А. И. БАРАНЕНКОВ,
Е. П. БОГОМОЛОВА,
И. М. ПЕТРУШКО

СБОРНИК ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.1я73
Б 24

Бараненков А. И.,
Богомолова Е. П., Петрушко И. М.

Б 24 Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 240 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0930-3

Сборник содержит более 4300 задач по курсу высшей математики. При его составлении авторы руководствовались идеей устранить громоздкие вычисления, скрывающие основные математические понятия. Структура задачника предполагает, что разнообразие задач достаточно для практических занятий с преподавателем, домашних заданий, индивидуальных типовых расчетов по каждому разделу курса.

Учебное пособие предназначено для студентов технических, технологических, экономических и других специальностей.

ББК 22.1я73

Обложка *А. Ю. ЛАПШИН*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль математики в подготовке специалиста любой профессии часто недооценивается. Развитие логического мышления, памяти, способности к анализу — все это реализуется в процессе занятий математикой в течение нескольких семестров при изучении математических дисциплин в высшем учебном заведении.

Математические знания обычно трудно осваиваются вследствие их максимального абстрагирования от реальных жизненных процессов. Проблемы овладения математическими понятиями и методами усложняются, если ВУЗ ставит перед собой задачу подготовки бакалавров. Количество часов на изучение математики в учебном плане бакалавра невелико, а требования к бакалавриату диктуют необходимость получения студентом обширных знаний природы вещей, основные законы которой часто поддаются описанию с помощью базовых математических объектов и моделей.

Представляется, что занятия математикой для студентов неинженерных (тем более, нефизических) профессий должны быть направлены на освоение основных математических понятий, методов и логических связей. При этом на практических занятиях требуется на несложных в вычислительном плане задачах, причем в больших количествах, разъяснять сущность сложных математических объектов, приучать студента к современным методам математики и позволить при недостатке времени изучать математические методы на сравнительно простых примерах.

В настоящее время ощущается дефицит полноценных задачников по математике, побуждающих студента к успешному самостоятельному труду. Основная масса учебных материалов имеет вид пособий с достаточно большим набором разобранных задач и со скудным набором примеров для самостоятельного решения и тренировки. Данный задачник призван восполнить этот дефицит, особенно в части пособий для подготовки бакалавров.

Задачник содержит около 4300 несложных задач по стандартному курсу высшей математики для бакалавров технических и технологических, а также для бакалавров и специалистов экономических, управленческих и междисциплинарных специальностей.

При отборе задач авторы руководствовались идеями устранения громоздких вычислений, скрывающих основные математические понятия, и намеренного дублирования типичных примеров, облегчающего успешное выполнение домашних заданий. При необходимости усложненных вычислений студент, освоив на простых примерах основные математические идеи, может с успехом применить для своих исследований один из многочисленных пакетов вычислительных компьютерных программ.

Структура задачника предполагает, что разнообразных задач достаточно для:

1) решения примеров на практических занятиях с преподавателем (например, четных номеров);

2) домашнего задания (нечетные номера);

3) индивидуальных типовых расчетов (30 вариантов) по каждому разделу.

На последних страницах помещены справочные материалы по темам, которые в этом нуждаются. Это не универсальный справочник. Предполагается, что отсутствие в нем неких сведений будет стимулировать контакт между преподавателем и студентом.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ПРОЦЕНТЫ

Написать разложение на простейшие множители чисел:

1.1. 12, 65, 108, 312, 576, 2100, 37 300.

1.2. 30, 56, 99, 256, 882, 1244, 55 000.

Найти НОК и НОД чисел:

1.3. 18, 48, 72.

1.4. 24, 45, 36.

1.5. 495, 2100.

1.6. 363, 440, 198.

Вычислить точно и приближенно (с помощью калькулятора):

1.7. $\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+0{,}3.$

1.8. $\frac{2}{7}+\frac{2}{21}-\frac{1}{3}.$

1.9. $\frac{2}{5}+\frac{2}{6}-\frac{4}{15}.$

1.10. $\frac{7}{5}+\frac{5}{7}-\frac{11}{70}.$

1.11. $\frac{8\sqrt{5}}{0{,}4\cdot\sqrt{0{,}2}}.$

1.12. $\frac{-6\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{324}}{2}}{9}.$

1.13. $\frac{3}{2}:\sqrt{\frac{1}{0{,}09}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}}.$

1.14. $0{,}1\cdot\sqrt{20}:\sqrt{45}-2\frac{17}{30}.$

1.15. $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11}\cdot\sqrt{11}.$

1.16. $\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{35}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}+\frac{3}{45}}.$

Упростить:

1.17. $\sqrt[6]{3^7\cdot4^5}\cdot\sqrt[6]{3^5\cdot4}.$

1.18. $0{,}3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}-0{,}1.$

1.19. $\sqrt[4]{(-3)^2\cdot2}\cdot\sqrt[4]{8\cdot9}.$

1.20. $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt[6]{100}.$

Сравнить числа:

1.21. $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$ и $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{20}}.$

1.22. $\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ и $\frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{42}}.$

1.23. $\frac{2,4\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-3}}$ и $0,012$. **1.24.** $\frac{2,8\cdot 10^{-6}}{2\cdot 10^{-4}}$ и $0,14$.

1.25. $(10^8)^2\cdot 100^{-6}$ и $(10^{-10}\cdot 100^6)^2$.

1.26. $(0,001^3\cdot 10^{12})^{-2}\cdot(0,1^2)^{-4}$ и 100.

Найти указанное число процентов от данных чисел:

1.27. 10% от 700; 6% от 0,25; 25% от 80; 33% от (400:3); 60% от 10.

1.28. 5% от 75; 14% от (200:7); 50% от 0,001; 62% от 8; 99% от 10 000.

1.29. Увеличить число 27 на 3%.

1.30. Увеличить число 42 на 6%.

1.31. Увеличить число 0,039 на 13%.

1.32. Увеличить число 0,225 на 5%.

1.33. Уменьшить число 10 на 2%.

1.34. Уменьшить число 100 на 22%.

1.35. Уменьшить число 0,15 на 70%.

1.36. Уменьшить число 0,132 на 40%.

Сравнить:

1.37. 60% от 0,43 и 2% от 15.

1.38. 12% от 1024 и 7% от 1760.

1.39. 0,15% от 24 и 40% от 0,1.

1.40. 70% от 0,2 и 0,032% от 440.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Упростить выражения:

2.1. $\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a}{a-1}$. **2.2.** $\frac{a^2}{a^2-4}-\frac{a}{a+2}$.

2.3. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{x+y}$. **2.4.** $\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}$.

2.5. $(y+10)(y-2)-4y(2-3y)$.

2.6. $(y+1)(y+3)-2y(1-3y)$.

2.7. $(x-3)(x+3)-(x^2+2)^2-x(x-3)^3$.

2.8. $(6-x)(x+2)-(x^2-1)^2-x(x+2)^3+3$.

2.9. $\frac{x^2+2xy+y^2}{(x^2-y^2)}:(x^3+y^3)$.

2.10. $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2-2xy+y^2)}\cdot(x^3-y^3).$

2.11. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ac}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+c}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+c}}.$

2.12. $\dfrac{a-c}{a+c+2\sqrt{ac}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right).$

Выделить полный квадрат:

2.13. $x^2-4x+5.$ **2.14.** $x^2+6x-7.$

2.15. $x^2-3x+1.$ **2.16.** $x^2+x+3.$

2.17. $2x^2+8x+1.$ **2.18.** $3x^2+18x+11.$

2.19. $3x^2-5x-12.$ **2.20.** $5x^2-3x-16.$

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ). КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Решить уравнения и системы уравнений:

3.1. $4x-1=0.$ **3.2.** $6x+2=0.$

3.3. $8=0{,}5x.$ **3.4.** $3=0{,}3x.$

3.5. $x+4=5(0{,}2x+0{,}1).$ **3.6.** $2(0{,}5+0{,}25x)=7-x.$

3.7. $\begin{cases}2x-3y=1,\\ x+5y=2.\end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases}4x+y=1,\\ 2y-x=0.\end{cases}$

3.9. $\begin{cases}0{,}1x+0{,}16y=2,\\ 0{,}3y-3{,}25x=-6.\end{cases}$ **3.10.** $\begin{cases}5{,}2x-0{,}16y=1,\\ 0{,}2x-3{,}2y=-3.\end{cases}$

3.11. $x^2-5x+6=0.$ **3.12.** $x^2+x-6=0.$

3.13. $2x^2+x-3=0.$ **3.14.** $5x^2-2x-3=0.$

3.15. $3x^2-11x-4=0.$ **3.16.** $2x^2+9x-5=0.$

3.17. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^2-2xy+8=0.\end{cases}$ **3.18.** $\begin{cases}x+y=2,\\ y^2-2xy+1=0.\end{cases}$

3.19. $\begin{cases}2x+y=2,\\ 4x^2-2xy+8y^2+1=5.\end{cases}$ **3.20.** $\begin{cases}x-y=-1,\\ x^2-2xy+6y^2=6.\end{cases}$

4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Решить уравнения:

4.1. $x^2 + 9 = 0$. **4.2.** $x^2 + 4 = 0$.

4.3. $x^2 - 4x + 5 = 0$. **4.4.** $x^2 - 6x + 13 = 0$.

4.5. $x^2 + 2x + 2 = 0$. **4.6.** $x^2 - 2x + 5 = 0$.

4.7. $x^3 - 1 = 0$. **4.8.** $x^3 + 1 = 0$.

Вычислить:

4.9. $i + (2 - 3i)$. **4.10.** $2 + (4 - i)$.

4.11. $(5 + i) - (2 - i)$. **4.12.** $(4 - 2i) - (3 + i)$.

4.13. $(2 - i) \cdot (4 - 2i)$. **4.14.** $(3 + i) \cdot (2 - 3i)$.

4.15. $(0{,}1 - i) \cdot (3 + 0{,}5i)$. **4.16.** $(0{,}3 - 2{,}7i) \cdot (1 + i)$.

4.17. $\frac{1-i}{1+i}$. **4.18.** $\frac{2+i}{2-i}$.

4.19. $\frac{2{,}1-1{,}8i}{1-0{,}1i}$. **4.20.** $\frac{3-1{,}2i}{3+i}$.

5. МНОГОЧЛЕНЫ, РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Упростить:

5.1. $x(x + 1)^2 + 2x - x^3$.

5.2. $(x + 3)(x - 5)^2 - (x + 1)(1 + x^2)$.

5.3. $(x - 1)^3 - (x + 1)^3$. **5.4.** $(x + 2)^3 - (x - 3)^3$.

5.5. $(2x - 1)^4 - (x + 6)^4$. **5.6.** $(x - 2)^4 - (3x + 6)^4$.

Найти корни многочленов, разложив их на множители:

5.7. $P(x) = x^3 - x^2 - 12x$. **5.8.** $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

5.9. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x$. **5.10.** $P(x) = x^4 + x^3 - 30x^2$.

5.11. $P(x) = -2x^4 - 6x^2 + 8x$.

5.12. $P(x) = -3x^4 - 5x^2 - 8x$.

Поделить с остатком:

5.13. $\frac{x^2-2x+5}{x-3}$. **5.14.** $\frac{x^2-3x-1}{x+2}$.

5.15. $\frac{2x^2-4x+1}{x+1}$. **5.16.** $\frac{3x^2-3x+5}{x-3}$.

5.17. $\dfrac{x^2+x+1}{2x-3}$. **5.18.** $\dfrac{x^2-x-1}{5x+2}$.

5.19. $\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+4}$. **5.20.** $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+1}$.

5.21. $\dfrac{x^3+2x^2+x+5}{x-6}$. **5.22.** $\dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x+3}$.

5.23. $\dfrac{x^3-4x+2}{x^2-4}$. **5.24.** $\dfrac{x^3+2x^2-7}{x^2-1}$.

Разложить на простейшие дроби:

5.25. $\dfrac{2x+5}{x^2-25}$. **5.26.** $\dfrac{5x+4}{x^2-9}$.

5.27. $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$. **5.28.** $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$.

5.29. $\dfrac{4x}{x^2-5x-14}$. **5.30.** $\dfrac{x}{x^2-2x-15}$.

5.31. $\dfrac{x-1}{x^3+2x^2-8x}$. **5.32.** $\dfrac{x+4}{x^3+5x^2+6x}$.

6.
ФУНКЦИЯ, АРГУМЕНТ И ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Вычислить значения функций в заданных точках:

6.1. $y=(x-3)^2\cdot(x+2),\ \ x=2.$

6.2. $y=(2x-1)^3\cdot(x-1),\ \ x=0{,}5.$

6.3. $y=2^{3-x},\ \ x=7.$ **6.4.** $y=5^{x-2},\ \ x=5.$

6.5. $y=e^{4x^2-2x},\ \ x=\dfrac{1}{2}.$ **6.6.** $y=e^{2x^2+3x},\ \ x=-1.$

6.7. $y=\log_2(x^5+1),\ \ x=1.$

6.8. $y=\log_2(x^3+5),\ \ x=3.$

6.9. $y=(x-4)\lg(x-1),\ \ x=1{,}1.$

6.10. $y=(x^2+2)\lg(x+3),\ \ x=7.$

6.11. $y=\ln(1-2x+2e),\ \ x=e.$

6.12. $y=\ln\left(1+e-\dfrac{x}{3}\right),\ \ x=3e.$

6.13. $y=\sin^2 x+\cos 2x,\ \ x=\dfrac{\pi}{6}.$

6.14. $y = \cos^2 x - \sin 2x,\ \ x = \dfrac{\pi}{3}.$

6.15. $y = \sin x \cdot \cos x - \operatorname{tg}^2 x,\ \ x = \dfrac{5\pi}{4}.$

6.16. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \sin 3x,\ \ x = \dfrac{\pi}{4}.$

6.17. $y = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{4},\ \ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

6.18. $y = 0{,}5\operatorname{arctg} 2x + \dfrac{\pi}{8},\ \ x = \dfrac{1}{2}.$

6.19. $y = \dfrac{4}{3}\operatorname{sh} x - \operatorname{ch}(2x+1),\ \ x = 0.$

6.20. $y = 2\operatorname{ch}(x - 1) - \operatorname{sh}(2x),\ \ x = 1.$

Построить графики функций:

6.21. $y = 2x - 3.$

6.22. $y = 3x + 2.$

6.23. $2y - x = 7.$

6.24. $5y + x = 8.$

6.25. $3x - 7y + 21 = 0.$

6.26. $5y - 4x - 20 = 0.$

6.27. $y = x^2 - 3.$

6.28. $y = 2 - x^2.$

6.29. $y = 5 - x^2 + 2x.$

6.30. $y = x^2 + 4x - 2.$

6.31. $y = \sqrt{4x - 2}.$

6.32. $y = \sqrt{x + 6}.$

6.33. $y = -\sqrt{3 - 8x}.$

6.34. $y = \sqrt{-5x}.$

6.35. $y = 2\sin x - 1.$

6.36. $y = -4\cos x.$

6.37. $y = 2 + \ln x.$

6.38. $y = 4 - \ln x.$

6.39. $y = 5e^x - 3.$

6.40. $y = 1 - 2^x.$

6.41. $y = \dfrac{x-3}{x+2}.$

6.42. $y = \dfrac{x+1}{x-5}.$

6.43. $y = \dfrac{2x}{3-x}.$

6.44. $y = \dfrac{x+8}{x}.$

Упростить и построить графики функций:

6.45. $y = \dfrac{x-3}{x} - \dfrac{x^2-9}{x} \cdot \dfrac{1}{x-3}.$

6.46. $y = \dfrac{x^2-4}{x} \cdot \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x+2}{x}.$

6.47. $y = 1 - \frac{x^2 - 5x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-5}$.

6.48. $y = (x+4) \cdot \frac{x+6}{x^2 - 16} - \frac{x-6}{x-4}$.

6.49. $y = \frac{9x^2 - 4}{2 - 3x} - \frac{6x^2 - 5x - 6}{3 - 2x} - x$.

6.50. $y = \frac{x+1}{x^3 + x^2 + x} : \frac{1}{x^4 - x} - x^2 + x$.

6.51. $y = \left(\frac{1}{5\sqrt{x}} + \frac{1}{10\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x}{6}$.

6.52. $y = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{6\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x}{4}$.

6.53. $y = \left(4\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$.

6.54. $y = \left(2\sqrt{x} - \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x}}$.

6.55. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x} - x^2} + x + 3\sqrt{x}$.

6.56. $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$.

6.57. $y = \left(\frac{x^{1,5} - 1}{x^{0,5} - 1} + x^{0,5} \right) : \frac{x-1}{x^{0,5} - 1}$.

6.58. $y = \left(\frac{x^{2,5} + x^{1,5}}{x+1} + 1 \right) : \frac{1 - x^3}{x^{1,5} - 1}$.

6.59. $y = 9^{x+1} \cdot (3^{-x} + 1) - 9 \cdot 9^x$.

6.60. $y = \frac{25^{x+2} \cdot 5^{-x}}{625} + \frac{5^{2x+1}}{25^x}$.

6.61. $y = \left(\frac{2 + 2^x}{2 - 2^x} - \frac{2 - 2^x}{2 + 2^x} \right) \cdot \frac{4 - 4^x}{8^{x+1}}$.

6.62. $y = \left(\frac{2^x + 2}{4^x + 2^{x+2} + 1} - \frac{2^x - 2}{4^x - 1} \right) \cdot \frac{(4^x - 1) \cdot (2^x + 1)}{4^x}$.

6.63. $y = -\ln x + \ln e + \ln x^2$.
6.64. $y = 3\ln x + \ln x^2 + \ln e + \ln 1$.

6.65. $y = \dfrac{\ln\sqrt{x} - \ln\sqrt[3]{x}}{\ln\sqrt[4]{x} - \ln\sqrt[12]{x}} + 2\ln x$.

6.66. $y = \dfrac{\ln\sqrt[5]{x} + \ln\sqrt[10]{x}}{\ln\sqrt{x} - \ln\sqrt[4]{x}} - \ln x^3$.

6.67. $y = \left(\dfrac{\ln(4x)}{\ln x} - \dfrac{\lg(4x)}{\lg x} + 2\right)^{\log_4(4x^2)}$.

6.68. $y = \left(\dfrac{\ln(5x)}{\ln x} - \dfrac{\lg(5x)}{\lg x} + 3\right)^{\log_9(4x^4)}$.

6.69. $y = (x^{\log_{\sqrt[3]{x}} 2} + x^{4\log_{x^2} 3}) \cdot x^2 + x$.

6.70. $y = (x^{\log_{\sqrt[4]{x}} 3} - x^{8\log_{x^4} 5}) \cdot x^2 - 2x + 5$.
6.71. $y = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$.
6.72. $y = \sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x - 2$.
6.73. $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$.
6.74. $y = (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x)^2 - (\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x)^2$.

6.75. $y = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - \sin x + 2\cos x$.

6.76. $y = -2\cos^2\dfrac{x}{2} + 2\sin x + \cos x$.

6.77. $y = -\sin x + \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + \cos x \cdot \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + \mathrm{tg}\,x$.

6.78. $y = \cos x \cdot \left[\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) + \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right] + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

7. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вычислить:

7.1. 5! **7.2.** 7! **7.3.** 12!

7.4. 20! **7.5.** $\dfrac{6!}{4!}$. **7.6.** $\dfrac{10!}{7!}$.

7.7. $\frac{8!}{13!}$. **7.8.** $\frac{15!}{19!}$. **7.9.** C_7^2.

7.10. C_8^1. **7.11.** C_{10}^3. **7.12.** C_{12}^5.

7.13. C_5^4. **7.14.** C_7^6. **7.15.** C_{12}^0.

7.16. C_4^0. **7.17.** C_6^1. **7.18.** C_7^1.

7.19. C_{11}^{11}. **7.20.** C_3^3.

Упростить:

7.21. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$. **7.22.** $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$.

7.23. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$. **7.24.** $\frac{(n-1)!}{n!}$.

7.25. $\frac{(n+2)!-(n+1)!}{n!}$. **7.26.** $\frac{(n-1)!-(n+1)!}{n!}$.

7.27. $\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)n!}$. **7.28.** $\frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)(n+1)!}$.

II

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Построить в прямоугольной декартовой системе координат точки:

1.1. $A(2, 1)$, $B(-5, 2)$, $C(-1, -2)$.

1.2. $A(-1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, 1)$.

1.3. $A(0, 2)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 0)$.

1.4. $A(3, 0)$, $B(0, -2)$, $C(-5, 0)$.

1.5. $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$.

1.6. $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, -2)$.

1.7. $A(1, 2, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, -1)$.

1.8. $A(-2, 1, 0)$, $B(0, -2, 2)$, $C(1, 1, 0)$.

1.9. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(-1, -2, 2)$.

1.10. $A(1, -2, -1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$.

Построить в полярных координатах на плоскости точки:

1.11. $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$.

1.12. $A\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $C(3, \pi)$.

1.13. $A\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$.

1.14. $A\left(1, \frac{7\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$.

1.15. $A\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$, $B\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $C(3, 2\pi)$.

1.16. $A\left(1, \frac{11\pi}{6}\right)$, $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C(1, 0)$.

Найти полярные координаты точек, заданных в декартовых координатах:

1.17. $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$.

1.18. $A(1, 1)$, $B(-3, -3)$.

1.19. $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(-\sqrt{3}, 1)$.

1.20. $A(-\sqrt{3}, -1)$, $B(\sqrt{3}, -1)$.

1.21. $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$.

1.22. $A(0, -2)$, $B(0, 2)$.

Найти декартовы координаты точек, заданных в полярных координатах:

1.23. $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$.

1.24. $A\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $C(3, \pi)$.

1.25. $A\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$, $B\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$.

1.26. $A\left(1, \frac{7\pi}{6}\right)$, $B\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$, $C\left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$.

1.27. $A\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$, $B\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $C(3, 2\pi)$.

1.28. $A\left(1, \frac{11\pi}{6}\right)$, $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C(1, 0)$.

Найти и изобразить в декартовых и полярных координатах точки, симметричные данным, относительно оси Ox, относительно оси Oy (полярная ось совпадает с положительным лучом Ox):

1.29. $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$.

1.30. $A(1, 1)$, $B(-3, -3)$.

1.31. $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(-\sqrt{3}, 1)$.

1.32. $A(-\sqrt{3}, -1)$, $B(\sqrt{3}, -1)$.

1.33. $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$.

1.34. $A(0, -2)$, $B(0, 2)$.

Найти и изобразить точки, симметричные координатным плоскостям для заданных точек:

1.35. $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$.

1.36. $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$, $C(0, 0, -2)$.

1.37. $A(1, 2, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 1, -1)$.
1.38. $A(-2, 1, 0)$, $B(0, -2, 2)$, $C(1, 1, 0)$.
1.39. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, -2)$, $C(-1, -2, 2)$.
1.40. $A(1, -2, -1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$.
1.41. $A(1, 2, -1)$, $B(1, -2, 2)$, $C(-1, 2, 2)$.
1.42. $A(3, 1, -2)$, $B(3, -2, 2)$, $C(-1, -2, -3)$.

2.
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Определить, лежат ли на данной прямой указанные точки:

2.1. $y = 3x - 1$, $A(1, 2)$, $B(0, 1)$.
2.2. $y = -2x + 3$, $A(1, 0)$, $B(1, -1)$.
2.3. $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$, $A(0,1)$, $B(2,1)$.
2.4. $y + 1 = 3(x - 1)$, $A(1, -1)$, $B(0, -4)$.
2.5. $\frac{y-1}{3}=\frac{x+1}{2}$, $A(1,0)$, $B(-1,1)$.
2.6. $\frac{y-2}{0}=\frac{x-1}{1}$, $A(2,2)$, $B(1,2)$.
2.7. $2x-3y+1=0$, $A\left(\frac{1}{2},1\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},0\right)$.
2.8. $3x+2y-2=0$, $A(0,1)$, $B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.
2.9. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$, $A(1,1)$, $B(-2,0)$.
2.10. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, $A(3,2)$, $B(0,-2)$.

Найти вторую координату точки, лежащей на данной прямой:

2.11. $y = 2x + 2$, $A(x, 3)$, $B(-1, y)$.
2.12. $y = -x + 2$, $A(x, -2)$, $B(3, y)$.
2.13. $3x - 2y + 1 = 0$, $A(x, 1)$, $B(1, y)$.
2.14. $2x + 3y - 1 = 0$, $A(x, 1)$, $B(2, y)$.
2.15. $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-1}{2}$, $A(x,1)$, $B(2,y)$.

2.16. $\frac{y+1}{2}=\frac{x+2}{-3}$, $A(x,-2)$, $B(-1,y)$.

2.17. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}=1$, $A(x,-1)$, $B(2,y)$.

2.18. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1$, $A(x,-1)$, $B(2,y)$.

2.19. $x = 3$, $A(x, 2)$, $B(3, y)$.

2.20. $y = -2$, $A(x, -2)$, $B(3, y)$.

Составить уравнение и построить прямую, зная угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

2.21. $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=1$. **2.22.** $k=-\sqrt{3}$, $b=2$.

2.23. $k=-1$, $b=-2$. **2.24.** $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=-1$.

2.25. $k = 0$, $b = -1$. **2.26.** $k = -1$, $b = 0$.

Построить прямую и найти угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

2.27. $2x - 3y + 1 = 0$. **2.28.** $3x + 2y - 1 = 0$.

2.29. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. **2.30.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$.

2.31. $\frac{y-1}{3}=\frac{x+1}{-2}$. **2.32.** $\frac{y+1}{-3}=\frac{x-1}{2}$.

2.33. $x - 2 = 0$. **2.34.** $y + 1 = 0$.

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку, зная ее угловой коэффициент k:

2.35. $M(1, 3)$, $k = -1$. **2.36.** $M(-1, -3)$, $k = 1$.

2.37. $M(-1,2)$, $k=\sqrt{3}$. **2.38.** $M(1,2)$, $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.39. $M(1, -2)$, $k = 0$. **2.40.** $M(3, -1)$, $k = \infty$.

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно данной прямой:

2.41. $M(1,3)$, $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. **2.42.** $M(-1,2)$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$.

2.43. $M(2, 1)$, $x - 3 = 0$. **2.44.** $M(-2, 1)$, $y + 1 = 0$.

2.45. $M(1, 3)$, $2x - 3y + 1 = 0$.

2.46. $M(-1, -2)$, $3x + 2y -1 = 0$.

Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной прямой:

2.47. $M(1,3)$, $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. **2.48.** $M(-1,2)$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$.

2.49. $M(2, 1)$, $x-3=0$. **2.50.** $M(-2, 1)$, $y+1=0$.

2.51. $M(1, 3)$, $2x-3y+1=0$.

2.52. $M(-1, -2)$, $3x+2y-1=0$.

Составить уравнение и построить прямую, проходящую через две заданные точки, и найти ее угловой коэффициент:

2.53. $A(-1, 3)$, $B(0, 2)$. **2.54.** $A(1, -3)$, $B(0, 1)$.

2.55. $A(1, -2)$, $B(2, 0)$. **2.56.** $A(-1, 3)$, $B(2, 0)$.

2.57. $A(1, 1)$, $B(1, -3)$. **2.58.** $A(-1, -1)$, $B(2, -1)$.

Составить уравнение и построить прямую, зная отрезки, отсекаемые ею на осях координат, найти угловой коэффициент прямой:

2.59. $a=1$, $b=-2$. **2.60.** $a=2$, $b=-1$.

2.61. $a=0$, $b=2$. **2.62.** $a=-2$, $b=0$.

2.63. $a=\infty$, $b=-1$. **2.64.** $a=1$, $b=\infty$.

Найти точки пересечения данной прямой с координатными осями:

2.65. $2x-3y+1=0$. **2.66.** $3x+2y-1=0$.

2.67. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. **2.68.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$.

2.69. $\frac{y-1}{3}=\frac{x+1}{-2}$. **2.70.** $\frac{y+1}{-3}=\frac{x-1}{2}$.

Найти точки пересечения данных прямых:

2.71. $3y-4x-1=0$, $3x+4y-18=0$.

2.72. $2x-3y-6=0$, $4x-6y-5=0$.

2.73. $y=2x-1$, $y=-x+2$.

2.74. $y=-2x+1$, $y=x-2$.

2.75. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$.

2.76. $x+2y-1=0$, $2x+4y-2=0$.

2.77. $y=2x-4$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$.

2.78. $y=2x-4$, $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$.

Найти угол между данными прямыми:
2.79. $5x - y + 7 = 0,\ \ 3x + 2y = 0.$
2.80. $3x - 2y + 7 = 0,\ \ 2x + 3y - 3 = 0.$
2.81. $x - 2y - 4 = 0,\ \ 2x - 4y + 3 = 0.$
2.82. $3x + 2y - 1 = 0,\ \ 5x - 2y + 3 = 0.$
2.83. $y = 3x + 5,\ \ y = -2x + 7.$
2.84. $y = \sqrt{3}x,\ \ y = -\sqrt{3}x.$
2.85. $y = x - 1,\ \ y = 0.$
2.86. $y = -x + 1,\ \ y = 0.$
2.87. $y = \sqrt{3}x - 2,\ \ x = 2.$
2.88. $y = -\sqrt{3}x + 1,\ \ x = -1.$

3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определить, лежат ли указанные точки на данных кривых:
3.1. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0,\ \ M(1, -3).$
3.2. $8x^2 + 5y^2 - 77 = 0,\ \ M(-2, 3).$
3.3. $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0,\ \ M(13, -6).$
3.4. $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0,\ \ M(-3, 1).$
3.5. $16x^2 - 9y^2 = 144,\ \ M(-3{,}75, 3).$
3.6. $16x^2 - 9y^2 = -144,\ \ M(2, 5).$
3.7. $y^2 = 4x - 8,\ \ M(3, -2).$
3.8. $x^2 = 7y + 2,\ \ M(4, 2).$

Построить окружность, определить, как расположены относительно нее указанные точки:
3.9. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0,\ \ M(4, 0).$
3.10. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0,\ \ M(0, 3).$
3.11. $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0,\ \ M(1{,}5, 1).$
3.12. $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 0{,}5 = 0,\ \ M(1, 2).$
3.13. $2x^2 + 2y^2 - 3x - 5y + 3 = 0,\ \ M(1, 2).$
3.14. $2x^2 + 2y^2 - 5x + 5y + 3 = 0,\ \ M(1, 1).$
3.15. $0{,}5x^2 + 0{,}5y^2 + 2{,}5x - 3{,}5y + 1{,}3 = 0,\ \ M(0, 0).$
3.16. $1{,}2x^2 + 1{,}2y^2 - 3{,}6x + 4{,}8y - 7 = 0,\ \ M(1, 1).$

Построить эллипс, определить, как расположены относительно него указанные точки:
3.17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,\ \ M(0, -3).$
3.18. $9x^2 + 25y^2 = 1,\ \ M(3, 0).$

3.19. $x^2 + 25y^2 = 25$, $M(2, 1)$.
3.20. $25x^2 + y^2 = 25$, $M(0, 2)$.
3.21. $8x^2 + 5y^2 = 77$, $M(-2, 3)$.
3.22. $8x^2 + 5y^2 = 77$, $M(2, -3)$.
3.23. $8x^2 + 5y^2 = 77$, $M(-2, 4)$.
3.24. $8x^2 + 5y^2 = 77$, $M(-2, 2)$.

Построить гиперболу, определить, принадлежат ли ей указанные точки:

3.25. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $M(3,0)$.

3.26. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$, $M(0,1)$.

3.27. $x^2 - 25y^2 = 25$, $M(1, 1)$.

3.28. $25x^2 - y^2 = -25$, $M(-1, 0)$.

3.29. $4x^2 - 9y^2 = 1$, $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

3.30. $9x^2 - 4y^2 = -1$, $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

3.31. $5x^2 - 7y^2 = 70$, $M(6, 0)$.
3.32. $7x^2 - 5y^2 = -35$, $M\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

Построить параболу, определить, принадлежат ли ей указанные точки:

3.33. $y^2 = 4x - 8$, $M(1, -2)$.
3.34. $y^2 = 6 - 3x$, $M(2, 0)$.
3.35. $y^2 = 4 - 4x$, $M(2, 4)$.
3.36. $y^2 = 6 + 2x$, $M(5, -4)$.
3.37. $x^2 = 2y - 4$, $M(-2, 4)$.
3.38. $x^2 = 3y + 6$, $M(-3, 1)$.
3.39. $x^2 = 4 - 4y$, $M(-4, 3)$.
3.40. $x^2 = 6 - 3y$, $M(3, 1)$.

Установить, какие кривые (или части кривых) определяются данными уравнениями, и построить их:

3.41. $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.
3.42. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.
3.43. $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$.
3.44. $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.
3.45. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.
3.46. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.47. $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$.

3.48. $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

3.49. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

3.50. $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

3.51. $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

3.52. $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

3.53. $y = 4x^2 - 8x + 7$.

3.54. $x = 2y^2 - 12y + 14$.

3.55. $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$.

3.56. $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$.

3.57. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 0$.

3.58. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 0$.

3.59. $x^2 = 4$.

3.60. $y^2 = 9$.

3.61. $x^2 = 0$.

3.62. $y^2 = 0$.

3.63. $x^2 + 2y^2 = -4$.

3.64. $x^2 - 2y^2 = -4$.

Найти точки пересечения данной кривой и прямой, построить график:

3.65. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0,\ \ y = x - 1$.

3.66. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0,\ \ y = -x - 1$.

3.67. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1,\ \ 3x - 2y - 20 = 0$.

3.68. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1,\ \ x + 6y - 20 = 0$.

3.69. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,\ \ 5x - 6y - 16 = 0$.

3.70. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,\ \ 13x - 10y - 48 = 0$.

3.71. $x^2 = 4y,\ \ x + y - 3 = 0$.

3.72. $y^2 = -9x,\ \ 3x + 4y - 12 = 0$.

Найти точки пересечения данных кривых, построить график:

3.81. $x^2 + 9y^2 - 45 = 0,\ \ x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$.

3.82. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,\ \ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$.

3.83. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1,\ y^2=24x.$

3.84. $7x-y+12=0,\ x^2+y^2-4x-2y-20=0.$

3.85. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1,\ y^2=3x.$

3.86. $y=x^2-2x+1,\ x=y^2-6x+7.$

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Вычислить определители второго порядка:

4.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$ **4.2.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$ **4.3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}.$

4.4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$ **4.5.** $\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{vmatrix}.$ **4.6.** $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}.$

Вычислить определители третьего порядка:

4.7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$ **4.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

4.9. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$ **4.10.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

4.11. $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & y \end{vmatrix}.$ **4.12.** $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$

Вычислить определители третьего порядка разложением по строке или столбцу:

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$ **4.14.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

4.15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.16. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

4.17. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

4.18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

4.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

4.20. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители четвертого порядка:

4.21. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

4.22. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4.23. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

4.24. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

4.25. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

4.26. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

Доказать, что определитель равен нулю, не вычисляя его:

4.27. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4.28. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4.29. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

4.30. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

4.31. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **4.32.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.33. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **4.34.** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -9 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить систему двух линейных уравнений по правилу Крамера:

4.35. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$ **4.36.** $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

4.37. $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ 4x-6y=5. \end{cases}$ **4.38.** $\begin{cases} 2y-x=3, \\ 2x-4y=4. \end{cases}$

4.39. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 5x+y=0. \end{cases}$ **4.40.** $\begin{cases} 3y+x=0, \\ 3x-y=0. \end{cases}$

Решить систему трех линейных уравнений по правилу Крамера:

4.41. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ **4.42.** $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$ **4.44.** $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7. \end{cases}$

4.45. $\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$ **4.46.** $\begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3. \end{cases}$

5. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Заданы длины векторов $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ и угол между ними. Изобразить вектор $\vec{c}$ (начала всех векторов в одной точке):

5.1. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$

5.2. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$

5.3. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}.$

5.4. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}.$

5.5. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{2},\ \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}.$

5.6. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{2},\ \vec{c}=\vec{b}-2\vec{a}.$

5.7. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}.$

5.8. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=-\frac{2\pi}{3},\ \vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}.$

Найти координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если заданы координаты его начала (A) и конца (B):

5.9. $A(2,\ 1),\ \ B(1,\ -2).$

5.10. $A(-3,\ 2),\ \ B(0,\ 2).$

5.11. $A(-1,-1),\ \ B\left(\frac{2}{3},-\frac{3}{5}\right).$

5.12. $A(1{,}5,\ 2{,}6),\ \ B(1,\ -2).$

5.13. $A(1,\ -2,\ 2),\ \ B(2,\ 3,\ -1).$

5.14. $A(-3,\ -2,\ 1),\ \ B(2,\ -3,\ -2).$

5.15. $A\left(-\frac{3}{2},2,0\right),\ \ B\left(\frac{2}{3},1,-\frac{3}{4}\right).$

5.16. $A(0{,}6,\ 0,\ -1{,}2),\ \ B(-0{,}6,\ -0{,}5,\ 0{,}25).$

Изобразить вектора, если заданы их координаты. Записать разложение данных векторов по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

5.17. $\vec{a}=\{1,2\},\ \vec{b}=\{-1,2\}.$ **5.18.** $\vec{a}=\{1,-2\},\ \vec{b}=\{-1,-2\}.$

5.19. $\vec{a}=\{0,3\},\ \vec{b}=\{2,0\}.$ **5.20.** $\vec{a}=\{0,-2\},\ \vec{b}=\{-3,0\}.$

5.21. $\vec{a}=\{1,1,2\}$, $\vec{b}=\{-1,3,2\}$.
5.22. $\vec{a}=\{1,-1,2\}$, $\vec{b}=\{1,-3,1\}$.
5.23. $\vec{a}=\{-1,-1,0\}$, $\vec{b}=\{-1,0,-1\}$.
5.24. $\vec{a}=\{0,1,-1\}$, $\vec{b}=\{0,-1,-1\}$.

Заданы координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$ и вычислить его длину:

5.25. $\vec{a}=\{1,2\}$, $\vec{b}=\{-1,2\}$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.
5.26. $\vec{a}=\{1,-2\}$, $\vec{b}=\{-1,-2\}$, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.
5.27. $\vec{a}=\{0,3\}$, $\vec{b}=\{2,0\}$, $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.
5.28. $\vec{a}=\{0,-2\}$, $\vec{b}=\{-3,0\}$, $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$.
5.29. $\vec{a}=\{1,1,2\}$, $\vec{b}=\{-1,3,2\}$, $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$.
5.30. $\vec{a}=\{1,-1,2\}$, $\vec{b}=\{1,-3,1\}$, $\vec{c}=\vec{b}-2\vec{a}$.
5.31. $\vec{a}=\{-1,-1,0\}$, $\vec{b}=\{-1,0,-1\}$, $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.
5.32. $\vec{a}=\{0,1,-1\}$, $\vec{b}=\{0,-1,-1\}$, $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

Заданы координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}$ и его координаты. Найти координаты конца вектора:

5.33. $A(2,1)$, $\overrightarrow{AB}=\{-1,0\}$.
5.34. $A(-2,2)$, $\overrightarrow{AB}=\{0,2\}$.
5.35. $A(0,-1)$, $\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$.
5.36. $A(1,0)$, $\overrightarrow{AB}=\{0{,}75, 0{,}3\}$.
5.37. $A(-2,1,3)$, $\overrightarrow{AB}=\{-1,0,2\}$.
5.38. $A(2,-1,-1)$, $\overrightarrow{AB}=\{1,-2,0\}$.
5.39. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right\}$.
5.40. $A(0{,}2, 1, 0{,}25)$, $\overrightarrow{AB}=\{0{,}7, 0{,}3, 0{,}8\}$.

Заданы координаты вершин треугольника. Найти координаты точек пересечения сторон и медиан треугольника:

5.41. $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$, $C(2, 0)$.
5.42. $A(-2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(0, 3)$.
5.43. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 2)$, $C(-1, 1, 2)$.
5.44. $A(-2, 1, 1)$, $B(0, 0, 0)$, $C(3, -2, 1)$.
5.45. $A(2, -3, 2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 5, 4)$.
5.46. $A(3, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(-1, 2, 1)$.

Заданы три вершины параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины и точки пересечения диагоналей:

5.47. $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, 2)$.
5.48. $A(4, 1)$, $B(0, 0)$, $D(1, 0)$.

5.49. $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(-4, 1)$.
5.50. $B(-3, 2)$, $C(0, 2)$, $D(5, 0)$.
5.51. $A(0, 0, 0)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(2, 3, 5)$.
5.52. $B(0, 0, 0)$, $C(0, -2, 3)$, $D(-2, 1, 1)$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.53. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.
5.54. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.
5.55. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.
5.56. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.
5.57. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\varphi=0$.
5.58. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\varphi=\pi$.
5.59. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.
5.60. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$:

5.61. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$.
5.62. $\vec{a}=\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$.
5.63. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$.
5.64. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\vec{q}$.
5.65. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}$.
5.66. $\vec{a}=\frac{1}{5}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}$.

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.67. $\vec{a}=\{2,1\}$, $\vec{b}=\{-1,3\}$.
5.68. $\vec{a}=\{0,-3\}$, $\vec{b}=\{3,1\}$.
5.69. $\vec{a}=\{-1,2,1\}$, $\vec{b}=\{2,0,2\}$.
5.70. $\vec{a}=\{2,-2,1\}$, $\vec{b}=\{1,2,2\}$.
5.71. $\vec{a}=\{2,3,7\}$, $\vec{b}=\{-2,1,1\}$.
5.72. $\vec{a}=\{1,-3,5\}$, $\vec{b}=\{2,1,1\}$.
5.73. $\vec{a}=\left\{3,-2,\frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}=\left\{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{2}\right\}$.
5.74. $\vec{a}=\left\{-\frac{1}{4},2,1\right\}$, $\vec{b}=\left\{1,\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right\}$.

Выяснить, являются ли ортогональными вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.75. $\vec{a}=\{3,1\}$, $\vec{b}=\{-1,3\}$.
5.76. $\vec{a}=\{0,2\}$, $\vec{b}=\{-2,0\}$.

5.77. $\vec{a}=\{1,3,2\},\ \vec{b}=\{-3,1,0\}$.
5.78. $\vec{a}=\{2,1,-1\},\ \vec{b}=\{1,0,2\}$.
5.79. $\vec{a}=\{1,-2,1\},\ \vec{b}=\{2,1,3\}$.
5.80. $\vec{a}=\{-2,1,2\},\ \vec{b}=\{2,3,2\}$.
5.81. $\vec{a}=\{-2,1,3\},\ \vec{b}=\{2,1,1\}$.
5.82. $\vec{a}=\{3,1,-2\},\ \vec{b}=\{3,1,5\}$.

Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.83. $\vec{a}=\{2,2\},\ \vec{b}=\{3,0\}$.
5.84. $\vec{a}=\{-1,1\},\ \vec{b}=\{2,0\}$.
5.85. $\vec{a}=\{0,-2\},\ \vec{b}=\left\{1,\sqrt{3}\right\}$.
5.86. $\vec{a}=\left\{-2,-2\sqrt{3}\right\},\ \vec{b}=\left\{1,-\sqrt{3}\right\}$.
5.87. $\vec{a}=\{2,-1,2\},\ \vec{b}=\{-4,2,-4\}$.
5.88. $\vec{a}=\left\{1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\},\ \vec{b}=\left\{\sqrt{3},3,-3\right\}$.
5.89. $\vec{a}=\{0,1,1\},\ \vec{b}=\{1,1,0\}$.
5.90. $\vec{a}=\{-2,0,2\},\ \vec{b}=\{0,2,-2\}$.
5.91. $\vec{a}=\{2,-4,4\},\ \vec{b}=\{-3,2,6\}$.
5.92. $\vec{a}=\{3,1,-1\},\ \vec{b}=\{-1,3,2\}$.

Выяснить, является ли прямоугольным треугольник ABC:

5.93. $A(0,\ 0),\ \ B(3,\ 3),\ \ C(-4,\ 4)$.
5.94. $A(-1,\ -2),\ \ B(2,\ 1),\ \ C(4,\ -1)$.
5.95. $A(-3,\ 5,\ 6),\ \ B(1,\ -5,\ 7),\ \ C(8,\ -3,\ -1)$.
5.96. $A(1,\ -5,\ 7),\ \ B(8,\ -3,\ -1),\ \ C(4,\ 7,\ -2)$.
5.97. $A(2,\ -3,\ 2),\ \ B(1,\ -2,\ 1),\ \ C(3,\ 5,\ 4)$.
5.98. $A(3,\ 0,\ 3),\ \ B(1,\ 1,\ 2),\ \ C(-1,\ 2,\ 1)$.

Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.101. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

5.102. $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=5,\ \varphi=\dfrac{2\pi}{3}$.

5.103. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ \varphi=0$.

5.104. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \varphi=\pi$.

5.105. $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

5.106. $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \varphi=\dfrac{5\pi}{6}$.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{6}$:

5.107. $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-\vec{q}.$

5.108. $\vec{a}=\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}.$

5.109. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}.$

5.110. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\vec{q}.$

5.111. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}.$

5.112. $\vec{a}=\frac{1}{5}\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{q}.$

Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Убедиться, что вектор $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

5.113. $\vec{a}=\{2,1\},\ \vec{b}=\{-1,3\}.$

5.114. $\vec{a}=\{0,-3\},\ \vec{b}=\{3,1\}.$

5.115. $\vec{a}=\{-1,2,1\},\ \vec{b}=\{2,0,2\}.$

5.116. $\vec{a}=\{2,-2,1\},\ \vec{b}=\{1,2,2\}.$

5.117. $\vec{a}=\{2,3,7\},\ \vec{b}=\{-2,1,1\}.$

5.118. $\vec{a}=\{1,-3,5\},\ \vec{b}=\{2,1,1\}.$

5.119. $\vec{a}=\left\{3,-2,\frac{1}{5}\right\},\ \vec{b}=\left\{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{2}\right\}.$

5.120. $\vec{a}=\left\{-\frac{1}{4},2,1\right\},\ \vec{b}=\left\{1,\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right\}.$

Определить, коллинеарны ли данные вектора:

5.121. $\vec{a}=\{1,2\},\ \vec{b}=\{-2,4\}.$

5.122. $\vec{a}=\{-1,3\},\ \vec{b}=\{-2,6\}$

5.123. $\vec{a}=\{2,1\},\ \vec{b}=\{2,2\}.$

5.124. $\vec{a}=\{-1,3\},\ \vec{b}=\{-2,3\}.$

5.125. $\vec{a}=\{1,-1,2\},\ \vec{b}=\{2,-2,4\}.$

5.126. $\vec{a}=\{1,-1,2\},\ \vec{b}=\{2,-1,1\}.$

5.127. $\vec{a}=\{-1,1,-2\},\ \vec{b}=\{2,-1,1\}.$

5.128. $\vec{a}=\{-1,1,-2\},\ \vec{b}=\{1,-1,2\}.$

Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, и вычислить его площадь:

5.129. $A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 4),\ \ C(4,\ 8),\ \ D(4,\ 4).$

5.130. $A(-1,\ -4),\ \ B(-1,\ 1),\ \ C(2,\ -2),\ \ D(2,\ -7).$

5.131. $A(-2, 1)$, $B(-4, 6)$, $C(1, 7)$, $D(3, 2)$.
5.132. $A(-2, -3)$, $B(0, 2)$, $C(3, 5)$, $D(1, 0)$.
5.133. $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 2, 3)$, $D(2, 0, 2)$.
5.134. $A(0, 0, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $C(3, 0, 3)$, $D(1, 2, 2)$.
5.135. $A(1, -2, -3)$, $B(3, 1, 4)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-1, -1, -2)$.
5.136. $A(2, 2, -1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(5, 0, 5)$, $D(4, 3, 0)$.

Вычислить площадь треугольника ABC:

5.137. $A(0, 0)$, $B(3, 3)$, $C(-4, 4)$.
5.138. $A(-1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(4, -1)$.
5.139. $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$.
5.140. $A(1, -5, 7)$, $B(8, -3, -1)$, $C(4, 7, -2)$.
5.141. $A(2, -3, 2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 5, 4)$.
5.142. $A(3, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, 2, 1)$.
5.143. $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$.
5.144. $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

5.145. $\vec{a} = \{2, 0, 0\}$, $\vec{b} = \{3, 2, -1\}$, $\vec{c} = \{1, -1, 3\}$.
5.146. $\vec{a} = \{0, -3, 0\}$, $\vec{b} = \{2, 4, -1\}$, $\vec{c} = \{-1, -2, 3\}$.
5.147. $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$, $\vec{c} = \{2, -1, 2\}$.
5.148. $\vec{a} = \left\{2, -1, \dfrac{2}{3}\right\}$, $\vec{b} = \left\{\dfrac{1}{2}, 2, -1\right\}$, $\vec{c} = \{2, -1, 5\}$.
5.149. $\vec{a} = \{-1, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 0, 2\}$, $\vec{c} = \{1, 2, 3\}$.
5.150. $\vec{a} = \{-1, 1, -2\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{2, -2, 4\}$.

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

5.151. $\vec{a} = \{1, 1, 1\}$, $\vec{b} = \{4, 3, 0\}$, $\vec{c} = \{1, 0, 3\}$.
5.152. $\vec{a} = \{2, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{3, 2, 1\}$, $\vec{c} = \{1, -2, 9\}$.
5.153. $\vec{a} = \{1, -5, 0\}$, $\vec{b} = \{3, 2, 1\}$, $\vec{c} = \{1, -1, 3\}$.
5.154. $\vec{a} = \{1, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{-7, 2, -1\}$, $\vec{c} = \{1, 4, 3\}$.

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в заданных точках:

5.155. $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$, $D(6, -3, 8)$.
5.156. $A(2, -4, -3)$, $B(5, -6, 0)$, $C(-1, 3, -3)$, $D(-10, -8, 7)$.
5.157. $A(-3, -5, 6)$, $B(2, 1, -4)$, $C(0, -3, -1)$, $D(-5, 2, -8)$.
5.158. $A(-2, -1, -1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(3, 1, -4)$, $D(-4, 7, 3)$.

Определить, лежат ли данные точки в одной плоскости:

5.159. $A(1, -2, -3)$, $B(3, 1, 4)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-1, -1, -2)$.
5.160. $A(2, 2, -1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(5, 0, 5)$, $D(4, 3, 0)$.

5.161. $A(1, 2, 2)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 1, 1)$, $D(1, 1, 2)$.

5.162. $A(2, 3, 1)$, $B(1, -1, 7)$, $C(5, 5, 5)$, $D(1, -6, 0)$.

5.163. $A(2, -3, 2)$, $B(1, -2, 1)$, $C(3, 5, 4)$.

5.164. $A(3, 0, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(-1, 2, 1)$.

Определить, является тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правой или левой:

5.165. $\vec{a} = \{1,1,1\}$, $\vec{b} = \{4,-1,0\}$, $\vec{c} = \{1,0,0\}$.

5.166. $\vec{a} = \{1,0,0\}$, $\vec{b} = \{0,3,0\}$, $\vec{c} = \{1,0,3\}$.

5.167. $\vec{a} = \{2,-2,1\}$, $\vec{b} = \{1,2,-1\}$, $\vec{c} = \{2,1,2\}$.

5.168. $\vec{a} = \{1,3,1\}$, $\vec{b} = \{0,2,0\}$, $\vec{c} = \{2,-1,2\}$.

6. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определить, какие уравнения задают плоскость в пространстве соответствующих переменных:

6.1. $3x + 4y + 5z^2 - 1 = 0$. **6.2.** $x - 2y = 0$.

6.3. $2t + xu + x + 99 = 0$. **6.4.** $2x - 2y - 2z + w = 0$.

6.5. $x^2 = 4$. **6.6.** $y^2 = 0$.

6.7. $z - 2y + x = 0$. **6.8.** $z = 2x - 3y$.

6.9. $u = t + 3u - v$. **6.10.** $w = 2x$.

Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно нормальному вектору $\vec{N}$:

6.11. $M_0(1,2,0)$, $\vec{N} = \{-3,2,1\}$.

6.12. $M_0(0,0,0)$, $\vec{N} = \{-1,3,-2\}$.

6.13. $M_0(-2,1,1)$, $\vec{N} = \{3,-1,-1\}$.

6.14. $M_0(3,-2,-1)$, $\vec{N} = \{-1,2,-3\}$.

6.15. $M_0(3,-2,3)$, $\vec{N} = \{1,0,0\}$.

6.16. $M_0(2,0,-1)$, $\vec{N} = \{0,1,0\}$.

Найти нормальный вектор и какую-либо точку данной плоскости:

6.17. $2x + 3y - z + 1 = 0$. **6.18.** $x - 2y + z - 3 = 0$.

6.19. $x - 2y = 0$. **6.20.** $z + 3x = 0$.

6.21. $x = 2$. **6.22.** $y = -3$.

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 2, 3)$ параллельно данной плоскости:

6.23. $2x + 3y - z + 1 = 0$. **6.24.** $-2x + y + 5z - 3 = 0$.

6.25. $3x + 5y = 0$. **6.26.** $2x - 3z = 0$.

6.27. $y = -2$. **6.28.** $z = -3$.

Плоскость отсекает на координатных осях отрезки a, b, c. Записать уравнение этой плоскости и преобразовать его к общему виду:

6.29. $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$

6.30. $a = -1, \quad b = 3, \quad c = -2.$

6.31. $a = -3, \quad b = 2, \quad c = \infty.$

6.32. $a = -1, \quad b = \infty, \quad c = 3.$

6.33. $c = 2, \quad b = \infty, \quad a = \infty.$

6.34. $b = -1, \quad a = \infty, \quad c = 0.$

Определить, какие отрезки отсекает на координатных осях данная плоскость:

6.35. $2x + 3y - z + 6 = 0.$ **6.36.** $x - 3y + 4z - 12 = 0.$

6.37. $z = 2 - 3y + x.$ **6.38.** $z = 2x - 3y + 2.$

6.39. $2x + 3y - 1 = 0.$ **6.40.** $2y - 3z + 1 = 0.$

6.41. $x - 3 = 0.$ **6.42.** $z + 2 = 0.$

Найти объем тетраэдра $V = \frac{1}{3} S_g h,$ образованного координатными плоскостями и заданной плоскостью:

6.43. $2x + 3y - z + 6 = 0.$ **6.44.** $x - 3y + 4z - 12 = 0.$

6.45. $-x + 2y + z + 3 = 0.$ **6.46.** $2x - y + 3z + 1 = 0.$

6.47. $M_0(-2,1,1), \quad \vec{N} = \{3,1,-1\}.$

6.48. $M_0(3,-2,-1), \quad \vec{N} = \{-1,2,3\}.$

Изобразить плоскость, заданную уравнением:

6.49. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$ **6.50.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-4} = 1.$

6.51. $x = 3, y = -1, y = 2.$ **6.52.** $x = -2, z = 2, z = -2.$

6.53. $x - y = 0, \quad y = 2x.$ **6.54.** $x + y = 0, \quad y = -2x.$

6.55. $z = 2x, \quad z = -2y.$ **6.56.** $z = -x, \quad z = y.$

6.57. $x - y + 2 = 0.$ **6.58.** $z + x - 1 = 0.$

Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, определить, какие отрезки она отсекает на координатных осях:

6.59. $M_1(2, 3, 2), \quad M_2(1, 0, 0), \quad M_3(0, -2, 0).$

6.60. $M_1(0, 0, -3), \quad M_2(3, 1, -1), \quad M_3(0, 2, 0).$

6.61. $M_1(0, 0, 2), \quad M_2(-1, 1, 1), \quad M_3(2, 1, 1).$

6.62. $M_1(3, 1, 2), \quad M_2(1, 0, 0), \quad M_3(2, 1, 2).$

6.63. $M_1(1, -1, 2), \quad M_2(0, 1, -3), \quad M_3(-1, 2, 0).$

6.64. $M_1(0, 1, -2), \quad M_2(-1, 3, 2), \quad M_3(-1, -1, 0).$

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам:

6.65. $M_0(0,0,0)$, $\vec{a}=\{1,2,-1\}$, $\vec{b}=\{1,0,1\}$.

6.66. $M_0(0,0,0)$, $\vec{a}=\{0,1,2\}$, $\vec{b}=\{3,-1,1\}$.

6.67. $M_0(1,2,-1)$, $\vec{a}=\{2,1,3\}$, $\vec{b}=\{0,0,2\}$.

6.68. $M_0(0,-2,3)$, $\vec{a}=\{-1,3,1\}$, $\vec{b}=\{1,0,0\}$.

6.69. $M_0(2,1,3)$, $\vec{a}=\{3,0,0\}$, $\vec{b}=\{0,2,0\}$.

6.70. $M_0(1,-1,2)$, $\vec{a}=\{0,-1,0\}$, $\vec{b}=\{1,0,0\}$.

7. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти канонические уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно направляющему вектору $\vec{P}$. Преобразовать эти уравнения к общему виду:

7.1. $M_0(2,1,3)$, $\vec{P}=\{-4,5,6\}$.

7.2. $M_0(-1,2,-1)$, $\vec{P}=\{2,-3,5\}$.

7.3. $M_0(0,1,2)$, $\vec{P}=\{1,-2,0\}$.

7.4. $M_0(2,0,1)$, $\vec{P}=\{0,-2,3\}$.

7.5. $M_0(0,1,0)$, $\vec{P}=\{0,3,0\}$.

7.6. $M_0(-5,1,3)$, $\vec{P}=\{0,0,2\}$.

7.7. $M_0\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{3}\right)$, $\vec{P}=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{3}\right\}$.

7.8. $M_0\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{P}=\left\{0,\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right\}$.

Найти канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

7.9. $M_1(2, 3, 2)$, $M_2(1, 0, 0)$.

7.10. $M_1(0, 0, -3)$, $M_2(3, 1, -1)$.

7.11. $M_1(0, 0, 2)$, $M_2(-1, 1, 1)$.

7.12. $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(1, 0, 0)$.

7.13. $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(0, 1, -3)$.

7.14. $M_1(0, 1, -2)$, $M_2(-1, 3, 2)$.

Найти какую-либо точку, лежащую на данной прямой:

7.15. $\begin{cases} x-3=0, \\ y+5=0. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} y+1=0, \\ z-3=0. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x-5=0, \\ y+2z-1=0. \end{cases}$ **7.18.** $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ z-2=0. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y-2z-2=0. \end{cases}$ **7.20.** $\begin{cases} 2x+z-3=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} 2x-3y+z-1=0, \\ 3x+2y-2z+5=0. \end{cases}$ **7.22.** $\begin{cases} x-2y+2z+1=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$

Найти какой-либо вектор, перпендикулярный двум заданным:

7.23. $\vec{a}=\{0,0,1\}$, $\vec{b}=\{1,2,3\}$.
7.24. $\vec{a}=\{1,0,0\}$, $\vec{b}=\{-3,2,-1\}$.
7.25. $\vec{a}=\{1,0,-1\}$, $\vec{b}=\{1,-3,2\}$.
7.26. $\vec{a}=\{3,-4,1\}$, $\vec{b}=\{0,-3,0\}$.
7.27. $\vec{a}=\{3,-2,7\}$, $\vec{b}=\{7,12,-5\}$.
7.28. $\vec{a}=\{-3,5,11\}$, $\vec{b}=\{-3,7,5\}$.

7.29. $\vec{a}=\left\{\frac{1}{2},3,-1\right\}$, $\vec{b}=\left\{1,-\frac{1}{3},5\right\}$.

7.30. $\vec{a}=\left\{\frac{1}{3},-1,1\right\}$, $\vec{b}=\{-1,3,-3\}$.

Привести к канонической форме общие уравнения прямой:

7.31. $\begin{cases} 2x-3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$ **7.32.** $\begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

7.33. $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$ **7.34.** $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

7.35. $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$ **7.36.** $\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x+3y+2z+14=0. \end{cases}$

Записать в параметрической форме данные канонические уравнения:

7.37. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$. **7.38.** $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{1}$.

7.39. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{3}$. **7.40.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{0}$.

7.41. $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{7}$. **7.42.** $\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{0}$.

Привести к параметрической форме общие уравнения прямой:

7.43. $\begin{cases}3x+2y+z-1=0,\\2x-3y-4z+6=0.\end{cases}$ **7.44.** $\begin{cases}-2x+3y+2z-1=0,\\x-3y+z+6=0.\end{cases}$

7.45. $\begin{cases}3x+z-1=0,\\-3y-2z+1=0.\end{cases}$ **7.46.** $\begin{cases}2y+z-2=0,\\2x+y-2z+6=0.\end{cases}$

Привести к общему виду данные уравнения прямой:

7.47. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-3}$. **7.48.** $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-1}$.

7.49. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+2}{3}$. **7.50.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{0}$.

7.51. $\begin{cases}x=2t,\\y=-t,\\z=t+1.\end{cases}$ **7.52.** $\begin{cases}x=t,\\y=-2t,\\z=3t.\end{cases}$ **7.53.** $\begin{cases}x=0,\\y=2t,\\z=2t-1.\end{cases}$

7.54. $\begin{cases}x=-t,\\y=0,\\z=t+2.\end{cases}$ **7.55.** $\begin{cases}x=0,\\y=-t+2,\\z=0.\end{cases}$ **7.56.** $\begin{cases}x=3t,\\y=0,\\z=0.\end{cases}$

8. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно прямой:

8.1. $M_0(1,2,3)$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-3}$.

8.2. $M_0(-1,0,2)$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-3}$.

8.3. $M_0(0,-2,1)$, $\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-3}$.

8.4. $M_0(1,2,0)$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{0}$.

8.5. $M_0(0,2,1)$, $\begin{cases} x=0, \\ y=2t, \\ z=2t-1. \end{cases}$

8.6. $M_0(0,2,1)$, $\begin{cases} x=-t, \\ y=0, \\ z=t+2. \end{cases}$

8.7. $M_0(-2,2,1)$, $\begin{cases} x=0, \\ y=-t+2, \\ z=0. \end{cases}$

8.8. $M_0(-2,0,1)$, $\begin{cases} x=3t, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$

8.9. $M_0(-2,-3,1)$, $\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y-2z-2=0. \end{cases}$

8.10. $M_0(-2,3,1)$, $\begin{cases} x-2y+2z+1=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$

Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно плоскости:

8.11. $M_0(1, 2, 3)$, $2x + 3y - z + 1 = 0$.

8.12. $M_0(-2, 0, 1)$, $-2x + y + 5z - 3 = 0$.

8.13. $M_0(-2, 2, 1)$, $3x + 5y = 0$.

8.14. $M_0(-2, -3, 1)$, $2x - 3z = 0$.

8.15. $M_0(0,2,1)$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3}=1$.

8.16. $M_0(3,2,1)$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-4}=1$.

8.17. $M_0(-1, 2, -1)$, $x = 0$.

8.18. $M_0(5, 3, -4)$, $z = 3$.

Определить, пересекаются ли прямая и плоскость, и найти точку пересечения:

8.19. $\begin{cases} x=0, \\ y=2t, \\ z=2t-1, \end{cases}$ $x+2y+1=0$.

8.20. $\begin{cases} x=-t, \\ y=0, \\ z=t+2, \end{cases}$ $2x+5z-1=0$.

8.21. $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 3t-1, \end{cases}$ $\quad -3x + z + 4 = 0.$

8.22. $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 2t-2, \end{cases}$ $\quad -3x + 2y - z - 2 = 0.$

8.23. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, $\ 2x + 3y - z + 1 = 0.$

8.24. $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+4}{1}$, $\ -2x + y + 5z - 3 = 0.$

8.25. $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z+2}{3}$, $\ x + 2y - 3z + 1 = 0.$

8.26. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{0}$, $\ x - y - z + 4 = 0.$

Найти точку M_1, симметричную точке M_0 относительно заданной плоскости:

8.27. $M_0(-2, 0, 3)$, $\ 2x - 2y + 10z + 1 = 0.$
8.28. $M_0(3, 3, 3)$, $\ 8x + 6y + 8z - 25 = 0.$
8.29. $M_0(-1, 0, 1)$, $\ 2x + 4y - 3 = 0.$
8.30. $M_0(2, -2, -3)$, $\ y + z + 2 = 0.$
8.31. $M_0(-2, -3, 0)$, $\ x + 5y + 4 = 0.$
8.32. $M_0(3, -3, -1)$, $\ 2x - 4y - 4z - 13 = 0.$

Найти точку M_1, симметричную точке M_0 относительно заданной прямой:

8.33. $M_0(0,-3,-2)$, $\ \dfrac{x-0{,}5}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z-1{,}5}{1}.$

8.34. $M_0(-1,0,1)$, $\ \dfrac{x-0{,}5}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-4}{2}.$

8.35. $M_0(2,-2,-3)$, $\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+0{,}5}{0} = \dfrac{z+1{,}5}{0}.$

8.36. $M_0(-1,2,0)$, $\ \dfrac{x+0{,}5}{1} = \dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2} = \dfrac{z-2}{2}.$

8.37. $M_0(3,3,3)$, $\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1{,}5}{0} = \dfrac{z-3}{1}.$

8.38. $M_0(3,-3,-1)$, $\ \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-3{,}5}{4} = \dfrac{z+0{,}5}{0}.$

9. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определить координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением:

9.1. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=1.$

9.2. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4.$

9.3. $x^2+y^2+z^2-6z=0.$

9.4. $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0.$

9.5. $x^2+y^2+z^2-3x+2y-z=0.$

9.6. $x^2+y^2+z^2+x-5y-7z=0.$

Определить, как расположена точка $A(2, -1, 3)$ относительно заданной сферы:

9.7. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=1.$

9.8. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4.$

9.9. $(x+14)^2+(y-1)^2+(z+12)^2=625.$

9.10. $(x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25.$

9.11. $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0.$

9.12. $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z-3=0.$

Определить, какая кривая является линией пересечения плоскости и данной поверхности второго порядка:

9.13. $x^2+y^2+z^2-9=0,\ \ z=0.$

9.14. $x^2+y^2+z^2-8=0,\ \ y=-2.$

9.15. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4=0,\ \ z=0.$

9.16. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0,\ \ z=3.$

9.17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1,\ \ x=2.$

9.18. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1,\ \ y=2.$

9.19. $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1,\ \ z+1=0.$

9.20. $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1,\ \ y-3=0.$

9.21. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z,\ \ y+6=0.$

9.22. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z,\ \ z-1=0.$

9.23. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z,\ \ 3x-y+6z-14=0.$

9.24. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1,\ \ 9x-6y+2z-28=0.$

Найти точки пересечения поверхности и прямой:

9.25. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1,\ \ \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}.$

9.26. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\ \ \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}.$

9.27. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z,\ \ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}.$

9.28. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z,\ \ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}.$

Определить, является ли данная поверхность цилиндром или конусом, и построить ее:

9.29. $x^2+y^2-2x=0.$

9.30. $y^2+x^2+4y=0.$

9.31. $x^2+y^2-z^2=0.$

9.32. $y^2+z^2-x^2=0.$

9.33. $x^2+z^2-2z=0.$

9.34. $x^2+y^2-z^2+2z-1=0.$

9.35. $x^2-y^2+z^2=0.$

9.36. $x^2+y^2+2y=0.$

III

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. МАТРИЦЫ, ДЕЙСТВИЯ С НИМИ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Найти матрицу X, выполнив указанные действия с матрицами:

1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $X = 2A - B + E$;
б) $X = A - 3B - 5E$;
в) $X = -6A - 3B + 10E$;
г) $X = A - 2E$;
д) $X = 3B + 5E$;
е) $X = B - 2A + 2E$;
ж) $X = 5E - A - B$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $X = 4A + 6B + E$;
б) $X = 2A - 3B + E$;
в) $X = -A + 6B - 4E$;
г) $X = 3A - 2E$;
д) $X = 2B + 5E$;
е) $X = 2B - 2A + E$;
ж) $X = E - A + B$.

1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $X = A - B + E$;
б) $X = A + B - E$;

в) $X = -2A - 2B + 10E$;
г) $X = 3A - 2E$;
д) $X = B + 5E$;
е) $X = 4B + A - 4E$;
ж) $X = E - 5A - B$.

1.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $X = 2A - B + E$;
б) $X = A + B + 3E$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

а) $X = -3A + B + 2E$;
б) $X = 4A - B - 5E$.
Найти указанные произведения матриц A и B:
а) AB; б) BA; в) A^2; г) B^2; д) A^2B.

1.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1.7. $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.9. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1.11. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & -3 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ 5 & -2 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Найти указанные произведения матриц:

1.14. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$.

1.15. $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7 & 9\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

1.16. $\begin{pmatrix}6 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & -5\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 7\end{pmatrix}$

1.18. $\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -2 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 7 & -3\end{pmatrix}$.

1.19. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Выполнить умножение, применяя транспонирование:

1.20. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

1.21. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}^T$.

1.22. $\begin{pmatrix}5 & 10\\ 20 & 30\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}5 & 10\\ 20 & 30\end{pmatrix}$.

1.23. $\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix}$.

1.24. $(1\ \ 2\ \ -1)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot(-1\ \ 1\ \ 0)^T$.

Найти присоединенную матрицу к матрице:

1.25. $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$.

1.27. $\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 1\end{pmatrix}$.

1.28. $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **1.29.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. **1.30.** $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

1.31. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. **1.32.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.33. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 5 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. **1.34.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найти обратную матрицу, сделать проверку:

1.35. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$. **1.36.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. **1.37.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.38. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$. **1.39.** $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$.

1.40. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. **1.41.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.42. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. **1.43.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.44. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.45.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.46. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **1.47.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения:

1.48. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.49.** $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.50. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$

1.51. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \\ -6 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

1.52. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. РАНГ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Найти ранг матрицы, вычислив ее миноры:

2.1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

2.2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

2.3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

2.4. $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 & 14 \\ 9 & 15 & -3 & 21 \end{pmatrix}.$

Найти ранг матрицы элементарными преобразованиями:

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

2.6. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$

2.7. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -2 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

2.8. $\begin{pmatrix} 8 & -16 & 12 \\ 6 & -12 & 9 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

2.9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 8 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 18 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$

2.10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -4 \\ 10 & 2 & 11 & 7 \\ -15 & -3 & 5 & 11 \\ -5 & -1 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$

2.11. $\begin{pmatrix} -4 & -12 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ -3 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.12.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **2.14.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

Методом Гаусса решить систему однородных линейных уравнений, найти фундаментальную систему решений, общее решение и какое-либо частное решение системы:

3.1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} x_1-x_2+6x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3=0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0, \\ 7x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 4x_1+x_2+5x_3+x_4=0, \\ -x_1+6x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+6x_3+7x_4=0, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 8x_1-5x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 4x_1-x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 12x_1-7x_2-9x_3+5x_4=0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x_1+3x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_2+10x_3+5x_4=0, \\ -2x_1+7x_2+12x_3+11x_4=0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} -x_1+3x_2+5x_4=0, \\ 2x_1+x_2+7x_3-3x_4=0, \\ 4x_1-x_2+11x_3-9x_4=0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-x_3+2x_4-5x_5=0, \\ -4x_1-2x_2-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-3x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3+x_4-x_5=0, \\ x_2+x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

Установить совместность системы, методом Гаусса решить систему неоднородных линейных уравнений, найти фундаментальную систему решений, общее решение и какое-либо частное решение системы:

3.13. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$ **3.14.** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2, \\ -x_1+3x_2+4x_3=6. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4, \\ x_1-7x_2-x_3=0. \end{cases}$ **3.16.** $\begin{cases} x_1-x_2+5x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=-3. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3-2x_4=-6, \\ -2x_1+7x_2+9x_3-11x_4=-18, \\ -3x_1+5x_2+8x_3-11x_4=-16. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3=-1, \\ 6x_2+12x_3-6x_4=-6, \\ -2x_1-6x_2-10x_3=2. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3-4x_4=5, \\ 10x_1+2x_2+11x_3+7x_4=-20, \\ -15x_1-3x_2+5x_3+11x_4=-13. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=9, \\ 6x_1+2x_2+4x_3+8x_4=-16, \\ -15x_1-5x_2+3x_3-7x_4=-17. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 2. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Исследовать линейную зависимость и независимость элементов (векторов) линейного пространства:

4.1. $a_1 = (2, 7, -4)$, $a_2 = (1, 1, -4)$, $a_3 = (2, -2, -2)$.

4.2. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, -1, 0)$, $a_3 = (3, 1, 3)$.

4.3. $a_1 = (2, 5, 4)$, $a_2 = (0, -1, 1)$, $a_3 = (1, 5, 7)$.

4.4. $a_1 = (5, 2, 4)$, $a_2 = (0, 1, 4)$, $a_3 = (5, 1, 0)$.

4.5. $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (4, 5, 6)$, $a_3 = (7, 8, 9)$.

4.6. $a_1 = (1, -2, -3)$, $a_2 = (-4, 5, 6)$, $a_3 = (7, -8, 9)$.

4.7. $a_1 = (2, -1, 1)$, $a_2 = (0, -1, 2)$, $a_3 = (2, 5, 7)$, $a_4 = (1, -1, 1)$.

4.8. $a_1 = (2, -7, 3)$, $a_2 = (3, -1, 1)$, $a_3 = (1, -13, 5)$, $a_4 = (1, 6, -2)$.

4.9. $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (-1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 0, -1, 1)$.

4.10. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 0, -1, 0)$.

4.11. $f_1 = 1$, $f_2 = 2x + x^2$, $f_3 = x - 1$, $f_4 = (x + 2)^2$.

4.12. $f_1 = x$, $f_2 = -4x + x^2$, $f_3 = x^2 - 8$, $f_4 = 2$.

4.13. $f_1 = \cos x$, $f_2 = \cos 2x$, $f_3 = \cos 3x$, $f_4 = \cos 4x$.

4.14. $f_1 = \cos 2x$, $f_2 = 1 - \cos 2x$, $f_3 = \cos x$, $f_4 = \cos^2 x$.

4.15. $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin 2x$, $f_3 = \cos x$, $f_4 = \cos 2x$.

4.16. $f_1 = e^{2x}$, $f_2 = e^{-x}$, $f_3 = e^{2-x}$, $f_4 = e^x$.

4.17. $f_1 = e^{3-x}$, $f_2 = e^x$, $f_3 = e^{-x}$, $f_4 = e^{3+x}$.

4.18. $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{-x}$, $f_3 = e^{2x}$, $f_4 = e^{-2x}$.

4.19. $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{2x}$, $f_3 = e^{3x}$, $f_4 = e^{4x}$.

4.20. $f_1 = e^x + x$, $f_2 = e^{2+x}$, $f_3 = x$, $f_4 = \sin x$.

4.21. $f_1 = \sin x + 1$, $f_2 = x - 3$, $f_3 = \sin x$, $f_4 = 1 + x + \sin x$.

Найти координаты вектора a в данном базисе:

4.22. $a = (6, -3)$, $g_1 = (1, 3)$, $g_2 = (-1, 4)$.

4.23. $a = (-2, 2)$, $g_1 = (1, -4)$, $g_2 = (-3, 5)$.

4.24. $a = (1, 0)$, $g_1 = (-2, -4)$, $g_2 = (1, 1)$.

4.25. $a = (0, 1)$, $g_1 = (-4, 3)$, $g_2 = (-5, 2)$.

4.26. $a = (7, -4, -4)$, $g_1 = (2, -1, 0)$, $g_2 = (3, 0, 2)$, $g_3 = (1, -2, 1)$.

4.27. $a = (-2, -6, 6)$, $g_1 = (-1, 1, -3)$, $g_2 = (2, 0, 1)$, $g_3 = (0, -4, 2)$.

Найти матрицу перехода от базиса $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ к базису g_1, g_2 и вычислить координаты вектора a в базисе g_1, g_2:

4.28. $a = 5e_1 - 2e_2$, $g_1 = (2, -1)$, $g_2 = (7, -3)$.

4.29. $a = -2e_1 + e_2$, $g_1 = (7, -8)$, $g_2 = (7, -6)$.

4.30. $a = e_1 + 4e_2$, $g_1 = (0, 3)$, $g_2 = (1, -3)$.

4.31. $a = 7e_1 + 12e_2$, $g_1 = (2, 4)$, $g_2 = (-8, -12)$.

Найти связь координат одного и того же вектора в базисах g_1, g_2, g_3 и f_1, f_2, f_3:

4.32. $g_1 = (1, 2, 1)$, $g_2 = (2, 3, 3)$, $g_3 = (3, 7, 1)$, $f_1 = (3, 1, 4)$, $f_2 = (5, 2, 1)$, $f_3 = (1, 1, -6)$.

4.33. $g_1 = (1, 0, 1)$, $g_2 = (1, 2, 3)$, $g_3 = (3, -1, 1)$, $f_1 = (-2, 1, 1)$, $f_2 = (0, -1, 1)$, $f_3 = (1, 0, -2)$.

Установить, является ли линейным пространством каждое из указанных множеств и найти его подпространства для естественных операций сложения и умножения на число:

4.34. Множество натуральных чисел.
4.35. Множество целых чисел.
4.36. Множество четных чисел.
4.37. Множество рациональных чисел.
4.38. Множество векторов, лежащих на оси Ox.
4.39. Множество векторов, лежащих на оси Oy.
4.40. Множество векторов, лежащих на плоскости xOy.
4.41. Множество векторов, лежащих на плоскости xOz.
4.42. Множество троек чисел вида $(1, a, 0)$.
4.43. Множество троек чисел вида $(0, a, 0)$.
4.44. Множество троек чисел вида $(a, a, 0)$.
4.45. Множество многочленов степени не выше третьей.
4.46. Множество квадратных трехчленов.
4.47. Множество квадратных матриц.

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Вычислить скалярное произведение векторов:
5.1. $(11, 6, 13)$, $(12, -14, 1)$.
5.2. $(7, -4, 10)$, $(-1, 2, 2)$.
5.3. $(1, 0, 4)$, $(-3, 1, 1)$.
5.4. $(-4, -5, 0)$, $(0, 4, -2)$.
5.5. $(3, 2, 0, -1)$, $(3, -4, 1, 2)$.
5.6. $(1, 3, -4, -2)$, $(2, -4, 1, 3)$.
5.7. $(5, -1, 6, 2)$, $(2, 3, -1, 1)$.
5.8. $(2, -2, 7, 4)$, $(6, 3, 1, -5)$.
Найти норму каждого из векторов:
5.9. а) $(3, 0, -4)$; б) $(0, -5, 12)$; в) $(3, 5, -2)$; г) $(-1, 3, 7)$.
5.10. а) $(3, -4, 1, -1)$; б) $(5, -1, -2, 10)$; в) $(-1, 0, 12, 3)$; г) $(0, -5, 2, 2)$.

Проверить, что следующие системы векторов попарно ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса. Нормировать полученный базис:
5.11. $(2, -1, 1)$, $(2, 3, -1)$.
5.12. $(6, -2, 1)$, $(1, 2, -2)$.
5.13. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

5.14. $\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)$.

5.15. $(1, -2, 2, -3)$, $(2, -3, 2, 4)$, $(2, 2, 1, 0)$.

5.16. $(2, 3, -5, -3)$, $(0, 1, 3, -4)$, $(-18, 8, 0, 2)$.

6.
ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР.
МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Установить, какие из указанных преобразований координат задают линейный оператор и составить матрицу этого оператора:

6.1. $\varphi(x) = (x_2 - 3x_3, x_1)$.

6.2. $\varphi(x) = (6x_1 + x_2, -5x_1, -7x_2)$.

6.3. $\varphi(x) = (3x_2 - 3, x_1)$.

6.4. $\varphi(x) = (4x_1 + 2, x_2)$.

6.5. $\varphi(x) = (x_2^3 + 9x_1, 2x_1 - x_2)$.

6.6. $\varphi(x) = (x_1^2 - 4x_2, x_1 + x_2)$.

6.7. $\varphi(x) = (x_1, 11x_1 + 2x_2)$.

6.8. $\varphi(x) = (-4x_1 - x_2, 3x_1 + 10x_2)$.

6.9. $\varphi(x) = (6x_1 + x_2 - x_3, -5x_1, 7x_2)$.

6.10. $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$.

6.11. $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, -x_1 + x_3, x_2 - x_3)$.

6.12. $\varphi(x) = (x_3, 4x_1 + x_2 - 5x_3, x_1 - 2x_3)$.

6.13. $\varphi(x) = (2 - 3x_3, -x_1 + 2x_3, x_2 + 7x_3)$.

6.14. $\varphi(x) = (5x_1 + x_2 - x_3, 2, x_2 + x_3)$.

6.15. $\varphi(x) = \left(x_1 + \sqrt{x_2} - x_3, -x_1 + x_2, x_2 + x_3\right)$.

6.16. $\varphi(x) = \left(x_3, -x_1 + x_2, x_2 - \sqrt{x_3}\right)$.

6.17. $\varphi(x) = (x_1^2 + x_2 + 4x_3, x_1 + x_2, -x_3)$.

6.18. $\varphi(x) = (x_2 + x_3, x_2^2, x_2 + 7x_3)$.

Найти матрицу линейного оператора, определить его ранг и дефект:

6.19. $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.

6.20. $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3x_3)$.

6.21. $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_3)$.

6.22. $\varphi(x) = (-x_1 + 5x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

Найти обратный оператор к оператору, заданному указанной матрицей:

6.23. $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

6.24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.25. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

6.26. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

6.27. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$.

6.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Найти собственные векторы и собственные значения операторов, заданных своими матрицами в некотором базисе:

7.1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

7.4. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7.5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

7.6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.7. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

7.9. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.12. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. **7.13.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.14. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **7.15.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

7.16. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти, не находя матрицы, собственные числа и собственные векторы операторов:

7.17. Оператора проектирования $\boldsymbol{R}^2$ на ось Ox.

7.18. Оператора проектирования $\boldsymbol{R}^2$ на ось Oy.

7.19. Оператора отражения $\boldsymbol{R}^2$ относительно оси Ox.

7.20. Оператора отражения $\boldsymbol{R}^2$ относительно оси Oy.

7.21. Оператора проектирования $\boldsymbol{R}^3$ на плоскость xOy.

7.22. Оператора проектирования $\boldsymbol{R}^3$ на ось Oy.

7.23. Оператора поворота $\boldsymbol{R}^3$ на угол 90° вокруг оси Oz в положительном направлении.

7.24. Оператора поворота $\boldsymbol{R}^3$ на угол 180° вокруг оси Oz.

7.25. Оператора отражения $\boldsymbol{R}^3$ относительно плоскости xOy.

7.26. Оператора дифференцирования.

8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Написать матрицу квадратичной формы и найти ее канонический вид (методом Лагранжа или методом ортогонального преобразования):

8.1. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

8.2. $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

8.3. $5x_1^2 - x_1x_2$.

8.4. $x_2^2 + 6x_1x_2$.

8.5. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8.6. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

8.7. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

8.8. $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

8.9. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.

8.10. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

IV

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вычислить (приближенно) некоторое число членов последовательности. Нанести точки на график и определить, является ли последовательность убывающей или возрастающей, а также ограниченной или имеющей предел:

1.1. $a_n = \dfrac{-6n-1}{3n}$.

1.2. $a_n = \dfrac{10n+3}{5n}$.

1.3. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{3n}$.

1.4. $a_n = \dfrac{-n^3-1}{n+10}$.

1.5. $a_n = \dfrac{-n^2-1}{5-n^2}$.

1.6. $a_n = \dfrac{2n^2-1}{3-n^2}$.

1.7. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^{n-2}}$.

1.8. $a_n = \dfrac{3^n-1}{3^{n-1}}$.

1.9. $a_n = \dfrac{n-1}{2^n}$.

1.10. $a_n = \dfrac{100n}{5^n}$.

1.11. $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+6}$.

1.12. $a_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+10}$.

1.13. $a_n = (-1)^n \dfrac{4n}{n^2-1}$.

1.14. $a_n = (-1)^n \dfrac{2-n}{n^2}$.

1.15. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^3+2}{n+12}$.

1.16. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2-1}{n-7}$.

1.17. $a_n = (-1)^n$.

1.18. $a_n = (-1)^{n+1}2$.

Вычислить предел последовательности:

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{5-n}$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2-n}$.

1.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-2}{3}$.

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n}{100\,000}$.

1.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+10}{5-n^2}$.

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{50n-3}{n^2}$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n-2}{4n^2+10n-3}$.

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n}{n^2+n-1}$.

1.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-n^2-n-2}{2n^3+n^2-2}$.

1.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n^3+7n}{n^3+5n^2+3n+6}$.

1.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2-(2n+3)^2}{n-7}$.

1.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^2-(n-5)^2}{2n+12}$.

1.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(n+3)^3}{n^2+8}$.

1.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-3)^3}{2n^2+n-1}$.

1.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+7)^3}{n^2-12n}$.

1.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n+4)^3}{n^2+1}$.

1.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(2n+3)^3}{4n^3-n^2+20}$.

1.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^3-(2n+1)^3}{21n^3+5n^2+2}$.

1.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!-(n+1)!}{(7n+6)n!}$.

1.38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$.

1.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

1.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$.

1.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2}}$.

1.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt[4]{n^2+2n}}$.

1.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^6+4}}{n\cdot\sqrt{n^2+2n}}$.

1.44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^9+4}}{n\cdot\sqrt{9n^4+2n}}$.

1.45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$.

1.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+3^n}{4^n-3^n}$.

1.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+2}+2^n}{5^n+2^{n+3}}$.

1.48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-2}-2^n}{3^n+2^{n+10}}$.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Найти предел, разложив многочлены на множители непосредственно или после приведения к общему знаменателю:

2.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{x^2-x-20}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$. **2.4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}$. **2.6.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. **2.8.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{27x^3-1}{3x^2+5x-2}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. **2.10.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{3}{x^3-8}\right)$.

2.11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

2.12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

2.13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}-2\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to -7}\left(\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}+13\right)$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}+\dfrac{5}{3}\right)$.

2.16. $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{2}}\left(\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}+\dfrac{1}{2}\right)$.

Найти предел функции на бесконечности, вынося старшую степень x за скобки:

2.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-1}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-3}{x^3-x^2+10}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^3+4x}{x^3-4x^4+1}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+5}{x^3+7x^2+3}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-23}{x^3+30x^2-10}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+2x^4+2x^3-x}{x^4+x^2+1}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^3+5x-3}{x^2+x-3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}-\dfrac{x}{4}\right)$.

2.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right)$.

2.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

2.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+1}{1-x}+\dfrac{20x^3+x-4}{4x}\right)$.

2.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+x}-x}$.

2.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+6}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[4]{2+x}-x\sqrt{x}}$.

2.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^7+3}+\sqrt[3]{x^8-x}}{\sqrt[4]{x^3+5}-x^2}$.

2.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^8+3}+\sqrt[4]{x^8+1}}{\sqrt[5]{x^7+5}+3x^2}$.

Найти предел, предварительно преобразовав выражение и применяя алгебраические формулы сокращенного умножения:

2.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

2.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

2.37. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

2.38. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6x+x^2+18}-3}{x+3}$.

2.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^3}$.

2.40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

2.41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x^2}-5}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

2.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

2.43. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}-1}$.

2.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

2.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+11}}$.

2.46. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x+6}-4}$.

2.47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

2.48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}-2}{4x^2}$.

2.49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2-x}}{2x}$.

2.50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

2.51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sqrt{4+x^2}-2}$.

2.52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{25+x}-5}$.

2.53. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{3+x}-2}$.

2.54. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x+5}{\sqrt{8+x^2}-3}$.

2.55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{1-\cos x}$.

2.56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2-\cos x}}{2-2\cos x}$.

2.57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2\sin x}$.

2.58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-\sin x}-\sqrt{2+\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

Найти пределы с помощью эквивалентных бесконечно малых функций:

2.59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{\sin 5x}$.

2.60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$.

2.61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{21x-x^3}$.

2.62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos x}$.

2.63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin 2x}{1-\cos 4x}$.

2.64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 12x}$.

2.65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{20\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} 8x}$.

2.66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{21\cdot\ln\left(1+\dfrac{x}{3}\right)}{7x-x^5}$.

2.67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[7]{1+x}-1}$. **2.68.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt[6]{1+x}-1}$.

2.69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-1}{\mathrm{tg}\,5x}$. **2.70.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-5x}-1}{\sin 5x}$.

2.71. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[5]{x}-1}$. **2.72.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-9}{\sqrt[9]{x}-1}$.

2.73. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,4x}{\mathrm{tg}\,5x}$. **2.74.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 8x}$.

2.75. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$. **2.76.** $\lim\limits_{x\to \frac{e}{2}}\dfrac{\ln 2x-1}{2x-e}$.

2.77. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{-x}-e}{4x+4}$. **2.78.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^{\frac{x}{4}}-e}{x-4}$.

2.79. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{4}{x}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$. **2.80.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{x}}{\left(4^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$.

2.81. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\lg\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{x}}$. **2.82.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\lg\left(1+\frac{5}{x^4}\right)}{\mathrm{tg}^4\,\frac{1}{x}}$.

Используя переход к экспоненте, найти пределы:

2.83. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. **2.84.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$.

2.85. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{1/2x}$. **2.86.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+10x)^{1/5x}$.

2.87. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$. **2.88.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{7x}\right)^{21x}$.

2.89. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{10x}\right)^{5x}$. **2.90.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{6x}$.

2.91. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2+5x}\right)^{6x^2-x+3}$. **2.92.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{6x^2+1}\right)^{x^2+4x-1}$.

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Записать приращение функции $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ (Δx — приращение аргумента) и упростить его:

3.1. $y = x + 2$. **3.2.** $y = 2x - 3$.
3.3. $y = x^2 + 5$. **3.4.** $y = 3x^2$.
3.5. $y = \exp(2x + 4)$. **3.6.** $y = \exp(-x + 5)$.
3.7. $y = 2^{3x-7}$. **3.8.** $y = 2^{-x+2}$.
3.9. $y = \exp(-x^2 + 8)$. **3.10.** $y = \exp(1 - 4x^2)$.
3.11. $y = \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$. **3.12.** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции в заданной точке:

3.13. $y = 2x - 4$ при $x = 1$ и $\Delta x = 1$.
3.14. $y = 2x - 4$ при $x = 2$ и $\Delta x = -3$.
3.15. $y = x^2 + x - 5$ при $x = -2$ и $\Delta x = -0{,}1$.
3.16. $y = x^2 - 2x$ при $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}3$.
3.17. $y = \frac{1}{x+2}$ при $x = 0{,}4$ и $\Delta x = 1$.
3.18. $y = \frac{1}{x-1}$ при $x = -4$ и $\Delta x = 1$.

Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования:

3.19. $y = 7x^2 - 3$. **3.20.** $y = 5 - 8x^3$.
3.21. $y = 2\sqrt{x} - 3x + \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.
3.22. $y = 0{,}8\sqrt[5]{x} - \frac{x^2}{0{,}3} + \frac{1}{6} + \frac{0{,}7}{x^3}$.
3.23. $y = (x + 4)(2x - 1)$.
3.24. $y = (-5x + 3)(-x - 8)$.
3.25. $y = x(-x + 1)(5x - 1)(3 - x)$.
3.26. $y = x^2(x + 1)(x - 1)(1 - 9x)$.
3.27. $y = \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x} - 2\right)$.
3.28. $y = \left(\sqrt[4]{x} + x\right)\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

3.29. $y=\dfrac{x+x^2+\sqrt{x}}{x^5}$. **3.30.** $y=\dfrac{3x-x^2+\sqrt{x}}{x^4}$.

3.31. $y=\dfrac{2x+1}{2-7x}$. **3.32.** $y=\dfrac{4-3x}{5x+1}$.

3.33. $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^5-\sqrt{x}}$. **3.34.** $y=\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x^4+\sqrt{x}}$.

3.35. $y=\dfrac{(1+\sqrt{x})(4-\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})^2}$. **3.36.** $y=\dfrac{(7-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-3\sqrt{x})^2}$.

3.37. $y=x\cdot e^x$. **3.38.** $y=(3-9x)\cdot e^x$.

3.39. $y=(3e^x+1)(2-e^x)$. **3.40.** $y=(4-e^x)(5e^x-2)$.

3.41. $y=\dfrac{2e^x-5}{-8e^x+3}$. **3.42.** $y=\dfrac{4e^x+9}{3e^x-2}$.

3.43. $y=2\cos x-4\sin x$. **3.44.** $y=-3{,}4\cos x+0{,}7\sin x$.

3.45. $y=\dfrac{4\sin x}{2+\cos x}$. **3.46.** $y=\dfrac{3-\cos x}{1+\sin x}$.

3.47. $y=2e^x\cdot\cos x+5x\cdot\sin x$.

3.48. $y=-5x\cdot\cos x+e^x\cdot\sin x$.

3.49. $y=\sqrt[6]{x}\cdot e^x\cdot\operatorname{tg}x$. **3.50.** $y=x^2\cdot e^x\cdot\operatorname{ctg}x$.

3.51. $y=x^7\cdot 4^x\cdot\sin x$. **3.52.** $y=\sqrt[4]{x}\cdot 7^x\cdot\cos x$.

3.53. $y=\dfrac{1+3\lg x}{x+\ln x}$. **3.54.** $y=\dfrac{2-7\ln x}{x^3+\log_3 x}$.

3.55. $y=\dfrac{-9\cdot 3^x+x\cdot 5^x}{x\cdot 4^x}$. **3.56.** $y=\dfrac{8\cdot 2^x-x\cdot 11^x}{x\cdot 6^x}$.

3.57. $y=5x+4\operatorname{arctg}x$. **3.58.** $y=-4x+5\arcsin x$.

Представить в виде композиции функций $y=y_1(y_2(y_3(\ldots)))$:

3.59. $y_1(x)=x+2,\ \ y_2(x)=\ln x,\ \ y_3(x)=\sqrt[6]{x}$.

3.60. $y_1(x)=3-x,\ \ y_2(x)=2^x,\ \ y_3(x)=\lg x$.

3.61. $y_1(x)=\sin x,\ \ y_2(x)=x^3,\ \ y_3(x)=x+6$.

3.62. $y_1(x)=\cos x,\ \ y_2(x)=\sqrt{x},\ \ y_3(x)=-4x$.

3.63. $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\cos x,\ \ y_3(x)=\sin x$.

3.64. $y_1(x) = 3^x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = \cos x$.

3.65. $y_1(x) = \operatorname{tg} x, \quad y_2(x) = x^{-3}, \quad y_3(x) = \sin x, \quad y_4(x) = x^2$.

3.66. $y_1(x) = \ln x, \quad y_2(x) = x^{-\frac{3}{2}}, \quad y_3(x) = \cos x, \quad y_4(x) = \sqrt{x}$.

Разложить композицию на элементарные функции:

3.67. $y = 2x^7 - 7$. **3.68.** $y = -3\sqrt{x} + 1$.

3.69. $y = \ln(x^2 + 1)$. **3.70.** $y = \lg\left(3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)$.

3.71. $y = \cos(5^{x^2+1})$. **3.72.** $y = \sin\left(3^{\frac{1}{x}+1}\right)$.

3.73. $y = \left(1 + \sqrt{\sin x}\right)^3$. **3.74.** $y = \arcsin\sqrt{\cos 4x}$.

3.75. $y = \exp\left(2 - \cos\left(7\sqrt{x}\right)\right)$. **3.76.** $y = \dfrac{1}{\cos e^{-2\sin x}}$.

3.77. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{x}}}}$. **3.78.** $y = \ln\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + e^x}}\right)$.

Найти производную сложной функции:

3.79. $y = \arcsin\dfrac{4}{x^2}$. **3.80.** $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-5}{x^3}\right)$.

3.81. $y = \cos^2(-7x)$. **3.82.** $y = \dfrac{1}{16}\operatorname{tg}^4(4x)$.

3.83. $y = 3\cos^2 x - 0{,}67\sin^5 x + \cos(0{,}12)$.

3.84. $y = -\sin^2 x - \sin^5 x + \sin 1$.

3.85. $y = \sqrt{1 + \cos x^2}$. **3.86.** $y = \sqrt{2 - \operatorname{tg} x^5}$.

3.87. $y = \cos^4(\sin 100x)$. **3.88.** $y = \sin^3(\operatorname{ctg} 3x)$.

3.89. $y = \ln(1 + 3^{4x})$. **3.90.** $y = \ln(1 - 5^{2x})$.

Применяя логарифмирование, вычислить производную:

3.91. $y = x^{4x}$. **3.92.** $y = x^{x^2}$.

3.93. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **3.94.** $y = (\cos x)^{\sin x}$.

3.95. $y = (1 + \ln x)^{\ln(1+\sqrt{x})}$. **3.96.** $y = (4 - \ln^2 x)^{\ln(1+x)}$.

3.97. $y = \dfrac{\left(2 + \sqrt[7]{x}\right)(1 + x^3)(1 + 2^x)}{\left(x + \sqrt{x}\right)(3^x + 2^{-x})}$.

3.98. $y=\dfrac{\left(4-\sqrt[6]{x^5}\right)(1+x)(9-9^x)}{\left(x^2+\sqrt{x^5}\right)(2^x+2^{-x})}$.

3.99. $y=\dfrac{\sin e^x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot\sqrt[12]{x^6-2}}{\sin^4(2x^8)}$.

3.100. $y=\dfrac{\cos e^{4x}\cdot\arcsin\cdot\sqrt[9]{x^9+x}}{\operatorname{tg}^3(-7x^5)}$.

3.101. $y=x^3e^{x^2}\sin(2x)\cdot\sqrt[4]{(2\operatorname{arctg}x)^3}$.

3.102. $y=(2-x)^{12}e^{-5x^3}\cos(2+x)\cdot\sqrt[7]{(\ln 6^x)^3}$.

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ и вычислить ее значение при заданном значении параметра:

3.103. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{1}{2}$.

3.104. $\begin{cases}x=4+t^3,\\ y=1-t^2,\end{cases}$ $t_0=3$.

3.105. $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t-5},\\ y=\dfrac{1+t^2}{t^3-1},\end{cases}$ $t_0=-4$.

3.106. $\begin{cases}x=\dfrac{t^3+1}{t^2-1},\\ y=\dfrac{1}{t^2-1},\end{cases}$ $t_0=-4$.

3.107. $\begin{cases}x=e^{4t}\sin t,\\ y=e^{4t}\cos t,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

3.108. $\begin{cases}x=e^{-t}\sin 3t,\\ y=e^{-t}\cos 3t,\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{18}$.

Найти дифференциал функции:

3.109. $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^3$.

3.110. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

3.111. $y=e^{-x^2}\ln x$.

3.112. $y=e^{\sqrt{2+2^x}}$.

3.113. $y=\dfrac{\sin 3^x}{\cos e^x}$.

3.114. $y=\dfrac{1+\sqrt{e^x}}{\operatorname{arctg}e^x}$.

Используя дифференциал, вычислить приближенно:

3.115. $y=\sqrt{2x+1}$, $x=7{,}68$.

3.116. $y=\sqrt{x^2-x+4}$, $x=1{,}03$.

3.117. $y = x^5, \quad x = 2{,}993.$
3.118. $y = x^6, \quad x = -1{,}88.$

3.119. $y = \sqrt[6]{x^2 + 1 + \sin x}, \quad x = -0{,}05.$

3.120. $y = \sqrt[3]{x^3 + \cos x}, \quad x = 0{,}07.$

Найти вторую производную:

3.121. $y = x^4 - 4x^3 + 6x - 9.$
3.122. $y = x^{-5} + 2x + \sqrt{x}.$
3.123. $y = x(x^2 - 4)^8.$
3.124. $y = (x^2 + 4)^4(x - 3).$
3.125. $y = 5^x \cdot (2 + x).$
3.126. $y = e^x \cdot (1 - x).$
3.127. $y = e^x \cos 4x.$
3.128. $y = e^{2x} \sin 3x.$
3.129. $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x.$

3.130. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x.$

3.131. $y = x^4 \lg 3x.$
3.132. $y = x^5 \ln 2x.$

Найти производную указанного n-го порядка:

3.133. $y = e^{-5x}, \quad n = 4.$
3.134. $y = (1 + x)^4 x^3, \quad n = 7.$
3.135. $y = x \ln x, \quad n = 3.$
3.136. $y = \sin 4x, \quad n = 4.$

Доказать, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению:

3.137. $y = e^x \sin x, \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$
3.138. $y = e^{-x} \cos x, \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$

3.139. $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}, \quad xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0.$

3.140. $y = e^{4x} + 2e^{-x}, \quad y''' - 13y' - 12y = 0.$

3.141. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad y^3 y'' + 1 = 0.$

3.142. $y = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad (1 + x^2)y'' + xy'' - y = 0.$

3.143. $y = \frac{x - 3}{x + 4}, \quad (2y')^2 = (y - 1)y''.$

3.144. $y = -\frac{5 + x}{1 + 5x}, \quad \sqrt{\frac{y'}{6}} = \sqrt[3]{\frac{y''}{30}}.$

4. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в заданной точке:

4.1. $y = 2{,}3x^2 + 0{,}2x - 1,\ \ x_0 = -0{,}34.$

4.2. $y = -7{,}2x^2 + 8{,}1x,\ \ x_0 = 1{,}29.$

4.3. $y = 5x^3 + x^2,\ \ x_0 = -11.$

4.4. $y = -7x^3 + 2x^2,\ \ x_0 = 13.$

4.5. $y = \sqrt{-x^4 + x},\ \ x_0 = 0{,}07.$

4.6. $y = \sqrt{8x^3 + 6},\ \ x_0 = -0{,}5.$

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

4.7. $y = \sqrt{x^4 + 3},\ \ x_0 = 1.$

4.8. $y = \sqrt{x^5 + 4},\ \ x_0 = 2.$

4.9. $y = x^2 - 5x + 4,\ \ x_0 = -1.$

4.10. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3,\ \ x_0 = -2.$

4.11. $y = \operatorname{tg}2x,\ \ x_0 = 0.$ **4.12.** $y = \ln 2x,\ \ x_0 = 0.$

4.13. $y = 5^{x-1},\ \ x_0 = 3.$ **4.14.** $y = 3^{1-x^2},\ \ x_0 = -1.$

4.15. $y = \dfrac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}},\ \ x_0 = 2.$ **4.16.** $y = \dfrac{2x+\sqrt[4]{x}}{2x-\sqrt[4]{x}},\ \ x_0 = 1.$

4.17. $y = \dfrac{3x+\sqrt[4]{x}}{3x^2-\sqrt{x}},\ \ x_0 = 1.$ **4.18.** $y = \dfrac{x^2+\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt[3]{x}},\ \ x_0 = -8.$

4.19. $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0,\ \ y_0 = 3.$

4.20. $x^5 + y^5 - 2xy = 0,\ \ y_0 = 1.$

4.21. $\begin{cases} x = t + 6t^2, \\ y = 1 - t, \end{cases}\ t_0 = -3.$ **4.22.** $\begin{cases} x = t^3 - t^2, \\ y = 2 + 4t, \end{cases}\ t_0 = -1.$

4.23. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \operatorname{tg}(t + \pi), \end{cases}\ t_0 = \dfrac{\pi}{3}.$ **4.24.** $\begin{cases} x = \sin(t - 3\pi), \\ y = \operatorname{tg}(2t - \pi), \end{cases}\ t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

5.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

5.1. $y=\dfrac{3x+3}{x^2+2x+2}$, $[-3,-1]$.

5.2. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$, $[-2,2]$.

5.3. $y=5-\sqrt[3]{x^2+5x}$, $[-6,0]$.

5.4. $y=\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$, $[0,7]$.

5.5. $y = 1 + 12x^2 - 4x^3$, $[0, 3]$.

5.6. $y = 10 - 3x^2 + 2x^3$, $[-2, 3]$.

5.7. $y = \cos 4x + 2x$, $[0, p]$.

5.8. $y = \sin 2x - x$, $[-p, p]$.

5.9. $y=\sqrt{16-x^2}$, $[-3,4]$.

5.10. $y=\sqrt{25-x^2}$, $[-4,3]$.

Показать, что указанные функции не имеют точек экстремума:

5.11. $y=5-\sqrt[3]{3-x}$.

5.12. $y=3+\sqrt[3]{2x+7}$.

5.13. $y=\dfrac{-3x+3}{2x-2}$.

5.14. $y=\dfrac{x-2}{9x+5}$.

5.15. $y=\dfrac{2x^2-1}{x}$.

5.16. $y=\dfrac{-3x^2+8}{4x}$.

5.17. $y = 4 + 30x + 3x^2 + 2x^3$.

5.18. $y = 20 - x^3 - 2x^2 - 10x$.

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

5.19. $y = 2x^3 - 6x^2 + 7$.

5.20. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$.

5.21. $y = x^2(4 - x)^2$.

5.22. $y = -x^2(x - 9)^2$.

5.23. $y=(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}$.

5.24. $y=(1-x)^2\cdot\sqrt[3]{(3x+1)^2}$.

5.25. $y=\sqrt[5]{(3x-1)(x-7)^2}$.

5.26. $y=\sqrt[5]{(x-9)(2-x)^2}$.

5.27. $y = x^2e^{-4x}$.

5.28. $y = -3x^2e^{-2x}$.

5.29. $y = 2x - \ln(1 + 4x^2)$.

5.30. $y = -x + \ln(1 - x)$.

5.31. $y = e^{6x} + 4e^{-6x}$.

5.32. $y = 2e^{-3x} + e^{3x}$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Исследовать характер выпуклости и найти точки перегиба функции:

6.1. $y = 3x^5 - 10x^3 - 15x + 1$.

6.2. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x + 15$.

6.3. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

6.4. $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 3$.

6.5. $y = \dfrac{x^3}{x^2+27}$.

6.6. $y = \dfrac{-x^3}{x^2+12}$.

6.7. $y = \sqrt[3]{x-2}$.

6.8. $y = \sqrt[5]{x+1}$.

6.9. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

6.10. $y = \sqrt[5]{(x+1)^2}$.

6.11. $y = x\ln(2x)$.

6.12. $y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

6.13. $y = xe^{-4x}$.

6.14. $y = -xe^{-3x}$.

7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-3}{6x^3-x^2+1}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x}{x^4+x^2+9}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{x^2}}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^4}+3}{e^{x^2}+x}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}+x^3}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\cdot e^{-x}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-10x}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+3)\cdot e^{8x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^5-4)\cdot e^{2x}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^3+3)}{\ln x}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^4+1)}{\ln(x+6)}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)}{\ln(x^3+2)}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+3)}{\ln(x^4+x)}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\pi)}{\sin(x^3+2\pi)}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+0{,}5\pi)}{\cos(x^2+2{,}5\pi)}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x+\pi)}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-5^x}{7^x-3^x}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-3^x}{6^x-12^x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot e^{\frac{1}{x^3}}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$.

8. АСИМПТОТЫ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Найти вертикальные асимптоты графика функции:

8.1. $y=\dfrac{x-2}{2x-6}$.

8.2. $y=\dfrac{x+6}{5x-1}$.

8.3. $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$.

8.4. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$.

8.5. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

8.6. $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$.

8.7. $y=e^{\frac{3}{x}}$.

8.8. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

8.9. $y=xe^{-\frac{1}{x}}$.

8.10. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

8.11. $y=(x+4)e^{\frac{1}{(x+4)^2}}$.

8.12. $y=(x-3)e^{\frac{-1}{(x-3)^2}}$.

8.13. $y=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

8.14. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

8.15. $y=\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$.

8.16. $y=\dfrac{e^{x+5}}{x+5}$.

8.17. $y=\dfrac{1}{e^x-4}$.

8.18. $y=\dfrac{1}{e^x-3}$.

Найти наклонные или горизонтальные асимптоты графиков функций:

8.19. $y=\dfrac{1}{x-4}$.

8.20. $y=\dfrac{5}{x+9}$.

8.21. $y=\dfrac{x^2}{3x-4}$.

8.22. $y=\dfrac{2x^2}{x+12}$.

8.23. $y=\dfrac{x^2}{5x^2+x-4}$.

8.24. $y=\dfrac{x-x^2}{x^2+x+8}$.

8.25. $y=\dfrac{x-6x^3}{x^2+4}$.

8.26. $y=\dfrac{x+x^2+x^3}{5x^2-x-7}$.

8.27. $y=x\cdot e^{-3x^2}$.

8.28. $y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

8.29. $y=\dfrac{x}{e^{3x}}$.

8.30. $y=\dfrac{x}{e^{-4x}}$.

8.31. $y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

8.32. $y=\dfrac{e^{2x}}{x^2+x}$.

8.33. $y=\dfrac{\ln x}{2x}$.

8.34. $y=\dfrac{\ln x}{-6x}$.

8.35. $y=\dfrac{\ln(x^2+4)}{x^3}$.

8.36. $y=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Найти интервалы знакопостоянства и корни функций:

9.1. $y=-x^2-3x-2$.

9.2. $y=x^2-7x+12$.

9.3. $y=x^3+5x^2+6x$.

9.4. $y=-x^3+x^2+20x$.

9.5. $y=\dfrac{x+7}{x^2-4}$.

9.6. $y=\dfrac{x^3-9x}{x-4}$.

9.7. $y=\dfrac{3^x-81}{3^{2x}-81}$. **9.8.** $y=\dfrac{16-2^x}{2^{2x}-16}$.

9.9. $y=-x\cdot 2^{x+5}$. **9.10.** $y=x\cdot 4^{3-x}$.

9.11. $y=-x^2\cdot\ln(x^2-2x+2)$.

9.12. $y=2x^4\cdot\ln(x^2+4x+5)$.

9.13. $y=|x+2|-6$. **9.14.** $y=|x-9|-1$.

9.15. $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)$. **9.16.** $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$.

9.17. $y=-\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}+3x\right)$. **9.18.** $y=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{8}\right)$.

Установить, четной или нечетной является данная функция:

9.19. $y=x^4-|x|+5$. **9.20.** $y=x^6-6|2x|$.

9.21. $y=x^3-x$. **9.22.** $y=x^5-\sqrt[3]{x}$.

9.23. $y=\sin x^2+\mathrm{tg}5x\mathrm{ctg}x^3$.

9.24. $y=\cos x+\sin 3x\mathrm{tg}x^5$.

9.25. $y=\sin 2x+2\sin x$. **9.26.** $y=\mathrm{tg}7x-7\mathrm{tg}x$.

9.27. $y=1-\ln(2+x^2)$. **9.28.** $y=\lg(1-x^4+5x^6)$.

9.29. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **9.30.** $y=x^3-\dfrac{x}{1+x^2}$.

Построить график функции, используя первую производную:

9.31. $y=2-4x^3+3x^2$. **9.32.** $y=15x+6x^2-x^3$.

9.33. $y=(2x-9)^2(x+5)^2$. **9.34.** $y=(x-7)^2(3x+1)^2$.

9.35. $y=(x-3)^3(3x+1)^3$. **9.36.** $y=(4x-7)^3(x+7)^3$

9.37. $y=2x^6-15x^4-36x^2+20$.

9.38. $y=11-2x^6+3x^4+12x^2$.

Провести полное исследование функции и построить ее график:

9.39. $y=\dfrac{1-x^2}{x-2}$. **9.40.** $y=\dfrac{4-x^2}{x+3}$.

9.41. $y=\dfrac{x^4}{x^3-8}$. **9.42.** $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

9.43. $y=\dfrac{x}{x^3+2}$. **9.44.** $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

9.45. $y = e^{2x-x^2}$.

9.46. $y = xe^{\frac{(-x^2)}{2}}$.

9.47. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

9.48. $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$.

9.49. $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

9.50. $y = x^2 e^{\frac{2}{x}}$.

9.51. $y = \frac{\ln x}{x}$.

9.52. $y = x^2 \ln x$.

9.53. $y = x^2 \ln^2 x$.

9.54. $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

10. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Найти значения параметров, при которых функция будет непрерывной:

10.1. $f(x) = \begin{cases} 3x - A, & \text{при } x \le -7, \\ 1 - 12x, & \text{при } x > -7. \end{cases}$

10.2. $f(x) = \begin{cases} A - 4x, & \text{при } x \le 6, \\ x + 12, & \text{при } x > 6. \end{cases}$

10.3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - Ax, & \text{при } x \le -1, \\ x^3 + 5, & \text{при } x > -1. \end{cases}$

10.4. $f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 6x, & \text{при } x \le 3, \\ x^3 - 26, & \text{при } x > 3. \end{cases}$

10.5. $f(x) = \begin{cases} x^3 + Ax^2, & \text{при } x \le 2, \\ x^2 + Bx, & \text{при } 2 < x \le 4, \\ -3x + 11, & \text{при } x > 4. \end{cases}$

10.6. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2, & \text{при } x \le -1, \\ Ax^2 - 5x, & \text{при } -1 < x \le 0, \\ 2x - B, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Найти все точки разрыва функции и определить их тип. Построить график в окрестности каждой точки разрыва:

10.7. $y=\dfrac{4-x}{x+3}$.

10.8. $y=\dfrac{x}{x-8}$.

10.9. $y=\dfrac{x+1}{(x+7)^2}$.

10.10. $y=\dfrac{x-3}{(x-10)^2}$.

10.11. $y=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

10.12. $y=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$.

10.13. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

10.14. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

10.15. $y=\dfrac{|x-5|}{x-5}$.

10.16. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}$.

10.17. $y=\dfrac{|x+2|}{(x+2)^4}$.

10.18. $y=\dfrac{|x-7|}{(x-7)^2}$.

10.19. $y=x^4e^{\frac{1}{x}}$.

10.20. $y=x^3e^{\frac{(-2)}{x}}$.

10.21. $y=x4^{\frac{(-1)}{x}}$.

10.22. $y=x^4 3^{\frac{1}{x}}$.

10.23. $y=\dfrac{x-3}{2^x-8}$.

10.24. $y=\dfrac{x+2}{3^x-\dfrac{1}{9}}$.

11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Написать формулу Тейлора n-го порядка в указанной точке x_o:

11.1. $y=\dfrac{1}{2-x}$, $x_0=-3$, $n=3$.

11.2. $y=\dfrac{1}{x+5}$, $x_0=-1$, $n=3$.

11.3. $y=\sqrt[4]{2x+12}$, $x_0=-5$, $n=2$.

11.4. $y=\sqrt[5]{2x-14}$, $x_0=6$, $n=2$.

11.5. $y=(x+4)e^{1-x}$, $x_0=1$, $n=4$.

11.6. $y=(2x-1)e^{2-x}$, $x_0=-1$, $n=4$.

11.7. $y=(3x-4)^2\ln x$, $x_0=3$, $n=2$.

11.8. $y = (2 - 7x)^2\ln(-x),\ \ x_0 = -4,\ \ n = 2.$
11.9. $y = (x^2 + 5x - 1)^2\ln(3 + x^4),\ \ x_0 = 1,\ \ n = 2.$
11.10. $y = (3x^2 - 2x + 1)^2\ln(9 + x^6),\ \ x_0 = -1,\ \ n = 2.$

11.11. $y = \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)e^{-4x},\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{4},\ \ n = 3.$

11.12. $y = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)e^{3x},\ \ x_0 = \dfrac{\pi}{3},\ \ n = 3.$

Вычислить приближенно, используя несколько первых членов разложения по формуле Тейлора:

11.13. $y(1{,}98)$, где $y = x^{12} - x^4 - 3x^2 + 2.$
11.14. $y(2{,}03)$, где $y = 10x^{16} + 5x^5 + 3x + 2.$
11.15. $y(1{,}005)$, где $y = x^{100} - x^{40} + x^{20}.$
11.16. $y(0{,}97)$, где $y = x^{200} + x^{50} + x^{10}.$
11.17. $y(0{,}02)$, где $y = e^{x^3 - 3x}.$
11.18. $y(-0{,}11)$, где $y = e^{x^5 + 5x}.$
11.19. $y(0{,}032)$, где $y = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right).$
11.20. $y(0{,}04)$, где $y = \ln\left(x + \sqrt{1 - x}\right).$

Исследовать поведение функции в окрестности заданной точки, написав несколько членов разложения функции по формуле Тейлора:

11.21. $y = 4\cos(x + 2) + 2x^2 + 8x,\ \ x_0 = -2.$
11.22. $y = 2\cos(x + 3) + x^2 + x + 2,\ \ x_0 = -3.$
11.23. $y = x^2 + 1 - 2x\ln(x + 1),\ \ x_0 = 0.$
11.24. $y = 2x^2 - 8x + 5 + 4\ln x,\ \ x_0 = 1.$
11.25. $y = 2e^{x-2} - x^2 + 2x + 1,\ \ x_0 = 2.$
11.26. $y = x^2 - 2\mathrm{e}^{-1-x},\ \ x_0 = -1.$

12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найти значения функций нескольких переменных в указанных точках:

12.1. $z = x^2 y - \dfrac{y}{x^3},\ \ M(1, 3).$

12.2. $z = e^{x+y}\sin(x),\ \ M\left(\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right).$

12.3. $u = 2x - 3y + z^2,\ \ M(1, 2, -1).$
12.4. $u = x^2 - 3y^3 + 2xz,\ \ M(0, 1, 3).$
12.5. $z = (x + y)\ln(x^2 + y),\ \ M(1, 2).$
12.6. $z = x^{y^2-1} + y^{x+2},\ \ M_1(2,2),\ \ M_2(1,3).$
12.7. $z = x + y\sin(x + 1),\ \ M(0, 2).$
12.8. $z = y + \cos(2 - x),\ \ M(0, 3).$
12.9. $u = 5x + 3y + 2z + 4\sin(2t),\ \ M(1, 2, 2, 0).$
12.10. $u = \cos(2t) + x^3 + 5y - 4,\ \ M(0, 1, 6, 3).$

Найти и изобразить область определения функции:

12.11. $z = \sqrt{x - y - 1}.$ **12.12.** $z = \sqrt{2x - y + 2}.$

12.13. $z = \sqrt{y + x^2 + 1}.$ **12.14.** $z = \sqrt{y - 2x^2 - 3}.$

12.15. $z = \ln(2x - y + 1).$ **12.16.** $z = \ln(x + 2y - 1).$

12.17. $z = \ln(xy).$ **12.18.** $z = \ln(y^2 - 4x + 8).$

12.19. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$ **12.20.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$

12.21. $z = \dfrac{1}{2x - y + 1}.$ **12.22.** $z = \dfrac{1}{x + 2y - 1}.$

12.23. $z = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y + 1)}.$ **12.24.** $z = \dfrac{1}{\ln(y^2 - x - 1)}.$

13. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ГРАДИЕНТ

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков и полные дифференциалы для данных функций:

13.1. $z = x^3y + 3y^2x.$ **13.2.** $z = 2xy^2 - 3y^3x^2 + y.$

13.3. $z = 3xy + \dfrac{y}{x}.$ **13.4.** $z = 5x^2y - \dfrac{y^2}{x^2}.$

13.5. $z = x\cos(xy).$ **13.6.** $z = y\sin(x^2y^3).$

13.7. $z = y^2e^{x-2y}.$ **13.8.** $z = xe^{x+y}.$

13.9. $z = \ln x^2y^3.$ **13.10.** $z = \ln\sqrt{xy}.$

13.11. $z = \ln(5x + 7y).$ **13.12.** $z = \ln(3x + 2y).$

13.13. $z = xy\arcsin x.$ **13.14.** $z = y\,\mathrm{arctg}(xy).$

13.15. $u = x^2 - 3y^2 + 2yz$. **13.16.** $u = 2y^3 - 3xy + 5xz^3$.

13.17. $u = \frac{x}{y} + \frac{z}{x}$. **13.18.** $u = \frac{z}{y^2} - \frac{x^2}{z}$.

13.19. $u = \sin(xyz)$. **13.20.** $u = \cos(xyz^2)$.

Найти для данных функций производную по направлению $\vec{n}$ в заданной точке:

13.21. $u = 3x^2 - 2xy + zy$,
$\vec{n} = \{4, 3, 0\}$, $M(1, 2, 0)$.

13.22. $u = 2xz - yz + 3yx^2$,
$\vec{n} = \{0, -4, 3\}$, $M(2, 1, 2)$.

13.23. $u = 5x - 3xy + 7xyz$,
$\vec{n} = \{1, 2, -2\}$, $M(3, 0, 1)$.

13.24. $u = 7x^2y - 3xz^2 + 5yz^2$,
$\vec{n} = \{-1, 2, 2\}$, $M(2, 0, 0)$.

Изобразить линии уровня и найти вектор градиента для указанных функций:

13.25. $f(x, y) = x - 2y$. **13.26.** $f(x, y) = 3x + y + 5$.

13.27. $f(x, y) = 2 - x - 4y$. **13.28.** $f(x, y) = 3x + 4y$.

13.29. $f(x, y) = 7 - 7x + y$. **13.30.** $f(x, y) = -5x - 10y$.

13.31. $f(x, y) = x - y^2$. **13.32.** $f(x, y) = y + x^2$.

13.33. $f(x, y) = x^2 + y - 2$. **13.34.** $f(x, y) = y^2 - x + 3$.

Записать в явном виде функцию $y = f(x)$, заданную неявно уравнением:

13.35. $x^4 + y^4 = 1$. **13.36.** $x^2 + y^6 = 1$.

13.37. $x^7 + y^{-2} = 1$. **13.38.** $3x + y^{-5} = 1$.

13.39. $xy = -4$. **13.40.** $\frac{3}{xy} = 17$.

13.41. $2^{xy} = 5$. **13.42.** $9^{-xy} = 2$.

13.43. $\ln(x \cdot y) - \ln x = \ln 3$.

13.44. $\ln(x^3 + y) + \ln 4x = \ln 2$.

13.45. $(x + 1) \cdot \sin(x + 2y) = \cos x$.

13.46. $(x^2 + 1) \cdot \mathrm{tg}(2xy) = \cos x + \sin x$.

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно уравнением $F(x, y) = 0$:

13.47. $y - x^2 + 2 = 0.$

13.48. $3y + 2x^2 - x = 0.$

13.49. $x^2 + y^2 = 9.$

13.50. $x^2 - y^2 = 4.$

13.51. $x^2y - y^2x - 1 = 0.$

13.52. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = 1.$

13.53. $x^2 - 8y^2 = 4.$

13.54. $7x^3 + y^2 = -1.$

13.55. $y^3x^2 - y^2 + 0{,}4x^5 = 0.$

13.56. $xy + x^{25} + 0{,}6y^2 + x - 0{,}2y = 0.$

13.57. $\sin(xy) + \cos 3 - \sqrt{(x+2)(5-y)} = 0.$

13.58. $\cos(xy) + \operatorname{tg} 9 + \sqrt{(x-2)^6(1+y)} = 0.$

13.59. $e^x x^2 + 2^{xy} = 1.$

13.60. $e^{-5x}x^5 + 7^{xy} = 3.$

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ от функций, заданных неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$:

13.61. $z - x^2 - y^2 = 0.$

13.62. $z + x^2 - x + y = 0.$

13.63. $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

13.64. $x^2 - y^2 - z^2 = 4.$

13.65. $z^3 - xyz = 1.$

13.66. $e^z - xyz = 0.$

14. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Для данных поверхностей найти уравнения касательных плоскостей и нормалей в указанных точках:

14.1. $z = 2x^2 - 4y^2,\ M_1(2, 1, 4),\ M_2(0, 1, -4).$

14.2. $z = xy,\ M_1(1, 1, 1),\ M_2(-1, 2, -2).$

14.3. $z = x^2 + y^2,\ M_1(0, 0, 0),\ M_2(1, 2, 5).$

14.4. $z = 2x^2 + y^2 - 3,\ M_1(0, 0, -3),\ M_2(1, 1, 0).$

14.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ M_1(0, 0, 2),\ M_2(0, 2, 0),\ M_3(2, 0, 0).$

14.6. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ M_1(3, 4, 5),\ M_2(-3, -4, 5).$

14.7. $x^2 - 2x + y + z^2 = 0,\ M_1(1, 1, 0),\ M_2(1, -3, -2).$

14.8. $x^3 + xy - z^2 = 0,\ M_1(1, 3, 2),\ M_2(0, 3, 0).$

15. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найти стационарные точки функций:

15.1. $z = 3x^2 + y^2 - 2y$.

15.2. $z = x^2 - 6x + y^2$.

15.3. $z = x^2 - 2y^2 + 2x$.

15.4. $z = x^2 - y^2 - 4y$.

15.5. $u = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - xy$.

15.6. $u = 2x^2 - y^2 - z^2 + xz$.

15.7. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 4y$.

15.8. $z = x^2 + 2xy - 2y^2 - 2x - 8y$.

15.9. $z = x^2y - x^2 - 2xy + 2x$.

15.10. $z = y^2x - 4xy + y^2 - 4y$.

Исследовать на экстремум функции двух переменных:

15.11. $z = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5$.

15.12. $z = x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$.

15.13. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

15.14. $z = xy - x^2 - y^2 + 3x$.

15.15. $z = 3x^2 - x^3 + y^2 + 4y$.

15.16. $z = 3x^2 + 12x + 3y^2 - y^3$.

Найти условный экстремум функции двух переменных:

15.17. $z = x^2 + y^2,\ \ y - x + 1 = 0$.

15.18. $z = x^2 - y^2,\ \ y - x + 1 = 0$.

15.19. $z = xy,\ \ y - x = 0$.

15.20. $z = xy,\ \ y + x = 0$.

15.21. $z = x^2 - 4x + y^2 + 4,\ \ y = x$.

15.22. $z = x^2 - 4x + y^2 + 4,\ \ y = x + 2$.

15.23. $z = xy^2,\ \ x + 2y - 1 = 0$.

15.24. $z = x^3 - y^3,\ \ x - y - 2 = 0$.

16. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Решить графически системы неравенств и найти все угловые точки:

16.1. $\begin{cases} x \ge 2, \\ y \le -1. \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x \le 3, \\ y \ge 1. \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x \geq -3, \\ y \geq 5. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq -4. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x + y \leq 3, \\ x - 2y \geq 1. \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 2x + y \geq 4. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ 5x - y \geq 5. \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x + y \leq 2, \\ 4y + x \geq -1. \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} 2x - 7y \leq 2, \\ y \leq 5. \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} 3x - 5y \geq 4, \\ y \leq 2. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} 4x + 5y \geq 0, \\ x + 6 \leq 0. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} 2x + 7y \leq 0, \\ y + 4 \leq 0. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} 2x + y \leq 2, \\ 2x + y + 3 \geq 0, \\ -4 \leq x \leq 2. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x + 2y + 6 \geq 0, \\ x + 2y \leq 4, \\ -2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geq 0, \\ 2x \leq 6 + 3y, \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} 4x - 5y + 5 \geq 0, \\ 4x \leq 5y, \\ 1 \leq y \leq 3. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0, \\ 2x + 3y \geq 6, \\ x - 2y + 2 \geq 0. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} 2x + y - 4 \leq 0, \\ x - y \geq 0, \\ 2x + y + 6 \geq 0. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} 3x + 4y + 12 \geq 0, \\ 3x + 4y - 24 \leq 0, \\ x + 2y \leq 0. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} 4x - y + 8 \geq 0, \\ 4x - y - 12 \leq 0, \\ x + 5y \leq 10. \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x \geq y, \\ 3x + y \leq 0, \\ y + 4 \geq 0, \\ 2y \geq x - 8. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} 2x \leq y, \\ 4x + y \geq 0, \\ y \leq 3, \\ y \leq 3 + 2x. \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x+8y\ge 0, \\ x+4y+8\ge 0, \\ x-3y\le 3, \\ y+4\ge x, \\ y-x+4\ge 0, \\ y+6\ge 2x. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x+3\ge 0, \\ x\le 7, \\ y\ge 0, \\ y\le 5, \\ x+y\le 8, \\ x+y+1\ge 0. \end{cases}$

17. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методом градиента исследовать на экстремум указанную функцию $f(x, y)$ при указанных ограничениях:

17.1. $f(x,y)=2x+y,$ $\begin{cases} x\le 1, \\ y\le 1, \\ 2x+2y\le 3. \end{cases}$

17.2. $f(x,y)=-3x-4,$ $\begin{cases} 3x+y-3\le 0, \\ y\le x+3, \\ x\le 2. \end{cases}$

17.3. $f(x,y)=x+y+1,$ $\begin{cases} 6x+y\ge 2, \\ 1+x+y\ge 0. \end{cases}$

17.4. $f(x,y)=x+3y-0{,}5,$ $\begin{cases} 2x+2y\le 7, \\ y\le 4. \end{cases}$

17.5. $f(x,y)=4x+3y+8,$ $\begin{cases} x+2y\le 6, \\ x+y\le 3, \\ x\ge -2, \\ y\ge 0. \end{cases}$

17.6. $f(x,y)=x+5y-7,$ $\begin{cases} 2x+y\le 4, \\ x+y-1\le 0, \\ y+4\ge 0, \\ x\ge 0. \end{cases}$

17.7. $f(x,y)=x-y,$ $\begin{cases} x+y\ge 2, \\ 1-x+y\ge 0, \\ y\le 4. \end{cases}$

17.8. $f(x,y)=x+y,$ $\begin{cases} x+2y\le 4, \\ x+y+3\ge 0, \\ x\le 8. \end{cases}$

17.9. $f(x,y)=4x-2y+3,$ $\begin{cases} 2x+y\le 8, \\ 4x+2y\ge -5. \end{cases}$

17.10. $f(x,y)=3x+6y+1,$ $\begin{cases} x-2y\le 12, \\ 6y\le 3x+5. \end{cases}$

17.11. $f(x,y)=5x+7y,\quad \begin{cases} 3x+2y\le 19, \\ x+2y\le 13, \\ 0\le x\le 5, \\ 0\le y\le 6. \end{cases}$

17.12. $f(x,y)=10x+20y,\quad \begin{cases} x+3{,}5y\le 350, \\ 2x+0{,}5y\le 180, \\ x+y\ge 10, \\ 0\le x, \\ 0\le y. \end{cases}$

17.13. $f(x,y)=8-5x-2y,\quad \begin{cases} 3x-y\le 6, \\ x-y\le 1, \\ x+y\ge -1, \\ -4\le x\le 8, \\ 0\le y. \end{cases}$

17.14. $f(x,y)=x,\quad \begin{cases} x+y-1\ge 0, \\ y-2x\le 2, \\ x+y\le 9, \\ 2x-y\le 6, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

18. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Найти интегралы, используя таблицу интегралов и свойства линейности:

18.1. $\int (x+1)dx.$

18.2. $\int (3x^2-x+1)dx.$

18.3. $\int (8x^7-4x^5+11x^{12})dx.$

18.4. $\int \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^{11}}{12}+\frac{x}{3}\right)dx.$

18.5. $\int (\sqrt{x}+1)dx.$

18.6. $\int (\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x})dx.$

18.7. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x^3\right)dx.$

18.8. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx.$

18.9. $\int \left(x^{-\frac{3}{4}}-4\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx.$

18.10. $\int \left(\sqrt[3]{x}-7\frac{1}{x^7}+3\right)dx.$

18.11. $\int\left(x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)dx.$

18.12. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^7}}}-13\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+2x\right)dx.$

18.13. $\int\frac{x^3-2x}{3x}dx.$ **18.14.** $\int\frac{x^3-2x}{\sqrt{4x}}dx.$

18.15. $\int\frac{\sqrt{x}-7x}{x}dx.$ **18.16.** $\int\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^3}dx.$

18.17. $\int\frac{x^2+1}{x}dx.$ **18.18.** $\int\frac{x^3+3x+5}{x}dx.$

18.19. $\int\frac{x^3-5x^{\frac{3}{2}}}{3x^4}dx.$ **18.20.** $\int\frac{t^2-4t+2}{3t}dt.$

18.21. $\int(3e^x-2\sqrt{x})dx.$ **18.22.** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+5e^x\right)dx.$

18.23. $\int(2x^3-3^x)dx.$ **18.24.** $\int(5^x-\sqrt[5]{x})dx.$

18.25. $\int(5\sin x+2\cos x)dx.$ **18.26.** $\int(3\operatorname{sh}x-7\operatorname{ch}x)dx.$

18.27. $\int\frac{3\cos^2 x-5}{\cos^2 x}dx.$ **18.28.** $\int\frac{5-3\cos^2 x}{\sin^2 x}dx.$

18.29. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\cos x\right)dx.$

18.30. $\int\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$

18.31. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{2}{x}-e^x\right)dx.$ **18.32.** $\int\left(\frac{3+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

18.33. $\int\left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{5}\right)dx.$ **18.34.** $\int\frac{3+2x^2}{1+x^2}dx.$

Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала, преобразование подынтегрального выражения:

18.35. $\int (3x+2)^7\,dx.$ **18.36.** $\int \frac{1}{(2x-5)^6}\,dx.$

18.37. $\int \sqrt{3x-1}\,dx.$ **18.38.** $\int \sqrt[3]{7x-3}\,dx.$

18.39. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{2-5x}}\,dx.$ **18.40.** $\int \frac{3}{\sqrt[3]{3-2x}}\,dx.$

18.41. $\int \left(e^{3x}+\frac{1}{x-3}\right)dx.$ **18.42.** $\int \left(\frac{3}{2x-5}-e^{-3x}\right)dx.$

18.43. $\int \cos 5x\,dx.$ **18.44.** $\int \sin\frac{2x}{3}\,dx.$

18.45. $\int \sin(3-2x)\,dx.$ **18.46.** $\int \cos(2-3x)\,dx.$

18.47. $\int \frac{3}{\cos^2(2x+5)}\,dx.$ **18.48.** $\int \frac{1}{\sin^2(4-3x)}\,dx.$

18.49. $\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,dx.$ **18.50.** $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx.$

18.51. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$ **18.50.** $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}\,dx.$

Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

18.53. $\int xe^x\,dx.$ **18.54.** $\int x\cos x\,dx.$

18.55. $\int x\sin x\,dx.$ **18.56.** $\int x\ln x\,dx.$

18.57. $\int x5^x\,dx.$ **18.58.** $\int \ln^2 x\,dx.$

18.59. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ **18.60.** $\int x^2e^{-x}\,dx.$

Найти интегалы, используя указанную замену переменной:

18.61. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx,\ \ t=\sqrt{x}.$

18.62. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx,\ t=\sqrt{x}.$ **18.63.** $\int xe^{x^2}dx,\ t=x^2.$

18.64. $\int x\cos x^2 dx,\ t=x^2.$ **18.65.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx,\ t=\ln x.$

18.66. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x},\ t=\ln x.$ **18.67.** $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx,\ t=e^x+1.$

18.68. $\int e^x\cos(e^x)dx,\ t=e^x.$

19. ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Выделить целую часть рациональной дроби:

19.1. $\frac{2x^2-4x+3}{x+2}.$ **19.2.** $\frac{3x^2-3x+1}{x-3}.$

19.3. $\frac{2x^2+2x-3}{x^2+1}.$ **19.4.** $\frac{x^3+2x^2+3x-5}{x-5}.$

19.5. $\frac{x^3-4x+7}{x^2-4}.$ **19.6.** $\frac{x^3-3x^2-7}{x^2-1}.$

Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

19.7. $\frac{x-3}{x^2-25}.$ **19.8.** $\frac{x+4}{x^2-9}.$

19.9. $\frac{3x+5}{x^2+2x-3}.$ **19.10.** $\frac{3x-1}{x^2+4x+3}.$

19.11. $\frac{8}{x^2-5x-14}.$ **19.12.** $\frac{3}{x^2-2x-15}.$

19.13. $\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2-8x}.$ **19.14.** $\frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x}.$

Вычислить интегралы от простейших рациональных дробей:

19.15. $\int \frac{3}{x-3}dx.$ **19.16.** $\int \frac{4}{x+2}dx.$

19.17. $\int\frac{1}{(x+5)^2}dx.$ **19.18.** $\int\frac{2}{(x-2)^3}.$

19.19. $\int\frac{x+2}{x^2+1}dx.$ **19.20.** $\int\frac{3x-7}{x^2+1}.$

19.21. $\int\frac{3x+2}{x^2+4}dx.$ **19.22.** $\int\frac{2x+5}{x^2+4}dx.$

Вычислить интегралы от рациональных функций:

19.23. $\int\frac{2x^2-4x+3}{x+2}dx.$ **19.24.** $\int\frac{3x^2-3x+1}{x-3}dx.$

19.25. $\int\frac{1}{x^2-3x+2}dx.$ **19.26.** $\int\frac{1}{x^2+x-6}dx.$

19.27. $\int\frac{x^3-4x+7}{x^2-4}dx.$ **19.28.** $\int\frac{x^3-3x^2-7}{x^2-1}dx.$

19.29. $\int\frac{x^3-3x+2}{x^2+1}dx.$ **19.30.** $\int\frac{x^2+3x}{x^2+4}dx.$

19.31. $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+2x^2-8x}dx.$ **19.32.** $\int\frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x}dx.$

20. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы, используя указанную замену переменной:

20.1. $\int\frac{dx}{5-3\cos x},\ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$

20.2. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x},\ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$

20.3. $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x},\ t=\operatorname{tg}x.$

20.4. $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x},\ t=\operatorname{tg}x.$

20.5. $\int \cos^2 x \sin x\, dx,\ t = \cos x.$

20.6. $\int \sin^3 x \cos x\, dx,\ t = \sin x.$

20.7. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx,\ t = \sin x.$

20.8. $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx,\ t = \cos x.$

20.9. $\int \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx,\ t = \cos x.$

20.10. $\int \cos x e^{\cos x} \sin x\, dx,\ t = \cos x.$

Найти интегралы, используя формулы понижения степени:

20.11. $\int \sin^2 x\, dx.$

20.12. $\int \cos^2 x\, dx.$

20.13. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$

20.14. $\int \cos^4 x\, dx.$

20.15. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$

20.16. $\int \sin^6 x\, dx.$

21. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти интегралы, используя указанную замену переменной:

21.1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}},\ t = \sqrt{x}.$

21.2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x} dx,\ t = \sqrt{x}.$

21.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)},\ t = \sqrt[3]{x}.$

21.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}},\ t = \sqrt[4]{x}.$

21.5. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}},\ t = \sqrt{x + 1}.$

21.6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} dx,\ t = \sqrt{x - 1}.$

22. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Вычислить интегралы:

22.1. $\int\limits_1^2 (x^2+1)dx.$ **22.2.** $\int\limits_0^1 (2x-3)dx.$

22.3. $\int\limits_3^1 (2\sqrt{x}-3)dx.$ **22.4.** $\int\limits_4^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x\right)dx.$

22.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$ **22.6.** $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{3}dx.$

22.7. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$ **22.8.** $\int\limits_9^4 \sqrt{x}dx.$

22.9. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$ **22.10.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Вычислить среднее значение функции на указанном отрезке:

22.11. $f(x)=x^2,\ [1, 4].$ **22.12.** $f(x)=x^3-3x,\ [-1, 1].$

22.13. $f(x)=\frac{1}{x},\ [1,2].$ **22.14.** $f(x)=e^{2x},\ [0, \ln 3].$

22.15. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},\ [1,4].$ **22.16.** $f(x)=\cos x,\ [0, 1].$

23. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

23.1. $\int\limits_0^1 (5x+3)e^{2x}dx.$ **23.2.** $\int\limits_{-1}^0 (2-3x)e^{x}dx.$

23.3. $\int\limits_{-5}^0 (2x^2-8)e^{x}dx.$ **23.4.** $\int\limits_{-1}^2 (4-3x^2)e^{x}dx.$

23.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-5)\cos 3x\,dx.$ **23.6.** $\int\limits_0^{\pi}(1-2x)\sin\frac{x}{4}dx.$

23.7. $\int\limits_0^{3}\frac{(10-3x)dx}{\sqrt{4-x}}.$ **23.8.** $\int\limits_0^{8}\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{9-x}}.$

23.9. $\int\limits_1^{2}\frac{3x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}.$ **23.10.** $\int\limits_3^{1}\frac{6x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}.$

24. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ДЛИН ДУГ КРИВЫХ

Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах; изобразить эти фигуры:

24.1. $y = x^2, \; x = 2, \; y = 0.$

24.2. $y = \sqrt{x}, \; y = 0, \; x = 1.$

24.3. $y = \frac{1}{x}, \; x = 1, \; x = e, \; y = 0.$

24.4. $y = e^x, \; x = -1, \; x = 0, \; y = 0.$

24.5. $y = \ln x, \; y = 0, \; x = e.$

24.6. $y = \cos x, \; y = 0, \; x = \frac{\pi}{4}, \; x = 0.$

24.7. $y = x, \; y = x^2 - 2.$

24.8. $y = -x, \; y = -x^2 + 2x.$

24.9. $y = x\ln x, \; x = 1, \; y = 0, \; x = 3.$

24.10. $y = xe^x, \; y = 0, \; x = \ln 7.$

Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически; изобразить эти фигуры:

24.11. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ **24.12.** $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

24.13. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ **24.14.** $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Вычислить длины дуг кривых:

24.15. $y = \mathrm{ch}x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

24.16. $y = 2x^{\frac{3}{2}}, \quad x = 0, \quad x = 4.$

24.17. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$ **24.18.** $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

25. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вычислить интегралы с бесконечными пределами по определению или установить расходимость:

25.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ **25.2.** $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}.$ **25.3.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

25.4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ **25.5.** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$ **25.6.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$

25.7. $\int\limits_1^{\infty} x\,dx.$ **25.8.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \cos x\,dx.$

25.9. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(1-x)^3}.$ **25.10.** $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

Исследовать на сходимость интеграл с бесконечными пределами:

25.11. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{2x^2+7x-3}.$ **25.12.** $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2}.$

25.13. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+2\sqrt{x}}.$ **25.14.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$ **25.15.** $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+3}.$

25.16. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$ **25.17.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$ **25.18.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}.$

25.19. $\int\limits_4^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3+3x+2}.$ **25.20.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{(x-3)dx}{x\sqrt{x}+2}.$

V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

Проверить, является ли данная функция решением соответствующего дифференциального уравнения:

1.1. $xy' + y = y^2,\ \ y = \dfrac{1}{1-x}.$

1.2. $y'\mathrm{tg}(x) - y = 1,\ \ y = 3\sin x - 1.$

1.3. $(x - y)dx + xdy = 0,\ \ y = x(5 - \ln x).$

1.4. $dy + (2y - e^x)dx = 0,\ \ y = 5e^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^x.$

1.5. $tv'' = v',\ \ v = t^2 + 3.$ **1.6.** $(w'')^2 = w^2,\ \ w = \dfrac{z^3}{12} + 1.$

1.7. $2y'' = 3y^2,\ \ y = \dfrac{1}{x+4}.$ **1.8.** $y''' = \dfrac{1}{x},\ \ y = x^2\ln x.$

1.9. $T'' - 4T' + 3T = 0,\ \ T = 4e^t + 2e^{3t}.$

1.10. $4X'' - 20X' + 25X = 0,\ \ X = 3e^{2,5t}.$

1.11. $y''' + 9y' = 0,\ \ y = x\sin 3x.$

1.12. $y^{(1V)} - 13y'' + 36y = 0,\ \ y = e^x + e^{3x}.$

1.13. $z''' - 3z'' + 3z' - z = 0,\ \ z = \dfrac{1}{2}e^t.$

1.14. $y^{(1V)} + 8y'' + 16y = \cos x,\ \ y = \dfrac{1}{9}\cos x.$

1.15. $\ddot{u} - 4\dot{u} + 4u = 1,\ \ u = \dfrac{1}{4}.$

1.16. $\ddot{w} + w = \mathrm{ch}\,t,\ \ w = 0{,}5\,\mathrm{ch}\,t.$

Проверить, является ли данная функция решением соответствующей задачи Коши:

1.17. $\begin{cases} y' = 2x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ $y = x^2.$

1.18. $\begin{cases} y' = 3x^2, \\ y(1) = 0, \end{cases}$ $y = x^3 - 1.$

1.19. $\begin{cases} y'' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$ $y = e^x.$

1.20. $\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$ $y = \cos x.$

1.21. $\begin{cases} xy' + y = y^2 x, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ $y = \dfrac{1}{x(1 - \ln x)}.$

1.22. $\begin{cases} y''' = 24x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 2, \end{cases}$ $y = x^4 + x^2 + x + 1.$

Решить задачу Коши и построить интегральную кривую:

1.23. $\begin{cases} y' = 2x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} y' = 3x^2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} y' = 2e^{2x}, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \\ y(1) = -3. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} y' = \cos x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} y' = \sin x, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} y'' = 2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} y'' = \cos x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Для данных уравнений определить область, где существует единственное решение задачи Коши:

1.31. $y' = x^2 + y^2$.

1.32. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

1.33. $y' = \dfrac{x}{y}$.

1.34. $y' = \dfrac{y+1}{x-y}$.

1.35. $y' = 3\sqrt[3]{y}$.

1.36. $y' = \sqrt{x^2 - y}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Найти общее решение или общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными:

2.1. $ydx - xdy = 0$.

2.2. $y^2dx - x^3dy = 0$.

2.3. $y' = xy$.

2.4. $y' = \dfrac{e^{-y}}{x}$.

2.5. $y' = \cos x(1 + y^2)$.

2.6. $y' = \cos^2 y(1 + x^2)$.

2.7. $du + ut^3dt = 0$.

2.8. $dT = Txdx$.

2.9. $y' = e^x y \ln y$.

2.10. $y' = e^y \ln x$.

2.11. $w' = w(x^2 + 2x + 3)$.

2.12. $y' = t(y^2 + 2y + 1)$.

2.13. $\sqrt{1 - x^2}dy + \sqrt{1 - y^2}dx = 0$.

2.14. $y' = \sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}$.

2.15. $\dot{u} = \dfrac{1+u^2}{1+x^2}$.

2.16. $\dot{X} = \dfrac{1+t^2}{1+X^2}$.

2.17. $x' = \dfrac{y \cos y}{2x}$.

2.18. $x' = \dfrac{ye^y}{xe^x}$.

2.19. $y' = 2^{x-y}$.

2.20. $y' = 2^{y-x}$.

Решить задачу Коши для уравнения с разделяющимися переменными:

2.21. $\begin{cases} y' = x^2 y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} y' = 2y^2 x, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} \sqrt{1-x^2}dy - \dfrac{dx}{2y} = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$ **2.24.** $\begin{cases} dy - 2e^{-y}xdx = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} \dot{x} = 2t(1+x^2), \\ x(0) = 1. \end{cases}$ **2.26.** $\begin{cases} dx - 2t(1+x^2)dt = 0, \\ t(0) = -2. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} ydx + xdy = 0, \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1. \end{cases}$ **2.28.** $\begin{cases} y^2dx + x^2dy = 0, \\ y(5) = 7. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x' = \dfrac{1+t^2}{3x^2}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$ **2.30.** $\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{3x^2}, \\ y\left(-\dfrac{4}{3\pi}\right) = 1. \end{cases}$

Найти общее решение или общий интеграл однородного уравнения:

2.31. $y' = 2\dfrac{y}{x} + 1.$ **2.32.** $y' = \dfrac{4y+x}{x}.$

2.33. $y' = \exp\left(-\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}.$ **2.34.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1.$

2.35. $x' = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{t^2}} + \dfrac{x}{t}.$ **2.36.** $x' = \dfrac{\sqrt{t^2+x^2}+x}{t}.$

2.37. $\dot{u} = \cos^2\dfrac{u}{x} + \dfrac{u}{x}.$ **2.38.** $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{t^2+wt-w^2}{t^2}.$

2.39. $y' = \dfrac{x + y\cos\dfrac{y}{x}}{x\cos\dfrac{y}{x}}.$ **2.40.** $y' = \dfrac{x^2\exp\left(-\dfrac{y^2}{x^2}\right) + y^2}{yx}.$

Решить задачу Коши для однородного уравнения:

2.41. $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$ **2.42.** $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-x^2}{xy}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{t-3x}{t}, \\ x(2) = 5. \end{cases}$ **2.44.** $\begin{cases} x' = \dfrac{t+3x}{t}, \\ x(5) = 2. \end{cases}$

2.45. $\begin{cases} y' = \sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}} + \dfrac{y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$ **2.46.** $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Найти общее решение линейного уравнения:

2.47. $y' + \dfrac{y}{x} = 1.$ **2.48.** $y' - \dfrac{y}{x} = 1.$

2.49. $y' - \dfrac{y}{x} = x.$ **2.50.** $y' + \dfrac{y}{x} = x.$

2.51. $tdx - (x + t^3)dt = 0.$ **2.52.** $xdw + (w - x^3)dx = 0.$

2.53. $y' + 2y = e^{-x}.$ **2.54.** $y' - 2y = e^x.$

2.55. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$ **2.56.** $y' + 2xy = e^{-x^2}.$

Решить задачу Коши для линейного уравнения:

2.57. $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \\ y(1) = 4. \end{cases}$ **2.58.** $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} = -\ln x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2.59. $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = e^x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$ **2.60.** $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\ln x}{x}, \\ y(1) = 3. \end{cases}$

2.61. $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$ **2.62.** $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{2x} = x^3, \\ y(1) = 2. \end{cases}$

3. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Найти общее решение дифференциального уравнения последовательным интегрированием:

3.1. $y'' = x.$ **3.2.** $y'' = e^x.$

3.3. $y''' = \sqrt{x}.$ **3.4.** $y''' = \sqrt[3]{x}.$

3.5. $y''' = \cos 3x.$ **3.6.** $y^{(1V)} = \sin x.$

Решить задачу Коши:

3.7. $\begin{cases} y'' = e^{2x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} y'' = \sqrt[4]{x}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} y''' = 1, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} y''' = \dfrac{1}{x^5}, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 2, \\ y''(1) = -1. \end{cases}$

Найти общее решение дифференциального уравнения, вводя новую неизвестную функцию $z(x) = y^{(k)}$:

3.11. $y'''x = y''$.

3.12. $2xy''' = y''$.

3.13. $y''\mathrm{tg}(x) = y'$.

3.14. $y''' = y''\mathrm{th}(x)$.

3.15. $tx''' + x'' = t$.

3.16. $xw''' - w'' = x$.

Найти общее решение дифференциального уравнения или, если заданы начальные условия, решить задачу Коши, вводя новую неизвестную функцию $p(y) = y'$:

3.17. $y'' = y'^2$.

3.18. $yy'' + y'^2 = 0$.

3.19. $yy'' = y' + y'^2$.

3.20. $y'' = y'y$.

3.21. $\begin{cases} y^3y'' = -1, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 1. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} y'' = e^{2y}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Проверить, являются ли данные системы функций линейно независимыми в области определения:

4.1. $1, x$.

4.2. $1, x, x^2$.

4.3. $x, 2x, x^2$.

4.4. $1, 2, x$.

4.5. $e^x, \ xe^x$.

4.6. $e^x\cos x, \ e^x\sin x$.

Вычислить определитель Вронского для данных систем функций:

4.7. $x,\ e^x$. **4.8.** $x,\ \dfrac{1}{x}$.

4.9. $e^{-x},\ \ xe^{-x}$. **4.10.** $\sin x,\ \ \cos x$.

Записать фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, зная корни его характеристического уравнения:

4.11. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2$.
4.12. $\lambda_{1,2} = 1$.
4.13. $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_{2,3} = 2$.
4.14. $\lambda_{1,2} = 0,\ \ \lambda_3 = -1$.
4.15. $\lambda_{1,2,3} = 0$.
4.16. $\lambda_{1,2} = -3,\ \ \lambda_3 = 5$.
4.17. $\lambda_1 = 3 - 2i,\ \ \lambda_2 = 3 + 2i$.
4.18. $\lambda_1 = -3 - i,\ \ \lambda_2 = -3 + i$.
4.19. $\lambda_1 = 3i,\ \ \lambda_2 = -3i$.
4.20. $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -i,\ \ \lambda_3 = i$.

Восстановить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение:

4.21. $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$.
4.22. $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$.
4.23. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.
4.24. $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$.
4.25. $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$.
4.26. $\lambda^3 = 0$.

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, зная фундаментальную систему решений:

4.27. $e^x,\ e^{-x}$. **4.28.** $1,\ e^x$.
4.29. $e^x,\ xe^x$. **4.30.** $1,\ x,\ x^2$.
4.31. $\sin 3x,\ \ \cos 3x$. **4.32.** $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$.

Найти общее решение или, если заданы начальные условия, решить задачу Коши:

4.33. $y'' - y = 0$. **4.34.** $y'' + y = 0$.

4.35. $y'' + 2y' + y = 0$. **4.36.** $y'' - 2y' + y = 0$.

4.37. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$. **4.38.** $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

4.39. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. **4.40.** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

4.41. $\begin{cases} y''-4y'+3y=0, \\ y(0)=6, \\ y'(0)=10. \end{cases}$ **4.42.** $\begin{cases} y''-2y'+2y=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} y'''+y''=0, \\ y(0)=1, \\ y'(0)=0, \\ y''(0)=1. \end{cases}$ **4.44.** $\begin{cases} y'''+y'=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1, \\ y''(0)=-1. \end{cases}$

5. МЕТОД ПОДБОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определить вид частного решения, зная корни характеристического уравнения и правую часть $f(x)$ дифференциального уравнения:

5.1. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ f(x) = 3x + 2.$
5.2. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 0,\ \ f(x) = 2x + 3.$
5.3. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 0,\ \ f(x) = 2xe^{-x}.$
5.4. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -1,\ \ f(x) = 3xe^{-x}.$
5.5. $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 0,\ \ f(x) = 3\sin x.$
5.6. $\lambda_1 = i,\ \ \lambda_2 = -i,\ \ f(x) = 2\cos x.$

Определить вид частного решения, не находя неопределенных коэффициентов:

5.7. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 2.$
5.8. $y'' + y = x^2 - 1.$
5.9. $y'' - 2y' + y = x^2 + 1.$
5.10. $y'' + y' = 2x - 1.$
5.11. $y''' + y'' = x + 5.$
5.12. $y''' + y' = x^2 + x.$
5.13. $y'' - y' = 3e^{2x}.$
5.14. $y'' + y' = (x + 1)e^{x}.$
5.15. $y'' + y = 2xe^{x}.$
5.16. $y'' + y' = xe^{-x}.$
5.17. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}.$
5.18. $y''' + 2y'' = xe^{-2x}.$
5.19. $y'' + 3y' + 2y = 3\cos x.$
5.20. $y'' + y = -3\sin x.$

5.21. $y'' + y = \sin 3x$.
5.22. $y''' - y'' = 2x\cos x$.

Найти общее решение неоднородного уравнения:
5.23. $y'' + 2y' + y = -2$.
5.24. $y''' + y'' = 1$.
5.25. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.
5.26. $y'' + 8y' = 8x$.
5.27. $y'' + 4y' + 4y = e^x$.
5.28. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.
5.29. $y'' + y = 2e^x$.
5.30. $y'' - y = 2\cos x$.
5.31. $y'' - y' = e^x \sin x$.
5.32. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

Решить задачу Коши:

5.33. $\begin{cases} y'' + y = 2(1-x), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$ **5.34.** $\begin{cases} y'' + 9y = 36e^{3x}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

5.35. $\begin{cases} y'' + y' = e^{-x}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$ **5.36.** $\begin{cases} y'' + 4y = \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

VI

РЯДЫ

1. ЧИСЛОВОЙ РЯД. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Записать развернутое выражение для данного ряда:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$.

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

1.6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}$.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2n-1}$.

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{(2n)^3}$.

Найти по определению сумму геометрического ряда или установить его расходимость:

1.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

1.14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$.

1.15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2{,}5}\right)^n$.

1.16. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n$.

1.17. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n$. **1.18.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^{2n}}$.

1.19. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$. **1.20.** $\sum_{n=0}^{\infty}2^{3n}$.

1.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln^{2n}(2)$. **1.22.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln^{3n}(4)$.

Найти по определению сумму ряда, раскладывая общий член ряда на простейшие дроби:

1.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. **1.24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

1.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$. **1.26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

1.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. **1.28.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.29. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{72}{n^2+6n+8}$. **1.30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НА СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$. **2.2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n^2+4}$. **2.3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+2)}{n^3\sqrt{n+4}}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+4}}{(n^2+3)}$. **2.5.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n-1)}{n+5}$. **2.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+3}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$. **2.8.** $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+3}{\ln(n+5)}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признаков сравнения:

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$.

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n2^n$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}3^n$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+2}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+5}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{4^n}$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n}$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}+1}$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+3}$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+3}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{\frac{7}{2}}+5}$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n^2 2^n}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{n^3 3^n}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{n^4+2n-1}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n+2}{n^3+5n-3}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n^2+5n)}{n^3+3}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(n+5)}{n^3+4}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера:

2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

2.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$.

2.33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$. **2.34.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(2n+1)!}$.

2.35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!}$. **2.36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$.

2.37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$. **2.38.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши:

2.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$. **2.40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

2.41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$. **2.42.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2+1}\right)^n$.

2.43. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. **2.44.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

2.45. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}$. **2.46.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{(n+1)^{2n}}$.

Исследовать ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши:

2.47. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. **2.48.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$.

2.49. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **2.50.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

2.51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$. **2.52.** $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n^2}$.

2.53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. **2.54.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Исследовать на сходимость, установить, условно или абсолютно сходится данный ряд:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

3.3. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n-1)}{n+5}$.

3.4. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{\ln(n+5)}$.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n2^n$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n)!}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n)!}{(2n)!}$.

3.11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

3.12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

Вычислить сумму ряда с заданной точностью α:

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^3}$, $\alpha=0{,}1$.

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha=0{,}1$.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n)3^n}$, $\alpha=0{,}01$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)4^n}$, $\alpha=0{,}01$.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha=0{,}001$. **3.18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Найти область сходимости функционального ряда:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. **4.2.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x^2-3x+3}}$. **4.4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-x^2+2x+4}}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{x^2+2}+3}$. **4.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$. **4.8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^n$.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-4x+3)^n$. **4.10.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2-6x-8)^n$.

Доказать равномерную сходимость функционального ряда на $(-\infty, \infty)$:

4.11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$. **4.12.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}$.

4.13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$. **4.14.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3(2+\cos nx)}$.

4.15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$. **4.16.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$.

4.17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$. **4.18.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{3^n}$.

5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Найти область сходимости степенного ряда:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n.$

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n.$

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{3^n}.$

5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{5^n}.$

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n^2}.$

5.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}.$

5.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}.$

5.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n.$

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n.$

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n^2 2^n}.$

5.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n \ln n}.$

5.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n \ln^2 n}.$

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности указанной точки и определить область сходимости:

5.13. $y = e^{3x}, \ \ x_0 = 0.$

5.14. $y = \ln(1 + 4x^2), \ \ x_0 = 0.$

5.15. $y = \sin 2x, \ \ x_0 = 0.$

5.16. $y = x\cos 3x, \ \ x_0 = 0.$

5.17. $y = \dfrac{1}{1-x}, \ \ x_0 = 0.$

5.18. $y = \dfrac{1}{1+3x}, \ \ x_0 = 0.$

5.19. $y = \ln(1 - x - 6x^2), \ \ x_0 = 0.$

5.20. $y = \ln(1 + x - 6x^2), \ \ x_0 = 0.$

5.21. $y = (2 - e^x)^2, \ \ x_0 = 0.$

5.22. $y = (3 - e^x)^2, \ \ x_0 = 0.$

5.23. $y = \ln x, \ \ x_0 = 1.$

5.24. $y = \dfrac{1}{x}, \ x_0 = 1.$

5.25. $y = \sin x, \ x_0 = 2.$

5.26. $y = \cos x, \ x_0 = -2.$

5.27. $y = \ln(x + 5), \ x_0 = 1.$

5.28. $y = \ln(x - 3), \ x_0 = 1.$

5.29. $y = \dfrac{1}{2-x}, \ x_0 = 3.$

5.30. $y = \dfrac{1}{x+3}, \ x_0 = 2.$

5.31. $y = \sin^2 x, \ x_0 = 0.$

5.32. $y = \cos^2 x, \ x_0 = 0.$

5.33. $y = \sin 3x, \ x_0 = 2.$

5.34. $y = \cos 5x, \ x_0 = -2.$

Найти сумму степенного ряда, используя его дифференцирование или интегрирование:

5.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}.$

5.36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n-1}.$

5.37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$

5.38. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}.$

5.39. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n.$

5.40. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (n+2)x^{n-2}.$

5.41. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (n+1)x^{n-2}.$

5.42. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+4)x^{5n}.$

Вычислить приближенно с точностью 0,001:

5.43. $\int\limits_0^{0,1} e^{-5x^2} dx.$

5.44. $\int\limits_0^{0,1} e^{-3x^2} dx.$

5.45. $\int\limits_0^{0,1} \sin(10x^2) dx.$

5.46. $\int\limits_0^{0,1} \cos(10x^2) dx.$

5.47. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\sin(2x)}{x} dx.$

5.48. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} dx.$

5.49. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} dx.$

5.50. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{x} dx.$

6. РЯДЫ ФУРЬЕ

Следующие функции разложить в ряд Фурье на указанных отрезках: а) в полный ряд Фурье по синусам и косинусам; б) только по синусам; в) только по косинусам; изобразить графики сумм соответствующих рядов Фурье:

6.1. $y = 5 - x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.2. $y = 1 + x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.3. $y = 1 + 2x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.4. $y = 3 - 2x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.5. $y = 9 - 2x^2$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.6. $y = 4 + 3x^2$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.7. $y = 6x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.8. $y = -5x$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.9. $y = 2 + |x|$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.10. $y = 7 - |x|$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.11. $y = 2x^2 + 3$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.
6.12. $y = 1 - 3x^2$ а) $[-\pi, \pi]$; б) $[0, \pi]$; в) $[0, \pi]$.

Указанные функции разложить в ряд Фурье: а) по синусам; б) по косинусам на указанных отрезках:

6.13. $y = 4 + x,\ [0, 3\pi]$.
6.14. $y = 1 - 9x,\ [0, 2\pi]$.
6.15. $y = -3x,\ \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
6.16. $y = 5x,\ \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
6.17. $y = 1 - x,\ [0, 2]$.
6.18. $y = 1 + x,\ [0, 3]$.
6.19. $y = 1 + 9x,\ [-6, 0]$.
6.20. $y = 2 - 7x,\ [-1, 0]$.
6.21. $y = 3 - 7x,\ \left[0, \frac{1}{7}\right]$.
6.22. $y = 6 + 3x,\ \left[0, \frac{1}{5}\right]$.
6.23. $y = 8,\ [0, 4\pi]$.
6.24. $y = 3,\ [0, 3\pi]$.

VII

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ПОВТОРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Вычислить повторные интегралы:

1.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)dy.$

1.2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 (x^2+y)dx.$

1.3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)dy.$

1.4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y (x^2+y)dx.$

1.5. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^x xdy.$

1.6. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_2^{y^2} xdx.$

1.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+z)dz.$

1.8. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^y (x+z)dx.$

1.9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y dx \int\limits_0^y ydz.$

1.10. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{x^2} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} x^2dz.$

2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить двойной интеграл по прямоугольной области:

2.1. $\iint\limits_D xydS,$

D: $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3.$

2.2. $\iint\limits_D x^2ydS,$

D: $1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1.$

2.3. $\iint\limits_D (x+y)dS$,
D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

2.4. $\iint\limits_D (x^2+y)dS$,
D: $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$.

2.5. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dS$,
D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

2.6. $\iint\limits_D (3x^2-y^2)dS$,
D: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$.

Вычислить двойной интеграл по произвольной области, ограниченной заданными кривыми:

2.7. $\iint\limits_D dS$,
D: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

2.8. $\iint\limits_D dS$,
D: $y = x^2$, $y = x$.

2.9. $\iint\limits_D dS$,
D: $y = x^2$, $y = x^3$.

2.10. $\iint\limits_D dS$,
D: $y = x$, $y = x^3$.

2.11. $\iint\limits_D x dS$,
D: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

2.12. $\iint\limits_D y dS$,
D: $y = x^2$, $y = x$.

2.13. $\iint\limits_D (x+y)dS$,
D: $y = x^2$, $y = x^3$.

2.14. $\iint\limits_D (x-y)dS$,
D: $y = x^3$, $y = x$.

2.15. $\iint\limits_D x dS$,
D: $y = x$, $y = 1-x$, $y = 0$.

2.16. $\iint\limits_D y dS$,
D: $y = x$, $y = 1-x$, $y = 0$.

2.17. $\iint\limits_D x dS$,
D: $y = x$, $y = 1-x$, $x = 0$.

2.18. $\iint\limits_D y\,dS$,

D: $y = x$, $y = 1 - x$, $x = 0$.

2.19. $\iint\limits_D (x + y)\,dS$,

D: $y = x$, $y = 1 - x$, $x = 0$.

2.20. $\iint\limits_D (x - y)\,dS$,

D: $y = \sqrt{x}$, $y = 1 - x$, $y = 0$.

3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить тройной интеграл по прямоугольной области:

3.1. $\iiint\limits_V (x + y + z)\,dV$,

V: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

3.2. $\iiint\limits_V (x - y - z)\,dV$,

V: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

3.3. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$,

V: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$, $2 \le z \le 3$.

3.4. $\iiint\limits_V (-x^2 - y^2 + z^2)\,dV$,

V: $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$, $1 \le z \le 2$.

3.5. $\iiint\limits_V \left(x + \frac{1}{y}\right)dV$,

V: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le e$, $0 \le z \le 1$.

3.6. $\iiint\limits_V x \sin y\,dV$,

V: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le z \le 3$.

Вычислить тройной интеграл по произвольной области, ограниченной заданными поверхностями:

3.7. $\iiint\limits_V dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = 3.$

3.8. $\iiint\limits_V dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ y = x,\ z = 3,\ z = 0.$

3.9. $\iiint\limits_V dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ y = x^3,\ z = 0,\ z = 3 - x - y.$

3.10. $\iiint\limits_V dV$,

$V\colon\ y = x^3,\ y = x,\ z = 0,\ z = 2 - x - y.$

3.11. $\iiint\limits_V x\,dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ z = 0,\ z = 3,\ y = \sqrt{x}.$

3.12. $\iiint\limits_V y\,dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ z = 0,\ y = x,\ z = -3.$

3.13. $\iiint\limits_V (x + y + z)\,dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ y = x^3,\ z = 0,\ z = 1.$

3.14. $\iiint\limits_V (x - y - z)\,dV$,

$V\colon\ y = x^2,\ y = x,\ z = 5,\ z = 6.$

3.15. $\iiint\limits_V (x + z)\,dV$,

$V\colon\ y = x,\ y = 1 - x,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 1.$

3.16. $\iiint\limits_V (y+z)dV,$

$V\colon\ y=x,\ \ y=1-x,\ \ y=0,\ \ z=-1,\ \ z=1.$

3.17. $\iiint\limits_V y\,dV,$

$V\colon\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=1.$

3.18. $\iiint\limits_V x\,dV,$

$V\colon\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=2.$

3.19. $\iiint\limits_V (z-y)dV,$

$V\colon\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=-1.$

3.20. $\iiint\limits_V (z-x)dV,$

$V\colon\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=-2.$

4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить, переходя к полярным координатам:

4.1. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dS,$

$D\colon\ x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0.$

4.2. $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dS,$

$D\colon\ x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge x,\ \ y\ge 0.$

4.3. $\iint\limits_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dS,$

$D\colon\ x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0.$

4.4. $\iint\limits_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dS,$

$D\colon\ x^2+y^2\le 1,\ \ y\ge 0.$

4.5. $\iint\limits_D \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

D: $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

4.6. $\iint\limits_D \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

D: $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge x$.

4.7. $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dS$,

D: $x \le 0$, $y \le 0$, $x^2+y^2 \le 1$.

4.8. $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dS$,

D: $x \le 0$, $y \ge -x$, $x^2+y^2 \le 9$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми:

4.9. $y^2-2y+x^2=0$, $y=0$, $y=x$.

4.10. $y^2-4x+x^2=0$, $x=0$, $y=x$.

4.11. $y^2-4y+x^2=0$, $y=0$, $y=\sqrt{3}x$.

4.12. $y^2-8x+x^2=0$, $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

4.13. $y^2-2y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-4y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$.

4.14. $y^2-4x+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-8x+x^2=0$, $y=0$.

5. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

5.1. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dV$,

V: $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$.

5.2. $\iiint\limits_V \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} dV$,

V: $x^2+y^2 \le 1$, $y \ge 0$, $z \ge 1$, $y \ge x$, $z \le e$.

5.3. $\iiint\limits_V \frac{d}{z\sqrt{x^2+y^2}}$,

V: $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $x \le 0$, $y \le 0$, $1 \le z \le 3$.

5.4. $\iiint\limits_V \frac{zdV}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

V: $1 \le x^2+y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \le x$, $0 \le z \le 1$.

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

5.5. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 9$.

5.6. $y^2 - 4x + x^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 3$.

5.7. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

5.8. $y^2 - 8x + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $z = 0$, $z = -x^2 - y^2$.

6. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

6.1. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6.2. $z \le 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6.3. $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$, $z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

6.4. $z \le -\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

6.5. $-\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $z^2 + x^2 + y^2 = 1$.

6.6. $-\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \le z^2 + x^2 + y^2 \le 4$.

Вычислить тройной интеграл:

6.7. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV,$

$V:\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},\ z\le\sqrt{4-x^2-y^2}.$

6.8. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV,$

$V:\ z\ge -\sqrt{x^2+y^2},\ z\le 0.$

6.9. $\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV,$

$V:\ z\le\sqrt{x^2+y^2},\ z\le\sqrt{1-x^2-y^2}.$

6.10. $\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dV,$

$V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$

VIII

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычислить градиент скалярного поля в указанных точках:

1.1. $u = \dfrac{x^2 z}{y}$, $M(1, 2, 3)$.

1.2. $u = \dfrac{xy^2}{z}$, $M(1, 2, 3)$.

1.3. $u = \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{2}{z}$, $M(1, 1, 1)$.

1.4. $u = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} + \dfrac{5}{z^3}$, $M(1, 1, 1)$.

1.5. $u = x^2 + \cos yz$, $M\left(1, \pi, \dfrac{1}{2}\right)$.

1.6. $u = y^2 - \sin xz$, $M\left(\dfrac{1}{2}, 5, \pi\right)$.

1.7. $u = xe^{yz}$, $M(1, 1, 1)$.

1.8. $u = ye^{2xz}$, $M(1, 1, 1)$.

1.9. $u = y\ln(x + z)$, $M(2, 3, 4)$.

1.10. $u = x\ln(2y + 3z)$, $M(1, 1, 1)$.

Вычислить дивергенцию векторного поля в указанных точках:

1.11. $\vec{a} = \{3x^2, 2y + z, z - 2y\}$, $M(0, 1, 1)$.

1.12. $\vec{a} = \{3y^2, 2x + y, z^3 - x\}$, $M(5, 1, 3\}$.

1.13. $\vec{a} = \{\cos xy, \sin xy, \tan z\}$, $M\left(1, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.14. $\vec{a}=\{\sin xz, \cos yz, \sin 3z\}$, $M\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.15. $\vec{a}=\{x+e^{2y}, y+e^{2z}, z+e^{2x}\}$, $M(1,1,1)$.

1.16. $\vec{a}=\{y+2e^{x}, x+e^{2y}, 2z+e^{x}\}$, $M(1,1,0)$.

1.17. $\vec{a}=\{\ln(2x+z), \ln z, \ln(x-z)\}$, $M(2,5,7)$.

1.18. $\vec{a}=\{2^{x+y}, 3^{x+2y}, 4^{y-x}\}$, $M(0,1,0)$.

1.19. $\vec{a}=\{y^2+e^{2z}, x^2+e^{3z}, y^2+e^{2x}\}$, $M(0,0,0)$.

1.20. $\vec{a}=\{y^2+\ln z, x^2+\ln 3y, z^3\}$, $M(0,1,1)$.

Вычислить ротор векторного поля:

1.21. $\vec{a}=\{y, -2x, z^2\}$.

1.22. $\vec{a}=\{3z, -2y, 2y\}$.

1.23. $\vec{a}=\{x, yz, -z\}$.

1.24. $\vec{a}=\{yz, 2xz, xy\}$.

1.25. $\vec{a}=\{x, -3z^2, y\}$.

1.26. $\vec{a}=\{\sin x, 2z^2, e^{2y}\}$.

1.27. $\vec{a}=\{-x^2y^3, 4, x\}$.

1.28. $\vec{a}=\{3y, -3x, x\}$.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Вычислить поток векторного поля через замкнутую поверхность с помощью формулы Остроградского:

2.1. $\vec{a}=\{2x, e^{x}, e^{y}\}$,
S: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.2. $\vec{a}=\{x, 3y, e^{x}\}$,
S: $x-2y+z=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.3. $\vec{a}=\{z^2+2x, -2y, 2z\}$,
S: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$.

2.4. $\vec{a}=\{e^{y}+2x, \sin z-y, 5z+x^2\}$,
S: $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $z=4$.

2.5. $\vec{a}=\{z, -4y, 2x\}$,
S: $z=x^2+y^2$, $z=1$.

2.6. $\vec{a}=\{x+z, x-2y, x\}$,
S: $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

2.7. $\vec{a}=\{2x, y, -z\}$,
S: $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$.

2.8. $\vec{a} = \{3x, y, -z\}$,

S: $z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Вычислить циркуляцию векторного поля вдоль замкнутого контура L, лежащего в плоскости $x0y$ (обход против часовой стрелки):

2.9. $\vec{a} = \{x^2 - y, 3x\}$,

L: треугольник с вершинами

$A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(-1,2)$.

2.10. $\vec{a} = \{3y - x, y\}$,

L: треугольник с вершинами

$A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(-3,2)$.

2.11. $\vec{a} = \{x, -3z^2, y\}$,

L: окружность $x^2 + y^2 = 4$.

2.12. $\vec{a} = \{0, -x, y\}$,

L: окружность $x^2 + y^2 = 9$.

2.13. $\vec{a} = \{3x + 5, 2y\}$,

L: прямоугольник с вершинами

$A(4,1)$, $B(-4,1)$, $C(-4,-1)$, $D(4,-1)$.

2.14. $\vec{a} = \{5x + 3, y - 2\}$,

L: прямоугольник с вершинами

$A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,2)$, $D(0,2)$.

IX

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Найти вектор $\vec{m}$:

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{m}$
1	(–2; –1; 0)	(–1; 1; 3)	(0; 2; 1)	$\vec{a}+2\bar{b}-3\vec{c}$
2	(0; 2; 3)	(–1; 2; 3)	(–2; 3; 2)	$\vec{a}-4\bar{b}+3\vec{c}$
3	(–2; 1; 3)	(0; –1; 1)	(2; 1; 3)	$-2\vec{a}+3\bar{b}+$…
4	(–1; –2; 0)	(–1; 0; 1)	(2; –2; 3)	$4\vec{a}+3\bar{b}-\vec{c}$
5	(2; 0; 3)	(–1; 3; 2)	(1; 0; 2)	$3\vec{a}-\bar{b}+2\vec{c}$
6	(–2; 3; 1)	(–1; 3; 1)	(0; 3; 1)	$-3\vec{a}+\bar{b}+4$…
7	(–1; 0; –2)	(–1; 1; 0)	(2; 3; –2)	$2\vec{a}+3\bar{b}-4$…
8	(0; 3; 2)	(2; –1; 3)	(1; 3; 0)	$4\vec{a}-\bar{b}+2\vec{c}$
9	(1; 3; –2)	(1; 3; –1)	(1; 0; 3)	$-3\vec{a}+4\bar{b}+$…
10	(–2; 0; –1)	(0; 1; –1)	(3; –1; –2)	$2\vec{a}+4\bar{b}-\bar{c}$
11	(3; 0; 2)	(2; 3; –1)	(0; –2; 3)	$4\vec{a}-2\bar{b}+3$…
12	(1; –2; 3)	(1; –1; 3)	(3; 0; 2)	$-\vec{a}+\bar{b}+4\vec{c}$
13	(0; –1; –2)	(3; –1; 1)	(3; –2; 2)	$2\vec{a}+\bar{b}-3\vec{c}$
14	(2; 3; 0)	(3; –1; 2)	(0; 3; –2)	$3\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$
15	(3; –2; 1)	(1; 0; –1)	(3; 2; –2)	$-3\vec{a}+2\bar{b}+$…
16	(0; –2; –1)	(3; 1; –1)	(2; 0; 1)	$4\vec{a}+\bar{b}-3\vec{c}$
17	(3; 2; 0)	(3; 2; –1)	(–2; –1; 0)	$\vec{a}-3\bar{b}+2\vec{c}$
18	(3; 1; –2)	(1; –1; 0)	(–1; –3; 0)	$-\vec{a}+4\bar{b}+2$…
19	(–1; 0; –1)	(0; 1; 3)	(2; 3; 1)	$3\vec{a}+2\bar{b}-4$…
20	(–2; –3; 1)	(0; 1; 2)	(3; 1; 2)	$4\vec{a}-2\bar{b}+\vec{c}$

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{m}$
21	(–3; 0; –1)	(–2; –2; 3)	(2; 1; 0)	$-4\vec{a}+3\vec{b}+2$
22	(–1; –3; 1)	(–2; 1; –1)	(3; 1; 0)	$2\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c}$
23	(–3; 0; –2)	(–3; –2; 1)	(3; –2; 0)	$3\vec{a}-4\vec{b}+5$
24	(–1; –2; 1)	(–2; –3; 0)	(–2; 3; –1)	$-4\vec{a}+3\vec{b}+5$
25	(1; 2; 3)	(–3; –1; 0)	(–2; –1; 1)	$5\vec{a}+3\vec{b}-4$
26	(–2; 0; 3)	(–3; 1; –1)	(3; –2; 1)	$3\vec{a}-5\vec{b}+4$
27	(–1; 3; –2)	(–3; 2; 0)	(–3; –1; 1)	$-4\vec{a}+\vec{b}+3$
28	(1; 3; 2)	(–1; 3; –2)	(0; 2; 1)	$5\vec{a}+4\vec{b}-3$
29	(–2; 3; 0)	(–2; –1; 3)	(3; 2; 1)	$\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$
30	(–1; –2; 3)	(3; 0; 1)	(–1; –2; 0)	$-2\vec{a}+\vec{b}+4$

2. Найти значения неизвестных, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны:

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	$-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}-6\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$
2	$-3\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
3	$2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$4\cdot\vec{i}+\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
4	$7\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-14\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$
5	$2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$	$\vec{i}+3\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
6	$x\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}+8\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
7	$2\cdot\vec{i}-8\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}+\vec{k}$
8	$3\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-\vec{k}$
9	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$
10	$3\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
11	$6\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
12	$2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$
13	$5\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$
14	$-3\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+\vec{k}$	$-\vec{i}-\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
15	$-2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}$
16	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$	$\vec{i}-y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
17	$3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$
18	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$	$-x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$
19	$-\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-y\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}$
20	$-4\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$
21	$\vec{i}-4\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$-x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
22	$2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$4\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$
23	$x\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
24	$4\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-3\cdot\vec{k}$	$2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
25	$-x\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$
26	$x\cdot\vec{i}+\vec{j}-2\cdot\vec{k}$	$-2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+\vec{k}$
27	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}$	$x\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}+\vec{k}$
28	$x\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+8\cdot\vec{k}$	$-\vec{i}+y\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$
29	$-2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}$	$3\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
30	$4\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-z\cdot\vec{k}$	$-8\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-\vec{k}$

3. Даны координаты трех точек A, B, C. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

№ вар.	***A***	***B***	***C***
1	(3; 0; 1)	(–1; –2; 3)	(–1; –2; 0)
2	(–2; –1; 3)	(–1; 2; 3)	(–2; 3; 2)
3	(–2; 1; 3)	(4; –1; 8)	(0; –1; –3)
4	(7; 2; –5)	(6; 0; –3)	(3; 2; 7)
5	(–5; 0; 2)	(–4; 4; 3)	(7; 9; –2)
6	(–5; 1; 0)	(6; –3; –1)	(4; 3; 7)
7	(8; 0; –1)	(–1; 5; 4)	(0; 4; –2)
8	(9; 9; –2)	(7; 11; –4)	(5; 6; –1)
9	(4; –3; 0)	(10; 5; –4)	(2; 2; –3)
10	(–6; 1; –3)	(–4; 4; –2)	(3; 2; 1)
11	(–5; 4; –1)	(10; 5; –4)	(0; 4; –3)
12	(4; 5; –3)	(0; 7; 3)	(2; –6; –2)
13	(4; –5; 0)	(1; –1; 1)	(4; 5; 3)
14	(–4; –6; 1)	(5; –2; 0)	(1; –3; 7)

№ вар.	*A*	*B*	*C*
15	(–5; 4; 0)	(6; 0; 3)	(4; 8; –1)
16	(1; –4; –3)	(5; 0; –1)	(–2; 0; 6)
17	(4; –5; 1)	(4; 1; –7)	(0; 1; 7)
18	(–1; 3; –2)	(4; 9; –1)	(1; 3; 5)
19	(–7; 2; –2)	(–9; –3; 2)	(0; 1; –4)
20	(–5; –1; 1)	(3; –1; 8)	(–3; 4; 4)
21	(0; 3; –3)	(–7; 5; 1)	(1; 1; 6)
22	(–4; 0; 8)	(7; 1; 9)	(–6; –1; 0)
23	(5; 1; –1)	(8; –3; 1)	(–3; 0; 1)
24	(0; 5; 2)	(–1; 0; 3)	(–4; 4; 1)
25	(–1; –8; 0)	(–6; 1; 1)	(–4; 0; –1)
26	(5; 0; 5)	(–4; 1; 0)	(–3; 2; 7)
27	(–5; 1; –2)	(–9; 2; 2)	(–3; 0; –1)
28	(7; 7; 2)	(–2; 4; –4)	(0; 3; 6)
29	(–8; 3; 3)	(–3; –9; 0)	(4; 2; –2)
30	(–7; –1; 5)	(–4; 3; 8)	(–3; 2; 1)

4. Найти косинус угла между векторами:

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	(–1; –1; –1)	(–1; 5; –2)
2	(0; 4; –1)	(–5; –3; 0)
3	(1; 2; 3)	(–2; –3; 1)
4	(3; 0; 3)	(3; –1; 0)
5	(–4; –3; –3)	(–3; –3; –2)
6	(2; 1; 4)	(4; 3; 2)
7	(2; –2; –2)	(4; 0; 0)
8	(0; 3; 1)	(–3; 0; 5)
9	(3; 5; –3)	(0; 4; –3)
10	(–1; 1; –4)	(5; –2; –2)
11	(1; 2; 4)	(5; 1; 1)
12	(3; 3; 0)	(2; 2; 2)

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$
13	(–3; 3; –1)	(–1; 0; –1)
14	(2; 1; 0)	(5; –1; –1)
15	(2; –1; –2)	(1; 1; –1)
16	(0; –2; 3)	(6; –2; 2)
17	(–2; 2; –2)	(0; 4; –3)
18	(4; 2; 4)	(–4; –4; –1)
19	(–1; 4; –2)	(4; 4; –1)
20	(0; 1; 0)	(2; 2; –5)
21	(0; 4; –3)	(5; 3; –2)
22	(2; 4; 1)	(5; 4; 1)
23	(–1; 1; 2)	(–2; 1; –1)
24	(1; –4; 2)	(–2; 0; –2)
25	(–4; –2; 2)	(–4; –2; –1)
26	(–2; –2; 2)	(4; 4; –2)
27	(0; 2; 1)	(3; 0; 3)
28	(–4; 3; 0)	(1; 0; –2)
29	(–1; 3; –3)	(–3; –2; 1)
30	(0; 1; 2)	(3; 3; 0)

5. Используя векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти площадь треугольника ABC:

№ вар.	A	B	C
1	(–2; –3; 1)	(0; 1; 2)	(3; 1; 2)
2	(3; –2; 1)	(1; 0; –1)	(3; 2; –2)
3	(–1; –2; 0)	(–1; 0; 1)	(2; –2; 3)
4	(–1; 0; –2)	(–1; 1; 0)	(2; 3; –2)
5	(3; 2; 0)	(3; 2; –1)	(–2; –1; 0)
6	(–2; 0; –1)	(0; 1; –1)	(3; –1; –2)
7	(0; –1; –2)	(3; –1; 1)	(3; –2; 2)
8	(1; 2; 3)	(–3; –1; 0)	(–2; –1; 1)
9	(0; 2; 3)	(–1; 2; 3)	(–2; 3; 2)

№ вар.	*A*	*B*	*C*
10	(3; –2; 1)	(0; 3; –2)	(3; 2; –2)
11	(2; 0; 3)	(–1; 3; 2)	(1; 0; 2)
12	(1; 3; –2)	(1; 3; –1)	(1; 0; 3)
13	(3; 0; 2)	(2; 3; –1)	(0; –2; 3)
14	(–2; –3; 0)	(–3; 1; –2)	(0; –3; 2)
15	(–2; 0; 3)	(–3; 1; 1)	(3; –2; 1)
16	(–2; 3; 1)	(–1; 3; 1)	(0; 3; 1)
17	(0; 3; 2)	(2; –1; 3)	(1; 3; 0)
18	(1; –2; 3)	(1; –1; 3)	(3; 0; –2)
19	(–2; 0; –1)	(0; 1; 3)	(–2; –3; 1)
20	(–3; 0; –2)	(–3; –2; 1)	(3; –2; 0)
21	(–3; 2; 0)	(–1; 3; –2)	(–2; 3; –1)
22	(–2; 1; 3)	(0; –1; 1)	(2; 1; 3)
23	(–3; 0; –1)	(–2; 2; 3)	(–2; 1; 0)
24	(0; –2; –1)	(3; 1; –1)	(2; 0; 1)
25	(1; 2; 3)	(–3; 1; –2)	(–3; –1; 1)
26	(–1; –3; 1)	(–2; 1; –1)	(3; 1; 0)
27	(3; 1; –2)	(1; –1; 0)	(–1; –3; 0)
28	(–2; –1; 3)	(–2; 3; 0)	(3; 2; 1)
29	(–1; –2; 1)	(–2; –3; 0)	(–2; 3; –1)
30	(3; 0; 1)	(–1; –2; 3)	(–1; –2; 0)

6. Исследовать компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	(1; 2; 3)	(2; 0; 4)	(2; –4; 2)
2	(4; 4; –3)	(1; 0; 2)	(3; 4; –5)
3	(2; 1; 0)	(–1; 3; 1)	(5; 1; 2)
4	(5; 3; –2)	(–5; –3; 0)	(5; 3; –1)
5	(3; –1; 0)	(3; 1; 2)	(2; 5; 4)
6	(–2; 2; –2)	(0; 4; –3)	(–2; –2; 1)
7	(0; 2; 1)	(1; 1; 5)	(3; –2; 4)

№ вар.	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
8	(2; –2; –2)	(4; –1; –1)	(–1; –1; –1)
9	(0; 2; 1)	(3; 0; 3)	(–3; 2; –2)
10	(–3; 3; –1)	(–1; 0; –1)	(–2; 3; 0)
11	(–1; 1; 2)	(2; 0; 3)	(1; 5; 2)
12	(0; 1; 2)	(3; 3; 0)	(–3; –2; 2)
13	(2; –1; 1)	(1; 0; –2)	(1; –4; 3)
14	(2; 1; 2)	(3; –1; 0)	(2; 3; 2)
15	(2; 1; 0)	(5; –1; 1)	(–3; 2; 1)
16	(–1; 3; –3)	(–3; –2; 1)	(2; 5; –4)
17	(–4; –2; 2)	(–4; –2; –1)	(2; 1; –1)
18	(–1; 2; 2)	(3; 1; 0)	(5; 4; 3)
19	(1; –4; 2)	(–2; 0; –2)	(3; –4; 4)
20	(3; 5; –3)	(0; 4; –3)	(–3; 1; 0)
21	(0; 4; –3)	(5; 3; –2)	(–5; 1; –1)
22	(0; –1; 3)	(3; 1; 2)	(4; 1; 5)
23	(–2; –1; –2)	(–4; –4; –1)	(0; 2; –3)
24	(0; 4; 2)	(1; 1; 3)	(2; –1; 3)
25	(–1; 1; –4)	(5; –2; –2)	(–6; 3; –2)
26	(2; 1; 3)	(1; 3; 2)	(0; 4; –1)
27	(1; 2; 4)	(5; 1; 1)	(–4; 1; 3)
28	(2; 4; 1)	(5; 4; 1)	(–1; 4; 1)
29	(2; 4; 2)	(1; 3; 1)	(0; –1; 2)
30	(3; 4; 2)	(2; 2; –1)	(1; 2; 3)

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C, и найти вектор нормали к этой плоскости:

№ вар.	*A*	*B*	*C*
1	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)
2	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)
3	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)

№ вар.	*A*	*B*	*C*
4	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(6; 10; 4)
5	(10; 6; 6)	(–2; 8; 2)	(6; 8; 9)
6	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)
7	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)
8	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)
9	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)
10	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)
11	(3; –2; 1)	(1; 0; 2)	(1; 2; –0)
12	(1; –1; 0)	(4; 3; 5)	(7; 2; 1)
13	(1; 2; 3)	(3; 2; 1)	(4; 3; 1)
14	(1; 2; 2)	(2; 3; 1)	(3; 2; 1)
15	(2; 3; 1)	(3; 4; 1)	(4; 2; 1)
16	(2; –1; –2)	(3; 1; 0)	(4; 0; 1)
17	(3; 0; –1)	(2; 5; 1)	(5; 1; –2)
18	(–1; 3; 2)	(1; 3; 3)	(–2; 1; 4)
19	(–2; 1; 5)	(2; 3; 6)	(–1; 2; 8)
20	(4; –2; 1)	(5; 1; 3)	(6; –1; 1)
21	(1; 4; –3)	(0; 3; –2)	(3; 5; 1)
22	(6; 0; 1)	(9; 3; 1)	(7; 2; 3)
23	(–3; –4; 5)	(–1; –5; 7)	(–2; –1; 3)
24	(5; –1; 2)	(6; 1; 1)	(2; 3; 0)
25	(1; –4; –3)	(4; –5; –1)	(3; –6; –4)
26	(0; 3; 5)	(2; 6; 8)	(–1; 4; 3)
27	(–4; 5; 0)	(–7; 7; 1)	(–3; 0; –1)
28	(2; 4; 7)	(–1; 6; 9)	(0; 5; 7)
29	(8; –3; 2)	(9; –3; 4)	(10; –1; 6)
30	(–5; 4; 3)	(–7; 6; 4)	(–5; 7; 5)

8. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

№ вар.	Прямая	Плоскость
1	$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$	$2x-y+3z+4=0$
2	$\frac{x-4}{3}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-10}{3}$	$x+y-z+7=0$
3	$\frac{x-6}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{-5}$	$2x+3y+z+10=0$
4	$\frac{x-7}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-8}{11}$	$3x+y+4z-5=0$
5	$\frac{x-9}{7}=\frac{y}{-6}=\frac{z-18}{18}$	$5x-3y-z+8=0$
6	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-11}{14}$	$x-2y+3z-7=0$
7	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-6}{6}$	$x+3y+4z-11=0$
8	$\frac{x-13}{12}=\frac{y-5}{10}=\frac{z-3}{6}$	$4x+2y-3z-3=0$
9	$\frac{x-7}{5}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{8}$	$7x-2y+4z-8=0$
10	$\frac{x-4}{-8}=\frac{y-9}{-1}=\frac{z+9}{-19}$	$2x+3y-5z-4=0$
11	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+7}{-8}$	$x-2y+3z+10=0$
12	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+9}{-12}=\frac{z-15}{12}$	$2x+5y-6z+11=0$
13	$\frac{x+8}{2}=\frac{y-8}{4}=\frac{z+5}{-7}$	$x-3y+7z+8=0$
14	$\frac{x+6}{-7}=\frac{y-9}{11}=\frac{z+16}{-16}$	$2x-4y+9z-10=0$
15	$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-11}{7}$	$3x+5y-z-6=0$
16	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{13}=\frac{z+2}{-2}$	$3x-y+5z-25=0$
17	$\frac{x+3}{-7}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{-4}$	$2x-3y-z-15=0$
18	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-5}{3}$	$2x+2y+3z+8=0$

№ вар.	Прямая	Плоскость
19	$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+1}{-2}$	$x-4y-2z+3=0$
20	$\frac{x-5}{8}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{7}$	$3x-2y+4z+37=0$
21	$\frac{x}{-5}=\frac{y+4}{-9}=\frac{z-3}{5}$	$4x+3y-z-37=0$
22	$\frac{x-3}{10}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-4}{0}$	$3x-4y+2z+33=0$
23	$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{-10}$	$5x+2y+3z-39=0$
24	$\frac{x+5}{0}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-2}{-3}$	$x-5y-4z+40=0$
25	$\frac{x+7}{-6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$	$6x+y-2z-1=0$
26	$\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{9}=\frac{z+2}{-1}$	$7x+4y-3z+10=0$
27	$\frac{x-8}{7}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{4}$	$2x+6y-4z-2=0$
28	$\frac{x-1}{0}=\frac{y-9}{7}=\frac{z+7}{-5}$	$8x-6y+2z+8=0$
29	$\frac{x-2}{8}=\frac{y+6}{-7}=\frac{z-8}{7}$	$2x-y+9z+4=0$
30	$\frac{x+7}{-9}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{6}$	$9x+7y-6z-23=0$

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Найти произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & -5 & 0\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 4 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 3 & 6 & 0\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки:

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} k & l & m \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} r & s & t \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} b & c & d \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} u & v & w \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$ **8.** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$ **9.** $\begin{vmatrix} h & i & j \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} r & s & t \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$ **11.** $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$ **12.** $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$ **14.** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$ **15.** $\begin{vmatrix} s & t & u \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$ **17.** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$ **18.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$ **20.** $\begin{vmatrix} q & r & s \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$ **21.** $\begin{vmatrix} b & c & d \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} u & v & w \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$ **23.** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$ **24.** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$ **26.** $\begin{vmatrix} k & l & m \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$ **27.** $\begin{vmatrix} g & h & i \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} c & d & e \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$ **29.** $\begin{vmatrix} s & t & u \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$ **30.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

5. Найти матрицу, обратную данной, и сделать проверку:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить систему:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -15x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

7. Решить систему:

1. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 15x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1, \\ -6x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 14x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 21x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 14x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 3, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 15x_1 - 12x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 9x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ -12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5, \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 4, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 7. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 3, \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 7, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 5, \\ -15x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

3. ПРЕДЕЛЫ

1. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 5x + 1}{3x + 7}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 5x^2 - 10}{7x^3 + x^2 + 1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 + 5x - 6}{2x^4 - 11x + 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-7x^3 + 5x + 11}{8x^3 - 6x^2 + 1}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 6x + 2}{7x^2 + 11}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{11x^2 - 5x + 1}{2x^4 + 1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 5x^2 - 16}{12x^2 + 8}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-6x^2 - 3x + 1}{7x^4 - 8x^3 - 7}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 + 6x^2 - 4}{9x^3 + 3x^2 + 1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 8x^2 - 2}{3x + 5}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 + 5x + 6}{8x^2 - 9x - 8}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2 - 7x + 5}{-11x^2 + 5x + 3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^5 + 5x^2 - 11}{6x^3 + 11x + 4}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 1}{17x^4 + 5x^2 - 13}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 + 9x - 4}{6x^5 + 3x^4 - 10}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2 + 3x - 4}{2x - 1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 - 8x + 9}{6x^3 + 8x + 19}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 5x^2 + 2}{2x - 6}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 - 4x + 6}{8x^2 + 11}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 + 5x^3 - 9}{-7x + 9}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 + 5x - 4}{-9x^2 + 5}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{-x^5 - 15}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-6}{9x^2-6x+5}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-6x+11}{2x^3+3x+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+4}{-3x^3+5}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^4-6x^2+9}{4x^4+x^3-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-11x+12}{2x^2+5x-8}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+7}{3x^4-5x^3+10}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x-7}{-2x+5}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x^2+2}{-9x^3+3x-4}$.

2. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-11x+5}{-7x^2+9}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{-9x+11}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+6}{11x^2-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^5+10}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+9x+22}{3x^2+12x-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5+7x-8}{14x^5+5x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x-11}{-12x^2-8}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+4x^3-6}{2x+9}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x+2}{9x^4-12}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{7x^2-2x+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+5x^2-6}{3x^3+5x^2-3}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x+1}{3x^5+7x^2-4}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x-6}{-3x^5+12}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+5x-6}{12x^5+5x-6}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-10}{7x^3-9x+5}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+8}{7x^3+2x+6}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^5+12x-6}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x+1}{3x^2-11}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+4x^2-7}{7x^8+11x+6}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+3x+5}{9x^2-5x+2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+4}{7x-9}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{5x^2+x-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+5x^2+1}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-12x+11}{-7x^2+5}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-6}{3x+5}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-9}{3x^5+11x-9}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9x^2+4x+13}{13x^2-2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+7}{13x^2-6x+2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-9}{7x^2-2x-3}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-4}{-x^3+5}$.

3. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-17x^4+5}{12x^7+15x+6}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+5}{4x^2+11x-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+1}{2x+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+11x^2+6}{-2x+7}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11x-7}{x^4-5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-6x+1}{2x+4}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-11}{3x^2+5x-4}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x-6}{11x^2-2x+4}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^5-22x+2}{3x^2+5x+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+6x^3-1}{2x^{11}+3x-4}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2-6x+5}{3x^3+11}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+7x^2-11}{-2x+4}$.

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-2}{17x^3-12x+5}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{-2x-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x}{10x^4+5x^3-6}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+6x^4-9}{2x^2-11x+25}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+4}{3x^4-3x+6}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{3x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-15x^2+2}{x^6-5x^3-11}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-4}{2x^7+4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+5x^2-6}{13x^3+5x+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^3+2}{x^2-4}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-8}{x^5+3x-12}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+9}{9x^3+6x-11}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+6x^4-5}{x^2+5x+6}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^5+11}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-6}{2x-9}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{2x^5+6x-4}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{2x^2-3}$.

4. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^3-2x^2+3x-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{(x^2-9)^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+8x+15}{(x+3)(x+5)^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3-125}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{x-\dfrac{1}{3}}$.

11. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x-21}{x^2-6x-7}$.

12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+4}$.

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-2x}{3x^3-5x^2+x}$.

15. $\lim\limits_{x\to0{,}5}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

18. $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2+9x}{x^2+6x-27}$.

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$.

20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-11x+28}$.

21. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+6x}{x+3}$.

22. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$.

24. $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{6x^2+x-1}{x+0,5}$.

25. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-28}$.

26. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-2x-1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$.

29. $\lim\limits_{x\to -3,5}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}$.

30. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+2x+1}$.

5. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{x^4-5x^2+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^2-4x+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^4-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)^2}{x^4-3x^2-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{(x-2)^2(x+5)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+3x-40}{(x+1)(x^2+16x+64)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{(x-7)^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x^2+x+2}{x^3+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^3+3x^2+x+3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{x^4-625}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-2x)^2}{x^2-4x+4}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^6-x^4}$.

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^4+4x^2-5}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x^2+x-2)^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x(x^2-49)}{x^2+14x+49}$.

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^4-2x^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^4-2x^2-575}{x^2+x-20}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3}$.

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^3+2x^2-x-2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x^3}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{(2x^2-x-1)^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^4-8x^2-425}{(x-5)(x+5)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-x^2-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^4-x^2-1}$.

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^4-16}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-2x+1)^2}{x^3-x^2-x+1}$.

6. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{2-\sqrt{4-6x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5-\sqrt{25+x^2}}{1-\sqrt{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{100+x}-10}{6-\sqrt{36+x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7-\sqrt{49+x^2}}{2-\sqrt{4-x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8+x^2}-\sqrt{8}}{12-\sqrt{144-x^2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15-\sqrt{225+x}}{3-\sqrt{9-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{49-x}-7}{3-\sqrt{9-x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8-\sqrt{64+x}}{1-\sqrt{1+5x^2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{225+x^2}-15}{1-\sqrt{1+x}}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9-\sqrt{81-x^2}}{5-\sqrt{25+x^2}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}{4-\sqrt{16+x^2}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12-\sqrt{144-x}}{1-\sqrt{1+x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+2x}-5}{2-\sqrt{4+3x}}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5+7x}}{2-\sqrt{4+x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{81-x^2}-9}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11-\sqrt{121-x}}{4-\sqrt{16-x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{169+x}-13}{1-\sqrt{1-x}}$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{7+6x}}{9-\sqrt{81+2x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{121+x^2}-11}{\sqrt{3}-\sqrt{3-2x^2}}$. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9-\sqrt{81+2x}}{13-\sqrt{169-x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{13+x}-\sqrt{13}}{4-\sqrt{16+x}}$. **22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{8+x^2}}{7-\sqrt{49+x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-5x}-1}{\sqrt{7}-\sqrt{7-4x}}$. **24.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-8x}}{\sqrt{11}-\sqrt{11-x^2}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{15+9x}-\sqrt{15}}{3-\sqrt{9+x^2}}$. **26.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-\sqrt{36+2x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{64+x}-8}{1-\sqrt{1-3x}}$. **28.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-3x}}{10-\sqrt{100+x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{5-2x^2}}$. **30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{16+3x}}{1-\sqrt{1+9x}}$.

7. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 4x}{\arcsin x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot \sin 3x}{\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos 6x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\cos 7x\cdot\sin 6x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x^2}{\arcsin 5x\cdot\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{8x^2-9x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x^4}{x^2\cdot(1-\cos 3x)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^{4x})}{2x^2+x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt[4]{1-2x}-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{1-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^{-3x}-1)}{\operatorname{tg} x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 7\pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg} 5x}{1-\cos 10x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3^{2x}-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x^2}{1-\cos(-2x)}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 9x\cdot\cos 10x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\left(\sqrt[3]{x}\right)}{8x^2-6x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 2x}{\arcsin 11x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\operatorname{tg}(3x)^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5\pi x}{\operatorname{tg} 9\pi x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{e^{2x}-1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{4^{9x}-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\sin(2x)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x\cdot\cos 4x}{\operatorname{tg} 10x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(-3x)-1}{\sin 9x^2}$.

8. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\ln(1-\operatorname{tg}x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\cdot\operatorname{tg}x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2(\operatorname{tg}x))}{1-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{4x}-3^{2x}}{\operatorname{arctg}2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-6x}}{\operatorname{tg}2x\cdot\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\arcsin 2x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-\sin^2 x}{\sqrt[4]{1+x}-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+4\operatorname{tg}x)}{\cos^2-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x^3}{x\cdot(5^{3x}-5^{x})}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt[4]{1-x}}{\sin x\cdot\cos 3x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{(\pi-x)}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 4x}{4x^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{x\cdot\arcsin 4x\cdot 5^x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+2x}}{\ln(1-7x)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 4x-1}{x\cdot\operatorname{tg}^3 x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{6x}-4^{x}}{\operatorname{arctg}(-5x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 6x}{\sin(13x^2)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2(\sin x))}{\cos x\cdot x^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{(2\pi-x)}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2 x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(-2x))}{x\cdot\operatorname{tg}x\cdot 2^x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-7x}-\sqrt[5]{1-3x}}{\sin 2x\cdot\cos 7x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{\ln(1+\operatorname{tg}3x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)^3}{x^2\cdot(7^{3x}-7^{4x})}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\operatorname{tg}5x}{\sin 2x\cdot x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\sin^3 x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{\sin 8x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 4x^3}{\operatorname{tg} x\cdot(2^{3x}-2^x)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-\sqrt[3]{1+4x}}{\operatorname{arctg} 2x\cdot\cos 2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+8x}}{\ln(1-\sin x)}$.

9. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(x+2))}{\operatorname{arctg}(3x+6)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3x-3)\operatorname{tg}(11x-11)}{(x-1)^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(5x-\pi)}{\arcsin(3\pi x-3\pi^2)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3(x-1))\cos(4(x-1))}{(2x-2)\cos(x-1)}$.

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(4\pi x)}{\sin(3\pi x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(6x-6)-\operatorname{tg}(5x-5)}{5\sin(x-1)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(7x+7)\sin(5x+5)}{3x+3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(8x-16)-\cos(6x-12)}{2\operatorname{tg}^2(x-2)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^3(x-1)}{(x-1)^2\sin(3x-3)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\cos(7x-14)}{\operatorname{tg}[3(x-2)^2]}$.

11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(3x+3)\sin(2x+2)}{5x+5}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)+\sin(8x-16)}{3\operatorname{tg}(x-2)\cos(x-2)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{tg}(3x-7\pi)}{\arcsin(x-\pi)}$.

15. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin 5x-\sin x}{4\cdot\operatorname{tg} x\cdot\cos 2x}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 7x}{3\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\cos 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(4(x-2))\arccos(4(x-2))}{(2x-4)\cos(x-2)}$.

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(3\pi(x+2))}{\sin(-5\pi x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\cos(3x+6)}{\sin(7x+14)}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{10\cdot \operatorname{tg} x\cdot \cos x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(6x-12)-\cos(4x-8)}{2\sin^2(x-2)}$.

22. $\lim\limits_{x\to -5\pi}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{6\cdot \operatorname{tg} x\cdot \cos 4x}$.

23. $\lim\limits_{x\to -3\pi}\dfrac{\operatorname{tg}(7x+\pi)}{\operatorname{arctg}(x+3\pi)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 4x}{8\cdot \sin(-5x)\cdot \cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin(6x-\pi)}{\operatorname{arctg}(8\pi x+8\pi^2)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(7\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi(x+4))}{\arcsin(3x+12)}$.

28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(-(x+2))\arccos(x+2)}{(2x+4)\cos(-(x+2))}$.

29. $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\operatorname{tg} 6x+\operatorname{tg} x}{7\cdot \sin 3x\cdot \cos 4x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{\sin x-\sin 3x}{5\cdot \operatorname{tg} 4x\cdot \cos 8x}$.

10. Найти предел:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(3+x)}{\operatorname{tg}(2x+4)}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2(x+1))}{1-\cos(2x+2)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2^{-x}-16}{x+4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)^2}{1-x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin \pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{\sqrt{x-9}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(1-\sin(2x+4))}{\sin(2x+4)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{\operatorname{tg}(x^2-9)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{9-x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi(x-4))\cos\pi x}{\log_2 x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\sqrt[4]{2+x}-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2^x-128}{x-7}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{\sin(4-x^2)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{\sin\pi x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln x-\ln 10}{\sqrt{x-9}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sin^2(x-1))}{1-\cos(5x-5)}$.

19. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{-x}-e^3}{\operatorname{tg}(x^2-9)}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\ln(x-1))^2}{8-x^3}$.

21. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6^{-x}-216}{x+3}$.

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8^x-64}{x-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-1}{\sin\pi x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln^2(1+\sin(x-2))}{\cos(2x-4)-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\sqrt[4]{18+x}-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2+x}-1}{\sin\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(-x)-\ln 2}{\sqrt{x+18}-4}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin(1-x^2)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\log_4 x-1}{\operatorname{tg}(\pi(x-4))}$.

30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\ln(5-x))^2}{64-x^3}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Составить уравнение касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$:

1. $y = x^2 - 5x + 4$, $M(-1, 10)$.

2. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $M(-2, 5)$.

3. $y = x^2 + 5x - 1$, $M(1, 5)$.

4. $y=\dfrac{3x-4}{2x-3}$, $M(2,2)$.

5. $y = x^3 + 2x$, $M(1, 3)$.

6. $y=\sqrt{x}$, $M(4,2)$.

7. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $M(1, 0)$.

8. $y=\sqrt[3]{x-1},\ M(1,0)$. **9.** $y=\mathrm{tg}2x,\ M(0,0)$.

10. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2},\ M(1,0)$.

11. $y=\arccos 3x,\ M\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. $y=\dfrac{4x-x^2}{4},\ M(2,1)$. **13.** $y=x-x^3,\ M(-1,0)$.

14. $y=2x^2+3x-1,\ M(-2,1)$.

15. $y=x+\sqrt{x^3},\ M(1,2)$. **16.** $y=\sqrt[3]{x^2}-20,\ M(-8,-16)$.

17. $y=2x^2-3x+1,\ M(1,0)$.

18. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2},\ M\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$.

19. $y=2x^2+3,\ M(-1,5)$. **20.** $y=\dfrac{2x+1}{x},\ M(1,3)$.

21. $y=\dfrac{x^5+1}{x^4+1},\ M(1,1)$. **22.** $y=\dfrac{1}{3x+2},\ M\left(2,\dfrac{1}{8}\right)$.

23. $y=\dfrac{x}{x^2+1},\ M\left(-2,-\dfrac{2}{5}\right)$. **24.** $y=\dfrac{x^2-3x+3}{3},\ M(3,1)$.

25. $y=\dfrac{2x}{x^2+1},\ M(1,1)$. **26.** $y=\dfrac{1+3x^2}{x^2+3},\ M(1,1)$.

27. $y=\dfrac{3x-2x^3}{3},\ M\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$. **28.** $y=\dfrac{x^2}{10}+3,\ M\left(2,\dfrac{17}{5}\right)$.

29. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4},\ M\left(-2,\dfrac{5}{4}\right)$.

30. $y=8\sqrt[4]{x}-70,\ M(16,-54)$.

2. Найти производную:

1. $y=\sin(2+3x)^2$. **2.** $y=(3+2x^2)^4$.

3. $y=2x+5\cos^3 x$. **4.** $y=\dfrac{1}{\mathrm{arctg}2x}$.

5. $y=\sqrt{xe^x+x}$. **6.** $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}$.

7. $y = \sin(x^2 - 5x + 1)$. **8.** $y = \cos((2x + 3)^6)$.

9. $y = \sin x$ Ч $(\sin x + 5)$. **10.** $y = 2\operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{2}$.

11. $y = (1 + \sin 2x)^3$. **12.** $y = (7 + 5x^4)^2$.

13. $y = 3x + 4\cos^7 x$. **14.** $y = \dfrac{1}{\arcsin 2x}$.

15. $y = \sqrt{x^2 e^x + x^3}$. **16.** $y = \sqrt[5]{3e^x - 3^x + 1}$.

17. $y = \cos(x^2 + 2x + 5)$. **18.** $y = \sin^5(3x - 1)$.

19. $y = \cos x \cdot (\cos 2x + 1)$. **20.** $y = 5\operatorname{tg} \dfrac{x^2}{4}$.

21. $y = \operatorname{tg}((3 + 7x)^4)$. **22.** $y = (1 + 3x^3)^5$.

23. $y = 5x^2 + 7\sin^5 x$. **24.** $y = \dfrac{1}{\arccos 5x}$.

25. $y = \sqrt{x^3 e^{2x} + 3x}$. **26.** $y = \sqrt[4]{7e^x + 5^x + 3}$.

27. $y = \operatorname{tg}(x^3 + 7x - 1)$. **28.** $y = \operatorname{tg}(5x + 7)$.

29. $y = \operatorname{tg} x(\cos x - 4)$. **30.** $y = 7\cos^2 \dfrac{x}{5}$.

3. Найти производную:

1. $y = \operatorname{tg}^2 5x + \lg 2x$. **2.** $y = 0{,}5\sin x^2 + \cos 2x$.

3. $y = \sin^2(x^3 \cdot e^x)$. **4.** $y = 3\sin x \cdot \cos^2 x + \ln^3 x$.

5. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \sqrt{x}$. **6.** $y = \arcsin x^3 + \arccos x^3$.

7. $y = \dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2 \cdot \arccos x$. **8.** $y = \ln(\arcsin 5x)$.

9. $y = \arcsin(\ln x + 1)$. **10.** $y = \sqrt{x^2 + e^{2x} + 3x}$.

11. $y = \exp(\sin^2 x)$. **12.** $y = 2^{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}$.

13. $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$. **14.** $y = \lg(0{,}5x^2 + 2x - 4)$.

15. $y = 7^{\cos^2 3x}$. **16.** $y = \dfrac{1}{\ln^2 5x}$.

17. $y = \ln(\ln(3 - 2x^3))$. **18.** $y = 5\ln^3(3x + 1)$.

19. $y = x\sin(\ln x - 10)$.

20. $y = 0{,}5\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

21. $y = \arcsin e^{\sqrt[4]{x}}$.

22. $y = \ln\left(\sin\dfrac{2x+4}{9}\right)$.

23. $y = \lg^2\left(\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}\right)$.

24. $y = \ln\left(\cos\dfrac{3-2x}{2}\right)$.

25. $y = \ln\left(\dfrac{\ln x}{x^{-6}}\right)$.

26. $y = \dfrac{1}{3\ln^3 7x}$.

27. $y = \ln(\lg(1 - 2x))$.

28. $y = 2\ln^{-3}(2x - 1)$.

29. $y = 2\ln\cos\dfrac{x}{2}$.

30. $y = 2^{x^3+1}\cdot x^3$.

4. Найти производную:

1. $y = \dfrac{\sin^3 5x}{\cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$.

2. $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)}$.

3. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

4. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

5. $y = \left(\dfrac{3}{x}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right):\left(\dfrac{1}{2}x\sqrt[6]{x}\right)$.

6. $y = \dfrac{\sqrt[3]{(1+x^3)^8}}{8x}$.

7. $y = \dfrac{x^4}{(3-2x^3)^2}$.

8. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(3-2x^3)}}$.

9. $y = \dfrac{9x+3}{5(2+x)^5}$.

10. $y = \dfrac{-11-x^2}{2(x-2)^4}$.

11. $y = \dfrac{\sin^2 7x}{\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$.

12. $y = \dfrac{x^5}{(x-x^4)^4}$.

13. $y = \dfrac{\sqrt{x^3+2x+3}}{x^2}$.

14. $y = \dfrac{x^2}{5\sqrt{(3+x^3)^3}}$.

15. $y = \dfrac{x^4+x}{7\sqrt{2+x^2}}$.

16. $y = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{(x^2+1)^3}\right):\left(\dfrac{1}{4}x\sqrt[7]{x^2}\right)$.

17. $y=\dfrac{\sqrt{(x^6+2x)^3}}{3x^2}$.

18. $y=\dfrac{x^5}{(5+x^3)^2}$.

19. $y=\dfrac{9x}{6(2x^3+5)^3}$.

20. $y=\dfrac{-4+x^3}{7\sqrt[5]{(x-2)^4}}$.

21. $y=\dfrac{\sin^4 3x}{\cos\left(\dfrac{x}{9}\right)}$.

22. $y=\dfrac{x^7}{2(x+x^6)}$.

23. $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x+1}}{2x-5}$.

24. $y=\left(\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(x+1)^4}\right):\left(\dfrac{1}{3}x^4\cdot\sqrt[5]{x^2}\right)$.

25. $y=\dfrac{9x^4+3}{7\sqrt{1+x^5}}$.

26. $y=\left(\dfrac{1}{4}\sqrt[5]{(x-4)^2}\right):\left(\dfrac{1}{2}x\cdot\sqrt[8]{x^9}\right)$.

27. $y=\dfrac{x^5}{5\sqrt{(1+7x^4)^5}}$.

28. $y=\dfrac{x^4-x-1}{3(x^2+2x^3)}$.

29. $y=\dfrac{\sqrt{x^5+x^2+2}}{x+3}$.

30. $y=\dfrac{-2+x^3}{7(3x+2)^3}$.

5. Найти производную:

1. $y=\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

2. $y=\sqrt{\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-2)^7}}$.

3. $y=\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{(x-1)^5\cdot(x-3)^{11}}}$.

4. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt{(x+3)^3}}$.

5. $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

6. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)(x-1)^2}{(x+2)^5}}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt{2x+1}}$.

8. $y=x^3\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

9. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}\cdot\sqrt{3x+5}}$.

10. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+2)^6(x+1)^5}$.

11. $y=\sqrt{\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+3)^3}}.$

12. $y=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt[4]{(x+2)^4\cdot(x-1)^2}}.$

13. $y=\sqrt{\dfrac{(x+4)^5(x+2)^3}{x+3}}.$

14. $y=\dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot\sqrt{(x+3)^7}}.$

15. $y=\dfrac{(x-1)^2\cdot(3x+5)}{(x+7)^4}.$

16. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+6)^2}{(x+2)^5}}.$

17. $y=\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt[3]{(x+5)^2\cdot(3x+7)}}.$

18. $y=x^5\cdot\sqrt{\dfrac{x-4}{(x+1)\sqrt{x-5}}}.$

19. $y=\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}\cdot\sqrt{(x-2)^3}}.$

20. $y=\dfrac{(x-4)^5}{(x+3)^3(x+4)^6}.$

21. $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)^5}}.$

22. $y=\dfrac{(x+2)^3}{\sqrt[3]{(x+3)(x+5)^5}}.$

23. $y=\sqrt{\dfrac{(x+7)^2(x+3)^2}{x-7}}.$

24. $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt[4]{2x+5}\cdot\sqrt{2x+2}}.$

25. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+11)(x+5)^2}{(x+3)^2}}.$

26. $y=\dfrac{(x+1)^2(4x+1)}{(x+6)^3}.$

27. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot(7x+1)^4}.$

28. $y=x^3\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)\sqrt{x-6}}}.$

29. $y=\dfrac{\sqrt[5]{3x^2-1}}{\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt{(x-2)^5}}.$

30. $y=\dfrac{(x-2)^6}{(x+1)^2(x+6)^7}.$

6. Найти производную:

1. $y=(1+x^2)^x$.

2. $y=(\lg x)^{3x}$.

3. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{e^x}$.

4. $y=(\operatorname{tg}x)^x$.

5. $y=(4+x^2)^{\operatorname{tg}x}$.

6. $y=x^{\sin x}$.

7. $y=x^{\cos x}$.

8. $y=x^{\arcsin x}$.

9. $y=(x-5)^{\cos x}$.

10. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$.

11. $y=(x^2+3)^{\cos x}$.

12. $y=(\operatorname{tg}x)^x$.

13. $y=\sqrt[x]{x}$. **14.** $y=x^{\sqrt{x}}$.
15. $y = x^{(\sin x + \cos x)}$. **16.** $y = (\cos x)^{\sin x}$.
17. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$. **18.** $y = x^{\ln x}$.
19. $y=(1+x^2)^{\sqrt{x}}$. **20.** $y=(\operatorname{tg} x)^{x^2}$.
21. $y=x^{x^2+3}$. **22.** $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.
23. $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$. **24.** $y=(3+x^2)^{\sqrt{x}}$.
25. $y = (1 - x^2)^{\arccos x}$. **26.** $y=\sqrt[x]{\operatorname{arctg} x}$.
27. $y = (x^2 + 4)^{3x+5}$. **28.** $y=\sqrt[x]{x^2+1}$.
29. $y = (\operatorname{tg} x)^{\arccos x}$. **30.** $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

7. Доказать, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению:

1. $y = e^x + 2xe^x + e^{2x} + xe^{-x}$,
$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.

2. $y = -4 + e^{2x} + 9e^{-3x} + x^2e^{2x}$,
$y''' + y'' - 6y' = 20xe^{2x} + 14e^{2x}$.

3. $y = 3e^x\sin x - e^x\cos x + e^{-2x}$,
$y'' + 2y' = 10e^x\sin x + 10e^x\cos x$.

4. $y = 11 - 7e^{3x} + xe^{3x} + xe^{-x}$,
$y''' - 6y'' + 9y' + 16xe^{-x} = 0$.

5. $y = (0{,}13\cos x + 0{,}1\sin x) \cdot e^x + e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$,
$(y'' - 4y' + 8y)e^{-x} = 0{,}66\sin x + 0{,}32\cos x$.

6. $y = 5\cos x - 3\sin x + 2(xe^x + 1)$,
$y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$.

7. $y=-\dfrac{x}{2}e^{3x}+\dfrac{1}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{6}\sin 3x+\dfrac{1}{3}e^{-3x}$,
$y'''-9y'=-9e^{3x}+18\sin 3x-9\cos 3x$.

8. $y=-\dfrac{x}{2}e^{8x}-\dfrac{1}{8}\sin 8x+\dfrac{1}{4}e^{-8x}+\dfrac{1}{6}$,
$y'''-64y'=-64e^{8x}+128\cos 8x$.

9. $y = 3e^x\sin x + 3 - 2e^{-2x} - e^x\cos x$,
$(y'' + 2y') \cdot 0{,}1 = e^x\sin x + e^x\cos x$.

10. $y = \frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{9} + 3e^{-9x} + xe^{9x}$,
$y''' - 81y' = 81(2e^{9x} + \sin 9x)$.

11. $y = e^{-8x} + e^{8x} - \frac{1}{8}(4xe^{8x} + \sin 8x)$,
$y''' = 64(y' - e^{8x}) + 128\cos 8x$.

12. $y = -3e^{x} - xe^{x} + xe^{-x} + 5e^{2x}$,
$y''' + 5y' = (16 - 12x)e^{-x} + 2y + 4y''$.

13. $y = 5\cos x + 2xe^{x} + 4e^{-x} - 3\sin x$,
$(y''' - y')e^{-x} = (10\sin x + 6\cos x)e^{-x} + 4$.

14. $y = 1 + e^{2x} - 3e^{-3x} + x^2e^{2x}$,
$(y''' + y'' - 6y')e^{-x} = 20xe^{x} + 14e^{x}$.

15. $y = -\frac{x}{2}e^{3x} + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{6}\sin 3x + e^2$,
$y''' + 9(\cos 3x - y' + e^{3x}) = 18\sin 3x$.

16. $y = -0{,}04e^{2x}\sin 5x + xe^{2x}$,
$(y'' - 4y' + 4y)e^{-x} = e^{x}\sin 5x$.

17. $y = -1 + 8e^{3x} + 3xe^{3x} + xe^{x}$,
$y''' + 9y' = 4xe^{x} + 6y''$.

18. $y = e^{2x}\cos 2x + 0{,}13 \cdot e^{x}\cos x + 0{,}1 \cdot e^{x}\sin x$,
$y'' - 4y' + 8y = 0{,}66e^{x}\sin x + 0{,}32e^{x}\cos x$.

19. $y = (x - 2)e^{9x} + \frac{1}{18}\cos 9x + e^4 + e^{-9x}$,
$y''' = 81(2e^{9x} + \sin 9x + y')$.

20. $y = -\frac{x}{2}e^{8x} - \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{8}e^{8x}$,
$y''' = 128(\cos 8x + 0{,}5y' - 0{,}5e^{8x})$.

21. $y = -5e^{2x} + e^{-3x} + x^2e^{2x} + 6e$,
$0{,}5 \cdot y''' + 0{,}5 \cdot y'' - 7e^{2x} = 10xe^{2x} + 3y'$.

22. $y = e^{2x} - 6xe^{2x} - 0{,}04e^{2x}\sin 5x$,
$y'' = e^{2x}\sin 5x + 4(y' - y)$.

23. $y = 10 + 3e^{x}\sin x - e^{x}\cos x - e^{-2x}$,
$\mathrm{s}e^{-x}(y'' + 2y') = 10(\sin x + \cos x)$.

24. $y=-\frac{x}{2}e^{3x}+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{2}{3}e^{3x}$,
$y''-9(y'-e^{3x})=9(2\sin 3x-\cos 3x)$.

25. $y = 2e^{3x} - 4xe^{3x} + xe^{-x}$,
$(y''' - 6y'' + 9y')\cdot e^{-x} - 4x = 0$.

26. $y = 5\cos x - 3\sin x + 2(xe^{x} + 4e^{x})$,
$y''' = 2\cdot(5\sin x + 3\cos x + 2e^{x}) + y'$.

27. $y = e^{x} + 2xe^{x} + e^{2x} + xe^{-x}$,
$12xe^{-x} + y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16e^{-x}$.

28. $y=xe^{9x}+\frac{1}{18}\cos 9x+e^{9x}+e^{-9x}$,
$y'''-81y'=162e^{9x}+81\sin 9x$.

29. $y = e^{-x} + 3x\cdot e^{x} + e^{2x} + xe^{-x}$,
$y''' + 2y'' - 7y' = 2(e^{2x} + 4xe^{-x} - 6xe^{x})$.

30. $y = -5e^{2x} + xe^{2x} - 0{,}04e^{2x}\sin 5x$,
$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

5.
ГРАФИКИ

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

1. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2,\ [0,3]$.

2. $y=4\sqrt{x}-\frac{x^2}{64},\ [0,16]$. **3.** $y = -3x^3 + x,\ [0, 2]$.

4. $y=\frac{x^3}{96}-2\sqrt{x},\ [0,4]$.

5. $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x - 6,\ [1, 3]$.

6. $y = 3x^3 - x + 2,\ [-2, 0]$. **7.** $y=32\sqrt{x}-x^2,\ [1,16]$.

8. $y=x+\frac{4}{x},\ [1,4]$.

9. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 2,\ [0, 3]$.

10. $y = 2x^3 - 24x,\ [1, 3]$. **11.** $y=\frac{x^3}{32}-6\sqrt{x},\ [0,4]$.

12. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8,\ [-4,-1].$

13. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10,\ [0, -3].$

14. $y = 4x^3 - 48x - 4,\ [-3, 3].$

15. $y=x-\sqrt{x},\ [0,16].$ **16.** $y=3x+\frac{27}{x},\ [2,5].$

17. $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5,\ [-3, 3].$

18. $y = x^3 - 27x,\ [1, 4].$ **19.** $y=3x^3+\frac{729}{x},\ [1,3].$

20. $y=9\sqrt{x}-\sqrt{x^3},\ [1,4].$

21. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,\ [-2, 3].$

22. $y = x^3 - 3x^2,\ [1, 3].$ **23.** $y=4\sqrt{x}-x,\ [1,9].$

24. $y=2x+\frac{32}{x},\ [1,8].$

25. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5,\ [0, -2].$

26. $y = x^2 - 6x,\ [-5, 3].$ **27.** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{64}{x},\ [1,16].$

28. $y = 4 - x - 4/x^2,\ [1, 4].$

29. $y=3-x-\frac{4}{(x+2)^2},\ [-1,2].$ **30.** $y=x+\frac{5}{x},\ [1,10].$

2. Провести полное исследование функции и построить график:

1. $y = -3x^3 + 2x^2.$ **2.** $y = -x^3 - 3x^2 + 4.$
3. $y = (x + 1)^2(x - 1)^2.$ **4.** $y = -x^3 + x^2 + 5x + 3.$
5. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13.$ **6.** $y = 3x^3 + 2x^2 - 5.$
7. $y = 0{,}0625 \cdot (x + 1)^2(x - 3)^2.$ **8.** $y = x^3 + 3x^2 - 4.$
9. $y = x^3 - 3x^2.$ **10.** $y = -x^3 + 3x + 2.$
11. $y = (x - 3)^2(x - 1)^2.$ **12.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 5.$
13. $y = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 4x + 4.$ **14.** $y=-\left(\frac{1}{3}\right)x^4+2x^2.$
15. $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2.$ **16.** $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5.$
17. $y = -0{,}0625 \cdot (x^2 - 4)^2.$ **18.** $y = -x^3 - x^2 + x - 1.$
19. $y = x^3 - 3x + 2.$ **20.** $y = x^2(x - 2)^2.$
21. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8.$ **22.** $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$

23. $y = (x - 3)^2(x + 3)^2$.
24. $y = x^3 - 2x^2 + x$.
25. $y = 2 + x - 3x^3$.
26. $y = x^3 - 4x + 3$.
27. $y = (2x - 1)^2(2x - 3)^2$.
28. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.
29. $y = x^3 - 9x + 8$.
30. $y = 16x^2(x - 1)^2$.

3. Провести полное исследование функции и построить график:

1. $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$.
2. $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$.

3. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.
4. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

5. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$.
6. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

7. $y = \dfrac{x^3}{x^3 + 1}$.
8. $y = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$.

9. $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$.
10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

11. $y = \dfrac{x}{2 - x^3}$.
12. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

13. $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x - 4}$.
14. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

15. $y = \dfrac{x + x^2}{(x - 1)^2}$.
16. $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$.

17. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$.
18. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$.

19. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$.
20. $y = \dfrac{x^2 + 8}{(x + 2)^2}$.

21. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$.
22. $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$.

23. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.
24. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

25. $y = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$.
26. $y = \dfrac{8x - 2x^2}{(x - 2)^2}$.

27. $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$. **28.** $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

29. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$. **30.** $y = \dfrac{2x^3-27}{6x^2}$.

4. Провести полное исследование функции и построить график:

1. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$. **2.** $y = (x-1)^4 \cdot e^x$.
3. $y = (2x^2 + 5x + 2) \cdot e^x$. **4.** $y = \ln(x^2 + 6x + 12)$.
5. $y = x - \ln(x+1)$. **6.** $y = (4x^2+13) \cdot e^{-x^2}$.
7. $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **8.** $y = (3x+5) \cdot e^{2x}$.
9. $y = \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$. **10.** $y = (1-x^2) \cdot e^{-x^2}$.
11. $y = x^2 \ln x$. **12.** $y = 10x \cdot e^{2x}$.
13. $y = x \cdot e^x$. **14.** $y = \dfrac{1}{x \cdot e^{x^2}}$.
15. $y = \ln(x^2 + 8x + 18)$. **16.** $y = (3x+5) \cdot e^{-3x-2}$.
17. $y = x \cdot \ln x$. **18.** $y = (x-1) \cdot e^{x-1}$.
19. $y = (2x+1) \cdot e^{-x^2}$. **20.** $y = 2 \cdot e^{x^2-10x}$.
21. $y = x \cdot e^{-x}$. **22.** $y = (2x+1) \cdot e^{-x}$.
23. $y = e^{x^2-6x}$. **24.** $y = (x^2+1) \cdot e^x$.
25. $y = x^3 \ln x$. **26.** $y = (x-1) \cdot e^{1-x}$.
27. $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. **28.** $y = (x+1)\ln^2(x+1)$.
29. $y = \dfrac{1}{x^2 \cdot e^{x^2}}$. **30.** $y = x \cdot e^{x+1}$.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

1. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства:

1. $\int\left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^{15}}{4} + \dfrac{x}{12}\right)dx$. **2.** $\int (x+1)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx$.

3. $\int \sqrt[8]{(8x)^{-7}}\,dx$. **4.** $\int \dfrac{dx}{x^2+7}$.

5. $\int\left(\dfrac{3x^3-2x^2}{8x}\right)dx$. **6.** $\int \dfrac{dx}{x^2-10}$.

7. $\int\left(7\sqrt[3]{x}+9\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx.$ **8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.$

9. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+3x^5\right)dx.$ **10.** $\int\frac{4dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

11. $\int\left(\frac{x^4+6x}{2x}\right)dx.$ **12.** $\int\frac{dx}{2x^2-6}.$

13. $\int\left(\sqrt[3]{x^4}+\frac{9}{x^9}+2\right)dx.$ **14.** $\int\left(\frac{x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{2}{7}}}{x^2}\right)dx.$

15. $\int\left(\frac{x^5+2x^2-7}{x}\right)dx.$ **16.** $\int\left(\frac{x^6+6x^{\frac{5}{2}}-7}{2x^3}\right)dx.$

17. $\int\left(\frac{3+4x^2}{x}\right)dx.$ **18.** $\int\left(\frac{17+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

19. $\int(3-x^2)^2dx.$ **20.** $\int(\sqrt[7]{x}+7^x)dx.$

21. $\int\left(\frac{6\cos^2x+3}{\cos^2x}\right)dx.$ **22.** $\int(2\sin x+3\cos x)dx.$

23. $\int(5e^x+2^x)dx.$ **24.** $\int\left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{x^2}{4}\right)dx.$

25. $\int\left(\frac{x^5+3x^2}{\sqrt{5x}}\right)dx.$ **26.** $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{7}{\sqrt[5]{x}}+1\right)dx.$

27. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx.$ **28.** $\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$

29. $\int\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ **30.** $\int\left(\frac{4-\sin^3x}{\sin^2x}\right)dx.$

2. Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала и преобразование подынтегрального выражения:

1. $\int\frac{1-3x}{3+2x}dx.$ **2.** $\int\frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx.$

3. $\int \frac{3-2x}{7+5x^2}dx.$

4. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx.$

5. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx.$

6. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx.$

7. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx.$

8. $\int \frac{x}{2+3x}dx.$

9. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx.$

10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx.$

11. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$

12. $\int x\cdot 7^{x^2}dx.$

13. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

14. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx.$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

16. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$

17. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx.$

18. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

19. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

20. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx.$

21. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$

22. $\int \frac{x}{x^2-5}dx.$

23. $\int 4^{2-3x}dx.$

24. $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx.$

25. $\int \cos\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{x}{4}dx.$

26. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx.$

27. $\int 3\cdot e^{-2x}dx.$

28. $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx.$

29. $\int \sin(2+3x)dx.$

30. $\int \cos 6x\cdot\sin^2 6x\,dx.$

3. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int \ln 9x\,dx.$

2. $\int x\cdot\cos x\,dx.$

3. $\int \ln(x-7)dx.$ **4.** $\int x^2 2^{2x} dx.$

5. $\int x \cdot \sin 7x dx.$ **6.** $\int x \cdot e^{2x} dx.$

7. $\int \mathrm{arctg} 5x dx.$ **8.** $\int e^{-5x} x dx.$

9. $\int x^2 \cdot \ln x dx.$ **10.** $\int (3x+5) \cdot \cos x dx.$

11. $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx.$ **12.** $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

13. $\int \arcsin x dx.$ **14.** $\int x \cdot 2^{-x} dx.$

15. $\int (4-3x) \cdot e^{-2x} dx.$ **16.** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

17. $\int (x^2+1) \cdot e^{-8x} dx.$ **18.** $\int 6x \cdot \sin x dx.$

19. $\int \ln^2 x dx.$ **20.** $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

21. $\int \arcsin 4x dx.$ **22.** $\int x \cdot \ln(x-1) dx.$

23. $\int x \cdot \mathrm{arctg} x dx.$ **24.** $\int (x^2-2x+3) \cdot \ln x dx.$

25. $\int \ln(x^2+1) dx.$ **26.** $\int (x^2+7x+1) \cdot \cos x dx.$

27. $\int (2-4x) \cdot \sin 2x dx.$ **28.** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

29. $\int (x+5) \cdot e^{3x} dx.$ **30.** $\int (x^2-1) \cdot e^{9x} dx.$

4. Найти интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)x}.$ **2.** $\int \frac{x dx}{(x^2+1)x}.$

3. $\int \frac{dx}{x^2+x}.$ **4.** $\int \frac{dx}{(x+7)(x+2)}.$

5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 x}.$ **6.** $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$

7. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

8. $\int\frac{dx}{x^2-x+3}.$

9. $\int\frac{4x^2-x+3}{x^2(x-1)}dx.$

10. $\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx.$

11. $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

12. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^3-5x^2+6x}dx.$

13. $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

14. $\int\frac{x+2}{(x-3)(x-4)}dx.$

15. $\int\frac{2x-7}{x^2+8}dx.$

16. $\int\frac{5x^2+1}{x^3-5x^2+4x}dx.$

17. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx.$

18. $\int\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-6x}dx.$

19. $\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx.$

20. $\int\frac{x+4}{x^3+x^2-6x}dx.$

21. $\int\frac{3}{(x+1)(x-5)(x+3)}dx.$

22. $\int\frac{x^2+1}{x^4+3x^2}dx.$

23. $\int\frac{x^2+x+5}{x(x-2)(x+3)}dx.$

24. $\int\frac{1}{(x+5)(x+6)}dx.$

25. $\int\frac{2x+5}{x^2+1}dx.$

26. $\int\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}dx.$

27. $\int\frac{x^2-2}{4x^3-x}dx.$

28. $\int\frac{x+5}{x^2+x-12}dx.$

29. $\int\frac{x^2+4}{x^5-16x}dx.$

30. $\int\frac{dx}{x(x^2+2)}.$

5. Найти интегралы, используя указанную замену переменных:

1. $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{2x+\sqrt{4x}}dx,\ \ x=t^4.$

2. $\int\cos^3 2x\cdot\sin^4 2xdx,\ \ \sin 2x=t.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1}-\sqrt[4]{3x-1}}$, $3x-1=t^4$.

4. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx$, $x=2\operatorname{tg}t$. **5.** $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+4x}{x}}dx$, $\frac{1+4x}{x}=t^2$.

6. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$, $x=\sin t$. **7.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-2}}dx$, $x-2=t^2$.

8. $\int \cos^6 x\sin x dx$, $t=\cos x$. **9.** $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$, $\frac{x-2}{x}=t^2$.

10. $\int \frac{\cos 2x}{8-\sin 2x}dx$, $\sin 2x=t$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}}$, $x-1=t^2$.

12. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x+\cos^2 x}$, $\operatorname{tg}x=t$. **13.** $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x-3}}dx$, $x-3=t^3$.

14. $\int \sqrt{16-x^2}dx$, $4\sin t=x$. **15.** $\int \frac{1}{(2-\sqrt[3]{x})\sqrt{2x}}dx$, $x=t^6$.

16. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}dx$, $\sin x=t$. **17.** $\int \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt[3]{2x}+1}dx$, $2x=t^6$.

18. $\int \cos^6 x\sin^3 x dx$, $t=\cos x$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}dx$, $1+x=t^6$.

20. $\int \cos^4 3x\sin^3 3x dx$, $t=\cos 3x$.

21. $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx$, $1+x=t^2$.

22. $\int \frac{2\sin 3x}{1-\cos 3x}dx$, $\cos 3x=t$.

23. $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x+2}dx$, $x-5=t^2$. **24.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$, $x=3\sin t$.

25. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx, \quad \frac{x+1}{x}=t^2.$

26. $\int \frac{dx}{-2\sin x+\cos x}, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x+3}}, \quad x+3=t^4.$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \quad x=2\operatorname{tg}t.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}, \quad x=t^3.$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}, \quad \operatorname{tg}x=t.$

6. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}x\,dx.$

2. $\int\limits_0^2 xe^{-x}dx.$

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} x^2\cos 2x\,dx.$

4. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx.$

5. $\int\limits_0^\pi x^2\sin x\,dx.$

6. $\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx.$

7. $\int\limits_0^3 \frac{x+5}{e^x}dx.$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2)\cos x\,dx.$

10. $\int\limits_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx.$

11. $\int\limits_1^{e^3} \ln x\,dx.$

12. $\int\limits_0^\pi x\sin 7x\,dx.$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

14. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5)\cos x dx.$

15. $\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{x^2} dx.$

16. $\int\limits_0^{\pi} (2x-4)\sin x dx.$

17. $\int\limits_1^{2} \ln(x^2) dx.$

18. $\int\limits_0^{\ln 2} x e^x dx.$

19. $\int\limits_0^{1} (1-x)^2 e^x dx.$

20. $\int\limits_1^{2} x^3 \ln x dx.$

21. $\int\limits_0^{\ln 3} (5+x) e^{3x} dx.$

22. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x dx.$

23. $\int\limits_1^{4} x^2 \ln(6x) dx.$

24. $\int\limits_0^{\ln 2} (2x-3) e^{-x} dx.$

25. $\int\limits_0^{0,5} \arccos x dx.$

26. $\int\limits_0^{1} x^2 3^{x+1} dx.$

27. $\int\limits_0^{\ln 2} (x+2) e^{4x} dx.$

28. $\int\limits_0^{\ln 2} x^2 e^{-3x} dx.$

29. $\int\limits_1^{2} (x-1) 2^x dx.$

30. $\int\limits_0^{0,5} \arcsin x dx.$

7. Найти интегралы, используя указанную замену переменных:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t.$

2. $\int\limits_1^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{8x}\left(\sqrt[3]{8x}+1\right)}$, $8x = t^3.$

3. $\int\limits_0^{3} \sqrt{9-x^2} dx$, $3\sin t = x.$

4. $\int\limits_0^{3} \frac{x}{\sqrt[3]{8x+3}} dx$, $8x+3 = t^3.$

5. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}, \ x=\operatorname{tg} t.$

6. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{4x}+\sqrt[4]{4x}}, \ 4x=t^4.$

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{7\sin^2 x+3\cos^2 x}, \ \operatorname{tg} x=t.$

8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{(x+1)^2}}, \ x+1=t^2.$

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin x-\cos x}, \ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$

10. $\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx, \ \frac{x-2}{x}=t^2.$

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3-\sin x}dx, \ \sin x=t.$

12. $\int\limits_4^6 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-4}{2x}}\,dx, \ \frac{x-4}{2x}=t^2.$

13. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \ x=\sin t.$

14. $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx, \ x=t^2.$

15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin x\,dx, \ t=\cos x.$

16. $\int\limits_2^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx, \ x-1=t^2.$

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x}{4-\cos x}dx, \ \cos x=t.$

18. $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx, \ 1-x=t^2.$

19. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{4-x^2}\,dx, \ x=2\sin t.$

20. $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{5x}}\,dx, \ \frac{1+x}{5x}=t^2.$

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^6 x\,dx, \ \sin x=t.$

22. $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx, \ x=t^6.$

23. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx, \ x=\operatorname{tg} t.$

24. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}, \ 2x-1=t^4.$

25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin^2 x dx,\ t = \sin x.$ **26.** $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx,\ x = t^6.$

27. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx,\ t = \cos x.$ **7.28.** $\int\limits_1^{16} \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx,\ x = t^4.$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{6-\sin^2 x}} dx,\ \sin x = t.$ **30.** $\int\limits_1^{64} \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx,\ x = t^6.$

8. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми; изобразить эту фигуру:

1. $y = 6x - x^2,\ y = 0.$
2. $y = e^{-x},\ x = 2,\ x = 0,\ y = -5.$
3. $y = x^2 + 4x,\ y = 0.$
4. $y = 0{,}25x^3,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 0.$
5. $y = 0{,}25x^3,\ y = 0,\ x = 2.$
6. $y = \ln x^3,\ y = 0,\ x = e,\ x = e^2.$
7. $y = \sqrt{4-x^2},\ x + y = 2.$
8. $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2.$
9. $y = x,\ x + y = 3,\ x = 0.$
10. $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x.$
11. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi.$
12. $y = x^2 - 4x + 3,\ y = 0.$
13. $y = x^2 - 6x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4.$
14. $y = 3x^{-1},\ x + y = 4.$
15. $y = x^2 - 4,\ y = -x^2 + 4.$
16. $y = x^{-1},\ x = 2,\ x = 4,\ y = -3.$
17. $y = \cos x,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = 0,\ y = 0.$
18. $y = 6 - x,\ y = 6 + x,\ x = 6.$
19. $y = x^2 + 6x + 5,\ y = 0.$
20. $y = x^3,\ x + y = 2,\ x = 0.$
21. $y = x^2,\ x = -3,\ y = 0.$
22. $4y = x^2,\ y = 4.$
23. $y = \sqrt{x},\ x = 4,\ 2y = -x.$
24. $y = 2x^2 + 3x - 9,\ y = 0.$

25. $x-y=0,\ \ x=-9,\ \ y=\sqrt{-x}.$

26. $y=2\sqrt{x},\ \ x=1,\ \ x=4,\ \ y=-5.$

27. $y=\sqrt{1-x^2},\ \ y=\ x^2.$

28. $y=(x+2)^2,\ \ y=4-x.$

29. $xy=9,\ \ x=1,\ \ x=5,\ \ y=-4.$

30. $y=x^3,\ \ x=0,\ \ y=-2x+12.$

7. РЯДЫ

1. Исследовать сходимость числового ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}.$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}}.$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)!}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$ **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}.$ **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+4)!}.$ **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{16}}{n!}.$ **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 2^n}{2n+3}.$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}.$ **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+100}{n!}.$ **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{(2n)!}.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}.$ **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}.$ **15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+4}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{3^n\cdot n}.$ **17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(3n)!}.$ **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(3n)!}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n}.$ **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{10^n}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2\cdot 7\cdot\ldots\cdot(5n-3)}.$ **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{(2n)!}.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot n^2}{8^n}.$ **24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n\cdot(n+40)}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{7^n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n+6}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{9^n\cdot n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(4n)!}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{(n+3)!}$.

2. Исследовать сходимость числового ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n+8}+6}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{12}+3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+1}{n(n^3+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{\sqrt{n}(n^3+6)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi\cdot n}{n^3+1}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2+1}}{\sqrt[6]{n^7+1}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^2+1}\cdot(n-1)}{\sqrt[6]{n^7+1}\cdot(n+7)}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{\sqrt{n^{12}+1}+n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{n^2}{n^5+3}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{9n+2}\right)^n$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^8+3}}{\sqrt[4]{n^6+2}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n+4}(n^2+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{4\cdot\sqrt{n}}{n^3+2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot(n+3)}{\sqrt[3]{n^6+1}\cdot(\sqrt{n}+7)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^8+2}}{\sqrt[5]{n^{11}+9}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^{12}+4}}{\sqrt{n}(n^3+6)}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n+100}\right)^n$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^4+1}{n^8+1}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+2}\right)^n$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi\cdot n^2}{\sqrt{n^3+1}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{\sqrt{n^4+5(n^3+3)}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^9+n}}{\sqrt[4]{n^8+1}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+3}{\sqrt{n^4+1}+n^7}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}\cdot(n^3+1)}{\sqrt[3]{n^7+1}\cdot(n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{12n+1}+\sqrt{n+1}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{5n^3+n}{3n^9+1}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{\sqrt{15n+3}+\sqrt{2n+1}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}\cdot(\sqrt{n}+2)}{\sqrt{n^5+1}\cdot(n^2+3)}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{7n+5}\right)^n$.

3. Исследовать абсолютную и условную сходимость числового ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{2^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n}{99n+4}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n-2)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1000}{6n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^6}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(2n)!}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{1}{2n+3}}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+8)n}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 7^n}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+3)!}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)^n}{(3n+5)^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{10^{10}}{\sqrt[10]{n}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+2)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+1}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}}{n+2}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{3n+1}\right)^n$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{2}{3n+1}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{(n^3+1)^n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\sqrt{n+10}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+1}{5n^2}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+7}{(3n)!}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 10^{n-1}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n\cdot 5^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\cdot(x+5)^n.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-4)^n}{2n-1}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n\cdot n\sqrt{n}}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n^2+1}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x-5)^n.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+8)^n}{2^n}.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+1}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-4)^n}{2n-1}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+2)^n}{n!}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3n-1}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+8)^n}{n!}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}\cdot x^n.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1)^2}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(3n-1)\cdot 4^n}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{n+1}\right)^{n}\cdot(x-2)^n.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)^3}.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2\sqrt{2n}}.$

5. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

1. $y = \ln(5x + 3)$, $x_0 = 1$. **2.** $y = x\cos 5x$, $x_0 = 0$.

3. $y = \sin\frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$. **4.** $y = \sin(2x^2)$, $x_0 = 0$.

5. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x_0 = 2$. **6.** $y = \cos\left(\frac{2x^3}{3}\right)$, $x_0 = 0$.

7. $y = \frac{1}{5+2x}$, $x_0 = -3$. **8.** $y = e^{3x}$, $x_0 = -4$.

9. $y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $x_0 = 0$. **10.** $y = \frac{x^5}{\sqrt{e^x}}$, $x_0 = 0$.

11. $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $x_0 = 4$. **12.** $y = e^{-x^4}$, $x_0 = 0$.

13. $y = \frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0 = 2$. **14.** $y = \frac{1}{1-3x^2}$, $x_0 = 0$.

15. $y = e^x$, $x_0 = -1$. **16.** $y = x\operatorname{ch}x$, $x_0 = 0$.

17. $y = \frac{x^2}{1+x}$, $x_0 = 0$. **18.** $y = \frac{e^x - 1}{x}$, $x_0 = 0$.

19. $y = x^2\ln(x)$, $x_0 = 1$. **20.** $y = xe^{-x^2}$, $x_0 = 0$.

21. $y = xe^{-2x}$, $x_0 = -2$. **22.** $y = \frac{1}{1-x^2}$, $x_0 = 0$.

23. $y = \sin\frac{\pi x}{3}$, $x_0 = 1$. **24.** $y = x\ln(1 - x)$, $x_0 = 0$.

25. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$. **26.** $y = \sqrt{1+2x}$, $x_0 = 0$.

27. $y = \ln(5x)$, $x_0 = 2$. **28.** $y = x\cos(4x^2)$, $x_0 = 0$.

29. $y = \frac{1}{4-x^4}$, $x_0 = 0$. **30.** $y = \cos(2x)$, $x_0 = $ р.

6. Разложив подынтегральную функцию в ряд, проинтегрировать и вычислить с точностью до 0,01:

1. $\int_0^1 e^{-x}dx$. **2.** $\int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

3. $\int\limits_0^2 \cos x^2 dx.$

4. $\int\limits_0^{0,75} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx.$

5. $\int\limits_1^0 e^{-2x^3} dx.$

6. $\int\limits_0^{0,8} \frac{x}{1+x^2} dx.$

7. $\int\limits_0^{0,94} \frac{x+5}{e^x} dx.$

8. $\int\limits_0^{0,9} \frac{\ln(1+x^5)}{x^2} dx.$

9. $\int\limits_2^0 \frac{\sin x^2}{x} dx.$

10. $\int\limits_0^1 \cos(x^3) dx.$

11. $\int\limits_0^1 x^2 e^{-x^2} dx.$

12. $\int\limits_0^9 x \cdot \sin\sqrt{x} dx.$

13. $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^5+2} dx.$

14. $\int\limits_1^0 x \cos x^6 dx.$

15. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{sh}(x^3)}{x^2} dx.$

16. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} dx.$

17. $\int\limits_0^2 \operatorname{ch}(x^7) dx.$

18. $\int\limits_0^1 x e^{-x^6} dx.$

19. $\int\limits_{0,2}^0 \frac{x}{1+\sqrt[8]{x}} dx.$

20. $\int\limits_0^{0,8} \sqrt{1+x^3} dx.$

21. $\int\limits_0^1 x^{10} e^{-x} dx.$

22. $\int\limits_1^0 x^{11} \cos x dx.$

23. $\int\limits_0^{1,2} \frac{1-\cos x^4}{x} dx.$

24. $\int\limits_0^{0,9} \sqrt[3]{1+x^6} dx.$

25. $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x^2} dx.$

26. $\int\limits_0^{0,8} \frac{x}{(1+x^3)^2} dx.$

27. $\int\limits_1^0 \frac{1-\cos(2x^2)}{x^3}dx.$ **28.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^4)}{\sqrt[4]{x}}dx.$

29. $\int\limits_0^1 \frac{2x-\sin 2x}{\sqrt{x}}dx.$ **30.** $\int\limits_0^{0,25} \frac{\ln(1+3x)-3x}{x}dx.$

8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Найти частные производные:

1. $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3.$ **2.** $u = xy + y\cdot\sqrt[4]{z} + xz.$

3. $z = x^3 + \sqrt{y} - 5xy.$ **4.** $z = x\sin(xy^2).$

5. $z = \exp(-x^2y^2).$ **6.** $z = x\sin(x + y).$

7. $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{xy}\right).$ **8.** $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

9. $z = \ln(x^3 + xy + 2y^3).$ **10.** $z = x\cos(2xy).$

11. $z = \frac{x}{\sqrt{4x^2+y^2}}.$ **12.** $z = 3^{\ln(x+2y)}.$

13. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}.$ **14.** $u = x^3 + y^5 - 4x^2z^2.$

15. $u = \ln\left(3z + \sqrt{8x^2+y^2}\right).$ **16.** $u = \sqrt{5x^2 + y^2x - z^2}.$

17. $z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right).$ **18.** $z = \operatorname{tg}\left(\frac{y^2}{x}\right).$

19. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{x}.$ **20.** $z = 7x^3y - xy^7.$

21. $z = \ln\sqrt{x^2y + 9y^2}.$ **22.** $z = \exp\left(\sin x\cdot\sqrt[3]{y}\right).$

23. $z = xy\arcsin x^2.$ **24.** $u = y\sqrt{x} + yz + x\sqrt{z}.$

25. $z = x\cdot\exp(x^2 - y^2).$ **26.** $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$

27. $u = \sin(x^2yz^2)$. **28.** $z = \cos(x^2y^3)$.

29. $z = x\operatorname{arctg}(xy^2)$. **30.** $z = 5^{3x^2-y^2}$.

2. Для функции $u = u(x, y, z)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{l}$ в точке M:

1. $u = 2x^2 + 3xy + zy$, $\vec{l} = \{3, 4, 0\}$, $M(1, -1, 1)$.

2. $u = x^2 + xy - 2zy$, $\vec{l} = \{1, 2, 2\}$, $M(1, 2, 1)$.

3. $u = 3x^2 - 4xy + 3zy$, $\vec{l} = \{0, 3, 4\}$, $M(-2, 1, 1)$.

4. $u = 2x^2 - 3yz + 2zx$, $\vec{l} = \{2, 1, -2\}$, $M(-1, 1, 4)$.

5. $u = 2xy + zy - 5xz^2$, $\vec{l} = \{-4, 0, 3\}$, $M(0, 1, 5)$.

6. $u = 3xy^2 - 2x^2 - 5zy$, $\vec{l} = \{2, -2, 1\}$, $M(1, -1, 0)$.

7. $u = x^2y^2 + x^2z^2 + z^2y^2$, $\vec{l} = \{1, 4, 0\}$, $M(0, 1, -5)$.

8. $u = x^2y - z^2 + 2zy^2$, $\vec{l} = \{-1, 2, 2\}$, $M(1, 3, -4)$.

9. $u = xy + 2xz^2 - zy$, $\vec{l} = \{-3, 4, -1\}$, $M(2, 1, 5)$.

10. $u = 2x^2y - xz + z^2y$, $\vec{l} = \{-2, 4, -4\}$, $M(3, 1, -6)$.

11. $u = x^2 - 5xy^2 + 3zy$, $\vec{l} = \{4, 0, 3\}$, $M(2, 2, 1)$.

12. $u = 4x^2y - 3xy + xz^2$, $\vec{l} = \{-2, 2, 1\}$, $M(3, 2, 1)$.

13. $u = 3xy^2 + 3yz^2 - zy^2$, $\vec{l} = \{1, 2, 0\}$, $M(1, 2, 1)$.

14. $u = x^2y - 4yz + 5z^2x$, $\vec{l} = \{1, -2, 2\}$, $M(2, 1, 1)$.

15. $u = 5xy - yz^2 - zx^2$, $\vec{l} = \{0, 1, 2\}$, $M(2, 2, 1)$.

16. $u = x^2 + 5xy - zy^2$, $\vec{l} = \{2, -1, 2\}$, $M(1, 1, 1)$.

17. $u = 3x - 4yx^2 + yz^2$, $\vec{l} = \{2, 2, 1\}$, $M(-3, 2, 1)$.

18. $u = 5x^2 + 3xy^2 - 2yz$, $\vec{l} = \{2, -2, 1\}$, $M(2, 1, 1)$.

19. $u = 2x - yx^2 + 5zy^2$, $\vec{l} = \{-1, 2, 0\}$, $M(1, 3, 1)$.

20. $u = xy^2 - 2xy + 3zx^2$, $\vec{l} = \{1, 2, -1\}$, $M(3, 1, 1)$.

21. $u = x^2y + 3yz - xz^2$, $\vec{l} = \{0, -1, 2\}$, $M(1, 1, 3)$.

22. $u = xz^2 + 2yz^2 - 3zx^2$, $\vec{l} = \{1, 2, -2\}$, $M(2, 1, 2)$.

23. $u = x^2z - 5y^2z + yz^2$, $\vec{l} = \{-2, 0, 1\}$, $M(3, 1, 3)$.

24. $u = 2xy + yz^2 - 2zy^2$, $\vec{l} = \{1, 2, -2\}$, $M(2, 2, 1)$.

25. $u = 3xy^2 - 3yz^2 - 3zx^2$, $\vec{l} = \{1, -2, 0\}$, $M(1, 2, 2)$.

26. $u = 5x^2y - yz^2 + zx^2$, $\vec{l} = \{2, 1, -2\}$, $M(1, 3, 2)$.

27. $u = 5xz^2 + yx^2 - xz^2$, $\vec{l} = \{0, 1, -2\}$, $M(1, 1, 2)$.

28. $u = 3xz - 2xy^2 - 2yz$, $\vec{l} = \{2, 2, 1\}$, $M(2, 2, 1)$.

29. $u = 5xy + 3yx^2 + zy^2$, $\vec{l} = \{2, 0, -1\}$, $M(2, 3, 1)$.

30. $u = 4xy + zx^2 - 3zy^2$, $\vec{l} = \{0, 3, -4\}$, $M(1, 1, 3)$.

3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали в указанной точке:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $M(2, 1, 2)$.

2. $x^2 + 2x + y^2 - z^2 = 15$, $M(2, 1, 2)$.

3. $2x^2 - y^2 - z^2 = 16$, $M(4, 0, 4)$.

4. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0,\ M(1, 1, 1).$
5. $2x^2 + y^2 - 2z = 0,\ M(-2, 2, 6).$
6. $x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 15,\ M(0, 1, 4).$
7. $x^2 + 4x + y^2 - z^2 + 2z = 33,\ M(-2, 6, 1).$
8. $x^2 - 2y^2 - z^2 = 28,\ M(6, 4, 0).$
9. $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ M(-1, 1, 1).$
10. $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 8,\ M(-1, 0, 3).$
11. $x^2 + y^2 - 2z = 0,\ M(-2, 2, 4).$
12. $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 5,\ M(0, 2, 1).$
13. $3x^2 - y^2 - z^2 = 28,\ M(-4, 2, 4).$
14. $2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0,\ M(-1, 1, 1).$
15. $x^2 + 2y^2 - 2z = 0,\ M(-2, 1, 3).$
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 3,\ M(-2, 0, 1).$
17. $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 8,\ M(3, -1, 0).$
18. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 18,\ M(6, 0, 3).$
19. $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ M(-2, 2, 4).$
20. $x^2 + 4y^2 - 6z = 0,\ M(-6, 0, 6).$
21. $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 = 7,\ M(1, 1, -3).$
22. $x^2 + y^2 - z^2 = 36,\ M(4, 6, -4).$
23. $x^2 - y^2 - z^2 = 11,\ M(6, -5, 0).$
24. $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ M(2, -2, 4).$
25. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ M(-1, 0, 1).$
26. $2x^2 + 3y^2 - 4z = 0,\ M(2, -2, 5).$
27. $2x^2 - y^2 - 4z = 0,\ M(2, 2, 1).$
28. $x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 21,\ M(-6, 2, 1).$
29. $x^2 - y^2 - 2z = 0,\ M(2, 4, -6).$
30. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4,\ M(0, 1, -1).$

4. Провести исследование функции на экстремум:

1. $z = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y - 24x.$
2. $z = 2xy^2 - 2x^3 + 2y^2 + 24x.$
3. $z = 4xy + x^2 + y^2 - 6y.$
4. $z = x^3 + 2xy + 2y^2 + 2x^2 - 36x.$
5. $z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 18x - 6y.$
6. $z = x^3 + 2xy - y^2 - 7x + 2y.$
7. $z = -4xy + 8x^2 + 4y^2 - 4y.$
8. $z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 9x.$
9. $z = x^2y + 2x^2 - 3y^2 + 4y.$
10. $z = y^3 - 4xy - 4x^2 - y^2 - 27y.$
11. $z = xy^2 - 2x^3 + 2y^2 + 8x.$

12. $z = y^3 + 6xy + 3x^2 + 6y^2 - 9y$.
13. $z = x^2 + 6xy - 4y^3$.
14. $z = y^3 + 3x^2y - 3x^2 - 12y$.
15. $z = 4xy - 2x^2 - y^3 + 4y$.
16. $z = 2x^3 + 12xy - 3y^2 + 18x$.
17. $z = x^3 - y^3 - 3x + 12y$.
18. $z = xy - x^2 + 3x - y$.
19. $z = 2xy + x + 2y^2 + 2y$.
20. $z = 2x^3 + 2xy + y^2 - 4x$.
21. $z = x + 3y + 4x^2 + 3y^2$.
22. $z = 2x^3 - 6xy - 6x^2 + 3y^2$.
23. $z = x^3 - 24xy - 8y^3$.
24. $z = 8xy + 6x^3 + 4y^2 - 5x^2$.
25. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + 6y$.
26. $z = x - y - 4x^2 - 2y^2$.
27. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + 4y$.
28. $z = y^3 + 3xy - x^3$.
29. $z = 2x^3 + 6xy - y^2 + 12x$.
30. $z = 2x - 2xy + y^2 - 4y$.

5. Применяя метод градиента, найти экстремум функции на заданном множестве:

1. $f(x,y) = x + y$, $\begin{cases} x + 2y \le 0, \\ x - 2y - 15 \le 0, \\ 2x + y + 7 \ge 0. \end{cases}$

2. $f(x,y) = x + y + 1$, $\begin{cases} x \le 6, \\ y \le 3, \\ x + 2y \ge 0. \end{cases}$

3. $f(x,y) = x - y$, $\begin{cases} x + 2y \ge 0, \\ x - 2y + 15 \ge 0, \\ 2x + y - 6 \le 0. \end{cases}$

4. $f(x,y) = x - y + 1$, $\begin{cases} 2x + y - 3 \le 0, \\ x - 2y - 15 \le 0, \\ x \ge 0. \end{cases}$

5. $f(x,y) = x - y - 2$, $\begin{cases} 2x - y + 4 \ge 0, \\ x + 3y + 15 \ge 0, \\ x \le 0. \end{cases}$

6. $f(x,y) = 2x + y - 3$, $\begin{cases} x \ge -4, \\ y \le 2, \\ x - 2y \le 0. \end{cases}$

7. $f(x,y)=2x-y+6,\quad \begin{cases} x\le 8,\\ x+y\le 9,\\ 2x+y\ge 0. \end{cases}$

8. $f(x,y)=x-2y-2,\quad \begin{cases} 3x-y\ge 0,\\ x-2y-9\le 0,\\ 2x+y-2\le 0. \end{cases}$

9. $f(x,y)=3x-y+3,\quad \begin{cases} 2x-2y\le 7,\\ x+2y+9\ge 0,\\ y\le 0. \end{cases}$

10. $f(x,y)=x-4y-4,\quad \begin{cases} 4x+2y\ge -1,\\ x-2y-9\le 0,\\ y\le 0. \end{cases}$

11. $f(x,y)=x+3y-6,\quad \begin{cases} x-2y+9\ge 0,\\ 2x+y+2\ge 0,\\ y\ge 2x. \end{cases}$

12. $f(x,y)=x+2y+3,\quad \begin{cases} x+3y-9\le 0,\\ 2x-y+4\le 0,\\ y\ge 0. \end{cases}$

13. $f(x,y)=x+y,\quad \begin{cases} x+4y\le 0,\\ x-y-6\le 0,\\ 3x+y+9\ge 0. \end{cases}$

14. $f(x,y)=x-y-3,\quad \begin{cases} x\le 4,\\ x+y\le 1,\\ x+3y\ge 0. \end{cases}$

15. $f(x,y)=x-y+5,\quad \begin{cases} x+y\ge 0,\\ x-4y+16\ge 0,\\ 3x+y-12\le 0. \end{cases}$

16. $f(x,y)=2x-y+7,\quad \begin{cases} x+y-8\le 0,\\ x-4y-20\le 0,\\ x\ge 0. \end{cases}$

17. $f(x,y)=-2x+y-1,\quad \begin{cases} x-y+5\ge 0,\\ x+3y+9\ge 0,\\ x\le 0. \end{cases}$

18. $f(x,y)=x+3y-7,\quad \begin{cases} x\ge -3,\\ 3x+y\le 0,\\ x+y+1\ge 0. \end{cases}$

19. $f(x,y)=4x+y+1,\quad \begin{cases} 5x+2y\le 6,\\ y\le 8,\\ 2x+y\ge 0. \end{cases}$

20. $f(x,y)=x-3y+1,\quad \begin{cases} 5x-y\ge 0,\\ x-2y-4\le 0,\\ 4x+y-16\le 0. \end{cases}$

21. $f(x,y)=-x+y-1,\quad \begin{cases}4x-y\le 8,\\ x+y+1\ge 0,\\ y\le 0.\end{cases}$

22. $f(x,y)=x-2y-2,\quad \begin{cases}x+2y+6\ge 0,\\ x-3y-6\le 0,\\ y\le 0.\end{cases}$

23. $f(x,y)=-2x+y-3,\quad \begin{cases}x-3y+9\ge 0,\\ 4x+y+8\le 0,\\ y\ge 3x.\end{cases}$

24. $f(x,y)=x+2y+3,\quad \begin{cases}x+4y-4\le 0,\\ x-y+6\ge 0,\\ y\ge 1.\end{cases}$

25. $f(x,y)=x+3y-7,\quad \begin{cases}2x-y+5\ge 0,\\ 2x+2y-1\le 0,\\ y+9\ge 0.\end{cases}$

26. $f(x,y)=3x+y-2,\quad \begin{cases}x-2y+4\ge 0,\\ x+2y+4\ge 0,\\ x\le 8.\end{cases}$

27. $f(x,y)=x-5y+1,\quad \begin{cases}2x-y-10\le 0,\\ 2x+y+5\ge 0,\\ y\le 1.\end{cases}$

28. $f(x,y)=3x+2y-2,\quad \begin{cases}x+2y-9\le 0,\\ 4x-y-4\le 0,\\ x+3\ge 0.\end{cases}$

29. $f(x,y)=2x-3y+5,\quad \begin{cases}x-y+6\ge 0,\\ 3x+y+1\le 0,\\ x\le 0.\end{cases}$

30. $f(x,y)=x-3y+4,\quad \begin{cases}x+y-3\le 0,\\ x-4y-1\le 0,\\ x+9\ge 0.\end{cases}$

9.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Вычислить двойной интеграл:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} xy\,dy.$

2. $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} y\,dx.$

3. $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} \sqrt{y}\,dx.$

4. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{2}{x}}^{2x} x^5 y\,dy.$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{4}} dx \int\limits_{-2x}^{2x} xdy.$

6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y-3}^{2y} ydx.$

7. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{1-y^2} \sqrt{y}\,dx.$

8. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-x}^{\frac{x}{2}+3} xydy.$

9. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{x+1} \sqrt{x}\,ydy.$

10. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} yxdx.$

11. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} x^2 ydy.$

12. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{3x}^{x^2} xdy.$

13. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2x}^{x-1} x^2 dx.$

14. $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{3y}^{y-2} xydx.$

15. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{2y}^{y^2} \sqrt{x}\,ydx.$

16. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2y-4}^{\frac{2}{y}} ydx.$

17. $\int\limits_{-4}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} xy^2 dx.$

18. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} xydx.$

19. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{y^2} xy^3 dx.$

20. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydy.$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{\frac{x+6}{2}} xdy.$

22. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{x^2+1}} xydy.$

23. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{x-2}^{4+3x} x\,dy.$

24. $\int\limits_{-3}^{1} dy \int\limits_{y-3}^{0} x^2y^2\,dx.$

25. $\int\limits_{-1}^{4} dy \int\limits_{0}^{y-5} x\sqrt{y}\,dx.$

26. $\int\limits_{1}^{9} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} y\,dx.$

27. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{2x}^{x+3} x^4\,dy.$

28. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} xy^3\,dx.$

29. $\int\limits_{0}^{9} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} xy^2\,dx.$

30. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2} y\,dy.$

2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1. $y = 2x, \quad y = 0{,}5x, \quad x = 1.$

2. $y = \dfrac{2}{x}, \quad y = 0{,}5x, \quad x = 4.$

3. $x = 1 - y^2, \quad x = y.$

4. $y = 2x + 3, \quad y = x^2.$

5. $y = x, \quad x = 0{,}5y, \quad 2 \le y \le 4.$

6. $y = 1 - \sqrt{2x - x^2}, \quad y = 1 + \sqrt{2x - x^2}, \quad x = 0.$

7. $y = 2x, \quad y = -2x, \quad 0 \le x \le 0{,}75.$

8. $y = 0{,}5x^2, \quad y = x^2 - 1.$

9. $y = \sqrt{3 - x}, \quad y = -\sqrt{3 - x}, \quad x \ge 0{,}75.$

10. $x = 0{,}2y^2 + 1, \quad x = y^2, \quad y \ge 0.$

11. $x = 2y, \quad x = 2y - 3, \quad 0 \le x \le 1.$

12. $y = 0{,}5x, \quad y = -x, \quad x = 8.$

13. $y = \sqrt{1 - x}, \quad y = -\sqrt{1 - x}, \quad y \ge -2.$

14. $x = \dfrac{2}{y}, \quad y = 2x - 3, \quad 1 \le x \le 2.$

15. $y = 4 - 2x, \quad y = -2, \quad x = 1.$

16. $y = \sqrt{x}, \quad y = -x^2, \quad x = 1.$

17. $y = -0{,}5x^2, \quad y = 1 - x^2.$

18. $y = 3 + x, \quad y = 2x, \quad x = 0.$

19. $x = 1, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = -x^3.$

20. $y = 4, \quad x = -\sqrt{y}, \quad x = -y^3.$

21. $x = y - 2, \quad x = -1, \quad y = -3.$

22. $y = 0{,}5(x + 1), \quad y = 2x - 1, \quad x = 0.$

23. $x = y - 3, \quad x = 0, \quad y = 6.$

24. $y = 0{,}5x + 3, \quad y = 2x - 1, \quad x = 1.$

25. $x = 0{,}5(y + 1), \quad x = 2y - 1, \quad y = 0.$

26. $y = \sqrt{x}, \quad y = x - 2, \quad y \geq 0.$

27. $x = y + 1, \quad x = 2 - y, \quad y = -2.$

28. $x = 2y - 6, \quad x = -y, \quad y = -3.$

29. $y = x + 3, \quad y = 0, \quad x = 4.$

30. $y = 3x + 4, \quad y = x - 2, \quad x = -1.$

3. Вычислить тройной интеграл:

1. $\int\limits_0^1 z dz \int\limits_z^{2z} y dy \int\limits_0^y dx.$

2. $\int\limits_0^2 y dy \int\limits_y^{2y} dz \int\limits_0^z x dx.$

3. $\int\limits_{-1}^1 y dy \int\limits_{y-1}^{1-y} dx \int\limits_{-10}^x dz.$

4. $\int\limits_0^2 z dz \int\limits_{\frac{z}{2}}^z x dx \int\limits_{-1}^x dy.$

5. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} dz \int\limits_{-2}^z y dy.$

6. $\int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^x y dy \int\limits_{-4}^{3y} dz.$

7. $\int\limits_1^2 z^2 dz \int\limits_0^z dy \int\limits_0^{2y} dx.$

8. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{10} z dz \int\limits_0^z dx.$

9. $\int\limits_0^1 y dy \int\limits_{y-1}^y dx \int\limits_{-2}^x z dz.$

10. $\int\limits_1^3 dz \int\limits_z^{2z} x^2 dx \int\limits_0^x y dy.$

11. $\int\limits_0^4 x^2 dx \int\limits_0^x dz \int\limits_{-1}^z y dy.$

12. $\int\limits_1^2 x dx \int\limits_{x-1}^{x+1} y dy \int\limits_0^y dz.$

13. $\int_0^2 zdz \int_0^z dy \int_{-4}^y xdx.$ **14.** $\int_{-1}^0 dx \int_x^{2x} ydy \int_{-3}^y dz.$

15. $\int_{-1}^0 dy \int_{-4}^y z^2dz \int_z^0 dx.$ **16.** $\int_0^1 dy \int_{2y}^{y^2} dx \int_0^x dz.$

17. $\int_{-2}^0 dz \int_{z-1}^z ydy \int_y^0 xdx.$ **18.** $\int_0^2 x^2dx \int_1^x dz \int_0^z y^2dy.$

19. $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{x^4} ydy \int_0^y zdz.$ **20.** $\int_{-1}^0 dy \int_y^{y+1} zdz \int_{-3}^z dx.$

21. $\int_1^2 x^2dx \int_0^x dz \int_{-1}^{2z} dy.$ **22.** $\int_0^2 dy \int_{y-1}^1 dz \int_{-2}^z xdx.$

23. $\int_0^2 xdx \int_{3x}^{x^2} dy \int_0^y dz.$ **24.** $\int_0^1 dx \int_x^{x+2} zdz \int_0^z ydy.$

25. $\int_{-1}^1 dy \int_y^1 zdz \int_{-3}^z dx.$ **26.** $\int_2^3 x^2dx \int_x^{2x} ydy \int_0^y dz.$

27. $\int_{-1}^0 xdx \int_0^x z^2dz \int_{-1}^{3z} dy.$ **28.** $\int_1^2 dx \int_0^x dz \int_1^{z+3} ydy.$

29. $\int_1^3 dz \int_{\frac{z}{2}}^z y^2dy \int_1^{y+1} dx.$ **30.** $\int_1^2 dx \int_0^x zdz \int_z^{z^2} dy.$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1. $x^2 + y^2 = 5,\ \ z \le x^2 + y^2 + 1,\ \ z \ge 0.$

2. $z = 10 - x^2 - y^2,\ \ z \ge 6.$

3. $z = x^2 + y^2,\ \ y \le x,\ \ z \le 4.$

4. $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ x + y + z \le 4,\ \ z \ge 0.$

5. $x^2 + y^2 = 9,\ \ x + y + z \le 5,\ \ z \ge 0.$

6. $2z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$

7. $2z = x^2 + y^2,\ z = 4,\ y \geq -x,\ y \leq -x\sqrt{3}.$

8. $x^2 + y^2 = 9 - z,\ \ x^2 + y^2 \geq 4,\ \ z \geq 0.$

9. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 4.$

10. $x^2 + y^2 = 6,\ \ z \leq x^2 + y^2,\ \ z \geq 0.$

11. $x^2 + y^2 - (z + 1)^2 = 0,\ \ z^2 = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 \leq 4.$

12. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1},\ z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$

13. $x^2 + y^2 = 4,\ \ z \geq x^2 + y^2,\ \ z \leq 10.$

14. $z = x^2 + y^2,\ \ z = 2(x^2 + y^2),\ \ x^2 + y^2 \leq 1.$

15. $4 - z = x^2 + y^2,\ \ z \geq 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 1.$

16. $z = x^2 + y^2,\ z = 4,\ y \geq x,\ y \leq x\sqrt{3}.$

17. $z = 4 - x^2 - y^2,\ \ 0 \leq z \leq 3.$

18. $x^2 + y^2 = 9,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ z \leq 5 - x,\ \ z \geq 0.$

19. $z = x^2 + y^2,\ \ 1 \leq z \leq 4.$

20. $z = 6 - x^2 - y^2,\ \ z \geq 2.$

21. $2z = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 \leq 2,\ \ z \geq 0.$

22. $z = 5 - x^2 - y^2,\ \ z \geq 0,\ \ x^2 + y^2 \leq 1.$

23. $z = x^2 + y^2,\ \ z \leq 4.$

24. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ \ 2z = x^2 + y^2.$

25. $3z = x^2 + y^2,\ \ \ 3 \leq z \leq 27.$

26. $z = x^2 + y^2 + 1,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ z \geq 0.$

27. $z = -\sqrt{x^2 + y^2},\ z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$

28. $2z = x^2 + y^2,\ \ z \leq 18,\ \ x \geq 0.$

29. $x^2 + y^2 = 9,\ \ x^2 + y^2 = z^2,\ \ 2 \geq z \geq 0.$

30. $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 25,\ \ x + y + z \leq 10,\ \ z \geq 0.$

5. Найти поток векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ через замкнутую поверхность с помощью формулы Остроградского:

1. $1 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2,\ \vec{a} = (2y + x)\vec{i} + (3x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}.$

2. $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ \vec{a} = x\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + 5(y - z)\vec{k}.$

3. $0 \leq z \leq 3,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ \vec{a} = 3y\vec{i} + (4x + y)\vec{j} + 3z\vec{k}.$

4. $x^2 + y^2 = 18,\ 0 \leq z \leq y,\ 0 \leq x \leq y\sqrt{3},$

$\vec{a} = (y + 3x)\vec{i} + 2xz\vec{j} + 5(x - z)\vec{k}.$

5. $z = x + y,\ \ x + y = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 0,\ \ x = 0,$
$y = 0,\ \ \vec{a} = 2x\vec{i} + (2y + z)\vec{j} + 5(y + z)\vec{k}.$

6. $x \ge y^2,\ \ 0 \le z \le 1 - x,\ \ \vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (-3y + 3z)\vec{j} + 2z\vec{k}.$

7. $0 \le y \le 1 - x,\ \ x \ge 0,\ \ 0 \le z \le 1 - x,$
$\vec{a} = 3x\vec{i} - (y + z)\vec{j} + (2y - 3z)\vec{k}.$

8. $x^2 + y^2 = z,\ \ x = 1,\ \ y = 0,\ \ y = 2x,\ \ z = 0,$
$\vec{a} = -(4x + y^2)\vec{i} + (3x^2 + z)\vec{j} + (y^2 - 5z)\vec{k}.$

9. $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ \vec{a} = 2y^2\vec{i} + (3 + 3z^2)\vec{j} + 5(x + z)\vec{k}.$

10. $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ 0 \le z \le 5 - x,$
$\vec{a} = (x + y^3)\vec{i} - (5x + 2y)\vec{j} - (x^2 - 4z)\vec{k}.$

11. $-1 \le z \le -x^2 - y^2,\ \ \vec{a} = y^2\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + 5(2y + z)\vec{k}.$

12. $x^2 + y^2 \le 1,\ \ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2},$
$\vec{a} = x\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + 5(y - z)\vec{k}.$

13. $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 4,\ \ \vec{a} = x\vec{i} + (3y + z)\vec{j} + 5(y - z)\vec{k}.$

14. $1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ \ 0 \le z \le 4 - x - y,$
$\vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (z^2 + 3y)\vec{j} + (x^2 - 7z)\vec{k}.$

15. $0 \le z \le x^2 + y^2,\ \ x = 1,\ \ y = 2x,\ \ y = 0,$
$\vec{a} = (4 + y)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (x + z)\vec{k}.$

16. $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ \ \vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2 - 4y)\vec{j} + (x^3 + z)\vec{k}.$

17. $0{,}5\sqrt{x^2 + y} \le z \le 2,\ \ \vec{a} = (z + 2y)\vec{i} - (3x^2 - 2y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}.$

18. $10x + 5y + 4z - 20 = 0,\ \ z = 0,\ \ x = 0,\ \ y = 0,$
$\vec{a} = (4x + z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (x - 4z)\vec{k}.$

19. $0 \le x^2 + y^2 \le 9,\ \ -1 \le z \le 4,$
$\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} - (z - 3y)\vec{j} + (5y^2 - z)\vec{k}.$

20. $0 \le z \le \sqrt{xy},\ \ y = 0,\ \ y = 9x,\ \ x = 1,$
$\vec{a} = (1 + 2x)\vec{i} - (4x - y)\vec{j} - (2y + 4z)\vec{k}.$

21. $x^2 \le y \le 1, \ \ x \ge 0, \ \ 0 \le z \le 1 - x,$
$\vec{a} = (3x-1)\vec{i} - (4z+2y)\vec{j} + (1+3z)\vec{k}.$

22. $0 \le y \le 4x, \ \ x = 1, \ \ 0 \le z \le xy,$
$\vec{a} = (2+y^3)\vec{i} - (2z^2+x)\vec{j} + (2y-3z)\vec{k}.$

23. $4x + 3y - 6z = 12, \ \ x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 0, \ \ 0 \le z,$
$\vec{a} = (2+3y)\vec{i} - (5y+x)\vec{j} + (2x-3z)\vec{k}.$

24. $1 - x \le y \le 1, \ \ x \le 1, \ \ 0 \le z \le 1 - y,$
$\vec{a} = (y+z^3)\vec{i} - (2x-3y)\vec{j} + (1-4z)\vec{k}.$

25. $0 \le x^2 + y^2 \le 4, \ \ 0 \le z \le (xy)^2,$
$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (5x+3y)\vec{j} + (y-z)\vec{k}.$

26. $0 \le y \le 1 - x^2, \ \ 0 \le z \le y,$
$\vec{a} = (2x+y^2)\vec{i} + (x^2+y)\vec{j} + (x^2-4z)\vec{k}.$

27. $0 \le y \le 1, \ \ x \ge 0{,}5, \ \ 0 \le z \le 1 - x,$
$\vec{a} = (x+y)\vec{i} - (4x+4y)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}.$

28. $5x - 20y + 8z - 40 = 0, \ \ x = 0, \ \ y = 0, \ \ z = 0,$
$\vec{a} = (2+y^3)\vec{i} + (5+2z)\vec{j} + (y^2+4z)\vec{k}.$

29. $0 \le z \le (2xy)^2, \ \ y = 0, \ \ y = 2x, \ \ x = -2,$
$\vec{a} = (z+y)\vec{i} + (x-2y)\vec{j} - (y-z)\vec{k}.$

30. $-(x^2+y^2) \le z \le 0, \ \ y = 3x, \ \ y = 4, \ \ x = 0,$
$\vec{a} = (5x+1)\vec{i} - 6(x+y)\vec{j} + (5+2z)\vec{k}.$

6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ вдоль замкнутого контура L, лежащего в плоскости xOy (обход против часовой стрелки):

1. $\vec{a} = (x-1)\vec{i} + 2y\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(3, 1)$, $D(1, 1)$.

2. $\vec{a}=(y+3)\vec{i}+x\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(1,\ 1)$.

3. $\vec{a}=2(x-1)\vec{i}+y\vec{j}$ L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. $\vec{a}=2x\vec{i}+(y-1)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(4,\ 3)$, $D(2,\ 3)$.

5. $\vec{a}=y\vec{i}+(x-2)\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-1,\ 0)$.

6. $\vec{a}=x\vec{i}+2(y+1)\vec{j}$ L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(5,\ 0)$, $C(5,\ 2)$, $D(0,\ 2)$.

7. $\vec{a}=x\vec{i}-(y-3)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(2,\ 2)$, $D(-2,\ 2)$.

8. $\vec{a}=2x\vec{i}+(y+1)\vec{j}$ L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. $\vec{a}=3x\vec{i}-(y+2)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(0,\ 3)$, $D(-2,\ 3)$.

10. $\vec{a}=(x+3)\vec{i}-2y\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 1)$, $C(1,\ 3)$.

11. $\vec{a}=(x-2)\vec{i}+3y\vec{j}$ L: прямоугольник с вершинами в точках $A(3,\ 1)$, $B(-3,\ 1)$, $C(-3,\ -1)$, $D(3,\ -1)$.

12. $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+3)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 3)$, $C(-3,\ 3)$, $D(-4,\ 0)$.

13. $\vec{a}=(x+5)\vec{i}+2\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(2,\ 2)$.

14. $\vec{a}=(x-2)\vec{i}-4\vec{j}$ L: дуга BC окружности $x^2+y^2=1$ и отрезки прямых CA и AB $A(0,\ 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0,\ 1)$.

15. $\vec{a}=2\vec{i}-(y+1)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(-5,\ 2)$, $D(-3,\ 0)$.

16. $\vec{a}=\vec{i}+2(y-2)\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(3,\ 2)$, $C(0,\ 2)$.

17. $\vec{a}=2x\vec{i}-5y\vec{j}$ L: прямоугольник с вершинами в точках $A(3,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-1,\ 0)$, $D(3,\ 0)$.

18. $\vec{a}=3\vec{i}+4y\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 1)$, $C(1,\ 4)$, $D(0,\ 3)$.

19. $\vec{a} = 2x\vec{i} + \vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 2)$.

20. $\vec{a} = 2\vec{i} - (y+1)\vec{j}$ L: дуга BC окружности $x^2 + y^2 = 1$ и отрезки прямых CA и AB $A(0, 0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0, 1)$.

21. $\vec{a} = (x+1)\vec{i} - 5\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(-2, -2)$, $C(1, -2)$, $D(3, 0)$.

22. $\vec{a} = 3\vec{i} + 3y^2\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 3)$.

23. $\vec{a} = x^2\vec{i} + 2y\vec{j}$ L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 4)$, $D(-2, 0)$.

24. $\vec{a} = (x+4)\vec{i} - y\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(-1, -3)$, $C(1, -3)$, $D(2, 0)$.

25. $\vec{a} = 4x\vec{i} - 2(y-1)\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 3)$.

26. $\vec{a} = \vec{i} - 5(y+2)\vec{j}$ L: дуга BC окружности $x^2 + y^2 = 1$ и отрезки прямых CA и AB $A(0, 0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

27. $\vec{a} = 3x^2\vec{i} + 3y\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(2, -2)$, $C(0, -2)$, $D(-2, 0)$.

28. $\vec{a} = 2x\vec{i} - (y-5)\vec{j}$ L: треугольник с вершинами в точках $A(0, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -2)$.

29. $\vec{a} = 3(x-1)\vec{i} + y^2\vec{j}$ L: прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, -2)$, $C(4, -2)$, $D(4, 0)$.

30. $\vec{a} = x^2\vec{i} - (y+3)\vec{j}$ L: параллелограмм с вершинами в точках $A(4, 2)$, $B(1, 2)$, $C(-1, -2)$, $D(2, -2)$.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

1. $x - yy' = 1$.

2. $(1 + y^2)dx = xdy$.

3. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$.

4. $\sqrt{1+y^2}\,dx = xydy$.

5. $xy+\sqrt{1-x^2}y'=0.$

6. $y'\cdot\ln y=y.$

7. $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0.$

8. $y\sin xdx+\cos x\ln ydy=0.$

9. $x(y^2+1)+(x^2y-y)y'=0.$

10. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0.$

11. $x+yy'=0.$

12. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0.$

13. $(x^2-1)dy-2xydx=0.$

14. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

15. $(1+y^2)dx-xydy=0.$

16. $y\ln ydx+xdy=0.$

17. $\mathrm{tg}x\cdot\sin^2y+\cos x\cdot\mathrm{tg}y\cdot y'=0.$

18. $y'=2^{x+y}.$

19. $x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0.$

20. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$

21. $e^{y-2x}dy=4xdx.$

22. $(1+y^2)dx-xy(1+x^2)dy=0.$

23. $y'\sin x-y\cos x=0.$

24. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0.$

25. $y'\cos^2x=\dfrac{y}{\ln y}.$

26. $(1+y^2)dx+2xydy=0.$

27. $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0.$

28. $2^{x+y}+2^{3x-y}\cdot y'=0.$

29. $(1+x)^3dy-(y-2)^2dx=0.$

30. $ydx+\sin^2xdy=0.$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка, представив неизвестную функцию в виде произведения $y=u\cdot v$:

1. $x\cdot y'+2y=x^2.$

2. $y'-\dfrac{y}{x+4}=(x+4)^3.$

3. $y'+2xy=2x\cdot e^{-x^2}.$

4. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{0,5}.$

5. $y' + y \cdot \mathrm{tg}x = \sec x$. **6.** $(x^2 - 1) \cdot y' + (x + 1)y = x - 1$.

7. $y' + 2xy = 2x^3$. **8.** $y' - \frac{1-2x}{x^2} y = e^{-\frac{1}{x}}$.

9. $y' + y = e^{-x} \cdot \cos x$. **10.** $y' + 2y = (x + 1)y^{-2}$.

11. $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$. **12.** $e^x \cdot y' + e^x \cdot y = x$.

13. $y' - y \cdot \mathrm{ctg}x = \sin x$. **14.** $2x \cdot y' - y = 3x^2$.

15. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$. **16.** $(4 + x^2) \cdot y' + xy = 16$.

17. $(x + 1) \cdot y' - xy = 3$. **18.** $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$.

19. $(1 + x^2) \cdot y' + xy = 1$.

20. $(x^4 + x) \cdot y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}$.

21. $y' - 2xy = -2x$. **22.** $y' - y \cdot \mathrm{tg}x \cdot \sec x = e^{\sec x}$.

23. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$. **24.** $x \cdot y' + y - e^x = 0$.

25. $y' - y = 2e^x \cdot y^3$. **26.** $(x^2 - x) \cdot y' - (x + 1)y + 4 = 0$.

27. $x \cdot y' + y = x^2 + 3x + 2$.

28. $(x^2 - x) \cdot y' + y = 2x^3 - x^2$.

29. $y' + x^2 y = x^2$. **30.** $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x (1 + x)^2$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения высшего порядка:

1. $y^{IV} = \sin x$. **2.** $y'' = \frac{10}{x} + 1$.

3. $y''' = e^x \cdot (x + 5)$. **4.** $y''' = \frac{1}{x} + 5$.

5. $y''' = 2xe^x$. **6.** $y''' = 40x^4$.

7. $y''' = xe^{2x}$. **8.** $y^{IV} = 20x^3$.

9. $y^{IV} = xe^{3x}$. **10.** $y''' = 60x^2$.

11. $y^{IV} = 16e^{-4x}$. **12.** $y'' = x \cdot \sin 2x$.

13. $y^{IV} = e^{2x}$. **14.** $y'' = x \cdot \cos 5x$.

15. $y''' = x^2 e^x$. **16.** $y'' = -9x \cdot \sin 3x$.

17. $y''' = x \cdot 3^x$. **18.** $y^{IV} = \cos^2 x - \sin^2 x$.

19. $y'' = x \cdot \cos 3x$.

20. $y^{IV} = \cos 5x$.

21. $y'' = \dfrac{2}{x} + x$.

22. $y^{IV} = \cos 3x + x$.

23. $y^{\mathrm{IV}} = 40x^3 + x - 4$.

24. $y''' = \sin x + 8e^{2x}$.

25. $y''' = 12x^3 - \sin x$.

26. $y'' = \cos x + \dfrac{1}{x}$.

27. $y''' = 6x^2 + 2x - 4$.

28. $y''' = x^2 \cdot \sin x$.

29. $y^{IV} = 49\sin 7x + 1$.

30. $y'' = x \cdot \cos x + x$.

4. Решить задачу Коши для уравнения второго порядка:

1. $y'' = 128y^3,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 8$.

2. $y'' \cdot y^3 + 49 = 0,\ \ y(3) = -7,\ \ y'(3) = -1$.

3. $y'' + \dfrac{1}{x}y' = x,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$.

4. $y'' + 50\sin y \cdot \cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5$.

5. $y'' \cdot y^3 + 36 = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2$.

6. $y'' - \dfrac{1}{x}y' = -1,\ \ y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 1$.

7. $y'' = 72y^3,\ \ y(-2) = 1,\ \ y'(-2) = 6$.

8. $y'' = 2\sin^3 y \cdot \cos y,\ \ y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ \ y'(1) = 1$.

9. $y'' + \dfrac{1}{x}y' = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$.

10. $y'' = 32y^3,\ \ y(4) = 1,\ \ y'(4) = 4$.

11. $y'' \cdot y^3 + 16 = 0,\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = 2$.

12. $y'' \cdot y = y'^2,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 1$.

13. $x \cdot y'' = (1 + x^2)y',\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$.

14. $y'' \cdot y^3 + 9 = 0,\ \ y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 3$.

15. $y'' + y' = x,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.

16. $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0,\ \ y(-1) = 0,\ \ y'(-1) = 1$.

17. $y'' \cdot y^3 + 4 = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = -2$.

18. $2y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$.

19. $y'' = 2y^3,\ \ y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 1$.

20. $y'' \cdot y^3 + 1 = 0,\ \ y(-2) = -1,\ \ y'(-2) = 1.$

21. $y'' = y'^2,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = -1.$

22. $x \cdot y'' = (x + 1)y',\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1.$

23. $y'' \cdot y^3 + 64 = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 2.$

24. $y''(x - 3) + y' = 0,\ \ y(4) = 0,\ \ y'(4) = 1.$

25. $y'' - 2\sin^3 y \cdot \cos y = 0,\ \ y(1) = \frac{\pi}{2},\ \ y'(1) = -1.$

26. $y'' \cdot y^3 + 25 = 0,\ \ y(2) = -5,\ \ y'(2) = -1.$

27. $y'' + 2y \cdot y'^3 = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1.$

28. $y'' + 8\sin y \cdot \cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$

29. $y'' \cdot y'^3 = y^4,\ \ y(0) = \sqrt{2},\ \ y'(0) = \sqrt{2}.$

30. $2y'' \cdot y = 1 + y'^2,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

5. Найти общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и указать вид частного решения с неопределенными коэффициентами:

1. $y^{V} + 9y''' = 2x^2 + x - x^2 \cdot e^{3x}.$

2. $y^{IV} + 8y'' + 16y = x^3 \cdot e^{2x} + \sin 2x.$

3. $y^{IV} + 5y''' + 6y'' = x^2 \cdot e^{-2x} - x^3.$

4. $y^{VI} + 2y^{IV} + y'' = x - 1 + x \cdot \cos x.$

5. $y^{VI} - 4y'' = 10 + x^4 + x \cdot \sin(4x).$

6. $y^{IV} - y''' + y' - y = (x + 1) \cdot e^x + x^3 - 2.$

7. $y^{VI} - 16y''' + 64y = x \cdot e^{2x} + x \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x\sqrt{3}\right).$

8. $y^{V} - 9y''' = x^2 + 2x + (x + 1) \cdot \cos 3x.$

9. $y^{IV} + 8y'' + 16y = x \cdot e^{2x} + (x^2 + x)\cos 2x.$

10. $y^{IV} - 5y''' + 6y'' = x \cdot e^{-2x} + 2x^2 \cdot \cos 2x.$

11. $y^{VI} - 2y^{IV} + y'' = x^2 - x + 4\cos x.$

12. $y^{IV} + 4y'' = x^3 \cdot e^{2x} + x \cdot \sin\left(\sqrt{2}x\right) + 1.$

13. $y^{IV} + y''' + y' + y = (x^2 + 4) \cdot e^{-x} + x + 7.$

14. $y^{VI} + 16y''' + 64y = x^2 \cdot e^{-2x} + 3e^{-x} \cdot \cos\left(x\sqrt{3}\right).$

15. $y^{V} - 25y''' = x^3 - 9x + (x - 8) \cdot \cos 5x.$

16. $y^{IV} - 8y'' + 16y = e^{2x} \cdot \sin 2x + (2x + 1)\cos 2x.$

17. $y^{IV} + y''' - 6y'' = (x - 2) \cdot e^{2x} + (x + 9) \cdot \cos 2x.$

18. $y^{VI} - 4y^{IV} + 4y'' = (x^2 - x) \cdot e^{2x} + 4\cos 2x.$

19. $y^{VI} - 4y'' = x^4 + x^2 \cdot e^{\sqrt{2}x} + x \cdot \cos\left(\sqrt{2}x\right).$

20. $y^{IV} - 2y''' + y' - 2y = (x^2 + x) \cdot e^{2x} + 1.$

21. $y^{VI} - 2y''' + y = x \cdot e^{7x} + x \cdot e^{x} + \sin x.$

22. $y^{VI} + 9y^{IV} = 5x^2 + 4x - x \cdot e^{3x} + \cos 3x.$

23. $y^{V} + 25y''' = x + 3 + (x - 1) \cdot \cos 5x.$

24. $y^{IV} - y''' - 6y'' = x \cdot e^{-2x} + e^{3x} + 2 + x \cdot \cos 2x.$

25. $y^{IV} + 16y'' = x + 2 + x \cdot e^{-4x} + 4x \cdot \cos 4x.$

26. $y^{VI} + 125y''' = x^3 \cdot e^{-5x} - 9x + (x - 8) \cdot \cos 5x.$

27. $y^{IV} - 6y''' = x \cdot e^{2x} - x^3 + 2x + x \cdot e^{-x} \cdot \sin(6x).$

28. $y^{IV} + 3y''' + y' + 3y = (x^3 + 4) \cdot e^{-3x} + x + 10.$

29. $y^{IV} + 5y''' = x^3 \cdot e^{-5x} - 5x + e^{x} \cdot \sin(5x).$

30. $y^{IV} - 18y'' + 81y = x^2 \cdot e^{3x} + \sin 9x + x.$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом подбора:

1. $2y'' - 5y' = \sin\frac{5x}{2}.$ **2.** $9y'' - 6y' + y = 9e^{\frac{x}{3}}.$

3. $3y'' - 5y' - 2y = x^2.$ **4.** $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{\frac{3x}{2}} \cdot \sin 2x.$

5. $y'' - 10y' + 25y = 4e^{5x}.$ **6.** $6y'' - y' - y = 3x.$

7. $y'' + 6y' + 25y = e^{-3x} \cdot \cos 2x.$

8. $y'' - 12y' + 36y = \sin 6x.$ **9.** $y'' - 2y' - 8y = 6e^{-2x}.$

10. $y'' - 8y' + 25y = 9e^{4x} \cdot \sin x.$

11. $y'' - 4y' + 4y = 16x^2.$ **12.** $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}.$

13. $5y'' - 6y' + 5y = e^{3x} \cdot \cos 4x.$

14. $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 2x.$

15. $y'' - 4y' + 3y = 3\sin x.$ **16.** $y'' - 2y' + 2y = 4 \cdot \sin x.$

17. $2y'' + 5y' - 3y = \sin 3x.$ **18.** $5y'' - 2y' + y = e^{x} \cdot \cos 2x.$

19. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 3x.$

20. $y'' + 14y' + 13y = 4e^{-3x}.$ **21.** $5y'' - 2y' + y = e^{x} \cdot \sin 2x.$

22. $y'' - 8y' + 16y = 4\sin 4x.$

23. $6y'' - y' - y = \cos\frac{x}{2}.$ **24.** $9y'' - 6y' + y = \sin x.$

25. $y'' - 2y' + 10y = e^{x} \cdot \sin x.$

26. $9y'' - 6y' + y = 4\cos\frac{x}{3}.$ **27.** $2y'' - y' - y = \sin 2x.$

28. $y'' + 8y' + 16y = \cos x.$ **29.** $y'' + 9y = 2\sin 3x.$

30. $y'' - 3y' - 4y = 2e^{4x}.$

7. Найти решение задачи Коши:

1. $2y''-5y'-3y=e^{3x},\ y(0)=0,\ y'(0)=\dfrac{8}{7}.$

2. $4y''+4y'+y=2e^{\frac{-x}{2}},\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

3. $2y''-y'-y=e^{x},\ y(0)=3,\ y'(0)=\dfrac{1}{3}.$

4. $y''+y'=e^{x}+x,\ y(0)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=\dfrac{1}{2}.$

5. $y''-12y'+36y=36x+2e^{6x},\ y(0)=-\dfrac{2}{3},\ y'(0)=0.$

6. $y''-10y'+25y=5\sin 5x,\ y(0)=\dfrac{11}{10},\ y'(0)=0.$

7. $2y''-y'-y=x^{2}-e^{\frac{-2x}{3}},\ y(0)=-\dfrac{4}{5},\ y'(0)=0.$

8. $y''-8y'+16y=16\cos 4x-1,\ y(0)=-\dfrac{1}{16},\ y'(0)=0.$

9. $y''-4y'+4y=8x-4\cos 2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1.$

10. $y''-12y'+36y=18x^{3}+1,\ y(0)=\dfrac{1}{12},\ y'(0)=-\dfrac{3}{4}.$

11. $4y''+4y'+y=x^{3}+6x^{2},\ y(0)=2,\ y'(0)=0.$

12. $4y''-4y'+2y=5e^{\frac{x}{2}}-4x,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

13. $y''-2y'+5y=-5x^{3}-4x^{2}+2x,\ y(0)=-\dfrac{1}{5},\ y'(0)=-3.$

14. $2y''+5y'-3y=e^{\frac{x}{2}}+6x,\ y(0)=-\dfrac{1}{3},\ y'(0)=\dfrac{1}{7}.$

15. $6y''-y'-y=e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}},\ y(0)=1,\ y'(0)=\dfrac{1}{5}.$

16. $4y''+4y'+y=2x^{2}-4,\ y(0)=4,\ y'(0)=0.$

17. $y''-5y'+6y=26\sin 2x+1,\ y(0)=-\dfrac{1}{3},\ y'(0)=-1.$

18. $9y''+12y'+4y=\cos\dfrac{2x}{3}-8,\ y(0)=-2,\ y'(0)=1.$

19. $y'' - 8y' + 16y = 4e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

20. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

21. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x} + 1$, $y(0) = \frac{1}{6}$, $y'(0) = 0$.

22. $4y'' + 4y' + y = 8e^{\frac{-x}{2}} + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

23. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + \sin 2x$, $y(0) = \frac{13}{17}$, $y'(0) = \frac{2}{17}$.

24. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{\frac{-x}{2}} + x$, $y(0) = \frac{3}{4}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$.

25. $y'' - 2y' + y = 4e^{x} + x^2 - 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

26. $y'' + 12y' + 36y = 2e^{-6x} - 108x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

27. $y'' - 6y' + 13y = 25\sin 2x$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 1$.

28. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x} - 9x$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 0$.

29. $y'' + 3y' - 4y = e^{4x} + e^{-4x}$, $y(0) = \frac{1}{24}$, $y'(0) = -\frac{31}{30}$.

30. $y'' - 4y = 4e^{2x} + 4\cos 2x$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 1$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Правила действий со степенями ($a > 0$):

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \;\; a^0 = 1; \;\; a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \;\; \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Выделение полного квадрата и разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } \;\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Мнимая единица: $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$.

Комплексное число: $z = x + iy, \;\; x, y \in \mathbb{R}$.

Правила действий с комплексными числами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

Деление с остатком проводится «уголком».

Пример:

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\quad \text{делитель} \\
-\begin{array}{r} x^3+2x^2\qquad+3 \\ \underline{x^3\qquad\;\;-4x\qquad} \end{array} & \begin{array}{|l} x^2-4 \\ \hline x+2 \end{array} \\
-\begin{array}{r} 2x^2+4x+3 \\ \underline{2x^2\qquad\;-8} \end{array} & \quad\text{частное} \\
4x+11 & \text{— остаток}
\end{array}$$

$$\frac{x^3+2x^2+3}{x^2-4}=x+2+\frac{4x+11}{x^2-4}.$$

Вилы разложений на простейшие дроби:

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2};$$
$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}.$$

Областью определения функции $y = f(x)$ (областью допустимых значений) называется множество таких значений аргумента x, при которых существует значение функции y.

Правила построения графика функции элементарными методами.

1) График $y = f(x - a)$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

2) График $y = f(x) + b$ получается сдвигом графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

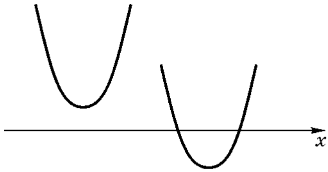
3) График функции $y = -f(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика $y = f(x)$.

4) График функции $y = f(-x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Oy графика $y = f(x)$.

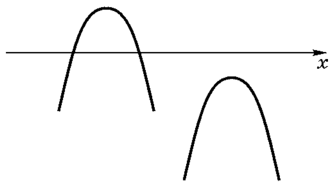
Графики элементарных функций.

1) Линейная функция: $y = kx + b$.

2) Парабола: $y = ax^2 + bx + c$.

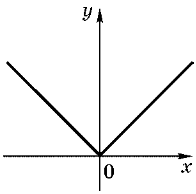


$a > 0$

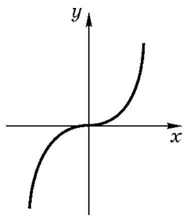


$a < 0$

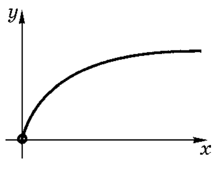
3) Модуль: $y = |x|$.



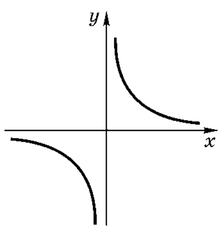
4) Кубическая парабола: $y = x^3$.



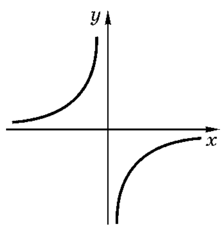
5) Квадратный корень: $y = \sqrt{x}$.



6) Гипербола: $y = \dfrac{k}{x}$.

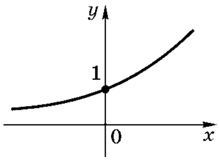


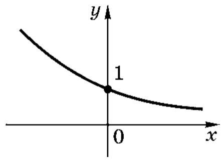
$k > 0$



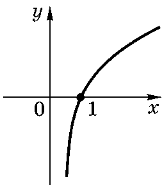
$k < 0$

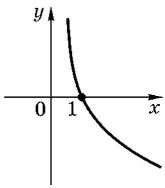
7) Показательная функция: $y = a^x$.



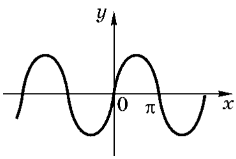


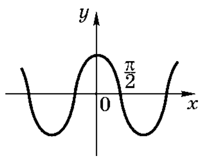
8) Логарифмическая функция: $y = \log_a x$.

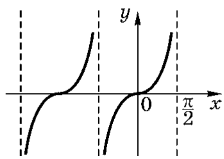




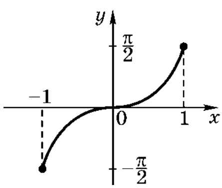
9) Синус: $y = \sin x$. Косинус: $y = \cos x$. Тангенс: $y = \operatorname{tg} x$.

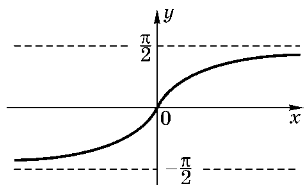






10) Арксинус: $y = \arcsin x$. Арктангенс: $y = \operatorname{arctg} x$.





Факториал: $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,\ n \in N$.

$0! = 1$ по определению; $1! = 1$, $2! = 2$, $(n+1)! = (n+1)n!$.

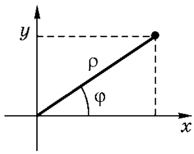
Биномиальные коэффициенты:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

II.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Декартовы координаты (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\cos\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \ (\text{или } -\pi \le \varphi \le \pi). \end{cases}$$



$$\rho^2 = x^2 + y^2;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ для точек I и IV четвертей;}$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ для точек II и III четвертей.}$$

Уравнение прямой, не параллельной оси Oy: $y = kx + b$ (k — угловой коэффициент).

Уравнение прямой, параллельной оси Oy: $x = a$.

Общий вид уравнения прямой: $Ax + By + C = 0$.

Угловой коэффициент определяется по формуле $k = -\dfrac{A}{B}$.

Две прямые на плоскости $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$, $b_1 \ne b_2$, и перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

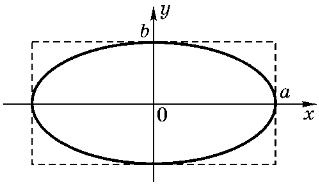
Координаты точки пересечения двух непараллельных прямых находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Углом между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ называется острый угол между ними. Этот угол φ ищется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Эллипс задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



Если $a = b$, то это уравнение задает окружность.

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

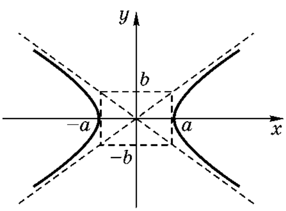
Эллипс с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается уравнением:

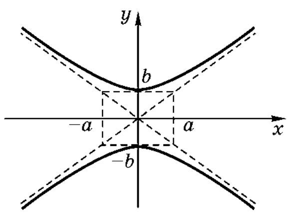
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $b^2 = a^2 - c^2$, эксцентриситет $e = \frac{c}{a} < 1$, директрисы задаются уравнениями $x = \pm\frac{a}{e}$.

Гипербола задается уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$





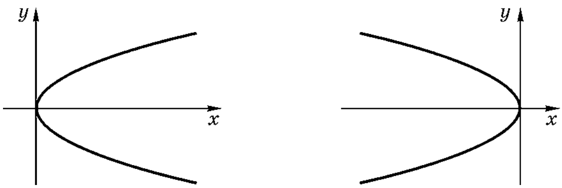
Гипербола с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается уравнениями:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1.$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $b^2 = c^2 - a^2$, $y=\pm\frac{b}{a}x$ — асимптомы гиперболы, эксцентриситет $e=\frac{c}{a}>1$, директрисы задаются уравнениями $x=\pm\frac{a}{e}$.

Парабола задается уравнением $y^2 = 2px$.

Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, эксцентриситет $e = 1$, директриса задается уравнением $x=\frac{p}{2}$.



Координаты точек пересечения кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

и прямой $Ax + By + C = 0$ ищутся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0, \\ Ax+By+C=0. \end{cases}$$

Координаты точек пересечения двух кривых ищутся как решения системы двух уравнений.

Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Δ_y и Δ_z получаются аналогично заменой соответствующего столбца определителя Δ столбцом свободных членов.

Правило Крамера: если $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Если M — точка пространства, O — начало декартовых координат, M_x, M_y, M_z — проекции точки на координатные оси, т. е. координаты точки M, то вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\overrightarrow{OM} = (M_x, M_y, M_z)$.

Расстояние между точками (M_x, M_y, M_z) и (N_x, N_y, N_z) определяется по формуле:

$$|MN| = \sqrt{(M_x - N_x)^2 + (M_y - N_y)^2 + (M_z + N_z)^2}.$$

Координаты середины отрезка MN ищут по формулам:

$$x = \frac{M_x + N_x}{2}, \ y = \frac{M_y + N_y}{2}, \ x = \frac{M_z + N_z}{2}.$$

Вектор $\vec{a}$ с началом в точке M и концом в точке N имеет координаты:

$$\vec{a} = (N_x - M_x, \ N_y - M_y, N_z - M_z).$$

Линейные операции с векторами $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$:

1) $k\vec{a}=(ka_x,ka_y,ka_z)$, где k — любое число;

2) $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$;

3) $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha a_x+\beta b_x,\alpha a_y+\beta b_y,\alpha a_z+\beta b_z)$, где α и β — любые числа.

Длина (модуль) вектора $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Единичный вектор, сонаправленный с данным, имеет координаты

$$\vec{e}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|}\right).$$

Если $\vec{a}=\overrightarrow{MN}=(a_x,a_y,a_z)$ и начало M вектора имеет координаты (M_x, M_y, M_z), то координаты конца N ищутся по формулам:

$$N_x=M_x+a_x,\quad N_y=M_y+a_y,\quad N_z=M_z+a_z.$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}\|\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Условие ортогональности двух векторов $\vec{a}\perp\vec{b}$:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между векторами:

$$\vec{a}\vec{b}=|a||b|\cos\varphi;$$

$$\vec{a}\vec{b}=(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\ \text{(в координатной форме)}.$$

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|};$$

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}$;

2) $(k\vec{a})\vec{b} = k\vec{a}\vec{b},\ k \in \mathbb{R}$;

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

4) $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} \geq 0$, причем $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, определяемый тремя условиями:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ составляют «правую тройку» векторов.

Координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, т. е. векторного произведения вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на вектор $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, вычисляются по формулам:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

или

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Свойства векторного произведения

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}),\ k \in \mathbb{R}$;

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

Смешанное произведение в координатах вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$V_m = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Каноническое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, \mathrm{z}_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется формулой:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Прямая как пересечение двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется совместным заданием этих уравнений, т. е. системой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы получить координаты точки, лежащей на этой прямой, достаточно произвольным образом задать одну из координат, тогда две другие определяются как решения данной системы.

Канонические уравнения прямой, т. е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}=(l,m,n)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Чтобы получить координаты точки на данной прямой, достаточно параметру t придать какое-либо значение.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Чтобы определить точку пересечения (если она существует) прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, достаточно решить систему трех указанных уравнений (например, по правилу Крамера).

Чтобы определить точку пересечения (если она существует) прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, достаточно параметрические уравнения прямой подставить в уравнение плоскости, найти значение параметра t и подставить это значение в параметрические уравнения для определения координат точки пересечения.

Для определения точки пересечения прямой и поверхности второго порядка достаточно совместно решить систему уравнений, задающих эту прямую и эту поверхность.

Некоторые поверхности второго порядка:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \text{ — эллипсоид;}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \text{ — сфера радиуса } R$$

с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \text{ — конус;}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 2z \text{ — эллиптический параболоид;}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр.}$$

III.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

A — матрица размера $(m \times n)$, имеющая m строк и n столбцов. Элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, обозначается a_{ij}.

E — единичная матрица размера $(n \times n)$.

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Линейные операции с матрицами размера $(m \times n)$:

1) $kA = B,\quad b_{ij} = ka_{ij},\quad i = 1, \dots, m,\quad j = 1, \dots, n$, где k — любое число;

2) $C = A + B,\ \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \ i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, n.$

Транспортирование матрицы:

$$A^T = B,\ \ b_{ij} = a_{ji},\ \ i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, n.$$

Произведение матрицы $A(m \times n)$ на матрицу $B(n \times k)$ — это матрица $C(m \times k)$, элементы которой определяются формулой:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},\ \ i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, k.$$

Свойства произведения матриц:

1) $BA \neq AB$;

2) $(kA) = k(AB)$;

3) $A(BC) = (AB)C$;

4) $A(B + C) = AB + AC$;

5) $(AB)^T = B^T A^T$;

6) $A^2 = A \cdot A,\ \ A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$

Присоединенной (союзной) матрицей к квадратной матрице A называется квадратная матрица $\tilde{A}$, каждый элемент которой равен алгебраическому дополнению элемента матрицы A, т. е.

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} j,\ \ i, j = 1, \dots, n,$$

где M — определитель, оставшийся после вычеркивания из определителя матрицы A i-й строки и j-го столбца.

Обратная матрица A^{-1} ищется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T.$$

Проверка правильности вычислений: должны выполняться условия

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1.$$

Элементарными преобразованиями строк матрицы являются:

1) умножение матрицы на ненулевое число;

2) перемена местами двух строк матрицы;

3) прибавление к одной строке матрицы другой, умноженной на любое число.

С помощью элементарных преобразований строк матрица может быть приведена к ступенчатому виду.

Ранг матрицы равен наибольшему, отличному от нуля, минору матрицы.

Если матрица приведена к ступенчатому виду, то ранг матрицы совпадает с числом ненулевых строк.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений:

1) привести матрицу к ступенчатому виду и найти ее ранг r;

2) выделить базисный минор, т. е. любой минор порядка r, отличный от нуля, и выбрать главные неизвестные, т. е. неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор;

3) остальные (свободные) неизвестные перенести в правую часть каждого из уравнений;

4) выразить главные неизвестные через свободные и записать общее решение.

Аксиомы линейного пространства L:

1) $a + b = b + a, \quad a, b \in L;$

2) $(a + b) + c = a + (b + c), \quad a, b, c \in L;$

3) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \alpha, \beta \in R, \quad a \in L;$

4) $1 \cdot a = a, \quad a \in L;$

5) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b, \quad \alpha, \beta \in R, \quad a, b \in L;$

6) $\alpha(a + \beta) = \alpha a + \alpha b, \quad \alpha \in R, \quad a, b \in L;$

7) $\exists\ \theta \in L$, т. ч. $\quad a \in L \quad a + \theta = a;$

8) $\quad a \in L\ \exists(-a) \in L$, т. ч. $a + (-a) = \theta.$

Система элементов линейного пространства L $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно независимой, если равна нулевому элементу только их линейная комбинация с нулевыми коэффициентами, т. е. из соотношения $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n = \theta$ обязательно следует, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Система элементов линейного пространства L $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно независимой, если существует линейная комбинация векторов с ненулевыми коэффициентами, равная нулевому элементу, т. е. $\exists k_j \neq 0$ такой, что $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n = \theta$.

Базисом линейного n-мерного пространства называется любая линейно независимая упорядоченная система n векторов. Для установления линейной независимости векторов достаточно составить матрицу из координатных столбцов этих векторов и вычислить ее ранг. Если ранг равен числу векторов, то векторы линейно независимы, если меньше — зависимы.

Для установления линейной независимости функций достаточно вычислить определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}.$$

Если он отличен от нуля, то система линейно независима.

Матрицей перехода $C_{aa'}$ от базиса $a_1, \ldots, a_n$ к базису $a_1', \ldots, a_n'$ называется матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов нового базиса a' в старом базисе a.

Формула вычисления координат $x_1', \ldots, x_n'$ вектора x в новом базисе $a_1', \ldots, a_n'$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = C_{aa'}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $C_{aa'}^{-1}$ — обратная матрица к матрице перехода $C_{aa'} \cdot C_{aa'}^{-1} = = C_{aa'}$.

Базис $e_1, \ldots, e_n$ называется ортонормированным, если

$$(e_i, e_j) = e_i e_j = \begin{cases} 1, \text{ при } i = j, \\ 0, \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

(ee — скалярное произведение векторов).

Скалярное произведение векторов x и y, заданных в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ своими координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, вычисляется по формуле:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n.$$

Преобразование $y = \varphi(x)$ (или оператор $y = \varphi(x)$) пространства L называется линейным, если выполнены два условия:

1) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \quad \alpha \in R, \quad x \in L;$

2) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, \ y \in L.$

Если преобразование (оператор) является линейным, то его матрица A в заданном ортонормированном базисе составляется из столбцов координат образов базисных векторов, т. е. если $j = 1, \ldots, n$ $\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{nj}e_n$, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование (обратный оператор) имеет границу, обратную к матрице преобразования (оператора).

Собственным вектором линейного преобразования (оператора) φ, отвечающим собственному значению (собственному числу) λ, называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию $\varphi(x) = \lambda x$.

Метод отыскания собственных векторов линейного преобразования (оператора) A:

1) составить матрицу преобразования (оператора) A;

2) составить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ и найти его корни, которые и являются собственными числами.

Характеристическое уравнение для оператора в трехмерном пространстве имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = 0;$$

3) для каждого найденного собственного числа λ_0 найти общий вид собственных векторов, являющихся решениями матричного уравнения $(A-\lambda_k E)x = \theta$, т. е. в трехмерном пространстве — общим решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_0)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda_0)x_3 = 0. \end{cases}$$

IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций (при $\alpha \to 0$):

$\sin\alpha \sim \alpha$; $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha$;

$\arcsin\alpha \sim \alpha$; $\quad$ $\mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha$;

$1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$; $\quad$ $e^{\alpha}-1 \sim \alpha$;

$a^{\alpha}-1 \sim \alpha\ln a$; $\quad$ $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$;

$\log_a(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln a}$; $\quad$ $(1+\alpha)^n - 1 \sim n\alpha$;

$\sqrt[n]{1+\alpha}-1 \sim \dfrac{\alpha}{n}$; $\quad$ $\sqrt{1+\alpha}-1 \sim \dfrac{\alpha}{2}$.

Правила дифференцирования ($C \in \mathbb{R}$):

$(C)' = 0;$ $\quad (C \cdot y(x))' = C \cdot y'(x);$

$(u \pm v)' = u' \pm v';$ $\quad (uv)' = u'v + uv';$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2};$ $\quad [y(u(x))]' = y'_u u'_x;$

$dC = 0;$ $\quad d(Cy) = Cdy;$

$d(u \pm v) = du \pm dv;$ $\quad d(uv) = vdu + udv;$

$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2};$ $\quad d[y(u(x))] = y'_u u'_x dx = y'_u du(x).$

Таблица производных:

$(x^n)' = nx^{n-1};$ $\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$ $\quad (a^x)' = a^x \ln a;$

$(e^x)' = e^x;$ $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$ $\quad (\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$ $\quad (\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$ $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$ $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$ $\quad (\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x;$

$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x;$ $\quad (\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$

$$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$$

Уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ — касательная;}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ — нормаль.}$$

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

Если $f(x)$ и $g(x)$ — две бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$ и существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

Асимптоты графика функции:

1) если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x\to x_0-0)}} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции;

2) если для функции $y = f(x)$ существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ является наклонной (горизонтальной при $k = 0$) асимптотой графика функции.

Исследование функции с помощью первой производной:

1) если на (a, b) $y > 0$, то $y = f(x)$ возрастает на этом интервале ($y' < 0$ — соответственно убывает);

2) пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0; если в точке x_0 y' равна нулю, бесконечности или не существует, то в этой точке $y = f(x)$ может иметь экстремум (максимум или минимум) (необходимое условие экстремума);

3) пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0; если слева от точки x_0, в которой выполнено необходимое условие экстремума, $y' > 0$, а справа от нее $y' < 0$, то функция $y = f(x)$

имеет в этой точке максимум (наоборот: слева $y' < 0$, справа $y' > 0$ — минимум).

Исследование функции с помощью второй производной:

1) если на (a, b) $y'' < 0$, то график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх на этом интервале ($y'' > 0$ — соответственно выпуклый вниз);

2) пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0; если слева и справа от точки x_0 график $y = f(x)$ имеет разные направления выпуклости (y'' имеет разные знаки), то точка $(x_0,\ f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Общая схема исследования функции и построения графика:

1) по функции определяем: область определения, четность, периодичность, вертикальные и наклонные асимптоты, точки пересечения с осями координат;

2) по первой производной определяем: интервалы возрастания, убывания экстремумы; вычисляем значения функции в точках экстремумов;

3) по второй производной определяем: интервалы выпуклости вверх, вниз, точки перегиба; вычисляем значения функции в точках перегиба.

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x);$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{(f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1$$

— остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа;

$$R_{n+1}(x)=\bar{\bar{o}}[(x-x_0)^n] \text{ при } x\to x_0 \text{ — в форме Пеано.}$$

Стандартные разложения при $x_0 = 0$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x);$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_{n+1}.$$

Функции нескольких переменных:

1) Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частной производной по x называется

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\Delta x} = z'_x = z_x,$$

т. е. при дифференцировании по x переменную y считаем постоянной.

2) Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производной по направлению $\vec{n}^\circ$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\vec{n}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор в указанном направлении.

3) Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вектор $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ называется градиентом функции u и обозначается $\mathrm{grad}\, u$.

Исследование на экстремум функции двух переменных $z = f(x, y)$:

1) Находим стационарные точки функции, решая систему уравнений $\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases}$ (необходимое условие экстремума).

2) В точках, где выполнено необходимое условие, вычисляем $A = z_{xx}$, $B = z_{xy}$, $C = z_{yy}$.

Если $AC - B^2 > 0$, в точке есть экстремум, причем максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$.

Если $AC - B^2 < 0$, в точке нет экстремума.

Если $AC - B^2 = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Функции, заданные неявно: при определенных условиях уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявно функцию $y = y(x)$. Ее производная может быть вычислена по формуле:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Аналогично уравнение $F(x, y, z) = 0$ может задавать неявно функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Ее частные производные вычисляются по формулам:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Таблица неопределенных интегралов ($C \in \mathbb{R}$):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1); \qquad \int \frac{dx}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \qquad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \qquad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad \int \operatorname{th} x dx = \ln|\operatorname{ch} x| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \qquad \int \operatorname{cth} x dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Замена переменной и интегрирование по частям:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \alpha = \varphi^{-1}(a) \\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b f(x)dx\right].$$

Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл сходится.

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка могут иметь вид:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y), \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — независимая искомая функция. Если к уравнению добавлено начальное условие $y(x_0) = y$, то говорят, что задана задача Коши.

1) $y' = f_1(x)f_2(y)$ — уравнение с разделяющимися переменными.

Метод решения:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ — однородное уравнение.

Метод решения:

$$\frac{y}{x} = u, \;\; y = ux, \;\; y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = f(u)$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

3) $y' + p(x)y = q(x)$ — линейное уравнение.

Метод решения:

$$y = uv, \;\; y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + puv = q.$$

Выбираем v так, что $v' + pv = 0$ (уравнение с разделяющимися переменными), тогда останется $u'v = q$, отсюда найдем u.

Понижение порядка дифференциального уравнения:

1) $y^{(n)} = f(x)$.

Метод решения: последовательное интегрирование.

2) $F(x, y', y'') = 0$.

Метод решения: $y' = z(x)$, $y'' = z' \Rightarrow F(x, z, z') = 0$ — уравнение первого порядка.

3) $F(y, y', y'') = 0$.

Метод решения: $y' = p(y)\; y'' = p'p \Rightarrow F(y, p, p') = 0$ — уравнение первого порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение, a — числа. Общее решение имеет вид:

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений.

Для построения фундаментальной системы запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

и найдем его корни $\lambda_1, \lambda_{2,} \lambda_n$.

1) Если λ — действительный однократный корень, то в фундаментальной системе ему соответствует $y = e^{\lambda x}$.

2) Если λ — действительный корень кратности k, то в фундаментальной системе ему соответствует набор

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x},\ y_3 = x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

3) Если $\lambda_{12} = \alpha + i\beta$ — пара комплексных однократных корней, то в фундаментальной системе им соответствуют две функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Общее решение имеет вид:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_{\text{чн}},$$

где y — общее решение соответствующего однородного уравнения, а y — частное решение неоднородного уравнения. Если $f(x)$ имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где P, Q — многочлены соответствующих степеней, то частное решение можно подобрать в виде:

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta_x + T_k(x)\sin\beta x),$$

где $k = \max(m, n)$, R, T — многочлены с неопределенными коэффициентами, s — кратность корня характеристического уравнения, совпадающего с $\alpha + i\beta$.

Неопределенные коэффициенты находят, подставляя $y_{\text{чн}}$ в неоднородное уравнение.

VI.
РЯДЫ

Числовые ряды — это суммы чисел с бесконечным числом слагаемых.

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — числовой ряд;}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ — частичная сумма ряда;}$$

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \text{ — остаток ряда.}$$

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ряд сходится, иначе — расходится.

Необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Исследование на сходимость рядов с положительными членами:

а) I теорема сравнения: пусть $a_n \geq b_n \geq 0$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

б) II теорема сравнения: пусть $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $c \neq 0$ и $c \neq \infty$. Тогда оба ряда или сходятся, или расходятся.

Для применения теорем сравнения необходимо знать, что геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ сходится при $q < 1$ и расходятся при $q \geq 1$, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Признак Даламбера (при $a_n > 0$): вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Если $d < 1$, ряд сходится, $d > 1$ — ряд расходится. При $d = 1$ признак ответа не дает.

Признак Коши (при $a_n \geq 0$): вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$. Если $d < 1$, ряд сходится, $d > 1$ — ряд расходится. При $d = 1$ признак ответа не дает.

Интегральный признак Коши: если $f(x)$ такова, что $f(x) \geq 0$ при $x \geq 1$ и $f(n) = a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Знакочередующиеся ряды.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то исследуем по признаку Лейбница.

Если выполнены два условия:

1) a_n монотонно убывает с ростом n;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится условно.

Оценка остатка ряда $|R_n| \le a_{n+1}$.

Степенные ряды.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R, R)$, где R — радиус сходимости степенного ряда, который можно вычислить по формулам Коши–Адамара:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\sqrt[n]{a_n}\right|}.$$

Сходимость в граничных точках интервала $x = -R$, $x = R$ проверяют отдельно.

VII. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Переход в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$:

1) к полярным координатам ρ, φ $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi;$$

2) к обобщенным полярным координатам ρ, φ $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$:

$$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\varphi, \quad dxdy = ab\rho d\rho d\varphi.$$

Переход в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$:

а) к цилиндрическим координатам ρ, φ, z $(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \quad dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz;$$

б) к сферическим координатам r, φ, θ ($0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

VIII. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Если $u = u(x, y, z)$, $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, то

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Остроградского

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{a}, \vec{n}^\circ) dS = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a} dV,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V; $\vec{n}^\circ$ — орт внешней нормали к поверхности S.

Формула Стокса:

$$\oint_\Gamma (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}, \vec{n}^\circ) dS,$$

где Г — замкнутая линия, являющаяся краем поверхности S; $\vec{n}^\circ$ — орт нормали к поверхности S (согласуется с направлением интегрирования по Г).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. — М. : Наука, 1993.

Берман, *Г. Н*. Сборник задач по курсу математического анализа. — М. : Наука, 1977.

Кузнецов, *Л. А*. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — СПб.: Лань, 2008.

Зимина, *О. В*., *Кириллов*, *А. И*., *Сальникова*, *Т. А*. Решебник. Высшая математика. —М. : Физматлит, 2000.

Проскуряков, *И. В*. Сборник задач по линейной алгебре. — СПб.: Лань, 2008.

Клетеник, *Д. В*. Сборник задач по аналитической геометрии. — М. : Наука, 1972.

Краснов, *М. Л*., *Киселев*, *А. И*., *Макаренко*, *Г. И*. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М. : Высшая школа, 1978.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

I
Элементарная математика

1. Действительные числа. Точные и приближенные вычисления. Проценты 5
2. Алгебраические преобразования. Степени, корни, формулы сокращенного умножения 6
3. Алгебраические уравнения. Линейные уравнения. Системы линейных уравнений (метод исключения). Квадратное уравнение 7
4. Комплексные числа и действия с ними 8
5. Многочлены, разложение на множители. Деление многочленов. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби 8
6. Функция, аргумент и значение функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики 9
7. Элементы комбинаторики 12

II
Аналитическая геометрия

1. Декартовы прямоугольные координаты. Полярные координаты на плоскости 14
2. Прямая на плоскости 16
3. Кривые второго порядка 19
4. Определители. Правило Крамера 22
5. Векторная алгебра 25
6. Плоскость в пространстве 31
7. Прямая в пространстве 33
8. Прямая и плоскость в пространстве 35
9. Поверхности второго порядка 38

III
Линейная алгебра

1. Матрицы, действия с ними. Обратная матрица 40
2. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц . . 44
3. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса 45

4. Линейное пространство. Размерность и базис. Преобразование координат вектора 47
5. Скалярное произведение. Ортонормированный базис 49
6. Линейный оператор. Матрица линейного оператора 50
7. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора 51
8. Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду 52

IV
Математический анализ

1. Предел числовой последовательности 54
2. Предел функции. Простейшие методы вычисления пределов. Эквивалентные бесконечно малые для вычисления пределов 56
3. Производная функции и дифференциал. Техника дифференцирования 60
4. Касательная и нормаль к графику функции 65
5. Исследование функций с помощью первой производной . 66
6. Исследование функций с помощью второй производной . 67
7. Правило Лопиталя для вычисления пределов 67
8. Асимптоты графиков функций 68
9. Исследование функций и построение графиков 69
10. Непрерывность функции в точке и на отрезке 71
11. Формула Тейлора, ее применение для исследования функций 72
12. Функции нескольких переменных 73
13. Частные производные, градиент 74
14. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 76
15. Исследование на экстремум функций нескольких переменных 77
16. Системы линейных неравенств нескольких переменных. Графическое решение 77
17. Простейшие задачи линейного программирования 79
18. Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования 80
19. Интегралы от рациональных функций 83
20. Интегралы от тригонометрических функций 84
21. Интегралы от иррациональных функций 85
22. Определенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница . . 86
23. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле 86
24. Применение определенного интеграла для вычисления площадей и длин дуг кривых 87
25. Несобственные интегралы 88

V
Дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения. Задача Коши 89
2. Дифференциальные уравнения первого порядка 91

3. Понижение порядка дифференциального уравнения 93
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 94
5. Метод подбора для линейных неоднородных дифференциальных уравнений 96

VI
Ряды

1. Числовой ряд. Суммирование рядов 98
2. Исследование на сходимость рядов с положительными членами 99
3. Знакопеременные ряды 102
4. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость 103
5. Степенные ряды 104
6. Ряды Фурье 106

VII
Кратные интегралы

1. Повторное интегрирование 107
2. Двойной интеграл в декартовых координатах 107
3. Тройной интеграл в декартовых координатах 109
4. Двойной интеграл в полярных координатах 111
5. Тройной интеграл в цилиндрических координатах 112
6. Тройной интеграл в сферических координатах 113

VIII
Теория поля

1. Дифференциальные операции в декартовых координатах 115
2. Интегральные операции векторного анализа 116

IX
Типовые расчеты

1. Аналитическая геометрия 118
2. Линейная алгебра 127
3. Пределы 141
4. Дифференцирование 152
5. Графики 160
6. Интегрирование 163
7. Ряды 173
8. Функции нескольких переменных 180
9. Кратные интегралы 185
10. Дифференциальные уравнения 194

Справочные материалы 202
Библиографический список 231

Александр Иванович БАРАНЕНКОВ
Елена Петровна БОГОМОЛОВА
Игорь Мелетиевич ПЕТРУШКО

СБОРНИК ЗАДАЧ
И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Художественный редактор . .
Технический редактор . .
Корректор . .
Верстальщик . .
Подготовка иллюстраций . .
Выпускающие . . , . .

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

« »
lan@lpbl.spb.ru
www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 05.04.09.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 12,60. Тираж 3000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru