МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

В. И. Хохлюк

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Новосибирск
2013

ББК В192.1 22.18
УДК 519.854
Х 861

Хохлюк В. И. Методы дискретной оптимизации: Учеб. пособие. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. Ч. 1. 154 с.

ISBN 978-5-4437-0169-1

Учебное пособие посвящено изложению основ численных методов дискретной оптимизации. Содержание пособия соответствует программе курса "Методы дискретной оптимизации", читаемого на механико-математическом факультете НГУ. Излагаемый материал доступен студентам старших курсов. Большое внимание уделяется рассмотрению конкретных примеров. Для самостоятельной работы студентов и для проведения семинарских занятий формулируются задачи, некоторые из которых снабжены ответами и указаниями.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук И. В. Зубов

ISBN 978-5-4437-0169-1

Посвящается выдающемуся учёному
академику Михаилу Михайловичу Лаврентьеву (1932–2010).

Оглавление

Предисловие

В данном учебном пособии отражён материал курсов, которые в течение ряда лет автор читал для студентов механико-математического факультета Новосибирского государственного университета.

Глава 1 представляет собой введение в теорию справедливых неравенств. Объектом исследования является допустимое множество задачи оптимизации. Рассмотрены линейная, целочисленная, смешанная, дизъюнктивная и комплементарная задачи.

В главе 2 детально описан прямой метод для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации. Изложенный метод является оригинальной разработкой автора.

В главе 3 для смешанной задачи оптимизации формулируются и доказываются теорема о разбиении этой задачи и две леммы. Эти утверждения составляют теоретическую основу для обоснования двух вычислительных процедур разбиения, которые отличаются друг от друга способом решения линейной задачи оптимизации.

Многие исследователи работали над созданием современной теории линейных неравенств и современной теории оптимизации, решая расширяющийся круг практических задач в различных областях [1, 2, 5, 6], [9]–[15], [18]–[20], [24]–[29], [31]–[35], [37]–[39], [41, 44, 46, 48, 50, 51, 53, 54, 57], [59]–[61], [66], [78, 79], [85, 92, 94, 96, 98, 99, 105, 106, 108, 109].

Надеюсь, что изучение материала, решение задач и список научных публикаций помогут читателю расширить свои знания по дискретной оптимизации. Желаю успеха!

Обозначения

В настоящем учебном пособии используются общепринятые обозначения и буквенные сокращения:

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots$;

$\mathbf{B}^n$ — множество всех n-векторов, каждая компонента которых равна либо 0, либо 1, $|\mathbf{B}^n| = 2^n$, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{Q}^n$ — множество всех n-векторов с рациональными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{Q}^n_+$ — множество всех n-векторов с неотрицательными рациональными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{R}^n$ — множество всех n-векторов с действительными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{R}^n_+$ — множество всех n-векторов с неотрицательными действительными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{Z}^n$ — множество всех n-векторов с целочисленными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$\mathbf{Z}^n_+$ — множество всех n-векторов с неотрицательными целочисленными компонентами, $n \in \mathbf{N}$;

$x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^n$ эквивалентно $x \in \mathbf{Z}^n_+$, $n \in \mathbf{N}$;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$\bigcap$ — операция пересечения, выполняемая более одного раза;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$\bigcup$ — операция объединения, выполняемая более одного раза;

$A + B$ — сумма множеств A и B;

$\sum$ — операция сложения, выполняемая более одного раза;

$A\ B$ — разность множеств A и B;

$convS$ — выпуклая оболочка множества S;

$detA$ — определитель матрицы A;

$rangA$ — ранг матрицы A;

$+$ — операция сложения;

$\sum$ — операция сложения, выполняемая более одного раза;

$\cdot$ или отсутствие знака — операция умножения;

$\prod$ — операция умножения, выполняемая более одного раза;

$\max\{a_1, a_2\}$ — наибольшая из двух величин a_1 и a_2;

$\max\limits_{j=1}^{n} a_j = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наибольшая из n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\min\{a_1, a_2\}$ — наименьшая из двух величин a_1 и a_2;

$\min\limits_{j=1}^{n} a_j = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наименьшая из n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\wedge$ — логическая операция конъюнкции;

$\bigwedge$ — логическая операция конъюнкции, выполняемая более одного раза;

$\vee$ — логическая операция дизъюнкции;

$\bigvee$ — логическая операция дизъюнкции, выполняемая более одного раза;

[1] — в работе 1 **(Литература)** формулируется упоминаемый факт или даётся ссылка на другую работу.

Логическая переменная часто заключается в круглые скобки. Например, $((x_1 \neq x_2) \wedge (y_1 \neq y_2)) = true$.

Часто столбец записывается в строку без знака транспонирования.

Вертикальная черта — разделитель между подматрицами матрицы. В записи множества с помощью фигурных скобок вертикальная черта читается и понимается как "для которых". В записи задачи оптимизации вертикальная черта читается и понимается как "при условиях".

В тексте вводятся и другие обозначения, когда это необходимо. Формулы нумеруются числами или латинскими буквами.

При изложении материала используются синонимы: все $\Longleftrightarrow$ всякий $\Longleftrightarrow$ любой; неравенство $\Longleftrightarrow$ сечение; разрешимая система $\Longleftrightarrow$ система имеет решение $\Longleftrightarrow$ совместная система. Слова "принцип" и "метапринцип" означают определённое правило построения справедливых неравенств для множества.

Глава 1.

Справедливые неравенства

Глава 1 представляет собой введение в теорию справедливых неравенств. Объектом исследования является допустимое множество задачи оптимизации. Рассматриваются пять классов задач оптимизации.

Материал излагается по схеме: принцип и теорема. Под принципом понимаем определённое правило построения справедливых неравенств для множества. Подчеркнём, что метод построения справедливых неравенств для множества существенно зависит от природы этого множества. Числовые примеры используются для иллюстрации отдельных фактов.

Для активной самостоятельной работы формулируются доступные задачи. Некоторые из этих задач решены или снабжены ответом (указанием).

Следует последовательно читать текст, параллельно решая задачи из параграфа 1.7 по соответствующей теме.

1.1. Линейная задача

Определение 1. Справедливым неравенством (сечением) для непустого множества S называется линейное неравенство с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{r} \pi_j x_j \geq \pi_0, \ \pi x \geq \pi_0, \tag{C}$$

которое выполняется для всех точек x из множества S ($S \subseteq \mathbf{R}^r$) (C — Cut — сечение).

Справедливое неравенство для множества S геометрически задаёт замкнутое полупространство, в котором целиком находится множество S.

По соглашению считаем, что любое неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является справедливым сечением для пустого множества S. В дальнейшем будет показано, что это соглашение является целесообразным.

Справедливое неравенство для/относительно системы ограничений есть справедливое неравенство для допустимого множества S, задаваемого этой системой. Выражения "для множества S" и "для системы ограничений" часто опускаются, если из контекста ясно, о чём идёт речь.

Определение 2. Пусть $x \geq 0$. Если $\pi' \geq \pi$, $\pi_0' \leq \pi_0$, то говорят, что неравенство $\pi' x \geq \pi_0'$ является ослаблением неравенства $\pi x \geq \pi_0$ или что неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является усилением неравенства $\pi' x \geq \pi_0'$.

Приведём и докажем лемму о справедливых ослаблениях, которая используется в формулировках различных принципов и в доказательствах теорем для этих принципов.

Лемма 1. Если $x \geq 0$ для всех $x \in S$, то любое ослабление справедливого неравенства для множества S также является справедливым для этого множества.

Действительно, для $x \in S$ имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\Big(\sum_{j=1}^{r} (\pi_j' - \pi_j) x_j \geq 0\Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{r} \pi_j' x_j \geq \sum_{j=1}^{r} \pi_j x_j \geq \pi_0 \geq \pi_0'\Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{r} \pi_j' x_j \geq \pi_0'\Big).$$

Заметим, что справедливые неравенства для множества S обладают рядом интересных свойств и изучаются методами алгебры и математической логики [86, 94], [99]–[105], [59, 77].

Рассмотрим линейную задачу оптимизации в каноническом виде

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^r\}.$$

В дальнейшем будем называть её задачей LP (L — Linear — линейный, P — Program — задача). Объектом исследования является допустимое множество этой задачи

$$S_1 = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^r\}.$$

Принцип LP. Если λ — произвольный неотрицательный m-вектор, то неравенство

$$(\lambda A)x \geq \lambda b \qquad (LPC)$$

и все его ослабления являются справедливыми неравенствами для непустого множества

$$S_1 = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^r\}.$$

Доказательство принципа LP очевидно, поэтому это доказательство иллюстрируется только конкретным числовым примером.

Пример 1. Из ограничений

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

для $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ получаем справедливое неравенство (LPC)

$$x_2 \geq 1.$$

Это эквивалентно умножению первых двух неравенств на $\frac{1}{2}$ и сложению их вместе.

Теорема 1. Если множество

$$S_1 = \{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^r\}$$

непусто, то любое справедливое сечение $\pi x \geq \pi_0$ для S_1 является ослаблением неравенства $(\lambda^* A)x \geq \lambda^* b$ для подходяще выбранного неотрицательного m-вектора λ^*.

Доказательство. Рассмотрим линейную задачу оптимизации

$$\min\{\pi x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}.$$

Из предположения $S_1 \neq \varnothing$ и неравенства $\pi x \geq \pi_0$ для всех $x \in S_1$ следует, что рассматриваемая задача имеет оптимальное решение x^*, для которого $x^* \geq 0,\ \pi x^* \geq \pi_0$.

По теореме двойственности задача

$$\max\{\lambda b \mid \lambda A \leq \pi,\ \lambda \geq 0\},$$

двойственная к рассматриваемой задаче, также имеет оптимальное решение λ^*, для которого $\lambda^* \geq 0, \lambda^* A \leq \pi, \lambda^* b = \pi x^* \geq \pi_0$. Таким образом, неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является ослаблением неравенства $(\lambda^* A)x \geq \lambda^* b$ для так выбранного вектора λ^*. Теорема доказана.

Пример 2 показывает, что для пустого множества S_1 принцип LP не обязательно всегда даёт все справедливые сечения (C) среди ослаблений неравенств (LPC).

Пример 2. Пусть

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid \ x_1 \geq 1, \ -x_1 \geq 0, \ (x_1, x_2) \geq 0\}.$$

Тогда справедливые сечения (LPC) имеют вид

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \geq \lambda_1 \text{ для } (\lambda_1, \lambda_2) \geq 0.$$

По соглашению справедливым сечением для пустого множества S_1 является любое неравенство $\pi x \geq \pi_0$, в частности, и неравенство

$$0 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 \geq 0.$$

Последнее неравенство не может находиться среди ослаблений неравенств (LPC), так как коэффициент в этом неравенстве при x_2 отрицательный.

1.2. Целочисленная задача

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации в стандартном виде

$$\min\{cx \mid Ax = b, \ x \in \mathbf{Z}^r_+\}.$$

В дальнейшем будем называть её задачей IP (I — Integer — целочисленный, P — Program — задача). Объектом исследования является допустимое множество этой задачи

$$S_2 = \{x \mid Ax = b, \ x \in \mathbf{Z}^r_+\}.$$

Непустое множество S_2 является дискретным, то есть оно состоит из отдельных точек с неотрицательными целочисленными координатами, удовлетворяющих системе линейных уравнений. После введения двух новых понятий принцип IP для множеств вида S_2 доказывается по индукции.

Определение 1. Моноид M есть полугруппа по сложению, содержащая нуль полугруппы, обозначаемый 0, то есть моноид удовлетворяет двум аксиомам:

1) $0 \in M$;

2) если v_1 и v_2 из M, то $(v_1 + v_2) \in M$.

Определение 2. Действительнозначная функция $F(v)$, определённая на моноиде M, называется субаддитивной, если для любых v_1 и v_2 из M

$$F(v_1 + v_2) \leq F(v_1) + F(v_2) \qquad (Sub)$$

($F: M \to \mathbf{R}^1$ есть отображение моноида M в множество $\mathbf{R}^1$ всех действительных чисел).

Принцип IP. Если F(v) — субаддитивная функция, определённая на моноиде

$$M = \{v \mid v = Az \quad \exists z \in \mathbf{Z}_+^r\} \tag{1}$$

и удовлетворяющая условию $F(0) = 0$, то неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j) x_j \geq F(b) \tag{IPC}$$

и все его ослабления являются справедливыми сечениями для непустого множества

$$S_2 = \{x \mid Ax = b,\ x \in \mathbf{Z}_+^r\}$$

(a^j — j-й столбец матрицы A, C — Cut — сечение).

Доказательство. С помощью индукции по сумме $\sigma = \sum_{j=1}^{r} x_j$ для точки x с неотрицательными целочисленными координатами покажем, что

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j) x_j \geq F\Big(\sum_{j=1}^{r} a^j x_j\Big) = F(Ax). \tag{2}$$

Это докажет (IPC), так как $Ax = b$ для $x \in S_2$.

Для $\sigma = 0$ (2) превращается в $0 \geq F(0) = 0$, что является верным. Чтобы перейти от σ к $\sigma + 1$, положим $\sigma + 1 = \sum_{j=1}^{r} x_j$ и без уменьшения общности считаем, что $x_1 \geq 1$. Тогда, используя сначала индукционное предположение и затем субаддитивность функции $F(v)$, имеем:

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j) x_j = F(a^1) + F(a^1)(x_1 - 1) + \sum_{j=2}^{r} F(a^j) x_j \geq$$

$$\geq F(a^1) + F\Big(a^1(x_1 - 1) + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j\Big) \geq$$

$$\geq F\Big(a^1 x_1 + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j\Big) = F(Ax) = F(b).$$

Пример 1. Функция $F_2(v)$, определяемая как

$$F_2(v) = \begin{cases} 0, & \text{если } v \text{ чётное,} \\ 1, & \text{если } v \text{ нечётное,} \ \ v \in \{\{0\} \cup \mathbf{N}\}, \end{cases}$$

является субаддитивной и $F_2(0) = 0$. Это легко проверяется. Для сравнения см. 1.3, задачу 1, е).

Когда применим функцию $F_2(v)$ к ограничениям

$$5x_1+2x_2+2x_3+x_4=7, \quad (x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbf{Z}^4_+, \tag{3}$$

получим в качестве (IPC) сечение

$$x_1+x_4\geq 1. \tag{4}$$

Сечение (4) показывает, что по крайней мере одна переменная с нечётным коэффициентом в уравнении (3) должна быть ненулевой (в противном случае нечётное число 7 является суммой двух положительных чётных чисел, что невозможно).

Аналогом теоремы 1 для принципа LP является теорема 1 для принципа IP.

Теорема 1. Если множество $S_2=\{x\,|\,Ax=b, x\in \mathbf{Z}^r_+\}$ непусто и матрица A является целочисленной, то любое справедливое сечение $\pi x\geq \pi_0$ для S_2 является ослаблением неравенства

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j \geq F(b)$$

для подходяще выбранной субаддитивной функции $F(v)$, определённой на моноиде

$$M=\{v\,|\,v=Az \quad \exists z\in \mathbf{Z}^r_+\}$$

и удовлетворяющей условию $F(0)=0$.

Доказательство. Дано справедливое сечение $\pi x\geq \pi_0$ для множества S_2. Определяем функцию $F(v)$ как

$$F(v)=\min\{\pi x\,|\,Ax=v,\ x\in \mathbf{Z}^r_+\},\ v\in M, \tag{5}$$

где M из формулировки теоремы 1. Иногда функцию, похожую на $F(v)$ в (5), называют функцией значения, так как она даёт оптимальное значение (значение) задачи оптимизации как функцию от правой части её ограничений. Для сравнения смотри 1.7, задачу 1.1.6.

Докажем следующие свойства функции $F(v)$:

1) $F(0)=0$;

2) $-\infty<F(a^j)\leq \pi_j,\ j=1,2,\ldots,r,\ -\infty<\pi_0\leq F(b)$;

3) $-\infty<F(v),\ v\in M$;

4) $F(v_1+v_2)\leq F(v_1)+F(v_2)$ (субаддитивность).

1) Ясно, что $F(0)\leq 0$. Если $F(0)<0$, то существует вектор $\bar{x}$, для которого $A\bar{x}=0$, $\bar{x}\in \mathbf{Z}^r_+$ и $\pi\bar{x}<0$. Для неотрицательного целочисленного скаляра k и вектора $x\in S_2$ вектор $x+k\bar{x}$ также принадлежит множеству S_2,

но неравенство $\pi x + k\pi\bar{x} \geq \pi_0$ становится неверным для достаточно большого k. Получаем противоречие с тем, что неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является справедливым сечением для множества S_2.

2) Предположим, что $F(a^j) = -\infty$, например, для $j = 1$. Тогда существует бесконечная последовательность $\{x^k\}$ векторов x^k, для которых

$$Ax^k = a^1,\ x^k \in \mathbf{Z}^r_+ \text{ и } \pi x^k \to -\infty \text{ при } k \to +\infty.$$

Учитывая $x \in S_2$ и предыдущее предложение, имеем

$$a^1 x_1 + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j = b \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{r} a^j x^k_j\Big) x_1 + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j = b \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a^1(x^k_1 x_1) + \sum_{j=2}^{r} a^j (x^k_j x_1 + x_j) = b.$$

Следовательно, и вектор

$$(x^k_1 x_1, x^k_2 x_1 + x_2, \ldots, x^k_r x_1 + x_r)$$

также принадлежит множеству S_2, но неравенство

$$(\pi x^k) x_1 + \sum_{j=2}^{r} \pi_j x_j \geq \pi_0$$

при подстановке этого вектора в него становится неверным для достаточно большого $k, x_1 \neq 0$. Снова получаем противоречие с тем, что неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является справедливым сечением для множества S_2.

Неравенство $F(a^j) \leq \pi j$ следует из того, что единичный вектор ej является допустимым решением целочисленной задачи оптимизации (5), а $F(b) \geq \pi 0$ — из определения функции $F(v)$ и из определения справедливого сечения $\pi x \geq \pi 0$ для непустого множества S_2. Неравенства 2) показывают, что неравенство $\pi x \geq \pi 0$ является ослаблением неравенства (IPC). Таким образом, получаем требуемое.

3) Если множество

$$S_2(v) = \{x \mid Ax = v,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\}$$

является ограниченным (то есть конечным), то 3), очевидно, имеет место.

4) Покажем, что функция $F(v)$ является субаддитивной на моноиде M:

$$F(v_1 + v_2) = \min\{\pi x \mid Ax = v_1 + v_2,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\} = \pi x^*_{v_1+v_2} \leq$$

$$\le \pi(x^*_{v_1} + x^*_{v_2}) = \pi x^*_{v_1} + \pi x^*_{v_2} =$$
$$= \min\{\pi x \mid Ax = v_1,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\} + \min\{\pi x \mid Ax = v_2,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\} =$$
$$= F(v_1) + F(v_2).$$

Для сравнения см. 1.3, задачу 1, j).

Существует принцип IP′, аналогичный принципу IP, для множеств вида

$$S'_2 = \{x \mid Ax \ge b,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\}.$$

Как и раньше, в формулировке этого принципа для v и w из моноида

$$M' = \{v \mid v \le Az \quad \exists z \in \mathbf{Z}^r_+\}$$

воспользуемся векторным неравенством $v \ge w$, чтобы сократить запись $v_i \ge w_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Назовем функцию $F(v)$ монотонной, если

$$v \ge w \to F(v) \ge F(w). \tag{Mon}$$

Принцип IP′. Если $F(v)$ — монотонная субаддитивная функция, определённая на моноиде

$$M' = \{v \mid v \le Az \quad \exists z \in \mathbf{Z}^r_+\}$$

и $F(0) = 0$, то неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j) x_j \ge F(b) \tag{$IP'C$}$$

и все его ослабления являются справедливыми сечениями для множества

$$S'_2 = \{x \mid x \ge b,\ x \in \mathbf{Z}^r_+\}.$$

Чтобы доказать принцип IP′, просто комбинируем (2) и $Ax \ge b$ с монотонностью (Mon). Для принципа IP′ существует также теорема, соответствующая теореме 1. Её доказательство похоже на доказательство теоремы 1.

Теория справедливых неравенств для множеств

$$S_B = \{x \mid Ax = b,\ x \in \mathbf{B}^r\} \text{ и } S'_B = \{x \mid Ax \ge b,\ x \in \mathbf{B}^r\}$$

успешно развивалась во многих работах в [J1], [B], [X] (B — Binary — двоичный).

1.3. Субаддитивные функции

В этом параграфе формулируются и доказываются различные свойства субаддитивных функций. Он состоит из двух частей: формулировка задач и решение избранных задач. Эти задачи предназначены для повышения мастерства в построении субаддитивных функций и делают обсуждение принципа IP более конкретным.

В 1.7 (задачи 1.3.2–1.3.4) показано, как строить справедливые сечения с помощью принципа IP и субаддитивных функций. Эти сечения часто называют субаддитивными сечениями [104].

1.3.1. Формулировка задач

Задача 1. Показать, что следующие функции являются субаддитивными в их областях определения.

a) $F(v) = \lambda v$ для любого вектора $\lambda \in \mathbf{R}^m$. Если $\lambda \geq 0$, то $F(v)$ монотонная.

b) $F(v) = \max\{aF_1(v), bF_2(v)\}$, где a и b — неотрицательные постоянные, а $F_1(v)$ и $F_2(v)$ — субаддитивные функции в их общей области определения. Если $F_1(v)$ и $F_2(v)$ монотонные, то и $F(v)$ монотонная.

c) $F(v) = aF_1(v) + bF_2(v)$, где a и b — неотрицательные постоянные, а $F_1(v)$ и $F_2(v)$ — субаддитивные функции в их общей области определения.

d) $F(v) = \inf_{p \in P}\{G(p) + H(v-p)\}$, $v \in K$, где P — моноид, G — субаддитивная функция, определённая на P, K — группа, $P \subseteq K$, H — субаддитивная функция, определённая на K. Предполагаем, что $-\infty < F(v) < +\infty \quad \forall v \in K$.

e) $F_n(v) = v - nz = r$ для $nz \leq v < nz + n$, $v \in \mathbf{Z}^1$
($n \in \mathbf{N}$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$; $z \in \mathbf{Z}^1$).

f) $F(v) = \min\{G(v), c\}$, где c — неотрицательная постоянная, а $G(v)$ — неотрицательная субаддитивная функция.

g) $F_q(v) = v - qz = r$ для $qz \leq v < qz + q$, $v \in \mathbf{R}^1$
($q > 0,\ q \in \mathbf{R}^1$; $0 \leq r < q,\ r \in \mathbf{R}^1$; $z \in \mathbf{Z}^1$).

h) $-\lfloor v \rfloor, \lceil v \rceil, v - \lfloor v \rfloor, \lceil v \rceil - v, \lceil v \rceil - \lfloor v \rfloor$,
где $\lfloor v \rfloor$ — наибольшее целое число, не большее v ($\lfloor v \rfloor$ — целая часть числа v), $\lceil v \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее v, $v - \lfloor v \rfloor$ — дробная часть числа v ($v \in \mathbf{R}^1$).

i)
$$F(v) = \begin{cases} -v, & v < 0, \\ v, & v \geq 0, \ v \in \mathbf{R}^1 \end{cases}$$
($F(v) = |v|$ — абсолютная величина числа v).

j) $F(v) = \min\{\pi x \mid Ax = v,\ x \in \mathbf{Z}_+^r\}$, $v \in M = \{v \mid v = Az \quad \exists z \in \mathbf{Z}_+^r\}$.

Задача 2. Если $F_1(v)$ и $F_2(v)$ — субаддитивные функции в их общей области определения, то обязательно ли функция $F(v) = \min\{F_1(v), F_2(v)\}$ является субаддитивной в этой области?

Задача 3. Суперпозиция функций. Предположим, что функция $H(v)$ является субаддитивной в некоторой области определения, а функция $G(r)$ — монотонной субаддитивной на множестве $\mathbf{R}^1$ всех действительных чисел.

Показать, что $F(v) = G(H(v))$ — субаддитивная функция в области определения функции $H(v)$.

a) Остаётся ли функция $F(v)$ субаддитивной, если $G(r)$ не монотонная?

b) Остаётся ли функция $F(v)$ субаддитивной, если $G(r)$ не монотонная, но $H(v) = \lambda v$?

Задача 4. Составить список субаддитивных функций, встречающихся в 1.2, 1.3 и 1.7. Пополнить этот список своими примерами.

1.3.2. Решение избранных задач

Задача 1, b) Для произвольных v_1 и v_2 имеем

$$aF_1(v_1 + v_2) \leq aF_1(v_1) + aF_1(v_2) \leq F(v_1) + F(v_2),$$

$$bF_2(v_1 + v_2) \leq bF_2(v_1) + bF_2(v_2) \leq F(v_1) + F(v_2).$$

Выбрав максимум из двух левых частей, получим

$$F(v_1 + v_2) \leq F(v_1) + F(v_2).$$

Дадим ещё одно доказательство. Сначала убеждаемся в том, что для любых действительных чисел A, B, C, D имеет место неравенство

$$\max\{A + B, C + D\} \leq \max\{A, C\} + \max\{B, D\}.$$

Пусть $A + B \geq C + D$. Тогда левая часть доказываемого неравенства равна $A + B$. Складывая очевидные неравенства $A \leq \max\{A, C\}$ и $B \leq \max\{B, D\}$, получаем требуемое. Если же $A + B < C + D$, то рассуждения аналогичны.

Учитывая только что доказанное неравенство, имеем

$$F(v_1 + v_2) = \max\{aF_1(v_1 + v_2), bF_2(v_1 + v_2)\} \leq$$

$$\leq \max\{aF_1(v_1) + aF_1(v_2), bF_2(v_1) + bF_2(v_2)\} \leq$$

$$\leq \max\{aF_1(v_1), bF_2(v_1)\} + \max\{aF_1(v_2), bF_2(v_2)\} = F(v_1) + F(v_2).$$

Задача 1, d) Для любых v_1 и v_2 из K и произвольного малого $\varepsilon > 0$ выбираем такие p_1 и p_2 из P, что

$$G(p_1) + H(v_1 - p_1) \le F(v_1) + \varepsilon/2,$$

$$G(p_2) + H(v_2 - p_2) \le F(v_2) + \varepsilon/2$$

(по определению инфимума). Тогда имеем

$$F(v_1 + v_2) \le G(p_1 + p_2) + H((v_1 + v_2) - (p_1 + p_2)) =$$

$$= G(p_1 + p_2) + H((v_1 - p_1) + (v_2 - p_2)) \le$$

$$\le G(p_1) + G(p_2) + H(v_1 - p_1) + H(v_2 - p_2) \le$$

$$\le F(v_1) + F(v_2) + \varepsilon.$$

Поскольку ε было выбранным произвольно малым, имеет место неравенство

$$F(v_1 + v_2) \le F(v_1) + F(v_2).$$

Задача 1, f) Пусть v_1 и v_2 выбраны произвольно. Если $G(v_1) \ge c$, то получаем

$$F(v_1 + v_2) \le c \le c + F(v_2) = F(v_1) + F(v_2)$$

(второе неравенство имеет место, так как функция $F(v)$ неотрицательная).

Если $G(v_2) \ge c$, то, рассуждая аналогично, получаем неравенство

$$F(v_1 + v_2) \le F(v_1) + F(v_2).$$

Теперь предположим, что $G(v_1) < c$ и $G(v_2) < c$. Тогда получим

$$F(v_1 + v_2) \le G(v_1 + v_2) \le G(v_1) + G(v_2) = F(v_1) + F(v_2).$$

Таким образом, все случаи рассмотрены.

Задача 1, h) Сначала докажем, что функции $-\lfloor v \rfloor$ и $\lceil v \rceil$ являются субаддитивными.

Пусть $f_1 = v_1 - \lfloor v_1 \rfloor$ и $f_2 = v_2 - \lfloor v_2 \rfloor$ — дробные части чисел v_1 и v_2. Тогда имеем

$$\lfloor v_1 + v_2 \rfloor = \begin{cases} \lfloor v_1 \rfloor + \lfloor v_2 \rfloor \text{ для } 0 \le f_1 + f_2 < 1, \\ \lfloor v_1 \rfloor + \lceil v_2 \rceil = \lceil v_1 \rceil + \lfloor v_2 \rfloor \text{ для } f_1 + f_2 \ge 1 \end{cases}$$

и

$$\lceil v_1 + v_2 \rceil = \begin{cases} \lceil v_1 \rceil + \lceil v_2 \rceil \text{ для } f_1 + f_2 = 0 \vee f_1 + f_2 > 1, \\ \lceil v_1 \rceil + \lfloor v_2 \rfloor \text{ для } 0 < f_1 + f_2 \le 1 \wedge f_1 > 0, \\ \lfloor v_1 \rfloor + \lceil v_2 \rceil \text{ для } 0 < f_1 + f_2 \le 1 \wedge f_2 > 0. \end{cases}$$

Эти соотношения и неравенство $\lfloor v \rfloor \leq \lceil v \rceil$ влекут субаддитивность функций $-\lfloor v \rfloor$ и $\lceil v \rceil$.

Каждая из трёх остальных функций является суммой двух субаддитивных функций.

Задача 1, j) Действительно,

$$F(v_1)+F(v_2)=\pi x^*_{v_1}+\pi x^*_{v_2}=\pi(x^*_{v_1}+x^*_{v_2})\geq \pi x^*_{v_1+v_2}=F(v_1+v_2).$$

Задача 2. Нет! Рассмотрим функции $F_1(v)=-v$ и $F_2(v)=v$, определённые на множестве $\mathbf{R}^1$ всех действительных чисел. Тогда функция $F(v)=\min\{F_1(v),F_2(v)\}=-|v|$ не является субаддитивной.

Задача 3. Для произвольных v_1 и v_2 имеем

$$F(v_1+v_2)=G(H(v_1+v_2))\leq G(H(v_1)+H(v_2))\leq$$
$$\leq G(H(v_1))+G(H(v_2))=F(v_1)+F(v_2).$$

Первое неравенство в этих соотношениях имеет место в силу того, что $G(v)$ монотонная и $H(v)$ субаддитивная.

a) Нет! Например, функции $G(r)=-r$, $r\in\mathbf{R}^1$, $H(v)=|v|$, $v\in\mathbf{R}^1$, являются субаддитивными, а функция $F(v)=G(H(v))=-|v|$ не является субаддитивной.

b) Да! Первое неравенство в выше приведённых соотношениях в этом случае превращается в равенство, так как $H(v_1+v_2)=H(v_1)+H(v_2)$.

1.4. Смешанная задача

Рассмотрим смешанную целочисленную линейную задачу оптимизации в стандартном виде

$$\min\{cx+dy \mid Ax+By=b,\ x\in\mathbf{Z}^r_+,\ y\in\mathbf{R}^s_+\}, \qquad (MIP)$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_s)$ — векторы соответственно целочисленных и непрерывных переменных, а векторы $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$, $c=(c_1,c_2,\ldots,c_r)$ и $d=(d_1,d_2,\ldots,d_s)$ и матрицы A и B соответственно размеров $m\times r$ и $m\times s$ заданы
(M — Mixed — смешанный, I — Integer — целочисленный, P — Program — задача).

Объектом исследования является допустимое множество этой задачи

$$S_3=\{(x,y)\mid Ax+By=b,\ x\in\mathbf{Z}^r_+,\ y\in\mathbf{R}^s_+\}.$$

Сведение смешанной задачи к целочисленной в рациональном случае.

В результатах, формулируемых ниже, делается предположение рациональности, состоящее в том, что матрицы A и B и векторы b, c и d в задаче (MIP) являются целочисленными.

До сих пор наше обсуждение касалось целочисленной задачи, но по существу то же самое изложение было бы справедливым для смешанной задачи при предположении рациональности, хотя дополнительно должны быть рассмотрены некоторые понятия, обусловленные более общей задачей.

С этой целью заметим, что если задача (MIP) имеет оптимальное решение (это имеет место, если она совместна и её целевая функция ограничена снизу), то по крайней мере в одном оптимальном решении (x^*, y^*) вектор y^* является рациональным, то есть

$$y^* = (z_1^*/D, z_2^*/D, \dots, z_s^*/D)$$

с целочисленным знаменателем D, который не может превысить максимального абсолютного значения ненулевого подопределителя матрицы B.

В самом деле, y^* удовлетворяет $By = b - Ax^*$ и $(b - Ax^*)$ есть целочисленный вектор, следовательно, используя базисные допустимые решения для максимальной линейно не зависимой подсистемы системы $By = b - Ax^*$, получаем по крайней мере одно решение y^* требуемого вида.

Из этого результата следует, что для целей оптимизации можно использовать задачу

$$\min\{(Dc)x + dz \mid (DA)x + Bz = Db,\ (x,z) \in \mathbf{Z}_+^{r+s}\} \qquad (MIP')$$

вместо задачи (MIP), то есть оптимальные значения задач (MIP) и $(MIP)'$ те же самые (с точностью до множителя D), а из любого оптимума (x^*, z^*) задачи $(MIP)'$ получаем по крайней мере один оптимум $(x^*, z^*/D)$ задачи (MIP). Кроме того, $(MIP)'$ есть чисто целочисленная задача, так что все предыдущие построения и результаты применимы к ней.

Функциональная характеризация справедливых неравенств для смешанной задачи.

Из понятия субаддитивности вытекает функциональная характеризация для столбцов при непрерывных переменных в (MIP). Как мы видели в предыдущем пункте, эти столбцы могут быть преобразованы в столбцы при целочисленных переменных, и тогда имеет место характеризация справедливых сечений, данная выше. Но в настоящем разделе излагается прямой подход к столбцам при непрерывных переменных, так как константа D из предыдущего пункта может быть такой большой, что характеризация через сведение к целочисленности имеет малое практическое значение.

Уже знаем, что функционал, действующий на столбцы при целочисленных переменных в (IP), является субаддитивным. Исследования показали важность **производных по направлению (в нуле)** субаддитивной функции F:

$$\overline{F}(v) = \limsup\{F(\delta v)/\delta \mid \delta \downarrow 0^+\}. \qquad (5.A)$$

Пишем $\overline{F}(v)$, если только $\limsup$ в $(5.A)$ не является $+\infty$.

Функция $\overline{F}$ и есть тот функционал, который применяется к столбцам при непрерывных переменных в (MIP). Это основывается на факте, что для субаддитивной функции F, $F(0) = 0$, имеем

$$F(\lambda v) \leq \lambda \overline{F}(v) \text{ для } \lambda \geq 0. \qquad (5.B)$$

Нестрогое соображение для $(5.B)$, которое содержит основную идею строгого доказательства $(5.B)$, состоит в том, чтобы ввести рациональное $\lambda = p/q$ и применить субаддитивность:

$$\begin{gathered} F(\lambda v) = F(kpv/kq) \leq kpF(v/kq) = \\ = \frac{(kp/kq)F(v/kq)}{1/kq} = \lambda\left(\frac{F(v/kq)}{1/kq}\right) \to \lambda\overline{F}(v), \end{gathered} \qquad (5.C)$$

где предел возникает при $k \to +\infty$ по натуральным значениям.

Справедливое сечение для допустимого множества смешанной целочисленной линейной задачи оптимизации будет иметь иной, по сравнению с целочисленной задачей, вид, а именно:

$$\sum_{j=1}^{r} \pi_j x_j + \sum_{k=1}^{s} \sigma_k y_k \geq \pi_0, \quad \pi x + \sigma y \geq \pi_0, \qquad (CP')$$

которое выполняется для всех $(x,y) \in S_3 = \{(x,y) \mid Ax + By = b,\ x \in \mathbf{Z}^r_+,\ y \geq 0\}$.

Принцип MIP. Для субаддитивной функции $F(v)$, определённой на моноиде M', $M' = \{v \mid v = A\xi + B\eta,\ \exists\xi \in \mathbf{Z}^r_+,\ \exists\eta \geq 0\}$, удовлетворяющей условию $F(0) = 0$ и для которой существует производная по направлению $\overline{F}$, неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} \overline{F}(b^k)y_k \geq F(b) \qquad (MIPC)$$

и все его ослабления являются справедливыми неравенствами для множества

$$S_3 = \{(x,y) \mid Ax + By = b,\ x \in \mathbf{Z}^r_+,\ y \geq 0\} \neq \varnothing$$

(a^j — j-й столбец матрицы A, b^k — k-й столбец матрицы B).

◀ Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} \overline{F}(b^k)y^k \geq F(Ax+By).$$

Это докажет $(MIPC)$, так как $Ax+By=b$ для $x \in S_3$.

Используя сначала свойство $(5.B)$, а затем принцип IP и субаддитивность функции F, получим:

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} \overline{F}(b^k)y_k \geq \sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} F(y_k b^k) \geq$$

$$\geq F(Ax) + F(By) \geq F(Ax+By) \geq F(b).$$

▶

Пример. Абсолютная величина

$$F(x) = |\, x \,| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

как легко проверяется, является субаддитивной функцией и $F(0)=0$.

Добавим ограничения:

$$5x - 2y = 7,\ x \in \mathbf{Z}_+,\ y \geq 0.$$

Чтобы получить сечение, нужно посчитать направленную производную по направлению $v=-2$:

$$\overline{F}(-2) = \limsup\{F(\delta \cdot (-2))/\delta \mid \delta \downarrow 0^+\} = \limsup\{|\, \delta \cdot (-2) \,| /\delta \mid \delta \downarrow 0^+\} = 2.$$

В итоге получим в качестве $(MIPC)$ сечение:

$$5x + 2y \geq 7.$$

Проверим, все ли точки, принадлежащие ограничениям, удовлетворяют полученному неравенству. Итак, получили точки: $(2, 3/2)$, $(3, 4)$, $(4, 13/2), \ldots, (n, (5n-7)/2)$, $n = 2, 3, \ldots$, и все они удовлетворяют неравенству $5x+2y \geq 7$. Значит, мы правильно построили справедливое неравенство.

Теорема. Если выполнено: 1) множество допустимых решений S_3 смешанной задачи оптимизации непусто; 2) имеет место предположение рациональности; 3) выбрана подходящим образом субаддитивная функция $F(v)$, определённая на моноиде M'; 4) $F(0)=0$, то любое справедливое неравенство $\pi x + \sigma y \geq \pi_0$ для S_3 является ослаблением неравенства

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} \overline{F}(b^k)y_k \geq F(b).$$

Теорема. Если множество $S_3 = \{(x,y) \mid Ax + By = b,\ x \in \mathbf{Z}^r_+,\ y \geq 0\}$ непусто и для задачи (MIP) имеет место предположение рациональности, то все справедливые неравенства $\pi x + \sigma y \geq \pi_0$ для множества S_3 получаются ослаблением неравенства

$$\sum_{j=1}^{r} F(a^j)x_j + \sum_{k=1}^{s} \overline{F}(b^k)y_k \geq F(b), \qquad (MIPC)$$

то есть в следующем смысле:

1) $F(a^j) \leq \pi_j,\ j = 1,\ldots,r;$

2) $\overline{F}(b^k) \leq \sigma_k,\ k = 1,\ldots,s;$

3) $F(b) \geq \pi_0;$

для подходяще выбранной субаддитивной функции $F(v)$, определённой на моноиде $M' = \{v \mid v = A\xi + B\eta,\ \exists\xi \in \mathbf{Z}^r_+,\ \exists\eta \geq 0\}$ и удовлетворяющей условию $F(0) = 0$.

Доказательство.

Дано (CP'). Полагаем $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ и определяем F как

$$F(v) = \min\{\pi x + \sigma y \mid Ax + By = v,\ x \in \mathbf{Z}^r_0,\ y \geq 0\}, \qquad (**)$$

где $v \in M'$, а M' — из принципа MIP.

Покажем, что $F(0) = 0$ и что $F(v)$ — конечная для векторов a^j, $j = 1,\ldots,r$, и b (то есть не $-\infty$) (ясно, что $a^j \in M'$ для $j = 1,\ldots,r$ (используем единичные векторы), и тот факт, что $S_3 \neq \varnothing$, влечёт, что $b \in M'$, так что F определена для всех величин, необходимых в $(MIPC)$).

$F(0) = 0$:

1. От противного: предположим, что $F(0) < 0$. Тогда $\exists \bar{x} \in \mathbf{Z}^r_+$ и $\exists \bar{y} \geq 0$, для которых $A\bar{x} + B\bar{y} = 0$ и $\pi\bar{x} + \sigma\bar{y} < 0$.

Для целого числа $k \geq 0$ и $(x,y) \in S_3$ вектор $(x,y) + k(\bar{x},\bar{y}) = (x + k\bar{x}, y + k\bar{y})$ также принадлежит множеству $S_3 = \{(x,y) \mid Ax + By = b, x \in \mathbf{Z}^r_+, y \geq 0\}$, но неравенство $\pi x + \sigma y + k\pi\bar{x} + k\sigma\bar{y} \geq \pi_0$ становится неверным для достаточно большого k. Получили противоречие с тем, что неравенство справедливо.

2. Пусть $F(0) \geq 0 \Longleftrightarrow \min\{\pi x + \sigma y \mid Ax + By = 0, x \in \mathbf{Z}^r_+, y \geq 0\} \geq 0$, то есть сразу получаем допустимое решение $(x,y) = (0,0)$, для которого $\min\{\pi x + \sigma y\} = 0$ и, следовательно, минимум не может быть больше 0, так как для одного допустимого решения получили 0.

Теперь покажем, что $F(a^j) > -\infty$, $j = 1,\ldots,r$. Пусть это не так, например, для $j = 1$. Тогда существует бесконечная последовательность $\{x^k, y^k\}$, для которой $x^k \in \mathbf{Z}^r_+$, $y^k \geq 0$, $Ax^k + By^k = a^1$, $\pi x^k + \sigma y^k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $(x,y) \in S_3$. Тогда перепишем $Ax + By = b$ как $a^1 x_1 + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j + \sum_{j=1}^{s} b^j y_j = b$, подставив вместо a^1 представление $a^1 = Ax^k + By^k =$

$\sum_{j=1}^{r} a^j x_j^k + \sum_{j=1}^{s} b^j y_j^k$, и получим:

$$\Big(\sum_{j=1}^{r} a^j x_j^k + \sum_{j=1}^{s} b^j y_j^k\Big) x_1 + \sum_{j=2}^{r} a^j x_j + \sum_{j=1}^{s} b^j y_j = b,$$

$$a^1(x_1^k x_1) + a^2(x_2^k x_1 + x_2) + \cdots + a^r(x_r^k x_1 + x_r) + b^1(y_1^k x_1 + y_1) +$$
$$+ b^2(y_2^k x_1 + y_2) + \cdots + b^s(y_s^k x_1 + y_s) = b,$$

то есть точка $(x_1^k x_1, x_2^k x_1 + x_2, \ldots, x_r^k x_1 + x_r, y_1^k x_1 + y_1, y_2^k x_1 + y_2, \ldots, y_s^k x_1 + y_s)$ удовлетворяет системе $Ax + By = b$, к тому же все её компоненты неотрицательны, тогда можем подставить её в справедливое неравенство $\pi x + \sigma y \geq \pi_0$ для множества S_3:

$\pi_1(x_1^k x_1) + \pi_2(x_2^k x_1 + x_2) + \cdots + \pi_r(x_r^k x_1 + x_r) + \sigma_1(y_1^k x_1 + y_1) + \sigma_2(y_2^k x_1 + y_2) + \cdots + \sigma_s(y_s^k x_1 + y_s) \geq \pi_0$,

$x_1(\pi_1 x_1^k + \pi_2 x_2^k + \cdots + \pi_r x_r^k) + \pi_2 x_2 + \cdots + \pi_r x_r + \sigma_1 y_1 + \cdots + \sigma_s y_s \geq \pi_0$,

$x_1(\pi x^k + \sigma y^k) + \sum_{j=2}^{r} \pi_j x_j + \sum_{j=1}^{k} \sigma_j y_j \geq \pi_0$

$\Longrightarrow$ справедливость нарушается для достаточно большого k при $x_1 \neq 0$.

Далее докажем, что (CP') является ослаблением $(MIPC)$. Единичные векторы дают $F(a^j) \leq \pi_j$, $j = 1, \ldots, r$. Также справедливость $\pi x + \sigma y \geq \pi_0$ может быть сформулирована как тот факт, что $\min\{\pi x + \sigma y \mid Ax + By = b,\ x \in \mathbf{Z}_+^r,\ y \geq 0\}$ не меньше π_0, то есть $F(b) \geq \pi_0$ (более того, это доказывает конечность $F(b)$, так как π_0 — конечное число).

Чтобы получить $\overline{F}(b^k) \leq \sigma_k$, $k = 1, \ldots, s$, используем векторы $\delta e_k'$, где e_k' есть вектор из (x,y)-пространства с числом $F(\delta e_k') \leq \delta \sigma_k$. Тогда 2) следует из определения $\overline{F}(v) = \limsup\{F(\delta v)/\delta \mid \delta \downarrow 0^+\}$.

Таким образом, получили требуемое.

Оставшаяся часть доказательства состоит в том, чтобы показать, что функция F субаддитивная на M':

$$F(v+w) = \min\{\pi x + \sigma y \mid Ax + By = v + w,\ x \in \mathbf{Z}_+^r,\ y \geq 0\} \leq$$

$$\leq \min\{\pi(x^1 + x^2) + \sigma(y^1 + y^2) \mid Ax^1 + By^1 = v,\ Ax^2 + By^2 = w,$$
$$x^1 \in \mathbf{Z}_+^r, x^2 \in \mathbf{Z}_+^r,\ y^1 \geq 0,\ y^2 \geq 0\} =$$

$$= \min\{\pi x^1 + \sigma y^1) \mid Ax^1 + By^1 = v,\ x^1 \in \mathbf{Z}_+^r,\ y^1 \geq 0\} +$$

$$+ \min\{\pi x^2 + \sigma y^2 \mid Ax^2 + By^2 = w,\ x^2 \in \mathbf{Z}_+^r,\ y^2 \geq 0\} = F(v) + F(w).$$

1.5. Дизъюнктивная задача

Дизъюнктивные методы состоят из различных способов, с помощью которых можно получить сечения (дизъюнктивные сечения) из логических ограничений на линейные неравенства. Далее будет рассмотрен принцип дизъюнктивных сечений (принцип DC). Этот принцип в различных формах используется в дизъюнктивных методах. Принцип DC связан с другими принципами и подходами. Поэтому его часто называют основным принципом дизъюнктивных сечений. Для усиления дизъюнктивных сечений используется метапринцип MCS.

Рассмотрим дизъюнктивную задачу оптимизации

$$\min\Big\{cx \mid \bigvee_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geq b_i,\ x \geq 0\Big) = true\Big\}.$$

В дальнейшем будем называть её задачей DP (true — истина, false — ложь; D — Disjunctive — дизъюнктивный, P — Program — задача).

Выражение в круглых скобках есть логическая переменная, принимающая значение истина (ложь), если точка x удовлетворяет (не удовлетворяет) системе из $n+1$ неравенств.

Объектом исследования является допустимое множество дизъюнктивной задачи оптимизации

$$S_4 = \Big\{x \mid \bigvee_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geq b_i,\ x \geq 0\Big) = true\Big\}.$$

Множество S_4 называется дизъюнктивным множеством. Представление дизъюнктивного множества есть дизъюнктивная нормальная форма системы логических ограничений на линейные неравенства. Любая такая система может быть приведена к этому виду.

Укажем ещё одно представление дизъюнктивного множества

$$S_4 = \bigcup_{i=1}^{m}\Big\{x \mid \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geq b_i,\ x \geq 0\Big\}.$$

Эти два представления эквивалентны. Заметим, что множество S_4 может быть невыпуклым (см. 1.7, задачу 1.5.3).

Пример 1. Предположим, что установили следующий факт: для неотрицательных переменных x_1, x_2, x_3 имеет место неравенство

$$2x_1 + (-3)x_2 + (-7)x_3 \geq 15 \tag{1}$$

или неравенство

$$1x_1 + 2x_2 + (-5)x_3 \geq 28, \tag{2}$$

но не известно, какое именно. Существует ли некоторое одно неравенство, которое поэтому с необходимостью справедливо? Да!

Неравенство

$$2x_1 + 2x_2 + (-5)x_3 \geq 15 \tag{3}$$

есть ослабление обоих неравенств (1) и (2), так как

$$2 = \max\{2,1\}, 2 = \max\{-3,2\}, -5 = \max\{-7,-5\} \text{ и } 15 = \min\{15,28\}.$$

Значит, (3) справедливо, как только по крайней мере одно из неравенств (1) и (2) имеет место.

Метапринцип DC, который обобщает идею такого получения (3) из (1) и (2), формулируется следующим образом.

Метапринцип DC. Предположим, что имеет место по крайней мере одно из неравенств

$$\sum_{j=1}^{r} b_{i,j}x_j \geq b_{i,0},\ i = 1,2,\ldots,p,\ p \geq 2, \tag{4}$$

и что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ неотрицательные.

Тогда неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} (\max_{i=1}^{p} b_{i,j})x_j \geq \min_{i=1}^{p} b_{i,0} \tag{5}$$

и все его ослабления являются справедливыми сечениями для множества

$$S_4 = \left\{x \mid \bigvee_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{i,j}x_j \geq b_{i,0},\ x \geq 0 \right) = true \right\}$$

(D — Disjunctive — дизъюнктивный, C — Cut — сечение) (см. 1.7, задачу 1.5.3).

В дальнейшем используется понятие супремума множества векторов.

В неравенстве (DC) через $\sup_{h \in H} \lambda^h A^h$ обозначаем вектор v, j-я компонента которого есть $v_j = \sup_{h \in H} v_j^h$ $(j = 1,2,\ldots,r)$, а $v^h = \lambda^h A^h$. В (DC) предполагается существование конечного инфимума и конечных супремумов. В ниже следующей формулировке принципа DC множество H может быть конечным или бесконечным. Принцип DC следует из принципа LP и метапринципа DC.

Принцип DC (принцип дизъюнктивных сечений) [101, 104].

Предположим, что имеет место по крайней мере одна из систем линейных неравенств

$$A^h x \geq b^h, \ x \geq 0, \ h \in H, \ H \neq \varnothing \tag{S_h}$$

(A^h — $m_h \times r$-матрица, b^h — m_h-вектор-столбец).

Тогда для любых m_h-вектор-строк λ^h неотрицательных множителей неравенство

$$(\sup_{h \in H} \lambda^h A^h) x \geq \inf_{h \in H} \lambda^h b^h \tag{DC}$$

и все его ослабления являются справедливыми сечениями для дизъюнктивного множества

$$S_4 = \Big\{ x \mid \bigvee_{h \in H} (A^h x \geq b^h, \ x \geq 0) = true \Big\}.$$

Доказательство. Так как по крайней мере одна система (S_h) имеет место для некоторого x, по крайней мере одно неравенство $(\lambda^h A^h) x \geq \lambda^h b^h$ имеет место для этого x. Однако h может зависеть от x. Взятие инфимума и супремумов в (DC) устраняет эту зависимость и оставляет неравенство всё ещё справедливым, поскольку $x \geq 0$.

Заметим, что принцип LP может быть переформулирован как метапринцип, полученный из логического условия, что все неравенства $Ax \geq b$ имеют место. Также отметим, что частными случаями принципа дизъюнктивных сечений являются принцип LP и метапринцип DC

$$(|H| = 1 \text{ и } m_h = 1 \ \forall h \in H, \ |H| = p, \ p \geq 2).$$

Обычно сечение (DC) представляет то, что можно сказать о всех системах, когда это известно только об одной системе среди (S_h), которая имеет место (теоремы 1 и 2 ниже). Но иногда (DC) не эффективно в представлении такой информации.

Пример 2. Предположим, что x_1 — неотрицательная переменная и что

$$(-1) \cdot x_1 \geq (-1) \text{ или } 0 \cdot x_1 \geq 1 \tag{6}$$

имеет место. Система (S_h), $h = 1, 2$, состоит из одного неравенства, причём первая система совместна, а вторая — нет. Тогда, используя принцип DC, получаем

$$\max\{-1 \cdot \lambda_1, 0 \cdot \lambda_2\} x_1 \geq \min\{-1 \cdot \lambda_1, 1 \cdot \lambda_2\} \tag{7}$$

и

$$0 \cdot x_1 \geq -\lambda_1. \tag{7'}$$

Неравенство (7′) есть ослабление тривиального сечения $0 \cdot x_1 \geq 0$, которое выполняется для всех x_1. Итак, имеем информацию в (6), что $0 \leq x_1 \leq 1$ должно иметь место (поскольку $0 \cdot x_1 \geq 1$ не выполнимо, то должно иметь место $(-1) \cdot x_1 \geq (-1)$).

Геометрическая интерпретация дизъюнктивных сечений. Справедливые сечения для дизъюнктивного множества S_4 в точности являются справедливыми сечениями для замкнутой выпуклой оболочки $clconvS_4$ множества S_4 (см. 1.7, задачу 1.5.3).

Обратное утверждение к принципу дизъюнктивных сечений есть утверждение о том, что при определённых предположениях принцип DC даёт все справедливые сечения (теоремы 1 и 2). Ещё одно обратное утверждение находится в работе, указанной в ссылке из [101].

Теорема 1. Если каждая система (S_h), $h \in H$, является совместной, то для любого справедливого неравенства $\pi x \geq \pi_0$ существуют неотрицательные векторы $\lambda^h, h \in H$, такие, что

$$(\sup_{h \in H} \lambda^h A^h)_j \leq \pi_j, \ j = 1, 2, \ldots, r, \ \inf_{h \in H} \lambda^h b^h \geq \pi_0.$$

Доказательство. По предположению все системы (S_h) совместны. Так как справедливое неравенство $\pi x \geq \pi_0$ влечётся любой одной из них, по теореме, которая является обратным утверждением к принципу LP, для каждого $h \in H$ существует вектор $\lambda^h \geq 0$, удовлетворяющий

$$(\lambda^h A^h)_j \leq \pi_j, \ j = 1, 2, \ldots, r, \ \lambda^h b^h \geq \pi_0.$$

Здесь $(\lambda^h A^h)_j$ есть j-я компонента вектора $\lambda^h A^h$. Беря супремумы и инфимум, получаем требуемое.

Для каждого h, $h \in H$, рассмотрим конус

$$C_h = \{x \mid A^h x \geq 0, \ x \geq 0\}. \tag{8}$$

В (9) записана сумма множеств (конусов), определяемая как

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}.$$

В принципе дизъюнктивных сечений не все системы (S_h) обязаны быть совместными, чтобы давать все справедливые сечения (теорема 2).

Теорема 2. Принцип DC даёт все справедливые сечения для логического условия, что по крайней мере одна из систем (S_h) имеет место, если для каждого $h \in H$ такого, что (S_h) несовместна, выполняется

$$C_h \subseteq \sum_p \{C_p \mid (S_p) \text{ совместна}, \ p \in H\} \tag{9}$$

(сумма интерпретируется как $\{0\}$, если все системы (S_h), $h \in H$, являются несовместными).

Доказательство. Чтобы доказать теорему 2, достаточно для несовместных систем (S_h) найти λ^h, $\lambda^h \geq 0$, для которых

$$\lambda^h A^h \leq \pi (\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)) \text{ и } \lambda^h b^h \geq \pi_0$$

для любого сечения $\pi x \geq \pi_0$, справедливого для всех совместных систем (S_p). Тогда взятие супремумов и инфимума как в доказательстве теоремы 1 завершает рассуждения.

Заметим, что если система (S_p) совместна и неравенство $\pi x \geq \pi_0$ является справедливым, имеем $\pi x \geq 0$ для $x \in C_p$. Это следует из факта, что $\lambda^p A^p \leq \pi$ для некоторого λ, $\lambda^p \geq 0$, и из факта, что $x \geq 0$.

Но тогда, когда система (S_h) несовместна и $x \in C_h$, согласно (9), записывая

$$x = \sum_p \{x^p \mid (S_p) \text{ совместна, } x^p \in C_p,\ p \in H\}$$

для определённых x^p из C_p, получаем

$$\pi x = \sum_p \pi x^p \geq 0. \tag{9'}$$

Также (9′) выполняется, если все системы (S_h), $h \in H$, несовместны. Поэтому из $A^h x \geq 0$, $x \geq 0$ следует $\pi x \geq 0$ и по лемме Фаркаша получаем множители θ, для которых

$$\theta^h \geq 0,\ \theta^h A^h \leq \pi.$$

Наконец, из несовместности системы (S_h) следует, что существует вектор p^h, для которого

$$p^h \geq 0,\ p^h A^h \leq 0 \text{ и } p^h b^h > 0.$$

Но тогда для достаточно большого $r, r \geq 0$, полагая $\lambda^h = \theta^h + r p^h$, имеем

$$\lambda^h A^h \leq \pi + 0 = \pi, \lambda^h b^h \geq \pi_0,$$

что и требовалось доказать. Это завершает доказательство теоремы 2.

Конус C_h из (8) имеет интересную интерпретацию. Этот конус часто называют рецессивным конусом, или конусом направлений в бесконечность [108]. Для определённости предположим, что d^h выбирается так, что система

$$A^h x \geq d^h,\ x \geq 0 \tag{10}$$

совместна. Пусть x^0 удовлетворяет (10) и пусть $\bar{x} \in C_h$. Тогда для любого λ, $\lambda \geq 0$,

$$A^h(x^0 + \lambda\bar{x}) = A^h x^0 + \lambda A^h \bar{x} \geq d^h + 0 = d^h, \tag{11}$$

и, следовательно, $x^0 + \lambda\bar{x}$ также удовлетворяет (10).

Далее следует метапринцип MCS, который по своей природе очень отличается от метапринципа DC. Метапринцип MCS используется для усиления сечений (C).

Метапринцип MCS. Пусть T — непустое множество, а M — моноид. Предположим, что из ограничений

$$Ax \in T + M, \ x \in \mathbf{Z}_+^r \tag{12}$$

всегда следует неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} F_j(a^j)x_j \geq \pi_0 \tag{13}$$

для некоторых матриц A, где $F_1(v), F_2(v), \ldots, F_r(v)$ — заданные (не обязательно субаддитивные) функции и a^j — j-й столбец матрицы A.

Тогда неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} (\inf_{m \in M} F_j(a^j + m))x_j \geq \pi_0 \tag{14}$$

также является справедливым для ограничений (12) (M — Metaprinciple — метапринцип, C — Cut — сечение, S — Strong — усиление) [6].

Доказательство. Пусть произвольно выбраны элементы m^j, $m^j \in M$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Так как M — моноид, имеем $\sum_{j=1}^{r} m^j x_j \in M$ для любого вектора $x \in \mathbf{Z}_+^r$. Следовательно, (12) влечёт

$$\sum_{j=1}^{r} (a^j + m^j)x_j = \sum_{j=1}^{r} a^j x_j + \sum_{j=1}^{r} m^j x_j \in T + M + M = T + M \tag{15}$$

(последнее равенство имеет место, так как M — моноид), что в свою очередь влечёт (по предположению)

$$\sum_{j=1}^{r} F_j(a^j + m^j)x_j \geq \pi_0. \tag{16}$$

Формула (12) влечёт (16) для любого произвольного выбора m^j. Отсюда и следует неравенство (14).

Метапринцип MCS может быть использован вместе с принципом DC для усиления сечений, полученных по принципу DC, когда $x \in \mathbf{Z}^r_+$.

Пример 3. Предположим, что неотрицательные целочисленные переменные x, t_1, t_2, t_3 удовлетворяют уравнению

$$x = 1,7 + 2,3 \cdot (-t_1) + (-0,3) \cdot (-t_2) + 2 \cdot (-t_3).$$

Релаксируем это ограничение, записывая его как

$$2,3(-t_1) - 0,3(-t_2) + 2(-t_3) \in T + M,$$

в общем случае как

$$a_1(-t_1) + a_2(-t_2) + a_3(-t_3) \in T + M, \tag{17}$$

где $T = \{-1,7\}$ и M — моноид всех целых чисел по сложению.

Так как для каждого элемента из $T + M$ выполняется $\geq 0,3$ или $\leq -0,7$, видим, что имеет место

$$(-a_1)t_1 + (-a_2)t_2 + (-a_3)t_3 \geq 0,3 \text{ или } a_1t_1 + a_2t_2 + a_3t_3 \geq 0,7.$$

Используя множители $\lambda^1 = 1/0,3$ и $\lambda^2 = 1/0,7$, по принципу DC немедленно получаем справедливое неравенство

$$\sum_{j=1}^{3} (\max\{-a_j/0,3, a_j/0,7\})t_j \geq 1, \tag{18}$$

которое является одним из сечений, предложенных Гомори для задач с непрерывными неотрицательными переменными t_j [95]. В контексте формул с конкретными числовыми данными неравенство (18) становится

$$3,29t_1 + t_2 + 2,86t_3 \geq 1. \tag{19}$$

Если умножим обе части неравенства (19) на 0,7, то увидим, что (19) есть ослабление дробного сечения Гомори

$$0,3t_1 + 0,7t_2 + 0t_3 \geq 0,7.$$

Однако (19) справедливо для непрерывных переменных t_j, в то время как в дробном сечении Гомори требуется целочисленность этих переменных.

Для усиления (18) и (19), когда все переменные t_j неотрицательные и целочисленные, обратимся к метапринципу MCS, чтобы получить сечение

$$\sum_{j=1}^{3} (\inf_{m \in M} \max\{-(a_j + m)/0,3, (a_j + m)/0,7\})t_j \geq 1. \tag{18$'$}$$

Сначала упрощаем ($18'$) следующим образом. Записываем коэффициент a_j в виде суммы его целой и дробной частей

$$a_j = \lfloor a_j \rfloor + f_j, \; 0 \leq f_j < 1. \tag{20}$$

Для $m \geq -\lfloor a_j \rfloor$ имеем

$$\max\{-(a_j+m)/0,3, (a_j+m)/0,7\} = (a_j+m)/0,7 \geq f_j/0,7, \tag{21}$$

а для $m \leq -\lfloor a_j \rfloor - 1$ —

$$\max\{-(a_j+m)/0,3, (a_j+m)/0,7\} = -(a_j+m)/0,3 \geq (1-f_j)/0,3. \tag{22}$$

Поэтому ($18'$) эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^{3} (\min\{f_j/0,7, (1-f_j)/0,3\}) t_j \geq 1, \tag{23}$$

которое для конкретных числовых данных становится неравенством

$$0,43t_1 + t_2 + 0t_3 \geq 1. \tag{24}$$

Умножая (24) на 0,7, видим, что оно согласуется с дробным сечением Гомори с точностью до двух десятичных разрядов (сечения фактически тождественные).

Из этого примера ясно, что "простой способ" использования принципа DC и метапринципа MCS есть вопрос искусства, а не прямая процедура. Было бы очень полезно в дополнение к метапринципу MCS иметь другие процедуры усиления сечений, чтобы использовать их в связи с принципом DC. Фактически известно очень мало о процедурах усиления сечений.

Чтобы добиться большего умения в комбинировании принципа DC и метапринципа MCS, в деталях рассмотрим еще один пример. Читатель может испытать свои собственные силы в приводимых ниже задачах (1.7, задачи 1.5.4–1.5.6).

Пример 4 [104]. Предположим, что по крайней мере одна система (S_h) имеет место и что имеются нижние границы, то есть все системы

$$A^h x \geq d^h, \; x \geq 0 \tag{25}$$

совместны, где d^h, $d^h \leq b^h$, — подходяще выбранный вектор. Наконец, предположим, что x — целочисленный вектор.

Положим

$$T = \{(v^1, v^2, \ldots, v^t) \mid v^h \geq d^h \; \forall h \in H, \; v^h \geq b^h \; \exists h \in H\}, \tag{26a}$$

$$M=\Big\{(n_1(b^1-d^1),n_2(b^2-d^2),\dots,n_t(b^t-d^t))\mid\sum_{h=1}^{t}n_h\ge 0,$$
$$n_h\in\mathbf{Z}^1\ \forall h\in H\Big\},\ \text{где } t=|H|. \tag{26b}$$

Также положим

$$A=(A^1,A^2,\dots,A^t)^T \tag{27}$$

(столбец записан в строку).

Тогда имеющаяся информация может быть представлена как

$$Ax\in T. \tag{28}$$

Релаксируем (28) как

$$Ax\in T+M. \tag{29}$$

Теперь заметим, что (29) влечёт совместность по крайней мере одной системы (S_h). Если $n_h=0\ \forall h\in H$ в $(26b)$, то $Ax\in T$ и по крайней мере одна система (S_h) имеет место. Если же $n_h\ne 0\ \exists h\in H$, то $n_{h^*}\ge 1$ для по крайней мере одного h^*, и тогда (S_{h^*}) имеет место. Поэтому (29) гарантирует справедливость сечений (DC).

Пусть $a^{j,h}$ обозначает j-й столбец матрицы A^h $(j=1,2,\dots,r;\ h=1,2,\dots,t)$. Тогда записываем сечение (DC) как

$$\sum_{j=1}^{r}(\max_{h\in H}\lambda^h a^{j,h})x_j\ge\min_{h\in H}\lambda^h b^h. \tag{30}$$

Таким образом, усиленное сечение (14) для (30), рассматриваемого как (13), есть

$$\sum_{j=1}^{r}\Big(\min\Big\{\max_{h\in H}\lambda^h(a^{j,h}+n_h(b^h-d^h))\mid\sum_{h=1}^{t}n_h\ge 0,$$
$$n_h\in\mathbf{Z}^1\ \forall h\in H\Big\}\Big)x_j\ge\min_{h\in H}\lambda^h b^h. \tag{31}$$

1.6. Комплементарная задача

Сначала рассмотрим систему ограничений, содержащую логические ограничения на линейные неравенства и задаваемую как

$$Dx\ge d\ \text{и для каждого } h=1,2,\dots,t \text{ выполняется}$$
$$\text{по крайней мере одно из неравенств } d^i x\ge d_{i,0},\ i\in J_h. \tag{1}$$

В (1) каждое множество J_h непустое и конечное ($|J_h| \geq 2$) и каждое $d^i x \geq d_{i,0}$ — линейное неравенство, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, D — $p \times r$-матрица, d — $p \times 1$-вектор.

Определение. Система ограничений (1) называется граневой, если для каждого $h = 1, 2, \ldots, t$ и для каждого $i \in J_h$ множество $\{x \mid Dx \geq d, d^i x = d_{i,0}\}$ есть грань многогранника $\{x \mid Dx \geq d\}$ (возможно, пустая).

Например, следующая система ограничений

$$Ay + Bz \geq b,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \cdot z = 0 \tag{GLC}$$

записывается в виде граневой системы (1) (G — Generalized — обобщённый, L — Linear — линейный, C — Complementary — комплементарный, $y \cdot z$ — скалярное произведение). В (GLC) $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ и $z = (z_1, z_2, \ldots, z_s)$ — векторы s переменных.

Полагаем:

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ I_s & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix},$$

$d = (b, 0, 0)$, $x = (y, z)$, $r = 2s$, $t = s$, $J_h = \{h, h+s\}$ и $d^i x \geq d_{i,0}$ есть $-x_i \geq 0$, $i = h, h+s$. Таким образом, требование, что по крайней мере одно из ограничений $d^i x \geq d_{i,0}$, $i \in J_h$, выполняется, эквивалентно требованию, что $y_h \leq 0$ или $z_h \leq 0$. Оба неравенства дают грани множества $\{(y,z) \mid Ay + Bz \geq b, y \geq 0, z \geq 0\}$ из-за неотрицательности $y \geq 0$, $z \geq 0$; и по той же причине это требование эквивалентно $y_h z_h = 0$. Так как требование выполняется для $h = 1, 2, \ldots, t$, имеем $y \cdot z = 0$.

Задача, связанная с (GLC), часто состоит в нахождении допустимого решения. Прилагательное "обобщённый" означает, что во многих постановках предполагаются специальные свойства матриц A и B, а в данном контексте эти свойства не формулируются. Задачи вида (GLC) возникают в теории игр, в экономике, в теории уравнений с частными производными и в других областях. Сведения об этом можно найти в литературе.

Отметим, что ограничения (GLC) включают как частные случаи задачи, рассмотренные в работах [90, 93, 106, 107]. Более общие задачи сводятся к (GLC). Например, частный случай ограничений (GLC), данный как

$$Ay \geq b, y_j + z_j = 1,\ j = 1, 2, \ldots, s,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \cdot z = 0, \tag{2}$$

очевидно, эквивалентен системе ограничений двоичной задачи

$$Ay \geq b,\ y_j = 0 \text{ или } y_j = 1,\ j = 1, 2, \ldots, s. \tag{BP}$$

В дальнейшем $clconvS$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества S [49, 108], а выпуклая оболочка пустого множества является пустой.

Индуктивно определим выпуклые многогранники:

$$K_0 = \{x \mid Dx \geq d\}, \tag{3}$$

$$K_{h+1} = clconv \bigcup_{i \in J_{h+1}} (K_h \cap \{x \mid d^i x \geq d_{i,0}\}), \quad h = 0, 1, \ldots, t-1. \tag{4}$$

В дальнейшем необходим следующий результат.

Теорема 1 [81, 82]. Если K_0 — ограниченный многогранник и (1) — граневая система неравенств, то

$$K_t = clconv\{x \mid (1) \text{ имеет место}\}. \tag{5}$$

Сначала теорема 2 доказывается при предположении ограниченности, которое позже устраняется [103].

Пожалуй, заслуживает внимания замечание, что предположение о непустоте и ограниченности многогранника $\{x \mid Dx \geq d'\}$ для некоторой правой части d' влечёт $\{x \mid Dx \geq 0\} = \{0\}$. Следовательно, это предположение влечёт, что для любого d многогранник $\{x \mid Dx \geq d\}$ ограничен.

Основной результат [103] излагается по схеме: принцип и теорема (теорема 2).

Принцип GLC. Неравенство, полученное из справедливых неравенств по правилам $i)$ и $ii)_h$, является справедливым для комплементарных ограничений (GLC).

$i)$ Берём неотрицательную комбинацию данных неравенств и, возможно, уменьшаем правую часть.

$ii)_h$ Имея уже полученные два справедливых неравенства

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + u y_h + \cdots + \alpha_s y_s + \beta_1 z_1 + \cdots + t z_h + \cdots + \beta_s z_s \geq \alpha_0 \tag{6a}$$

и

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + u' y_h + \cdots + \alpha_s y_s + \beta_1 z_1 + \cdots + t' z_h + \cdots + \beta_s z_s \geq \alpha_0, \tag{6b}$$

можно вывести

$$\begin{gathered} \alpha_1 y_1 + \cdots + u y_h + \cdots + \alpha_s y_s + \beta_1 z_1 + \cdots + \\ + t' z_h + \cdots + \beta_s z_s \geq \alpha_0 \ (h = 1, 2, \ldots, s). \end{gathered} \tag{6c}$$

Дадим пример для иллюстрации правила $ii)_h$ при $s = 3, h = 2$. Из двух неравенств

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4z_1 + 5z_2 + 6z_3 \geq 7$$

и

$$y_1 + 8y_2 + 3y_3 + 4z_1 + 3z_2 + 6z_3 \geq 7$$

можно получить

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4z_1 + 3z_2 + 6z_3 \geq 7.$$

В этом примере коэффициенты, где возможно, специально подобраны различными. Коэффициенты при y_1, y_3, z_1 и z_3 в обоих неравенствах, так же как и правые части, должны совпадать.

Доказательство. Правило $i)$, очевидно, даёт справедливое неравенство для ограничений (GLC) в поле всех действительных чисел. Докажем это для правила $ii)_h$.

Предположим, что (y,z) удовлетворяет ограничениям (GLC) и что неравенства $(6a)$, $(6b)$ выполняются для всех допустимых решений системы (GLC). Так как $y \cdot z = 0$, имеем $y_h z_h = 0$. Отсюда $y_h = 0$ или $z_h = 0$. Если $y_h = 0$, то, так как $(6b)$ справедливо, $(6c)$ также справедливо. Если же $z_h = 0$, тогда из справедливости $(6a)$ следует справедливость $(6c)$. В любом случае $(6c)$ справедливо. Так как (y,z) было произвольным решением системы (GLC), видим, что $(6c)$ справедливо для всех решений системы (GLC). Таким образом, применение правила $ii)_h$ сохраняет справедливость, и отсюда любое конечное число его применений даёт то же.

Теорема 2. Если множество

$$\{(y,z) \mid Ay + Bz \geq b',\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \tag{7}$$

ограничено и непусто для некоторого b', то каждое справедливое неравенство для ограничений (GLC) находится, начиная с линейных неравенств

$$Ay + Bz \geq b,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \tag{8}$$

и применяя конечное число раз правила $i)$ и $ii)_h$.

Индуктивное доказательство теоремы 2 приведено в [103]. В [104] для построения справедливого неравенства используется дерево.

Когда используется принцип JLC, правило $i)$ реализуется симплекс-алгоритмом, а правило $ii)_h$ соответствует добавлению сечений. Желательно добавлять сечения способом, который, если возможно, не увеличивает размер задачи. Следовательно, сечения, которые делают некоторые ограничения задачи удаляемыми, являются ценными.

Доказательство. Правило $i)$, очевидно, даёт справедливое неравенство для ограничений (GLC) в поле всех действительных чисел. Докажем это для правила $ii)_h$.

Предположим, что (y,z) удовлетворяет ограничениям (GLC) и что неравенства (6a), (6b) выполняются для всех допустимых решений системы (GLC). Так как $y \cdot z = 0$, имеем $y_h z_h = 0$. Отсюда $y_h = 0$ или $z_h = 0$. Если $y_h = 0$, то, так как (6b) справедливо, (6c) также справедливо. Если же $z_h = 0$, тогда из справедливости (6a) следует справедливость (6c). В любом случае (6c) справедливо. Так как (y,z) было произвольным решением системы (GLC), видим, что (6c) справедливо для всех решений системы (GLC). Таким образом, применение правила $ii)_h$ сохраняет справедливость, и отсюда любое конечное число его применений даёт то же.

1.7. Задачи

1.7.1. Формулировка задач

Задача 1.1.1. Привести известные вам примеры соглашений из курса математики.

Задача 1.1.2. Проиллюстрировать геометрическую интерпретацию понятий ослабления и усиления неравенства на конкретном числовом примере. Для простоты рисунка можно рассмотреть прямоугольную систему координат Ox_1x_2 на плоскости.

Задача 1.1.3. Доказать принцип LP в его формулировке.

Задача 1.1.4. Для примера 1 в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 на плоскости изобразить справедливое неравенство $x_2 \geq 1$ и другие возможные справедливые сечения.

Задача 1.1.5. Доказать, что справедливое неравенство $(-1) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \geq 0$ для системы ограничений

$$x_2 \geq 1,\ -x_2 \geq 0,\ (x_1, x_2) \geq 0$$

не находится среди ослаблений неравенств (LPC).

Задача 1.1.6. Дать определение выпуклой (вогнутой) функции. Доказать следующие утверждения:

a) функция $\phi(b) = \min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ является выпуклой;

b) функция $\psi(c) = \min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ является вогнутой;

c) функция $\phi(b) = \max\{yb \mid yA \leq c,\ y \geq 0\}$ является выпуклой;

d) функция $\psi(c) = \max\{yb \mid yA \leq c,\ y \geq 0\}$ является вогнутой.

Задача 1.1.7. Теоремы о разрешимости систем [24, 77, 99].

Пусть A — действительная $m \times n$-матрица, b — действительный m-столбец.

Теорема 1 (о разрешимости системы линейных уравнений). Из двух систем линейных уравнений

$$Ax = b,\ b \neq 0,\ \text{и}\ yA = 0,\ yb = \lambda,\ \lambda \neq 0,$$

одна и только одна система имеет решение (λ, $\lambda \neq 0$, — любой действительный скаляр).

Теорема 2 (о неотрицательном решении системы линейных уравнений). Либо система уравнений $Ax = b$, $b \neq 0$, имеет неотрицательное решение, либо система неравенств $yA \geq 0$, $yb < 0$ имеет решение.

Теорема 3 (о неотрицательном решении системы линейных неравенств) (лемма Минковского — Фаркаша). Из двух систем линейных неравенств

$$Ax \leq b \text{ и } yA \geq 0,\ yb < 0$$

одна и только одна система имеет неотрицательное решение.

Теорема 4 (о неотрицательном решении системы линейных неравенств) (лемма Минковского — Фаркаша). Из двух систем линейных неравенств

$$Ax \geq b \text{ и } yA \leq 0,\ yb > 0$$

одна и только одна система имеет неотрицательное решение.

Теорема 5 (другая формулировка леммы Минковского — Фаркаша). Система линейных неравенств $Ax \leq b$, $x \geq 0$ разрешима тогда и только тогда, когда каждое решение системы линейных неравенств $yA \geq 0$, $y \geq 0$ удовлетворяет неравенству $yb \geq 0$.

Теорема 6 (другая формулировка леммы Минковского — Фаркаша). Система линейных неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$ разрешима тогда и только тогда, когда каждое решение системы линейных неравенств $yA \leq 0$, $y \geq 0$ удовлетворяет неравенству $yb \leq 0$.

Задача 1.1.8. Теорема Минковского — Фаркаша.

a) Доказать теорему в следующей формулировке.

Для того чтобы любое решение системы линейных неравенств $Ax \geq b$ удовлетворяло неравенству $px \geq q$, необходимо и достаточно существование такого неотрицательного вектора u, что $uA = p$ и $ub \geq q$.

b) Дать формулировку теоремы для однородной системы линейных неравенств.

c) Если $Ax \leq b$ и $px \leq q$, то как изменится формулировка теоремы? Дать по крайней мере два доказательства теоремы в изменённой формулировке.

d) Если все решения совместной системы

$$l_i(x) - a_i \equiv a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n - a_i \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

над $\mathbf{R}^1$ удовлетворяют некоторому неравенству

$$l(x) - b \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n - b \leq 0, \quad b \in \mathbf{R}^1,\ b_i \in \mathbf{R}^1,\ i = \overline{1,n},$$

то существуют такие неотрицательные числа $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m$, что имеет место тождественное относительно $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соотношение

$$l(x) - b = \sum_{i=1}^{m} p_i(l_i(x) - a_i) - p_0 \ [40].$$

Задача 1.1.9. Сформулировать теорему двойственности для линейной задачи оптимизации, использовав канонический, общий и стандартный виды её записи.

Задача 1.1.10. Теоремы о дополняющей нежёсткости.

Пусть задана пара двойственных линейных задач оптимизации в каноническом виде

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} \text{ и } \max\{yb \mid yA \leq c,\ y \geq 0\}.$$

Теорема 1 (о слабой дополняющей нежёсткости). Для того чтобы допустимые решения x' и y' прямой и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$y'(Ax' - b) = 0 \text{ и } (c - y'A)x' = 0.$$

Теорема 2 (о сильной дополняющей нежёсткости). Если для прямой и двойственной линейных задач оптимизации существуют допустимые решения, то найдётся по крайней мере одна пара оптимальных решений x^* и y^*, удовлетворяющая соотношениям

$$(Ax^* - b) + (y^*)^T > 0 \text{ и } (c - y^*A) + (x^*)^T > 0.$$

Задача 1.2.1. Показать, что уравнение $3x_1 + 5x_2 = b$ для любого положительного целого числа b, $b \geq 8$, имеет по крайней мере одно неотрицательное целочисленное решение.

Задача 1.2.2.

a) Является ли группа по сложению моноидом?

b) Является ли моноидом множество всех натуральных чисел, на котором определено обычное сложение?

c) Является ли моноидом множество всех нечётных целых чисел, на котором определено обычное сложение?

Задача 1.2.3. Доказать утверждения, сформулированные в примере 1.

Задача 1.2.4. Показать, что функция, тождественно равная отрицательной константе, не является субаддитивной.

Задача 1.2.5. Выделить и доказать утверждения из доказательства теоремы 1, которые, на ваш взгляд, остались недоказанными. Проиллюстрировать эти утверждения на конкретном множестве

$$S_2 = \{x \mid 3x_1 + 8x_2 + 1x_3 = 12,\ x \in \mathbf{Z}^3_+\}.$$

Задача 1.3.1. Доказать, что показатель, с которым данное простое число p входит в произведение $n!$, равен

$$\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \cdots .$$

Задача 1.3.2. Построение справедливых сечений.

Рассмотрим непустое множество

$$S_2 = \left\{ (x,t) \mid x + \sum_{j=1}^{n} a_j t_j = a_0,\ (x,t) \in \mathbf{Z}_+^{n+1} \right\}.$$

Коэффициенты рассматриваемого уравнения взяты из симплекс-таблицы: x — базисная переменная без индекса, t_j, $j = 1,2,\ldots,n$, — небазисные переменные.

Представим каждый коэффициент a_j в виде суммы его целой и дробной частей

$$a_j = \lfloor a_j \rfloor + f_j \ (j = 0,1,2,\ldots,n).$$

a) Запись

$$\sum_{j=1}^{n} f_j t_j - f_0 = \lfloor a_0 \rfloor - x - \sum_{j=1}^{n} \lfloor a_j \rfloor t_j$$

показывает, что для всех $(x,t) \in S_2$ выражение $\sum_{j=1}^{n} f_j t_j - f_0$ принимает целочисленные значения. Следовательно, это выражение неотрицательное. Условие $x \geq 0$ здесь не используется. Поэтому для всех $(x,t) \in S_2$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} f_j t_j \geq f_0$$

(дробное сечение Гомори [95]).

Указать субаддитивную функцию, дающую это сечение.

b) Запись

$$x = \lfloor a_0 \rfloor + f_0 - \sum_{f_j = 0} a_j t_j - \sum_{f_j \neq 0} a_j t_j$$

показывает, что для $f_0 \neq 0$ по крайней мере одна из переменных $t_j, f_j \neq 0$, отлична от 0, то есть для всех $(x,t) \in S_2$ имеет место неравенство

$$\sum_{f_j \neq 0} t_j \geq 1.$$

Указать субаддитивную функцию, дающую это сечение.

c) Запись

$$x = \lfloor a_0 \rfloor + f_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j t_j$$

показывает, что для $f_0 \neq 0$ по крайней мере одна из переменных t_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, отлична от 0, то есть для всех $(x,t) \in S_2$ имеет место неравенство
$$\sum_{j=1}^{n} t_j \geq 1.$$

Указать субаддитивную функцию и дальнейшее ослабление, дающие это сечение.

d) В работе [61] изложен прямой метод для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации. В этом методе строится справедливое сечение (сечение Хохлюка), многократное применение которого приводит к системе линейных неравенств, задающей выпуклую оболочку всех допустимых решений рассматриваемой задачи. Машинная реализация отдельных фрагментов прямого метода оказалась очень успешной.

Задача 1.3.3. Построение справедливых сечений.

Рассмотрим непустое множество
$$S_2 = \{(x,t_1,t_2,t_3) \mid x = 1{,}7 + 2{,}3 \cdot (-t_1) + (-0{,}3) \cdot (-t_2) \\ +2 \cdot (-t_3), (x,t_1,t_2,t_3) \in \mathbf{Z}_+^4\}.$$

Показать, что дробное сечение Гомори является усилением справедливого неравенства
$$t_1 + t_2 \geq 1,$$
умноженного на 0,7.

Задача 1.3.4. Построение справедливых сечений.

Рассмотрим непустое множество
$$S_B' = \{x \mid 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 \geq 15,\ x \in \mathbf{B}^4\}.$$

Ограничения, задающие множество S_B', делают невозможным $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, так как 2 + 5 < 15. Следовательно, неравенство
$$x_3 + x_4 \geq 1$$
является справедливым сечением для множества S_B'.

Можно ли получить это сечение с помощью монотонной субаддитивной функции (быть может, после некоторого линейного преобразования двоичных переменных)? При этом условие двоичности для каждой переменной следует заменить на требование, что каждая переменная принимает неотрицательные целочисленные значения.

Задача 1.5.1. Доказать метапринцип DC в его формулировке.

Задача 1.5.2. Сформулировать и доказать принцип DC для конечного множества H.

Задача 1.5.3. В прямоугольной системе координат Ox_1x_2 на плоскости изобразить дизъюнктивное множество

$$S_4 = \{x \mid ((-1)x_1 + (-1)x_2 \geq (-2), x \geq 0) \vee ((-1)x_1 + x_2 \geq 0, x \geq 0) = true\}$$

и семейство справедливых сечений для этого множества, построенных по метапринципу DC. Указать множества $convS_4$ и $clconvS_4$.

Задача 1.5.4. Предположим, что ограничения

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6} + \frac{7}{6}(-t_1) - \frac{2}{6}(-t_2) - \frac{3}{6}(-t_3) + \frac{5}{6}(-t_4) + \frac{11}{6}(-t_5), \\ x_2 &= \frac{2}{6} + \frac{1}{6}(-t_1) + \frac{1}{6}(-t_2) + \frac{1}{6}(-t_3) - \frac{1}{6}(-t_4) + \frac{1}{6}(-t_5), \\ x_3 &= \frac{3}{6} - \frac{2}{6}(-t_1) + \frac{4}{6}(-t_2) - \frac{1}{6}(-t_3) - \frac{1}{6}(-t_4) - \frac{5}{6}(-t_5) \end{aligned} \tag{32}$$

наложены на двоичные переменные x_1, x_2, x_3, которые также удовлетворяют неравенству из задачи о покрытии множества

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1. \tag{33}$$

В (32) все переменные t_j неотрицательные и целочисленные.

a) Использовав неравенство (33) и двоичность переменных x_i, $i = 1,2,3$, получить дизъюнктивную систему (S_i), $i = 1,2,3$, для переменных t_j, а затем из этой системы получить сечение

$$\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{3}{5}t_3 + \frac{1}{3}t_4 + \frac{5}{3}t_5 \geq 1. \tag{34}$$

Указание. Решение можно начать с доказательства следующего утверждения. Для двоичных переменных неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

эквивалентно равенству

$$(x_1 \geq 1) \vee (x_2 \geq 1) \vee (x_3 \geq 1) = true.$$

b) Чтобы получить нижние границы для дизъюнктивной системы (как в (25)), выписанной в пункте a) этой задачи, использовать тот факт, что переменные x_i неотрицательные. Затем применить (31), чтобы получить усиленное сечение

$$-\frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{3}{5}t_3 + \frac{1}{4}t_4 - \frac{1}{4}t_5 \geq 1. \tag{35}$$

Указание. Если всё сделано правильно, то находим, что $b^i - d^i = 1$ для $i = 1, 2, 3$.

Задача 1.5.5. Предположим, что (C) является справедливым неравенством для ограничений

$$Ax \in T + M,\ x \in \mathbf{Z}_+^r$$

и что эти ограничения совместны, где T — непустое множество, а M — моноид. Предположим также, что для $j = 1, 2, \ldots, r$ существуют положительные целые числа D_j, для которых $D_j a^j \in M$ (a^j — j-й столбец матрицы A).

a) Показать, что в (C) $\pi_j \geq 0$ для $j = 1, 2, \ldots, r$.

b) Предположим, что $M = \mathbf{Z}^p$ и что A — рациональная матрица (A имеет p строк).

Показать, что $\pi_j \geq 0$ для $j = 1, 2, \ldots, r$.

В частности, (C) не может быть сечением вида (35), полученным выше.

Указание. Использовать пункт a) этой задачи.

Задача 1.5.6. Предположим, что M есть моноид специального вида

$$M = \{v \mid v = -Bz\ \exists z \in \mathbf{Z}_+^q\}, \tag{36}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_q)$ и B — $p \times q$-матрица рациональных чисел. Пусть $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ есть p-вектор. Сократим запись $\{b\} + M$ до $b + M$.

Показать, что справедливые сечения (C) для множества

$$S = \{x \mid Ax \in b + M,\ x \in \mathbf{Z}_+^r\} \tag{37}$$

есть ослабления сечения (IPC) для подходящей субаддитивной функции $F(v)$, $F(0) = 0$ и

$$F(B^k) \leq 0,\ k = 1, 2, \ldots, q, \tag{38}$$

при условиях, что A — рациональная матрица и что $Ax \in b + M$ — совместная система ограничений. В (38) b^k — k-й столбец матрицы B.

Указание. Использовать теорему 1 (см. 1.2).

Задача 1.6.1. Использовав логические переменные, записать систему ограничений (1).

Задача 1.6.2. Для каждой из систем комплементарных ограничений изобразить на плоскости Oy_1z_1 её допустимое множество и замыкание выпуклой оболочки этого множества:

a) $-2y_1 - 3z_1 \geq -6,\ y_1 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ y_1 \cdot z_1 = 0$;

b) $2y_1 + 3z_1 \geq 6,\ y_1 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ y_1 \cdot z_1 = 0$;

c) $y_1 \geq 1,\ z_1 \geq 1,\ y_1 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ y_1 \cdot z_1 = 0$.

Задача 1.6.3. Использовав ограничения (JLC), сформулировать комплементарную задачу минимизации, в которой целевая функция является линейной.

1.7.2. Решение избранных задач

Задача 1.1.1. Например, $0! = 1$ ($0!$ – нуль-факториал), $C_n^0 = 1$.

Задача 1.1.5. Указание. Повторить рассуждения, приведённые в примере 2.

Задача 1.1.6.

$$\begin{aligned} \text{a) } \phi(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = cx^* \le c(\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*) = \\ = \lambda_1 c x_1^* + \lambda_2 c x_2^* = \lambda_1 \phi(b_1) + \lambda_2 \phi(b_2). \\ \text{b) } \psi(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) x^* = \lambda_1 c_1 x^* + \lambda_2 c_2 x^* \ge \\ \ge \lambda_1 c_1 x_1^* + \lambda_2 c_2 x_2^* = \lambda_1 \psi(c_1) + \lambda_2 \psi(c_2). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, а знак $*$ указывает на то, что допустимое решение x является оптимальным.

Задача 1.2.2. a) Да. b) Нет. c) Нет.

Задача 1.3.2.

a) Дробная часть $F(v) = v - \lfloor v \rfloor$.

b) Функция $F(v) = \lceil v \rceil - \lfloor v \rfloor$.

c) Функция $F(v) = \lceil v \rceil - \lfloor v \rfloor$ и каждый коэффициент 0 заменён на 1.

Задача 1.3.3. Указание. Выбрать нужную субаддитивную функцию (1.7, задача 1.3.2).

Укажем ещё одну субаддитивную функцию, дающую неравенство

$$t_1 + t_2 \ge 1.$$

Для $r \ge 0$ функция $G(r) = \min\{r, 1\}$ является субаддитивной (1.3, задача 1, f) и, очевидно, монотонной. Субаддитивность функции $H(v) = (v - \lfloor v \rfloor)/0{,}3$ следует из задачи 1, h). Следовательно, функция $F(v) = G(H(v)) = \min\{(v - \lfloor v \rfloor)/0{,}3, 1\}$ субаддитивная (1.3, задача 3) и удовлетворяет условию $F(0) = 0$. Проверка, что построенная функция даёт нужные коэффициенты, не представляет труда.

Можно указать и другие субаддитивные функции, дающие это справедливое сечение. Например, если следовать указанию, то получаем $F(v) = \lceil v \rceil - \lfloor v \rfloor$.

Задача 1.3.4. Да! Новые переменные $x_1' = 1 - x_1$ и $x_2' = 1 - x_2$ двоичные, так как таковыми являются переменные x_1 и x_2. Тогда исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$-2x_1' - 5x_2' + 7x_3 + 11x_4 \ge 15 - 7 = 8.$$

Теперь нужно подобрать такое "усечение" (задача 1, f)), которое переводит коэффициенты -2, -5 в 0, а 7, 11, 8 — в 1.

Функция $G(v) = \max\{0, v\}$ является монотонной субаддитивной (задача 1, a) и b)). При этом $G(-2) = G(-5) = 0, G(7) = 7, G(11) = 11, G(8) = 8$. Тогда $F(v) = \min\{G(v), 1\}$ есть искомое усечение, дающее требуемое справедливое неравенство.

Задача 1.5.4. a) Из неравенства (33) следует равенство

$$(x_1 \geq 1) \vee (x_2 \geq 1) \vee (x_3 \geq 1) = true,$$

то есть

$$-\frac{7}{6}t_1 + \frac{2}{6}t_2 + \frac{3}{6}t_3 - \frac{5}{6}t_4 - \frac{11}{6}t_5 \geq \frac{5}{6}, \tag{S_1}$$

$$-\frac{1}{6}t_1 - \frac{1}{6}t_2 - \frac{1}{6}t_3 + \frac{1}{6}t_4 - \frac{1}{6}t_5 \geq \frac{4}{6}, \tag{S_2}$$

$$+\frac{2}{6}t_1 - \frac{4}{6}t_2 + \frac{1}{6}t_3 + \frac{1}{6}t_4 + \frac{5}{6}t_5 \geq \frac{3}{6}, \tag{S_3}$$

что даёт $b^1 = \frac{5}{6}$, $b^2 = \frac{4}{6}$, $b^3 = \frac{3}{6}$ и $t = 3$.

Поскольку всегда $(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, аналогично получаем (как в (25)), что $d^1 = -\frac{1}{6}$, $d^2 = -\frac{2}{6}$, $d^3 = -\frac{3}{6}$. Поэтому $b^h - d^h = 1$ для $h = 1, 2, 3$.

Из (31) следует справедливое сечение

$$\sum_{j=1}^{5} (\max_{h=1}^{3} \{\lambda^h (a^{(j,h)} + n_h)\}) t_j \geq \min_{h=1}^{3} \lambda^h b^h, \tag{39}$$

где n_h — целые (возможно, отрицательные) числа, удовлетворяющие неравенству $n_1 + n_2 + n_3 \geq 0$, а $\lambda^h \geq 0$ — неотрицательные скаляры. Выберем, например, $\lambda^1 = \frac{6}{5}$, $\lambda^2 = \frac{6}{4}$, $\lambda^3 = \frac{6}{3}$, так что $\lambda^h b^h = 1$, $h = 1, 2, 3$. Тогда для $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ получим обычное дизъюнктивное сечение

$$\frac{2}{3}t_1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{3}{5}t_3 + \frac{1}{3}t_4 + \frac{5}{3}t_5 \geq 1, \tag{40}$$

что есть (34).

b) Теперь выберем n_1, n_2, n_3 так, чтобы улучшить коэффициент $\frac{2}{3}$ при t_1 в (40), если это возможно. Использовав $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, -1)$, улучшим этот коэффициент. Он становится $\max\{\frac{6}{5}(-\frac{7}{6} + 1), \frac{6}{4}(-\frac{1}{6} + 0), \frac{6}{3}(\frac{2}{6} - 1)\} = -\frac{1}{5}$, как указано в (35).

Чтобы улучшить коэффициент при t_4, который равен $\frac{1}{3}$ в (40), заметим, что $(n_1, n_2, n_3) = (1, 0, -1)$ даёт коэффициент $\max\{\frac{6}{5}(-\frac{5}{6} + 1), \frac{6}{4}(\frac{1}{6} + 0), \frac{6}{3}(\frac{1}{6} - 1)\} = \frac{1}{4}$, как указано в (35).

Алгоритм, который находит лучшие (n_1, n_2, n_3) в задачах такого типа, описан в работе, указанной в ссылке из [103]. Из этой работы и взят рассматриваемый пример.

Задача 1.5.5. a) Пусть x^0 — любое решение системы ограничений $Ax \in T+M$ и пусть e_j обозначает j-й единичный вектор.

Тогда для любого неотрицательного целочисленного k имеем

$$A(x^0 + kD_j e_j) = Ax^0 + kD_j a^j \in T+M+M = T+M.$$

Следовательно, для любого так выбираемого k вектор $x^0 + kD_j e_j$ также является решением системы ограничений. Поэтому j-я компонента этого решения может быть произвольно большой, в то время как величина других компонент фиксирована, и в справедливом сечении (C) должно выполняться неравенство $\pi_j \geq 0$.

b) Поскольку A есть матрица рациональных чисел, $D_j a^j \in \mathbf{Z}^p$ имеет место, если D_j — наименьший общий знаменатель для рациональных элементов столбца a^j. Применяем пункт a) этой задачи.

Групповая задача Гомори включает ограничения вида $Ax \in T + \mathbf{Z}^p$, и это даёт один способ доказательства того, что $\pi_j \geq 0$ для сечений, основанных на этой задаче [77, 99].

Задача 1.5.6. Заметим, что $Ax \in b+M$ эквивалентно

$$Ax + By = b, (x,y) \in \mathbf{Z}_+^{r+q}. \tag{41}$$

Применяем теорему 1 (**2. Целочисленная задача**) непосредственно к (41). Условие (38) является необходимым и достаточным, чтобы в ослаблении сечения (IPC) в координатных позициях для переменных y_k стояли нули. Оно точно даёт ослабление с нулями в позициях для y_k, которое является сечением для системы ограничений $Ax \in b+M$ в обозначениях переменных x.

Задача 1.6.1.

$$(Dx \geq d) \wedge (\bigwedge_{h=1}^{t} (\bigvee_{i \in J_h} (d^i x \geq d_{i,0})) = true.$$

Задача 1.6.2. a) Два отрезка. b) Два луча. c) Пустое множество.

Задача 1.6.3.

$$\min\{cy + dz \mid Ay + Bz \geq b,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \cdot z = 0\}.$$

Глава 2.

Прямой метод

Прямой метод, детально описанный в этой главе, предназначен для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации. Для произвольных целочисленных данных задачи он приводит только к одному из трёх случаев: a) задача несовместна; b) задача совместна и имеет оптимальное решение; c) задача совместна, но не имеет оптимального решения. Изложенный прямой метод является оригинальной разработкой автора [59, 61].

В [3]–[8], [22, 30, 36] можно почерпнуть необходимые сведения по теории чисел и по теории групп.

2.1. Геометрическая интерпретация прямого метода

Представлена геометрическая интерпретация прямого метода [59, 61]. Для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации описан графический метод.

2.1.1. Геометрическая интерпретация для системы неравенств

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации в следующей формулировке.

Найти минимум линейной функции cx при условиях
$Ax \geq b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^n$.

Запишем эту задачу более кратко, как

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}. \tag{1}$$

Здесь $m \times n$-матрица A, m-столбец b и n-строка c являются целочисленными и постоянными для конкретной задачи, $\mathbf{Z}^n$ — множество всех целочисленных n-столбцов, а x — n-столбец неотрицательных целочисленных переменных.

Рассмотрение задачи (1) не нарушает общности, поскольку другие формулировки целочисленной линейной задачи оптимизации могут быть сведены к этой задаче.

Предположим, что допустимое множество задачи (1) является непустым.

Через P обозначим выпуклую оболочку всех допустимых решений задачи (1), то есть

$$P = conv\{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}.$$

Все вершины многовершинника P являются целочисленными.

В отличие от линейной задачи оптимизации

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\},$$

соответствующей задаче (1), для целочисленной задачи (1), как это следует из её формулировки, в явном виде отсутствует система линейных неравенств, задающая многовершинник P.

Прямой метод решения целочисленной линейной задачи оптимизации состоит в построении конечной последовательности вершин выпуклой оболочки допустимого множества этой задачи. При этом построенная последовательность заканчивается либо оптимальным решением, либо нахождением подмножества допустимых решений, на котором целевая функция не ограничена снизу. Итерация прямого метода представляет собой переход от одной крайней точки выпуклого множества к другой [61].

На каждой итерации прямого метода рассматривается система неравенств $Dx \geq f$, $rangD = n$, задающая заострённый конус $C = \{x \mid Dx \geq f\}$ с вершиной в целочисленной точке x', одновременно являющейся вершиной многовершинника P. При этом $P \subseteq C$. В систему $Dx \geq f$ входят некоторые из неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$, а также в общем случае — неравенства, построенные на предыдущих итерациях метода. Матрица D и столбец f являются целочисленными. Если число всех неравенств, обращаемых точкой x' в равенство, равно n, то условие $rangD = n$ следует заменить на $\det D \neq 0$.

Сформулируем два условия. При выполнении каждого из них допустимая целочисленная точка x' является оптимальным решением задачи (1).

Достаточное условие оптимальности. Для каждого направления u_k из системы всех крайних направлений $u_1, u_2, \dots, u_s$ конуса C выполняется неравенство $cu_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, s)$.

Необходимое и достаточное условие оптимальности. Для каждого крайнего направления u_k, выходящего из вершины x' многовершинника P, выполняется неравенство $cu_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \dots, s')$.

Поиск направления, сдвиг вдоль которого приводит к лучшему допустимому решению (такое направление будем называть улучшающим), можно организовать следующим образом.

Среди векторов $u_1, u_2, \dots, u_s$ ищем направление u_k, удовлетворяющее условиям:

a) $cu_k < 0$;

b) $a_i u_k \geq 0$ для $a_i x' = b_i$, $e_j u_k \geq 0$ для $x'_j = 0$, где e_j — j-я единичная строка $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$;

c) на луче $x(\theta) = x' + \theta u_k$, $\theta > 0$, существует по крайней мере одно допустимое решение целочисленной линейной задачи оптимизации (1).

Остановимся более детально на условии c).

Пусть для некоторого целочисленного вектора u_k из системы $u_1, u_2, \dots, u_s$ выполняются условия a) и b). Рассмотрим луч $x(\theta) = x' + \theta u_k$, $\theta \geq 0$, выходящий из точки x' вдоль направления u_k. Если для любого $\theta \geq 0$ точки $x(\theta)$ удовлетворяют системе $Ax \geq b$, $x \geq 0$, то значения целевой функции cx не ограничены снизу на множестве целочисленных точек $\{x(l) \mid l = 1, 2, \dots, +\infty\}$.

Иначе определим величину θ_0 из соотношения $\theta_0 = \min\{\theta_1, \theta_2\}$, где

$$\theta_1 = \min_{a_i u_k < 0} (a_i x' - b_i) / - a_i u_k, \qquad \theta_2 = \min_{x'_j > 0,\ e_j u_k < 0} x'_j / - e_j u_k.$$

Границы изменения θ_1 и θ_2 переменной θ определяются подстановкой выражения $x' + \theta u_k$ соответственно в системы неравенств $Ax \geq b$ и $x \geq 0$.

Пусть θ' — наибольшее значение θ из интервала $[0, \theta_0]$, для которого $x(\theta')$ — целочисленная точка. Если $\theta' = 0$, то такое направление не является крайним направлением многовершинника P и не может быть улучшающим.

Теперь рассмотрим случай, когда $x(\theta') = x''$ — новая вершина многовершинника P с меньшим значением целевой функции cx. Рассмотрим конус

$$C' = \{x \mid D'x \geq f', rang D' = n\}$$

с вершиной в точке x''. Система неравенств, задающая этот конус, получается из системы неравенств, задающей конус с вершиной в точке

x'. В общем случае используются неравенства, задающие грани углового многовершинника конуса с вершиной в точке $x(\theta_0)$.

Под угловым многовершинником конуса C понимаем выпуклую оболочку всех целочисленных точек этого конуса.

2.1.2. Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий геометрическую интерпретацию прямого метода [61].

Минимизировать линейную функцию $-1x_1 - 5x_2$ при условиях $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \in \mathbf{Z}^1$, $x_2 \in \mathbf{Z}^1$.

На рис. 1 заштрихованная область изображает выпуклую оболочку P всех допустимых решений этой задачи. При нахождении оптимального решения рассматриваемой задачи прямым методом все рассуждения опираются только на рис. 1.

Начинаем с вершины $M_1(0,0)$ многовершинника P и конуса C_1, задаваемого неравенствами $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Среди двух улучшающих направлений $u_1 = (1,0)$ и $u_2 = (0,1)$, выходящих из точки $M_1(0,0)$, выбираем направление u_2. Сдвиг вдоль направления $u_2 = (0,1)$ приводит в нецелочисленную точку $(0, \frac{3}{2})$. Угловым многовершинником конуса, задаваемого неравенствами $x_1 \geq 0$, $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$ и имеющего вершину в точке $(0, \frac{3}{2})$, служит неограниченная область, задаваемая неравенствами $x_1 \geq 0$, $-x_2 \geq -1$, $-x_1 - 3x_2 \geq -4$ (см. задачу 2.1.2), $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$.

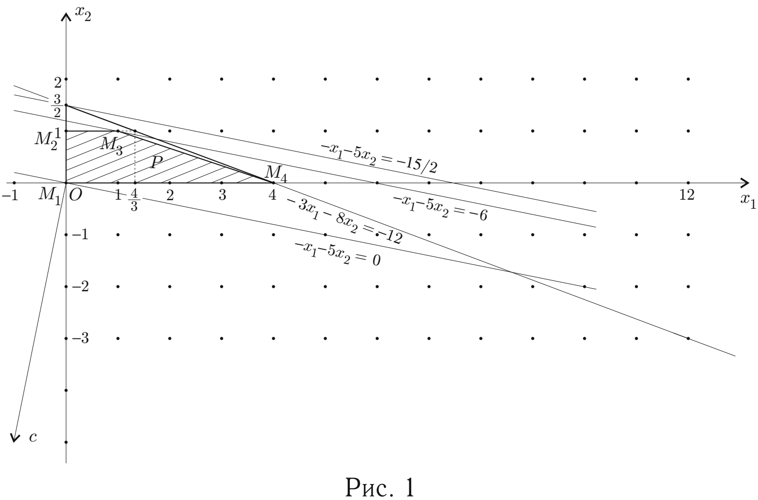

Рис. 1

Таким образом, сдвиг вдоль направления $u_2 = (0,1)$ приводит в новую вершину $M_2(0,1)$ многовершинника P, для которой значение целевой функции равно -5, и к конусу C_2, задаваемому неравенствами $x_1 \geq 0$, $-x_2 \geq -1$.

Среди двух направлений $u_1 = (1,0)$ и $u_2 = (0,-1)$, выходящих из вершины $M_2(0,1)$ многовершинника P, улучшающим является только направление u_1. Сдвиг вдоль этого направления приводит в нецелочисленную точку $(\frac{4}{3},1)$. Угловым многовершинником конуса, задаваемого неравенствами $-x_2 \geq -1$, $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$ и имеющего вершину в точке $(\frac{4}{3},1)$, служит неограниченная область, задаваемая неравенствами $-x_2 \geq -1$, $-x_1 - 3x_2 \geq -4$, $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$.

Таким образом, сдвиг вдоль направления $u_1 = (1,0)$ приводит в новую вершину $M_3(1,1)$ многовершинника P, для которой значение целевой функции равно -6, и к конусу C_3, задаваемому неравенствами $-x_2 \geq -1, -x_1 - 3x_2 \geq -4$. Направления $u_1 = (-1,0)$ и $u_2 = (3,-1)$, выходящие из вершины $M_3(1,1)$ многовершинника P, не являются улучшающими, поскольку целевая функция вдоль этих направлений возрастает. Следовательно, точка $M_3(1,1)$ — оптимальное решение, а оптимальное значение целевой функции равно -6.

Определение. Линия уровня целевой функции — это условное обозначение на графике, представляющее собой линию, в каждой точке которой целевая функция сохраняет одинаковое значение [111].

На рис. 1 изображены также линия уровня целевой функции, то есть прямая $-1x_1 - 5x_2 = 0$, и вектор $c = (-1,-5)$, который указывает направление максимального роста целевой функции.

Графический метод решения целочисленной линейной задачи оптимизации аналогичен графическому методу решения линейной задачи оптимизации. Он заключается в следующем. На рисунке можно изобразить семейство линий уровня, вдоль которых целевая функция сохраняет свое значение. Среди линий уровня выбираем ту, которая касается выпуклого множества. Крайняя точка касания даёт оптимальное решение задачи. Графический метод целесообразно использовать для решения задач, ограничения которых задаются системой неравенств с числом переменных, равным 2 или 3, или системой уравнений, в которой разность между числом неизвестных и числом уравнений равна 2 или 3.

Выпуклая оболочка всех допустимых решений нашей целочисленной линейной задачи оптимизации, изображённая на рис. 1, представляет собой область, ограниченную трапецией с вершинами $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(1,1)$, $M_4(4,0)$. Линия уровня $-1x_1 - 5x_2 = -6$ касается этого множества в точке $M_3(1,1)$, следовательно, точка $M_3(1,1)$ — оптимальное решение, а оптимальное значение целевой функции равно -6.

Для соответствующей линейной задачи оптимизации множество допустимых решений представляет собой область, ограниченную треугольником с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,\frac{3}{2})$, $(4,0)$. Решая эту линейную задачу оптимизации графическим методом, получаем оптимальное решение $(0,\frac{3}{2})$ с оптимальным значением целевой функции $-\frac{15}{2}$.

2.2. Построение группового уравнения

Рассмотрена связь между ограничениями целочисленной линейной задачи оптимизации и групповой релаксацией этой задачи [96, 63]. Показано, как строить групповое уравнение. Описан один способ нахождения элемента фактор-группы, в который при заданном гомоморфизме переходит данный небазисный столбец или столбец свободных членов [55, 57, 60, 77, 99].

2.2.1. Релаксация ограничений целочисленной задачи

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации в следующей формулировке.

Найти максимум линейной функции cx при условиях $Ax = b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^{m+n}$. Запишем эту задачу более кратко как

$$\max\{cx \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^{m+n}\}. \tag{1}$$

Здесь $m \times (m+n)$-матрица A, m-столбец b и $(m+n)$-строка c являются целочисленными и постоянными для конкретной задачи, $\mathbf{Z}^{m+n}$ — множество всех целочисленных $(m+n)$-столбцов, а x — $(m+n)$-столбец неотрицательных целочисленных переменных ($m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$).

Рассмотрение задачи (1) не нарушает общности, поскольку другие формулировки целочисленной линейной задачи оптимизации могут быть сведены к этой задаче (см., например, задачу 2.2.1).

Относительно матрицы A сделаем два предположения:

a) матрица A имеет ранг m;

b) группа, порождённая всеми столбцами матрицы A, совпадает с группой $\mathbf{Z}^m$ всех целочисленных m-столбцов ($G(A) = \mathbf{Z}^m$).

Через B обозначим некоторую невырожденную подматрицу матрицы A, состоящую из m столбцов матрицы A, а через N — $m \times n$-подматрицу, образованную n оставшимися столбцами. Тогда можем записать систему уравнений из (1) в виде

$$Bx_B + Nx_N = b, \tag{2}$$

где x_B — m-столбец переменных, а x_N — n-столбец переменных. Матрицы B и N называются соответственно базисной и небазисной. Переменные x_B и x_N также называются соответственно базисными (зависимыми) и небазисными (независимыми).

Если значения переменных x_N уже выбраны, то значения переменных x_B однозначно определяются из равенства (2) как

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N). \tag{3}$$

Столбец $x = (x_B, x_N)$ должен удовлетворять всем ограничениям задачи (1). Поэтому целочисленные неотрицательные значения переменных x_N выбираются таким образом, что одновременно выполняются два условия:

a) столбец x_B является целочисленным;

b) столбец x_B является неотрицательным.

Рассмотрим ещё одну целочисленную линейную задачу оптимизации, которую будем называть релаксацией (ослаблением) задачи (1). Ограничения релаксации задачи (1) получаются, если условие a) сохраняется, а условие b) исключается. Эти ограничения имеют вид

$$Bx_B + Nx_N = b,\ x_N \geq 0,\ (x_B, x_N) \in \mathbf{Z}^{m+n}. \tag{4}$$

Пусть $x_N = 0$ и $x_B = B^{-1}b \geq 0$. В этом случае ограничения двух рассматриваемых целочисленных линейных задач оптимизации допускают геометрическую интерпретацию, которая обуславливает очень многое [96]!

В частности, точка $(B^{-1}b, 0)$ является крайней точкой выпуклого множества

$$P' = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\},$$

задаваемого ограничениями линейной задачи оптимизации

$$\max\{cx \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{5}$$

соответствующей задаче (1). Точка $(B^{-1}b, 0)$ одновременно является вершиной конуса C, который представляет собой допустимое множество релаксации линейной задачи оптимизации (5).

Линейная задача оптимизации (5), соответствующая задаче (1), получается из (1) путём исключения условия целочисленности на переменные.

Через P обозначим выпуклую оболочку всех целочисленных точек из P' и будем называть её многовершинником, а через P^* — выпуклую оболочку всех целочисленных точек конуса C и будем называть её угловым многовершинником конуса C.

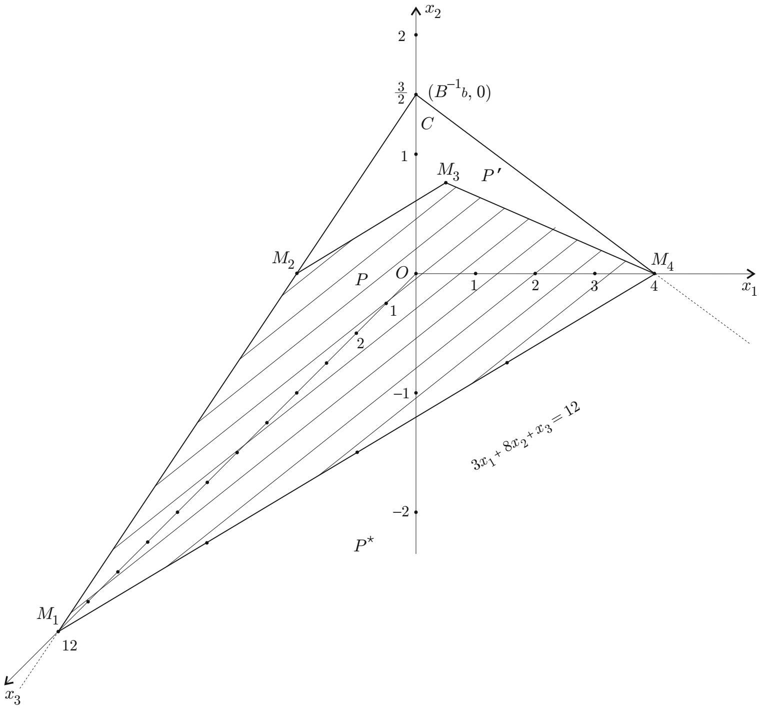

Рис. 2

На рис. 2 изображены введённые множества C, P', P, P^* для конкретной задачи (1). Для этих множеств имеют место включения

$$P \subseteq P' \subseteq C, \; P \subseteq P^* \subseteq C.$$

Теперь вернёмся к условиям на переменные x_N, гарантирующим целочисленность, но не обязательно неотрицательность переменных x_B.

Пусть f — заданный гомоморфизм, отображающий группу $\mathbf{Z}^m$ всех целочисленных m-столбцов на фактор-группу $G = \mathbf{Z}^m/G(B)$, где $G(B)$ — группа, порождённая столбцами матрицы B. Хорошо известно, что фактор-группа G является конечной, а её порядок (число её элементов) равен модулю определителя матрицы B (см., например, [99, 77]).

Применяя гомоморфизм f к уравнению (2), то есть к уравнению $Bx_B + Nx_N = b$, получаем

$$\begin{aligned} f(Bx_B) + \quad & f(Nx_N) = f(b), \\ & f(Nx_N) = f(b). \end{aligned}$$

Следовательно, условие $f(Nx_N) = f(b)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы целочисленные неотрицательные значения переменных x_N давали целочисленные значения переменных x_B.

Пусть гомоморфизм f отображает столбец n_j матрицы N в элемент g_j, а b — в h. Тогда имеем

$$f(Nx_N) = f\left(\sum_{j=1}^{n} n_j x_{N_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} f(n_j x_{N_j}) = \sum_{j=1}^{n} f(n_j) x_{N_j} = \sum_{j=1}^{n} g_j x_{N_j} = h.$$

Таким образом, групповое уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} g_j x_{N_j} = h \tag{6}$$

и ограничения $x_N \geq 0$, $x_N \in \mathbf{Z}^n$ задают целочисленные значения переменных x_B, следовательно, полностью определяют допустимое множество релаксации задачи (1).

Среди элементов группы g_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, которые могут быть одинаковыми или нулевыми, выделим множество N' различных ненулевых элементов и перенумеруем их как

$$g_1, g_2, \ldots, g_{n'}, |N'| = n' \leq \min\{n, |G| - 1\}.$$

С каждым ненулевым элементом g_j свяжем новую переменную t_j ($j = 1, 2, \ldots, n'$). Тогда групповое уравнение (6) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{n'} g_j t_j = h, \tag{7}$$

где $t_k = \sum_{j | g_j = g_k} x_{N_j}$. Другими словами, новая переменная равна сумме старых переменных, стоящих при одном и том же ненулевом элементе группы.

Групповая релаксация ограничений задачи (1) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n'} g_j t_j = h, \quad t_j \geq 0,\ t_j \in \mathbf{Z}^1,\ j = 1, 2, \ldots, n'. \tag{8}$$

Пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n'})$. Рассмотрим соответствие между переменными

$$F : (x_B, x_N) \to x_N \to t.$$

Точке $(B^{-1}b, 0)$ соответствует $x_N = 0$, а последней соответствует $t = 0$. В общем случае соответствие F не является взаимно однозначным. Части x-пространства, для которой небазисные переменные являются неотрицательными, соответствует первый (неотрицательный) квадрант в t-пространстве.

Пусть $P_x(B,N,b)$ — выпуклая оболочка точек, удовлетворяющих ограничениям

$$Bx_B + Nx_N = b,\ x_N \geq 0,\ (x_B, x_N) \in \mathbf{Z}^{m+n}.$$

Её также будем называть угловым многовершинником конуса C. Через $P(G,N',h)$ будем обозначать выпуклую оболочку всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n'} g_j t_j = h.$$

Следующие два легко проверяемых замечания дают связь между многовершинниками $P_x(B,N,b)$ и $P(G,N',h)$.

Замечание 1. Точка (x_B,x_N) есть вершина многовершинника $P_x(B,N,b)$, если и только если

a) точка $t = F(x_B,x_N)$ является вершиной многовершинника $P(G,N',h)$,

b) если $f(n_k) = f(n_l), k \neq l$, то $x_{N_k} = 0$ или $x_{N_l} = 0$,

c) $f(n_k) = 0$ влечёт $x_{N_k} = 0$.

Для получения одной вершины многовершинника в x-пространстве, соответствующей вершине t, поступаем так. Одной из переменных, соответствующих переменной t_k, приписываем значение t_k, а остальным переменным, соответствующим переменной t_k, — значение 0. Выполняя это для каждой переменной t_j и полагая $x_{N_k} = 0$, если $f(n_k) = 0$, получаем x_N. Для нахождения x_B используем равенство $x_B = B^{-1}(b - Nx_N)$.

Вернёмся теперь к граням. Через (π,π_0) будем обозначать неравенство $\sum_{j=1}^{n'} \pi_j t_j \geq \pi_0$, задающее грань в t-пространстве, где π — n'-вектор, а π_0 — скаляр. Аналогично будем записывать неравенство, задающее грань в x-пространстве, в виде $(0,\bar{\pi}_N,\bar{\pi}_0)$.

Замечание 2. Неравенство $(0,\bar{\pi}_N,\bar{\pi}_0)$ задаёт $(n-1)$-мерную грань многовершинника $P_x(B,N,b)$, если и только если неравенство (π,π_0) задаёт $(n'-1)$-мерную грань многовершинника $P(G,N',h)$.

Для получения грани в x-пространстве из грани в t-пространстве просто записываем одно и то же значение коэффициента π_j для всех исходных переменных x, которым соответствует новая переменная t_j.

2.2.2. Нахождение коэффициентов группового уравнения

Рассмотрим групповое уравнение

$$\sum_{g=1}^{n} g_j x_{N_j} = h,\ h \in G,\ g_j \in G,\ j = 1,2,\ldots,n,$$

где $x_{N_j}, j=1,2,\ldots,n,$ — неотрицательные целочисленные переменные.

По соглашению считаем, что $0g = g0 = g_0$ (через g_0 обозначаем нуль группы G). Из определения фактор-группы G следует

$$1g = g1 = g,\ 2g = g2 = g+g,\ 3g = g3 = g+g+g,\ldots, g \in G.$$

Опишем один способ нахождения элемента g_j фактор-группы G, в который при заданном гомоморфизме f переходит данный не базисный столбец n_j или столбец b свободных членов.

В этом способе начинаем с матрицы $A=(B,N)$ и строим фактор-группу $G = G(A)/G(B)$, где $G(A)$ и $G(B)$ — абелевы группы, порождённые соответственно столбцами матриц A и B. Например, всякий столбец вида $\sum_{j=1}^{m+n} n_j a_j$, где все n_j — целые числа, будет принадлежать группе $G(A)$. Построение фактор-группы G осуществляется путём приведения целочисленной матрицы B к нормальному виду.

Определение. Диагональная невырожденная неотрицательная целочисленная матрица D называется нормальной, если $d_{i,i}$ является делителем $d_{i+1,i+1}$, $i = 1,2,\ldots,m-1$.

В работах [57, 60] описан алгоритм приведения целочисленной матрицы к нормальному виду, в котором для ускорения счёта используется алгоритм Евклида.

Можно рассматривать задачу приведения целочисленной матрицы к нормальному виду как задачу нахождения нового базиса и новых единичных векторов.

Пусть $b_1,b_2,\ldots,b_m$, где $b_j = (b_{1,j}, b_{2,j},\ldots,b_{m,j})$, $j = 1,2,\ldots,m,$ — система базисных векторов в $\mathbf{R}^m$. Для удобства здесь и в дальнейшем компоненты вектор-столбца записываются не в столбец, а в строку.

Можно записать $b_j = \sum_{i=1}^m b_{i,j} e_i$, где e_i — i-й единичный столбец, то есть столбец, i-я компонента которого равна 1, а все остальные — 0.

После приведения матрицы B к нормальному виду получим новую систему базисных векторов $b'_1, b'_2,\ldots,b'_m$ и новую систему единичных векторов $e'_1, e'_2,\ldots,e'_m$ такие, что $b'_j = \varepsilon_j e'_j$ для $j = 1,2,\ldots,m$, то есть в новой системе координат каждый вектор b'_j является скалярным кратным вектора e'_j: $b'_1 = (\varepsilon_1, 0,\ldots,0)$, $b'_2 = (0,\varepsilon_2,\ldots,0),\ldots, b'_m = (0,0,\ldots,\varepsilon_m)$. Кроме того, ε_i делит ε_{i+1}, $i = 1,2,\ldots,m-1$.

Операция над столбцами матрицы B даёт целочисленную комбинацию старых базисных векторов $b_1,b_2,\ldots,b_m$ для образования нового базиса $b'_1,b'_2,\ldots,b'_m$. Например, если из столбца b_l вычитается n_l раз столбец b_1, то полагаем $b'_l = b_l - n_l b_1,\ b'_j = b_j,\ j \neq l.$

Операция над строками матрицы B даёт целочисленную комбинацию векторов $e_1,e_2,\ldots,e_m$ для образования новых единичных векторов

$e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$. Например, если из строки b_k вычитается n_k раз строка b_1, то полагаем $e'_1 = e_1 + n_k e_k$, $e'_i = e_i$, $i \neq 1$. Действительно,

$$b_j = b_{1j}e_1 + \cdots + b_{kj}e_k + \cdots + b_{mj}e_m = b_{1j}(e'_1 - n_k e'_k) + \cdots + b_{kj}e'_k + \cdots + b_{mj}e'_m =$$

$$= b_{1j}e'_1 + \cdots + (b_{kj} - n_k b_{1j})e'_k + \cdots + b_{mj}e'_m.$$

Теперь более детально рассмотрим преобразования целочисленной матрицы.

Пусть дана целочисленная $m \times n$-матрица A. Под элементарными преобразованиями матрицы A понимаем следующие операции: умножение строки или столбца матрицы A на -1, перестановку двух строк или столбцов матрицы A и сложение двух строк или столбцов матрицы A, одна или один из которых умножается на целое число.

A. Умножение строки матрицы на -1. Строка a_k матрицы A умножается на -1, а остальные строки этой матрицы остаются без изменения. Это эквивалентно умножению слева A на $m \times m$-матрицу $U_k(-1) = (u_{ij})$, получающуюся из единичной матрицы I_m заменой диагонального элемента 1 на k-м месте на -1.

B. Перестановка двух строк матрицы. Две строки a_k и a_l матрицы A меняются местами $(k \neq l)$, а остальные строки этой матрицы остаются без изменения. Это эквивалентно умножению слева A на перестановочную $m \times m$-матрицу $U_{kl} = (u_{ij})$, которая получается из единичной матрицы I_m перестановкой её строк k и l.

C. Сложение двух строк матрицы, одна из которых умножается на целое число. К строке a_k матрицы A прибавляется её строка a_l $(k \neq l)$, умноженная на целое число α. Это эквивалентно умножению слева A на $m \times m$-матрицу U_{kl} $(\alpha) = (u_{ij})$. Эта матрица получается из единичной матрицы I_m заменой числа 0 в позиции (k, l) на α.

D. Умножение столбца матрицы на -1. Столбец a_l матрицы A умножается на -1, а остальные столбцы этой матрицы остаются без изменения. Это эквивалентно умножению справа A на $n \times n$-матрицу $V_l(-1) = (v_{ij})$, получающуюся из единичной матрицы I_n заменой диагонального элемента 1 на l-м месте на -1.

E. Перестановка двух столбцов матрицы. Два столбца a_k и a_l матрицы A меняются местами, а остальные столбцы этой матрицы остаются без изменения. Это эквивалентно умножению справа A на перестановочную $n \times n$-матрицу $V_{kl} = (v_{ij})$, которая получается из единичной матрицы I_n перестановкой ее столбцов k и l.

F. Сложение двух столбцов матрицы, один из которых умножается на целое число. К столбцу a_k матрицы A прибавляется её столбец a_l $(k \neq l)$, умноженный на целое число α. Это эквивалентно умножению справа A

на $n \times n$-матрицу $V_{lk}(\alpha) = (v_{ij})$. Эта матрица получается из единичной матрицы I_n заменой числа 0 в позиции (l,k) на α.

Приведём еще несколько определений и сформулируем ряд утверждений, доказательство которых не представляет труда.

Преобразования A, B, C называются элементарными строковыми преобразованиями, а преобразования D, E, F — элементарными столбцовыми преобразованиями. Для каждого из этих преобразований существует обратное преобразование, которое также является элементарным.

Матрицы $U_k(-1), U_{kl}, U_{kl}(\alpha), V_l(-1), V_{kl}, V_{lk}(\alpha)$ называются элементарными. Матрица, определитель которой равен либо -1, либо $+1$, называется унимодулярной. Любая элементарная матрица и произведение конечного числа элементарных матриц являются унимодулярными целочисленными матрицами. Верно и обратное утверждение. Всякая унимодулярная целочисленная матрица представима в виде произведения конечного числа элементарных матриц.

В процессе приведения матрицы B к нормальному виду можно построить такие унимодулярные целочисленные матрицы U и V, что $UBV = S$, где S — нормальная матрица. Матрица U соответствует операциям над строками, а матрица V — над столбцами. Если фактор-группа

$$G = G(A)/G(B)$$

является прямой суммой k циклических групп, то матрица S имеет вид

$$S = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & & & & \\
 & . & . & . & & & & \mathbf{0} & & \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\
 & & \mathbf{0} & & & & . & . & . & \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{k-1} & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_k
\end{array}\right),$$

где $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k = \|\det B\|$.

Операции над строками выполняются в матрицах B и N, а операции над столбцами — только в B. Следовательно, в процессе приведения B к S матрица N преобразуется в UN. При естественном гомоморфизме группы $G(A)$ на фактор-группу $G = G(A)/G(B)$ образом данного небазисного столбца служит смежный класс g, который можно определить, прибавив к соответствующему столбцу матрицы UN кратные столбцы матрицы S (или выполнив вычитание). Для $i = 1,2,\ldots,m-k$ значение компоненты полученного столбца равно 0, а для $i > m-k$ — одно из значений $0,1,\ldots,\varepsilon_i - 1$.

Итак, искомый коэффициент группового уравнения получен.

2.3. Вычисление коэффициентов задающего грань неравенства

Описан и полностью обоснован численный метод для вычисления коэффициентов линейного неравенства, которое задаёт грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения, проходящую через её заданную вершину. Именно этот случай имеет место в прямом методе, изложенном ниже. Три числовых примера иллюстрируют вычисление коэффициентов неравенства, нахождение вершин многовершинника группового уравнения, алгоритм заполнения стандартной таблицы и другие особенности численного метода [61, 62, 64].

2.3.1. Рекуррентные соотношения

Через $P(G_d,N',h)$ обозначим выпуклую оболочку всех неотрицательных целочисленных решений $(t_1,t_2,\ldots,t_{n'})$ группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n'} g_j t_j = h, \tag{1}$$

где $N' = \{g_1,g_2,\ldots,g_{n'}\}$ — заданное множество, состоящее из n' различных ненулевых элементов конечной абелевой группы G_d, $g_j \in G_d$, $h \in G_d$ (напомним, что $n' = |N'|$, $1 \le n' \le \min\{n,|G_d|-1\}$). Множество $P(G_d,N',h)$ будем также называть многовершинником группового уравнения (1).

Постановка задачи. Требуется вычислить коэффициенты неравенства

$$\sum_{j=1}^{n'} \pi_j t_j \ge \pi_0, \tag{2}$$

которое задаёт $(n'-1)$-мерную грань n'-мерного (полномерного) многовершинника $P(G_d,N',h)$, проходящую через его вершину $(t_1',0,\ldots,0)$, $t_1' \ne 0$.

Сначала определим функции $\psi_s(g)$, $g \in G_d$, $s = 1,2,\ldots,n'$, а затем покажем, как вычисляются значения этих функций с помощью рекуррентных соотношений.

Пусть заданы действительные неотрицательные числа π_j, $j = 1,2,\ldots,n'$. Определяем функции

$$\psi_s(g) = \begin{cases} \min\{\sum_{j=1}^{s} \pi_j t_j \mid (t_1,t_2,\ldots,t_s) \in T_s\}, & \text{если } T_s \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } T_s = \varnothing, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$T_s = \left\{ (t_1,t_2,\ldots,t_s) \mid \sum_{j=1}^{s} g_j t_j = g,\ t_j \in \mathbf{Z}^1_+, j = 1,2,\ldots,s \right\}$$

($g \in G_d$; $s = 1,2,\ldots,n'$).

Другими словами, $\psi_s(g)$ — оптимальное значение линейной целевой функции, когда в представлении элемента g могут участвовать только s первых элементов из $g_1,g_2,\ldots,g_{n'}$.

В оптимальном решении $(t_1^*,t_2^*,\ldots,t_s^*)$ либо $t_s^* = 0$ (элемент g_s не используется), либо $t_s^* \geq 1$ (элемент g_s используется по крайней мере один раз). Поэтому имеет место рекуррентное соотношение

$$\psi_s(g) = \min\{\psi_{s-1}(g), \psi_s(g-g_s)+\pi_s\},\ g \in G_d,\ s = 1,2,\ldots,n'. \tag{4}$$

Чтобы проследить за значениями переменных t_j, принявших участие в вычислении значения функции $\psi_s(g)$, вводится функция $i_s(g)$, называемая индексной функцией. Эта функция указывает индекс последней переменной, ставшей равной 1, и определяется следующим образом:

$$i_s(g) = \begin{cases} i_{s-1}(g), & \text{если } \psi_{s-1}(g) < \psi_s(g-g_s)+\pi_s, \\ s, & \text{если иначе.} \end{cases} \tag{5}$$

Полагаем $\psi_0(g_0) = 0$, $\psi_0(g) = +\infty$, $i_0(g) = 0$ ($g \in G_d \setminus \{g_0\}$). Очевидно, что $\psi_s(g_0) = 0$ для всех $s = 1,2,\ldots,n'$.

Тогда рекуррентные соотношения (4) и (5) позволяют вычислить значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ для всех $g \in G_d$ и для всех $s = 1,2,\ldots,n'$, используя $\psi_s(g_0) = 0$, только тогда, когда каждый элемент g_s порождает всю группу G_d(см. 2.3.2 табл. 1, а также 2.5.2 табл. 1). В этом случае порядок d_s элемента g_s равен порядку d группы G_d ($d = |G_d|$), а значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ последовательно вычисляются для аргументов $g_s, 2g_s, \ldots, (d-1)g_s$.

Здесь и в дальнейшем для чисел и элементов группы используются одни и те же символы $+$ и $-$, что не должно вызывать затруднений. Напомним, что через g_0 обозначаем нулевой элемент конечной абелевой группы G_d порядка d (нуль группы).

Теперь рассмотрим случай, когда элемент g_s имеет порядок d_s, отличный от порядка d группы G_d. Из теории групп известно, что порядок элемента является делителем порядка группы. В этом случае $d_s g_s = g_0$ и все элементы группы G_d не могут быть получены как кратные элемента g_s. Будем рассматривать смежные классы группы G_d по подгруппе, порождённой элементом g_s [30, 36].

Пусть g' — элемент группы, не являющийся кратным элемента g_s. Тогда значение $\psi_s(g')$ является неизвестным. Предварительно полагаем

$$\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g'). \tag{6}$$

Затем для всех элементов смежного класса, определяемого элементом g', последовательно вычисляем значения $\psi'_s(g' + rg_s)$, рассматривая их как предварительные значения функции ψ_s:

$$\psi'_s(g' + rg_s) = \min\{\psi_{s-1}(g' + rg_s), \psi'_s(g' + rg_s - g_s) + \pi_s\}, \ r = 1, 2, \ldots, d_s. \tag{7}$$

После d_s шагов получаем $d_s g_s = g_0$ и значение $\psi'_s(g' + d_s g_s)$. Если $\psi'_s(g' + d_s g_s) \neq \psi_{s-1}(g')$, то полагаем

$$\psi''_s(g') = \psi'_s(g' + d_s g_s) \tag{8}$$

и последовательно вычисляем значения

$$\psi''_s(g' + rg_s) = \min\{\psi_{s-1}(g' + rg_s), \psi''_s(g' + rg_s - g_s) + \pi_s\}, \ r = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Как только вычисленное значение $\psi''_s(g' + rg_s)$ станет равным значению $\psi'_s(g' + rg_s)$, вычисления прекращаются.

Чтобы получить значения функции $\psi_s(g)$ для всех $g \in G_d$, процедура, описанная в двух последних абзацах, повторяется для $(\frac{d}{d_s} - 1)$ начальных элементов, задающих различные смежные классы.

Теорема. Вычисления остановятся через q шагов, $d_s \leq q \leq 2d_s$, и вычисленные значения функций ψ'_s и ψ''_s дадут истинные значения $\psi_s(g' + rg_s)$, $r = 1, 2, \ldots, d_s$.

Доказательство. Из равенства $\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g')$ следует $\psi'_s(g') \geq \psi_s(g')$ (минимум из двух величин всегда меньше или равен каждой из этих величин), а также

$$\psi'_s(g' + rg_s) \geq \psi_s(g' + rg_s), \quad r = 1, 2, \ldots, d_s \tag{10}$$

(следует расписать левую и правую части последнего неравенства). Возможны два случая.

Случай 1. Для некоторого значения r', $1 \leq r' \leq d_s$, имеет место равенство

$$\psi_s(g' + r'g_s) = \psi_{s-1}(g' + r'g_s).$$

Тогда
$$\psi'_s(g'+qg_s)=\psi_s(g'+qg_s),\ r'\le q\le d_s,$$
и
$$\psi''_s(g'+qg_s)=\psi_s(g'+qg_s),\ q=1,2,\dots,r'-1.$$

Для указанного значения r' имеем
$$\psi'_s(g'+r'g_s)\le\psi_{s-1}(g'+r'g_s)=\psi_s(g'+r'g_s),$$
а также
$$\psi'_s(g'+qg_s)\le\psi_s(g'+qg_s),\quad r'\le q\le d_s. \tag{11}$$
Сопоставляя (11) и (10), получаем, что для последующих q вычисленные значения $\psi'_s(g'+qg_s)$ совпадают со значениями $\psi_s(g'+qg_s)$.

Рассуждения для функции $\psi''_s(g'+qg_s)$ аналогичны $(q=1,2,\dots,r'-1)$.

Случай 2. Для всех $r=1,2,\dots,d_s$ выполняются неравенства
$$\psi_s(g'+rg_s)\ne\psi_{s-1}(g'+rg_s).$$
Тогда
$$\psi_s(g'+rg_s)=\psi_s(g'+rg_s-g_s)+\pi_s$$
также для всех r и
$$\psi_s(g')=\psi_s(g'+d_sg_s)=\psi_s(g'+(d_s-1)g_s)+\pi_s=\dots=\psi_s(g')+d_s\pi_s.$$
Полученное равенство $\psi_s(g')=\psi_s(g')+d_s\pi_s$ приводит к противоречию, если $\pi_s\ne0$.

Пусть $\pi_s=0$, а $g=g'+rg_s$ — произвольный элемент из смежного класса, определяемого элементом g'. Из определения функции $\psi_s(g)$ следует, что
$$\psi_s(g)=\psi_s(g'+rg_s)=\min_{t_s=0}^{d_s-1}\psi_{s-1}(g'+(r-t_s)g_s)=\psi_{s-1}(g'+r'g_s)$$
для некоторых r и r' $(1\le r\le d_s,\ 1\le r'\le d_s)$. Заметим, что когда t_s пробегает значения $0,1,\dots,d_s-1$, аргумент $g'+(r-t_s)g_s$ даёт все элементы рассматриваемого смежного класса. Поскольку r выбиралось произвольным, в частности, получаем $\psi_s(g'+r'g_s)=\psi_{s-1}(g'+r'g_s)$. Следовательно, и для $\pi_s=0$ имеет место случай 1. Доказательство завершено.

Покажем, как вычислить коэффициенты неравенства, задающего $(n'-1)$-мерную грань n'-мерного многовершинника $P(G_d,N',h)$. Будем искать это неравенство в виде
$$\sum_{j=1}^{n'}\pi_jt_j\ge1 \tag{12}$$

(в неравенстве (2) всегда $\pi_0 > 0$, поэтому нормируем его, деля на π_0).

Сначала не известны все коэффициенты π_j, $j = 1,2,\ldots,n'$. Предположим, что уже вычислены коэффициенты π_j и функции $\psi_j(g)$ для $j = 1,2,\ldots,s-1$, $s-1 < n'$. Тогда

$$\pi_s = \begin{cases} \max\limits_{r=1}^{d_s}(1-\psi_{s-1}(h-rg_s))/r, \text{ если } \psi_{s-1}(h-rg_s) < 1, \\ 0, \text{ если не существует значения } r_s, \\ \qquad \text{на котором достигается максимум,} \end{cases} \tag{13}$$

где d_s – порядок элемента g_s $(s = 1,2,\ldots,n')$. Теперь уже можно вычислить и значения функции $\psi_s(g)$, $g \in G_d$.

Приведённые вычисления дают именно такие коэффициенты линейного неравенства, что соответствующее ему уравнение задаёт грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения, проходящую через фиксированную точку. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим n' целочисленных точек, лежащих в гиперплоскости $\pi t = 1$, и докажем, что эти точки линейно не зависимы.

В качестве первой вершины следует взять целочисленную точку $(t_1',0,\ldots,0)$, $t_1' > 0$ (напомним, что эта точка задаётся). Если $\pi_s = 0$, то в качестве s-й вершины берём точку $v^{s-1} + d_s e_s$, где d_s — порядок элемента g_s, e_s — s-й единичный вектор $(s \geq 2)$. Если же $\pi_s \neq 0$, то в качестве s-й вершины берём точку, координаты которой определяются следующим образом: s-я координата равна положительному целому числу r_s, найденному при вычислении π_s в (13); координаты с номерами $s-1,\ldots,2,1$ находятся с помощью индексной функции $i_s(g)$ из (5) (см. примеры 1, 2, 3 в 2.3.2); остальные координаты равны нулю.

Записав координаты точек в строку и расположив строки в порядке их построения, получим целочисленную нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой находятся положительные целые числа. Определитель такой матрицы, очевидно, не равен нулю, что и доказывает линейную независимость точек.

2.3.2. Алгоритм заполнения стандартной таблицы

Сначала укажем общий вид стандартной таблицы, а затем приведём три числовых примера. Все величины, участвующие в стандартной таблице, вычисляются в 2.3.1. Однако для удобства укажем расчётные формулы. В позициях стандартной таблицы, в которых стоит знак вопроса, следует поставить значения вычисленных величин.

В дальнейшем через n обозначаем число слагаемых в левой части группового уравнения ($n = n'$, n' было определено раньше). Обозначения

g_{i_j} и g_{i_s} отражают представление элемента конечной группы его номером, то есть неотрицательным целым числом (см. 2.7.2). Эти обозначения используются, например, в стандартной таблице (см. ниже).

Расчётные формулы

Порядок d_s элемента g_{i_s} находим, рассматривая кратные kg_{i_s} до получения нуля g_0 группы G_d, где d — порядок группы G_d ($k = 1, 2, \ldots, d_s$; $d_s \le d$; $s = 1, 2, \ldots, n$).

Коэффициенты π_s нормированного линейного неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \ge 1,$$

задающего $(n-1)$-мерную грань n-мерного многовершинника группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h,$$

вычисляются как

$$\pi_s = \begin{cases} \max\limits_{r=1}^{d_s} (1 - \psi_{s-1}(h - rg_{i_s}))/r, \text{ если } \psi_{s-1}(h - rg_{i_s}) < 1, \\ 0, \text{ если не существует значения } r_s, \\ \quad \text{на котором достигается максимум,} \end{cases} \tag{13$'$}$$

где d_s — порядок элемента g_{i_s} ($d_s \le d$; $s = 1, 2, \ldots, n$).

Значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ вычисляются по формулам

$$\psi_s(g) = \min\{\psi_{s-1}(g), \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s\} \tag{4$'$}$$

и

$$i_s(g) = \begin{cases} i_{s-1}(g), & \text{если } \psi_{s-1}(g) < \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s, \\ s, & \text{если иначе} \end{cases} \tag{5$'$}$$

$(g = 1g_{i_s}, 2g_{i_s}, \ldots, d_s g_{i_s};\ d_s \le d;\ s = 1, 2, \ldots, n)$.

Значения функций $\psi'_s(g)$, $i'_s(g)$ и $\psi''_s(g)$, $i''_s(g)$ вычисляются так.

Полагаем

$$\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g'), \quad i'_s(g') = i_{s-1}(g') \tag{6$'$}$$

(g' не является кратным элемента g_{i_s}; $d_s < d$). Вычисляем

$$\psi'_s(g' + rg_{i_s}) = \min\{\psi_{s-1}(g' + rg_{i_s}), \psi'_s(g' + rg_{i_s} - g_{i_s}) + \pi_s\}$$

и (7$'$)

$$i'_s(g'+rg_{i_s}) = \begin{cases} i_{s-1}(g'+rg_{i_s}), & \text{если } \psi_{s-1}(g'+rg_{i_s}) < \psi'_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s, \\ s, & \text{если иначе} \end{cases}$$

$(r = 1,2,\dots,d_s;\ d_s < d;\ s = 1,2,\dots,n)$.

Если $\psi'_s(g'+d_s g_{i_s}) \neq \psi_{s-1}(g')$, то полагаем

$$\psi''_s(g') = \psi'_s(g'+d_s g_{i_s}), \quad i''_s(g') = i'_s(g'+d_s g_{i_s}). \tag{8'}$$

Вычисляем

$$\psi''_s(g'+rg_{i_s}) = min\{\psi_{s-1}(g'+rg_{i_s}), \psi''_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s\}$$

и (9′)

$$i''_s(g'+rg_{i_s}) = \begin{cases} i_{s-1}(g'+rg_{i_s}), & \text{если } \psi_{s-1}(g'+rg_{i_s}) < \psi''_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s, \\ s, & \text{если иначе} \end{cases}$$

$(r = 1,2,\dots;\ d_s < d;\ s = 1,2,\dots,n)$.

Вычислительные особенности алгоритма заполнения стандартной таблицы

1) Память. Для вычисления пары столбцов $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$, которые находятся между первой и второй горизонтальными линиями, в памяти можно хранить не всю таблицу, а только предыдущую пару столбцов. Это даёт большу́ю экономию памяти.
2) Операции. Этот алгоритм позволяет легко подсчитать число необходимых операций для его выполнения.
3) Параллельные вычисления. Для $d_s < d$ в алгоритме заполнения стандартной таблицы можно естественно распараллелить вычисления.

Стандартная таблица
Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h, \quad t \in \mathbf{Z}^n_+,\ g_{i_j} \in G_d,\ h \in G_d$$

g_{i_s}			g_{i_1}		g_{i_2}		$\ldots$	g_{i_n}	
d_s			?		?		$\ldots$	?	
r_s			?		?		$\ldots$	?	
π_s			?		?		$\ldots$	?	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	$\ldots$	ψ_n	i_n
g_0	0		0		0		$\ldots$	0	
g_1	$+\infty$	0	?	?	?	?	$\ldots$	?	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_{d-1}	$+\infty$	0	?	?	?	?	$\ldots$	?	?
π_s			?		?		$\ldots$	?	
v_1			?		0		$\ldots$	0	
v_2			?		?		$\ldots$	0	
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
v_n			?		?		$\ldots$	?	

Алгоритм заполнения стандартной таблицы заполняет её сверху вниз и слева направо.

Пример 1.

Таблица 1

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_1t_1+g_2t_2+g_3t_3+g_4t_4=g_4, \quad t\in \mathbf{Z}^4_+,\, g_{i_j}\in G_5,\, g_4\in G_5$$

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3		g_4	
d_s			5		5		5		5	
r_s			4		1		1		1	
π_s			1/4		2/4		3/4		4/4	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3	ψ_4	i_4
g_0	0		0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/4	1	1/4	1	1/4	1	1/4	1
g_2	$+\infty$	0	2/4	1	2/4	2	2/4	2	2/4	2
g_3	$+\infty$	0	3/4	1	3/4	2	3/4	3	3/4	3
g_4	$+\infty$	0	4/4	1	4/4	2	4/4	3	4/4	4
π_s			1/4		2/4		3/4		4/4	
v_1			4		0		0		0	
v_2			0		2		0		0	
v_3			1		0		1		0	
v_4			0		0		0		1	

При заполнении стандартной таблицы удобно воспользоваться табличкой кратных элементов g_1, g_2, g_3, g_4.

$$\begin{array}{llll}
1g_1=g_1 & 1g_2=g_2 & 1g_3=g_3 & 1g_4=g_4\\
2g_1=g_2 & 2g_2=g_4 & 2g_3=g_1 & 2g_4=g_3\\
3g_1=g_3 & 3g_2=g_1 & 3g_3=g_4 & 3g_4=g_2\\
4g_1=g_4 & 4g_2=g_3 & 4g_3=g_2 & 4g_4=g_1\\
5g_1=g_0 & 5g_2=g_0 & 5g_3=g_0 & 5g_4=g_0
\end{array}$$

Нетрудно убедиться в том, что значения 1 и 2 величины r_2 дают одну и ту же вершину v_2.

Пример 2. Покажем, как найти неравенство, задающее грань многовершинника $P(G_6, N', h)$, проходящую через его вершину $(3,0,0,0,0)$, где G_6 — циклическая группа порядка 6, $N' = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ и $h = g_3$ [99, 61, 77].

Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$g_1t_1+g_2t_2+g_3t_3+g_4t_4+g_5t_5=g_3, \quad t\in \mathbf{Z}^5_+, g_{i_j}\in G_6, g_3\in G_6$

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3		g_4		g_5	
d_s			6		3		2		3		6	
r_s			3		1		1		2		1	
π_s			1/3		2/3		3/3		1/3		2/3	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3	ψ_4	i_4	ψ_5	i_5
g_0	0		0		0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1	1/3	1	1/3	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	2/3	2	2/3	4	2/3	4
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	3/3	3	3/3	4	3/3	5
g_4	$+\infty$	0	4/3	1	4/3	2	4/3	3	1/3	4	1/3	4
g_5	$+\infty$	0	5/3	1	5/3	2	5/3	3	2/3	4	2/3	5
π_s			1/3		2/3		3/3		1/3		2/3	
v_1			3		0		0		0		0	
v_2			1		1		0		0		0	
v_3			0		0		1		0		0	
v_4			1		0		0		2		0	
v_5			0		0		0		1		1	

В табл. 2 результаты вычисления функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$, $s=2,3,4$, записаны в один столбец. Индексные функции $i_s(g)$ дают возможность найти точки, лежащие на гиперплоскости $\pi t=1$.

Используя (13′), вычисляем π_s и r_s:

$$\pi_1=\max_{r=1}^{6}\{(1-\psi_0(g_3-rg_1))/r \mid \psi_0(g_3-rg_1)<1\}=$$
$$(1-\psi_0(g_3-3g_1))/3=1/3, r_1=3;$$

$$\pi_2=\max_{r=1}^{3}\{(1-\psi_1(g_3-rg_2))/r \mid \psi_1(g_3-rg_2)<1\}=$$
$$(1-\psi_1(g_3-1g_2))/1=2/3, r_2=1;$$

$$\pi_3=\max_{r=1}^{2}\{(1-\psi_2(g_3-rg_3))/r \mid \psi_2(g_3-rg_3)<1\}=$$
$$(1-\psi_2(g_3-1g_3))/1=3/3, r_3=1;$$

$$\pi_4=\max_{r=1}^{3}\{(1-\psi_3(g_3-rg_4))/r \mid \psi_3(g_3-rg_4)<1\}=$$
$$(1-\psi_3(g_3-2g_4))/2=1/3, r_4=3;$$

$$\pi_5 = \max_{r=1}^{6}\{(1-\psi_4(g_3-rg_5))/r \mid \psi_4(g_3-rg_5)<1\} =$$
$$(1-\psi_4(g_3-1g_5))/1 = 2/3, r_5 = 1.$$

Заметим, что коэффициент $\pi_1 = 1/3$ может быть вычислен без использования табл. 2, то есть из условия $\pi_1 \cdot 3 = 1$. Именно этот случай имеет место в прямом методе.

Таким образом, неравенство

$$\frac{1}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{3}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_4 + \frac{2}{3}t_5 \geq 1$$

задаёт грань многовершинника $P(G_6, N', h)$, проходящую через точку $(3,0,0,0,0)$.

Функции ψ_1 и i_1, ψ_5 и i_5 вычисляются по формулам (4′) и (5′).

В табл. 2′ показано, как вычислить функции ψ_2 и i_2, ψ_3 и i_3, ψ_4 и i_4.

Таблица 2′

g	ψ'_2	i'_2	ψ'_2	i'_2	ψ'_3	i'_3	ψ'_3	i'_3	ψ'_3	i'_3	ψ'_4	i'_4	ψ'_4	i'_4
g_0	0				0						0			
g_1			1/3	1			1/3	1					1/3	1
g_2	2/3	2							2/3	2	2/3	4		
g_3			3/3	2	3/3	3							3/3	4
g_4	4/3	2					4/3	3			1/3	4		
g_5			5/3	2					5/3	3			2/3	4

Известно, что в качестве начального элемента может быть взят любой элемент смежного класса. Из табл. 2′ видно (рассмотрим, например, смежный класс $\{g_1, g_3, g_5\}$), что переход к другому начальному элементу не меняет значений функции для элементов этого класса, но меняет порядок вычисления значений.

Вычисление вершин. Вычисление вершины также называют обратным ходом. Вершина является оптимальным решением групповой задачи минимизации со специально построенной линейной целевой функцией.

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0,0,0,0)$, заменяем 0 в позиции 1 на $r_1 = 3$, получаем вершину $v_1 = (3,0,0,0,0)$ (заданную).

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0,0,0,0)$, заменяем 0 в позиции 2 на $r_2 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_2 1 = g_1$, в табл. 2 находим индекс $i_2(g_1) = 1$, увеличиваем 0 в позиции 1 в векторе $(0,1,0,0,0)$ на 1, получаем $h_2 = h - g_2 1 - g_1 1 = g_0$ и вершину $v_2 = (1,1,0,0,0)$ (на этом заканчиваем вычисление вершины).

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0,0,0,0)$, заменяем 0 в позиции 3 на $r_3 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_3 1 = g_0$, получаем вершину $v_3 = (0,0,1,0,0)$ (на этом заканчиваем вычисление вершины).

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0,0,0,0)$, заменяем 0 в позиции 4 на $r_4 = 2$. Вычисляем $h_1 = h - g_4 2 = g_1$, в табл. 2 находим индекс $i_4(g_1) = 1$, увеличиваем 0 в позиции 1 в векторе $(0,0,0,2,0)$ на 1, получаем $h_2 = h - g_4 2 - g_1 1 = g_0$ и вершину $v_4 = (1,0,0,2,0)$ (на этом заканчиваем вычисление вершины).

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0,0,0,0)$, заменяем 0 в позиции 5 на $r_5 = 1$. Вычисляем $h_1 = h - g_5 1 = g_4$, в табл. 2 находим индекс $i_5(g_4) = 4$, увеличиваем 0 в позиции 4 в векторе $(0,0,0,0,1)$ на 1, получаем $h_2 = h - g_5 1 - g_4 1 = g_0$ и вершину $v_5 = (0,0,0,1,1)$ (на этом заканчиваем вычисление вершины).

Проверка: $g_1 3 = g_3$, $g_1 1 + g_2 1 = g_3$, $g_3 1 = g_3$, $g_1 1 + g_4 2 = g_3$, $g_4 1 + g_5 1 = g_3$;
$\frac{1}{3}3 = 1$, $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$, $\frac{3}{3}1 = 1$, $\frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}2 = 1$, $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$.

Таким образом, показано, как из табл. 2 получить 5 точек, определяющих гиперплоскость $\pi t = 1$. Эти точки являются вершинами многовершинника $P(G_6, N', h)$. Они уже приведены в табл. 2 под второй горизонтальной чертой. При этом их координаты записаны в строку.

Пример 3.

Таблица 3

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_3 t_3 = g_3, \quad t \in \mathbf{Z}^3_+, g_{i_j} \in G_4, g_3 \in G_4$$

g_{i_s}			g_1		g_2		g_3	
d_s			4		2		4	
r_s			3		1		1	
π_s			1/3		2/3		1	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	1/3	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	2/3	2
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	3/3	3
π_s			1/3		2/3		1	
v_1			3		0		0	
v_2			1		1		0	
v_3			0		0		1	

Таблица 3′

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_3t_3+g_2t_2+g_1t_1=g_3, \quad t\in \mathbf{Z}^3_+,\, g_{i_j}\in G_4,\, g_3\in G_4$$

g_{i_s}			g_3		g_2		g_1	
d_s			4		2		4	
r_s			1				1	
π_s			1		0		1	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	3	1	1	2	1	3
g_2	$+\infty$	0	2	1	0	2	0	2
g_3	$+\infty$	0	1	1	1	2	1	3
π_s			1		0		1	
v'_1			1		0		0	
v'_2			1		2		0	
v'_3			0		1		1	

Использовав данные из табл. 3 и 3′, изобразим на рисунке многовершинник P группового уравнения (очевидно, уравнения из табл. 3 и 3′ являются эквивалентными). Многовершинник P имеет 3 вершины и 5 граней: две построенные плоскости и три координатные плоскости.

Все целочисленные точки v_1, v_2, v_3 из таблицы 3, определяющие соответствующую плоскость, являются вершинами многовершинника P, а точка v'_2 из табл. 3′ не является вершиной.

Через v_1, v_2, v_3 обозначим вершины многовершинника P, а через f_1, f_2, f_3 $(t_1=0)$, f_4 $(t_2=0)$, f_5 $(t_3=0)$ — его грани. Тогда получим вершинно-граневую матрицу инциденции

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
v_1	1	0	0	1	1
v_2	1	1	0	0	1
v_3	1	1	1	1	0

2.4. Общее описание прямого метода

Выделены основные составные части прямого метода для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации. Показано, как построить начальное базисное допустимое целочисленное решение [59, 61, 75, 76].

2.4.1. Составные части метода

Итерация прямого метода для численного решения целочисленной линейной задачи оптимизации состоит в переходе от одной крайней точки выпуклой оболочки всех допустимых решений этой задачи к другой. Представим основные шаги этого метода [59, 61].

Пусть задана текущая крайняя точка выпуклой оболочки всех допустимых решений целочисленной линейной задачи оптимизации, то есть базисное допустимое целочисленное решение.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Если для всех крайних направлений, выходящих из текущей крайней точки, выполняется условие оптимальности, то эта крайняя точка является оптимальной и метод заканчивает свою работу.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Чтобы сдвинуться в новую точку, нужно знать направление сдвига и величину сдвига.

a) Среди направлений, не удовлетворяющих условию оптимальности, существует направление, приводящее в новую целочисленную крайнюю точку соответствующей линейной задачи оптимизации. Тогда следует сдвинуться в эту точку и перейти на шаг 1.

b) Среди направлений, не удовлетворяющих условию оптимальности, нет направлений, удовлетворяющих условию a), но существует такое направление, что на крайнем луче, задаваемом этим направлением и выходящем из текущей целочисленной крайней точки, существует по крайней мере одно допустимое решение целочисленной задачи, отличное от текущей точки. Тогда либо целевая функция не ограничена и метод заканчивает свою работу, либо существует нецелочисленная крайняя точка соответствующей линейной задачи оптимизации, и переходим на шаг 3.

c) Среди направлений, не удовлетворяющих условию оптимальности, нет направлений, удовлетворяющих условию b), но существует такое направление, что на луче, задаваемом этим направлением сдвига, находятся только одна допустимая целочисленная точка, из которой он выходит, и нецелочисленная крайняя точка соответствующей линейной задачи оптимизации. Рассматриваемое направление не может привести в лучшую допустимую целочисленную точку и должно быть исключено. Для этого переходим на шаг 3.

d) Среди направлений, не удовлетворяющих условию оптимальности, нет направлений, допускающих положительный сдвиг. Тогда меняем систему крайних направлений и переходим на шаг 1.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

В нецелочисленной крайней точке строим групповое уравнение. Коэффициентами этого уравнения являются элементы конечной абелевой группы. Нахождение коэффициентов группового уравнения осуществляется путём приведения невырожденной целочисленной матрицы к нормальному виду [57, 60].

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Сначала находятся коэффициенты линейного неравенства, задающего $(n-1)$-мерную грань n-мерной выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения. Тот факт, что рассматривается конечная группа, позволяет всегда осуществить вычисления для нахождения коэффициентов нужного линейного неравенства. Эти вычисления дают также множество вершин рассматриваемой выпуклой оболочки, определяющих ее грань. В основе вычислений лежат рекуррентные соотношения (см. 2.3).

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

Затем выражаем полученное на шаге 4 неравенство через переменные x исходной задачи. Неравенство, записанное в переменных x, либо определяет лучшее базисное допустимое целочисленное решение, либо отсекает направление сдвига.

Перейти на шаг 1.

Таким образом, прямой метод состоит в построении конечной последовательности вершин выпуклой оболочки всех допустимых решений исходной целочисленной задачи оптимизации. Эта последовательность заканчивается либо оптимальным решением, либо нахождением подмножества допустимых решений целочисленной задачи, на котором целевая функция не ограничена. Прямой метод также позволяет установить несовместность исходной задачи оптимизации.

2.4.2. Начальное базисное допустимое целочисленное решение

Вспомогательная задача для системы неравенств

Рассмотрим целочисленную линейную задачу

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}.$$

Здесь $m \times n$-матрица A, m-столбец b и n-строка c являются целочисленными и постоянными для конкретной задачи.

Если вектор b в формулировке задачи таков, что все его компоненты b_i являются неположительными, то в качестве начального базисного допустимого целочисленного решения следует взять точку $(0,0,\ldots,0)$. Точка $(0,0,\ldots,0)$ является крайней точкой выпуклой оболочки P всех допустимых решений рассматриваемой задачи оптимизации и вершиной конуса C, задаваемого системой неравенств $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$.

Если же вектор b имеет k неположительных компонент и $m-k$ положительных, то в системе $Ax \geq b$ переставляем неравенства таким образом, чтобы все положительные компоненты вектора b оказались в нижней части столбца ($k < m$). После перестановки неравенств получаем новую матрицу и новый столбец, для которых сохраним старые обозначения a и b. Например, вектор b имеет вид $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, где $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \leq 0$, $(b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m) > 0$.

Для нахождения начального базисного допустимого целочисленного решения в этом случае необходимо ввести $m-k$ искусственных неотрицательных целочисленных переменных и решить вспомогательную целочисленную задачу

$$\min\{\sum_{j=n+1}^{n+m-k} x_j \mid A'x \geq b,\ x \geq 0, x \in \mathbf{Z}^{n+m-k}\},$$

где

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \ldots & a_{k+2,n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта задача решается с помощью прямого метода. Начальным базисным допустимым целочисленным решением вспомогательной задачи является точка $(0, 0, \ldots, 0, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m)$. Конус C с вершиной в этой точке будет задаваться неравенствами $Dx \geq f$, где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \ldots & a_{k+2,n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$f = (0, 0, \ldots, 0, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_m)$ (по умолчанию вектор f является столбцом, записанным в строку).

Если оптимальным решением вспомогательной задачи является вектор вида $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, 0, \ldots, 0)$, то начальное базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи получается из оптимального путём исключения искусственных переменных. При этом все неравенства, полученные в ходе решения вспомогательной задачи, добавляются к системе ограничений $Ax \geq b$.

Если же это оптимальное решение не является вектором вида $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, 0, \ldots, 0)$, то есть оптимальное значение вспомогательной задачи является положительным целым числом, то условия исходной задачи несовместны.

Расширенная система линейных неравенств, полученная после решения вспомогательной задачи, может оказаться избыточной. Для того чтобы избежать этого, необходимо проверить с помощью теоремы Минковского — Фаркаша неравенства на избыточность.

Теорема Минковского — Фаркаша. Линейное неравенство $px \geq q$ является следствием совместной системы линейных неравенств $Ax \geq b$, если и только если существует вектор $u \in \mathbf{R}^m$ такой, что

$$uA = p, \ ub \geq q, \ u \geq 0$$

(см. также задачу 1.1.8).

Совместность или несовместность последней системы можно определить с помощью стандартных программных пакетов [100, 23].

Вспомогательная задача для системы уравнений

Рассмотрим целочисленную линейную задачу

$$\max\{cx \mid Ax = b, \ x \geq 0, \ x \in \mathbf{Z}^n\},$$

где $m \times n$-матрица A, m-столбец b и n-строка c являются целочисленными.

Сначала прямым методом решаем вспомогательную целочисленную задачу

$$\min\left\{ \sum_{j=n+1}^{n+m} x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a'_{i,j} x_j + x_{n+i} = b'_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ x_j \in \mathbf{Z}^1_+, \ j = 1, 2, \ldots, n+m, \right\}$$

где

$$b'_i = -b_i \text{ и } a'_{i,j} = -a_{i,j}, \text{ если } b_i < 0;$$

$$b'_i = b_i \text{ и } a'_{i,j} = a_{i,j}, \text{ если } b_i \geq 0.$$

Во вспомогательной задаче присутствуют искусственные неотрицательные целочисленные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, которым соответствует искусственный базис, состоящий из единичных столбцов. Очевидно, точка $x = 0,\ x_{n+1} = b'_1,\ x_{n+2} = b'_2, \ldots, x_{n+m} = b'_m$ является базисным допустимым целочисленным решением вспомогательной задачи.

Если оптимальное значение целевой функции вспомогательной задачи равно нулю и удалось вывести все искусственные переменные в множество небазисных переменных, то начальное базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи получается из оптимального путём исключения искусственных переменных. Если же это оптимальное значение не равно нулю, то условия исходной целочисленной задачи несовместны.

Этот приём аналогичен приёму, который используется при решении линейной задачи оптимизации, и называется методом искусственного базиса [77, 99].

При решении практических целочисленных линейных задач оптимизации в качестве начального базисного допустимого целочисленного решения может быть взято решение, полученное каким-нибудь быстрым приближённым алгоритмом, или решение, вытекающее из конкретных условий задачи.

2.5. Прямой метод для системы неравенств

Представлена вычислительная схема прямого метода для системы неравенств. Работа этой схемы иллюстрируется числовым примером. Формулируется и решается по этой же схеме вспомогательная задача, оптимальное решение которой либо даёт базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи, либо указывает на несовместность исходной задачи [94, 99, 59, 61, 67, 77].

2.5.1. Вычислительная схема для системы неравенств

Рассмотрим целочисленную линейную задачу

$$\min\{cx \mid Ax \geq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\},$$

где $m \times n$-матрица A, m-столбец b и n-строка c являются целочисленными, $\mathbf{Z}^n$ — множество всех целочисленных n-столбцов, а x — n-столбец неотрицательных целочисленных переменных.

Через P обозначим выпуклую оболочку всех допустимых решений этой задачи, также называемую многогранником P. На каждой итерации прямого метода рассматриваем систему неравенств

$$Dx \geq f,\ rangD = n,$$

задающую конус C с вершиной в целочисленной точке x', одновременно являющейся вершиной многовершинника P. В систему $Dx \geq f$ входят некоторые из неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$, а также в общем случае — неравенства, построенные на предыдущих итерациях метода. Матрица D и столбец f являются целочисленными.

Приведём основные шаги прямого метода для системы неравенств [59, 61].

Начинаем с базисного допустимого целочисленного решения. Оно представляет собой крайнюю точку выпуклого множества, задаваемого системой неравенств. Сформулируем признак крайней точки.

Допустимое решение x' системы неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$ является крайней точкой выпуклого множества $\{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$, если и только если ранг матрицы подсистемы неравенств, которые для x' выполняются как равенства, равен n.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Условие оптимальности для рассматриваемой целочисленной линейной задачи минимизации формулируется следующим образом.

Текущее решение x' является оптимальным, если для каждого крайнего направления u_k конуса $C = \{x \mid Dx \geq f\}$, выходящего из крайней точки x', выполняется неравенство $cu_k \geq 0$.

Если число гиперплоскостей, проходящих через точку x', равно n, то крайние направления конуса задаются столбцами обратной матрицы D^{-1}.

Заметим, что матрица D_i, задающая конус $C_i = \{x \mid D_i x \geq f_i\}$, отличается только одной строкой от матрицы D_{i-1}, задающей конус C_{i-1}, построенный на предыдущей итерации прямого метода ($i = 2, 3, \ldots$). Поэтому нужны формулы, подправляющие обратную матрицу.

Пусть невырожденные матрицы $D = (d_{i,j})$ и $D' = (d'_{i,j})$ отличаются строкой k ($d_i = d'_i, i \neq k$). Тогда столбцы обратной матрицы $(D')^{-1} = (q'_{i,j})$ выражаются через столбцы обратной матрицы $D^{-1} = (q_{i,j})$ по формулам

$$q'_k = (1/z_k)q_k, q'_j = q_j - z_j q'_k, j \neq k,$$

где

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = d'_k D^{-1}, z_k \neq 0,$$

а $detD' = z_k detD$.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Чтобы сдвинуться в новую точку, нужно знать направление сдвига и величину сдвига.

Среди крайних направлений $u_1, u_2, \ldots, u_s$ текущего конуса C существует направление u_k, которое в текущей системе неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$ удовлетворяет условиям:

a) $cu_k < 0$;

b) $a_i u_k \geq 0$ для $a_i x' = b_i$, $e_j u_k \geq 0$ для $x'_j = 0$, где e_j — j-я единичная строка ($i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, n$). Направление u_k допускает положительный сдвиг вдоль луча $x(\theta) = x' + \theta u_k$, $\theta \geq 0$.

Если этот положительный сдвиг не ограничен сверху, то значения целевой функции не ограничены снизу и вычислительная схема заканчивает свою работу.

Иначе определяем величину сдвига θ_0, подставляя $x(\theta)$ в текущую систему неравенств $Ax \geq b$, $x \geq 0$. Приведём расчётные формулы:

$\theta_0 = \min\{\theta_1, \theta_2\}$, где

$$\theta_1 = \min_{a_i u_k < 0} (a_i x' - b_i) / - a_i u_k, \qquad \theta_2 = \min_{x'_j > 0,\ e_j u_k < 0} x'_j / - e_j u_k.$$

Пусть θ' — наибольшее значение переменной θ из замкнутого интервала $[0, \theta_0]$, для которого $x(\theta')$ — целочисленная точка. Возможны три случая.

1. Если $\theta' = \theta_0$, то следует сдвинуться в новую целочисленную точку и перейти на шаг 1.

2. Если $0 < \theta' < \theta_0$, то нужно выполнить шаги 3 и 4, чтобы построить линейное неравенство, задающее новую целочисленную точку, и перейти на шаг 5.

3. Если $\theta' = 0$, то выполняем шаги 3 и 4, чтобы построить линейное неравенство, отсекающее направление u_k, и переходим на шаг 5.

Если среди направлений, не удовлетворяющих условию оптимальности, нет направлений, допускающих положительный сдвиг, то следует изменить систему крайних направлений и перейти на шаг 1.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

В нецелочисленной крайней точке строим групповое уравнение. Для этого вводим n-столбец s неотрицательных целочисленных переменных, преобразующих систему неравенств $Dx \geq f$ в систему уравнений $Dx - s = f$. Эту систему можно переписать в виде $Ax = b$, где

$$A = (B, N), B = D, N = -I_n, b = f.$$

Матрицу B приводим к нормальному виду, то есть строим такие унимодулярные целочисленные матрицы U и V, что $UBV = S$, где S — нормальная матрица. При этом матрица N преобразуется в UN, столбец b — в Ub. При естественном гомоморфизме группы $G(A)$ на фактор-группу

$G = G(A)/G(B)$ образом небазисного столбца служит смежный класс g, который можно определить, прибавив к соответствующему столбцу матрицы UN кратные столбцы матрицы S.

С полученными коэффициентами g_j и переменными s_j записываем групповое уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} g_j s_j = h.$$

Затем делаем замену переменных, и групповое уравнение принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n'} g_j t_j = h, \quad n' \le \min\{n, |G|-1\}.$$

Элемент h является образом столбца b при заданном гомоморфизме.

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Пользуясь ранее описанным алгоритмом, вычисляем коэффициенты неравенства, задающего грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения (см. 2.3).

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

Полученное на шаге 4 неравенство, записанное в переменных x исходной задачи, либо определяет лучшее базисное допустимое целочисленное решение, либо отсекает направление сдвига.

Переходим на шаг 1.

2.5.2. Числовой пример

Покажем, как с помощью данной вычислительной схемы решить следующую конкретную целочисленную линейную задачу оптимизации [61].

Минимизировать линейную функцию $-1x_1 - 5x_2$ при условиях

$$-3x_1 - 8x_2 \ge -12,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 \in \mathbf{Z}^1,\ x_2 \in \mathbf{Z}^1.$$

Будем действовать по алгоритму.

Начинаем с базисного допустимого целочисленного решения $(0,0)$ и конуса C_1 с вершиной в точке $M_1(0,0)$, задаваемого неравенствами $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Последнюю систему неравенств можно записать как $Dx \ge f$, где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Крайние направления конуса C_1 задаются столбцами матрицы D^{-1}, то есть $u_1 = (1,0)$ и $u_2 = (0,1)$.

Итерация 1.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Для задачи минимизации условие оптимальности текущего решения x' формулируется следующим образом.

Для каждого крайнего направления u_k конуса C с вершиной в целочисленной точке x' выполняется неравенство

$$cu_k \geq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Имеем

$$cu_1 = (-1, -5)(1, 0) = -1 < 0,$$
$$cu_2 = (-1, -5)(0, 1) = -5 < 0.$$

Условие оптимальности не выполняется.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Среди двух улучшающих направлений выбираем u_2 = (0, 1). Определим величину сдвига θ_0, подставив

$$x(\theta) = (0, 0) + \theta(0, 1) = (0, \theta)$$

в неравенство

$$-3x_1 - 8x_2 \geq -12$$

(условия неотрицательности для $x(\theta)$ выполняются). Тогда получим

$$-3 \cdot 0 - 8 \cdot \theta \geq -12, \ \theta \leq 3/2, \ \theta_0 = 3/2.$$

Сдвиг вдоль направления u_2 приводит в крайнюю нецелочисленную точку $(0, 3/2)$, $\theta_0 = 3/2$. Наибольшее значение θ из замкнутого интервала $[0, 3/2]$, для которого $x(\theta)$ — целочисленная точка, равно $\theta' = 1$, то есть на луче $x(\theta)$ существует допустимое решение целочисленной задачи, отличное от текущего решения $(0, 0)$, а именно точка $M_2(0, 1)$.

Нужно вычислить коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника P целочисленной задачи, проходящую через точку $M_2(0, 1)$.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

Рассмотрим конус с вершиной в точке $(0, 3/2)$, который задаётся неравенствами

$$x_1 \geq 0, \ -3x_1 - 8x_2 \geq -12.$$

Введём слабые неотрицательные целочисленные переменные s_1, s_2, преобразующие эту систему неравенств в систему уравнений $Ax = b$, $A = (B, N)$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Для приведения целочисленной матрицы B к нормальному виду последовательно выполняем операции: умножение столбца 2 на -1, к строке 2 прибавляем строку 1, умноженную на 3. Этим операциям соответствует последовательность из двух элементарных матриц $V_2(-1), U_{2,1}(3)$. Тогда матрица $(B|N|b)$ переходит в матрицу

$$(S|UN|Ub) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & -1 & -12 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы получаем групповое уравнение

$$g_5 s_1 + g_7 s_2 = g_4.$$

Фактор-группа G_8 изоморфна циклической группе порядка 8, элементы которой —

$$g_0 = 0,\ g_1 = 1,\ g_2 = 2,\ \ldots,\ g_7 = 7,$$

а групповая операция — сложение по модулю 8 чисел $0, 1, 2, \ldots, 7$. Элементы g_{i_j} группы G_8, в которые переходят небазисные столбцы и столбец свободных членов, определяются из равенств

$$-3 = 8 \cdot (-1) + 5, \quad -1 = 8 \cdot (-1) + 7 \quad (-12 = 8 \cdot (-2) + 4).$$

Заменяем переменные s_1, s_2 новыми переменными $t_1 = s_2,\ t_2 = s_1$. В переменных x_1, x_2 исходной задачи имеем

$$t_1 = 12 - 3x_1 - 8x_2, \quad t_2 = x_1.$$

Групповое уравнение принимает вид

$$g_7 t_1 + g_5 t_2 = g_4.$$

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Вычисляем коэффициенты неравенства

$$\pi_1 t_1 + \pi_2 t_2 \geq 1,$$

которое задаёт грань многовершинника последнего группового уравнения, проходящую через вершину

$$(t_1', t_2') = (4, 0),$$

соответствующую целочисленной точке $(x_1, x_2) = (0, 1)$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1 (см. заполнение стандартной таблицы в 2.3.2).

Таблица 1

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_7t_1+g_5t_2=g_4, \quad t\in \mathbf{Z}^2_+,\ g_{i_j}\in G_8,\ g_4\in G_8$$

g_{i_s}			g_7		g_5	
d_s			8		8	
r_s			4		1	
π_s			1/4		3/4	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2
g_0	0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	7/4	1	7/4	2
g_2	$+\infty$	0	6/4	1	6/4	2
g_3	$+\infty$	0	5/4	1	5/4	2
g_4	$+\infty$	0	4/4	1	4/4	2
g_5	$+\infty$	0	3/4	1	3/4	2
g_6	$+\infty$	0	2/4	1	2/4	1
g_7	$+\infty$	0	1/4	1	1/4	1
π_s			1/4		3/4	
v_1			4		0	
v_2			1		1	

Вычисление вершин. Рассматриваем нулевой вектор $(0,0)$, заменяем 0 в позиции 1 на $r_1=4$, получаем вершину $v_1=(4,0)$ (заданную).

Рассматриваем нулевой вектор $(0,0)$, заменяем 0 в позиции 2 на $r_2=1$. Вычисляем $h_1=h-g_5 1=g_7$, в таблице 1 находим индекс $i_2(g_7)=1$, увеличиваем 0 в векторе $(0,1)$ на 1, получаем $h_2=h-g_5 1-g_7 1=g_0$ и вершину $v_2=(1,1)$ (на этом заканчиваем).

Проверка: $g_7 4+g_5 0=g_4$, $g_7 1+g_5 1=g_4$; $\frac{1}{4}4+\frac{3}{4}0=1$, $\frac{1}{4}1+\frac{3}{4}1=1$.

Начинаем вычисления с коэффициента при t_1, так как искомая грань определяется точкой $(t'_1,t'_2)=(4,0)$. Коэффициенты неравенства вычисляются по формулам (13) и (13′) из 2.3:

$$\pi_1=\max_{r=1}^{8}\{(1-\psi_0(g_4-rg_7))/r \mid \psi_0(g_4-rg_7)<1\}=(1-\psi_0(g_4-4g_7))/4=1/4,$$

$$\pi_2=\max_{r=1}^{8}\{(1-\psi_1(g_4-rg_5))/r \mid \psi_1(g_4-rg_5)<1\}=(1-\psi_1(g_4-1g_5))/1=3/4.$$

Коэффициент $\pi_1=1/4$ может быть вычислен также из условия $\pi_1\cdot 4=1$.

Таким образом, неравенство $\frac{1}{4}t_1 + \frac{3}{4}t_2 \geq 1$ задаёт грань многовершинника группового уравнения, проходящую через точку $(4,0)$.

В табл. 1, между второй и третьей горизонтальными линиями, находятся целочисленные точки, определяющие гиперплоскость $\pi t = 1$ (в нашем случае прямую):

$$\begin{array}{ccc} v_1 & 4 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 \end{array}$$

Запишем неравенство, определяющее грань, в виде $t_1 + 3t_2 \geq 4$ и перепишем его в исходных переменных

$$12 - 3x_1 - 8x_2 + 3x_1 \geq 4,$$

$$-x_2 \geq -1.$$

Точке $(t_1', t_2') = (4,0)$ соответствует точка $(x_1, x_2) = (0,1)$, а точке $(t_1', t_2') = (1,1)$ — точка $(x_1, x_2) = (1,1)$.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

В системе неравенств $x_1 \geq 0$, $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$, задающей крайнюю нецелочисленную точку $(0, 3/2)$, заменяем неравенство $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$, которое ограничивает рост переменной θ, неравенством $-x_2 \geq -1$ (это неравенство также ограничивает рост переменной θ, но раньше), коэффициенты которого были вычислены на шаге 4 этой итерации. В результате получаем новое базисное допустимое целочисленное решение (0, 1) и новый конус C_2 с вершиной в точке $M_2(0,1)$, задаваемый неравенствами $x_1 \geq 0$, $-x_2 \geq -1$.

Последнюю систему неравенств можно записать как $D'x \geq f'$, где

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (D')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ системы неравенств, определяющей конус C_2, отличается от матрицы D системы неравенств, определяющей конус C_1, второй строкой. Элементы обратной матрицы $(D')^{-1}$ можно вычислить по формулам, подправляющим обратную матрицу (конечно, существуют и другие способы вычисления), и получить

$$(D')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Крайние направления конуса C_2 задаются столбцами матрицы $(D')^{-1}$, то есть $u_1 = (1,0)$ и $u_2 = (0,-1)$.

Итерация 2.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

На этом шаге имеем

$$cu_1 = (-1,-5)(1,0) = -1 < 0,$$

$$cu_2 = (-1,-5)(0,-1) = 5 > 0.$$

Условие оптимальности не выполняется.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Из направлений $u_1 = (1,0)$ и $u_2 = (0,-1)$ улучшающим является только $u_1 = (1,0)$, $x(\theta) = (0,1) + \theta(1,0) = (\theta,1)$.

Из ограничений задачи имеем $\theta_0 = 4/3$, то есть при сдвиге вдоль направления u_1 попадаем в нецелочисленную точку $(4/3,1)$. При этом наибольшее значение θ, при котором $x(\theta)$ — целочисленная точка, равно $\theta' = 1$, при этом $(x_1,x_2) = (1,1)$.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

Запишем систему неравенств

$$-3x_1 - 8x_2 \geq -12, \quad -x_2 \geq -1,$$

определяющую крайнюю нецелочисленную точку $(4/3,1)$.

Строим групповое уравнение. Вводим слабые неотрицательные целочисленные переменные s_1 и s_2, преобразующие эту систему неравенств в систему уравнений $Ax = b$, $A = (B,N)$, где

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу B к нормальному виду с помощью последовательности элементарных матриц $U_{1,2}(-8)$, $V_1(-1)$, $V_2(-1)$, $U_{1,2}$, $V_{1,2}$. Тогда матрица $(B|N|b)$ переходит в матрицу

$$(S|UN|Ub) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & -4 \end{array}\right).$$

Получаем групповое уравнение

$$g_2 s_1 + g_2 s_2 = g_2.$$

Вводим новую переменную

$$t_1 = s_1 + s_2 = (12 - 3x_1 - 8x_2) + (1 - x_2).$$

Уравнение принимает вид

$$g_2 t_1 = g_2.$$

Точка $t_1' = 1$, определяющая искомую грань, соответствует целочисленной точке $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Фактор-группа G_3 изоморфна циклической группе порядка 3. Элементы g_{i_j} группы G, в которые переходят небазисные столбцы (столбец свободных членов), определяются из равенств

$$-1 = 3 \cdot (-1) + 2, \quad 8 = 3 \cdot (2) + 2 \quad (-4 = 3 \cdot (-2) + 2).$$

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Вычисляем коэффициенты неравенства $\pi_1 t_1 \geq 1$, которое задаёт грань многовершинника последнего группового уравнения $g_2 t_1 = g_2$, проходящую через вершину $(t_1') = (1)$, соответствующую целочисленной точке $(x_1, x_2) = (1, 1)$.

Результаты вычислений приведены в табл. 2 (см. заполнение стандартной таблицы в 2.3.2).

Таблица 2

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_2 t_1 = g_2, \quad t \in \mathbf{Z}_+^1, g_2 \in G_3$$

g_{i_s}			g_2	
d_s			3	
r_s			1	
π_s			1	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1
g_0	0		0	
g_1	$+\infty$	0	2	1
g_2	$+\infty$	0	1	1
π_s			1	
v_1			1	

Вычисление вершины и проверка не представляет труда.

Начинаем вычисления с коэффициента при t_1, так как искомая грань определяется точкой $(t_1') = (1)$. Коэффициенты неравенства вычисляются по формулам (13) и (13′) из 2.3.

Коэффициент $\pi_1 = 1$ может быть вычислен также из условия $\pi_1 \cdot 1 = 1$.

Таким образом, неравенство $t_1 \geq 1$ задаёт грань многовершинника группового уравнения, проходящую через точку (1).

Перепишем неравенство $t_1 \geq 1$, определяющее грань, в исходных переменных

$$(12 - 3x_1 - 8x_2) + (1 - x_2) \geq 1,$$
$$-x_1 - 3x_2 \geq -4.$$

Точке $(t_1') = (1)$ соответствует точка $(x_1, x_2) = (1, 1)$.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

В системе неравенств $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$, $-x_2 \geq -1$, задающей крайнюю нецелочисленную точку $(4/3, 1)$, заменяем неравенство $-3x_1 - 8x_2 \geq -12$, которое ограничивает рост переменной θ, неравенством $-x_1 - 3x_2 \geq -4$ (это неравенство также ограничивает рост переменной θ, но раньше), коэффициенты которого были вычислены на шаге 4 этой итерации. В результате получаем новое базисное допустимое целочисленное решение (1, 1) и новый конус C_3 с вершиной в точке $M_3(1, 1)$, задаваемый неравенствами $-x_1 - 3x_2 \geq -4$, $-x_2 \geq -1$.

Последнюю систему неравенств можно записать как $D'x \geq f'$, где

$$D' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f' = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (D')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $D' = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ системы неравенств, определяющей конус C_3, отличается от матрицы D системы неравенств, определяющей конус C_2, первой строкой. Элементы обратной матрицы $(D')^{-1}$ можно вычислить по формулам, подправляющим обратную матрицу (конечно, существуют и другие способы вычисления), и получить

$$(D')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Крайние направления конуса C_3 задаются столбцами матрицы $(D')^{-1}$, то есть $u_1 = (-1, 0)$ и $u_2 = (3, -1)$.

Итерация 3.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

На этом шаге имеем

$$cu_1 = (-1, -5)(-1, 0) = 1 > 0,$$

$$cu_2 = (-1, -5)(3, -1) = 2 > 0.$$

Условие оптимальности выполняется.

Текущее решение $(x_1, x_2) = (1, 1)$ является оптимальным. Оптимальное значение целевой функции равно -6.

2.5.3. Стартовая точка прямого метода

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации

x_1	x_2	x_3		
10	14	21	$\to$	min
8	11	9	$\geq$	12
2	2	7	$\geq$	14,

$x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^3$.

Точка $(0,0,0)$ не является допустимым решением рассматриваемой задачи. Для нахождения начального базисного допустимого целочисленного решения в этом случае необходимо ввести две искусственные неотрицательные целочисленные переменные x_4, x_5 и решить прямым методом вспомогательную задачу

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	0	0	1	1	$\to$	min
8	11	9	1	0	$\geq$	12
2	2	7	0	1	$\geq$	14,

$x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^5$.

В качестве начального базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^1 = (0,0,0,12,14)$, $cx^1 = 26$. В этой точке базисное представление и обратная матрица имеют вид

	D					f		D^{-1}			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	0	0	0	0	$\geq$	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	$\geq$	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	$\geq$	0	0	0	1	0	0
8	11	9	1	0	$\geq$	12	-8	-11	-9	1	0
2	2	7	0	1	$\geq$	14	-2	-2	-7	0	1.

Обратная матрица D^{-1} вычисляется (см. задачу 2.4.2).

Неравенства, определяющие конус с вершиной в точке x^1, задаются системой $Dx \geq f$, а крайние направления этого конуса — u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Итерация 1.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Если для каждого крайнего направления u_k конуса $C = \{x \mid Dx \geq f\}$, которое выходит из его вершины x', выполняется неравенство $cu_k \geq 0$, то задача минимизации решена и вычислительная схема заканчивает свою работу. Иначе переходим на шаг 2.

На шаге 1 этой итерации имеем

$$cu_1 = -10,\ cu_2 = -13,\ cu_3 = -16,\ cu_4 = 1,\ cu_5 = 1.$$

Условие оптимальности не выполняется, переходим на шаг 2.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Имеется три возможных улучшающих крайних направления сдвига: u_1, u_2, u_3. Определим, какое из этих направлений приведёт в целочисленную точку, в которой будет наибольшее изменение значения целевой функции.

2.1. Определяем наибольшее значение θ_0 переменной $\theta, \theta \geq 0$, которое не выводит точку $x(\theta) = x^1 + \theta u$ из множества решений текущей системы неравенств.

2.1.1. $x(\theta) = x^1 + \theta u_1,\ \theta_0 = 3/2,\ x(\theta_0) = (3/2, 0, 0, 0, 11)$.

2.1.2. $x(\theta) = x^1 + \theta u_2,\ \theta_0 = 12/11,\ x(\theta_0) = (0, 12/11, 0, 0, 130/11)$.

2.1.3. $x(\theta) = x^1 + \theta u_3,\ \theta_0 = 4/3,\ x(\theta_0) = (0, 0, 4/3, 0, 14/3)$.

2.2. Определяем наибольшее значение θ' переменной θ из замкнутого интервала $[0,\ \theta_0]$, для которого $x(\theta')$ — целочисленная точка.

2.2.1. $\theta' = 1,\ x(\theta') = (1, 0, 0, 4, 12),\ cx(\theta') = 16$.

2.2.2. $\theta' = 1,\ x(\theta') = (0, 1, 0, 1, 12),\ cx(\theta') = 13$.

2.2.3. $\theta' = 1,\ x(\theta') = (0, 0, 1, 3, 7),\ cx(\theta') = 10$.

Направление u_3 приводит в целочисленную точку $x(\theta') = (0, 0, 1, 3, 7)$, в которой изменение значения целевой функции наибольшее. Выбираем направление сдвига u_3, величину сдвига $\theta_0 = 4/3$ и попадаем в крайнюю нецелочисленную точку $x(\theta_0) = (0, 0, 4/3, 0, 14/3)$. В этой точке базисное представление имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc}
 & B & & & & & h \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \geq & 0 \\
8 & 11 & 9 & 1 & 0 & \geq & 12 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \geq & 0 \\
2 & 2 & 7 & 0 & 1 & \geq & 14,
\end{array}$$

то есть $Bx \geq h$.

Матрица B получается из матрицы D, заменяя в D строку $(0, 0, 1, 0, 0)$ строкой $(0, 0, 0, 1, 0)$ и затем меняя местами строки 3 и 4. Переходим на шаг 3.

Если же попадаем в целочисленную крайнюю точку, то переходим на шаг 5.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

В крайней нецелочисленной точке $x(\theta_0) = (0,0,4/3,0,14/3)$ стоим групповое уравнение [61, 63].

3.1. Вводим столбец слабых неотрицательных целочисленных переменных $s = (s_1, s_2, \ldots, s_5)$, преобразующих систему неравенств $Bx \geq h$ в систему уравнений $Bx - I_5 s = h$.

3.2. Приводим целочисленную матрицу B к нормальному виду, выполняя, например, следующие элементарные преобразования:

к строке 3 прибавляем строку 1, умноженную на -8 ($U_{3,1}(-8)$),

к строке 3 прибавляем строку 2, умноженную на -11 ($U_{3,2}(-11)$),

к строке 3 прибавляем строку 4, умноженную на -1 ($U_{3,4}(-1)$),

к столбцу 1 прибавляем столбец 5, умноженный на -2 ($V_{5,1}(-2)$),

к столбцу 2 прибавляем столбец 5, умноженный на -2 ($V_{5,2}(-2)$),

к столбцу 3 прибавляем столбец 5, умноженный на -7 ($V_{5,3}(-7)$) (диагональный вид уже получен),

меняем местами строки 3 и 5, меняем местами столбцы 3 и 5 (нормальный вид получен).

Матрица $(B \mid -I_5 \mid h)$ переходит в матрицу

$$(S \mid -UI_5 \mid Uh) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 11 & -1 & 1 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

3.3. Определяем коэффициенты g_j: g_8, g_2, g_8, g_1, g_0, g_3. С полученными ненулевыми коэффициентами g_j и переменными s_j записываем групповое уравнение

$$g_8 s_1 + g_2 s_2 + g_8 s_3 + g_1 s_4 = g_3.$$

3.4. Вводим новые переменные:

$$t_1 = s_4 = x_4,$$

$$t_2 = s_2 = x_2,$$

$$t_3 = s_1 + s_3 = x_1 + (8x_1 + 11x_2 + 9x_3 + x_4 - 12) = 9x_1 + 11x_2 + 9x_3 + x_4 - 12.$$

В точке $x(\theta') = (0,0,1,3,7)$ вычисляем $(t_1', t_2', t_3') = (3,0,0)$.

Тогда групповое уравнение принимает вид

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_8 t_3 = g_3.$$

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Вычисляем коэффициенты неравенства, задающего грань многовершинника последнего группового уравнения (см. 2.3.2) [61, 64].

Находим неравенство, задающее грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения, в виде

$$\pi_1 t_1 + \pi_2 t_2 + \pi_3 t_3 \geq 1.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_1 t_1 + g_2 t_2 + g_8 t_3 = g_3, \quad t \in \mathbf{Z}^3_+, g_{i_j} \in G_9, g_3 \in G_9$$

g_{i_s}			g_1		g_2		g_8	
d_s			9		9		9	
r_s			3		1		6	
π_s			1/3		2/3		1/6	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	2/6	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	4/6	2
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	6/6	3
g_4	$+\infty$	0	4/3	1	4/3	2	5/6	3
g_5	$+\infty$	0	5/3	1	5/3	2	4/6	3
g_6	$+\infty$	0	6/3	1	6/3	2	3/6	3
g_7	$+\infty$	0	7/3	1	7/3	2	2/6	3
g_8	$+\infty$	0	8/3	1	8/3	2	1/6	3
π_s			1/3		2/3		1/6	
v_1			3		0		0	
v_2			1		1		0	
v_3			0		0		6	

Из табл. 1 получаем неравенство

$$\frac{1}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_2 + \frac{1}{6}t_3 \geq 1.$$

Переписываем это неравенство в исходных переменных

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 6$$

и добавляем его к системе неравенств.

Выполняем шаги 2.1.3 и 2.2.3 этой итерации с учётом добавленного неравенства, получаем $\theta_0 = 1$ и $\theta' = 1$. Выбираем направление сдвига u_3, величину сдвига $\theta_0 = \theta' = 1$ и попадаем теперь уже в крайнюю целочисленную точку $x(\theta_0) = (0,0,1,3,7)$, в дальнейшем обозначаемую через x^2.

Переходим на шаг 5.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

В качестве следующего базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^2 = (0,0,1,3,7)$, $cx^2 = 10$. В этой точке базисное представление и обратная матрица имеют вид

D						f	D^{-1}				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	0	0	0	0	$\geq$	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	$\geq$	0	0	1	0	0	0
3	5	3	1	0	$\geq$	6	$-5/6$	-1	$-1/6$	$1/6$	0
8	11	9	1	0	$\geq$	12	$-3/6$	-2	$9/6$	$-3/6$	0
2	2	7	0	1	$\geq$	14	$23/6$	5	$7/6$	$-7/6$	1.

Переходим на шаг 1 итерации 2.

Итерация 2.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

На этом шаге имеем

$$cu_1 = 20/6,\ cu_2 = 3,\ cu_3 = 16/6,\ cu_4 = -10/6,\ cu_5 = 1.$$

Условие оптимальности не выполнено. Переходим на шаг 2.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Имеется только одно возможное улучшающее крайнее направление сдвига u_4.

2.1. Сдвигаемся в направлении u_4.

2.1.1. $x(\theta) = x^2 + \theta u_4$, $\theta_0 = 6$, $x(\theta_0) = (0,0,2,0,0)$.

2.2.1. $\theta' = \theta_0 = 6$, $x(\theta_0) = (0,0,2,0,0)$, $cx(\theta') = 0$.

Выбираем направление сдвига u_4, величину сдвига $\theta_0 = 6$ и попадаем теперь уже в крайнюю целочисленную точку $x(\theta_0) = (0,0,2,0,0)$, в дальнейшем обозначаемую через x^3. Переходим на шаг 5.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

В качестве следующего базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^3 = (0,0,2,0,0)$, $cx^3 = 0$. В этой точке базисное представление и обратная матрица имеют вид

D						f		D^{-1}			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	0	0	0	0	$\geq$	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	$\geq$	0	0	1	0	0	0
3	5	3	1	0	$\geq$	6	-1	$-5/3$	$1/3$	$-1/3$	0
0	0	0	1	0	$\geq$	0	0	0	0	1	0
2	2	7	0	1	$\geq$	14	5	$29/3$	$-7/3$	$7/3$	1.

Переходим на шаг 1 итерации 3.

Итерация 3.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

На этом шаге имеем

$$cu_1 = 5,\ cu_2 = 29/3,\ cu_3 = -7/3,\ cu_4 = 10/3,\ cu_5 = 1.$$

Условие оптимальности не выполнено, переходим на шаг 2.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

Имеется только одно возможное улучшающее крайнее направление сдвига u_3.

2.1. Сдвигаемся в направлении u_3.

2.1.1. $x(\theta) = x^3 + \theta u_3$, $\theta_0 = 0$, $x(\theta_0) = (0,0,2,0,0)$.

2.1.2. $\theta' = \theta_0 = 0$, $x(\theta_0) = (0,0,2,0,0)$, $cx(\theta') = 0$.

Направление u_3 не допускает положительного сдвига, а остальные четыре направления могут привести к увеличению значения целевой функции, следовательно, оптимальное решение вспомогательной задачи найдено.

Возвращаемся к решению исходной задачи. Неравенство $3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 6$ является избыточным для множества S_1, задаваемого системой $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $8x_1 + 11x_2 + 9x_3 \geq 12$, $2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq 14$. Это неравенство является ослаблением неравенства

$$6/14(2x_1 + 2x_2 + 7x_3) \geq (6/14)14.$$

Это позволяет применить теорему Минковского — Фаркаша, сформулированную выше. Вот нужная вектор-строка (15/7, 29/7, 0, 0, 3/7). Начальное базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи получается из оптимального путём исключения искусственных переменных.

Подготовка к итерации 1. В качестве начального базисного допустимого целочисленного решения исходной задачи берём точку $x^1 =$

$(0,0,2)$, $cx^1 = 42$. В этой точке базисное представление и обратная матрица имеют вид

D				f	D^{-1}		
x_1	x_2	x_3			u_1	u_2	u_3
1	0	0	$\geq$	0	1	0	0
0	1	0	$\geq$	0	0	1	0
2	2	7	$\geq$	14	$-2/7$	$-2/7$	$1/7$.

Итерация 1.
Шаг 1 (проверка оптимальности).
На этом шаге имеем

$$cu_1 = 4,\ cu_2 = 8,\ cu_3 = 3.$$

Условие оптимальности выполнено, решение исходной задачи найдено.

2.6. Прямой метод для системы уравнений

Представлена вычислительная схема прямого метода для системы уравнений. Работа этой схемы иллюстрируется числовым примером. Формулируется и решается по этой же схеме вспомогательная задача, оптимальное решение которой либо дает базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи, либо указывает на несовместность исходной задачи [59, 61, 68, 77, 94, 99].

2.6.1. Вычислительная схема для системы уравнений

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации

$$\min\{cx \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\},$$

где $m \times n$-матрица A, m-столбец b и n-строка c являются целочисленными, $\mathbf{Z}^n$ — множество всех целочисленных n-столбцов, x — n-столбец неотрицательных целочисленных переменных.

Будем считать, что система уравнений $Ax = b$ неизбыточна и совместна, то есть $m \times n$-матрица A имеет ранг m $(m \leq n)$.

Введём обозначения:

B — либо базис, упорядоченная система линейно независимых векторов, либо матрица, столбцами которой являются эти векторы;

x_B — столбец базисных переменных;

x_N — столбец небазисных переменных;

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество индексов всех переменных;

J_B — множество индексов базисных переменных;

J_N — множество индексов небазисных переменных;

$J_B \cup J_N = J$, $J_B \cap J_N = \varnothing$.

Начинаем с базисного допустимого целочисленного решения. Оно представляет собой крайнюю точку выпуклого множества, задаваемого системой $Ax = b$, $x \geq 0$. Сформулируем признак крайней точки.

Допустимое решение x' системы $Ax = b$, $x \geq 0$ является крайней точкой выпуклого множества $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, если и только если существует такая невырожденная $m \times m$-подматрица B матрицы A, что $x'_B = B^{-1}b \geq 0, x'_N = 0$, где x'_B и x'_N — значения соответственно базисных и небазисных переменных.

Итак, начинаем вычисления с базиса B и с базисного допустимого целочисленного решения $x_B = B^{-1}b \geq 0,\ x_N = 0$. Записываем базисную матрицу B и матрицу B^{-1}, обратную к ней, а также x_B, x_N, J, J_B, J_N и значения двойственных переменных $y_B = c_B B^{-1}$.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Условие оптимальности для задачи минимизации формулируется следующим образом. Текущее решение является оптимальным, если для всех j из J_N выполняются неравенства $y_B a_j - c_j \leq 0$.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

1. Выбор вводимого столбца. В базис вводим столбец a_s, для которого $y_B a_s - c_s > 0$. Если таких столбцов несколько, то выбираем тот, с помощью которого можно попасть в целочисленную точку.

2. Выбор выводимого столбца. Находим разложение z столбца a_s по базису B, $z = B^{-1}a_s$. Вычисляем

$$\theta_0 = \min_{z_i > 0} x_{B_i}/z_i.$$

Пусть для $i = l$ величина x_{B_i}/z_i минимальна. Тогда для вывода из базиса выбираем столбец a_r, стоящий на l-м месте в базисе. Если $z_i \leq 0$ для всех i, то целевая функция не ограничена снизу на допустимом множестве, и задача не имеет решения.

3. Преобразование. Базисная матрица B' отличается от матрицы B одним столбцом, находящемся на l-м месте в базисе. Поэтому строки обратной матрицы $(B')^{-1} = (q'_{i,j})$ можно выразить через строки обратной матрицы $B^{-1} = (q_{i,j})$ по формулам: $q'_l = (1/z_l)q_l,\ q'_i = q_i - z_i q'_l,\ i \neq l$, где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) = B^{-1}a_s,\ z_l \neq 0$.

Столбец значений базисных переменных преобразуем по формулам:

$$x_{B'_l} = x_{B_l}/z_l = \theta_0,\ x_{B'_i} = x_{B_i} - z_i\theta_0,\ i \neq l.$$

Значения двойственных переменных вычисляем по формулам:

$$y_{B'} = y_B - ((y_B a_s - c_s)/z_l)q_l.$$

Значение целевой функции меняется по формуле

$$z_{B'} = z_B - (y_B a_s - c_s) \cdot \theta_0.$$

Вывод и проверка расчётных формул, приведённых на этом шаге вычислений, не представляют труда.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

В нецелочисленной крайней точке строим групповое уравнение. Для этого используем матрицу $(B|N|b)$, определяющую эту точку. Матрицу B приводим к нормальному виду. Коэффициенты группового уравнения находятся по ранее описанному алгоритму.

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Коэффициенты неравенства, задающего нужную грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения, находятся с помощью рекуррентных соотношений.

Точка, через которую проходит эта грань, определяется либо новым целочисленным решением, либо текущим базисным допустимым целочисленным решением задачи оптимизации.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

Полученное неравенство $\sum\limits_j \pi_j t_j \geq \pi_0$ записываем в исходных переменных. Для этого выражаем t_j через переменные x_N, которые являются небазисными для текущего базисного допустимого целочисленного решения. Далее вводим очередную слабую переменную, преобразующую неравенство в уравнение. Полученное уравнение добавляем к системе ограничений задачи.

Вычисляем базис B' и базисное допустимое целочисленное решение $x_{B'} = (B')^{-1}b \geq 0,\ x_N = 0$. Записываем базисную матрицу B' и матрицу $(B')^{-1}$, обратную к ней, а также $x_{B'}$, x_N, J, $J_{B'}$, J_N и значения двойственных переменных $y_{B'} = c_{B'}(B')^{-1}$.

Опускаем штрихи и переходим на шаг 1.

2.6.2. Числовой пример

Решим прямым методом для системы уравнений следующую конкретную целочисленную линейную задачу оптимизации.

Максимизировать линейную функцию $1x_1 + 5x_2$ при условиях $3x_1 + 8x_2 \leq 12$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \in \mathbf{Z}^1$, $x_2 \in \mathbf{Z}^1$.

Введём слабую неотрицательную целочисленную переменную x_3 и перепишем условия задачи в виде

$1x_1 + 5x_2 + 0x_3 \to \max,$

$3x_1 + 8x_2 + 1x_3 = 12,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 \in \mathbf{Z}^1,\ x_2 \in \mathbf{Z}^1,\ x_3 \in \mathbf{Z}^1.$

Начинаем с базисного допустимого целочисленного решения $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 0)$. Находим значения двойственных переменных: $y_B = c_B B^{-1}$, $y_1 = 1/3$.

Итерация 1.

Шаг 1. Проверим оптимальность. Для задачи максимизации текущее решение является оптимальным, если для всех j из J_N выполняются неравенства $y_B a_j - c_j \geq 0$.

Имеем $y_B a_2 - c_2 = (1/3) \cdot 8 - 5 = -7/3 < 0, \quad y_B a_3 - c_3 = 1/3 > 0.$

Текущее решение не является оптимальным.

Шаг 2.

1. Для ввода в базис выбираем столбец a_2.

2. Находим разложение a_2 по базису B, $z_1 = B^{-1} a_2 = 8/3$.

Вычисляем

$$\theta_0 = \min_{z_i > 0} x_{B_i} / z_i = 3/2 = x_2.$$

Получаем нецелочисленное решение $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3/2, 0)$. Найдем допустимые целочисленные точки на интервале $[x(0), x(\theta_0)]$.

Пусть $\theta = 1$. Тогда $x_2 = 1$, $x_1 = 4 - 8/3 \cdot 1 = 4/3$, $x_3 = 0$. Имеем единственную целочисленную точку $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 0)$, $\theta' = 0$, то есть на данной итерации не перейдём в новую целочисленную точку, но построим новое неравенство. Это неравенство будет задавать грань выпуклой оболочки всех допустимых решений целочисленной задачи и позволит перейти в новую целочисленную точку.

Шаг 3. Запишем уравнение, определяющее нецелочисленную точку в виде $Ax = b$, $A = (B, N)$, где B — матрица, соответствующая базисным переменным, N — небазисным:

$$(B|N|b) = \left(\begin{array}{c|cc|c} a_2 & a_1 & a_3 & b \\ 8 & 3 & 1 & 12 \end{array} \right).$$

Запишем групповое уравнение $g_3 x_1 + g_1 x_3 = g_4$. Группа G представляет собой циклическую группу порядка 8, $12 = 8 \cdot 1 + 4$.

Вводим новые переменные $t_1 = x_1$, $t_2 = x_3$. Точка $(t_1', t_2') = (4, 0)$ определяет искомую грань. Получаем уравнение $g_3 t_1 + g_1 t_2 = g_4$.

Шаг 4. Вычисления представлены в табл. 1.

Таблица 1

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_3t_1+g_1t_2=g_4, \quad t\in \mathbf{Z}^2_+,\ g_{i_j}\in G_8,\ g_4\in G_8$$

g_{i_s}			g_3		g_1	
d_s			8		8	
r_s			4		1	
π_s			1/4		3/4	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2
g_0	0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	3/4	1	3/4	2
g_2	$+\infty$	0	6/4	1	6/4	2
g_3	$+\infty$	0	1/4	1	1/4	1
g_4	$+\infty$	0	4/4	1	4/4	2
g_5	$+\infty$	0	7/4	1	7/4	2
g_6	$+\infty$	0	2/4	1	2/4	1
g_7	$+\infty$	0	5/4	1	5/4	2
π_s			1/4		3/4	
v_1			4		0	
v_2			1		1	

Начинаем вычисления с коэффициента при t_1, так как искомая грань определяется точкой $(t_1',t_2')=(4,0)$. Коэффициенты неравенства вычисляются по формулам (13) и (13′) из 2.3:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \max_{r=1}^{8}\{(1-\psi_0(g_4-rg_3))/r \mid \psi_0(g_4-rg_3)<1\}\\ &= (1-\psi_0(g_4-4g_3))/4=1/4,\\ \pi_2 &= \max_{r=1}^{8}\{(1-\psi_1(g_4-rg_1))/r \mid \psi_1(g_4-rg_1)<1\}\\ &= (1-\psi_1(g_4-1g_1))/1=3/4.\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $\frac{1}{4}t_1+\frac{3}{4}t_2\geq 1$ задаёт грань выпуклой оболочки всех неотрицательных целочисленных решений группового уравнения, проходящую через точку $(4,0)$.

В табл. 1 находятся целочисленные точки, определяющие гиперплоскость $\pi t = 1$ (в нашем случае прямую):

v_1	4	0
v_2	1	1

Шаг 5. В исходных переменных неравенство принимает вид

$$x_1 + 3x_3 \geq 4.$$

Так как в последнем полученном целочисленном решении переменная x_1 — базисная, то выразим x_1 через небазисные переменные x_2 и x_3. Имеем

$$x_1 = (12 - 8x_2 - x_3)/3,$$

и неравенство примет вид $x_3 - x_2 \geq 0$. Введём слабую неотрицательную целочисленную переменную x_4, обращающую неравенство в равенство

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Базисное допустимое целочисленное решение $x_{B_1} = x_1 = 4$, $x_{B_2} = x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ определяется системой уравнений

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 = 12, \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Вычислим значения двойственных переменных $y_B = B^{-1}c_B$:

$$z(x) = x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4, \quad c_B = (1,0).$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_B = (y_1, y_2) = (1/3, 0).$$

Итерация 2.

Шаг 1. Проверим оптимальность полученного решения.
$y_B a_2 - c_2 = -7/3 < 0$, $y_B a_3 - c_3 = 1/3 > 0$. Решение не оптимально.

Шаг 2.
1. Для ввода в базис выбираем a_2.
2. Находим разложение по базису $z = (B^{-1})a_2$, $z = (8/3, 1)$.
Вычисляем

$$\theta_0 = \min_{z_i > 0} x_{B_i}/z_i = 0 = x_2.$$

Выводим из базиса a_4.
$x_1 = 4 - 8/3 \cdot 0 = 4$.

Шаг 5. Полученное базисное допустимое целочисленное решение $x_B = (x_1, x_2) = (4, 0)$ определяется системой уравнений $Ax = b$, $A = (B, N)$,

$$(B|N|b) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 3 & 8 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Определим значения двойственных переменных $y_B = c_B B^{-1}$, $c_B = (1,5)$, а элементы матрицы B^{-1}, которая отличается 2-м столбцом от матрицы, определяющей целочисленную точку итерации 2, вычисляем по формулам:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -8/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_B = (1/3, 7/3).$$

Итерация 3.

Шаг 1. Проверим оптимальность:

$$y_B a_3 - c_3 = -2 < 0, \quad y_B a_4 - c_4 = 7/3 > 0.$$

Решение не оптимальное.

Шаг 2.

1. Для ввода в базис выбираем a_3.

2. Находим разложение по базису $z = B^{-1} a_3 = (3, -1)$, $\theta_0 = 4/3 = x_3$.

Крайняя точка линейной задачи является нецелочисленной. При $\theta = 1$ имеем $x_3 = 1$, $x_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$, $x_2 = 0 - (-1) \cdot 1 = 1$, то есть $\theta' = 1$.

Нужно построить неравенство, определяющее эту целочисленную точку.

Шаг 3. В матрице системы уравнений выделим базисную матрицу, определяющую нецелочисленную точку, и построим групповое уравнение:

$$(B|N|b) = \left(\begin{array}{rr|rr|r} a_3 & a_2 & a_1 & a_4 & b \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Приводим матрицу B к нормальному виду, выполняя следующие операции: к строке 2 прибавить строку 1, из столбца 2 вычесть столбец 1, умноженный на 8.

Тогда матрица $(B|N|b)$ перейдет в матрицу:

$$(S|UN|Ub) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 9 & 3 & 1 & 12 \end{array} \right).$$

Эта матрица даёт групповое уравнение $g_3 x_1 + g_1 x_4 = g_3$. Искомую грань определяет точка $(t_1', t_2') = (1,0)$, соответствующая нашей целочисленной точке $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,1)$.

Введём новые переменные $t_1 = x_1$, $t_2 = x_4$. Получим уравнение

$$g_3 t_1 + g_1 t_2 = g_3.$$

Шаг 4. Вычисления представлены в табл. 2.

Таблица 2

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_3t_1+g_1t_2=g_3,\quad t\in\mathbf{Z}_+^2,\ g_{i_j}\in G_9,\ g_3\in G_9$$

g_{i_s}			g_3		g_1	
d_s			3		9	
r_s			1		3	
π_s			1		1/3	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2
g_0	0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	$+\infty$	1	1/3	2
g_2	$+\infty$	0	$+\infty$	1	2/3	2
g_3	$+\infty$	0	1	1	3/3	2
g_4	$+\infty$	0	$+\infty$	1	4/3	2
g_5	$+\infty$	0	$+\infty$	1	5/3	2
g_6	$+\infty$	0	2	1	6/3	2
g_7	$+\infty$	0	$+\infty$	1	7/3	2
g_8	$+\infty$	0	$+\infty$	1	8/3	2
π_s			1		1/3	
v_1			1		0	
v_2			0		3	

Для вычисления функции $\psi_1(g)$ используется функция $\psi_1'(g)$.

Коэффициенты неравенства вычисляются по формулам (13) и (13′) из 2.3:

$$\pi_1=\max_{r=1}^{3}\{(1-\psi_0(g_3-rg_3))/r\mid\psi_0(g_3-rg_3)<1\}=(1-\psi_0(g_3-1g_3))/1=1,$$

$$\pi_2=\max_{r=1}^{9}\{(1-\psi_1(g_3-rg_1))/r\mid\psi_1(g_3-rg_1)<1\}=(1-\psi_1(g_3-3g_1))/3=1/3.$$

Таким образом, неравенство $t_1+\frac{1}{3}t_2\geq 1$ задаёт грань, проходящую через точку $(t_1',t_2')=(1,0)$.

В табл. 2 находятся координаты точек, определяющих гиперплоскость $\pi t=1$ (в нашем случае прямую):

v_1	1	0
v_2	0	3

Неравенство в исходных переменных будет выглядеть следующим образом: $x_4+3x_1\geq\ 3$. В последней целочисленной точке переменная x_1

является базисной, поэтому выразим x_1 через небазисные переменные из уравнения $Bx_B+Nx_N=b$, $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$. Имеем $x_1=4-3x_3+(8/3)x_4$.

Получаем неравенство $x_4-x_3\geq -1$. Введём слабую неотрицательную целочисленную переменную x_5, обращающую неравенство в равенство $x_3-x_4+x_5=1$.

Шаг 5. Получаем базисное допустимое целочисленное решение $x_B=(x_1,x_2,x_5)=(4,0,1)$, $(x_3,x_4)=(0,0)$ и новый базис B

$$(B|N|b)=\left(\begin{array}{ccc|cc|c} a_1 & a_2 & a_5 & a_3 & a_4 & b \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Значения двойственных переменных $y_B=c_BB^{-1}=(1/3,7/3,0)$.

Итерация 4.

Шаг 1. Проверим оптимальность: $y_Ba_3-c_3=-2<0, \quad y_Ba_4-c_4=7/3>0$. Решение не оптимальное.

Шаг 2.

1. Для ввода в базис выбираем a_3.

2. Находим разложение a_3 по базису $z=(B^{-1})\cdot a_3=(3,-1,1)$. Вычисляем $\theta_0 \ =\min\limits_{z_i>0} x_{B_i}/z_i=1=x_3$. Выводим из базиса a_5.

3. Тогда $x_1=4-3\cdot 1=1$, $x_2=0-(-1)\cdot 1=1$.

Шаг 5.

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_B=(x_1,x_2,x_3)=(1,1,1).$$

Находим значения двойственных переменных $y_B=c_BB^{-1}=(1/3,7/3,2)$.

Итерация 5.

Шаг 1. Проверим оптимальность: $y_Ba_4=1/3>0, \quad y_Ba_5=2>0$.

Полученное решение $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,1)$ является оптимальным, оптимальное значение целевой функции равно 6.

2.6.3. Стартовая точка прямого метода

Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
10	14	21	0	0	$\to$	min
8	11	9	-1	0	$=$	12
2	2	7	0	-1	$=$	14,

$x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^5$.

Точка $(0,0,0,0,0)$ не является допустимым решением рассматриваемой задачи. Для нахождения начального базисного допустимого целочисленного решения в этом случае необходимо ввести две искусственные неотрицательные целочисленные переменные x_6, x_7 и решить прямым методом вспомогательную задачу

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
0	0	0	0	0	1	1	$\to$	min
8	11	9	-1	0	1	0	$=$	12
2	2	7	0	-1	0	1	$=$	14,

$x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^7$.

В качестве начального базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^1 = (0,0,0,0,0,12,14)$.

Разбиение на базисные и небазисные переменные имеет вид

		x_6	x_7			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
J_B	$=$	6	7	J_N	$=$	1	2	3	4	5
x_B	$=$	12	14	x_N	$=$	0	0	0	0	0.

Базисное представление и обратная матрица имеют вид

B			b	B^{-1}	
x_6	x_7				
1	0	$=$	12	1	0
0	1	$=$	14	0	1.

Вычисляем: $c_B x_B = 26,\ y_B = c_B B^{-1} = (1,1)$.

Итерация 1.

Шаг 1 (проверка оптимальности).

Если $y_B a_j - c_j \leqslant 0\ \forall j \in J_N$, то задача минимизации решена, и вычислительная схема заканчивает свою работу. $y_B a_j - c_j, j \in J_N$, есть строка $(10 \quad 13 \quad 16 \quad -1 \quad -1)$. Условие оптимальности нарушается для $j = 1,2,3$. Переходим на шаг 2.

Шаг 2 (сдвиг в новую точку).

2.1. Выбор вводимого столбца.

Выбираем столбец a_3. Такой выбор обеспечивает наибольшее изменение значения целевой функции, когда перейдем к следующей целочисленной точке.

2.2. Выбор выводимого столбца.

Ищем разложение z столбца a_3 по базису B: $z = B^{-1}a_3$, $z = (9,7)$. Вычисляем:

$$\theta_0 = \min_{z_i>0} \frac{x_{B_i}}{z_i}, \ \theta_0 = 4/3.$$

Обозначим через l индекс, где достигается минимум, $l = 1$. Из базиса выводим столбец a_6.

2.3. Преобразование.

Преобразуем столбец значений базисных переменных по формулам:

$$x'_{B_l} = \frac{x_{B_l}}{z_l} = \theta_0, \ x'_{B_i} = x_{B_i} - z_i\theta_0, \ i \neq l.$$

$$x_3 = 4/3, \ x_7 = 14/3.$$

Сдвигаемся в нецелочисленную крайнюю точку $x' = (0,0,4/3,0,0,0,14/3)$. Переходим на шаг 3.

Шаг 3 (построение группового уравнения).

В нецелочисленной крайней точке строим групповое уравнение [63]. Для этого используем матрицу $(B|N|b)$, определяющую эту точку. Матрицу B приводим к нормальному виду.

В данном случае

$$(B|N|b) = \left(\begin{array}{cc|ccccc|c} 9 & 0 & 8 & 11 & 1 & -1 & 0 & 12 \\ 7 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 14 \end{array}\right)$$

(общепринятое правило: меняем местами небазисный и базисный столбцы).

После приведения матрицы B к нормальному виду получим

$$(S|UN|Ub) = \left(\begin{array}{cc|ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 14 \\ 0 & 9 & 8 & 11 & 1 & -1 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

Получили циклическую группу порядка 9. Определяем коэффициенты g_j : $g_8 = 8$, $g_2 = 2$, $g_1 = 1$, $g_8 = 8$, $g_0 = 0$, $g_3 = 3$. С полученными ненулевыми коэффициентами g_j и переменными x_j записываем групповое уравнение $g_1x_6 + g_2x_2 + g_8(x_1 + x_4) = g_3$. Делаем замену переменных: $t_1 = x_6$, $t_2 = x_2$, $t_3 = x_1 + x_4$.

Тогда групповое уравнение примет вид $g_1t_1 + g_2t_2 + g_8t_3 = g_3$.

Шаг 4 (вычисление коэффициентов неравенства).

Находим неравенство, задающее грань многовершинника группового уравнения ([64], см. 2.3), в виде

$$\pi_1t_1 + \pi_2t_2 + \pi_3t_3 \geqslant 1.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения

$$g_1t_1+g_2t_2+g_8t_3=g_3, \quad t\in\mathbf{Z}^3_+,\ g_{i_j}\in G_9,\ g_3\in G_9$$

g_{i_s}			g_1		g_2		g_8	
d_s			9		9		9	
r_s			3		1		6	
π_s			1/3		2/3		1/6	
g	ψ_0	i_0	ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_3	i_3
g_0	0		0		0		0	
g_1	$+\infty$	0	1/3	1	1/3	1	2/6	1
g_2	$+\infty$	0	2/3	1	2/3	2	4/6	2
g_3	$+\infty$	0	3/3	1	3/3	2	6/6	3
g_4	$+\infty$	0	4/3	1	4/3	2	5/6	3
g_5	$+\infty$	0	5/3	1	5/3	2	4/6	3
g_6	$+\infty$	0	6/3	1	6/3	2	3/6	3
g_7	$+\infty$	0	7/3	1	7/3	2	2/6	3
g_8	$+\infty$	0	8/3	1	8/3	2	1/6	3
π_s			1/3		2/3		1/6	
v_1			3		0		0	
v_2			1		1		0	
v_3			0		0		6	

Получаем неравенство $\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2+\frac{1}{6}t_3\geqslant 1$.

Переписываем его в исходных переменных

$$5x_1+6x_2+6x_3-x_4\leq 6.$$

Вводим слабую неотрицательную целочисленную переменную x_8 и к системе уравнений, задающей целочисленную точку x^1, добавляем новое уравнение

$$5x_1+6x_2+6x_3-x_4+x_8=6.$$

Теперь уже базис состоит из трёх единичных столбцов a_6, a_7, a_8. Выполняем вычисления шага 2 этой итерации: вводим в базис столбец a_3, находим $\theta_0=1$, выводим из базиса столбец a_8. Теперь уже сдвигаемся в целочисленную крайнюю точку $(0,0,1,0,0,3,7,0)$, обозначаемую в дальнейшем через x^2.

Переходим на шаг 5.

Шаг 5 (подготовка к следующей итерации).

В качестве следующего базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^2 = (0,0,1,0,0,3,7,0)$.

Разбиение на базисные и небазисные переменные имеет вид

		x_6	x_7	x_3			x_1	x_2	x_8	x_4	x_5
$J_{B'}$	$=$	6	7	3	$J_{N'}$	$=$	1	2	8	4	5
$x_{B'}$	$=$	3	7	1	$x_{N'}$	$=$	0	0	0	0	0.

Базисное представление и обратная матрица имеют вид

	B'			b		$(B')^{-1}$	
x_6	x_7	x_3					
1	0	9	$=$	12	1	0	$-9/6$
0	1	7	$=$	14	0	1	$-7/6$
0	0	6	$=$	6	0	0	$1/6.$

Вычисляем: $c_{B'}x_{B'} = 10$, $y_{B'} = c_{B'}(B')^{-1} = (1,1,-8/3)$.

Вычисления шага 5 следует выполнять по расчётным формулам, указанным выше, хотя здесь приведены другие формулы для вычисления значения целевой функции и для вычисления значений двойственных переменных. Приведённые формулы могут быть использованы для контроля при ручном счёте.

Опускаем все знаки $'$, использованные на этом шаге. Итерация 1 завершена.

Переходим на шаг 1 следующей итерации.

Итерация 2.

Шаг 1.

$y_B a_j - c_j, j \in J_N$, есть строка $(-10/3,\ -3,\ -8/3,\ 5/3,\ -1)$. Условие оптимальности нарушается для $j = 4$. Переходим на шаг 2.

Шаг 2.

Шаг 2.1. Вводим в базис столбец a_4.

Шаг 2.2. Находим разложение z столбца a_4 по базису B: $z = (1/2,\ 7/6,\ -1/6)$.

Вычисляем $\theta_0 = 6$. Выводим из базиса столбец a_6.

Шаг 2.3. После преобразования получаем значения базисных переменных: $x_4 = 6,\ x_7 = 0,\ x_3 = 2$.

Сдвигаемся в целочисленную крайнюю точку $(0,0,2,6,0,0,0,0)$, в дальнейшем обозначаемую через x^3.

Переходим на шаг 5.

Шаг 5.

В качестве следующего базисного допустимого целочисленного решения берём точку $x^3 = (0,0,2,6,0,0,0,0)$.

Разбиение на базисные и небазисные переменные имеет вид

		x_4	x_7	x_3			x_1	x_2	x_8	x_6	x_5
$J_{B'}$	$=$	4	7	3	$J_{N'}$	$=$	1	2	8	6	5
$x_{B'}$	$=$	6	0	2	$x_{N'}$	$=$	0	0	0	0	0.

Базисное представление и обратная матрица имеют вид

	B'			b		$(B')^{-1}$	
x_4	x_7	x_3					
-1	0	9	$=$	12	2	0	-3
0	1	7	$=$	14	$-7/3$	1	$7/3$
-1	0	6	$=$	6	$1/3$	0	$-1/3$.

Вычисляем: $c_{B'}x_{B'} = 0,\ y_{B'} = c_{B'}(B')^{-1} = (-7/3, 1, 7/3)$.

Переходим на шаг 1 следующей итерации.

Итерация 3.

Шаг 1.

$y_B a_j - c_j, j \in J_N$, есть строка $(-5,\ -29/3,\ 7/3,\ -7/3,\ -1)$. Условие оптимальности нарушается для $j = 8$. Переходим на шаг 2.

Шаг 2.

Шаг 2.1. Вводим в базис столбец a_8.

Шаг 2.2. Находим разложение z столбца a_8 по базису B: $z = (-3,\ 7/3,\ -1/3)$.

Вычисляем $\theta_0 = 0$. Выводим из базиса столбец a_7.

Шаг 2.3. После преобразования получаем значения базисных переменных: $x_4 = 6,\ x_8 = 0,\ x_3 = 2$.

Остаёмся в той же целочисленной крайней точке $x^3 = (0,0,2,6,0,0,0,0)$.

Переходим на шаг 5.

Шаг 5.

В качестве следующего базисного допустимого целочисленного решения берём ту же точку $x^3 = (0,0,2,6,0,0,0,0)$, но имеющую другое базисное представление.

Разбиение на базисные и небазисные переменные имеет вид

		x_4	x_8	x_3			x_1	x_2	x_7	x_6	x_5
$J_{B'}$	$=$	4	8	3	$J_{N'}$	$=$	1	2	7	6	5
$x_{B'}$	$=$	6	0	2	$x_{N'}$	$=$	0	0	0	0	0.

Базисное представление и обратная матрица имеют вид

B'				b	$(B')^{-1}$		
x_4	x_8	x_3					
-1	0	9	$=$	12	-1	$9/7$	0
0	0	7	$=$	14	-1	$3/7$	1
-1	1	6	$=$	6	0	$1/7$	$0.$

Вычисляем: $c_{B'}x_{B'} = 0,\ y_{B'} = c_{B'}(B')^{-1} = (0,0,0)$.
Переходим на шаг 1 следующей итерации.

Итерация 4.

Шаг 1.

$y_B a_j - c_j, j \in J_N$, есть строка $(0,0,0,-1,-1)$. Условие оптимальности выполняется. Оптимальное решение вспомогательной задачи найдено.

Теперь переходим к решению исходной задачи. Начальное базисное допустимое целочисленное решение исходной задачи получается из оптимального решения вспомогательной задачи путём исключения искусственных переменных x_6 и x_7. При этом сохраняем уравнение, добавленное на шаге 4 итерации 1.

В качестве начального базисного допустимого целочисленного решения исходной задачи берём точку$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_8) = (0,0,2,6,0,0)$.

Разбиение на базисные и небазисные переменные имеет вид

		x_4	x_8	x_3			x_1	x_2	x_5
J_B	$=$	4	8	3	J_N	$=$	1	2	5
x_B	$=$	6	0	2	x_N	$=$	0	0	$0.$

Базисное представление и обратная матрица имеют вид

B				b	B^{-1}		
x_4	x_8	x_3					
-1	0	9	$=$	12	-1	$9/7$	0
0	0	7	$=$	14	-1	$3/7$	1
-1	1	6	$=$	6	0	$1/7$	$0.$

Вычисляем: $c_B x_B = 42,\ y_B = c_B B^{-1} = (0,3,0)$.

Итерация 1.

Шаг 1.

$y_B a_j - c_j, j \in J_N$, есть строка $(-4,-8,-3)$. Условие оптимальности выполняется. Оптимальное решение исходной задачи найдено.

2.7. Отладочная серия задач

Для нескольких классов задач представлены результаты счёта, которые были получены вручную или на компьютере.

2.7.1. Линейные и целочисленные задачи оптимизации

В линейных задачах оптимизации из серии 11 все переменные являются неотрицательными, а в целочисленных линейных задачах оптимизации из этой серии все переменные – неотрицательные и целочисленные. Для каждой задачи приводятся оптимальное решение целочисленной линейной задачи оптимизации и оптимальное решение соответствующей ей линейной задачи оптимизации. Например, в первой из двенадцати задач 11.01 означает номер задачи, а числа 3 и 3 указывают на то, что в этой задаче три основных ограничения и три переменных.

Задача 11.01 3 3

11.01	x_1	x_2	x_3		
	4	5	1	$\to$	max
	3	2	0	$\le$	10
	1	4	0	$\le$	11
	3	3	1	$\le$	13
lin	1,8	2,3	0,7		19,4
int	2	2	1		19

Задача 11.02 3 2

11.02	x_1	x_2		
	3	−1	$\to$	max
	3	−2	$\le$	3
	−5	−4	$\le$	−10
	2	1	$\le$	5
lin	1,85	1,28		4,28
int	1	2		1

Задача 11.03 2 5

11.03	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	1	2	3	1	1	$\to$	max
	1	0	4	2	1	$\le$	41
	4	3	1	−4	−1	$\le$	47
lin	0	43	0	20,5	0		106,5
int	0	42	0	19	3		106

Задача 11.04 2 3

11.04	x_1	x_2	x_3		
	10	14	21	$\to$	min
	8	11	9	$\ge$	12
	2	2	7	$\ge$	14
lin	0	0	2		42
int	0	0	2		42

Задача 11.05 3 3

11.05	x_1	x_2	x_3		
	1	4	8	$\to$	min
	25	-8	7	$\geq$	7
	-20	7	-9	$\geq$	6
	1	-1	6	$\geq$	9
lin	24,42	85,71	11,71		461
int	29	102	14		549

Задача 11.06 3 3

11.06	x_1	x_2	x_3		
	2	3	4	$\to$	min
	-1	2	1	$\geq$	7
	2	1	2	$\geq$	8
	1	-1	3	$\geq$	8
lin	0	1,85	3,28		18,71
int	0	2	4		22

Задача 11.07 2 2

11.07	x_1	x_2		
	2	3	$\to$	max
	2	5	$\leq$	8
	3	2	$\leq$	9
lin	2,63	0,54		6,9
int	3	0		6

Задача 11.08 2 9

11.08	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
	2	1	4	0	3	1	2	7	3	$\to$	max
	1	3	2	4	1	5	3	2	6	$=$	14
	4	5	4	1	6	2	4	7	3	$=$	8
lin	0	0	0,33	0	0	0	0	0	2,22		8
int	1	0	0	2	0	1	0	0	0		3

Задача 11.09 3 6

11.09	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	5	2	-3	2	3	-1	$\to$	max
	5	6	4	2	-3	5	$=$	11
	5	5	7	0	3	5	$=$	10
	2	2	2	0	3	0	$=$	4
lin	0	0	0	4,5	1,33	1,2		11,8
int	1	1	0	0	0	0		7

Задача 11.10 3 2

11.10	x_1	x_2		
	1	2	$\to$	max
	1	1	$\leq$	7
	2	0	$\leq$	11
	-1	7	$\leq$	21
lin	3,5	3,5		10,5
int	4	3		10

Задача 11.11 2 8

11.11	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
	3	-3	-3	-4	1	-2	1	1	$\to$	max
	2	-1	-4	-1	3	-5	1	0	$=$	-1
	5	-1	6	-2	-1	4	0	1	$=$	2
lin	0	0	0	0	0	0,2	0	1,2		0,8
int	0	1	0	0	0	0	0	3		0
int	0	0	0	1	0	0	0	4		0

Задача 11.12 1 2

11.12	x_1	x_2		
	1	5	$\to$	max
	3	8	$\leq$	12
lin	0	1,5		7,5
int	1	1		6

2.7.2. Вершины и грани многовершинника группового уравнения

Представление элементов конечной группы

Сначала укажем представление элементов конечной группы неотрицательными целыми числами. Будет приведена формула, дающая номер элемента, а также формула, по номеру элемента восстанавливающая сам элемент.

Каждому элементу $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ из прямой суммы s циклических групп сопоставим номер

$$n(i_1, i_2, \dots, i_s), \quad 0 \le i_k \le d_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

где $d_1, d_2, \dots, d_s$ — диагональные элементы нормальной матрицы, отличные от 1. Имеем:

$$\begin{array}{ll}
\text{для } k=1 & n(i_1) = i_1, \\
\text{для } k=2 & n(i_1, i_2) = n(i_1)d_2 + i_2 = i_1 d_2 + i_2, \\
\text{для } k=3 & n(i_1, i_2, i_3) = n(i_1, i_2)d_3 + i_3 = (i_1 d_2 + i_2)d_3 + i_3 = \\
 & = i_1 d_2 d_3 + i_2 d_3 + i_3, \\
\dots & \\
\text{для } k=s & n(i_1, i_2, \dots, i_s) = n(i_1, i_2, \dots, i_{s-1})d_s + i_s = \sum\limits_{k=1}^{s-1} i_k \prod\limits_{l=k+1}^{s} d_l + i_s.
\end{array} \tag{1}$$

Рассматривая строки из (1) в обратном порядке (то есть $k = s, s-1, \dots, 1$) и вычисляя неотрицательные остатки от деления на d_k, по номеру $n(i_1, i_2, \dots, i_s)$ восстанавливаем сам элемент $(i_1, i_2, \dots, i_s)$, начиная с компоненты i_s.

Результаты счёта

Постановка задачи. Рассмотрим групповое уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h, \quad t \in \mathbf{Z}_+^n, \; g_{i_j} \in G_d, \; h \in G_d.$$

Найти неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \ge \pi_0,$$

определяющее грань многовершинника, проходящую через точку $(t_1', 0, \dots, 0), t_1' \ne 0$.

В программной реализации предусмотрены следующие возможности:
1) количество знаков после запятой при работе с рациональными числами;

2) параметр, принимающий значение 1 и 0, 1 — если решается вся выборка, 0 — если выборочно решается только одна задача;
3) количество задач / номер задачи.

В дальнейшем используются обозначения:
i) — номер задачи;
$|G|$ $(d = |G|)$ — порядок группы;
s — число циклических групп (число компонент вектора в представлении элемента конечной группы);
$d_1, d_2, \ldots, d_s$ — диагональные элементы нормальной матрицы, отличные от 1;

n — число слагаемых в групповом уравнении;
$n_1, n_2, \ldots, n_n$ — номера элементов g_{i_j} группового уравнения;
n_0 — номер свободного члена h группового уравнения.

Результаты счёта.
i) — номер задачи;
$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ — коэффициенты неравенства (соответствуют очерёдности коэффициентов группового уравнения);
π_0 — свободный член неравенства.

Таблица, иллюстрирующая результаты счёта

В таблице результатов счёта над горизонтальной чертой находятся условия задачи, а под горизонтальной чертой — результаты счёта. Для каждой задачи приводится неравенство, задающее грань многовершинника группового уравнения. Для выборочных задач, как в стандартной таблице, приводятся целочисленные точки из многовершинника, определяющие эту грань.

Таблица результатов счёта имеет вид

$$
\begin{array}{ccccccc}
i) & |G| & s & d_1 & d_2 & \ldots & d_s \\
n & n_1 & n_2 & \ldots & n_n & = & n_0 \\
\hline
 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_n & \geq & \pi_0 \\
v_1 & v_{1,1} & 0 & \ldots & 0 & & \\
v_2 & v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
v_n & v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,n} & &
\end{array}
$$

Заметим, что в стандартной таблице (см. 2.3.2) коэффициенты π_j нормированного неравенства являются рациональными, а в таблице результатов счёта коэффициенты π_j ненормированного неравенства — целые числа. Это позволяет сохранить целочисленность данных исходной задачи и для расширенной системы, что является важным для работы прямого метода.

$$\begin{array}{cccc} 1) & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & = & 1 \\ \hline & 1 & \geq & 1 \\ v_1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 2) & 3 & 1 & 3 & \\ 2 & 1 & 2 & = & 0 \\ \hline & 1 & 2 & \geq & 3 \\ v_1 & 3 & 0 & & \\ v_2 & 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 3) & 4 & 1 & 4 & & \\ 3 & 1 & 2 & 3 & = & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \geq & 1 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 1 & 2 & 0 & & \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 4) & 4 & 2 & 2 & 2 & \\ 3 & 1 & 2 & 3 & = & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \geq & 1 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 1 & 2 & 0 & & \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 5) & 5 & 1 & 5 & & & \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & = & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & \geq & 4 \\ v_1 & 4 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 0 & 2 & 0 & 0 & & \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 6) & 6 & 1 & 6 & & & & \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & = & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & \geq & 3 \\ v_1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & & \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 7) & 7 & 1 & 7 & & & & & \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & = & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \geq & 6 \\ v_1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 8) & 8 & 1 & 8 & & & & & & \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & = & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & \geq & 4 \\ v_1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & & \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & & \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} 9) & 9 & 1 & 9 & & & & & & & \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & = & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \geq & 8 \\ v_1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ v_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ v_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}$$

10)	10	1	10								
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$=$	9
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\geq$	9
v_1	9	0	0	0	0	0	0	0	0		
v_2	1	4	0	0	0	0	0	0	0		
v_3	0	0	3	0	0	0	0	0	0		
v_4	1	0	0	2	0	0	0	0	0		
v_5	0	0	0	1	1	0	0	0	0		
v_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0		
v_7	0	1	0	0	0	0	1	0	0		
v_8	1	0	0	0	0	0	0	1	0		
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1		

11)	22	1	22				
5	21	12	1	2	11	$=$	21
	1	0	1	0	1	$\geq$	1
v_1	1	0	0	0	0		
v_2	1	11	0	0	0		
v_3	0	9	1	0	0		
v_4	0	9	1	11	0		
v_5	0	0	0	5	1		

12)	50	1	50						
7	1	8	15	22	29	36	43	$=$	25
	1	8	15	22	4	11	18	$\geq$	25
v_1	25	0	0	0	0	0	0		
v_2	1	3	0	0	0	0	0		
v_3	2	1	1	0	0	0	0		
v_4	3	0	0	1	0	0	0		
v_5	1	0	0	0	6	0	0		
v_6	3	0	0	0	0	2	0		
v_7	3	0	0	0	1	0	1		

13)	100	1	100				
5	1	4	32	64	8	$=$	1
	1	0	0	0	0	$\geq$	1
v_1	1	0	0	0	0		
v_2	1	25	0	0	0		
v_3	1	25	25	0	0		
v_4	1	25	25	25	0		
v_5	1	25	25	25	25		

14)	100	2	2	50					
7	1	15	31	45	61	76	91	$=$	49
	1	15	31	45	11	26	16	$\geq$	49
v_1	49	0	0	0	0	0	0		
v_2	4	3	0	0	0	0	0		
v_3	3	1	1	0	0	0	0		
v_4	4	0	0	1	0	0	0		
v_5	5	0	0	0	4	0	0		
v_6	12	0	0	0	1	1	0		
v_7	2	1	0	0	0	0	2		

15)	128	1	128									
10	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	$=$	1
	1863	27	1647	195	1431	491	1215	787	999	1083	$\geq$	1863
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
v_2	0	69	0	0	0	0	0	0	0	0		
v_3	0	8	1	0	0	0	0	0	0	0		
v_4	0	4	0	9	0	0	0	0	0	0		
v_5	0	16	0	0	1	0	0	0	0	0		
v_6	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0		
v_7	0	24	0	0	0	0	1	0	0	0		
v_8	0	0	0	3	0	1	0	1	0	0		
v_9	0	32	0	0	0	0	0	0	1	0		
v_{10}	0	0	0	4	0	0	0	0	0	1		

16)	128	1	128									
10	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	$=$	49
	5	65	125	185	245	49	45	105	165	161	$\geq$	245
v_1	49	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
v_2	10	3	0	0	0	0	0	0	0	0		
v_3	11	1	1	0	0	0	0	0	0	0		
v_4	12	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
v_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
v_6	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0		
v_7	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0		
v_8	7	0	0	0	0	0	0	2	0	0		
v_9	7	0	0	0	0	0	1	0	1	0		
v_{10}	7	0	0	0	0	1	0	0	0	1		

2.7.3. Грани многовершинника двоичной задачи

Вычислительный эксперимент по нахождению граней многовершинника двоичной задачи о ранце с одним ограничением подтверждает теоретическую гипотезу о том, что строгие покрытия часто задают неравенства, определяющие грани многовершинника этой задачи. Приведённые задачи и ответы к ним расширяют тестовую базу [59, 70, 80, 84, 85].

Определения и теоремы

Рассмотрим линейное неравенство с двоичными переменными

$$\sum_{j\in N} a_j x_j \leq a_0,\ x_j = 0 \vee 1,\ j \in N = \{1,2,\ldots,n\}, \tag{1}$$

где $a_0 > 0,\ 0 < a_j \le a_0,\ j \in N,\ a_j \ge a_{j+1},\ j = 1,2,\ldots,n-1$. Заметим, что упорядоченность действительных коэффициентов a_j неравенства (1) задаёт упорядоченность множества N и всех его подмножеств.

Множество $S, S \supseteq N$, называется покрытием для (1), если

$$\sum_{j\in S} a_j > a_0. \tag{i}$$

Покрытие S для (1) называется минимальным, если

$$\sum_{j\in Q} a_j \le a_0 \tag{ii}$$

для всех собственных подмножеств Q множества S.

Множество $E(S) = S \cup S'$ называется расширением множества S до N, где $S' = \{j \in N \setminus S \mid a_j \ge a_{j_1}\}$ и $a_{j_1} = \max_{j\in S} a_j$.

Теорема 1. Двоичная точка x из $\mathbf{B}^n$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j\in N} a_j x_j \le a_0,\ x_j = 0 \vee 1,\ j \in N = \{1,2,\ldots,n\}, \tag{1}$$

если и только если она удовлетворяет системе канонических неравенств

$$\sum_{j\in E(S)} x_j \le |S| - 1, \quad S \in \Sigma, \tag{2}$$

где $N = \{1,2,\ldots,n\}$, $|S|$ — число элементов множества S, а Σ — множество всех минимальных покрытий для (1).

Заметим, что если заменить выражение "минимальное покрытие" словом "покрытие", то теорема 1 остаётся справедливой [80].

Если S и T — такие минимальные покрытия, что $|S| = |T|$ и $E(S) \subset E(T)$, то неравенство из (2), соответствующее S, является лишним. Это очевидно. Удаление из (2) таких лишних неравенств приводит к сужению семейства Σ до семейства

$$\bar{\Sigma} = \{S \in \Sigma \mid E(S) \not\subset E(T) \forall T \in \Sigma \setminus S, |T| = |S|\}.$$

Элементы семейства $\bar{\Sigma}$ называются строгими покрытиями. Ясно, что минимальное покрытие S является строгим, если и только если либо $E(S) = N$, либо множество вида $(S \setminus \{j_1\}) \cup \{i\}$ для произвольного i из $N \setminus E(S)$ не является покрытием. Последнее условие, как легко видеть, имеет место, если и только если множество $(S \setminus \{j_1\}) \cup \{i_1\}$ не является покрытием, где i_1 есть первый индекс множества $N \setminus E(S)$.

Следовательно, множество $S, S \subseteq N$, является строгим покрытием для (1), если и только если оно удовлетворяет условиям (i), (ii) и

$$\text{для } E(S) \neq N \quad \sum_{j \in (S \setminus \{j_1\}) \cup \{i_1\}} a_j \leq a_0, \tag{iii}$$

где j_1 и i_1 определяются как

$$a_{j_1} = \max_{j \in S} a_j, \quad a_{i_1} = \max_{i \in N \setminus E(S)} a_i.$$

Сужение семейства Σ всех минимальных покрытий до семейства $\bar{\Sigma} \subset \Sigma$ всех строгих покрытий дает систему строгих канонических неравенств

$$\sum_{j \ inE(S)} x_j \leq |S| - 1, \ S \in \bar{\Sigma}. \tag{2'}$$

Эта система, конечно, остаётся эквивалентной неравенству (1) в том смысле, что она имеет то же самое множество двоичных решений, что и (1), так как единственные неравенства, которые были удалены из (2), были лишними. Семейство $\bar{\Sigma}$ является минимальным, то есть эквивалентность нарушается, если любой элемент из $\bar{\Sigma}$ удаляется [83].

Эмпирически было замечено, что строгие канонические неравенства часто определяют грани выпуклой оболочки двоичных точек, удовлетворяющих (1), то есть грани многовершинника P задачи о ранце, где

$$P = conv\left\{x \mid \sum_{j \in N} a_j x_j \leq a_0, \, x \in \mathbf{B}^n, \, N = \{1, 2, \ldots, n\}\right\}.$$

Теорема 2 точно устанавливает, когда это имеет место. Её условия очень легки для проверки.

Приведём ещё одно определение. Пусть n является размерностью многовершинника P. Неравенство

$$\sum_{j \in M} x_j \leq k, \, M \subseteq N, \, |M| \geq 2, \, k \geq 1,$$

определяет $(n-1)$-мерную грань многовершинника P, если и только если полупространство, задаваемое этим неравенством, содержит P и гиперплоскость, задаваемая уравнением

$$\sum_{j \in M x_j} x_j = k,$$

содержит ровно n аффинно независимых точек из P.

Утверждение 1 даёт канонические грани, определяемые неравенствами вида $x_j \leq 1$, и дополняет теорему 2. Различные преобразования, связанные с двоичной задачей, случай, когда размерность d многовершинника P меньше N, и другие детали рассмотрены в [59, 80, 84].

Утверждение 1. Неравенство $x_j \leq 1$ определяет грань многовершинника P, если и только если $a_{j*} + a_j \leq a_0$, где $a_{j*} = \max_{i \in N \setminus \{j\}} a_i$.

Теорема 2. Неравенство

$$\sum_{j \in M} x_j \leq k,\ M \subseteq N,\ |M| \geq 2,\ k \geq 1,$$

определяет грань многовершинника P, если и только если множество M является расширением такого строгого покрытия S для (1), что $|S| = k+1$ и

$$\sum_{j \in T} a_j \leq a_0,$$

где

$$T = (S \setminus \{j_1, j_2\}) \cup \{1\},\ a_{j_1} = \max_{j \in S} a_j,\ a_{j_2} = \max_{j \in S \setminus \{j_1\}} a_j.$$

Аргументация, использованная в доказательстве достаточности теоремы 2, приводит к более общему результату, который формулируется в теореме 3. Теорема 3 характеризует более широкий класс граней многовершинника P, определяемых неравенствами, коэффициенты которых не обязаны быть двоичными. В этой теореме формулируется достаточное условие того, что неравенство с неотрицательными целочисленными коэффициентами определяет грань многовершинника P задачи о ранце. Эти неравенства могут быть получены с малыми вычислительными затратами. Класс неканонических граней, определяемых неравенствами с неотрицательными целочисленными коэффициентами (теорема 3), в качестве подкласса содержит канонические грани, определяемые неравенствами с двоичными коэффициентами (теорема 2).

Напомним, что множество N и все его подмножества, рассматриваемые здесь, являются упорядоченными.

Теорема 3. Неравенство с неотрицательными целочисленными коэффициентами

$$\sum_{j \in N} \pi_j x_j \leq \pi_0,$$

где π_0 — положительное целое число, выполняется для всех точек x из P, если множество N может быть разбито на $q+1$ подмножеств N_h, $h = 0, 1, \ldots, q$, $1 \leq q \leq \pi_0$, таких, что:

$\alpha)$ $\pi_j = h$ для всех $j \in N_h$, $h = 0, 1, \ldots, q$;

β) множество $M = \bigcup\limits_{h=1}^{q} N_h$ является расширением некоторого минимального покрытия S для (1) такого, что $S \subseteq N_1$ и $|S| = \pi_0 + 1$;

γ) $N_0 = N \setminus M$, $N_1 = M \setminus \bigcup\limits_{h=2}^{q} N_h$, $N_h = \{i \in N | \sum\limits_{j\in S_h} a_j \le a_i < \sum\limits_{j \in S_{h+1}} a_j\}$ $h = 2, \ldots, q$, где S_h — множество h первых элементов из S, $h = 2, \ldots, q+1$.

Если в дополнение к условиям α), β), γ) имеет место

$$\delta) \sum_{j \in S \setminus S_{h+1}} a_j + a_i \le a_0 \text{ для всех } i \in N_h,\ h = 0, 1, \ldots, q,$$

то рассматриваемое неравенство определяет грань многовершинника P.

Перебор всех подмножеств конечного множества. Эта задача решается процедурой нахождения всех k-элементных подмножеств множества

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}\ (1 \le k \le n).$$

Перебор можно начать с множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда получим лексикографически возрастающую последовательность векторов. Если же перебор начать с множества $\{n-(k-1), n-(k-1)+1, \ldots, n\}$, то получим лексикографически убывающую последовательность векторов.

Результаты счёта

Результаты вычислительного эксперимента по нахождению неравенств, определяющих грани многовершинника двоичной задачи о ранце с одним ограничением, представлены в виде пяти таблиц и пояснений к ним. Счёт проводился по двум различным программам, написанным на языке программирования Delphi, на различных персональных компьютерах. При решении одной и той же задачи получался один и тот же результат, а время решения задачи зависело от программы и компьютера. В табл. 5 приведено наименьшее время.

Пользуясь определением строгого покрытия, можно показать, что каждое покрытие в столбце S в табл. 1–4 является строгим. В столбце S находятся все строгие покрытия для исходного неравенства (1).

Для каждой из табл. 1–4 можно выписать систему канонических неравенств, эквивалентную исходному неравенству. Условия теоремы 3 служат для заполнения столбца "Да/Нет,...". Для удобства строки табл. 1–4 занумерованы.

В табл. 1–4 используются обозначения:

S — множество всех строгих покрытий для исходного неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a_0,\ x_j = 0 \vee 1,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

Да — положительный ответ на вопрос "задаёт ли строгое покрытие в строке i неравенство, определяющее грань?";
Нет — отрицательный ответ на последний вопрос;
… — указывается условие теоремы 3, которое не выполняется.

Таблица 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_j	$=0\vee 1$	$j\in N=\{1,2,\dots,n\}$
		8	8	7	5	2	1	1	$\leq$	11	
	S										Да/Нет,…
1	3,4	1	1	1	1	0	0	0	$\leq$	1	Да
2	1, 5, 6, 7	1	1	0	0	1	1	1	$\leq$	3	Да
3	2, 5, 6, 7	1	1	0	0	1	1	1	$\leq$	3	Да

Из утверждения 1 следует, что неравенствами вида $x_j \leq 1$, определяющими грани многовершинника P, являются только неравенства $x_5 \leq 1$, $x_6 \leq 1$, $x_7 \leq 1$. Это легко проверить, так как $2+8<11$, $1+8<11$, $1+8<11$.

Таблица 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_j	$=0\vee 1$	$j\in N=\{1,2,\dots,n\}$
		5	5	4	3	2	2	1	$\leq$	6	
	S										Да/Нет,…
1	1, 5	1	1	0	0	1	0	0	$\leq$	1	Да
2	1, 6	1	1	0	0	0	1	0	$\leq$	1	Да
3	2, 5	1	1	0	0	1	0	0	$\leq$	1	Да
4	2, 6	1	1	0	0	0	1	0	$\leq$	1	Да
5	3, 4	1	1	1	1	0	0	0	$\leq$	1	Да
6	3, 5, 7	1	1	1	0	1	0	1	$\leq$	2	Да
7	3, 6, 7	1	1	1	0	0	1	1	$\leq$	2	Да
8	4, 5, 6	2	2	1	1	1	1	0	$\leq$	2	Да

Строгие покрытия, находящиеся в строках 2 и 3 табл. 1, задают одно и то же каноническое неравенство, определяющее грань.

Двоичные представления целых чисел из интервалов $[0,23]$, $[32,38]$, $[64,70]$ дают все двоичные решения исходного неравенства (доказывается частичным перебором). Используя это, можно непосредственно доказать, что исходное неравенство эквивалентно системе из двух неравенств, находящихся в строках 1 и 2 табл. 1. Конечно, эта эквивалентность следует из вышеизложенных фактов.

Строгие покрытия $\{1,5\}$ и $\{2,5\}$ (строки 1 и 3 табл. 2) задают одно и то же каноническое неравенство, определяющее грань. Аналогично, строгие покрытия $\{1,6\}$ и $\{2,6\}$ (строки 2 и 4 табл. 2) задают одно и то же каноническое неравенство, определяющее грань.

Из утверждения 1 следует, что неравенство $x_7 \leq 1$ определяет грань многовершинника P.

Из теоремы 2 следует, что единственными каноническими неравенствами, определяющими грани многовершинника P, являются неравенства, находящиеся в строках 1, 2, 5, 6, 7 табл. 2.

Каноническое неравенство

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 2,$$

задаваемое строгим покрытием $\{4,5,6\}$ (строка 8 табл. 2), принадлежит системе $(2')$. Однако оно не определяет грань многовершинника P, так как

$$T = (\{4,5,6\} \setminus \{4,5\}) \cup \{1\} = \{1,6\}$$

и $a_1 + a_6 = 5 + 2 > 6$ (теорема 2). Утверждение 1 и теорема 2 дают полную характеризацию класса граней многовершинника P, определяемых неравенствами с коэффициентами 0 или 1 и с правой частью $k \geq 1$. Однако этот класс не является исчерпывающим, то есть многовершинник P может иметь грани, определяемые неравенствами, которые имеют коэффициенты, отличные от 0 или 1. Таковым, например, является неравенство в строке 8 табл. 2 (теорема 3).

Пусть P есть выпуклая оболочка двоичных точек, удовлетворяющих неравенству

$$9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 1x_9 \leq 10 \text{ (табл. 3).}$$

Множество $S = \{4,5,6,8\}$ (строка 22 табл. 3) является:
покрытием $(a_4 + a_5 + a_6 + a_8 = 4 + 3 + 3 + 2 > a_0 = 10)$;
минимальным покрытием $((4+3+3+2) - 2 \leq 10)$;
строгим покрытием $(a_5 + a_6 + a_8 + a_7 = 3 + 3 + 2 + 2 \leq a_0 = 10)$.

Расширение покрытия S есть $E(S) = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $N_0 = N \setminus E(S) = \{7,9\}$, $N_2 = \{1,2,\}$ для $(a_4 + a_5 \leq a_i a_4 + a_5 + a_6,\ i = 1,2,$ но $a_3 < a_4 + a_5)$, $N_h = \emptyset$ для $h > 2$, $N_1 = E(S) \setminus N_2 = \{3,4,5,6,8\}$.

Определяем коэффициенты: $\pi_j = 0$ для $j \in N_0$, $\pi_j = 1$ для $j \in N_1$, $\pi_j = 2$ для $j \in N_2$, а $\pi_0 = |S| - 1 = 4 - 1 = 3$. Следовательно, справедливым неравенством для многовершинника P, задаваемым строгим покрытием S,

Таблица 3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_j	$=0\vee 1$	$j\in N=\{1,2,\ldots,n\}$
		9	7	6	4	3	3	2	2	1	$\leq$	10	
	S												Да/Нет, ...
1	1,5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	$\leq$	1	Да
2	1,6	1	0	0	0	0	1	0	0	0	$\leq$	1	Да
3	1,7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	$\leq$	1	Да
4	1,8	1	0	0	0	0	0	0	1	0	$\leq$	1	Да
5	2,3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	$\leq$	1	Да
6	2,4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	$\leq$	1	Да
7	2,5,9	1	1	0	0	1	0	0	0	1	$\leq$	2	Да
8	2,6,9	1	1	0	0	0	1	0	0	1	$\leq$	2	Да
9	2,7,8	2	1	0	0	0	0	1	1	0	$\leq$	2	Да
10	3,4,5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	$\leq$	2	Нет, $3+9\not\leq 101$
11	3,4,6	1	1	1	1	0	1	0	0	0	$\leq$	2	Нет, $3+9\not\leq 102$
12	3,4,7	1	1	1	1	0	0	1	0	0	$\leq$	2	Нет, $3+9\not\leq 103$
13	3,4,8	1	1	1	1	0	0	0	1	0	$\leq$	2	Нет, $3+9\not\leq 104$
14	3,4,9	1	1	1	1	0	0	0	0	1	$\leq$	2	Да
15	3,5,6	2	1	1	0	1	1	0	0	0	$\leq$	2	Да
16	3,5,7	2	1	1	0	1	0	1	0	0	$\leq$	2	Да
17	3,5,8	2	1	1	0	1	0	0	1	0	$\leq$	2	Да
18	3,6,7	2	1	1	0	0	1	1	0	0	$\leq$	2	Да
19	3,6,8	2	1	1	0	0	1	0	1	0	$\leq$	2	Да
20	3,7,8,9	2	1	1	0	0	0	1	1	1	$\leq$	3	Да
21	4,5,6,7	2	2	1	1	1	1	1	0	0	$\leq$	3	Нет, $3+2+6\not\leq 105$
22	4,5,6,8	2	2	1	1	1	1	0	1	0	$\leq$	3	Нет, $3+2+6\not\leq 106$
23	4,5,6,9	2	2	1	1	1	1	0	0	1	$\leq$	3	Да
24	4,5,7,8	3	2	1	1	1	0	1	1	0	$\leq$	3	Да
25	4,6,7,8	3	2	1	1	0	1	1	1	0	$\leq$	3	Да
26	5,6,7,8,9	3	2	2	1	1	1	1	1	1	$\leq$	4	Да

является неравенство $2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_8\leq 3$. Это неравенство не определяет грань многовершинника P, так как

$$a_3+a_6+a_8=6+3+2\not\leq a_0=10 \quad (h=1).$$

Множество $S=\{5,6,7,8,9\}$ является строгим покрытием (строка 26 табл. 3), $E(S)=N$, $N_0=\emptyset$, $N_2=\{2,3\}$, $N_3=\{1\}$, $N_1=\{4,5,6,7,8,9\}$. Следовательно, справедливым неравенством для многовершинника P, задаваемым строгим покрытием S, является неравенство

$$3x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9\leq 4.$$

Это неравенство, как легко проверить, определяет грань многовершинника P.

Таблица 4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_j	$=0\vee 1$	$j\in N$
		9	9	8	8	7	6	5	3	2	1	$\le$	45	
	S													Да/Нет, ...
1	1, 2, 3, 4, 5, 6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	$\le$	5	Да
2	1, 2, 3, 4, 5, 7	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	$\le$	5	Да
3	1, 2, 3, 4, 5, 8, 9	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	$\le$	6	Да
4	1, 2, 3, 4, 6, 7, 9	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	$\le$	6	Да
5	1, 2, 3, 4, 6, 7, 10	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	$\le$	6	Да
6	1, 2, 3, 5, 6, 7, 9	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	$\le$	6	Да
7	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	$\le$	6	Да
8	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	$\le$	6	Да
9	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	$\le$	6	Да
10	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	$\le$	7	Да
11	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	$\le$	7	Да
12	2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	$\le$	7	Да

Строгие покрытия $\{1,3,4,5,6,7,8\}$ и $\{1,3,4,5,6,7,8\}$ (строки 8 и 9 табл. 4) задают одно и то же каноническое неравенство, определяющее грань. Аналогично, строгие покрытия $\{1,3,4,5,6,7,9,10\}$ и $\{2,3,4,5,6,7,9,10\}$ (строки 11 и 12 табл. 4) задают одно и то же каноническое неравенство, определяющее грань.

В табл. 5 используются обозначения:
i) — номер задачи; n — число слагаемых в левой части неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a_0,\ x_j = 0\vee 1,\ j=1,2,\ldots,n;$$

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ и a_0 — коэффициенты левой части и свободный член неравенства;
s — число всех строгих покрытий для неравенства;
f — число строгих покрытий, каждое из которых задаёт неравенство, определяющее грань многовершинника P;
f/s — отношение двух чисел;
t — время счёта в секундах на персональном компьютере. В табл. 5 для 85 задач с различными условиями приведены результаты работы двух программ.

Таблица 5

$i)$	n	$a_1, a_2, \ldots, a_n \le a_0 \, \vert sff/st$
1)	7	8 8 7 5 2 1 1$\le$ 11 |3 3 1 0
2)	7	5 5 4 3 2 2 1$\le$ 6 |8 8 1 0
3)	9	9 7 6 4 3 3 2 2 1$\le$ 10 |26 20 0, 769 0
4)	9	3 2 2 1 1 1 1 1 1$\le$ 4 |69 69 1 0
5)	9	7 6 4 3 3 2 1 1 1$\le$ 9 |38 37 0, 974 0
	10	9 9 8 8 7 6 5 3 2 1 $\le$
6)		12 |11 11 1 0 7) 30 |44 44 1 0 8) 45 |12 12 1 0 9) 52 |4 4 1 0 10) 57 |1 1 1 0
	15	9 8 7 7 7 6 5 4 4 2 1 1 1 1 1 $\le$
11)		12 |222 222 1 11 12) 30 |1275 1275 1 11 13) 40 |906 906 1 8 14) 55 |74 74 1 8 15) 63 |1 1 1 5
	20	9 9 9 8 7 7 6 5 5 5 5 4 4 4 4 4 4 4 3 1 $\le$
16)		12 |240 205 0, 854 17 17) 45 |33918 33918 1 25 18) 74 |12069 12069 1 17 19) 96 |79 79 1 57 20) 106 |1 1 1 169
	25	10 9 9 9 8 8 8 7 7 7 7 7 7 6 5 5 4 4 4 4 3 2 1 1 1 $\le$
21)		12 |394 394 1 357 22) 40 |135457 135457 1 395 23) 70 |845633 845633 1 481 24) 95 |271326 271326 1 361 25) 142 |1 1 1 272
	10	91 89 85 60 55 46 44 41 33 29 $\le$
26)		114 |10 9 0, 9 0 27) 191 |36 35 0, 972 0 28) 286 |49 49 1 0 29) 400 |34 34 1 0 30) 572 |1 1 1 0
	15	95 87 82 75 72 71 50 45 41 34 31 21 21 8 2 $\le$
31)		147 |88 84 0, 955 8 32) 245 |319 318 0, 997 8 33) 367 |659 659 1 8 34) 600 |86 86 1 8 35) 734 |1 1 1 8
	20	99 98 92 90 87 86 86 84 79 70 58 54 45 43 41 39 35 19 12 4 $\le$
36)		244 |531 524 0, 987 13 37) 407 |3944 3944 1 13 38) 610 |11271 11271 1 35 39) 850 |4625 4625 1 32 40) 1220 |1 1 1 15
	25	100 97 93 92 89 81 80 74 74 71 64 57 54 51 41 38 34 32 31 24 21 16 13 8 4 $\le$
41)		267 |10597 10523 0, 993 743 42) 500 |192817 192817 1 334 43) 660 |379741 379741 1 509 44) 950 |95416 95416 1 318 45) 1338 |1 1 1 266

	10	10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 ≤
46)		11 |15 14 0, 933 0 47) 20 |40 40 1 0 48) 30 |56 56 1 0 49) 40 |27 27 1 0 50) 54 |1 1 1 0
	15	15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 ≤
51)		25 |138 133 0, 964 10 52) 45 |670 670 1 0 53) 60 |961 961 1 0 54) 85 |405 405 1 0 55) 119 |1 1 1 0
	20	20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 ≤
56)		50 |2403 2389 0, 994 147 57) 85 |14995 14995 1 9 58) 105 |20288 20288 1 10 59) 160 |2892 2892 1 7 60) 209 |1 1 1 6
	25	25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 ≤
61)		50 |3483 3397 0, 975 256 62) 110 |167266 167266 1 247 63) 155 |454432 454432 1 307 64) 240 |63337 63337 1 222 65) 324 |1 1 1 208
	10	965 894 564 521 515 466 403 192 139 ≤
66)		1000 |12 11 0, 917 0 67) 1500 34 28 0, 824 0 68) 2330 |62 58 0, 935 0 69) 3500 |50 50 1 0 70) 5061 |1 1 1 0
	15	982 891 836 784 756 525 444 433 409 331 158 101 41 35 10 ≤
71)		1000 |48 31 0, 646 0 72) 2500 |255 255 1 0 73) 3522 |402 402 1 0 74) 5000 |131 131 1 0 75) 7065 |1 1 1 0
	20	947 943 927 919 862 701 695 608 579 536 529 469 410 315 273 237 218 178 112 65 ≤
76)		1000 |75 32 0, 427 7 77) 3500 |5179 5179 1 7 78) 5260 |9492 9492 1 8 79) 8500 |1165 1165 1 6 80) 10522 1 1 1 6
	25	992 979 972 895 894 642 640 602 594 589 571 544 513 474 410 377 201 180 149 100 86 63 59 34 30≤

81)		2000 |4639 4526 0, 976 258 82) 4000 |99918 99918 1 248 83) 5260 |220470 220470 1 278 84) 8500 |50109 50109 1 240 85) 11589 |1 1 1 229

Пять первых задач — это задачи, которые можно проверить вручную. Число строгих покрытий в этих задачах сравнительно небольшое (например, табл. 1–3).

В следующих 20 задачах для $n = 10, 15, 20, 25$ коэффициенты левой части неравенства выбирались из интервала $[1, 10]$ с помощью датчика случайных чисел, а свободный член неравенства a_0 принимал пять значений, которые как-то распределялись в интервале от маленького положительного числа до суммы всех коэффициентов.

Аналогично, в задачах 26–45 и 66–85 коэффициенты левой части неравенства выбирались из интервалов $[1, 100]$ и $[1, 1000]$.

В задачах 46–65 в качестве коэффициентов левой части неравенства выбирался отрезок натурального ряда.

Было замечено, например, что если $a_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j - 1$, то получаем только одно строгое покрытие, состоящее из всех индексов коэффициентов. Но этот результат закономерен и понятен.

Также было замечено, что с ростом a_0 увеличивается число строгих покрытий, но как только a_0 становится больше половины суммы коэффициентов, число строгих покрытий уменьшается.

Как и предполагалось, с увеличением значений коэффициентов время работы программ существенно не меняется.

2.8. Задачи

2.8.1. Формулировка задач

Задача 2.1.1. Указать простое условие, выполнение которого гарантирует, что допустимое множество задачи (1) является непустым.

Задача 2.1.2. Вывести и записать в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости уравнение прямой, проходящей через две заданные различные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) $(((x_1 \neq x_2) \wedge (y_1 \neq y_2)) = true)$.

Задача 2.1.3. Графическим методом решить задачу

x_1	x_2		
-1	-2	$\to$	min
1	1	$\le$	7
2	0	$\le$	11
0	2	$\le$	7,

$(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}_+^2$.

Задача 2.2.1. Свести задачу

$$\min\{cx \mid Ax \ge b,\ x \ge 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$

к задаче

$$\max\{cx \mid Ax = b,\ x \ge 0,\ x \in \mathbf{Z}^{m+n}\}.$$

Задача 2.2.2. Доказать, что многовершинник группового уравнения является либо пустым, либо полномерным (его размерность равна n').

Задача 2.2.3. Привести пример несовместного группового уравнения.

Задача 2.3.1. Доказать, что прямая сумма двух конечных циклических групп, порядки k и l которых взаимно простые, является циклической группой порядка kl.

Задача 2.3.2. Привести пример, когда прямая сумма двух конечных циклических групп не является циклической.

Задача 2.3.3. Указать последовательность элементов, в которой вычисляются значения функции $\psi_s(g)$ в примерах 1, 2, 3. В каком случае эта последовательность определяется однозначно?

Задача 2.3.4. Является ли субаддитивной функция $\psi_s(g)$, определённая в 2.3.1?

Задача 2.3.5. Изобразить в прямоугольной системе координат Ot_1t_2 на плоскости многовершинник группового уравнения из табл. 1 (2.5.2).

Задача 2.3.6. Использовав алгоритм заполнения стандартной таблицы, построить алгоритм для нахождения всех вершин и всех $(n-1)$-мерных граней многовершинника группового уравнения. Сравнить ваши результаты счёта с результатами из работы [96].

Задача 2.3.7. Найти с помощью алгоритма заполнения стандартной таблицы все вершины и все грани многовершинника группового уравнения.

$$\text{a) } g_1t_1 = g_1, t_1 \in \mathbf{Z}_+^1,\ g_1 \in G_2,$$

$$\text{b) } g_1t_1 + g_2t_2 = g_0, t \in \mathbf{Z}_+^2,\ t \ne 0,\ g_0 \in G_3,\ g_1 \in G_3,\ g_2 \in G_3,$$

$$\text{c) } g_1t_1 + g_2t_2 + g_3t_3 + g_4t_4 + g_5t_5 = g_3,\ t \in \mathbf{Z}_+^5,\ g_{i_j} \in G_6,\ g_3 \in G_6.$$

Задача 2.4.1. Использовав теорему Минковского — Фаркаша, доказать, что любое решение системы линейных неравенств

x_1	x_2		
0	-1	$\geq$	-1
-1	-3	$\geq$	-4
1	0	$\geq$	0
0	1	$\geq$	0

удовлетворяет каждому из неравенств

x_1	x_2		
-3	-8	$\geq$	-12
-1	-5	$\geq$	-6
-1	-1	$\geq$	$-5.$

Задача 2.4.2. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ P & I_{m-k} \end{pmatrix} (k < m,\ k \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}).$$

Задача 2.4.3. Построить алгоритм, с помощью которого можно установить совместность или несовместность заданной системы линейных ограничений.

Задача 2.5.1. Доказать, что точка $(0,0,2)$ является оптимальным решением линейной и целочисленной задач 11.04 из 2.7.1.

Задача 2.5.2. Проверить все вычисления из 2.5.2 либо строго следуя указанному алгоритму, либо заменяя отдельные части вычислений другими вычислениями, которые, на ваш взгляд, упрощают вычислительную схему.

Задача 2.5.3. На итерации 1 (2.5.2) в качестве улучшающего направления выбрать направление u_2 и до конца довести вычисления.

Задача 2.5.4. В качестве контроля своих действий выбрать геометрическую интерпретацию прямого метода, рассмотренную в 2.1.1 и 2.1.2.

Задача 2.5.5. Рассмотрим целочисленную линейную задачу оптимизации

x_1	x_2	x_3		
10	14	21	$\to$	min
8	11	9	$\geq$	12
2	2	7	$\geq$	$14,$

$x \geq 0$, $x \in \mathbf{Z}^3$.

а) Решить задачу графическим методом.

b) В системе ограничений обнаружить и удалить избыточное неравенство, а затем найти оптимальное решение полученной задачи прямым методом.

Задача 2.6.1. Решить целочисленные линейные задачи 11.01 и 11.11 из 2.7.1 прямым методом для системы уравнений.

2.8.2. Решение избранных задач

Задача 2.1.1. Например, $b \le 0$.

Задача 2.1.2. Рассмотрим уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Считая k и b неизвестными, из системы уравнений $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$ находим

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - kx_1.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение, получаем

$$y = kx + y_1 - kx_1, \quad y - y_1 = k(x - x_1), \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Последнее уравнение используется в 2.1.2 для построения неравенства $-x_1 - 3x_2 \ge -4$, определяемого допустимым множеством и точками $(1,1)$, $(4,0)$.

Задача 2.1.3. Точка (4, 3) является оптимальным решением с оптимальным значением -10.

Задача 2.2.3. Например, $g_2 t_1 = g_3$, $t_1 \in \mathbf{Z}^1_+$, $g_2 \in G_6$, $g_3 \in G_6$.

Задача 2.4.1. Например, $u = (0,3,0,1)$ и $u = (2,1,0,0)$.

Задача 2.4.2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ -P & I_{m-k} \end{pmatrix} (k < m,\ k \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N})$.

Глава 3.

Процедуры разбиения

Для смешанной задачи оптимизации доказываются теорема о разбиении этой задачи и две леммы. Эти утверждения составляют теоретическую основу для вычислительных процедур разбиения.

3.1. Теорема о разбиении и две леммы

Рассмотрим смешанную задачу оптимизации

$$\max\{cx + f(y) \mid Ax + F(y) \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^p,\ y \in S \subseteq \mathbf{R}^q,\ p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N}\}. \quad (1)$$

Здесь $m \times p$-матрица A, m-столбец b и p-строка c состоят из действительных чисел, а действительнозначная функция $f(y)$, которая может быть нелинейной, и действительнозначные компоненты m-столбца $F(y)$, которые также могут быть нелинейными, определены на произвольном множестве S [87, 59, 77].

В качестве S могут выступать множества: $\mathbf{B}^q$, $\mathbf{Z}^q$, $\mathbf{Z}^q_+$, $\mathbf{R}^q$, $\mathbf{R}^q_+$ и другие. Простейшим примером задачи (1) является смешанная целочисленная линейная задача оптимизации, которая получается, если в (1) положить:

$$f(y) = dy, \quad F(y) = By, \quad y \in \mathbf{Z}^q_+.$$

В дальнейшем будем записывать вектор-столбцы в строку без знака транспонирования "T".

Определим следующие множества:

$$\text{в } \mathbf{R}^m \text{ конус } C = \{u \mid uA \geq 0,\ u \geq 0\};$$
$$\text{в } \mathbf{R}^m \text{ многогранник } P = \{u \mid uA \geq c,\ u \geq 0\};$$
$$\text{в } \mathbf{R}^{m+1} \text{ конус } C_0 = \{(u_0, u) \mid -u_0 c + uA \geq 0,\ (u_0, u) \geq 0\}.$$

Введем действительнозначную переменную x_0 и сформулируем новую смешанную задачу оптимизации

$$\begin{gathered}\max\{x_0 \mid x_0 - cx - f(y) \le 0,\ Ax + F(y) \le b,\ x \ge 0,\\ x \in \mathbf{R}^p,\ y \in S \subseteq \mathbf{R}^q,\ p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N}\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Задача (1) и задача (2) эквивалентны в следующем смысле.

Вектор (x_0^*, x^*, y^*) является оптимальным решением задачи (2) тогда и только тогда, когда $x_0^* = cx^* + f(y^*)$ и вектор (x^*, y^*) есть оптимальное решение задачи (1).

Достаточность. Если допустимое решение (x_0^*, x^*, y^*) задачи (2) не является оптимальным, то существует допустимое решение (x_0', x', y') задачи (2) с бо́льшим значением x_0' целевой функции, то есть

$$cx' + f(y') \ge x_0' > x_0^* = cx^* + f(y^*),$$

а это приводит к противоречию с тем, что (x^*, y^*) есть оптимальное решение задачи (1).

Необходимость. Если $x_0^* < cx^* + f(y^*)$, то существует допустимое решение задачи (2) с бо́льшим значением целевой функции, например, $(x_0^* + \frac{1}{2}(cx^* + f(y^*) - x_0^*), x^*, y^*)$, а это приводит к противоречию с тем, что вектор (x_0^*, x^*, y^*) является оптимальным решением задачи (2).

Если же допустимое решение (x^*, y^*) задачи (1) не является оптимальным, то существует допустимое решение (x', y') задачи (1) с бо́льшим значением целевой функции, то есть

$$x_0' = cx' + f(y') > cx^* + f(y^*) = x_0^*,$$

а это снова приводит к противоречию с тем, что вектор (x_0^*, x^*, y^*) является оптимальным решением задачи (2). Эквивалентность задач (1) и (2) доказана.

Каждой точке $(u_0, u) \in C_0$ сопоставим область в $\mathbf{R}^{q+1}$, определяемую как

$$\{(x_0, y) \mid u_0 x_0 + uF(y) - u_0 f(y) \le ub,\ y \in S\}.$$

Через G обозначим множество из $\mathbf{R}^{q+1}$, определённое как

$$G = \bigcap_{(u_0,u)\in C_0} \{(x_0, y) \mid u_0 x_0 + uF(y) - u_0 f(y) \le ub, y \in S\}.$$

Множество G может быть пустым.

Поскольку C_0 — это заострённый выпуклый многогранный конус, то он является выпуклой оболочкой конечного числа всех своих крайних лучей. Из этого следует существование H точек (u_0^h, u^h), $h = 1, 2, \ldots, H$, таких, что

$$G = \bigcap_{h=1}^{H} \{(x_0, y) \mid u_0^h x_0 + u^h F(y) - u_0^h f(y) \le u^h b,\ y \in S\},\ H \in \mathbf{N}. \qquad (3)$$

Теорема о разбиении смешанной задачи оптимизации.

1) Задача (1) недопустима тогда и только тогда, когда задача оптимизации

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G\} \qquad (4)$$

недопустима, то есть тогда и только тогда, когда множество G пусто.

2) Задача (1) допустима, но не имеет оптимального решения тогда и только тогда, когда задача (4) допустима, но не имеет оптимального решения.

3) Если (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (1) и $x_0^* = cx^* + f(y^*)$, то (x_0^*, y^*) — оптимальное решение задачи (4) и x^* — оптимальное решение линейной задачи оптимизации

$$\max\{cx \mid Ax \le b - F(y^*),\ x \ge 0\}. \qquad (5)$$

4) Если (x_0^*, y^*) — оптимальное решение задачи (4), то задача (5) допустима и оптимальное значение целевой функции этой задачи равно $x_0^* - f(y^*)$. Если x^* — оптимальное решение задачи (5), то (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (1) с оптимальным значением x_0^* целевой функции.

Доказательство. Сначала сформулируем теорему Минковского — Фаркаша, а затем дадим формулировку этой же теоремы в используемых обозначениях. Заметим, что теорема Минковского — Фаркаша имеет несколько эквивалентных формулировок [24]. Поэтому каждый раз выражение "Теорема Минковского — Фаркаша" требует уточнения: какая именно формулировка имеется в виду.

Теорема Минковского — Фаркаша о совместности системы линейных неравенств (см. [77]). Система линейных неравенств

$$Ax \le b,\ x \ge 0$$

совместна тогда и только тогда, когда для любой точки u из конуса

$$C = \{u \mid uA \ge 0,\ u \ge 0\}$$

выполняется неравенство

$$ub \ge 0.$$

Это аналог теоремы Кронекера — Капелли о совместности системы линейных уравнений.

Теорема Минковского — Фаркаша. Пусть x'_0 — произвольное число и y' — произвольная точка из множества S.

Тогда система линейных неравенств

$$-cx \le -x'_0 + f(y'),$$

$$Ax \le b - F(y'),$$

$$x \ge 0$$

совместна тогда и только тогда, когда для любой точки (u_0, u) из конуса $C_0 = \{(u_0, u) \mid -u_0 c + uA \ge 0, (u_0, u) \ge 0\}$ выполняется неравенство

$$u_0(-x'_0 + f(y')) + u(b - F(y')) \ge 0.$$

Последнее неравенство в приведённой формулировке теоремы Минковского — Фаркаша и неравенство, определяющее множество G, являются эквивалентными и оба выполняются для любой точки $(u_0, u) \in C_0$.

Из теоремы Минковского — Фаркаша следует, что система линейных неравенств

$$-cx \le -x'_0 + f(y'),$$

$$Ax \le b - F(y'),$$

$$x \ge 0$$

совместна тогда и только тогда, когда

$$u_0 x'_0 + uF(y') - u_0 f(y') \le ub$$

для любой точки $(u_0, u) \in C_0$.

Следовательно, если вектор (x'_0, x', y') является допустимым решением задачи (2), то (x'_0, y') — допустимое решение задачи (4). Наоборот, если вектор (x'_0, y') является допустимым решением задачи (4), то существует вектор $x' \in \mathbf{R}^p_+$ такой, что (x'_0, x', y') — допустимое решение задачи (2).

Из этого следует доказательство утверждений 1) и 2) теоремы, так как задачи (1) и (2) эквивалентны.

Более того, отсюда также следует, что если вектор (x^*, y^*) является оптимальным решением задачи (1) и $x^*_0 = cx^* + f(y^*)$, то (x^*_0, y^*) — оптимальное решение задачи (4).

Наконец, если вектор (x^*_0, y^*) является оптимальным решением задачи (4), то существует вектор $x^* \in \mathbf{R}^p_+$ такой, что (x^*_0, x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (2). Тогда $x^*_0 = cx^* + f(y^*)$ и поскольку $cx + f(y^*) \le x^*_0$ для любого допустимого решения (x, y^*) задачи (1) (y^* зафиксировано), отсюда следует, что x^* — оптимальное решение задачи (5). Теорема доказана.

Теорема о разбиении смешанной задачи оптимизации не требует каких-либо дополнительных условий на функцию $f(y)$, вектор-функцию $F(y)$ и на множество S, на котором определены $f(y)$ и $F(y)$.

На практике, однако, $f(y)$, $F(y)$ и S должны иметь такие свойства, что задача (4) может быть решена существующими методами. Другими словами, нужно уметь обнаружить, что задача (4) недопустима или допустима, без нахождения оптимального решения или найти её оптимальное решение, если такое существует.

Если эти условия выполняются, то теорема о разбиении утверждает, что задача (1) может быть решена двухшаговой процедурой. Первый шаг включает решение задачи (4), приводя к заключению, что задача (1) недопустима или что она допустима, без нахождения оптимального решения или к оптимальному значению целевой функции задачи (1) и к оптимальному вектору y^* из S. В последнем случае требуется второй шаг для вычисления оптимального вектора $x^* \in \mathbf{R}_+^p$, который находится решением линейной задачи оптимизации (5).

Решение задачи (4) может быть рассмотрено более детально. Даже если процедура пригодна для решения задач такого типа, прямое решение задачи (4) требует предварительного вычисления системы неравенств, определяющей множество G. Согласно (3), это может быть сделано нахождением всех крайних направления конуса C_0, но это практически невозможно из-за громоздких вычислений, требующих значительных усилий.

Однако поскольку нас интересует оптимальное решение задачи (4) больше, чем само множество G, будет достаточно вычислить только те ограничения множества G, которые определяют оптимальное решение. Далее будет получена эффективная процедура для вычисления таких ограничений.

Далее предполагаем:

— множество S является замкнутым и ограниченным;

— $f(y)$ и компоненты столбца $F(y)$ — непрерывные функции на некотором множестве $\overline{S} \subseteq \mathbf{R}^q$, содержащем S. Эти предположения выполняются в большинстве приложений и исключают усложнения, которые вызываются тем, что допустимая задача не имеет оптимального решения.

Может случиться, что множество S неограниченно в формулировке задачи (1). В этом случае можно добавить настолько большие границы для изменения компонент столбца y, что либо существующее оптимальное решение заведомо находится в пределах добавленных границ, либо значения компонент вне этих границ не имеют реального смысла.

Лемма 1. Если задача (4) допустима и множество S является замкнутым и ограниченным, то переменная x_0 не имеет верхней границы на множестве G тогда и только тогда, когда многогранник P пуст.

Достаточность. По предположению существует хотя бы одна точка $(x'_0, y') \in G$. Если многогранник P пуст, то $u_0 = 0$ для любой точки $(u_0, u) \in C_0$. Следовательно, множество G имеет вид

$$G = \bigcap_{u \in C} \{(x_0, y) \mid uF(y) \leq ub,\ y \in S\}.$$

Отсюда следует, что $(x_0, y') \in G$ для любого значения x_0.

Необходимость. Если многогранник P не пуст, то существует по крайней мере одна точка $(1, u') \in C_0$. Следовательно, для любого допустимого решения (x_0, y) задачи (4), учитывая условия, наложенные на $f(y)$, $F(y)$ и S, имеем

$$x_0 \leq \max_{y \in S}\{u'b - u'F(y) + f(y)\} < +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть Q — некоторое подмножество из конуса C_0, $Q \neq \emptyset$, $Q \subset C_0$. Через $G(Q)$ обозначим множество из $\mathbf{R}^{q+1}$, определённое как

$$G(Q) = \bigcap_{(u_0, u) \in Q} \{(x_0, y) \mid u_0 x_0 + uF(y) - u_0 f(y) \leq ub,\ y \in S\}.$$

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G(Q)\}. \tag{6}$$

Если задача (6) недопустима, то и задача (4) недопустима, так как $G \subseteq G(Q)$. С другой стороны, если вектор (x_0^*, y^*) является оптимальным решением задачи (6), то нужно ответить на два вопроса: будет ли (x_0^*, y^*) также оптимальным решением (4) и, если нет, какое "лучшее" подмножество Q' из C_0 может быть получено. Дальше дадим ответы на эти два вопроса.

Лемма 2. Если вектор (x_0^*, y^*) является оптимальным решением задачи (6), то он также будет оптимальным решением задачи (4) тогда и только тогда, когда

$$\min\{u(b - F(y^*)) \mid u \in P\} = x_0^* - f(y^*). \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку максимальное значение переменной x_0 на множестве $G(Q)$ предполагается конечным, из рассуждений, аналогичных рассуждениям из доказательства леммы 1, следует, что множество Q содержит по крайней мере одну точку (u_0, u), для которой $u_0 > 0$.

Следовательно, многогранник P не пуст, то есть линейная задача оптимизации

$$\min\{u(b-F(y^*)) \mid u\in P\} \tag{8}$$

допустима.

Заметим сначала, что оптимальное решение (x_0^*, y^*) задачи (6) является также оптимальным решением задачи (4) тогда и только тогда, когда $(x_0^*, y^*)\in G$. Это очевидно. Поскольку $G\subseteq G(Q)$, имеем

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y)\in G(Q)\} \geq \max\{x_0 \mid (x_0, y)\in G\}.$$

По определению множества G точка (x_0^*, y^*) принадлежит G тогда и только тогда, когда

$$u_0(-x_0^* + f(y^*)) + u(b-F(y^*)) \geq 0$$

для любой точки $(u_0, u)\in C_0$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $u(b-F(y^*))\geq 0$ для любой точки $u\in C$ и $u(b-F(y^*))\geq x_0^* - f(y^*)$ для любой точки $u\in P$, то есть тогда и только тогда, когда

$$\min\{u(b-F(y^*)) \mid u\in P\} \geq x_0^* - f(y^*). \tag{9}$$

Из теоремы двойственности следует, что линейная задача оптимизации

$$\max\{cx \mid Ax\leq b-F(y^*),\ x\geq 0\} \tag{10}$$

имеет конечное оптимальное решение x^*, для которого

$$cx^* = \min\{u(b-F(y^*)) \mid u\in P\}. \tag{11}$$

Поскольку вектор (x^*, y^*) является оптимальным решением задачи (1), из теоремы о разбиении и из того, что $G\subseteq G(Q)$, следует

$$cx^* + f(y^*) \leq \max\{x_0 \mid (x_0, y)\in G\} \leq \max\{x_0 \mid (x_0, y)\in G(Q)\} = x_0^*. \tag{12}$$

Наконец, приняв во внимание (9), (11) и (12), заменим неравенство (9) на равенство (7). Лемма 2 доказана.

Если линейная задача оптимизации (8) имеет конечное оптимальное решение, то по крайней мере одна из вершин многогранника P содержится в множестве оптимальных решений. Хорошо известно, что в этом случае симплекс-метод приводит к оптимальной вершине u^* многогранника P.

Согласно лемме 2, если $u^*(b-F(y^*)) = x_0^* - f(y^*)$, то оптимальное решение (x_0^*, y^*) задачи (4) найдено. Кроме того, симплекс-метод даёт в то же время оптимальное решение x^* двойственной линейной задачи оптимизации (10), а из теоремы следует, что (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи (1).

Если

$$u^*(b - F(y^*)) < x_0^* - f(y^*), \tag{13}$$

то точка $(1, u^*)$ из C_0 не принадлежит Q. В этом случае формируем новое подмножество Q' из C_0 добавлением точки $(1, u^*)$ к Q.

Если линейная задача оптимизации (8) не имеет конечного оптимального решения, то симплекс-метод приводит к вершине $\overline{u}$ многогранника P и к направляющему вектору $\overline{v}$ одного из его крайних лучей, который даёт крайнее направление одного из крайних лучей конуса C_0, так что значение целевой функции $u(b - F(y^*))$ стремится к $-\infty$ вдоль луча

$$\{u \mid u = \overline{u} + \lambda\overline{v},\ \lambda \geq 0\}.$$

Кроме того, имеем неравенство

$$\overline{v}(b - F(y^*)) < 0, \tag{14}$$

из которого следует, что точка $(0, \overline{v})$ из C_0 не принадлежит Q. В этом случае формируем новое подмножество Q' из C_0 добавлением точки $(0, \overline{v})$ к Q.

В любом случае пусть (x_0', y') будет оптимальным решением задачи оптимизации

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G(Q')\}.$$

Тогда в первом случае имеем

$$\overline{u}(b - F(y')) \geq x_0' - f(y'),$$

а во втором случае —

$$\overline{v}(b - F(y')) \geq 0.$$

Отсюда, учитывая (13) и (14), получаем, что

$$(x_0', y') \neq (x_0^*, y^*).$$

К тому же, так как $Q' \supset Q$, имеем $G(Q') \subset G(Q)$. Следовательно,

$$x_0' \leq x_0^*.$$

В случае если линейная задача оптимизации (8) не имеет конечного решения, может случиться, что вышеупомянутая вершина $\overline{u}$ удовлетворяет неравенству (13). Тогда обе точки $(1, \overline{u})$ и $(0, \overline{v})$ не принадлежат Q, и новое подмножество Q' из C_0 может быть получено добавлением обеих точек к Q. Также важно отметить, что система ограничений для множества $G(Q')$ получается добавлением к системе ограничений для $G(Q)$ либо неравенства

$$\overline{v}F(y) \leq \overline{v}b,$$

либо двух неравенств

$$\overline{v}F(y) \leq \overline{v}b,$$

$$x_0 + \overline{u}F(y) - f(y) \leq \overline{u}b.$$

Теперь всё готово, чтобы описать конечную итерационную процедуру для решения смешанной задачи оптимизации (1).

3.2. Вычислительная процедура 1

Процедура начинается с данного конечного подмножества $Q^0 \subset C_0$. Через ν обозначаем счётчик итераций. Присваиваем ν значение 0 [87, 59, 77].

Итерация 0.

Если множество $G(Q^0)$ пусто, процедура завершается: задача (1) недопустима.

Если $u_0 > 0$ по крайней мере для одной точки $(u_0, u) \in Q^0$, переходим на шаг 1 итерации 1.

Если же $u_0 = 0$ для любой точки $(u_0, u) \in Q^0$, полагаем $x_0^0 = +\infty$, в качестве y^0 выбираем y в произвольной точке $(x_0, y) \in G(Q)$ и переходим на шаг 2 итерации 1.

Итерация ν.

Шаг 1. Если ν-я итерация выполнена, то решаем задачу оптимизации

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G(Q^\nu)\}. \tag{15}$$

Если задача (15) недопустима, процедура завершается: задача (1) недопустима. Если (x_0^ν, y^ν) найдено как оптимальное решение задачи (15), то переходим на шаг 2 этой итерации.

Шаг 2. Решаем линейную задачу оптимизации

$$\min\{u(b - F(y^\nu)) \mid uA \geq c,\ u \geq 0\}. \tag{16}$$

Если задача (16) недопустима, то задача (1) либо недопустима, либо не имеет конечного оптимального решения. С этой ситуацией можно столкнуться только на 1-й итерации.

Если задача (16) имеет конечное оптимальное решение u^{ν} и

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) = x_0^{\nu} - f(y^{\nu}), \tag{17}$$

то процедура завершается. В этом случае, если x^{ν} есть оптимальное решение задачи, двойственной к задаче (16), то (x^{ν}, y^{ν}) есть оптимальное решение задачи (1) и x_0^{ν} есть оптимальное значение целевой функции этой задачи.

Если

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) < x_0^{\nu} - f(y^{\nu}), \tag{18}$$

то формируем множество

$$Q^{\nu+1} = Q^{\nu} \cup \{(1, u^{\nu})\}, \tag{19}$$

присваиваем счётчику итераций ν значение $\nu + 1$ и переходим на шаг 1 итерации ν.

Если значение целевой функции задачи (16) стремится к $-\infty$ вдоль луча

$$\{u \mid u = u^{\nu} + \lambda v^{\nu}, \lambda \geq 0\},$$

где u^{ν} есть вершина многогранника P и v^{ν} — направление крайнего луча конуса C, то для

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) \geq x_0^{\nu} - f(y^{\nu}) \tag{20}$$

формируем множество

$$Q^{\nu+1} = Q^{\nu} \cup \{(0, v^{\nu})\}. \tag{21}$$

Однако если (20) не выполняется, то есть если

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) < x_0^{\nu} - f(y^{\nu}), \tag{22}$$

то формируем множество

$$Q^{\nu+1} = Q^{\nu} \cup \{(1, u^{\nu}), (0, v^{\nu})\}. \tag{23}$$

В каждом из последних двух случаев также присваиваем счётчику итераций ν значение $\nu + 1$ и переходим на шаг 1 итерации ν.

Данная процедура завершается за конечное число итераций одним из трёх результатов:

1) задача (1) недопустима;
2) задача (1) допустима, но не имеет оптимального решения;
3) оптимальное решение задачи (1) получено.

Эта процедура является конечной, так как на каждой итерации, в которой она не завершается, предшествующее подмножество Q^{ν} доопределяется направляющим вектором по крайней мере одного из крайних лучей многогранного конуса C_0, который ещё не принадлежит Q^{ν}. Следовательно, за конечное число шагов либо процедура завершится, либо система ограничений, определяющих множество G, будет получена и по теореме о разбиении процедура остановится после следующей итерации.

Правила завершения процедуры обоснованы следующим образом.

1) $G(Q^{\nu}) \supset G$ и пункт 1) теоремы: задача (1) недопустима.

2) Лемма 1 и пункт 2) теоремы: задача (1) допустима, но не имеет оптимального решения.

3) Лемма 2 и пункт 4) теоремы: оптимальное решение задачи (1) получено.

Так как $G(Q^{\nu}) \supset G(Q^{\nu+1}) \supset G$, последовательность $\{x_0^{\nu}\}$ не возрастает и

$$\max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G\} \leq x_0^{\nu}$$

для любого

$$\nu \geq 0. \tag{24}$$

Если задача (16) имеет оптимальное решение u^{ν}, то двойственная к ней задача

$$\max\{cx \mid Ax \leq b - F(y^{\nu}),\ x \geq 0\} \tag{25}$$

имеет оптимальное решение x^{ν}, для которого выполняется

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) = cx^{\nu}. \tag{26}$$

Поскольку (x^{ν}, y^{ν}) — допустимое решение задачи (1), то из пункта 3) теоремы следует

$$u^{\nu}(b - F(y^{\nu})) + f(y^{\nu}) \leq \max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G\}. \tag{27}$$

Следовательно, в конце каждой итерации имеем верхнюю и нижнюю границы для максимального значения x_0 на множестве G, а также для максимального значения целевой функции задачи (1):

$$\max_{k \leq \nu}\{u^k(b - F(y^k)) + f(y^k)\} \leq \max\{x_0 \mid (x_0, y) \in G\} \leq x_0^{\nu}. \tag{28}$$

Здесь $u^k(b - F(y^k)) = -\infty$, если задача (16) на k-й итерации не имеет конечного оптимального решения; иначе это — оптимальное значение целевой функции этой задачи.

Выбор начального множества Q^0 во многом зависит от существующей задачи, которая должна быть решена. В любом случае процедура может начинаться со множества Q^0, содержащего только начало координат из $\mathbf{R}^{m+1}$, которое всегда принадлежит конусу C_0. Затем переходим на шаг 2 итерации 1. При этом $x_0^0 = +\infty$, а $y^0 \in S$ — произвольная точка.

3.3. Вычислительная процедура 2

Часто на практике намного удобнее решать задачу

$$\max\{cx \mid Ax \leq b - F(y^\nu),\ x \geq 0\}, \tag{29}$$

двойственную к задаче (16), чем саму эту задачу. В этом разделе описан эффективный способ получения полной информации для представления вычислительной процедуры 1 с помощью решения задачи (29) вместо задачи (16) [87].

Сначала заметим, что задача (29) может быть недопустима, так как задача (16) может иметь бесконечное оптимальное решение. Для избежания "недопустимости" заменим выпуклый многогранник P на ограниченный выпуклый многогранник

$$P(M) = \{u \mid uA \geq c,\ ue \leq M,\ u \geq 0\}. \tag{30}$$

Здесь через e обозначаем вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, а число M является настолько большим, что все вершины многогранника P (если он не пустой) содержатся в области

$$\{u \mid ue \leq M,\ u \geq 0\}. \tag{31}$$

Тогда задача (29) заменяется на задачу

$$\max\{cx - Mz_0 \mid Ax - ez_0 \leq b - F(y^\nu),\ x \geq 0,\ z_0 \geq 0\}, \tag{32}$$

которая всегда допустима.

Если M достаточно большое (смотри ниже), то имеем.

1) Задача (16) недопустима тогда и только тогда, когда задача (32) имеет бесконечное оптимальное решение.

2) Если (x^ν, z_0^ν) есть оптимальное решение, найденное для задачи (32), и $z_0^\nu = 0$, то (x^ν, y^ν) есть допустимое решение задачи (1). Для оптимального решения $u^\nu(M)$, найденного в то же время для двойственной задачи

$$\min\{u(b - F(y^\nu)) \mid uA \geq c,\ ue \leq M,\ u \geq 0\}, \tag{33}$$

имеем соотношение

$$u^\nu(M)(b - F(y^\nu)) = cx^\nu. \tag{34}$$

Так как $u^{\nu}(M)$ также является допустимым решением задачи (16), то из (34) и теоремы двойственности для линейной задачи оптимизации следует, что оно также является оптимальным решением задачи (16). Тогда, опираясь на лемму 2 и теорему, находим, что (x^{ν}, y^{ν}) есть оптимальное решение задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$cx^{\nu} + f(y^{\nu}) = x_0^{\nu}. \tag{35}$$

Если $z_0^{\nu} = 0$, но равенство (7) не выполняется, или если $z_0^{\nu} > 0$, то рассмотрим оптимальное решение $u^{\nu}(M)$ более детально.

Хорошо известно, что компоненты $u^{\nu}(M)$ равны компонентам "d-строки" (известной также как "$z_j - c_j$-строка") в оптимальной симплекс-таблице, соответствующим исходным слабым переменным. Из определения "d-строки" следует, что это линейная вектор-функция от M, то есть

$$d^{\nu}(M) = d^{1,\nu} + Md^{2,\nu}, \tag{36}$$

где $d^{2,\nu} \geq 0$ (другими словами, число M предполагается по возможности малым, смотри ниже).

Отсюда следует, что $u^{\nu}(M)$ также линейная вектор-функция от M:

$$u^{\nu}(M) = u^{1,\nu} + Mu^{2,\nu}. \tag{37}$$

Векторы $d^{1,\nu}$ и $d^{2,\nu}$, а следовательно, и векторы $u^{1,\nu}$ и $u^{2,\nu}$ получены заменой целевой функции $cx - Mz_0$ в оптимальной симплекс-таблице на cx и $-z_0$ соответственно и затем пересчётом "d-строки". Будем обращаться к $d^{1,\nu}$ и $d^{2,\nu}$ как к M-компонентам "d-строки"; аналогично, $u^{1,\nu}$ и $u^{2,\nu}$ суть M-компоненты оптимального решения двойственной задачи. Для любой заданной оптимальной симплекс-таблицы M-компоненты не зависят от M.

Благодаря конструкции многогранника $P(M)$, любая вершина P есть вершина из $P(M)$. Более того, как было доказано, любая вершина из $P(M)$ имеет вид

$$u(M) = \overline{u} + \lambda \overline{v}, \tag{38}$$

где $\overline{u}$ — вершина из P, $\overline{v}$ есть либо нуль, либо направляющий вектор крайнего луча из C и λ — некоторое неотрицательное число. Обратно, если $\overline{v}$ есть такой направляющий вектор, то найдётся по крайней мере одна вершина $\overline{u}$ из P такая, что

$$u(M) = \overline{u} + \frac{M - \overline{u}e}{\overline{v}e}\overline{v} \tag{39}$$

есть вершина из $P(M)$.

Следовательно, вершина (37) из $P(M)$ может быть записана в виде

$$u^{\nu}(M)=u^{\nu}+\lambda^{\nu}v^{\nu}, \tag{40}$$

где u^{ν} — вершина из P и v^{ν} — направление крайнего луча из C. Единственная проблема состоит в вычислении u^{ν} и v^{ν} из M-компонент $u^{1,\nu}$ и $u^{2,\nu}$ из $u^{\nu}(M)$.

Очевидно, что

$$v^{\nu}=u^{2,\nu}. \tag{41}$$

Если

$$u^{2,\nu}=0, \text{ то } u^{\nu}=u^{1,\nu}, \tag{42}$$

и если $u^{2,\nu}\neq 0$, то u^{ν} есть такая точка на луче

$$\{u \mid u=u^{1,\nu}+\lambda u^{2,\nu},\ \lambda\geq 0\}, \tag{43}$$

которая также принадлежит P и соответствует наименьшему значению M, для которого написанное выше верно.

Общеизвестным свойством "d-строки" оптимальной симплекс-таблицы задачи (32) является то, что это минимальное значение $M_{\min}$ для M, для которого $d^{\nu}(M)=d^{1,\nu}+Md^{2,\nu}\geq 0$. Следовательно,

$$M_{\min}=\max_{j}\Big\{-\frac{d_j^{1,\nu}}{d_j^{2,\nu}} \mid d_j^{2,\nu}>0\Big\}. \tag{44}$$

По теореме двойственности также имеем соотношение

$$u^{\nu}(b-F(y^{\nu}))=cx^{\nu}-M_{\min}z_0^{\nu}.$$

Получаем следующую модификацию вычислительной процедуры 1.

Вычислительная процедура 2.

Эта процедура также начинается с данного конечного подмножества $Q^0\subset C_0$. Более того, подходящее значение M должно быть известно (смотри ниже). Через ν обозначаем счётчик итераций. Присваиваем ν значение 0.

Итерация 0.

Эта итерация такая же, как в процедуре 1.

Итерация ν.

Шаг 1. Этот шаг такой же, как в процедуре 1.

Шаг 2. Решаем линейную задачу оптимизации

$$\max\{cx-Mz_0 \mid Ax-ez_0\leq b-F(y^{\nu}),\ x\geq 0,\ z_0\geq 0\}. \tag{45}$$

Если задача (45) имеет бесконечное оптимальное решение, то задача (1) либо недопустима, либо не имеет конечного решения. С этой ситуацией можно столкнуться лишь на итерации 1.

Если задача (45) имеет конечное оптимальное решение (x^{ν}, z_0^{ν}), то имеют место два случая.

1) Если $z_0^{\nu} = 0$ и $cx^{\nu} + f(y^{\nu}) = x_0^{\nu}$, то (x^{ν}, y^{ν}) есть оптимальное решение задачи (1) с оптимальным значением x_0^{ν} целевой функции.

2) Если $z_0^{\nu} = 0$, но $cx^{\nu} + f(y^{\nu}) < x_0^{\nu}$, или если $z_0^{\nu} > 0$, то определим M-компоненты $d^{1,\nu}$ и $d^{2,\nu}$ "d-строки" в оптимальной симплекс-таблице и M-компоненты $u^{1,\nu}$ и $u^{2,\nu}$ оптимального решения двойственной задачи.

Если

$$u^{2,\nu} = 0, \text{ пусть } u^{\nu} = u^{1,\nu} \text{ и } v^{\nu} = 0. \tag{46}$$

Если $u^{2,\nu} \neq 0$, вычислим

$$M_{\min} = \max_j \Big\{ -\frac{d_j^{1,\nu}}{d_j^{2,\nu}} \mid d_j^{2,\nu} > 0 \Big\}, \tag{47}$$

и пусть

$$u^{\nu} = u^{1,\nu} + M_{\min} u^{2,\nu}, \tag{48}$$

$$v^{\nu} = u^{2,\nu}. \tag{49}$$

Тогда, если $cx^{\nu} - M_{\min} z_0^{\nu} < x_0^{\nu} - f(y^{\nu})$, формируем множество

$$Q^{\nu+1} = Q^{\nu} \cup \{(1, u^{\nu}), (0, v^{\nu})\} \tag{50}$$

и если $cx^{\nu} - M_{\min} z_0^{\nu} \geq x_0^{\nu} - f(y^{\nu})$, формируем множество

$$Q^{\nu+1} = Q^{\nu} \cup \{(0, v^{\nu})\}. \tag{51}$$

Наконец, заменяем счётчик итераций ν на $\nu + 1$ и выполняем шаг 1 итерации ν.

Замечание. Подробности о теореме и двух леммах можно найти, например, в работах [87, 77]. Обращаю внимание читателя на то, что в тексте работы [87] используются другие обозначения и другая терминология, а также имеют место неточности. Изложение обоснованной вычислительной процедуры — это необходимый шаг в создании кода, решающего практические задачи на ЭВМ.

Литература

1. Анцыз С.М., Хохлюк В.И. Алгоритм I Гомори и модификация Мартина для этого алгоритма (две процедуры для численного решения линейной полностью целочисленной задачи) // Оптимальное планирование, выпуск 13. Новосибирск: Наука, 1969. С. 39–56.

2. Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование: Монография. М.: МГУ, 1977. 196 с.

3. Блощицын В.Я. Лекции по теории чисел. Часть 1: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2011. 164 с.

4. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра: Пер. с нем. М.: Наука, 1979. 624 с.

5. Васильев В.А. Математические модели общего экономического равновесия: Учебное пособие. Новосибирск, НГУ, 2009. 136 с.

6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.

7. Винберг Э.Б. Начала алгебры. М.: УРСС, 1998. 190 с.

8. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. 176 с.

9. Волков Ю.И., Хохлюк В.И. Методы решения целочисленных задач линейного программирования // Математические модели и методы оптимального планирования. Новосибирск: Наука, 1966. С. 5–35.

10. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Книж. дом ЛИБРОКОМ, 2011. 272 с.

11. Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2000. 105 с.

12. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992. 360 с.

13. Гончаров Е.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Исследование операций. Примеры и задачи: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2005. 78 с.

14. Горбатов В.А. Основы дискретной математики: Учебное пособие для студентов вузов. М.: Высша. шк., 1986. 311 с.

15. Гусев С.А., Сарычева О.М. Дискретная математика: Конспект лекций. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. 72 с.

16. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения: Пер. с англ. М.: Прогресс, 1966. 600 с.

17. Евреинов Э.В. Однородные вычислительные системы, структуры и среды. М.: Радио и связь, 1981. 208 с.

18. Емеличев В.А., Ковалёв М.М. Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 342 с.

19. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981. 208 с.

20. Ерзин А.И. Введение в исследование операций: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2006. 100 с.

21. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. СПб.: Лань, 2004. 336 с.

22. Журавлёв Ю.И., Флёров Ю.А., Вялый М.Н. Дискретный анализ. Основы высшей алгебры: Учебное пособие. М.: МЗ Пресс, 2007. 224 с.

23. Забиняко Г.И. Пакет программ целочисленного линейного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. 1999. Серия 2. Т. 6, № 2. С. 32–41.

24. Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Системы линейных неравенств: Учебное пособие. Иркутск: ИГУ, 2007. 99 с.

25. Зубов В.И. Динамика управляемых систем: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1982. 285 с.

26. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем: Монография. М.: Физматлит, 2003. 224 с.

27. Зубов Н.В. Математические методы исследования динамической безопасности М.: Вычислит. центр РАН, 2007. 174 с.

28. Зубова А.Ф. Надежность машин и аппаратов химических производств. Л.: Машиностроение, 1978. 216 с.

29. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. 68 с.

30. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

31. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 839 с.

32. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учебное пособие. 5-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2004. 264 с.

33. Кнут Д. Искусство программирования: Пер. с англ. В 3 т. М.: Вильямс, 2000. Т. 1. Основные алгоритмы. 713 с.

34. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: Пер. с англ. В 3 т. М.: Мир, 1977. Т. 2. Получисленные алгоритмы. 724 с.

35. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: Пер. с англ. В 3 т. М.: Вильямс, 2009. Т. 3. Искусство программирования. 823 с.

36. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 432 с.

37. Кун Г.У., Таккер А.У. Линейные неравенства и смежные вопросы: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 470 с.

38. Лаврентьев Михаил Михайлович (1932–2010): Биобиблиографический указатель / Ред. В.Г. Романов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2012. 88 с.

39. Ларин Р.М., Плясунов А.В., Пяткин А.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2003. 74 с.

40. Математическая энциклопедия: В 5 т. М.: Мир, 1982. Т. 3. С. 346. Теорема Минковского — Фаркаша.

41. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.

42. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Лебедева Т.Т. и др. Пакет прикладных программ ДИСПРО, предназначенный для решения задач дискретного программирования // Кибернетика. 1981. № 3. С. 117–137.

43. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Трубин В. А. и др. Пакет прикладных программ для решения задач производственно-транспортного планирования большой размерности (ПЛАНЕР) // Кибернетика. 1983. № 3. С. 57–71.

44. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.

45. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 392 с.

46. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

47. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1974. 384 с.

48. Пярнпуу А.А., Хохлюк В.И. Использование групповых свойств для повышения вычислительной эффективности алгоритмов. Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 1996. 36 с.

49. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 471 с.

50. Романовский И.В. Дискретный анализ: Учебное пособие. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2008. 336 с.

51. Сухарев А. Г., Тихонов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 368 с.

52. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т.: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т. 1. 360с. Т. 2. 342 с.

53. Титов В. В. Оптимизация управления промышленной корпорацией: вопросы методологии и моделирования: Монография. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2007. 256 с.

54. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматлит, 1963. 735 с.

55. Хохлюк В. И. Задачи целочисленной оптимизации (преобразования): Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1979. 92 с.

56. Хохлюк В. И. Задачи целочисленной оптимизации (алгоритмы): Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1980. 92 с.

57. Хохлюк В. И. Алгоритмы целочисленной оптимизации (Вспомогательные АЛГОЛ-процедуры): Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1982. 92 с.

58. Хохлюк В. И. Алгоритмы секущих плоскостей: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1983. 92 с.

59. Хохлюк В. И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации: Монография. М.: Радио и связь, 1987. 224 с.

60. Хохлюк В.И., Шанцын А.К. Приведение целочисленной матрицы к нормальному диагональному виду // Алгоритмы и программы: Информ. бюл. 1988. № 11. С. 2–3.

61. Хохлюк В.И. Прямой метод целочисленной оптимизации. Новосибирск, 2002. 39 с. (Препринт. РАН/Сиб. отд-ние. ИМ, № 106).

62. Хохлюк В.И. Процедуры прямого метода // Труды Института системного анализа Российской академии наук (Труды ИСА РАН). 2007. Т. 29(1). Динамика неоднородных систем. Вып. 11. С. 52–53.

63. Хохлюк В.И. Построение группового уравнения в целочисленной оптимизации // Труды ИСА РАН. 2007. Т. 31(1). Динамика неоднородных систем. С. 233–240.

64. Хохлюк В.И. Неравенство, определяющее грань // Труды ИСА РАН. 2007. Т. 31(2). Динамика неоднородных систем. С. 149–155.

65. Хохлюк В.И. Прямой метод для решения целочисленной задачи // Труды ИСА РАН. 2007. Т. 31(2). Динамика неоднородных систем. С. 156–163.

66. Хохлюк В.И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации: Монография. Новосибирск, 2007. Режим доступа: http://math.nsc.ru/LBRT/u1/hohl/book.pdf (Электронное издание).

67. Хохлюк В.И. Процедура прямого метода для системы неравенств // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 32(2). Динамика неоднородных систем. С. 198–206.

68. Хохлюк В.И. Процедура прямого метода для системы уравнений // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 32(2). Динамика неоднородных систем. С. 207–215.

69. Хохлюк В.И. Крайние лучи заострённого конуса // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 32(3). Динамика неоднородных систем. С. 231–241.

70. Хохлюк В.И. Вычисление граней многовершинника двоичной задачи о ранце // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 32(3). Динамика неоднородных систем. С. 292–303.

71. Хохлюк В.И. Свойства субаддитивных функций // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 42(1). Динамика неоднородных систем. С. 175–181.

72. Хохлюк В.И. Справедливые неравенства для линейной и целочисленной задач // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 42(1). Динамика неоднородных систем. С. 182–188.

73. Хохлюк В.И. Справедливые неравенства для задачи с логическими ограничениями // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 42(2). Динамика неоднородных систем. С. 161–170.

74. Хохлюк В.И. Прямой метод для целочисленной узкоблочной задачи оптимизации // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 42(2). Динамика неоднородных систем. С. 171–180.

75. Хохлюк В.И. Стартовая точка прямого метода для системы уравнений // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 49(1). Динамика неоднородных систем. С. 201–209.

76. Хохлюк В.И. Стартовая точка прямого метода для системы неравенств // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 50(1). Динамика неоднородных систем. С. 136–144.

77. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 519 с.

78. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

79. Шмырёв В.И. Введение в математическое программирование. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 192 с.

80. Balas E., Jeroslow R. Canonical cuts on the unit hypercube // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1972. V. 23. № 1. P. 61–69.

81. Balas E. Disjunctive programming: Properties of the convex hull of feasible points, MSRR № 348, GSIA, Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh, PA. 1974.

82. Balas E. Disjunctive programming: Facets of the convex hull of feasible points, MSRR № 348, Carnegie-Mellon Univ. 1974.

83. Balas E. Disjunctive programming: Cutting-planes from logical conditions, talk given at SIGMAP-UW Conference, April 1974. // O.L. Mangasarian, R.R. Meyer and S.M. Robinson, eds., Nonlinear Programming 2 (Academic Press, 1975).

84. Balas E. Facets of the knapsack polytope // Mathematical Programming. 1975. V. 8, 2. P. 146–164.

85. Balas E. Facits of one-dimensional and multi-dimensional knapsack polytopes // Symposia Mathematica. 1976. V. XIX. P. 11–34.

86. Balas E. Disjunctive programming // Annuals of Discrete Mathematics. 1979. V. 5. P. 3–51.

87. Benders J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems // Numerische Mathematik. 1962. 4 band. 3 heft. P. 238–252.

88. Blair C.E. Two rules for deducing valid inequalities for 0-1 problems // SIAM J. Appl. Math. 1976. 31. P. 614–617.

89. Chvatal V. Edmonds polytopes and a heirarchy of combinatorial problems // Discrete Mathematics. 1973. 4. P. 305–337.

90. Cottle R.W. and Dantzig G.B. Complementary pivot theory of mathematical programming // Linear Algebra and Applications 1. 1968. P.103–125.

91. Cottle R.W. Complementarity and variational problems // Tech. Rep. SOL 74–76. Systems Optimization Laboratory. Stanford Univ. Stanford. CA. 1974.

92. Dantzig G.B. Linear programming and extensions. Princeton University, 1963. 625 p.

93. Eaves B.C. The linear complementarity problem // Management Sci. 17. 1971. P.612–634.

94. Garfinkel R.S. and Nemhauser G.L. Integer Programming. Wiley, New York, 1972. 390 p.

95. Gomory R.E. An algorithm for integer solutions to linear programs // Graves and Wolfe, eds., Recent Advances in Mathematical Programming. 1963. P.269–302.

96. Gomory R.E. Some polyhedra related to combinatorial problems // Linear Algebra and its Applications 2. 1969. P.451–558.

97. Gomory R.E. and Johnson E.L. Some continuous functions related to corner polyhedra I // Mathematical Programming. 1972. V. 3. № 1. P.23–85.

98. Gomory R.E. and Johnson E.L. Some continuous functions related to corner polyhedra II // Mathematical Programming. 1972. V. 3. № 3 P.359–389.

99. Hu T.C. Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley, 1969. 432 pp.

100. IBM ILOG CPLEX CP Optimizer. http://www-01.ibm.com/

101. Jeroslow R.G. Cutting-plane theory: Disjunctive methods // Annals of Discrete Mathematics. 1977. 1. P. 293–330.

102. Jeroslow R. Cutting-plane theory: Algebraic methods // Discrete Mathematics. 1978. V. 23. №. 2. P. 121–150.

103. Jeroslow R. Cutting-planes for complementarity constraints. MSRR no. 394, GSIA, Carnegie-Mellon University. 1976. A revised and abbreviated version has appeared in SIAM J. Control and Optimization 16. 1978. P.56–62.

104. Jeroslow R. An Introduction To the Theory of Cutting-planes // Annals of Discrete Mathematics. 1979. V. 5. P. 71–95.

105. Jeroslow R. Logic-Based decision Support. Amsterdam, Netherlands: Elsiever science publishers B.V., 1989. 222 p.

106. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Management Sci. 11. 1965. P. 681–689.

107. Lemke C.E. and Howson J.T. Equilibrium points of bimatrix games // Journal of Soc. for Ind. and Appl. Math. 12. 1964. P. 413–423.

108. Rockafellar R.T. Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

109. Shreiver A. Theory of Linear and Integer Programming // A Wiley-Interscience Publication. 19. 1986. 1060 p.

110. Van Der Waerden Algebra Springer-Verlag. Berlin, 1967–1971. 1393–1405.

111. Режим доступа: http://ru.wikipedia.org/wiki/Изолиния. Дата обращения: 6.05.2013.

Учебное издание

Хохлюк Виталий Иванович

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Редактор С. В. Исакова

Подписано в печать 7.05.2013 г.
Формат 60x84 1/16. Уч. изд. л. 9,6. Усл. печ. л. 8,9.
Тираж 100 экз. Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.