n^3+2}}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+2n+1} - \sqrt{n^3+2}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{n(n+1)} - \sqrt[3]{n^2}\right)$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+2} - n\right)$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{n^2-3}}$.

Ответы:

1. 6.	3. 0.	5. 2.	7. 0.
2. 0.	4. 0.	6. ∞.	

Занятие 2

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

§ 2.1. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Число a называется *пределом* функции $f(x)$ в $+\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ при $x > N$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a;$$

с помощью логических кванторов:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a,$$

$$\text{если} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall x > N \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ПРИМЕР 2.1. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$\lhd$ При $x > 0$ $\quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$, если $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, положив $N = \frac{1}{\varepsilon}$, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon}: \quad \forall x > N \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. $\quad \rhd$

Очевидно, понятие предела функции $f(x)$ в $+\infty$ обобщает понятие предела последовательности $\{f(n)\}$ на случай, когда рассматриваются значения функции $\forall x > x_0$, а не только при натуральных $x = n$.

Теоремы о пределах последовательностей распространяются на пределы функции в $+\infty$, поэтому при вычислении последних используются те же приемы, что и при вычислении пределов последовательностей.

ПРИМЕР 2.2. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{3x^4+1}.$$

$\lhd \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{3x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-1/x^4}{3+1/x^4}=\frac{1-0}{3+0}=\frac{1}{3}.\ \rhd$

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to+\infty$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to\to+\infty$, если

$$\forall M>0 \quad \exists N: \quad \forall x>N \quad |f(x)|>M,$$

и в этом случае пишут

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty.$$

Если

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x\to\to+\infty$, т. е.

$$f(x)\sim g(x) \quad \text{при } x\to+\infty.$$

Можно сформулировать теорему о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов, аналогичную теореме для последовательностей (см. формулу 1.2).

§ 2.2. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

ПРИМЕР 2.3. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^4+3x^3+1}.$$

$\lhd \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^4+3x^3+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.\ \rhd$

ПРИМЕР 2.4. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+6x^4}{1+2x^3}.$$

$\lhd \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x+6x^4}{1+2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^4}{2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=\infty.\ \rhd$

ПРИМЕР 2.5. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x}{2x^2-x+7}.$$

$\lhd \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x}{2x^2-x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{3}{2}.\ \rhd$

Так же как и для последовательностей устанавливается, что если $P_m(x), P_k(x)$ — многочлены степеней m и k соответственно, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{P_k(x)}=\begin{cases}0, & \text{при } m<k;\\ a, & \text{при } m=k;\\ \infty, & \text{при } m>k,\end{cases}$$

где a — отношение коэффициентов при старших степенях многочленов (см. примеры 1.9–1.11 и формулу (1.3)).

ПРИМЕР 2.6. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

$\lhd$ Вынося x^2 из–под корня и учитывая, что $\sqrt{x^2}=|x|=x$ при $x>0$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.\ \rhd$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{(x+1)^3}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+x^2}{x^3+2x+1}$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2-(x-3)^2}{x}$.

Ответы:

1. ∞; 2. 0; 3. 4.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x<x_0$. Число a называется *пределом* функции $f(x)$ *в* $-\infty$, т. е.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=a,$$

если $\forall\varepsilon>0\quad\exists N>0\colon\quad\forall x<-N\quad|f(x)-a|<\varepsilon.$

Приемы вычисления $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ аналогичны приемам вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Но если функция задается выражением, содержащим радикалы четных степеней, нужно проявлять осторожность.

ПРИМЕР 2.7. Найти

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

$\lhd$ Учитывая, что $|x|=-x$ при $x<0$, получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-1/x^2}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{x\sqrt{1-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1. \quad \rhd$$

Замечание. Из примеров 2.6, 2.7 следует, что

$$\sqrt{x^2-1}\sim x,\quad \text{при } x\to+\infty \quad \text{и}$$
$$\sqrt{x^2-1}\sim -x,\quad \text{при } x\to-\infty.$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+2x^2+3}}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+2x^2+3}}{x}$.

Ответы:

1. 1;
2. -1;
3. 2;
4. -2.

Пусть функция $f(x)$ определена при $|x|>x_0>0$, т. е. при $x>x_0$ и при $x<-x_0$.

Число a называется *пределом* функции $f(x)$ *в* ∞ и пишут

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a,$$

если $\forall\varepsilon>0\quad \exists N>0:\quad \forall|x|>N\quad |f(x)-a|<\varepsilon$.

Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=a, \quad \text{т. е.}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a\Longleftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ или хотя бы один из них не существует, то и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ не существует ($\overline{\exists}$).

Из результатов, полученных в примерах 2.6—2.7, следует, что

$$\nexists \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

ПРИМЕР 2.8. Найти

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}\right).$$

◁ Умножим и разделим рассматриваемое выражение на сопряженное и заменим знаменатель на эквивалентную величину.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-2)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2|x|} = 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 2.9. Найти

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$$

◁ Рассмотрим отдельно пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. При вычислении предела при $x \to +\infty$ будем действовать также как в предыдущем примере:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$$

Так как при $x \to -\infty$ функции $\sqrt{x^2+1}$ и $(-x)$ являются бесконечно большими и обе положительны, то разность $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ будет бесконечно большой при $x \to -\infty$ и

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = -\infty.$$

Итак,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{1}{2} \neq \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = -\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \quad \text{не существует.} \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 2.10. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$$

$\triangleleft$ Для вычисления этого предела используем прием умножения и деления на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x^{4/3}}=0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x(x-1)}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{2+x^3}\right)$.

Ответы:

1. 0;
2. не существует;
3. 1.

Занятие 3

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

§ 3.1. НАКЛОННЫЕ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ АСИМПТОТЫ

Пределы функции в бесконечности используют при исследовании функций, определенных на бесконечных интервалах $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ или $(-\infty, +\infty)$. Для получения наглядного представления о поведении таких функций за пределами чертежа можно использовать асимптоты.

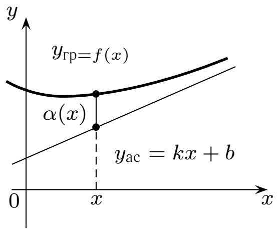


Рис. 3.1

Прямая

$$y = kx + b \tag{3.1}$$

называется *асимптотой* (рис. 3.1) графика функции $y = f(x)$, если

$$\alpha(x) = f(x) - (kx + b) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty, \tag{3.2}$$

т. е., если

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

Если асимптота (3.1) существует, то

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]. \tag{3.3}$$

Если хотя бы один из пределов (3.1) не существует, либо равен ∞, то график функции $y = f(x)$ не имеет асимптоты (3.1).

При $k \neq 0$ асимптота называется *наклонной*, при $k = 0$ — *горизонтальной*.

Если $\alpha(x) \to 0$ только при $x \to +\infty$ (или только при $x \to \to -\infty$), то асимптота называется *правой* (или *левой*). При выполнении условия (3.2) прямая (3.1) является *двусторонней* асимптотой (и правой, и левой).

ПРИМЕР 3.1. Найти асимптоту и построить эскиз графика функции

$$y(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

$\triangleleft$ Найдем асимптоту графика функции:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Так как оба предела существуют и конечны, то асимптота существует и ее уравнение $y = x$. Для уточнения взаимного расположения графика функции и асимптоты определим знак разности $y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}}$, где $y_{\text{гр}} = y(x)$, $y_{\text{ас}} = x$.

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^3}{x^2+1} - x = -\frac{x}{x^2+1}.$$

При $x > 0$ $y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} < 0$ или $y_{\text{гр}} < y_{\text{ас}}$, т. е. график функции расположен под асимптотой.

При $x < 0$ $y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} > 0$ и, значит, график функции расположен над асимптотой. Заметим, что при малых $|x|$ для построения эскиза графика функцию $y(x)$ можно приближенно считать равной x^3 (рис. 3.2). $\triangleright$

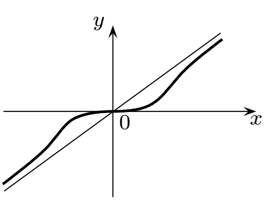
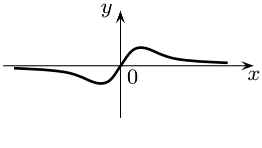


Рис. 3.2

ПРИМЕР (для самостоятельного решения). Найти асимптоту и построить эскиз графика функции $y(x) = = \frac{x}{x^2+1}$.

Ответ. $y = 0$ — горизонтальная асимптота:



§ 3.2. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, может быть, самой точки x_0;

$\delta(x_0)$ — δ-окрестность точки x_0, т. е. интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;

$\dot{\delta}(x_0)$ — проколотая (или пунктированная) δ-окрестность точки x_0, т. е. интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ без точки $x = x_0$.

Если

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad |f(x)| > M,$$

то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$.

В этом случае $\overline{\exists} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но принято говорить, что функция $f(x)$ имеет *бесконечный предел* в точке x_0. Соответствующая запись имеет вид:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Справедлива теорема.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$,а $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\alpha(x) \neq 0\ \forall x \in \dot{\delta}(x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty.$$

По этой теореме

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \left(\frac{a}{0}\right) = \infty.$$

Запись $(a/0)$ не означает, что a делится на 0 (операция деления на нуль, как известно, не имеет смысла), а выражает выполнение условий теоремы.

ПРИМЕР 3.2. Найти

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}.$$

$\lhd$ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty$. $\rhd$

ПРИМЕР 3.3. Найти

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{3x^3 - 5x^2 + x + 1}.$$

◁ Сформулированная выше теорема не применима, так как пределы числителя и знаменателя равны нулю $(0/0)$. Не применима и теорема о пределе частного, так как предел знаменателя равен нулю. Для раскрытия неопределенности выделим множители, стремящиеся к 0 при $x \to 1$ и сократим их:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x^3-5x^2+x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(3x+1)(x-1)}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty. \quad ▷$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельной работы).

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{-3x}{x+x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^4-8x^2+16}$.

Ответы:

1. ∞;
2. ∞.

Среди бесконечно больших функций выделяют положительные и отрицательные.

Если

$$\forall M>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in\dot{\delta}(x_0) \quad f(x)>M,$$

то функцию $f(x)$ называют *положительной бесконечно большой* при $x\to x_0$ и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$$

Если

$$\forall M>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in\dot{\delta}(x_0) \quad f(x)<-M,$$

то функцию $f(x)$ называют *отрицательной бесконечно большой* при $x\to x_0$, и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

ПРИМЕР 3.4. Найти

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)^2}.$$

◁ Здесь

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)^2}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty,$$

т. е. $\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ — бесконечно большая при $x \to 2$. Покажем, что она положительная. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1) = 3$, то вблизи точки $x = 2$ числитель $x^2 - 1 > 0$, а значит и $\frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$. Но если $|f(x)| > M$ и $f(x) > 0$, то $f(x) > M$. Поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \left(\frac{3}{+0}\right) = +\infty. \quad \triangleright$$

Символами $+0$ или -0 условимся выражать положительный или отрицательный знаменатель вблизи точки, в которой вычисляется предел (является положительной или отрицательной бесконечно малой).

ПРИМЕР 3.5. Найти

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{(x-2)^2}.$$

$\triangleleft$ Здесь вблизи точки $x = 2$ числитель $x^2 - 9 < 0$ и дробь $\frac{x^2-9}{(x-2)^2} < 0$. Но если $|f(x)| > M$ и $f(x) < 0$, то $f(x) < -M$, следовательно, бесконечно большая является отрицательной. В дальнейшем подобные обоснования будем выражать краткой записью вида

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{(x-2)^2} = \left(\frac{-5}{+0}\right) = -\infty. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 3.6. Найти

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+1}{(x+3)^4 x}.$$

$\triangleleft \lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+4x+1}{(x+3)^4 x} = \left(\frac{-2}{-0}\right) = +\infty.\ \triangleright$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3x}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x^2}{(x-1)^2(1-2x)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2-x^5}$.
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2+x}{2x(x+1)^4}$.

Ответы:

1. $+\infty$;
2. $+\infty$;
3. $-\infty$;
4. $-\infty$.

Занятие 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 4.1. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0;

$\varepsilon(a)$ — ε-окрестность точки a, т. е. интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Число a называется *пределом* функции $f(x)$ *в точке* x_0 и пишется $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall x \in \dot{\delta}(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(a).$$

Если число ε мало, то условие $f(x) \in \varepsilon(a)$ означает близость значений функции $f(x)$ к числу a.

Из сформулированного определения предела следует, что значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к a для всех значений аргумента $x \neq x_0$, но достаточно близких к x_0.

ПРИМЕР 4.1. Имеют ли предел в точке x_0 функции, графики которых изображены на рис. 4.1 *а*, *б*, *в*, *г*, и если имеют, то чему он равен?

$\lhd$ а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$; г) $\bar{\exists} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Значение $f(x_0)$ не влияет на величину $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (см. рис. 4.1 *б*), так как близость $f(x)$ к пределу требуется только в точках *проколотой* δ-окрестности точки x_0; значение $f(x_0)$ может быть даже не определено (рис. 4.1 *в*). В случае (рис. 4.1 *г*) $f(x_0)$ не является пределом $f(x)$ в точке x_0, так как значение $f(x)$ слева от точки x_0 не является близким к $f(x_0)$ как бы мала ни была $\dot{\delta}(x_0)$. Очевидно, в этом случае не является пределом и никакое другое число. $\rhd$

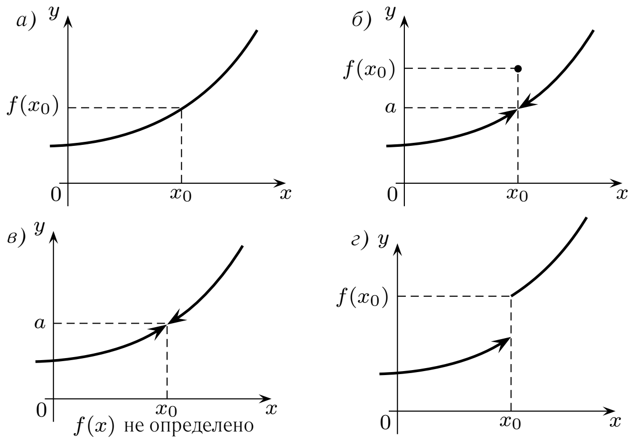


Рис. 4.1

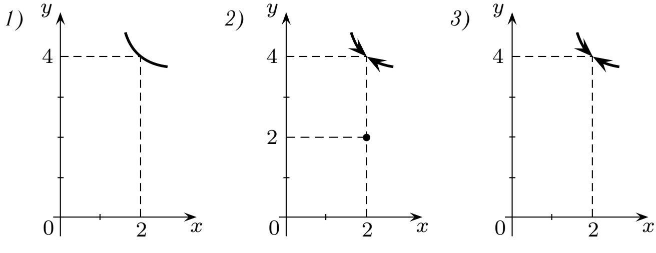
Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В примере 4.1 функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 в случае *а* и не является непрерывной (разрывна) в точке x_0 в случаях 4.1 *б*, *в*, *г*. Величина $\lim_{x \to x_0} f(x)$ характеризует поведение функции вблизи точки x_0.

ПРИМЕР (для самостоятельного решения).

Построить в малой окрестности точки $x_0 = 2$ эскиз графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ и 1) $f(2) = 4$; 2) $f(2) = 2$; 3) $f(2)$ не определено.



Ответы: Отметим, что в каждом из случаев 1), 2), 3) решение не единственно. Здесь приведено по одному из возможных вариантов.

§ 4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

т. е. предел можно вычислять простой подстановкой значения аргумента $x = x_0$ в выражение, задающее функцию.

Все элементарные функции непрерывны в каждой внутренней точке своей области определения, т. е. в точке, некоторая окрестность которой также принадлежит области определения.

Если функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 (например, если она не определена в этой точке), то строится функция $g(x)$, непрерывная в точке x_0 и такая, что $g(x) = f(x)$ всюду, кроме точки x_0. Очевидно,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

ПРИМЕР 4.2. Найти

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3}{x^2-x-1}.$$

$\lhd$ Так как функция $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-x-1}$ — элементарная и в точке $x = 1$ определена, следовательно, непрерывна в этой точке, и предел равен значению $f(1)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3}{x^2-x-1} = \frac{1-3}{1-1-1} = 2. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 4.3. Найти

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x}.$$

$\lhd$ Функция $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^3-x}$ не определена в точке $x = -1$, поэтому подстановку $x = -1$ делать нельзя, так как числитель и знаменатель обращаются в 0. Выделим множители $x+1$, стремящиеся к 0, и сократим их:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x(x-1)} =$$
$$= \frac{-1-3}{-1(-1-1)} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Обратите внимание, что после сокращения получается функция, отличающаяся от исходной только в точке $x = -1$, значение в которой на величину предела не влияет. $\triangleright$

ПРИМЕР 4.4. Найти

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

$\triangleleft$ Рассматриваемый предел является разностью двух бесконечно больших функций (неопределенность $\infty-\infty$), поэтому теорема о пределе разности двух функций не применима. Для раскрытия неопределенности приведем рассматриваемое выражение к общему знаменателю и, как и в предыдущем примере, выделим множители $x-1$, стремящиеся к 0, и сократим их:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(1+x+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}-\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{1+2}{1+1+1}=-1. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 4.5. Найти

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}.$$

$\triangleleft$ Числитель и знаменатель дроби при $x = 4$ обращаются в нуль (неопределенность $0/0$). Для выделения множителя $x-4$ в числителе используем умножение на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 4.6. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{x}.$$

$$\triangleleft \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+8-8}{x\left(\left(\sqrt[3]{x^3+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x^3+8}+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+8}\right)^2+2\sqrt[3]{x^3+8}+4}=0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 4.7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}.$$

$$\triangleleft \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-(1-x^2)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{1-x^2}+\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{1-x^2}+\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Найти:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+2x-6}{x^3+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.
3. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{5x^2-51x+10}{x^2-13x+30}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{2\sqrt[3]{x^2}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x}{2x^2-x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Ответы:

1. -6;
2. 7;
3. $\frac{2}{3}$;
4. $-\frac{1}{16}$;
5. 0.

§ 4.3. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Введем обозначения:

$\delta_+(x_0)$ — интервал $(x_0, x_0+\delta)$, правая полуокрестность точки x_0;

$\delta_-(x_0)$ — интервал $(x_0-\delta, x_0)$, левая полуокрестность точки x_0.

Если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon\ \forall x\in\delta_+(x_0)\ f(x)\in\varepsilon(a)$, то число a называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 *справа,* и пишется:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a \quad \text{или} \quad f(x_0+0)=a.$$

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in \delta_-(x_0) \quad f(x) \in \varepsilon(a)$, то число a называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 *слева,* и пишется:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x_0 - 0) = a.$$

Пределы функции в точке справа и слева называют *односторонними*. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ при сопоставлении его с односторонними пределами называют *двусторонним*.

Двусторонний предел существует и равен a,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

тогда и только тогда, когда соответствующие односторонние пределы существуют и равны тоже a:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

ПРИМЕР 4.8. Найти пределы $f(x)$ в точке $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{при } x < 0, \\ a - x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$\lhd$ Так как при $x > 0$ функция $f(x)$ совпадает с $(a - x)$, то предел $f(x)$ справа совпадает с двусторонним пределом $(a - x)$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (a - x) = a.$$

По аналогичным причинам предел $f(x)$ слева

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 4) = 4.$$

Если $a = 4$, то существует и двусторонний предел

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4.$$

Если $a \neq 4$, то двусторонний предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует, так как

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = 4 \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a.$$

Обратите внимание, что значение $f(0)$ не определено, а если его определить каким–либо образом, то величины односторонних пределов и условие существования двустороннего предела не изменятся. $\rhd$

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

используя односторонние пределы, можно представить в виде

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Если односторонние пределы равны

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

но не равны $f(x_0)$, или $f(x_0)$ не определено, то точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$.

Если

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

то точка x_0 называется точкой *разрыва с конечным скачком функции* $f(x)$.

Точки устранимого разрыва и разрыва с конечным скачком функции называются точками *разрыва I-го рода.*

Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть самой точки x_0, но хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует либо бесконечен, то точка x_0 называется точкой *разрыва II-го рода* функции $f(x)$.

ПРИМЕР 4.9. Исследовать на непрерывность:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 4 - x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$\lhd$ Так как функции $x^2 + 4$ и $4 - x$ являются непрерывными, то возможной точкой разрыва будет точка «склейки» $x = 0$. Исследуем поведение функции $f(x)$ вблизи этой точки:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0}(4 - x) = 4;$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 4) = 4;$$

$$f(0) = 4.$$

Итак, $f(0+0) = f(0-0) = f(0) = 4$. Следовательно, $f(x)$ непрерывная функция. $\rhd$

ПРИМЕР 4.10. Исследовать на непрерывность в точке 0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{при } x < 0, \\ 4 - x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$\lhd$ Как и в предыдущем примере $f(0+0) = f(0-0) = 4$, но так как значение $f(0)$ не определено, следовательно, функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв (разрыв I-го рода). $\rhd$

ПРИМЕР 4.11. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{при } x < 0, \\ 3 - x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$\lhd$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0}(3 - x) = 3, \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 4) = 4,$$

$$f(0+0) \neq f(0-0).$$

Значит, $x = 0$ — точка разрыва с конечным скачком функции $f(x)$. $\rhd$

ПРИМЕР 4.12. Исследовать характер разрыва функции $f(x) = 2^{1/x}$ в точке $x = 0$.

$\lhd$ Сделав замену $y = \frac{1}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{1/x} = \lim_{y\to +\infty} 2^y = \infty;$$

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} 2^y = 0.$$

Так как один из пределов, а именно $f(0+0) = \infty$, то точка $x = 0$ — точка разрыва II-го рода. $\rhd$

ПРИМЕР 4.13. Исследовать характер разрыва функции

$$f(x) = \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$$

в точке $x = 0$. $\lhd$ Найдем $f(0-0)$ и $f(0+0)$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2^{1/x}(1 - 2^{-1/x})}{2^{1/x}(1 + 2^{-1/x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1 - 2^{-1/x}}{1 + 2^{-1/x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Здесь использовали тот факт, что

$$\lim_{x\to 0+0} 2^{-1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{2^{1/x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Итак,

$$f(0-0) = -1 \neq f(0+0) = 1.$$

Следовательно, точка $x = 0$ — точка разрыва с конечным скачком (точка разрыва I-го рода). $\triangleright$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения). Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$:

1.
$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{при } x \leqslant 0, \\ \cos x - 1 & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} -3\sin x & \text{при } x < 0, \\ \cos x - 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2\cos x - 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

4.
$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}.$$

Ответы:

1. Функция непрерывна.
2. Устранимая особая точка.
3. Разрыв с конечным скачком.
4. Разрыв с конечным скачком.

Занятие 5

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

§ 5.1. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ АСИМПТОТЫ

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$f(x_0 \pm 0) = +\infty \quad \text{или} \quad -\infty.$$

Вертикальные асимптоты дают наглядное представление о поведении графика функции за пределами чертежа для значений аргумента вблизи точек разрыва функции II-го рода.

§ 5.2. НАХОЖДЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ АСИМПТОТ

ПРИМЕР 5.1. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}.$$

◁ Функция $f(x)$ определена всюду, кроме точки $x = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки:

$$f(0-0) = \left(\frac{-4}{+0}\right) = -\infty,$$

$$f(0+0) = \left(\frac{-4}{+0}\right) = -\infty.$$

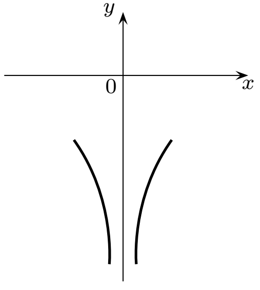


Рис. 5.1

Таким образом, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. Характер приближения графика к асимптоте показан на рис. 5.1.

Выясним, есть ли наклонная или горизонтальная асимптота у этого графика:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x^2} = 0.$$

Оба предела существуют и конечны, значит, асимптота есть:

$$y = x$$

— уравнение наклонной асимптоты.

Составим разность

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^3-4}{x^2} - x = -\frac{4}{x^2}.$$

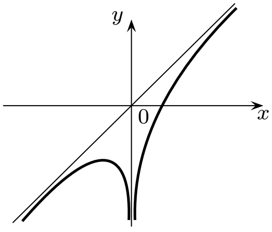


Рис. 5.2

Так как $y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} < 0$ для $\forall x \neq \neq 0$, то график функции лежит ниже наклонной асимптоты.

Теперь можно построить эскиз графика функции (рис. 5.2). $\triangleright$

ПРИМЕР 5.2. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}.$$

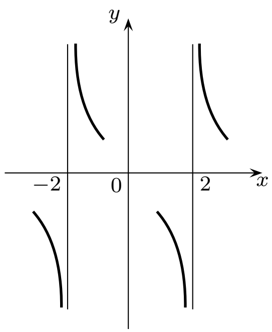


Рис. 5.3

$\triangleleft$ Точки разрыва функции $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Исследуем поведение функции вблизи этих точек:

$$f(-2-0) = \left(\frac{-8}{+0}\right) = -\infty, \quad f(-2+0) = \left(\frac{-8}{-0}\right) = +\infty;$$

$$f(2-0) = \left(\frac{8}{-0}\right) = -\infty, \quad f(2+0) = \left(\frac{8}{+0}\right) = +\infty.$$

Отсюда следует, что у графика функции $f(x)$ есть две вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 2$.

Характер приближения графика к этим асимптотам показан на рис. 5.3.

Выясним, есть ли наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0.$$

Оба предела существуют и конечны, следовательно, асимптота существует (наклонная) и ее уравнение

$$y = x.$$

Составив разность $y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}}$, получаем

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^3}{x^2-4} - x = \frac{4x}{x^2-4}.$$

Это выражение больше нуля при $x > 2$ и меньше нуля при $x < -2$, а это означает, что график функции стремится к асимптоте сверху при $x \to +\infty$ и снизу при $x \to -\infty$. Учитывая все сказанное и отмечая, что $f(0) = 0$, нарисуем эскиз графика (рис. 5.4). ▷

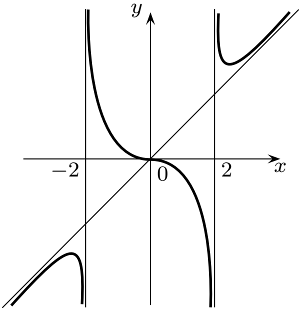


Рис. 5.4

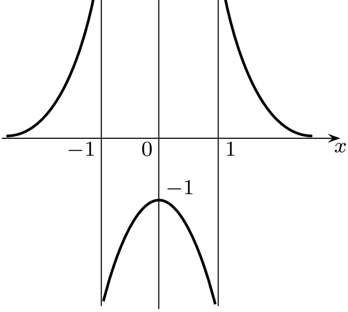
ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Найти асимптоты и построить эскиз графиков функций

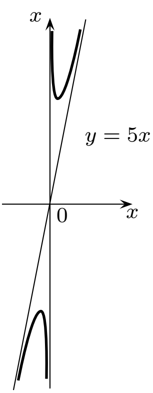
1. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$;
2. $f(x) = \frac{5x^4+1}{x^3}$.

Ответы:

1)



2)



Занятие 6

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

§ 6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если
$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$, то их сумма, разность и произведение
$$\alpha(x) \pm \beta(x), \quad \alpha(x) \cdot \beta(x)$$
также являются бесконечно малыми при $x \to x_0$.

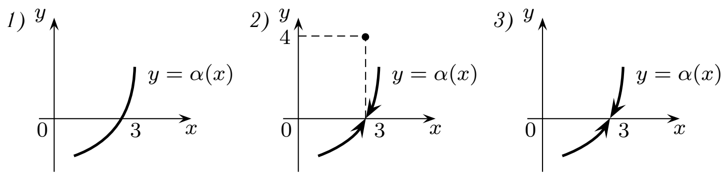
Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности точки* x_0*,* если $\exists M > 0$ и $\delta > 0$: $\forall x \in \dot{\delta}(x_0)$ $|f(x)| \leqslant M$.

Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, а функция $f(x)$ — ограниченная в окрестности точки x_0, то произведение
$$\alpha(x) \cdot f(x)$$
является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$.

ПРИМЕР 6.1. Доказать, что функция
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{при } x \neq 1, \\ 10^9 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$
является бесконечно малой при $x \to 1$. $\lhd$ Действительно,
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} (x-1)^2 = 0.$$
Это и означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to 1$, несмотря на то, что значение $f(1) = 10^9$ (немаленькое). $\rhd$

ПРИМЕР 6.2. Нарисовать эскиз графика функции $y = \alpha(x)$ — бесконечно малой (возрастающей) при $x \to 3$ в случае, когда 1) $\alpha(3) = 0$; 2) $\alpha(3) = 4$; 3) $\alpha(3)$ не определено.

▷ Эскизы графиков представлены на рисунках.



ПРИМЕР 6.3. Найти

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}.$$

▷ Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует и нельзя применить теорему о пределе произведения. Но так как $\sin\frac{1}{x}$ функция ограниченная ($|\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1 \ \forall x \neq 0$), а функция x — бесконечно малая при $x \to 0$, то произведение бесконечно малой функции на ограниченную $x\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой функцией при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР (для самостоятельного решения).
Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
Ответ. 0.

§ 6.2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \infty,$$

то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*. В частности, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то такие бесконечно малые называют *эквивалентными* при $x\to x_0$ и пишут

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\quad \text{при } x\to x_0\,.$$

При $\alpha\to 0$

$\sin\alpha\sim\alpha$;	$a^\alpha-1\sim\alpha\ln a$;	$(1+\alpha)^m-1\sim m\alpha$;
$\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$;	$e^\alpha-1\sim\alpha$;	$\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\alpha/n$;
$\arcsin\alpha\sim\alpha$;	$\log_a(1+\alpha)\sim\alpha/\ln a$;	$\sqrt{1+\alpha}-1\sim\alpha/2$;
$\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$;	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$;	$1-\cos\alpha\sim\alpha^2/2$.

§ 6.3. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Эквивалентные бесконечно малые функции используются при вычислении пределов отношений двух бесконечно малых (для раскрытия неопределенностей вида $(0/0)$) на основании теоремы: предел отношения двух бесконечно малых при $x\to x_0$ не изменится, если каждую (или только одну из них) заменить на эквивалентную бесконечно малую при $x\to x_0$.

ПРИМЕР 6.4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}.$$

$\lhd$ $2x\to 0$ при $x\to 0$ и, значит, $\sin 2x\sim 2x$. Заменяя знаменатель на эквивалентную бесконечно малую, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.\quad\rhd$$

ПРИМЕР 6.5. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}3x}$$

$\lhd$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.\quad\rhd$

ПРИМЕР 6.6. Найти

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

◁ Заметим, что мы не можем сразу воспользоваться таблицей эквивалентности, так как $3x \not\to 0$ и $2x \not\to 0$ при $x\to\pi$, поэтому преобразуем дробь, сделав замену $y = x-\pi$; так как $x\to\pi$, то $y\to 0$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix} y = x-\pi \\ x = y+\pi \\ y\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(3y+3\pi)}{\sin(2y+2\pi)} = \lim_{y\to 0}\frac{-\sin 3y}{\sin 2y} = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{3y}{2y}\right) = -\frac{3}{2}. \quad ▷$$

ПРИМЕР 6.7. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}.$$

$$◁ \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix} y = x-1 \\ x = y+1 \\ y\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{1-(y+1)^2}{\sin \pi(y+1)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-y^2-2y}{\sin(\pi y+\pi)} = \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{\sin \pi y} = \lim_{y\to 0}\frac{y(y+2)}{\pi y} = \frac{2}{\pi}. \quad ▷$$

ПРИМЕР 6.8. Найти

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}\pi x.$$

◁ Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$ $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{ctg}\pi x = \infty$, то имеем неопределенность $0\cdot\infty$, которую можно преобразовать в неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}\pi x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\operatorname{tg}\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} y = x-2 \\ x = y+2 \\ y\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\pi(y+2)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}(\pi y+2\pi)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\pi y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\pi y} = \frac{1}{\pi}. \quad ▷$$

ПРИМЕР 6.9. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}.$$

$$\lhd \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1+(x/3)^2}-1\right)}{\sqrt{1+x^2}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot(1/2)(x/3)^2}{(1/2)x^2}=\frac{1}{3}. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 6.10. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x^2}.$$

$\lhd \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$ $\rhd$

ПРИМЕР 6.11. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(3+x)-\log_2 3}{x}.$$

$$\lhd \lim_{x\to 0}\frac{\log_2(3+x)-\log_2 3}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x/3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x/3\ln 2}{x}=\frac{1}{3\ln 2}. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 6.12. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\lhd \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 6.13. Найти

$$\lim_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{e^{\pi}-e^{x}}.$$

$$\lhd \lim_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{e^{\pi}-e^{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix} y=x-\pi \\ x=y+\pi \\ y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{\pi}-e^{y+\pi}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-e^{\pi}(e^{y}-1)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-e^{\pi}\cdot y}=-e^{-\pi}. \quad \rhd$$

ПРИМЕР 6.14. Найти
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}.$$
$\lhd$ Так как $\alpha(x)=1-\cos x$ — бесконечно малая функция при $x\to 0$, то
$$1-\cos(1-\cos x)=1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}=$$
$$=\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{\left(x^2/2\right)^2}{2}=\frac{x^4}{8}.$$
Следовательно,
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/8}{x^4}=\frac{1}{8}.\quad\rhd$$
ПРИМЕР 6.15. Найти
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$$
$$\lhd\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{x^2}=$$
$$=|(\cos x-1)\to 0\quad\text{при } x\to 0|=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(x^2/2)}{x^2}=-\frac{1}{2}.\quad\rhd$$
Справедливо утверждение: если $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$ и $\beta(x)\sim\sim\beta'(x)$ при $x\to x_0$, то
$$\alpha(x)\beta(x)\sim\alpha'(x)\beta'(x)\qquad\text{при}\quad x\to x_0.$$
В силу этого утверждения при вычислении предела любой бесконечно малый сомножитель можно заменять на эквивалентный.

ПРИМЕР 6.16. Найти
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos^2 2x}.$$
$$\lhd\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}3x}{1-\cos^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{((2x)^2/2)\cdot(1+\cos 2x)}=\frac{3}{2(1+\cos 0)}=\frac{3}{4}.\quad\rhd$$

Обратите внимание, что отдельные бесконечно малые слагаемые менять на эквивалентные при вычислении предела отношения в общем случае нельзя. Такая замена может привести к неправильному результату.

ПРИМЕР 6.17. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$$

$\lhd$ Если использовать эквивалентности $\operatorname{tg}x\sim x$, $\sin x\sim x$ при $x\ \to\ 0$, то получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

тогда как на самом деле

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x^2/2)}{x^3}=\frac{1}{2}.\ \rhd$$

В подобных случаях для раскрытия неопределенности можно использовать теоремы о пределах.

ПРИМЕР 6.18. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{arctg}3x}{2x+\operatorname{arctg}3x}.$$

$$\lhd\ \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{arctg}3x}{2x+\operatorname{arctg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-(\operatorname{arctg}3x/x)}{2+(\operatorname{arctg}3x/x)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg}3x/x)}{2+\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg}3x/x)}=\frac{2-\lim\limits_{x\to 0}(3x/x)}{2+\lim\limits_{x\to 0}(3x/x)}=\frac{2-3}{2+3}=-\frac{1}{5}.\quad\rhd$$

Отдельные бесконечно малые слагаемые можно менять на эквивалентные при выполнении условий следующего утверждения:

если $\alpha(x)\sim C_1\gamma(x)$, $\beta(x)\sim C_2\gamma(x)$ при $x\to x_0$ и $C_1\gamma(x)\neq$ $\neq C_2\gamma(x)$

при $x\neq x_0$, $(\alpha(x)-\beta(x))\sim C_1\gamma(x)-C_2\gamma(x)$ при $x\to x_0$.

ПРИМЕР 6.19. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 2x}{x^2}.$$

$$\triangleleft \lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-1)+(1-\cos 2x)}{x^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}(\cos 5x-1)\sim-\frac{25x^2}{2}, (1-\cos 2x)\sim\frac{4x^2}{2}=2x^2 \quad \text{при } x\to 0\\ -\frac{25x^2}{2}\neq -2x^2 \quad \text{при } x\neq 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(25x^2/2)+2x^2}{x^2}=-\frac{25}{2}+2=-\frac{21}{2}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 6.20. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\sin x}.$$

$$\triangleleft \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{x\cdot\sin x}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}e^{x^2}-1\sim x^2, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \text{ при } x\to 0\\ x^2\neq\frac{x^2}{2} \text{ при } x\neq 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(x^2/2)}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}. \quad \triangleright$$

Применение эквивалентных бесконечно малых можно комбинировать и с другими приемами вычисления пределов.

ПРИМЕР 6.21. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}.$$

$\triangleleft$ Применяя технику умножения на сопряженное выражение, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin 3x(1+\sqrt{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{3x(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6\cdot 2}=0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 6.22. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right).$$

$$\triangleleft \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x}=0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$.
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-x^2/\pi^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.
6. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\sin(x/2)}{\cos(x/2)(\cos(x/4)-\sin(x/4))}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.
8. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$.

Ответы:

1. k.
2. $\frac{1}{2}$.
3. $\frac{3}{4}$.
4. $\frac{\pi}{2}$.
5. 1.
6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
7. 3.
8. $\frac{1}{e}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Занятие 7

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

§ 7.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента функции при смещении из точки x_0 в точку x,

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — соответствующее приращение функции.

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x в точке x_0 называется величина

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\text{или коротко } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ПРИМЕР 7.1. Найти $f'(0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$\triangleleft \quad \Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) =$$
$$= f(\Delta x) - 0 = \Delta x^2 \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta\, x \neq 0.$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \cdot \sin(1/\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Так как Δx — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, а $\sin \frac{1}{\Delta x}$ — ограниченная функция в окрестности точки $\Delta x = 0$, то произведение $\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}$ является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$ и поэтому $f'(0) = 0$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).
Найти $f'(0)$, если
1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+2x^3)}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Ответы: 1. $f'(0) = 2$; 2. $f'(0)$ не существует.

§ 7.2. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Отыскание производной функции называется *дифференцированием*. При дифференцировании функции используется таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$,	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(a^x)' = a^x \ln a$,	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(e^x)' = e^x$,	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$,
$(\sin x)' = \cos x$,	$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$,
$(\cos x)' = -\sin x$,	$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$,
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$,
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	

и правила дифференцирования: если C — постоянная, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ — функции, имеющие производные, то

$(C)' = 0$	$(uv)' = u'v + uv'$,
$(Cu)' = Cu'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.
$(u \pm v)' = u' \pm v'$,	

ПРИМЕР 7.2. Продифференцировать.

1. $y = x^2$. $\lhd$ $y' = (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$. $\rhd$

2. $y = x^5$. $\lhd$ $y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$. $\rhd$

3. $y = x$. $\lhd$ $y' = (x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$. $\rhd$

4. $y = \sqrt{x}$. $\lhd$ $y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $\rhd$

5. $y = \frac{1}{x}$. $\lhd y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. $\rhd$

6. $y = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}$.

$$\lhd \quad y' = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)' + \left(\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{2}{x}\right)' - \left(\frac{6}{x^2}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}(x)' + \frac{1}{3}\left(x^3\right)' + 2\left(\frac{1}{x}\right)' - 6\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{x^2} -$$
$$- 6 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1}{2} + x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^3}. \quad \rhd$$

7. $y = (x^2 - x + 3)(x^3 + 2x^2 + 4)$.

$$\lhd \quad y' = \left((x^2 - x + 3) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4)\right)' =$$
$$= (x^2 - x + 3)' \cdot (x^3 + 2x^2 + 4) + (x^2 - x + 3) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4)' =$$
$$= \left((x^2)' - (x)' + (3)'\right) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4) +$$
$$+ (x^2 - x + 3) \cdot \left((x^3)' + 2(x^2)' + (4)'\right) =$$
$$= (2x - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4) + (x^2 - x + 3) \cdot (3x^2 + 4x) =$$
$$= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 20x - 4. \quad \rhd$$

Здесь использована формула для вычисления производной произведения двух сомножителей. Эту формулу можно обобщить, например, в случае произведения трех сомножителей:

$$(uvw)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Следует запомнить производные функций, рассмотренные в примере 7.2 (3,4,5):

$$x' = 1, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

ПРИМЕР 7.3. Продифференцировать

$$y = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3).$$

$$\triangleleft \quad y' = \big((x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)\big)' = (x^2+1)'(x^2+2)(x^2+3) + $$
$$+ (x^2+1)\cdot(x^2+2)'(x^2+3) + (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)' =$$
$$= 2x\cdot(x^2+2)(x^2+3) + (x^2+1)\cdot 2x\cdot(x^2+3) + (x^2+1)(x^2+2)\cdot 2x =$$
$$= 2x((x^2+2)(x^2+3) + (x^2+1)\cdot(x^2+3) + (x^2+1)(x^2+2)) =$$
$$= 2x(3x^4 + 12x^2 + 11). \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.4. Продифференцировать.

1. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

$$\triangleleft \quad y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}. \quad \triangleright$$

2. $y = \frac{\cos x}{x+\sin x}$.

$$\triangleleft \quad y' = \left(\frac{\cos x}{x+\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'(x+\sin x) - \cos x(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2} =$$
$$= \frac{-\sin x(x+\sin x) - \cos x(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2} = -\frac{x\sin x + \cos x + 1}{(x+\sin x)^2}. \quad \triangleright$$

3. $y = \frac{x^2\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$.

$$\triangleleft \quad y' = \left(\frac{x^2\cos x}{1-\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(x^2\cos x)'(1-\operatorname{tg} x) - x^2\cos x(1-\operatorname{tg} x)'}{(1-\operatorname{tg} x)^2} =$$
$$= \frac{((x^2)'\cos x + x^2(\cos x)')(1-\operatorname{tg} x) - x^2\cos x\cdot\big(-(1/\cos^2 x)\big)}{(1-\operatorname{tg} x)^2} =$$
$$= \frac{(2x\cos x - x^2\sin x)(1-\operatorname{tg} x) + (x^2/\cos x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2}. \quad \triangleright$$

4. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}$.

$$\triangleleft\, y' = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg} x)'\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} x\cdot(\operatorname{arcctg} x)'}{(\operatorname{arcctg} x)^2} =$$

$$= \frac{(1/(1+x^2)) \cdot \operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} x \cdot \big(-(1/(1+x^2))\big)}{(\operatorname{arcctg} x)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(\operatorname{arcctg} x)^2} = \frac{\pi}{2(1+x^2)(\operatorname{arcctg} x)^2}$$

(здесь использовано тождество $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$). $\rhd$

5. $y = x \cdot \cos x \cdot \arcsin x$.

$$\lhd\, y' = (x \cdot \cos x \cdot \arcsin x)' =$$

$$= \cos x \cdot \arcsin x - x \cdot \sin x \cdot \arcsin x + x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \rhd$$

6. $y = 2x^2 \lg x$.

$$\lhd y' = (2x^2 \lg x)' = 4x \cdot \lg x + \frac{2x^2}{x \ln 10} = 4x \cdot \lg x + \frac{2x}{\ln 10}. \rhd$$

7. $y = (x+2)\log_2 x$.

$\lhd \quad y' = \big((x+2)\log_2 x\big)' = \log_2 x + \frac{x+2}{x \cdot \ln 2}. \quad \rhd$

8. $y = \frac{4+\ln x}{4-\ln x}$.

$$\lhd\, y' = \left(\frac{4+\ln x}{4-\ln x}\right)' =$$

$$= \frac{(1/x)\cdot(4-\ln x) - (4+\ln x)\cdot(-1/x)}{(4-\ln x)^2} = \frac{8}{x(4-\ln x)^2}. \rhd$$

9. $y = (x^2-1)e^x$.

$$\lhd y' = \big((x^2-1)e^x\big)' = 2xe^x + (x^2-1)e^x = e^x(x^2+2x-1). \rhd$$

10. $y = 3^x$. $\lhd y' = (3^x)' = 3^x \cdot \ln 3. \rhd$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Продифференцировать функции:

1. $y = (x^3 - x + 7)(x^4 + x^2 - 2)$.
2. $y = (1+\sqrt{x})(1+2\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$.
3. $y = \frac{x+4}{x^2+1}$.
4. $y = \operatorname{tg} x + \arccos x$.
5. $y = \frac{x+1}{1+\sin x}$.
6. $y = \frac{2\arcsin x}{x}$.
7. $y = \frac{\ln x}{x-2}$.
8. $y = \frac{x^2+3}{2\log_2 2x+1}$.
9. $y = e^x \cdot \operatorname{tg} x$.
10. $y = 6^x$.
11. $y = \frac{x^3}{2^x}$.

Ответы:

1. $y' = 7x^6 + 28x^3 - 9x^2 + 14x + 2$.
2. $y' = \frac{3+11\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}}$.

3. $y' = \frac{-x^2-8x+1}{(x^2+1)^2}$.
4. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. $y' = \frac{1+\sin x-(x+1)\cos x}{(1+\sin x)^2}$.
6. $y' = \frac{2\left(x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
7. $y' = \frac{1-(2/x)-\ln x}{(x-2)^2}$.
8. $y' = \frac{2x(2\log_2 x+1)-(x^2+3)\cdot(2/(x\ln 2))}{(2\log_2 x+1)^2}$.
9. $y' = e^x\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.
10. $y' = 6^x \ln 6$.
11. $y' = \frac{x^2(3-x\ln 2)}{2^x}$.

§ 7.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Во многих случаях для приведения функции к табличному виду вводятся один или несколько промежуточных аргументов и применяется *правило дифференцирования сложной функции.*

Пусть функция $y = f(x)$ рассматривается как сложная функция $y = y(u(x))$, т. е. расчленяется на внутреннюю функцию $u = u(x)$ (промежуточный аргумент) и внешнюю функцию $y = y(u)$. Тогда, если функции $u(x)$ и $y(u)$ имеют производные (соответственно u'_x и y'_u,), то и функция $y = f(x) = y(u(x))$ имеет производную

$$y'_x = y'_u u'_x$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Приведем примеры применения правила дифференцирования сложной функции для отыскания производных функций, данных ниже.

ПРИМЕР 7.5. Продифференцировать

$$y = \sin x^3.$$

$\lhd$ Расчленим функцию на внешнюю $y = \sin u$ и внутреннюю $u = x^3$, т. е. введем промежуточный аргумент x^3. Дифференцируем внешнюю функцию

$$y'_u = \cos u = \cos x^3,$$

затем внутреннюю — $u'_x = 3x^2$ и, перемножая результаты, получим производную данной функции

$$y' = y'_x = \cos x^3 \cdot 3x^2. \qquad \rhd$$

ПРИМЕР 7.6. Продифференцировать

$$y = \cos\sqrt{x}.$$

$\triangleleft$ Расчленяем эту функцию на $y = \cos u$ и $u = \sqrt{x}$. Дифференцируя косинус

$$y'_u = -\sin u = -\sin\sqrt{x}$$

и его аргумент

$$u'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

получим

$$y' = y'_x = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.7. Продифференцировать

$$y = \operatorname{ctg}\frac{1}{x}.$$

$\triangleleft$ Здесь дифференцируя котангенс и умножая результат на производную его аргумента $\frac{1}{x}$, получим

$$y' = -\frac{1}{\sin^2(1/x)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sin^2(1/x)}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.8. Продифференцировать

$$y = e^{\sin x}.$$

$\triangleleft$ Эта функция расчленяется на показательную $y = e^u$ и синус $u = \sin x$

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x. \qquad \triangleright$$

В примерах 7.9—7.17 дифференцирование проводится бегло.

ПРИМЕР 7.9. Продифференцировать

$$y = e^{\sqrt{x}}.$$

$$\triangleleft y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.10. Продифференцировать

$$y = \arcsin e^x.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^x. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.11. Продифференцировать

$$y = \operatorname{arctg} \ln x.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.12. Продифференцировать

$$y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arcctg} x}} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.13. Продифференцировать

$$y = \ln \operatorname{ch} x.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x = \operatorname{th} x. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.14. Продифференцировать

$$y = \sqrt[3]{\operatorname{sh} x}.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 x}} \cdot \operatorname{ch} x. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.15. Продифференцировать

$$y = \operatorname{tg} x^2.$$

$$\triangleleft y' = \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.16. Продифференцировать

$$y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$\triangleleft$ Здесь внешняя функция $y = u^2$ — степенная, а внутренняя $u = \operatorname{tg} x$ — тангенс. Поэтому

$$y' = 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.17. Продифференцировать

$$y = \sin^4 x.$$

$$\triangleleft y' = 4\sin^3 x \cdot \cos x. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Продифференцировать функции:

1. $y = \ln \sin x$.
2. $y = \mathrm{sh}(\ln x)$.
3. $y = (\arccos x)^3$.
4. $y = \cos^3 x$.
5. $y = \ln^3 x$.
6. $y = \mathrm{sh}^2 x$.

Ответы:

1. $y' = \mathrm{ctg}\, x$.
2. $y' = \frac{\mathrm{ch}(\ln x)}{x}$.
3. $y' = -3(\arccos x)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $y' = -3\cos^2 x \sin x$.
5. $y' = \frac{3\ln^2 x}{x}$.
6. $y' = \mathrm{sh}\, 2x$.

ПРИМЕР 7.18. Продифференцировать

$$y = \sin^4 x^2.$$

◁ В предыдущих примерах расчленение функций на два звена приводило к функциям (внешней и внутренней), производные от которых являются табличными. Здесь при расчленении функции на два звена, например, $y = u^4$ и $u = \sin x^2$, получим

$$y' = 4\sin^3 x^2 \cdot (\sin x^2)'.$$

В нашей таблице производной $(\sin x^2)'$ нет. Поэтому функцию $u = \sin x^2$ в свою очередь будем рассматривать как сложную и расчленив ее на звенья $u = \sin v$, $v = x^2$, получим

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x.$$

Производная заданной функции

$$y' = 4\sin^3 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Заметим, что исходная функция здесь была расчленена фактически на три звена

$$y = u^4, u = \sin v, v = x^2,$$

и ее производная равна произведению производных всех трех звеньев

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x. \quad ▷$$

ПРИМЕР 7.19. Продифференцировать

$$y = \cos^5 \sqrt{x}.$$

◁ Для сведения к табличным производным функция расчленяется также на три звена:

$$y = u^5, u = \cos v, v = \sqrt{x}$$

и производная

$$y' = 5\cos^4\sqrt{x}\cdot(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad \triangleright$$

Расчленение функции на звенья можно интерпретировать как выделение элементарных действий, которые выполняются при вычислении значения функции по заданному аргументу. Так, в рассмотренном примере для вычисления y сначала нужно найти корень $\sqrt{x}$, затем косинус $\cos\sqrt{x}$ и, наконец, степень $(\cos\sqrt{x})^5$. Дифференцирование обычно производится в обратном порядке: $5\cos^4\sqrt{x}$ — производная степени, $(-\sin\sqrt{x})$ — производная косинуса, $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ — производная корня.

ПРИМЕР 7.20. Продифференцировать

$$y = \operatorname{ctg}\sqrt{\ln x}.$$

$\triangleleft$ При вычислении y находят последовательно логарифм, корень, котангенс. Дифференцируем в обратном порядке:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.21. Продифференцировать

$$y = e^{\sqrt{\sin x^5}}.$$

$\triangleleft$ Для сведения к табличным производным потребуется расчленение данной функции на четыре звена:

$$y = e^u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \sin w, \quad w = x^5,$$

т. е. в этом случае производная будет равна произведению производных всех четырех звеньев:

$$y' = e^{\sqrt{\sin x^5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x^5}}\cdot\cos x^5\cdot 5x^4. \qquad \triangleright$$

Правило обобщается на случай расчленения дифференцируемой функции на любое число звеньев.

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Продифференцировать функции:

1. $y = \sin^2 5x$.
2. $y = \sqrt{\cos\frac{x}{2}}$.
3. $y = \log_2[\log_3(\log_4 x)]$.

Ответы:
1. $y' = 5\sin 10x$. 2. $y' = -\frac{\sin(x/2)}{4\sqrt{\cos(x/2)}}$.
3. $y' = \frac{1}{\log_3(\log_4 x)\cdot\log_4 x\cdot x\ln 2\ln 3\ln 4}$.

При отыскании производных в более сложных случаях правило дифференцирования сложной функции комбинируется с другими правилами дифференцирования.

ПРИМЕР 7.22. Продифференцировать

$$y = \sin(x^5 + x^3 + 1).$$

$\triangleleft$ По правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = \cos(x^5 + x^3 + 1)\cdot(x^5 + x^3 + 1)'.$$

Применяя далее правила дифференцирования суммы и постоянной, получим

$$y' = \cos(x^5 + x^3 + 1)\cdot(5x^4 + 3x^2). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.23. Продифференцировать

$$y = \cos\frac{x^2}{x^4+1}.$$

$\triangleleft$ Комбинируя здесь правила дифференцирования сложной функции, дроби, суммы и постоянной, получим

$$y' = -\sin\frac{x^2}{x^4+1}\cdot\frac{2x(x^4+1) - x^2\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \\ = \frac{2x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}\sin\frac{x^2}{x^4+1}. \qquad \triangleright$$

Аналогично комбинируются правила дифференцирования в примерах 7.24–7.28.

ПРИМЕР 7.24. Продифференцировать

$$y = (x^3+1)^7.$$

$\triangleleft y' = 7(x^3+1)^6\cdot 3x^2.\triangleright$

ПРИМЕР 7.25. Продифференцировать

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

$\triangleleft y' = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2+4)^3}}\cdot 2x.\triangleright$

ПРИМЕР 7.26. Продифференцировать

$$y = \sin(3x + 7).$$

$\triangleleft y' = \cos(3x + 7) \cdot 3.\triangleright$

ПРИМЕР 7.27. Продифференцировать

$$y = \operatorname{arctg}(x^2 - \sqrt{1 + x^4}).$$

$\triangleleft$ По правилу дифференцирования сложной функции нужно продифференцировать разность, причем производная корня находится снова с помощью правила дифференцирования сложной функции.

$$y' = \frac{1}{1 + (x^2 - \sqrt{1 + x^4})^2} \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{1 + x^4}} \cdot 4x^3\right). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.28. Продифференцировать

$$y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg}^3 x}.$$

$\triangleleft$ Сначала применяется правило дифференцирования дроби, а при отыскании производных числителя и знаменателя — правило дифференцирования сложной функции.

$$y' = \frac{2\sin x \cdot \cos x \cdot (1 + \operatorname{tg}^3 x) - \sin^2 x \cdot 3\operatorname{tg}^2 x \cdot (1/\cos^2 x)}{(1 + \operatorname{tg}^3 x)^2}. \quad \triangleright$$

Иногда для упрощения отыскания производной бывает полезно преобразовать выражение, задающее функцию.

ПРИМЕР 7.29. Продифференцировать

$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}}.$$

$\triangleleft$ Здесь целесообразно использовать свойства логарифма и привести функцию к виду

$$y = \frac{1}{4}(\ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^2 - x + 1)).$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{4}\left(\frac{2x + 1}{x^2 + x - 1} - \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\right). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.30. Продифференцировать

$$y = \sqrt[3]{(x + \operatorname{th}^4 x)^2}.$$

◁ Здесь целесообразно использовать свойства степеней.

$$y = (x + \operatorname{th}^4 x)^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x + \operatorname{th}^4 x}} \cdot \left(1 + 4\operatorname{th}^3 x \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 7.31. Продифференцировать

$$y = \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2}.$$

◁ Здесь проще дифференцировать выражение

$$y = x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y' = 2x + \frac{2}{x^3}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).
Продифференцировать функции:

1. $y = (1 - 2x)^{10}$.
2. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^5$.
3. $y = \cos(2x + 1)$.
4. $y = \operatorname{tg}\frac{x-1}{3}$.
5. $y = \sin\sqrt[3]{1 + x^2}$.
6. $y = \log_2(x^3 + 2x + 1)$.
7. $y = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

Ответы:

1. $y' = -20(1 - 2x)^9$.
2. $y' = \frac{10(1+x)^4}{(1-x)^6}$.
3. $y' = -2\sin(2x + 1)$.
4. $y' = \frac{1}{3\cos^2((x-1)/3)}$.
5. $y' = \cos\sqrt[3]{1 + x^2} \times$ $\times \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.
6. $y' = \frac{3x^2+2}{(x^3+2x+1)\ln 2}$.
7. $y' = \frac{2}{\sqrt{3-(2x-1)^2}}$.

Занятие 8

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 8.1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная $f'(x_0)$ равна *угловому коэффициенту касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ (рис. 8.1).

Уравнение касательной можно представить в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (8.1)$$

где $y_0 = f(x_0)$.

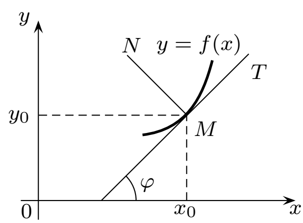


Рис. 8.1

Если $f'(x_0) \neq 0$, то угловой коэффициент нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, а *уравнение этой нормали,* представляется в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (8.2)$$

Если $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси Ox и ее уравнение

$$y = y_0, \qquad (8.3)$$

а нормаль параллельна оси Oy и ее уравнение

$$x = x_0. \qquad (8.4)$$

ПРИМЕР 8.1. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{3}{5}$.

$$\lhd \quad f'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3/5}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = -\frac{3}{4}; \quad y_0 = f\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Применив формулу (8.1), найдем уравнение касательной:

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

или

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Для получения уравнения нормали воспользуемся формулой (8.2):

$$-\frac{1}{f'(-3/5)} = -\frac{1}{(-3/4)} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

уравнение нормали имеет вид (рис. 8.2):

$$y - \frac{4}{5} = \frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{5}\right) \quad \text{или} \quad y = \frac{4}{3}x. \qquad \rhd$$

ПРИМЕР 8.2. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = (x-1)^3 + 2x$ в точке с координатами $(1, 2)$. $\lhd$ Здесь ордината точки касания задана $y_0 = y(1) = 2$. Далее, $f'(x) = 3(x-1)^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 2$. Пользуясь формулой (8.1), получим уравнение касательной $y - 2 = 2(x-1)$ или $y = 2x$.

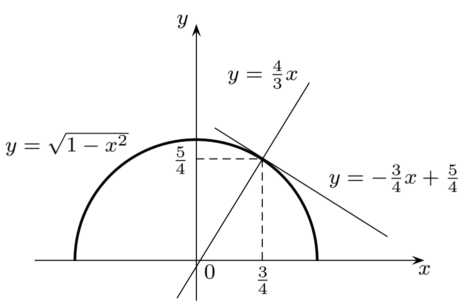


Рис. 8.2

Так как

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2},$$

то, воспользовавшись формулой (8.2), находим искомое уравнение нормали (рис. 8.3):

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \qquad \rhd$$

ПРИМЕР 8.3. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = 1 - x - 2\sqrt{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.
$\lhd$ Заметим, что

$$f(x) = (\sqrt{-x} - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(-1) = 0;$$

$$f'(x) = 2(\sqrt{-x} - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) = \frac{1 - \sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 0.$$

По формуле (8.3) уравнение касательной в этом случае $y = 0$ (т. е. касательная совпадает с осью Ox).

Согласно формуле (8.4) нормаль в данном случае имеет уравнение $x = -1$ (рис. 8.4). $\rhd$

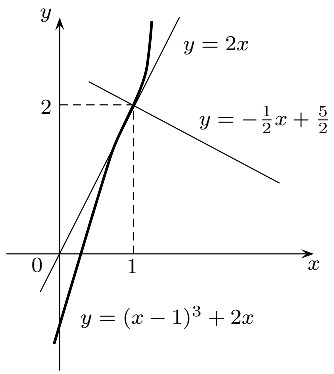


Рис. 8.3

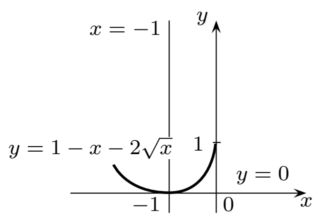


Рис. 8.4

Если функция $s = s(t)$ выражает закон движения (t — время, s — расстояние, пройденное от некоторой начальной точки), то производная $s'(t)$ выражает скорость движения в момент t.

ПРИМЕР 8.4. Прямолинейное движение точки подчинено закону $s(t) = 5t^2 + 6t + 3$. Определить скорость точки.
$\lhd$ Скорость точки в момент времени t равна $s'(t) = 10t + 6$. $\rhd$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке с абсциссой x_0, если:

1. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$;
2. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

Ответы:

1. $7x + y - 3 = 0$, $\quad x - 7y + 71 = 0$;
2. $y - 5 = 0$, $\quad x + 2 = 0$.

§ 8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ имеет производную, то ее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представимо в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

где $\alpha = \alpha(x, \Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, а линейная относительно Δx часть приращения

$$dy = f'(x)\Delta x$$

называется *дифференциалом* функции (в точке x).

Если $f'(x) \neq 0$, то $\alpha\Delta x$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ высшего порядка по сравнению с dy.

Поэтому при малых значениях $|\Delta x|$

$$|\alpha\Delta x| \ll |dy|,$$

и дифференциал dy является *главной частью* приращения функции

$$\Delta y \approx dy.$$

Дифференциал независимой переменной

$$dx = \Delta x.$$

Связь между дифференциалом функции, ее производной и дифференциалом независимой переменной выражается формулами

$$dy = f'(x)dx, \qquad f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

(Последнее отношение используется для обозначения производной.)

Геометрическое значение дифференциала поясняется на рис. 8.5.

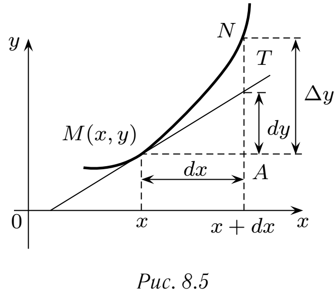


Рис. 8.5

Пусть MT — касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$. Тогда при смещении из точки M по графику функции в точку N с абсциссой $x + dx$ ордината смещаемой точки получает приращение Δy (длина отрезка AN), а дифференциал dy выражает *приращение ординаты точки,* смещаемой из точки M по *касательной* в точку T с абсциссой $x + dx$ (длина отрезка AT).

ПРИМЕР 8.5. Для функции $y = x^2$ выразить Δy и dy, вычислить Δy и dy в точке $x = 1$ при $dx = 0,1$ и $0,01$. Оценить погрешность приближенного равенства $\Delta y \approx dy$.

$$\lhd \quad \Delta y = y(x+dx) - y(x) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2;$$
$$y = f'(x)dx = (x^2)'dx = 2x\,dx.$$

В точке $x = 1$ при $dx = 0,1$ $\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 0,21$; $dy = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$, т. е. $\Delta y \approx dy$, причем абсолютная погрешность при этом составляет

$$|\Delta y - dy| = |0{,}21 - 0{,}2| = 0{,}01;$$

относительная погрешность:

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{0{,}01}{0{,}21} = \frac{1}{21}$$

(приблизительно 5%).

В той же точке $x = 1$, но при $dx = 0{,}01$ $\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 0{,}0201$; $dy = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$, т. е. опять-таки $\Delta y \approx dy$. В этом случае приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ выполняется с еще большей точностью, так как абсолютная погрешность

$$|\Delta y - dy| = |0{,}0201 - 0{,}02| = 0{,}0001,$$

а относительная погрешность

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{0{,}0001}{0{,}0201} = \frac{1}{201},$$

т. е. составляет менее $0{,}5\%$. Сравнивая результаты вычислений Δy и dy при $dx = 0{,}1$ и $dx = 0{,}01$, видим, что dy — главная часть Δy, причем с уменьшением приращения аргумента dx величина dy приближается к значению приращения $\Delta y \rhd$.

ПРИМЕР 8.6. $y = \frac{x^4-1}{x^4+1}$. Найти dy при $x = 1$; $dx = 1$.

$$\lhd \quad dy = y'(x)dx = \left(\frac{x^4-1}{x^4+1}\right)' dx = \left(1 - \frac{2}{x^4+1}\right)' dx = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}dx.$$

Тогда дифференциал dy в точке $x = 1$ при $dx = 1$

$$\frac{8 \cdot 1^3}{(1^4+1)^2} \cdot 1 = 2.$$

Так как значение $dx = 1$ достаточно велико, то полученное значение dy существенно отличается от

$$\Delta y = y(1+1) - y(1) = \frac{2^4-1}{2^4+1} - 0 = \frac{15}{17}. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 8.7. Найти (как функцию переменной dx) дифференциал функции $y(x)$ в точке $x = 0$, если:

1. $y = e^{\arcsin 3x}$;
2. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1)$.

$\triangleleft$ 1. $$dy = \left(e^{\arcsin 3x}\right)' dx = e^{\arcsin 3x} \cdot \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx = $$
$$= e^{\arcsin 3x} \cdot \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx \qquad \Rightarrow$$

в точке $x = 0$ искомая функция

$$e^{\arcsin 3\cdot 0} \cdot \frac{3}{\sqrt{1-9\cdot 0^2}} dx = 3\,dx;$$

2. $$dy = (\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1))' dx = \frac{2\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos^2 x} dx \qquad \Rightarrow$$

в точке $x = 0$ искомая функция тождественно равна нулю, так как

$$\frac{2\operatorname{tg} 0}{(\operatorname{tg}^2 0 + 1)\cos^2 0} dx \equiv 0. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Найти dy, если $y = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

2. Найти значение dy в точке $x = 0$ при $dx = 0{,}1$, если $y = 2^{x^2} \arcsin x$.

3. Найти дифференциал функции $y = 2^{\operatorname{tg} x}$, как функцию $\varphi(dx)$ переменной dx, в точке $x = 0$.

4. Для функции $\frac{x}{x+1}$ найти абсолютную и относительную погрешности равенства $y(x+dx) \approx y(x) + dy$ в точке $x = 0$ при $dx = 0{,}1$.

Ответы:

1. $dy = \frac{2}{3[\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)]^2} dx$.
2. $0{,}1$.
3. $\varphi(x) = \ln 2 dx$.
4. Абсолютная погрешность равна $1/110$, относительная — $0{,}1$ (или 10%).

Дифференциал функции находит применение в теории погрешностей. Пусть значение аргумента x получено в результате измерения и его истинное значение

$$x_0 = x \pm \Delta x,$$

где Δx — абсолютная погрешность измерения.

Последнее означает, что

$$x = x_0 + dx \qquad \text{и} \qquad |dx| \leqslant \Delta x.$$

Вычисляемое значение функции $y = f(x)$ будет отличаться от истинного $y_0 = f(x_0)$ на величину

$$y - y_0 = f(x_0 + dx) - f(x_0) = \Delta y.$$

Если погрешность Δx мала, то величина $|dx|$ также мала и $\Delta y \approx dy$. Дифференциал dy характеризует абсолютную погрешность Δy вычисленного значения функции, которая определяется из условия

$$|dy| \leqslant \Delta y,$$

а результат вычисления представляется в виде

$$y_0 = y \pm \Delta y.$$

Для *степенной функции* $y = x^\alpha$

$$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx; \quad |dy| = |\alpha x^{\alpha-1}| \cdot |dx| \leqslant |\alpha x^{\alpha-1}| \Delta x.$$

Следовательно,

$$\Delta y = |\alpha x^{\alpha-1}| \Delta x.$$

При этом относительные погрешности $\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|}$ и $\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|}$ связаны соотношением

$$\delta_y = |\alpha| \delta_x.$$

ПРИМЕР 8.8. Пусть при измерении некоторой величины x получено значение $x = 2$, причем абсолютная погрешность измерения составила $0{,}01$. Вычислить значение $y = x^3$ и оценить абсолютную погрешность Δy. Найти также относительные погрешности δ_x и δ_y.

$$\lhd \Delta x = 0{,}01; \delta_x = \frac{\Delta x}{|x|} = 0{,}005 \Rightarrow \delta_y = 3 \cdot 0{,}005 = 0{,}015;$$

$$\Delta y = |y| \cdot \delta_y = 2^3 \cdot 0{,}015 = 0{,}12;$$

$$y = 8 \pm 0{,}12. \quad \rhd$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Доказать, что для показательной функции $y = a^x (a > 0)$ справедливы соотношения:

$$\Delta y = a^x \cdot |\ln a| \cdot \Delta x; \qquad \delta y = \Delta x \cdot |\ln a|.$$

2. Оценить абсолютную и относительную погрешности при вычислении величины $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, если $x = 3 \pm 0{,}01$;

3. Доказать, что для логарифмической функции $y = \ln x$ справедливо соотношение $\delta_y = \frac{\Delta x}{x} = \delta_x$.

4. Оценить абсолютную погрешность при вычислении величины $\ln x$, если $x = 2 \pm 0{,}1$.

Ответы и решения:

1. $|dy| = |(a^x)'dx| = a^x \cdot |\ln a| \cdot |dx| \leqslant a^x \cdot |\ln a| \cdot \Delta x$,

$$\Delta y = a^x \cdot |\ln a| \Delta x; \delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{a^x |\ln a| \Delta x}{a^x} = \Delta x \cdot |\ln a|.$$

2. $\Delta y = \frac{\ln 2}{800} < \frac{1}{800}$; $\quad \delta_y = \frac{\ln 2}{100} < \frac{1}{100}$.

3. $|dy| = |(\ln x)'dx| = |\frac{1}{x}dx| \leqslant \frac{\Delta x}{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{\Delta x}{x} = \delta_x$ (последнее равенство в силу определения δ_x).

4. $\Delta y = 0{,}05$.

§ 8.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть значения функции $y(x)$ положительны. Производная $(\ln y(x))'$ называется *логарифмической производной* функции $y(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$(\ln y(x))' = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x),$$

откуда получаем

$$y' = y(\ln y)',$$

— формула *логарифмического дифференцирования.*

Эта формула применяется для дифференцирования показательно-степенных функций вида $u(x)^{v(x)} (u(x) > 0)$.

ПРИМЕР 8.9. Найти производную

$$y = x^{1/x} (x > 0).$$

$\triangleleft$ Найдем логарифмическую производную:

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x \quad \Longrightarrow \quad (\ln y)' = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

По формуле логарифмического дифференцирования:

$$y' = x^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x) = x^{1/x-2}(1-\ln x). \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 8.10. Найти производную

$$y = x^{5^x}\,(x>0).$$

$$\triangleleft \ln y = 5^x\ln x \quad \Longrightarrow \quad (\ln y)' = 5^x\cdot\ln 5\cdot\ln x + 5^x\cdot\frac{1}{x} =$$
$$= 5^x\left(\frac{\ln 5\cdot x\cdot\ln x+1}{x}\right).$$

Применяем формулу логарифмического дифференцирования:

$$(y)' = x^{5^x}\cdot 5^x\cdot\frac{\ln 5\cdot x\cdot\ln x+1}{x} = x^{5^x-1}\cdot 5^x\cdot(\ln 5\cdot x\ln x+1). \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 8.11. Найти производную

$$y = \left((\sin x)^{2\sin x} + (\sin x)^{\sin x}\right)\cdot e^{\cos x} \quad (0<x<\pi).$$

$\triangleleft$ Найдем сначала производную функции $y_1 = (\sin x)^{\sin x}$:

$$\ln y_1 = \sin x\cdot\ln\sin x \Longrightarrow (\ln y_1)' = \cos x\cdot\ln\sin x + \sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} =$$
$$= \cos x(\ln\sin x+1) \Longrightarrow y_1' = (\sin x)^{\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1).$$

Заметим, что $y_2 = (\sin x)^{2\sin x} = y_1^2$, поэтому

$$y_2' = 2y_1\cdot y_1' = 2(\sin x)^{\sin x}\cdot(\sin x)^{\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1) =$$
$$= 2(\sin x)^{2\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1).$$

По формуле производной произведения двух функций:

$$\frac{dy}{dx} = \left[2(\sin x)^{2\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1)+\right.$$
$$\left.+(\sin x)^{\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1)\right]\cdot e^{\cos x}+$$
$$+\left[(\sin x)^{2\sin x}+(\sin x)^{\sin x}\right]\cdot e^{\cos x}\cdot(-\sin x) =$$
$$= (\sin x)^{\sin x}\cdot e^{\cos x}\left[(2(\sin x)^{\sin x}+1)\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1)-\right.$$
$$\left.-\left((\sin x)^{\sin x}+1\right)\cdot\sin x\right]. \quad \triangleright$$

Формулу логарифмического дифференцирования применяют и в тех случаях, когда после логарифмирования функции получается выражение более удобное для дифференцирования, например, если функция задается дробью, числитель и знаменатель которой содержат несколько множителей.

ПРИМЕР 8.12. Найти производную

$$y = \frac{\sqrt[15]{x^2+6}\cdot\sqrt[10]{x^2+1}}{\sqrt[6]{x^2+3}}.$$

$\lhd$ Производную можно найти и непосредственно, применяя правила дифференцирования дроби и произведения. Но гораздо проще, если применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \frac{1}{15}\ln(x^2+6) + \frac{1}{10}\ln(x^2+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+3);$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{15}\cdot\frac{2x}{x^2+6} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x}{x^2+3} = \\ = \frac{2x}{(x^2+6)(x^2+1)(x^2+3)}.$$

$$y' = \frac{\sqrt[15]{x^2+6}\cdot\sqrt[10]{x^2+1}}{\sqrt[6]{x^2+3}}\cdot\frac{2x}{(x^2+6)(x^2+1)(x^2+3)} = \\ = \frac{2x}{\sqrt[15]{(x^2+6)^{14}}\cdot\sqrt[10]{(x^2+1)^9}\cdot\sqrt[6]{(x^2+3)^7}}. \quad \rhd$$

Если функция $y(x) \neq 0$, но имеет значения различных знаков, то можно использовать *обобщенную формулу логарифмического дифференцирования*

$$y' = y(\ln|y|)'.$$

Так как

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0,$$

то при $x > 0$

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

а при $x < 0$

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Практически это означает, что на модуль, стоящий под знаком логарифма, при дифференцировании можно не обращать внимания. Это обстоятельство используется при выводе и применении обобщенной формулы логарифмического дифференцирования.

ПРИМЕР 8.13. Найти производную

$$y=\frac{(x-1)^3(x+5)^3}{(x+2)^6}\quad (x\neq -2).$$

$\triangleleft$ Здесь логарифмическое дифференцирование также упрощает получение результата: при $x\neq 1;\ -5;\ -2$

$$\ln|y|=3\ln|x-1|+3\ln|x+5|-6\ln|x+2|\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(\ln|y|)'=\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+5}-\frac{6}{x+2}=\frac{54}{(x-1)(x+2)(x+5)}\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y'=\frac{(x-1)^3(x+5)^3}{(x+2)^6}\cdot\frac{54}{(x-1)(x+2)(x+5)}=\frac{54(x-1)^2(x+5)^2}{(x+2)^7}.$$

Отметим, что полученное (в предположении $x\neq 1;-5;-2$) выражение является функцией, непрерывной и при $x=1;\ x=-5$. Можно показать, что этого достаточно для того, чтобы оно задавало производную и при $x=1; x=-5$.
Итак получаем:

$$y'=\frac{54(x-1)^2(x+5)^2}{(x+2)^7}\quad (x\neq -2).\qquad\triangleright$$

ПРИМЕР 8.14. Найти производную

$$y=\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[20]{x+3}\cdot\sqrt[5]{x-2}}.$$

$\triangleleft$ Применим обобщенную формулу логарифмического дифференцирования:

$$\ln|y|=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{20}\ln|x+3|-\frac{1}{5}\ln|x-2|\Longrightarrow$$
$$(\ln|y|)'=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{20(x+3)}-\frac{1}{5(x-2)}=-\frac{1}{(x-1)(x+3)(x-2)}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y'=\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[20]{x+3}\cdot\sqrt[5]{x-2}}\cdot\left(\frac{-1}{(x-1)(x+3)(x-2)}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot\sqrt[20]{(x+3)^{21}}\cdot\sqrt[5]{(x-2)^6}}\quad \text{при } x>1; x\neq 2.\quad\triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1. $y = x^{\sin x}$.
2. $y = x^{x^x}$.
3. $y = (x^2 + x - 2)^3 (x^2 - 1)^2 (x^2 + 3x + 2)$.
4. $y = \frac{(x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+5}}{(x-1)^3}$.

Ответы:

1. $y' = x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$.
2. $y' = x^{x^x + x - 1} [x \ln x (\ln x + 1) + 1]$.
3. $y' = 6x(2x+3)(x+2)^3(x+1)^2(x-1)^4$.
4. $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(x+2)(x^2+19x+61)}{3(x-1)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+5)^2}}$ при $x \neq 1; -5$.

Занятие 9

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

§ 9.1. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная от производной $y'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $y(x)$ и обозначается $y''(x)$, т. е.

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

Аналогично определяются *производные третьего и более высоких порядков*

$$y'''(x) = (y''(x))' \quad \text{и т. д.}$$

Для обозначения производных порядка выше третьего обычно вместо штрихов используют римские цифры

$$y^{\mathrm{IV}}(x), y^{\mathrm{V}}(x), \cdots ,$$

либо арабские цифры в скобках

$$y^{(4)}(x), y^{(5)}(x), \cdots .$$

Производная произвольного n-го порядка

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'.$$

Производную $y'(x)$ при сопоставлении с производными второго и более высоких порядков называют производной *первого порядка*, а функцию $y(x)$ иногда бывает удобно интерпретировать как *производную нулевого порядка*

$$y(x) = y^{(0)}(x).$$

Чтобы найти значение производной какого-либо порядка в некоторой точке x_0, сначала находят ее в произвольной точке x, а затем вместо x подставляют x_0.

ПРИМЕР 9.1. Найти $y''(3/5)$

$$y = \arcsin x.$$

$$\lhd \quad y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y'' = (y')' = ((1-x^2)^{-1/2})' =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1-x^2)^{-3/2}.$$

Отсюда
$$y''\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^{-3/2} = \frac{75}{64}. \qquad \rhd$$

В некоторых простых случаях удается получить формулу, выражающую производную n—го порядка, с помощью которой при необходимости можно найти производную любого фиксированного порядка.

ПРИМЕР 9.2. Найти $y^{(n)}$

$$y = 2^{(3x+1)/2}.$$

$\lhd$ Найдем последовательно производные y', y'', y'''.

$$y' = 2^{(3x+1)/2}\left(\ln 2\cdot\frac{3}{2}\right); \qquad y'' = 2^{(3x+1)/2}\left(\ln 2\cdot\frac{3}{2}\right)^2;$$
$$y''' = 2^{(3x+1)/2}\left(\ln 2\cdot\frac{3}{2}\right)^3.$$

Очевидно, при каждом дифференцировании в результат добавляется множитель $\left(\ln 2\cdot\frac{3}{2}\right)$. Поэтому
$$y^{(n)} = \left(\frac{3}{2}\cdot\ln 2\right)^n\cdot 2^{(3x+1)/2}. \qquad \rhd$$

ПРИМЕР 9.3. Найти $y^{(10)}(1)$

$$y = (2x+1)e^x.$$

$\lhd$ Находим производные

$$y' = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x;$$
$$y'' = 2e^x + (2x+3)e^x = (2x+5)e^x;$$
$$y''' = 2e^x + (2x+5)e^x = (2x+7)e^x.$$

Возникает предположение, что $y^{(n)} = (2x + (2n+1))e^x$. Для доказательства применим метод математической индукции:

1. При $n = 1$ $y' = ((2x+1)e^x)' = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x + {}$ ${}+ 2 \cdot 1 + 1)e^x$ — верно.

2. Пусть формула верна при $n = k$, т. е.

$$y^{(k)} = (2x + (2k+1))e^x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y^{(k+1)} = (y^{(k)})' = 2e^x + (2x + (2k+1))e^x = (2x + 2(k+1) + 1)e^x$$

— формула верна и при $n = k+1$, что и завершает доказательство.

Тогда $y^{(10)}(1) = (2 \cdot 1 + (2 \cdot 10 + 1)) \cdot e^1 = 23e.$ ▷

ПРИМЕР 9.4. Найти $y^{(n)}$

$$y = \sin x.$$

◁ В этом случае получить общую формулу для $y^{(n)}$ удается, если результаты дифференцирований преобразовать, используя тригонометрические формулы приведения:

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$y''' = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Нетрудно сообразить, что

$$y^{(n)} = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right). \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 9.5. Найти $y^{(n)}$

$$y = \cos x.$$

◁ $\cos x = (\sin x)'$. Воспользовавшись результатом примера 9.4, получим:

$$(\cos x)^{(n)} = ((\sin x)')^{(n)} = (\sin x)^{(n+1)} = \sin\left((n+1) \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right). \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 9.6. Точка движется прямолинейно, причем расстояние, пройденное ею, задается формулой $S(t) = t^4 - 3t^2 + 2t$. Найти ускорение точки в момент времени t.

◁ Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $S = S(t)$, то ускорение движения в момент t есть производная второго порядка пути по времени: $a = S''(t)$. Искомое ускорение:

$$S''(t) = (t^4 - 3t^2 + 2t)'' = (4t^3 - 6t + 2)' = 12t^2 - 6. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Найти $y^{IV}(1)$, если $y(x) = x^6 - 4x^3 + 4$;
2. Найти $y^{(n)}$, если $y(x) = e^{ax}$;
3. Найти $y^{(n)}$, если $y(x) = \sin^2 x$;
4. Прямолинейное движение происходит в соответствии с формулой $S = t^2 - 4t + 1$. Найти скорость и ускорение движения.

Ответы: 1. 360; 2. $a^n e^{ax}$; 3. $2^{n-1}\sin(2x + \pi(n-1)/2)$; 4. $S'(t) = 2t - 4, S''(t) = 2$.

§ 9.2. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производные до n-го порядка включительно. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где многочлен в правой части равенства (первые $(n+1)$ слагаемых) называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$, а слагаемое $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом.

Если производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0, то остаточный член представим в форме Пеано

$$R_{n+1}(x) = o[(x - x_0)^n] \quad \text{при} \quad x \to x_0$$

(т. е. является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$ высшего порядка по сравнению с $(x - x_0)^n$).

Если существует и производная $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности точки x_0, то остаточный член можно представить в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \Theta(x - x_0), \quad 0 < \Theta < 1.$$

§ 9.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора позволяет исследовать поведение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (локальное поведение). В частности, если $f'(x_0) = 0$ (x_0 — стационарная точка функции $f(x)$), то можно установить наличие максимума или минимума в точке x_0, либо отсутствие таковых и наличие перегиба на графике функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Так как остаточный член $R_{n+1}(x)$ для значений x, близких к x_0, по абсолютной величине пренебрежимо мал по сравнению с любым слагаемым многочлена Тейлора, не равным тождественно нулю, то его отбрасывают и функцию $f(x)$ заменяют многочленом Тейлора. Степень n многочлена для исследования в первом приближении выбирают такую, чтобы в многочлене кроме $f(x_0)$ присутствовало еще одно слагаемое, не равное тождественно нулю, т. е. если

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad \text{а } f^{(m)}(x_0) \neq 0,$$

то полагают $n = m$ и

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m.$$

С помощью этой формулы и проводят исследование.

ПРИМЕР 9.7. Исследовать поведение функции

$$f(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 4x$$

в окрестности точки $x_0 = -1$.

$\lhd$ Вычислим значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 5; & f'(x) &= 2e^{x+1} - 2x - 4; \\ f'(-1) &= 0; & f''(x) &= 2e^{x+1} - 2; \\ f''(-1) &= 0; & f'''(x) &= 2e^{x+1}; \\ f'''(-1) &= 2. \end{aligned}$$

Дифференцирование проводилось до первой отличной от нуля производной.

Вблизи точки $x_0 = -1$

$$f(x) \approx 5 + \frac{2}{3!}(x+1)^3 \begin{cases} > 5 & \text{при} \quad x > -1, \\ < 5 & \text{при} \quad x < -1. \end{cases}$$

Так как $f'(-1) = 0$, то касательная к графику исследуемой функции в точке $(-1{,}5)$ параллельна оси x, а в силу установленных неравенств справа от этой точки график расположен над касательной, а слева — под касательной, следовательно, точка $(-1{,}5)$ является точкой перегиба (рис. 9.1). $\rhd$

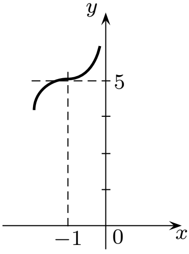


Рис. 9.1

ПРИМЕР 9.8. Исследовать поведение функции

$$f(x) = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x$$

в окрестности точки $x_0 = 1$.

$\lhd$ Вычислим значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1; &&f'(x) = 2\sin(x-1)\cos(x-1) - 2x + 2\\
& &&\quad = \sin 2(x-1) - 2x + 2;\\
&f'(1) = 0; &&f''(x) = 2\cos 2(x-1) - 2;\\
&f''(1) = 0; &&f'''(x) = -4\sin 2(x-1);\\
&f'''(1) = 0; &&f^{\mathrm{IV}}(x) = -8\cos 2(x-1);\\
&f^{\mathrm{IV}}(1) = -8.
\end{aligned}$$

По формуле Тейлора

$$f(x) \approx 1 - \frac{8}{4!}(x-1)^4 = 1 - \frac{(x-1)^4}{3}$$

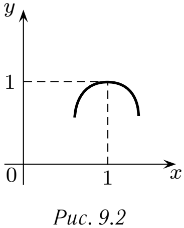


Рис. 9.2

и, следовательно, в окрестности точки $x_0 = 1$ функция $f(x)$ ведет себя как степенная функция четвертой степени, график которой имеет ветви, направленные вниз, так как коэффициент перед степенью отрицательный. Точка $x_0 = 1$ является точкой максимума функции и $\max f(x) = 1$ (рис. 9.2). $\rhd$

ПРИМЕР 9.9. Исследовать поведение функции

$$f(x) = x^2 - 4x + \cos^2(x-2)$$

в окрестности точки $x_0 = 2$.

$\lhd$ Вычислим значения $f(x)$ и производных в точке $x_0 = 2$.

$$f(2) = -3; \qquad f'(x) = 2x - 4 - 2\cos(x-2)\sin(x-2) = 2x - 4 - \sin 2(x-2);$$

$$f'(2) = 0; \qquad f''(x) = 2 - 2\cos 2(x-2);$$

$$f''(2) = 0; \qquad f'''(x) = 4\sin 2(x-2);$$

$$f'''(2) = 0; \qquad f^{\mathrm{IV}}(x) = 8\cos 2(x-2);$$

$$f^{\mathrm{IV}}(2) = 8.$$

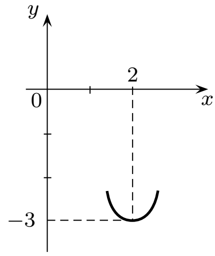


Рис. 9.3

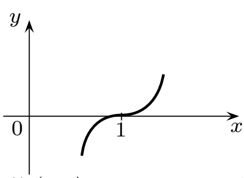
По формуле Тейлора $f(x) \approx -3 + \frac{1}{3}(x-2)^4$ и, следовательно, $x = 2$ — точка минимума функции $f(x)$; $\min f(x) = -3$. График функции $f(x)$ вблизи точки $(1, -3)$ близок к графику степенной функции четвертой степени с положительным коэффициентом; ветви направлены вверх (рис. 9.3). $\rhd$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

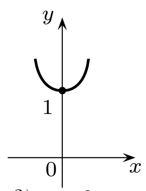
Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек:

1. $f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1$.
2. $f(x) = x^{11} + 3x^6 + 1, \quad x_0 = 0$.

Ответы:



1) $(1, 0)$ — точка перегиба графика функции



2) $x = 0$ — точка минимума графика функции

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена. По формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x);$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

В приближенных вычислениях важную роль играет не только получение приближенного результата, но и оценка его погрешности. Формула Тейлора позволяет решать эти задачи.

ПРИМЕР 9.10.

1. Оценить погрешность приближения функции e^x на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ее многочленом Тейлора степени $n = 3$.

2. Найти степень n многочлена Тейлора, аппроксимирующего (приближающего) функцию e^x, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ с погрешностью меньшей $0{,}001$.

$\triangleleft$ 1. Отбрасывая слагаемые выше третьей степени получаем приближенную формулу для вычисления значений функции e^x

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

При этом погрешность равна остаточному члену

$$R_4(x) = \frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

где $\xi \in (0, x)$ и $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{4!}\frac{1}{2^4} = \frac{\sqrt{e}}{384}.$$

Так как $\sqrt{e} < 2$, то $|R_4(x)| < 1/192 < 0{,}01$ и поэтому погрешность не превосходит $0{,}01$.

2. Если при вычислении значения e^x по формуле Тейлора ограничиться рассмотрением слагаемых до n-й степени включительно, то ошибка будет равна остаточному члену

$$R_{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Для обеспечения погрешности меньшей $0{,}001$ число n выберем удовлетворяющим условию

$$\frac{\sqrt{e}}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!2^{n}} < 0{,}001$$

или

$$2^n(n+1)! > 1000.$$

Так как $2^3(3+1)! = 8\cdot 24 < 1000$, а $2^4(4+1)! = 16\cdot 120 > 1000$, то получаем $n \geqslant 4$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Оценить погрешность приближенной формулы $\ln(1+x) \approx$ $\approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ для $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;

2. Найти степень n многочлена Тейлора, аппроксимирующего функцию $\ln(1+x)$ $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ с погрешностью меньшей $0{,}001$.

Ответы:

1. $\frac{1}{64}$.
2. $n \geqslant 7$.

Занятие 10

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 10.1. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются обе бесконечно малыми, либо обе бесконечно большими при $x \to x_0$, тогда отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется *неопределенностью вида* $\frac{0}{0}$ либо вида $\frac{\infty}{\infty}$, соответственно, а вычисление предела $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ называют *раскрытием неопределенности*.

Правило Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и выражается формулой

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Условием применимости этой формулы является существование

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ПРИМЕР 10.1. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

$$\lhd \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-1}}{\cos x} = 1.$$

Этот пример можно решить, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1. \qquad \rhd$$

Однако применение эквивалентных бесконечно малых функций не всегда позволяет вычислить пределы с неопределенностью $\frac{0}{0}$.

ПРИМЕР 10.2. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.$$

$$\lhd \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/(1+x)}{2x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

В этом примере не удается вычислить предел с помощью эквивалентных бесконечно малых функций. $\rhd$

ПРИМЕР 10.3. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{x-\sin x}.$$

$$\lhd \quad \lim_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2x-2}{1-\cos x}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Здесь правило Лопиталя пришлось применять трижды, так как отношения первых и вторых производных при $x=0$ являются неопределенностями $\frac{0}{0}$. Отметим, что условия применимости правила Лопиталя выполняются. В самом деле, из существования предела отношения третьих производных $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x}{\cos x}$ следует существование предела отношений вторых производных $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{\sin x}$, а из существования этого предела вытекает, в свою очередь, существование предела отношений первых производных. Таким образом, условия применимости правила Лопиталя выполняются. $\rhd$

Иногда удобно комбинировать различные приемы вычисления пределов.

ПРИМЕР 10.4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos x}.$$

$$\lhd \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x)^{-1}\cdot(-3\sin 3x)}{(\cos x)^{-1}\cdot(-\sin x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{\sin x}=$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 3x}{x}=9.$$

Здесь использовано сначала правило Лопиталя, а затем эквивалентные бесконечно малые функции. $\triangleright$

Правило Лопиталя применимо и для вычисления пределов в бесконечности.

ПРИМЕР 10.5. Найти

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(n>0)}} \frac{\ln x}{x^n}.$$

$$\triangleleft \lim_{\substack{x\to+\infty\\(n>0)}} \frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

(правило Лопиталя использовалось один раз). $\triangleright$

ПРИМЕР 10.6. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}.$$

$$\triangleleft \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{e^x} = 0. \quad \triangleright$$

Из этих примеров следует, что при $x \to +\infty$ функции $\ln x$, $x^n (n > 0)$, e^x растут с разными скоростями. Наиболее быстро возрастает показательная функция e^x, а медленнее всех функция $\ln x$, т. е. $\ln x < x^n < e^x$ при $x \to +\infty$.

Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ можно свести к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которых можно использовать правило Лопиталя (если оно применимо).

ПРИМЕР 10.7. Найти

$$\lim_{x\to 3} (9 - x^2) \cdot \operatorname{ctg} \pi x.$$

$\triangleleft$ Это неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Представим произведение функций в виде частного и получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 3} (9 - x^2) \cdot \operatorname{ctg} \pi x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to 3} \frac{9 - x^2}{\operatorname{tg} \pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2x}{\pi \cos^{-2} \pi x} = \frac{-2 \cdot 3}{\pi \cos^{-2} 3\pi} = -\frac{6}{\pi}. \triangleright$$

ПРИМЕР 10.8. Найти

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

◁ Это неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведя дроби к общему знаменателю и вычитая их, получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\left(\frac{0}{2}\right)=0. \quad ▷$$

§ 10.2. ПРЕДЕЛ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

При вычислении пределов показательно-степенных функций $u(x)^{v(x)}$ можно использовать равенство

$$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln u}.$$

Встречающиеся при этом неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенностям вида $(0\cdot\infty)$, $(\infty\cdot 0)$ в произведении $v\ln u$.

ПРИМЕР 10.9. Найти

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$◁ \lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}=(0^0)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\ln x}.$$

Вычислим полученный предел, используя правило Лопиталя и эквивалентные бесконечно малые:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-\sin^{-2} x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

Таким образом,
$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}=e^0=1. \quad ▷$$

ПРИМЕР 10.10. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

$$◁\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=(\infty^0)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\frac{1}{x}}.$$

Сначала найдем предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln\frac{1}{x}$, применяя правило Лопиталя и эквивалентные бесконечно малые:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\frac{1}{x} = (0\cdot\infty) = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sin^{-1}x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = $$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-\sin^{-2}x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = $$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 10.11. Найти

$$\lim_{x\to 0}(3^x + x)^{1/x}.$$

$$\triangleleft \lim_{x\to 0}(3^x + x)^{1/x} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(3^x+x)/x}.$$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(3^x + x)$, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3^x + x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(3^x + x)^{-1}\cdot(3^x\ln 3 + 1)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3 + 1}{3^x + x} = \ln 3 + 1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}(3^x + x)^{1/x} = e^{\ln 3 + 1} = 3e. \qquad \triangleright$$

Заметим, что если $\bar{\exists}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ и правило Лопиталя, следовательно, не применимо, то это еще не означает, что и $\bar{\exists}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

ПРИМЕР 10.12. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

$\triangleleft$ Здесь предел отношения производных $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$ не существует, так как $\mathrm{tg}^2(x/2)$ функция периодическая и при $x\to\infty$ многократно изменяется от 0 до $+\infty$ и не стремится к определенной величине. Следовательно, правило Лопиталя не применимо. Однако исходный предел существует, и он может быть вычислен другим методом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-(\sin x)/x}{1+(\sin x)/x}=1. \qquad \triangleright$$

Следует иметь ввиду, что правило Лопиталя может оказаться неэффективным, несмотря на то, что условия его применимости выполняются.

ПРИМЕР 10.13. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$\triangleleft \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(1+x^2)^{-1/2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot(1+x^2)^{-1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Применяя правило Лопиталя дважды возвращаемся к исходному пределу, т. е. правило Лопиталя оказывается неэффективным, хотя оно и применимо. Для вычисления предела можно подвести под корень знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1. \quad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-x-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{\ln\operatorname{tg}x}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{tg}x)^x$.
8. $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0}(2^x+x)^{\operatorname{ctg}x}$.

Ответы:

1. 2/3.
2. 2.
3. 2.
4. 1.
5. 0.
6. 1.
7. 1.
8. 1.
9. $2e$.

§ 10.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема 10.1 (Ролля). *Если функция* $f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$*;*

2) дифференцируема на интервале (a, b)*;*

3) на концах отрезка $[a, b]$ *имеет равные значения* $f(a) = f(b)$*; то существует точка* $\xi \in (a, b)$ *(по крайней мере, одна), в которой* $f'(\xi) = 0$.

Теорема 10.2 (Лагранжа). *Если функция* $f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$*;*

2) дифференцируема на интервале (a, b)*; то существует точка* $\xi \in (a, b)$ *(по крайней мере, одна), в которой*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \textit{(формула Лагранжа)}.$$

Теорема 10.3 (Коши). *Если функция* $f(x)$ *и* $g(x)$

1) непрерывны на отрезке $[a, b]$*;*

2) дифференцируемы на интервале (a, b)*;*

3) производная $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$*, то существует точка* $\xi \in (a, b)$ *(по крайней мере, одна), в которой*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \textit{(формула Коши)}.$$

ПРИМЕР. Доказать, что теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа, т. е. что теорема Лагранжа — частный случай теоремы Коши.

Доказательство. Пусть функция $g(x) = x$, тогда $g(a) = a$, $g(b) = b$, $g'(x) = x' = 1$ и $g'(\xi) = 1$. Подставив значения функции $g(a)$, $g(b)$ и производной $g'(\xi) = 1$ в формулу Коши, получим формулу Лагранжа. Следовательно, теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа.

ПРИМЕР 10.14. Доказать теорему: если уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

имеет отрицательный корень $x = x_0$, то уравнение

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

также имеет отрицательный корень и притом больший x_0.

$\lhd$ Пусть

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x,$$

тогда

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы Ролля:

1) непрерывна на отрезке $[x_0, 0]$;

2) дифференцируема на интервале $(x_0, 0)$;

3) на концах отрезка $[x_0, 0]$ имеет равные значения $f(x_0) = f(0) = 0$.

Поэтому существует точка $\xi \in (x_0, 0)$, в которой $f'(\xi) = 0$, т. е. уравнение

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

имеет отрицательный корень ξ и притом больший x_0. $\triangleright$

ПРИМЕР 10.15. Не вычисляя производной функции

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение

$$f'(x) = 0,$$

и указать интервалы, в которых они находятся.

$\triangleleft$ Функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы Ролля:

1) непрерывна на отрезках $[-3, -2]$и$[-2, -1]$,

2) дифференцируема на интервалах $(-3, -2)$и$(-2, -1)$,

3) на концах отрезков $[-3, -2]$и$[-2, -1]$ имеет равные значения $f(-3) = f(-2) = f(-1) = 0$.

Поэтому существуют точки $\xi_1 \in (-3, -2)$ (по крайней мере, одна) и $\xi_2 \in (-2, -1)$ (по крайней мере, одна), в которых $f'(\xi_1) = 0$ и $f'(\xi_2) = 0$. Таким образом, ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения $f'(x) = 0$. Функция $f(x)$ представляет собой многочлен 3-й степени, поэтому $f'(x)$ — многочлен 2-й степени и имеет не более двух действительных корней. Это корни ξ_1 и ξ_2, принадлежащие интервалам $(-3, -2)$ и $(-2, -1)$ соответственно. $\triangleright$

Замечание. Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то, очевидно, между любыми двумя ее нулями имеется, по крайней мере, один нуль ее производной.

ПРИМЕР 10.16. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенство

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 \leqslant x_2 - x_1, \quad \text{при условии } x_2 > x_1.$$

$\triangleleft$ Пусть функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$, тогда $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и из теоремы Лагранжа следует, что

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1}{x_2 - x_1}, \qquad \xi \in (x_1, x_2).$$

Учитывая, что для $\forall\xi\,\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1$, получим

$$\frac{\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1}{x_2-x_1}\leqslant 1$$

или

$$\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1\leqslant x_2-x_1. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕР 10.17. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенство

$$|\sin 3x_2-\sin 3x_1|\leqslant 3|x_2-x_1|.$$

$\triangleleft$ Пусть функция $f(x)=\sin 3x$, тогда $f'(x)=3\cos 3x$ и из теоремы Лагранжа следует, что

$$3\cos 3\xi=\frac{\sin 3x_2-\sin 3x_1}{x_2-x_1},$$

где ξ — точка, лежащая между точками x_1 и x_2.

Учитывая, что $|\cos 3\xi|\leqslant 1$ получим

$$|\cos 3\xi|=\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{\sin 3x_2-\sin 3x_1}{x_2-x_1}\right|\leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$|\sin 3x_2-\sin 3x_1|\leqslant 3|x_2-x_1|. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Доказать, что теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, т. е. что теорема Ролля получается из теоремы Лагранжа как частный случай.

2. Доказать теорему: если уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=0$$

имеет отрицательный корень $x=x_1$ и положительный корень $x=x_2$, то уравнение

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=0$$

также имеет отрицательный и положительный корни больше x_1, но меньше x_2.

3. Не находя производной функции

$$f(x)=(x-1)x(x+1)$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $f'(x)=0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

Ответы: 3) Два корня, принадлежащих соответственно интервалам $(-1,0)$ и $(0,1)$.

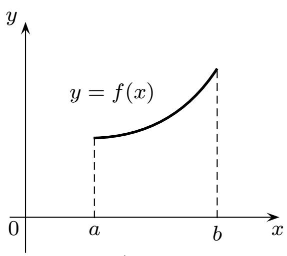
Занятие 11

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 11.1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

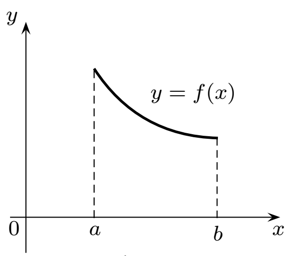
С помощью производной I-го порядка можно находить промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции.

Если производная $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ *возрастает* на (a, b) (рис.11.1). Если производная $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ *убывает* на (a, b) (рис. 11.2).



$f'(x) > 0$

Рис. 11.1



$f'(x) < 0$

Рис. 11.2

§ 11.2. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 слева направо меняет знак с «$+$» на «$-$» (с «$-$» на «$+$»), то x_0 является *точкой максимума (минимума)*, а значение $f(x_0)$ — *максимумом (минимумом)* функции $f(x)$ (см. рис. 11.3 и 11.4). В обоих случаях точка x_0 называется точкой экстремума, а значение $f(x_0)$ — *экстремумом* функции $f(x)$.

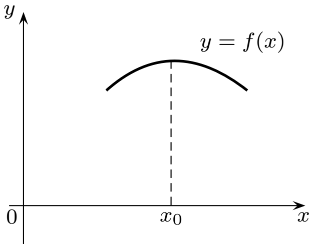


Рис. 11.3

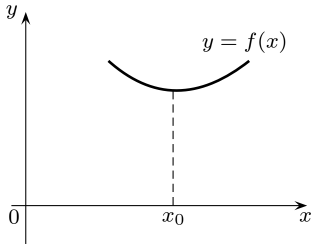


Рис. 11.4

В описанных случаях экстремумы являются наибольшим или наименьшим значением функции по сравнению с ее значениями вблизи точки x_0, а не вообще в области определения функции. Поэтому они называются *локальными экстремумами*.

Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на всей ее области определения E называются *глобальными экстремумами* и обозначаются соответственно

$$\max_{x\in E} f(x); \qquad \min_{x\in E} f(x).$$

§ 11.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследовать поведение функции $f(x)$ с помощью производной $f'(x)$ можно по следующей схеме:

1. Найти точки, в которых производная $f'(x) = 0, \infty$ или $\nexists$ (*критические точки I-го рода* функции $f(x)$).

Обычно эти точки делят всю область определения функции $f(x)$ на интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$.

2. Определить знаки производной $f'(x)$ во всех интервалах ее знакопостоянства.

3. Установить интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$, определить ее точки экстремума и экстремумы.

4. Построить эскиз графика функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР 11.1. Используя первую производную, исследовать функцию

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\frac{1}{3}.$$

◁ Действуем согласно вышеуказанной схеме исследования функций.

1. $f'(x) = x^2 - x - 2$; $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$, $x = 2$.

Производная $f'(x)$ определена при всех действительных значениях аргумента x и, следовательно, критическими точками будут в данном случае только ее нули, т. е. точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

2. Критические точки разбивают область определения функции $f(x)$ (а в данном случае это вся числовая прямая) на три интервала: $(-\infty, -1)$; $(-1, 2)$; $(2, +\infty)$.

Определим знаки $f'(x)$ на каждом из этих интервалов. Для этого можно выбрать в каждом интервале по точке, например, $-2 \in (-\infty, -1)$; $0 \in (-1, 2)$; $3 \in (2, +\infty)$ и определить знаки $f'(x)$ в этих точках.

$$f'(-2) = 4 > 0; \quad f'(0) = -2 < 0; \quad f'(3) = 4 > 0.$$

Отсюда делаем вывод, что $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 2)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (2, +\infty)$ (рис. 11.5).

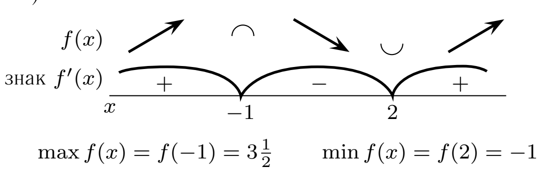


Рис. 11.5

3. Так как $f'(x) > 0$ при всех $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, то на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(2, +\infty)$ $f(x)$ возрастает. Из того, что $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ следует, что на этом интервале $f(x)$ убывает.

Производная $f'(x)$ при переходе через точку $x = -1$ (слева направо) меняет знак с «$+$» на «$-$». Следовательно, в этой точке локальный максимум, равный

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{2};$$

при переходе же через точку $x = 2$ знак $f'(x)$ меняется с «$-$» на «$+$», поэтому в этой точке локальный минимум, равный $f(2) = -1$. Результаты отражены схематично на рис. 11.5.

4. Пользуясь схемой, построим эскиз графика функции (рис. 11.6). $\triangleright$

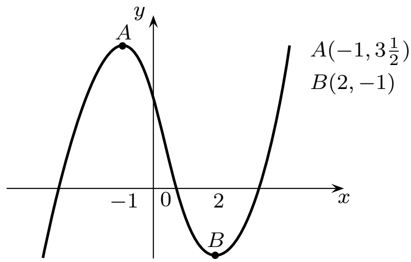


Рис. 11.6

ПРИМЕР 11.2. Провести исследование функции

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

при помощи первой производной.

$\triangleleft$ $f'(x) = x^3 - 4x$;

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0;$$

$x_{2,3} = \pm 2$ — критические точки.

Знаки $f'(x)$, интервалы монотонности $f(x)$ (возрастания и убывания), точки экстремума и их виды показаны на рис. 11.7.

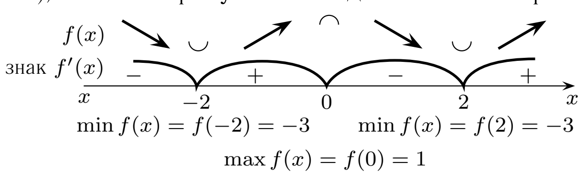


Рис. 11.7

Эскиз графика представлен на рис. 11.8.

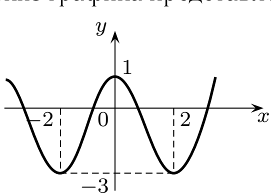


Рис. 11.8

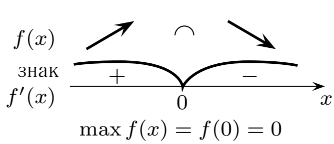


Рис. 11.9

График функции является симметричным относительно оси Oy. Это связано с тем, что $f(-x) = f(x)$ для всех x и, следовательно, функция четная. $\triangleright$

ПРИМЕР 11.3. Используя первую производную, исследовать функцию

$$f(x) = x + 1 - e^x.$$

$\triangleleft$ $f'(x) = 1 - e^x$; $f'(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff x = 0$ — критическая точка.

Знаки $f'(x)$, интервалы монотонности $f(x)$, точку экстремума и ее вид см. на рис. 11.9.

Эскиз графика приведен на рис. 11.10.

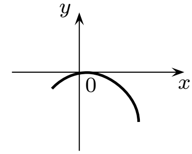
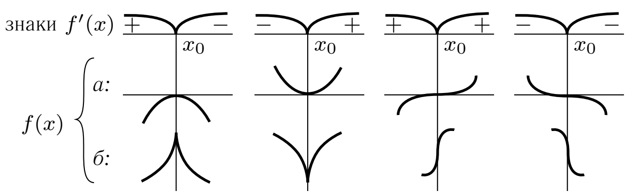


Рис. 11.10

Среди критических точек функции целесообразно выделять те, в которых производная равна нулю и те, в которых производная бесконечна. Если $f'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 параллельна оси x (горизонтальна), если же $f'(x_0) = \infty$, то она параллельна оси y (вертикальна).

На рисунке показаны основные типы поведения функции $f(x)$ вблизи критической точки x_0 в случаях, когда $f'(x_0) = 0$ (a) и когда $f'(x_0) = \infty$ ($б$).



Если $f'(x_0) = 0$ в точке экстремума, то экстремум называют *гладким*, а при $f'(x_0) = \infty$ — *острым*.

ПРИМЕР 11.4. Исследовать поведение функции $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в окрестности точки $x = 1$.

$$\triangleleft \quad y'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \quad \text{при } x \neq 1.$$

При $x = 1$ найдем производную, исходя из ее определения:

$$y'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{y(x) - y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2} - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = \infty.$$

Заметим, что

$$y'(1) = \lim_{x\to 1} y'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Можно показать, что, вообще, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ (конечный или бесконечный) и функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

Итак, в примере 11.4

$$y'(1) = \infty.$$

Следовательно, $x = 1$ — критическая точка и касательная к графику функции в точке $(1, 0)$ вертикальная.

Далее исследование проводим по схеме (рис. 11.11).

Таким образом, в точке $x = 1$ функция имеет острый $\min y(x) = y(1) = 0$. Эскиз графика — на рис. 11.12. $\rhd$

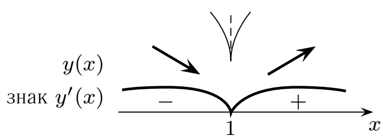


Рис. 11.11

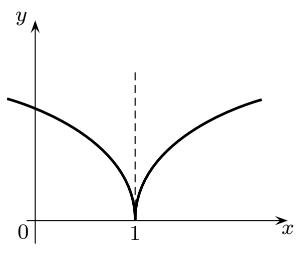


Рис. 11.12

ПРИМЕР 11.5. Исследовать, используя первую производную, функцию

$$y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}.$$

$$\lhd \quad y'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} \quad \text{при} \quad x \neq \pm 1;$$

$$y'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \left(\frac{-4}{0}\right) = \infty;$$

$$y'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty;$$

$$y'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Таким образом, критическими точками являются точки $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$, причем в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ касательная к графику функции вертикальна.

Результаты исследования функции — на схеме (рис. 11.13).

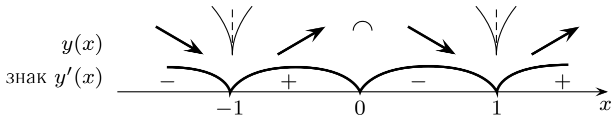


Рис. 11.13

Таким образом, в точках $x = \pm 1$ функция имеет острый $\min y(x) = y(\pm 1) = 0$; в точке $x = 0$ — гладкий $\max y(x) = y(0) = 1$.

Эскиз графика — на рис. 11.14.

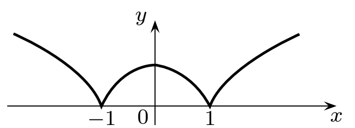


Рис. 11.14

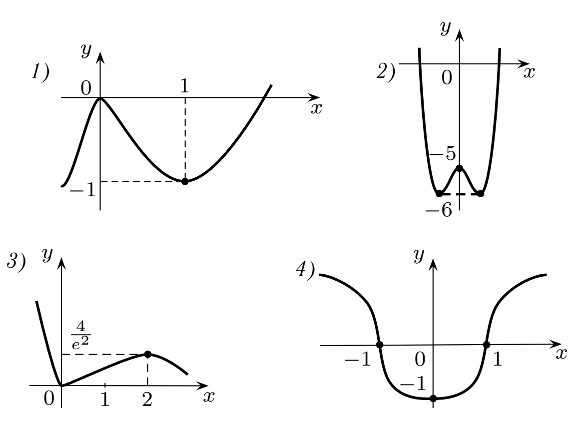
Отметим, что в силу четности функции график симметричен относительно оси Oy. ▷

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Используя первую производную, исследовать функцию и построить эскиз графиков:

1. $y = 2x^3 - 3x^2$.
2. $y = x^4 - 2x^2 - 5$.
3. $y = x^2 e^{-x}$.
4. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Ответы:



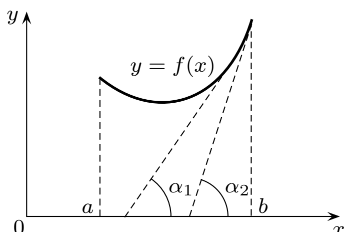
Занятие 12

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 12.1. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

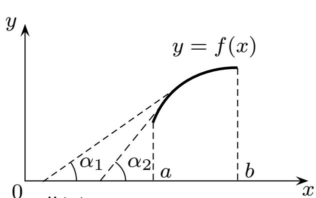
С помощью производной второго порядка можно находить промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.

Если $f''(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in (a, b)$, то $f'(x)$ возрастает (убывает) на (a, b), угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ увеличивается (уменьшается) и график является *вогнутым* (*выпуклым*) на (a, b) (рис. 12.1, 12.2).



$f''(x) > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$

Рис. 12.1



$f''(x) < 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$

Рис. 12.2

§ 12.2. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка $M(x_0, f(x_0))$ отделяет выпуклую и вогнутую части графика. Если при этом график имеет касательную в точке M, то точка M называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ (рис. 12.3).

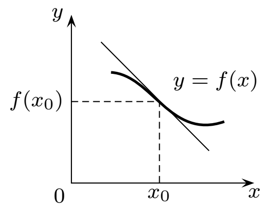


Рис. 12.3

§ 12.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследование с помощью производной II-го порядка можно проводить по следующей схеме:

1. Найти *критические точки II-го рода* функции $f(x)$, в которых производная $f''(x) = 0, \infty$ или $\bar{\exists}$ (обычно эти точки делят всю область определения функции $f(x)$ на интервалы знакопостоянства $f''(x)$).

2. Определить знаки производной $f''(x)$ во всех интервалах ее знакопостоянства.

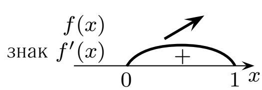
3. Установить интервалы вогнутости $(f''(x) > 0)$ и выпуклости $(f''(x) < 0)$ графика функции $f(x)$, найти точки его перегиба ($f''(x)$ меняет знак при переходе через абсциссу x_0 точки перегиба).

4. Построить эскиз графика функции $y = f(x)$.

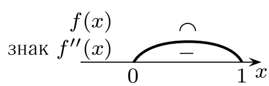
ПРИМЕР 12.1. Выяснить вид графика функции $f(x)$ на интервале $(0,1)$, если при всех $x \in (0,1)$:

1. $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$;
2. $f(x) > 0$; $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$;
3. $f(x) > 0$; $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$;
4. $f(x) < 0$; $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$.

$\lhd$ 1. Используя информацию о первой производной, имеем следующую схему:



Так как, кроме этого, $f''(x) < 0$ на интервале $(0,1)$, то здесь график функции $f(x)$ выпуклый.



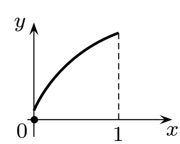
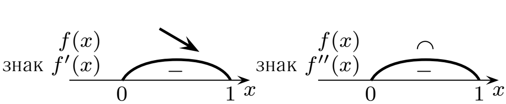


Рис. 12.4

Эскиз графика приведен на рис. 12.4.

2. Имеем следующие схемы:



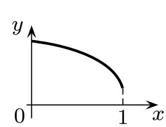
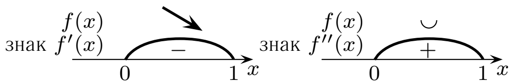


Рис. 12.5

Эскиз графика — на рис. 12.5.

3. Изобразим схематично поведение $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$:



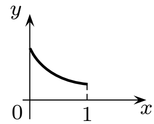
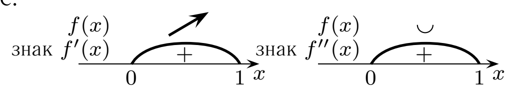


Рис. 12.6

Эскиз графика — на рис. 12.6.

4. Поведение $f(x), f'(x), f''(x)$ изобразим на схеме:



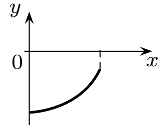


Рис. 12.7

Эскиз графика — на рис. 12.7. $\triangleright$

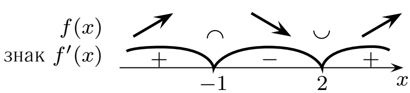
ПРИМЕР 12.2. Провести исследование функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

и построить эскиз ее графика.

$$\triangleleft \quad f'(x) = x^2 - x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

Имеем следующую схему:

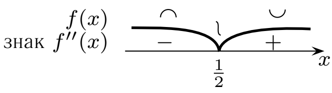


$f_{\max} = f(-1) = 3\frac{1}{6}$ $\qquad f_{\min} = f(2) = -1\frac{1}{3}$

Далее исследуем вторую производную:

$$f''(x) = 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < \frac{1}{2};$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{при } x > \frac{1}{2}; x_0 = \frac{1}{2} \text{ — абсцисса точки перегиба:}$$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{12}$ — ордината точки перегиба.

Эскиз графика представлен на рис. 12.8. $\triangleright$

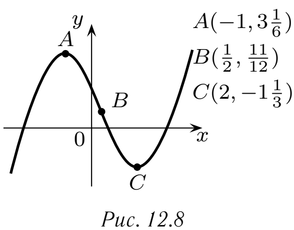


Рис. 12.8

При построении графика функции $y = f(x)$ вблизи точки перегиба $(x_0, f(x_0))$ необходимо обращать внимание на значение производной $f'(x_0)$, которое характеризует наклон касательной к графику в точке перегиба. На рис. 12.9 показаны основные типы точек перегиба: *а)* $f'(x_0) = 0$ (касательная горизонтальна); *б)* $f'(x_0) = \infty$ (касательная вертикальна); *в)* $f'(x_0) > 0$ (касательная наклонена под острым углом к оси x); *г)* $f'(x_0) < 0$ (касательная наклонена под тупым углом к оси x).

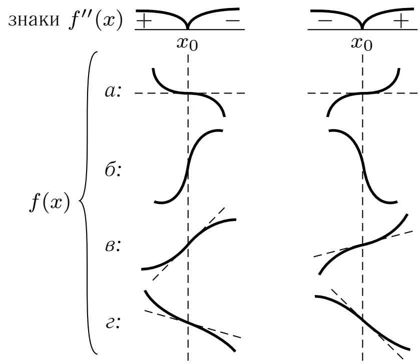
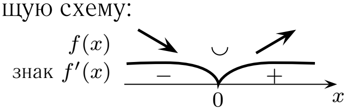


Рис. 12.9

ПРИМЕР 12.3. Исследовать функцию $f(x) = \ln(1 + x^2)$ и нарисовать эскиз ее графика.

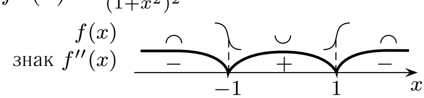
$$\lhd \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Имеем следующую схему:



$f_{\min} = f(0) = 0$

Далее, $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1$.



$f(\pm 1) = \ln 2$

Отметим, что в точке перегиба $(-1, \ln 2)$ касательная образует тупой угол с осью Ox, а в точке перегиба $(+1, \ln 2)$ — острый (рис. 12.9 *г*, *в*).

Для построения эскиза графика функции дополнительно отметим, что при $x \to 0$ $\quad \ln(1+x^2) \sim x^2$, а при $x \to \infty$ $\quad \ln(1+x^2) \sim 2\ln|x|$.

Эскиз графика функции представлен на рис. 12.10. ▷

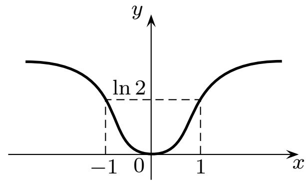
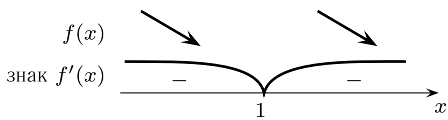


Рис. 12.10

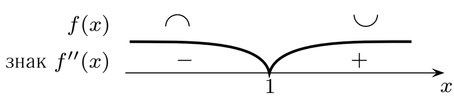
ПРИМЕР 12.4. Исследовать с использованием второй производной функцию $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x-1}$ и построить эскиз ее графика.

◁ $f'(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; критическая точка $x = 1$.



$$f(1) = 2, \quad f'(1) = \infty$$

В точке $x = 1$ касательная вертикальна; далее, $f''(x) = \frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}$. Имеем схему:



Точка $x = 1$ — абсцисса точки перегиба с вертикальной касательной (рис. 12.9 *б*).

Эскиз графика представлен на рис. 12.11. ▷

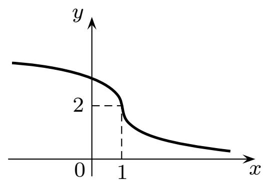


Рис. 12.11

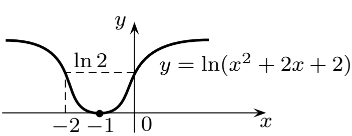
ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Исследовать функции и построить их графики:

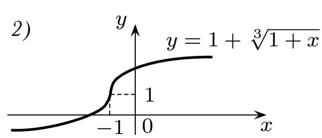
1. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$;
2. $y = 1 + \sqrt[3]{1+x}$.

Ответы:

1)



2)



ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Занятие 13

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Полное исследование функции может включать следующие этапы.

1. Отыскание области определения функции.

2. Исследование индивидуальных свойств функции (четность, нечетность, периодичность, расположение нулей и т. п.).

3. Исследование поведения функции в бесконечности, отыскание наклонных и горизонтальных асимптот графика функции.

4. Исследование поведения функции в точках разрыва и в граничных точках области определения, отыскание вертикальных асимптот графика функции.

5. Исследование функции по производной I-го порядка.

6. Исследование функции по производной II-го порядка.

7. Построение графика функции.

В каждом конкретном случае отдельные этапы могут опускаться. Например, не имеет смысла исследовать поведение функции в бесконечности, если ее область определения не содержит бесконечных промежутков или если функция является периодической. Последнюю вообще достаточно исследовать на промежутке длиною в период. Точки пересечения графика функции с осями координат могут не определяться специально, если характер их расположения устанавливается на других этапах исследования и если, конечно, не поставлена задача их точного определения.

Если график функции имеет асимптоты, то целесообразно начинать строить элементы графика сразу после отыскания и построения асимптот. На этом этапе иногда удается спрогнозировать поведение функции на всей области определения или на отдельных ее участках. И тогда исследование функции по производным можно рассматривать как процесс уточнения расположения характерных точек графика, соответствующих экстремумам функции и перегибам графика. Если точек перегиба у графика функции нет и график можно построить сразу после исследования по производной I-го порядка, то исследование по производной II-го порядка можно использовать для контроля за правильностью полного исследования (промежутки выпуклости и вогнутости на построенном графике должны согласовываться с определяемыми по производной II-го порядка).

ПРИМЕР 13.1. Провести полное исследование и построить график функции
$$y = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}.$$

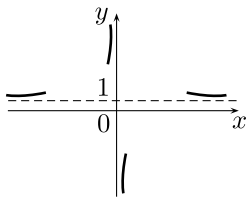
$\lhd$ 1. Область определения функции: $x \neq 0$.

2. Найдем нули функции: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + x - 2 = 0$. Легко видеть, что $x = 1$ является корнем этого уравнения и, следовательно, многочлен $x^3 + x - 2$ делится нацело на $x - 1$. Деля на $x - 1$, получаем $x^2 + x + 2$. Итак,
$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0.$$
Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 2$ меньше нуля, то функция $y(x)$ равна нулю только в точке $x = 1$.

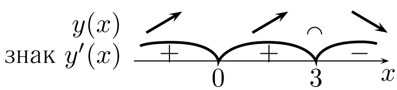
3. Выясним, существуют ли у графика функции наклонные или горизонтальная асимптоты:
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 2}{x^4} = 0;$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = 1.$$
Итак, горизонтальная асимптота существует и ее уравнение $y = 1$.

Так как
$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} - 1 = \frac{x - 2}{x^3} > 0$$
при $x \to \pm\infty$, то график функции расположен над графиком асимптоты при $x \to \infty$.

4. $\lim\limits_{x\to -0} y = \left(\frac{-2}{-0}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +0} y = \left(\frac{-2}{+0}\right) = -\infty$; $x = 0$ — вертикальная асимптота. Элементы графика функции вблизи асимптот будут выглядеть следующим образом:

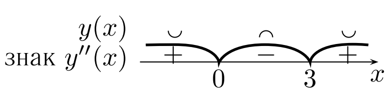


5. $$y' = \frac{(3x^2+1)x^3 - 3x^2(x^3+x-2)}{x^6} = $$
$$= \frac{3x^3 + x - 3x^3 - 3x + 6}{x^4} = \frac{-2x+6}{x^4} = -\frac{2(x-3)}{x^4}.$$



$x = 3$ — точка максимума, $y(3) = \frac{28}{27}$ — максимум.

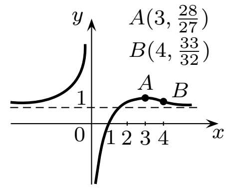
6. $$y'' = \frac{-2x^4 - 4x^3(-2x+6)}{x^8} = $$
$$= \frac{-2x+8x-24}{x^5} = \frac{6x-24}{x^5} = \frac{6(x-4)}{x^5}.$$



$x = 4$ — абсцисса точки перегиба, $y(4) = \frac{33}{32}$;

$$\left(4, \frac{33}{32}\right) \text{ — точка перегиба.}$$

7. Итак, на интервале $(0, \infty)$ функция возрастает и график ее вогнутый, на интервале $(0, 3)$ — возрастает и ее график выпуклый, на интервале $(3, 4)$ — убывает и график выпуклый, на интервале $(4, \infty)$ — убывает и график вогнутый. ▷



ПРИМЕР 13.2. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}.$$

$\lhd$ 1. Функция определена при любом значении x.

2. $y = 0$ при $x = 0$.

Функция $y(x)$ — нечетная. Действительно,

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x+4)^2} - \sqrt[3]{(-x-4)^2} = \\ = \sqrt[3]{(x-4)^2} - \sqrt[3]{(x+4)^2} = -y(x).$$

В силу нечетности функции график будет симметричным относительно начала координат.

3. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}}{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{x((x+4)^{4/3} + (x+4)^{2/3}(x-4)^{2/3} + (x-4)^{4/3})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{16}{(x+4)^{4/3}+(x+4)^{2/3}(x-4)^{2/3}+(x-4)^{4/3}} = \left(\frac{16}{\infty}\right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{(x+4)^{4/3} + (x+4)^{2/3}(x-4)^{2/3} + (x-4)^{4/3}} =$$

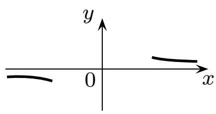
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{16x}{3x^{4/3}} = 0.$$

Уравнение горизонтальной асимптоты $y = 0$

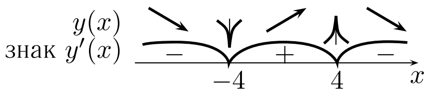
$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2} \begin{cases} > 0 & \text{при } x \to +\infty, \\ < 0 & \text{при } x \to -\infty. \end{cases}$$

и график расположен над асимптотой при $x \to +\infty$ и под асимптотой при $x \to -\infty$.

4. Вертикальных асимптот нет; на рисунке показаны элементы графика вблизи горизонтальной асимптоты.



5. $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+4}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-4}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+4}}{\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}}$,

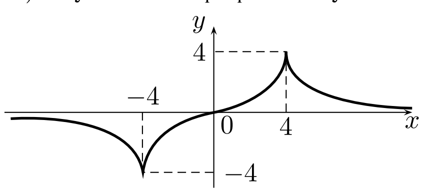


$y_{\min} = y(-4) = -4, \qquad y_{\max} = y(4) = 4.$

6. $$y'' = -\frac{2}{9}(x+4)^{-(4/3)} + \frac{2}{9}(x-4)^{-(4/3)} =$$
$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+4)^4} - \sqrt[3]{(x-4)^4}}{(\sqrt[3]{(x+4)(x-4)})^4};$$

$x = 0$, $y = 0$ — точка перегиба.

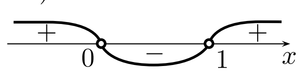
5. На интервале $(-\infty, -4)$ функция убывает и график выпуклый, на $(-4, 0)$ функция возрастает (график выпуклый), на интервале $(0, 4)$ функция возрастает и график вогнутый, на интервале $(4, +\infty)$ — убывает и график вогнутый. $\triangleright$



ПРИМЕР 13.3. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln \frac{x}{x-1} + 1.$$

$\triangleleft$ 1. Область определения функции описывается неравенством $\frac{x}{x-1} > 0$, решая которое методом интервалов, получаем $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.



2. Нули функции являются решением уравнения $y(x) = 0$ или $\ln \frac{x}{x-1} = -1$, откуда находим $x = \frac{1}{1-e}$.

3. $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x/(x-1))+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln[((x-1)+1)/(x-1)]+1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln[1+1/(x-1)]}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x-1)} + 0 = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{x-1}+1\right) = 0+1 = 1.$$

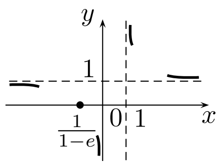
Уравнение горизонтальной асимптоты $y = 1$;

$$y_{\text{гр}} - y_{\text{ас}} = \ln\frac{x}{x-1}\begin{cases} > 0 & \text{при } x\to+\infty,\\ < 0 & \text{при } x\to-\infty.\end{cases}$$

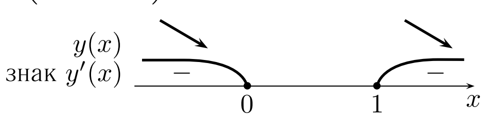
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0-0}\left(\ln\frac{x}{x-1}+1\right) = \bigl(\ln(+0)+1\bigr) = -\infty;$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\ln\frac{x}{x-1}+1\right) = \left(\ln\left(\frac{1}{+0}\right)+1\right) = +\infty.$$

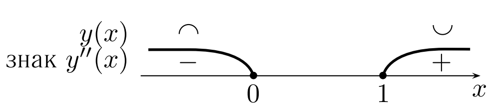
Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ — вертикальные асимптоты графика данной функции. Результаты, полученные в пунктах 3 и 4 позволяют наметить элементы графика вблизи асимптот.



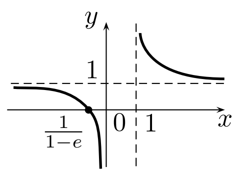
5. $\displaystyle y' = \left(\ln\frac{x}{x-1}+1\right)' = (\ln x - \ln(x-1))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x(x-1)}\,.$



6. $\displaystyle y'' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-(x-1)^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}\,.$



7. Окончательно получаем следующий график функции. ▷



ПРИМЕР 13.4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x^2 e^{-x}.$$

$\lhd$ 1. Функция определена при всех значениях x.

2. $y = 0$ при $x = 0$.

3. Для вычисления k и b применим правило Лопиталя:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (y - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0;$$

$y = 0$ — уравнение правой асимптоты;

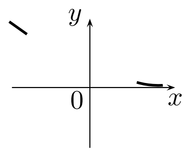
$$y_{\text{гр}} - y_{\text{пр. ас}} = x^2 e^{-x} > 0$$

и график расположен над асимптотой.

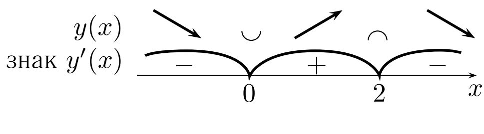
Заметим, что $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = \infty$ и, следовательно, левая асимптота не существует

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

4. Вертикальных асимптот нет; на рисунке показаны элементы графика вблизи асимптоты и при $x \to -\infty$.

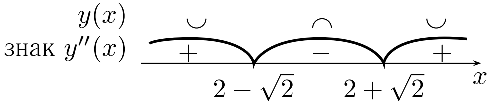


5. $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$, $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$.



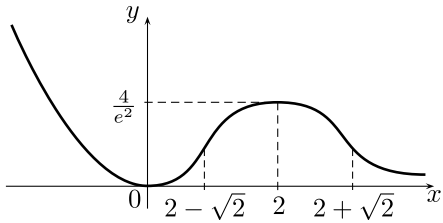
$$y_{\min} = y(0) = 0, \qquad y_{\max} = y(2) = 4/e^2.$$

6. $y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) =$
$= e^{-x}(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$.



$$y(2-\sqrt{2}) = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}}; \qquad y(2+\sqrt{2}) = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}.$$

7. ▷

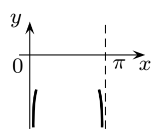


ПРИМЕР 13.5. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln \sin x.$$

◁ Заметим прежде всего, что $y(x)$ — периодическая функция $y(x+2\pi) = \ln\sin(x+2\pi) = \ln\sin x = y(x)$, поэтому достаточно провести исследования и построить график на любом промежутке длиной 2π, например $[-\pi, \pi]$, а затем продолжить график функции, используя периодичность.

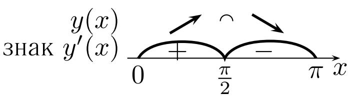
1. На отрезке $[-\pi, \pi]$ функция определена для $x \in (0, \pi)$.
2. $y(x) = 0 \Rightarrow \ln\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.
3. Горизонтальных и наклонных асимптот у функции нет.
4. $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln\sin x = \big(\ln(+0)\big) = -\infty;$



$$\lim_{x\to \pi-0} \ln\sin x = \big(\ln(+0)\big) = -\infty;$$

$x = 0$ и $x = \pi$ — уравнения вертикальных асимптот.

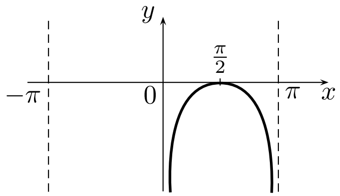
5. $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$.



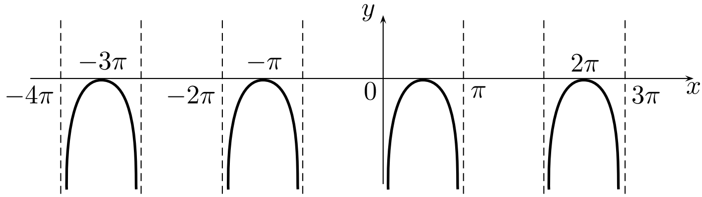
$y_{\max} = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ — график функции всюду выпуклый.

7. На отрезке $[-\pi, \pi]$ график функции $y(x) = \ln\sin x$ выглядит следующим образом:



Используя периодичность функции, продолжаем график функции на всю числовую ось. ▷

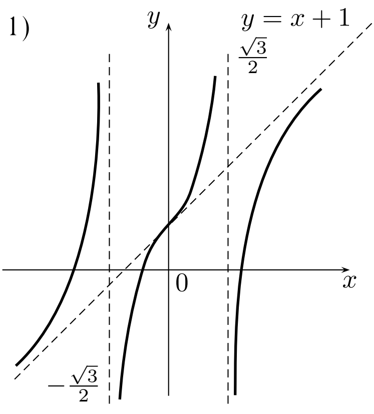


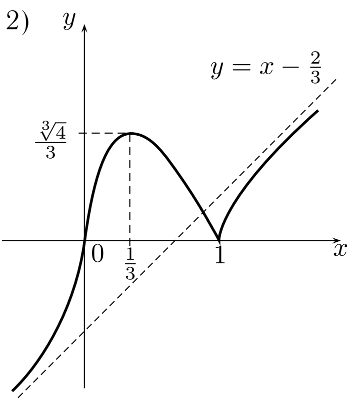
ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Провести полное исследование и построить графики функций:

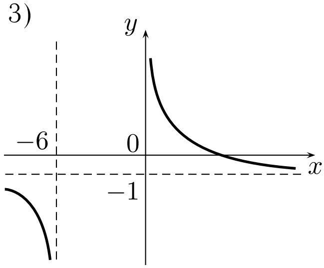
1. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}$.
2. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.
3. $y = \ln\dfrac{x+6}{x} - 1$.
4. $y = x\ln x$.
5. $y = \ln(\sqrt{2}\cos x)$.

Ответы:

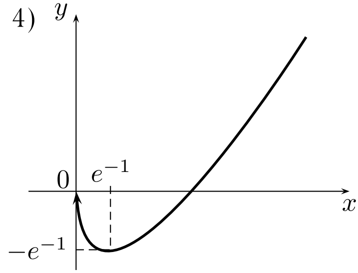




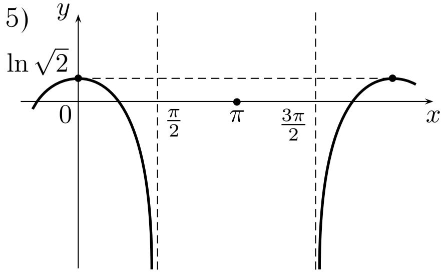
3)



4)



5)



Занятие 14

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ И УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 14.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Если функция $y=y(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{14.1}$$

то ее производная

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

ПРИМЕР 14.1. Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \tag{14.2}$$

($a > 0$, $b > 0$ — постоянные).

$$\triangleleft \quad \frac{dx}{dt} = -a\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \quad \triangleright$$

Производная $\frac{dy}{dx}$, вообще говоря, получается выраженной через параметр t. Поэтому, если требуется найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$, то производную $\frac{dy}{dx}$ следует рассматривать как сложную функцию от x с промежуточным аргументом $t = \varphi^{-1}(x)$, где φ^{-1} — обратная к функции φ, и применять правила дифференцирования сложной и обратной функций.

Для функции в примере

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)\cdot\frac{dt}{dx} =$$

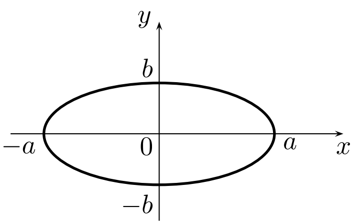
$$= \frac{b}{a\sin^2 t}\cdot\frac{1}{dx/dt} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Кривая, определяемая параметрическими уравнениями (14.1), или часть этой кривой является графиком функции $y = y(x)$.

В примере параметрические уравнения определяют эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(это уравнение получается из параметрических уравнений путем исключения параметра t).



Верхняя половина эллипса является графиком функции $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, а нижняя — графиком функции $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Рассмотренный пример показывает, что параметрические уравнения (14.1) могут определять несколько различных функций $y = y(x)$.

При анализе кривой, заданной параметрическими уравнениями (14.1) производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ можно использовать для определения ее участков, соответствующих убыванию и возрастанию функций $y = y(x)$, их выпуклости и вогнутости, точек на кривой, соответствующих экстремумам функций $y = y(x)$, и точек перегиба.

ПРИМЕР 14.2. Провести исследование функции, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (a > 0)$$

и построить ее график.

◁ Величины x и y определены для всех значений t. Найдем производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a\sin t;$$

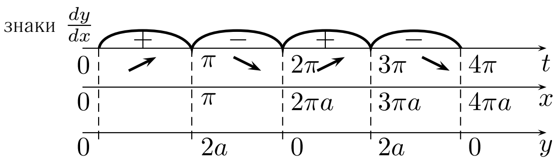
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Критические точки исследуемой функции:

при $\dfrac{dy}{dx} = \infty \quad x = 2\pi an(t = 2\pi n);$

при $\dfrac{dy}{dx} = 0 \quad x = \pi a + 2\pi an(t = \pi + 2\pi n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$

С помощью метода интервалов определим знаки производной $\frac{dy}{dx}$



Функция возрастает при

$$2\pi na < x < \pi a + 2\pi an(2n\pi < t < 2n\pi + \pi),$$

а убывает при

$$\pi a + 2\pi an < x < 2\pi a + 2\pi an(\pi + 2n\pi < t < 2\pi + 2n\pi).$$

Функция имеет максимум в точках

$$x = \pi a + 2\pi an(t = \pi + 2\pi n), \quad y(\pi a + 2\pi an) = 2a.$$

Касательная в этих точках параллельна оси Ox, так как

$$y'(\pi a + 2\pi an) = 0.$$

Функция имеет минимум в точках $x = 2\pi an$, $y(2\pi an) = 0$. *Касательная в этих точках параллельна оси* Oy, так как $y'(2\pi an) = \infty$.

Найдем производную второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2(t/2)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{dx/dt} = -\frac{1}{2\sin^2(t/2)}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4(t/2)}.$$

Критические точки $x = 2\pi n a$, $(t = 2\pi n)$. На интервалах, расположенных между критическими точками, график функции выпуклый. На основании проведенного исследования строим кривую (рис. 14.1); она называется циклоидой. $\triangleright$

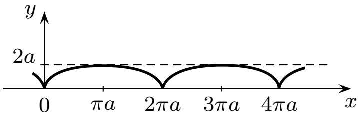


Рис. 14.1

ПРИМЕР 14.3. Провести исследование кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad (a > 0, b > 0).$$

$\triangleleft$ Заметим, что здесь можно исключить параметр t:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \iff \begin{cases} \cos^2 t = (x/a)^{2/3} \\ \sin^2 t = (y/b)^{2/3}. \end{cases}$$

Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, получим уравнение кривой в виде

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$$

Однако для анализа кривой удобнее использовать именно параметрические уравнения.

Величины x и y определены для всех значений t. Так как функции $\cos^3 t$ и $\sin^3 t$ — периодические, с периодом 2π, то достаточно рассмотреть изменение параметра t в пределах от 0 до 2π. При этом областью изменения x будет отрезок $[-a, a]$, а областью изменения y будет отрезок $[-b, b]$. Следовательно, рассматриваемая кривая расположена в прямоугольнике, ограниченном прямыми $y = \pm b, x = \pm a$.

Найдем производные $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ и $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t.$$

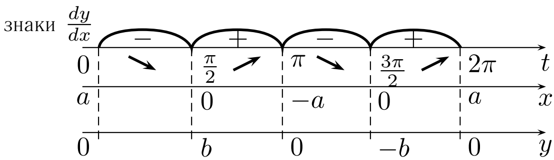
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} t.$$

Критические точки функций, определяемых заданными параметрическими уравнениями:

$$\text{при } \frac{dy}{dx} = 0 \quad x = a \ (t = 0), \ x = -a \ (t = \pi), \ x = a \ (t = 2\pi);$$

$$\text{при } \frac{dy}{dx} = \infty \quad x = 0 \ (t = \frac{\pi}{2}), \ x = 0 \ (t = \frac{3\pi}{2}).$$

С помощью метода интервалов определим знаки производной $\frac{dy}{dx}$.



Из анализа поведения функции следует, что уравнения (14.1) определяют две функции вида $y = f(x)$, непрерывные на $[-a, +a]$.

Одна функция $y = f_1(x)$ принимает неотрицательные значения $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, а вторая функция $y = f_2(x)$ — меньшие или равные нулю $(\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Функция $y = f_1(x)$ возрастает при $-a < x < 0$ и убывает при $0 < x < a$, а в точке $x = 0$ имеет максимум $y_{\max} = b$. В этой точке $\frac{dy}{dx} = \infty$, следовательно, в ней касательная к кривой вертикальна.

Функция $y = f_2(x)$ убывает при $-a < x < 0$ и возрастает при $0 < x < a$, а в точке $x = 0$ имеет минимум $y_{\min} = -b$. При $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \infty$, следовательно, в этой точке касательная к кривой вертикальна.

В точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ производная $\frac{dy}{dx} = 0$.

В этих точках касательная к кривой горизонтальна.

Найдем производную второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{dt}(\operatorname{tg} t) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

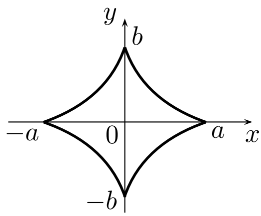
$$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{dx/dt} = -\frac{b}{a\cos^2 t} \cdot \frac{1}{-3a\cos^2 t \sin t} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t \sin t}.$$

Отсюда следует

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad \text{при } 0 < t < \pi \text{ — кривая вогнутая;}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad \text{при } \pi < t < 2\pi \text{ — кривая выпуклая.}$$

На основании результатов исследования построим кривую. Эта кривая называется астроидой. ▷

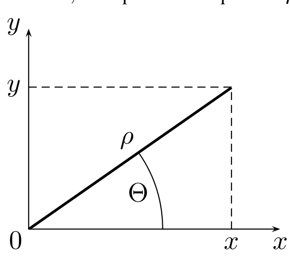


§ 14.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Если кривая на плоскости задана уравнением в полярных координатах

$$\rho = \rho(\theta),$$

где $\rho \geqslant 0$ — полярный радиус, θ — полярный угол, то, выражая декартовы координаты x,   через полярные ρ, θ,



получим параметрические уравнения кривой

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

с параметром θ.

Производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ можно использовать при анализе построения кривой $\rho = \rho(\theta)$ таким же образом, как и выше: для определения наклона касательной, отыскания участков кривой, соответствующих убыванию и возрастанию функции $y = y(x)$, их выпуклости и вогнутости и т.д.

ПРИМЕР 14.4. Исследовать кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$\rho = \sin 3\theta$$

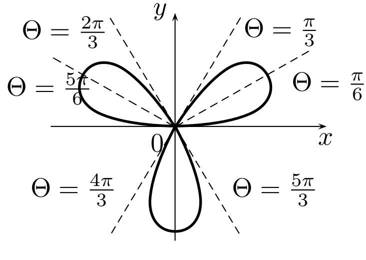
и построить ее.

$\lhd$ При изменении θ от 0 до $\pi/6$ полярный радиус ρ точки кривой меняется от 0 до 1. Геометрически изменению θ соответствует вращение луча, исходящего из полюса (противоположное движению часовой стелки, если θ растет). Если по этому вращающемуся лучу двигать точку так, чтобы расстояние от полюса $\rho = \sin 3\theta$, то она будет описывать исследуемую кривую. При вращении луча от полярной оси ($\theta = 0$) на угол $\pi/6$ (противоположном движению часовой стрелки) эта точка смещается по лучу из полюса ($\rho = 0$) на расстояние, равное 1. При дальнейшем изменении θ от $\pi/6$ до $\pi/3$ луч поворачивается еще на угол $\pi/6$ (в том же направлении), а точка, описывающая кривую $\rho = \sin 3\theta$, смещается по лучу назад в полюс ($\rho = 0$). В результате получается «лепесток» в I-м квадранте.

Для значений $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ получим $\rho < 0$. А так как полярный радиус не может быть отрицательным, это означает, что между лучами $\theta = \pi/3$ и $\theta = 2\pi/3$ точек кривой нет ($\bar{\exists}$).

Продолжив исследование зависимости ρ от θ и охватив диапазон изменения θ от 0 до 2π (результаты исследования сведены в таблицу), придем к выводу, что кривая состоит из трех «лепестков», поэтому называется трехлепестковой розой.

θ	$0 \to \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3} \to \frac{2\pi}{3} \to \frac{5\pi}{6} \to \pi \to \frac{4\pi}{3} \to \frac{3\pi}{2} \to \frac{5\pi}{3} \to 2\pi$
ρ	$0 \to 1 \to 0 \quad \bar{\exists} \quad 0 \to 1 \to 0 \quad \bar{\exists} \quad 0 \to 1 \to 0 \quad \bar{\exists} \quad 0$



Для уточнения вида кривой определим направления касательных к ней в характерных точках. Для этого выразим декартовы координаты через полярные и получим параметрические уравнения кривой:

$$x = \sin 3\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\sin 4\theta + \sin 2\theta\right);$$
$$y = \sin 3\theta \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta - \cos 4\theta\right),$$

тогда производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin 4\theta - \sin 2\theta}{2\cos 4\theta + \cos 2\theta}$$

и
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \sqrt{3},$$

а углы φ наклона касательной к кривой

$$\varphi|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\pi/6} = -\frac{\pi}{3}, \quad \varphi|_{\theta=\pi/3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, «лепесток» в I-м квадранте касается лучей $\theta = 0$, $\theta = \pi/3$, а при $\theta = \pi/6$ его касательная перпендикулярна лучу $\theta = \pi/6$, являющемуся осью «лепестка».

Аналогично можно установить, что два других «лепестка» кривой обладают подобными свойствами. ▷

ПРИМЕР 14.5. Провести исследование кривой, заданной уравнением в полярных координатах

$$\rho = a(1 - \cos\theta),$$

и построить ее. Заметим, что $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$.

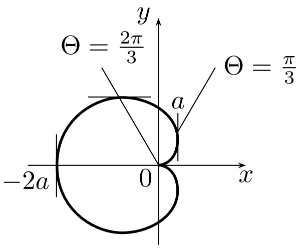
Это означает, что точки кривой на лучах $\theta = C$ и $\theta = -C$ одинаково удалены от полюса. А так как эти лучи симметричны относительно полярной оси Ox и это верно для $\forall C$ (для любой пары таких лучей), то кривая тоже симметрична относительно полярной оси.

Поэтому достаточно провести исследования кривой при изменении угла θ от 0 до π. При вращении луча от полярной оси $\theta = 0$ на угол $\pi/2$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки, полярный радиус ρ точки кривой меняется от

0 до a. При дальнейшем изменении θ от $\pi/2$ до π луч поворачивается еще на угол $\pi/2$ (в том же направлении, а точка, описывающая кривую $\rho = a(1 - \cos\theta)$, смещается по лучу от точки, в которой $\rho = a$ до $\rho = 2a$.

Для значений $\theta \in (0, \pi)$ результаты исследований сведены в таблицу.

θ	$0 \to \frac{\pi}{2} \to \pi$
ρ	$0 \to a \to 2a$



Для уточнения вида кривой определим направления касательных к ней в характерных точках. Для этого выразим декартовы координаты через полярные и получим параметрические уравнения кривой:

$$x = a(1 - \cos\theta)\cos\theta = a(\cos\theta - \cos^2\theta);$$
$$y = a(1 - \cos\theta)\sin\theta = a(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta).$$

Найдем производные

$$\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \sin 2\theta) = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2};$$
$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - \cos 2\theta) = 2a\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}; \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\theta;$$

и

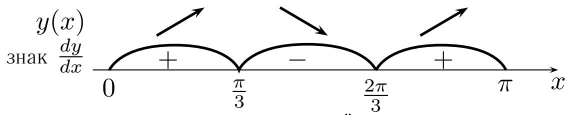
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \infty, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2\pi/3} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi} = \infty;$$

углы φ наклона касательных к кривой:

$$\varphi|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\pi/3} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi|_{\theta=2\pi/3} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, касательные к кривой горизонтальны при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{2\pi}{3}$, а при $\theta = \frac{\pi}{3}$ и $\theta = \pi$ — вертикальные.

Исследуем знаки $\frac{dy}{dx}$ для $\theta \in [0; \pi]$.



Следовательно, на участках кривой, соответствующих изменению угла θ от 0 до $\pi/3$ и от $2\pi/3$ до π, функция $y = y(x)$ возрастает, а на участках, соответствующих изменению угла θ от $\pi/3$ до $2\pi/3$, функция $y = y(x)$ убывает.

Найдем вторую производную

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{2}\theta\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{2}\theta\right) \Big/ \frac{dx}{d\theta} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(3/2)\theta}\cdot\frac{1}{2a\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2)\theta} =$$

$$= \frac{3}{4a\sin(\theta/2)}\cdot\frac{1}{\cos^3(3/2)\theta}.$$

Исследуем знаки $\frac{d^2y}{dx^2}$ для $\theta \in [0, \pi]$. Очевидно, что они определяются знаками функции $\cos^3\frac{3}{2}\theta$.

Следовательно, участок кривой, соответствующий $\theta \in [0, \pi/3]$, является выпуклым, а участок кривой, соответствующий $\theta \in \in [\pi/3, \pi]$, является вогнутым.

Учитывая симметрию относительно полярной оси, получаем кривую, называемую *кардиоидой.* ▷

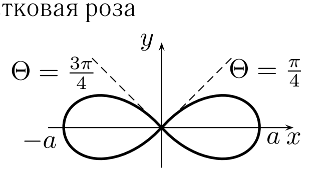
ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Провести исследование кривых, заданных уравнениями в полярных координатах, и построить их.

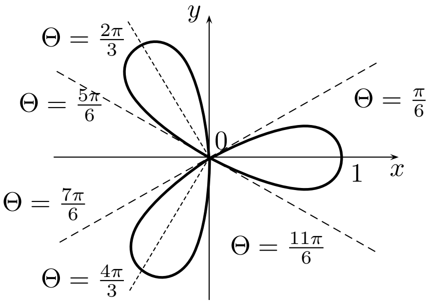
1. $\rho = a\cos 2\theta$;
2. $\rho = \cos 3\theta$;
3. $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Ответы:

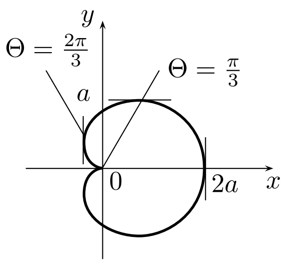
1. Двухлепестковая роза



2. Трехлепестковая роза



3. Кардиоида



Занятие 15

ОТЫСКАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

§ 15.1. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Глобальные экстремумы функции $f(x)$ на множестве **E**, т. е. $\max\limits_{x\in\mathbf{E}} f(x)$ и $\min\limits_{x\in\mathbf{E}} f(x)$ могут быть в точках локального экстремума функции $f(x)$, в ее точках разрыва и в граничных точках множества **E**. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она имеет наибольшее и наименьшее значение на этом отрезке, которые и являются ее глобальными экстремумами $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Так как все точки локальных экстремумов функции являются ее критическими точками и, следовательно, содержатся среди критических точек, то в этом случае глобальные экстремумы можно отыскать следующим образом.

1. Найти все критические точки функции $f(x)$ на интервале (a,b).

2. Вычислить значения функции $f(x)$ в этих точках (среди них будут содержаться все локальные экстремумы функции $f(x)$ на (a,b)) и на концах отрезка $[a,b]$.

3. Выбрать среди вычисленных значений функции $f(x)$ наибольшее и наименьшее значения. Они и будут глобальными экстремумами функции $f(x)$ на $[a,b]$.

ПРИМЕР 15.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, x \in [-1,2].$$

$$\triangleleft \quad y'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) =$$
$$= 5x^2(x-1)(x-3); \quad y'(x) = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

Критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ принадлежат рассматриваемому интервалу. Найдем значения функции в этих точках и в концах отрезка:

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad y(-1) = -10, \quad y(2) = -7;$$
$$\max_{x\in[-1,2]} y(x) = y(1) = 2; \qquad \min_{x\in[-1,2]} y(x) = y(-1) = -10. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР (для самостоятельного решения).

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad x \in [-2, 2].$$

Ответ. $\max\limits_{x\in[-2,2]} y(x) = 13, \qquad \min\limits_{x\in[-2,2]} y(x) = 4.$

Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва или если она непрерывна не на отрезке, а на интервале или полуинтервале, то функция $f(x)$ может не иметь глобальных экстремумов или хотя бы одного из них. В таких случаях при отыскании глобальных экстремумов или установлении их отсутствия может потребоваться более полное исследование функции, включающее анализ знаков производной для определения локальных экстремумов и исследование поведения функции в точках разрыва и в граничных точках области определения или в бесконечности.

ПРИМЕР 15.2. Исследовать на глобальные экстремумы функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ x+1 & \text{при } 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

$$\triangleleft \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 < x < 0, \\ \ \ 1 & \text{при } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ не обращается в нуль, поэтому глобальный экстремум может быть на концах отрезка и в точке разрыва функции $x = 0$.

$$f(-1) = 1; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 2.$$
$$\max_{x\in[-1,1]} f(x) = 2; \qquad \min_{x\in[-1,1]} f(x) = 1. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 15.3. Исследовать на глобальные экстремумы функцию

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

1) на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;

2) на промежутке $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\triangleleft$ $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Критические точки находятся из уравнения $\cos x = 0$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$;

1) внутри интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ критических точек нет, на левом конце полуинтервала $f(0) = 0$, а $\lim\limits_{x \to \pi/2-0} f(x) = +\infty$. Поэтому $\min\limits_{x \in [0,\pi/2)} f(x) = 0, \ \max\limits_{x \in [0,\pi/2)} f(x) = +\infty$;

2) внутри интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ критических точек нет. Исследование поведения функции в точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$ показывает, что $\lim\limits_{x \to \pi/2-0} f(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\pi/2+0} f(x) = -\infty$. Следовательно, $\min\limits_{x \in (-\pi/2,\pi/2)} f(x) = -\infty, \ \max\limits_{x \in (-\pi/2,\pi/2)} f(x) = +\infty$. $\triangleright$

ПРИМЕР 15.4. Исследовать на глобальные экстремумы функцию

$$f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \quad \text{при } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$$

$$\triangleleft \quad f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = \frac{2(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}.$$

Внутри интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ есть только одна критическая точка $x = \frac{\pi}{4}$; $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено,

$$\lim_{x \to \pi/2-0} f(x) = \lim_{x \to \pi/2-0} \operatorname{tg} x[2 - \operatorname{tg} x] = -\infty.$$

Итак,

$$\min_{x \in [0,\pi/2)} f(x) = -\infty,$$

$$\max_{x \in [0,\pi/2)} f(x) = 1. \qquad \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

Исследовать на глобальные экстремумы следующие функции:

1. $f(x) = x + \frac{1}{x-4}$ на $[0, 4)$;
2. $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ на $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Ответы:

1. $\min\limits_{x \in [0,4)} f(x) = -\infty, \ \max\limits_{x \in [0,4)} f(x) = 2$;
2. $\min\limits_{x \in (\pi/4,\pi]} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \max\limits_{x \in (\pi/4,\pi]} f(x) = +\infty$;

§ 15.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

К отысканию экстремумов и точек экстремумов сводятся многие задачи экономического характера.

ПРИМЕР 15.5. Расходы на топливо для парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 км/час расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (независящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова при этом общая сумма расходов в час?

$\triangleleft$ Пусть x руб/ч — расход на топливо, v км/ч — скорость парохода, тогда $x = \gamma v^3$, где γ — коэффициент пропорциональности. Из условия $x = 30$ руб/ч при $v = 104$ км/ч находим, что $\gamma = 0,03$. Пароход проходит расстояние в 1 км за $\frac{1}{v}$ ч, поэтому общая сумма расходов на 1 км пути будет равна

$$f(v) = (x + 480)\frac{1}{v} = 0,03v^2 + \frac{480}{v}.$$

Исследуем полученную функцию $f(v)$ на глобальный экстремум $v \in (0, +\infty)$:

$$f'(v) = 0,06v - \frac{480}{v^2};$$

$$f'(v) = 0 \quad \text{при } v = 20;$$

$f(20) = 48$; $f(0)$, $f(\infty)$ не определены, но

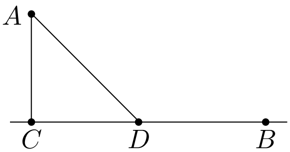
$$\lim_{v \to 0} f(v) = \lim_{v \to \infty} f(v) = \infty.$$

Итак 48 руб. — наименьшая общая сумма расходов на 1 км пути. Расход на топливо в час находим по формуле $x = 0{,}03 \cdot 8000 = 240$ руб/ч, отсюда общая сумма расходов в час $240 + 480 = 720$ руб/ч. $\triangleright$

Если функция имеет лишь один локальный экстремум на некотором промежутке, то она называется унимодальной на этом промежутке. Иногда существование и вид локального экстремума (максимум или минимум) у исследуемой функции определяются существом задачи. Если при этом функция имеет лишь одну критическую точку на рассматриваемом промежутке, то функция унимодальна и отысканием критической точки решение задачи об экстремуме функции завершается, так как эта точка и будет точкой экстремума.

ПРИМЕР 15.6. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на веслах 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время.

$\lhd$ Пусть в точке A расположен миноносец, в точке B — лагерь, C — точка берега, ближайшая к миноносцу, D — точка, где должен пристать гонец.



Из условия задачи $AC = 9$ км, $BC = 15$ км. Пусть $CD = x$ км, тогда $AD = \sqrt{81 + x^2}$ км, а время, затраченное на этот путь, $\frac{\sqrt{81+x^2}}{4}$ часа. $BD = (15 - x)$ км, поэтому на этот участок пути потребуется $\frac{15-x}{5}$ часа. Всего будет затрачено

$$t(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5} \text{ часа.}$$

Требуется найти наименьшее значение функции $t(x)$ на отрезке $[0, 15]$:

$$t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{81 + x^2}}{20\sqrt{81 + x^2}};$$

$t'(x) = 0$ при $x = 12$, причем $t'(x) < 0$ при $x < 12$ и $t'(x) > 0$ при $x > 12$. Следовательно, функция $t(x)$ имеет в точке $x = 12$ минимум.

Таким образом, гонец должен пристать в 3 км от лагеря. $\rhd$

ПРИМЕР 15.7. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен $72\,\text{см}^3$, причем стороны основания относились бы как $1 : 2$. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

$\lhd$ Пусть x см — меньшая сторона основания, тогда $2x$ см — другая сторона основания. Высота h находится из соотношения $2x^2h = 72$;

$$h = \frac{36}{x^2}.$$

Полная поверхность $S(x) = 2\left(2x^2 + \frac{36}{x} + \frac{72}{x}\right) = 4x^2 + \frac{216}{x}$;

$$S'(x) = 8x - \frac{216}{x^2} = \frac{8(x^3 - 27)}{x^2};$$

$S'(x) = 0$ при $x = 3$.

Итак, полная поверхность будет наименьшей, когда стороны ящика равны 3 см, 6 см и 4 см. $\triangleright$

ПРИМЕР 15.8. Открытый чан имеет форму цилиндра, объем которого равен ν. Каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

$\triangleleft$ Пусть R — радиус основания цилиндра, H — его высота. Объем цилиндра $\pi R^2 H = \nu \Rightarrow H = \frac{\nu}{\pi R^2}$. Поверхность чана

$$S(R) = \pi R^2 + 2\pi RH = \pi R^2 + \frac{2\nu}{R},$$

$$S'(R) = 2\pi R - \frac{2\nu}{R^2} = \frac{2(\pi R^3 - \nu)}{R^2},$$

$$S'(R) = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{\nu}{\pi}}, \quad H = \sqrt[3]{\frac{\nu}{\pi}}. \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Для доставки продукции завода N в город A (рис. 15.1) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая сумма перевозок продукции завода N в город A по шоссе и по железной дороге была наименьшей, если известно, что $AB = 500$ км, а $NB = 100$ км?

2. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 15.2). Задан периметр p этой фигуры. При каких размерах x и y окно будет пропускать наибольшее количество света?

Ответы: 1. $\left(500 - \frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ км; 2. $x = \frac{2p}{4+\pi}$, $y = \frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right)$.

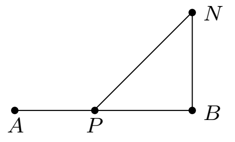


Рис. 15.1

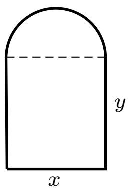


Рис. 15.2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ПРЕДЕЛЫ»

Вариант 1

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4(x-\pi)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\ln(1+x^3))^{3/(x^2 \sin x)}$.

Вариант 2

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^3-3x-2)}{x+x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(10(x+\pi))}{e^{x^2}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos\sqrt{x})^{1/x}$.

Вариант 3

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$.

Вариант 4

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}})^{2/\sin x}$.

Вариант 5

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

Вариант 6

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

Вариант 7

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$;

2) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}(1-\ln(1+\sqrt[3]{x}))^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$.

Вариант 8

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\left[2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right]^{3/x}$.

Вариант 9

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos \pi x)^{1/(x\sin \pi x)}$.

Вариант 10

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ»

Вариант 1

1. Найдите производную:

$$y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}).$$

2. Найдите производную:

$$y = (\operatorname{arctg} x)^{(\ln \operatorname{arctg} x)/2}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = x \arcsin(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad x > 0.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = \frac{4x - x^2}{4}, \quad x_0 = 2.$$

Вариант 2

1. Найдите производную:

$$y = \frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x).$$

2. Найдите производную:

$$y = (\sin\sqrt{x})^{\ln \sin \sqrt{x}}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = \operatorname{tg}(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2}), \quad x > 0.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2.$$

Вариант 3

1. Найдите производную:

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x - 3}{2}.$$

2. Найдите производную:

$$y = (\sin x)^{5e^x}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x}), \quad x > 0.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = x - x^3, \qquad x_0 = -1.$$

Вариант 4

1. Найдите производную:

$$y = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}.$$

2. Найдите производную:

$$y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4.$$

Вариант 5

1. Найдите производную:

$$y = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}.$$

2. Найдите производную:

$$y = (\ln x)^{3^x}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}, \quad x > 0.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1.$$

Вариант 6

1. Найдите производную:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}.$$

2. Найдите производную:

$$y = x^{\arcsin x}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = x \ln|x + \sqrt{x^2+3}| - \sqrt{x^2+3}, \quad x > 0.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8.$$

Вариант 7

1. Найдите производную:

$$y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg} e^x.$$

2. Найдите производную:

$$y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}.$$

3. Найдите дифференциал $\mathrm{d}y$:

$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x)\ln \operatorname{ch} x.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$$

Вариант 8

1. Найдите производную:

$$y = \ln(e^x+1) + \frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}.$$

2. Найдите производную:

$$y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

3. Найдите дифференциал dy

$$y = \arccos\frac{x^2 - 1}{x^2\sqrt{2}}.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16.$$

Вариант 9

1. Найдите производную:

$$y = \frac{2}{\ln 2}(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1}).$$

2. Найдите производную:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}.$$

3. Найдите дифференциал dy:

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}).$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$$

Вариант 10

1. Найдите производную:

$$y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1}.$$

2. Найдите производную:

$$y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

3. Найдите дифференциал dy:

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}\operatorname{arctg} x.$$

4. Составьте уравнения касательной и нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 3.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ГРАФИКИ»

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = x^2 + \frac{16}{x} - 16; \quad [1; 4].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 4 - x - \frac{4}{x^2}; \quad [1; 4].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Вариант 3

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1; \quad [0; 6].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{2}{x^2 + 2x}.$$

Вариант 4

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}; \quad [-3;3].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{4x^2}{3+x^2}.$$

Вариант 5

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 2\sqrt{x} - x; \quad [0;4].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{12x}{9+x^2}.$$

Вариант 6

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}; \quad [-1;5].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}.$$

Вариант 7

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = x - 4\sqrt{x} + 5; \quad [1;9].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{4-x^3}{x^2}.$$

Вариант 8

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \frac{10x}{1+x^2}; \quad [0;3].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}.$$

Вариант 9

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2; \quad [-3;3].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{2x^3+1}{x^2}.$$

Вариант 10

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59; \quad [2;4].$$

2. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

1. Предел функции в точке. Единственность предела. Ограниченность функции, имеющей предел. Связь функции, имеющей предел, и бесконечно малой функции.

2. Свойства бесконечно малых функций. Предел суммы, произведения и частного. Переход к пределу в неравенствах, предел промежуточной функции.

3. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Асимптотическое разложение непрерывной функции.

4. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Замена отношения бесконечно малых эквивалентными при вычислении пределов.

5. Сравнение бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции, связь с бесконечно малыми. Вертикальная асимптота графика функции.

6. Односторонние пределы. Классификация точек разрыва.

7. Предел функции в бесконечности. Наклонная асимптота графика функции.

8. Производная, геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику.

9. Дифференцируемость функции. Дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. Таблица производных.

10. Непрерывность дифференцируемой функции. Производные суммы, произведения и частного. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.

11. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

12. Производные и дифференциалы высших порядков.

13. Функции, непрерывные на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

14. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ролля, Лагранжа, Коши), геометрический смысл.

15. Правило Лопиталя для вычисления пределов.

16. Условия возрастания и убывания функции на интервале.

17. Экстремумы функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума по первой производной.

18. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

19. Представление функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ по формуле Тейлора. Оценка остаточного члена. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.

20. Направление выпуклости. Точки перегиба. Необходимое условие. Достаточное условие. Исследование по высшей производной.

21. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков. Достаточное условие экстремума по второй производной.

Образцы экзаменационных билетов

Билет № 1

1. Функции, непрерывные на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Ролля.

2. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Замена отношения бесконечно малых эквивалентными при вычислении пределов.

Билет № 2

1. Направление выпуклости. Точки перегиба. Достаточное условие.

2. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Билет № 3

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

2. Производная, геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику.

Билет № 4

1. Односторонние пределы. Классификация точек разрыва.

2. Экстремумы функции. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума по первой производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1982.

2. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. М.: Высш. шк., 1981.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. I. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учебное пособие для втузов // Под ред. Ефимова А. В. и Демидовича Б. П. М.: Наука, 1993.

4. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

5. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 1994.

СОДЕРЖАНИЕ

Практические занятия

ПРЕДЕЛЫ

Игорь Мелетиевич Петрушко, Леонид Антонович Кузнецов,
Галина Геннадьевна Кошелева, Александр Анатольевич Маслов,
Александр Яковлевич Янченко

Курс высшей математики

Введение в математический анализ
Дифференциальное исчисление

Лекции и практикум
Учебное пособие

Генеральный директор *А. Л. Кноп*. Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*. Редактор *И. Л. Яновская*
Подготовка иллюстраций *В. В. Воскресенская*
Верстальщик в LaTeX *М. Ю. Сторожев*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02
от 18.03.2002 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «Лань»
lan@lpbl.spb.ru www.lanpbl.spb.ru
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Издательство: тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
pbl@lpbl.spb.ru, print@lpbl.spb.ru

Сдано в набор 01.11.04. Подписано в печать 25.07.05.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат $84 \times 108\ ^1/_{32}$.
Печать высокая. Усл. п. л. 15,12. Тираж 3000 экз.

Заказ № .
Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов