

Н. М. ГЮНТЕР, Р. О. КУЗЬМИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание тринадцатое



• Санкт-Петербург • 2003 • Москва • Краснодар •

ББК 22.1я73

Г 99

Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О.

Г 99 Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие. 13-е изд. — СПб.: Издательство «Лань», 2003. — 816 с., ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0490-5

Книга представляет собой переиздание самого полного и авторитетного задачника по курсу высшей математики. Задачник выдержал 13 переизданий в течение полувека, был основным задачником для университетов и вузов, по которому учились довоенные и послевоенные поколения ученых СССР. Задачник содержит 6 тысяч задач по всем основным разделам высшей математики. Наряду с учебными и совершенно стандартными здесь содержится немало весьма тонких и непростых задач. Опытный преподаватель сумеет найти в книге задания как для студентов, которым требуется получить лишь минимальные технические навыки, так и для студентов математических специальностей, изучающих предмет глубоко и всесторонне.

ББК 22.1я73

Оформление

С. Л. ШАПИРО, А. Ю. ЛАПШИН

**Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона будут
преследоваться в судебном порядке.**

© Издательство «Лань», 2003
© Н. М. Гюнтер,
Р. О. Кузьмин, 2003
© Издательство «Лань»,
художественное оформление,
2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Знаменитый задачник Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина был и остается наиболее полным и авторитетным университетским задачником. Он содержит 6000 задач по всем основным разделам высшей математики, от совершенно стандартных технических упражнений до весьма тонких и непростых теорем. На этой книге «выросли» многие поколения студентов нашей страны. Задачник многократно переиздавался.

В новом издании задачника Гюнтера и Кузьмина материалы всех трех томов предыдущих изданий объединены в одну книгу. При этом устранены дублирования, встречавшиеся в подборках задач второго и третьего томов. Сохраняя в книге авторский стиль, мы все же сочли необходимым переформулировать некоторые из задач более современным языком. Кроме того небольшому изменению внешнего вида подверглись вставки теоретического материала.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ I и II ТОМОВ

Решение значительного числа задач почти неизбежно при изучении математики. Поэтому сборники задач являются одним из необходимых видов математической литературы. Могут существовать и быть полезными разные типы сборников задач. В одном из них текст задач дается без всяких пояснений. Таково большинство задач по арифметике, например, известный когда-то задачник Малинина и Буренина. На высших стадиях науки более удобным является совсем другое построение книги, — при котором текст задач снабжается рядом пояснений, а для большинства задач указывается в ответе путь решения более или менее полно. Сюда относится превосходная книга Поля и Сеге.

В основе предлагаемого задачника лежит сборник задач по высшей математике, составленный в 1912 г. сотрудниками кафедры математики Института инженеров путей сообщения, во главе которой стоял Н. М. Гюнтер. В нескольких дальнейших изданиях того же задачника принимали участие работники физико-математического факультета Ленинградского университета. Последние издания выходили под редакцией Н. М. Гюнтера и моей. Ввиду смерти Н. М. Гюнтера, последовавшей в 1941 г., вся работа над новым изданием книги была проведена мною.

Мне казалось, что в предыдущих изданиях данного задачника имела некоторая несогласованность формы и содержания. При значительном богатстве содержания сборник был сравнительно беден пояснениями и указаниями на путь решения отдельных задач или типов задач. Однако, полное проведение всех желательных изменений в этом направлении — весьма трудное дело. Чтобы провести его с полной продуманностью, надо решить заново все задачи — лишь тогда можно оценить целесообразность данного расположения задач в пределах одного параграфа и лишь тогда можно составить ясное представление о наиболее подходящих указаниях и дополнениях.

Для пояснений и указаний нужно место. В I томе Поля и Сеге около 750 задач, а в меньшем по объему II томе данного

задачника было около 2500 задач. Если не увеличивать объема книги сколько-нибудь значительно, надо исключить часть задач. Сделать это надо, не уменьшая богатства содержания, а это не так просто.

Переработка, проведенная в этом издании, представляет шаг в намеченном направлении. В ряде мест даны пояснения общего характера, иногда даются решения отдельных примеров. Значительно изменено расположение материала. У многих задач текст изменен так, чтобы облегчить решающему нахождение отправной точки. Формулировка задач и многих ответов сделана более компактной. Вставлено довольно много новых задач и еще больше задач исключено — общее число задач уменьшилось приблизительно на 200.

Мне хотелось сделать книгу более доступной, не уменьшая богатства содержания. Опыт покажет, удачны ли проведенные мною изменения, и я буду очень благодарен за всякие указания и пожелания от пользующихся книгой.

Бийск, 1944

Р. О. Кузьмин

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ III ТОМА

По сравнению с первыми двумя томами, задачи, помещенные в этом томе, являются в среднем по существу более трудными. Надо иметь в виду, что отделы науки, которым посвящены некоторые главы этого тома, отличаются большим богатством содержания. Сюда, например, относится теория функций комплексного переменного, необъятная по разнообразию вопросов, связанных с ней. В силу этого, пересмотр третьего тома представлял по природе вопроса значительные трудности. В этом издании подверглись сравнительно большей переработке лишь первые три отдела, посвященных рядам, приближенным вычислениям и теории функций комплексного переменного. Введен ряд сведений теоретического характера с целью сделать читателя менее зависящим от наличия у него соответствующей литературы. Во многих местах в расстановке задач и их редакции я стремился сделать содержание более доступным. Введено довольно значительное число новых задач в целях более полного освещения рассматриваемого круга вопросов. Все же принципы, которые изложены в предисловиях к первым двум томам, в этом томе, даже и после его переработки, как в ряде глав первых двух томов. Отчасти это объясняется большими трудностями дела. Все же я надеюсь, что книга несколько выиграла по доступности и легкости ее применения, а богатство содержания ее выиграло заметным образом.

Я буду благодарен за указание достоинств и недостатков книги, а также желательных изменений в ней.

Р. О. Кузьмин

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1.1 ВЕКТОРЫ, ПРОЕКЦИИ И КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Даны точки $A(2, 5)$ и $B(-3, 2)$. Найти проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат.

2. Даны точки $A(1, 2)$ и $B(5, -1)$. Найти углы вектора $\overrightarrow{AB}$ с осями Ox и Oy , а также длину этого вектора.

3. Даны точки $A(2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 5)$, $D(-5, 11)$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

4. Даны точки $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 7)$, $D(-1, -5)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{CD}$.

5. Даны точки $A(3, 5)$, $B(6, -2)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, направленную из начала координат по биссектрисе первого координатного угла.

6. Из начала координат проведены векторы в точки $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(6, -10)$. Найти их геометрическую сумму по величине и направлению.

7. Противоположные вершины прямоугольника суть $A(3, 7)$, $B(11, -1)$. Найти центр прямоугольника.

8. Из точки $A(2, 3)$ проведен отрезок до точки $B(7, -2)$ и продолжен еще на столько же. Найти координаты конца продолжения.

9. Отрезок $\overrightarrow{AB}$ разделен на три равные части точками $M_1(1, 2)$ и $M_2(2, 4)$. Найти точки A и B .

10. Точки $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(3, -1)$ — три последовательные вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

11. Середины сторон треугольника — в точках $M_1(-2, 1)$, $M_2(2, 3)$, $M_3(4, -1)$. Найти координаты вершин.

12. Две последовательные вершины квадрата — в точках $A(2, 3)$ и $B(6, 6)$. Где остальные вершины?

13. Две последовательные вершины правильного шестиугольника — в точках $M_1(0, 0)$ и $M_2(4, 0)$. Где следующая вершина?

14. В точках $(3, 5)$ и $(9, -7)$ помещены массы 2 и 1. Где центр тяжести этих масс?

15. В точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ помещены массы m_1 , m_2 и m_3 соответственно. Доказать, что координаты центра тяжести этих масс выражаются формулами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

16. Массы равной величины помещены в вершинах многоугольника. Доказать, что координаты их центра тяжести равны арифметическим средним координат вершин.

17. Центр правильного многоугольника — в начале координат. Доказать, что сумма координат вершин равна нулю.

18. К сторонам многоугольника восставлены перпендикуляры, пропорциональные сторонам и направленные в наружную сторону. Доказать, что их геометрическая сумма равна нулю.

19. Даны координаты середин сторон многоугольника с нечетным числом сторон $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})$. Найти координаты вершин.

20. На оси Ox найти точку, расстояние которой до точки $(5, 12)$ равно 13.

21. $M_1(2, 1)$, $M_2(-3, 2)$, $M_3(-1, 1)$ — вершины треугольника. Найти центр и радиус описанного круга.

22. Вершины треугольника — в точках $O(0, 0)$, $M_1(3, 5)$, $M_2(-2, 3)$. Найти его площадь.

23. Вершины треугольника — в точках $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -5)$. Найти его площадь.

24. Две вершины треугольника — в точках $(5, 1)$, $(-2, 2)$, третья вершина — на оси Ox . Найти ее, зная, что площадь равна 10.

25. Найти площадь четырехугольника по координатам его вершин: $M_1(5, 6)$, $M_2(5, -6)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-2, 1)$.

26. Найти площадь четырехугольника по координатам его вершин: $M_1(5, 6)$, $M_2(5, -6)$, $M_3(-2, 1)$, $M_4(-2, -1)$.

27. Найти площадь пятиугольника по его вершинам: $M_1(0, 0)$, $M_2(3, -2)$, $M_3(5, -1)$, $M_4(8, 4)$, $M_5(4, 5)$.

28. После переноса начала координат без поворота осей точка $(2, 4)$ получила координаты $(-3, 0)$. Найти прежние координаты нового начала.

29. Новые оси делят на равные части углы между прежними. Ось Ox_1 составляет положительный острый угол с Oy . Составить формулы преобразования координат.

30. Новое начало — в точке $(2, 3)$. Точка $(6, 0)$ — на положительном направлении новой оси ординат. Каковы новые координаты точки $(7, 8)$?

31. Вершины квадрата — в точках $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. Составить формулы преобразования координат, если за новые оси приняты диагонали квадрата, а точка $(2, 0)$ находится на положительном направлении оси O_1x_1 .

32. Новое начало — в точке $(1, -2)$. Новая ось ординат составляет с прежней осью абсцисс острый угол, тангенс которого равен $3/4$. Найти точку, у которой прежние координаты равны новым.

33. При каком повороте осей величина $x^2 - y^2$ переходит в $2x_1y_1$.

34. Доказать, что при общем преобразовании координат (с переносом и поворотом осей) прежние оси могут быть совмещены с новыми путем поворота всей плоскости вокруг некоторой точки.

35. Даны полярные координаты точки: $r = 10$, $\varphi = 30^\circ$. Найти ее прямоугольные координаты, если полюс — в точке $(2, 3)$, а полярная ось параллельна оси Ox .

36. Найти расстояние между точками, зная их полярные координаты: $r_1 = 3$, $\varphi_1 = 10^\circ$, $r_2 = 5$, $\varphi_2 = 130^\circ$.

37. Полюс — в точке $(3, 5)$. Полярная ось параллельна положительному направлению оси Oy . Найти полярные координаты точек $M_1(9, -1)$ и $M_2(5, 5 + 2\sqrt{3})$.

38. Рассматривая проекции некоторой ломаной линии, доказать формулы:

$$\begin{aligned}\sin \varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin(2n-1)\varphi &= \frac{1 - \cos 2n\varphi}{2 \sin \varphi}; \\ \cos \varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(2n-1)\varphi &= \frac{\sin 2n\varphi}{2 \sin \varphi}.\end{aligned}$$

§ 1.2

ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ

39. Найти уравнение прямой, параллельной оси Ox и удаленной от нее на h .

40. Найти уравнение прямой, параллельной оси Oy и удаленной от нее на h .

41. Вершины квадрата — в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Найти уравнения его диагоналей.

42. На прямой $y = 2x - 3$ найти точку, ордината которой равна 7.

43. Считая, что ось Ox расположена горизонтально, определить, какие из точек $M_1(-1, 2)$, $M_2(-3, -10)$, $M_3(2, 1)$, $M_4(5, 4)$ расположены выше, ниже и на прямой $y = 2x - 3$.

44. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 1)$ и составляющей с Ox угол 45° .

45. Провести прямую через точки $M_1(-1, 2)$ и $M_2(2, 1)$.

46. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(3, 7)$ и $(3, -2)$.

47. Найти уравнения сторон треугольника, вершины которого — в точках $M_1(1, -1)$, $M_2(3, 5)$, $M_3(-7, 11)$.

48. Через точку $(2, -1)$ провести прямую, параллельную прямой $2x + 3y = 0$.

49. Через точку $(2, -3)$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $y = 2x + 1$.

50. Через точку $(3, 5)$ провести прямые под углом 45° к прямой $3x - 2y + 7 = 0$.

51. Найти углы треугольника с вершинами в точках $M_1(0, 2)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

52. Через точку $(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь, ограниченная ею и осями координат, равнялась 3 кв. единицам.

53. Найти вершины треугольника по уравнениям его сторон: $x - y = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$.

54. Найти площадь треугольника по уравнениям его сторон: $y = 3x - 9$, $y = -2x + 1$, $y = -x + 3$.

55. Через точку $(1, 2)$ провести прямую, образующую угол 30° с прямой $x - 2y = 0$, и найти точку пересечения данной прямой и искомой.

56. Дана вершина квадрата $(2, -2)$ и его диагональ $x + 2y = 0$. Найти уравнения сторон квадрата.

57. Дана прямая $3x - 2y + 2 = 0$ и точка $M(-4, 8)$. Найти проекцию M' точки M на заданную прямую и определить отношение $|OM'| : |OM|$.

58. Через точку $(1, 2)$ провести прямую, расстояния от которой до точек $(2, 3)$ и $(4, -5)$ были бы одинаковы.

59. Уравнения двух сторон параллелограмма: $x + 2y + 1 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$. Центр его — в точке $(1, 2)$. Найти уравнения двух других сторон.

60. Через точку $(-1, 2)$ провести прямую, расстояние от которой до точки $(6, 1)$ равно 5.

61. Через точку $(2, -2)$ провести прямые, расстояния от которых до точки $(5, 2)$ равны 3.

62. Дана точка $M(-1, 2)$ и прямая $y = 3x$. Провести прямую, параллельную данной, расстояние от которой до точки M втрое больше, чем расстояние до данной.

63. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-4, 3)$ и удаленной от начала координат на расстояние, равное 5.

64. Дана прямая $4x + 3y + 1 = 0$. Найти прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние, равное 3.

65. Найти расстояние между прямыми $2x + 3y = 7$ и $4x + 6y = 11$.

66. Найти прямую, параллельную прямым $x + 2y = 1$ и $x + 2y = 3$, расположенную между ними и делящую расстояние между ними в отношении $1 : 3$.

67. Найти уравнение прямой, лежащей посередине между прямыми $3x + 2y = 5$ и $6x + 4y + 3 = 0$.

68. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 3y + 6 = 0$ и отсекающей от координатного угла треугольник с площадью 3.

69. Даны прямая $2x + y - 3 = 0$ и точка $M(1, 1)$ на ней. На той же прямой найти точки, удаленные от M на $\sqrt{5}$.

70. Найти уравнения сторон треугольника, у которого $2x + 3y + 1 = 0$ и $x + y = 0$ — высоты, а $M(1, 2)$ — одна из вершин.

71. $M_1(2, 1)$ и $M_2(4, 9)$ — вершины треугольника, $N(3, 4)$ — точка пересечения высот. Найти уравнения сторон.

72. Середины сторон треугольника — в точках $(1, 2)$, $(7, 4)$, $(3, -4)$. Найти уравнения сторон.

73. Даны две стороны параллелограмма $2y - x = 0$, $x - 3 = 0$ и вершина $(7, 5)$. Найти угол между диагоналями.

74. Даны две стороны параллелограмма $2x - y = 0$, $x - 3y = 0$ и центр его $(2, 3)$. Найти уравнения диагоналей.

75. Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $(-4, 3)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 3 = 0$, $3x - 5y + 6 = 0$.

76. Пересечение медиан — в точке $(-1, 0)$, а $x + y - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ — уравнения двух сторон. Найти уравнение третьей стороны.

77. Вершины треугольника — в точках $A(1, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(2, -2)$. Найти уравнения высот.

78. Через точку пересечения прямых $x - y - 1 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$ провести прямую, проходящую через точку $(-1, 1)$.

79. Провести прямую через начало координат и точку пересечения прямых $17x + 29y = 317$ и $3x + 10y = 634$.

80. Через точку пересечения прямых $x + 2y - 11 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$ провести прямую, расстояние от которой до начала координат равно 5.

81. Через точку $(-1, 1)$ провести прямую так, чтобы середина ее отрезка между прямыми $x + 2y - 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ лежала на прямой $x - y - 1 = 0$.

82. Через начало координат провести прямые так, чтобы отрезки их между прямыми $x - y + 1 = 0$ и $x - y - 2 = 0$ были равны 3.

83. Найти прямую, проходящую через точку $(2, 3)$, зная, что отрезок этой прямой между прямыми $3x + 4y - 7 = 0$ и $3x + 4y + 8 = 0$ равен $3\sqrt{2}$.

84. Найти биссектрисы углов между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$.

85. Найти биссектрису того угла между прямыми $4x + 7y - 3 = 0$ и $8x - y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

86. Точки $(1, 2)$, $(-1, -1)$, $(2, 1)$ — вершины треугольника. Найти уравнение биссектрисы внутреннего угла при точке $(-1, -1)$.

87. Найти радиус круга, вписанного в треугольник, если даны уравнения сторон: $3x - 4y = 25$, $5x + 12y = 65$, $8x + 15y + 85 = 0$.

88. Даны стороны треугольника $2x + y = 0$, $x - 2y = 0$ и $2x + 11y - 20 = 0$. Найти центр вписанного круга.

89. Дана точка $P(0, 1)$. Провести через нее прямую так, чтобы ее отрезок между прямыми $x - 3 + 10 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$ делился самой точкой P пополам.

90. Дана одна сторона угла $y = 2x$ и биссектриса $2y - x - 3 = 0$. Найти другую сторону угла.

91. Даны две вершины треугольника $A(1, 6)$ и $B(7, -2)$ и центр вписанной окружности $O(4, 4)$. Найти третью вершину C .

92. Уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $2x - y + 8 = 0$ и $x - 2y - 12 = 0$. Точка $(4, 0)$ на основании. Найти уравнение основания.

93. Луч света проходит через точку $(2, 3)$, отражается в прямой $x + y + 1 = 0$ и попадает в точку $(1, 1)$. Найти уравнения луча падающего и луча отраженного.

94. Прямая $2x + y - 1 = 0$ — биссектриса, а точки $(1, 2)$ и $(-1, -1)$ — вершины треугольника. Найти третью вершину.

95. Точка $(2, 5)$ — вершина треугольника, прямые $3x + 4y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ — биссектрисы внутренних углов. Найти уравнения сторон.

96. Точки $(1, 1)$ и $(0, 4)$ вершины треугольника, $2x - y - 1 = 0$ — внутренняя биссектриса. Найти уравнения сторон, зная, что площадь треугольника равна 5.

97. Уравнение основания равнобедренного треугольника: $x + y - 1 = 0$, уравнение боковой стороны: $x - 2y - 2 = 0$. Точка $(-2, 0)$ — на другой боковой стороне. Найти уравнение этой стороны.

98. Биссектрисы внутренних углов треугольника A и B пересекают его стороны в точках M и N . Доказать, что для любой точки отрезка MN сумма расстояний до сторон AC и BC равна расстоянию до стороны AB .

99. Через точку на биссектрисе угла проведены две прямые. Одна из них отсекает на сторонах угла, считая от вершины, отрезки a и b , другая — отрезки a_1 и b_1 . Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}.$$

100. Взять прямые $2x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$ за новые оси O_1x_1 и O_1y_1 , выбрав направления так, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Найти формулы перехода от одних координат к другим.

101. Прямые $x - y - 1 = 0$ и $x + y + 2 = 0$ приняты за новые оси координат так, что новые координаты прежнего начала отрицательны. Найти новые уравнения прежних осей.

102. Прямая пересекает стороны треугольника AB и CB в точках M и N , а продолжение стороны AC — в точке P . Доказать равенство

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

(теорема Менелая).

103. Точки M , N , P — на сторонах BC , CA и AB треугольника. Прямые AM , BN и CP пересекаются в одной точке. Доказать равенство

$$AN \cdot BP \cdot CM = NC \cdot PA \cdot MB.$$

104. Доказать, что уравнения биссектрис треугольника можно написать в виде $s_1 \pm s_2 = 0$, $s_1 \pm s_3 = 0$, $s_2 \pm s_3 = 0$, где через s_1 , s_2 и s_3 обозначены левые части уравнений сторон треугольника, взятых в нормальной форме.

105. Гомографическое или проективное преобразование плоскости состоит в том, что каждая точка (x, y) переходит в точку (x_1, y_1) , где $x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}$; $y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}$; $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 > 0$.

Доказать, что при любом выборе коэффициентов a_k , b_k , c_k ($k = 0, 1, 2$) проективное преобразование представляет коллинеацию, т. е. переводит прямые в прямые.

106. Ангармоническим отношением четырех точек A , B , C , D , лежащих на прямой, называется отношение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$. Доказать, что при проективном преобразовании величина ангармонического отношения не меняется.

107. Найти общий вид уравнений окружностей, касающихся оси Ox в начале координат.

108. Найти уравнение окружностей предыдущей задачи в полярных координатах, если полярная ось совпадает с положительной частью оси Ox .

109. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

110. Составить уравнение окружности радиуса $r = 2$, касающейся прямых $3x + 4y - 8 = 0$ и $12x - 5y + 17 = 0$.

111. Найти длину отрезка прямой $x + 5y = 9$, лежащего внутри окружности $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$.

112. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $M_1(0, 0)$, $M_2(10, 0)$, $M_3(6, 8)$.

113. На окружности $x^2 + y^2 = 1$ найти точку, одинаково удаленную от точек $(1, 3)$ и $(-2, 2)$.

114. Найти уравнение круга, вписанного в треугольник, стороны которого даны уравнениями:

$$3x + 4y = 25, \quad 5x - 12y = 65, \quad 8x - 15y + 85 = 0.$$

115. Через точку $(1, 2)$ провести касательную к окружности $x^2 + y^2 = 5$.

116. Через точку $(-1, 3)$ провести касательные к окружности $x^2 + y^2 = 5$.

117. Найти общую хорду окружностей $x^2 + y^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 = 2by$.

118. Найти общие касательные к окружностям $x^2 + y^2 = 6x$ и $x^2 + y^2 = 6y$.

119. Точка (x_1, y_1) — вне окружности $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Найти длину l касательной из точки к окружности.

120. Точка (x_1, y_1) — внутри окружности $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Доказать, что хорда окружности, проходящая через (x_1, y_1) , делится этой точкой на части, произведение которых равно $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$.

121. Окружность касается осей координат и проходит через точку $(4, 8)$. Найти ее уравнение.

122. Окружность касается оси Oy и проходит через начало координат и точку $(3, 6)$. Найти ее уравнение.

123. На оси Ox найти такую точку, касательные из которой к окружностям $x^2 + y^2 = 6y - 6$ и $x^2 + y^2 = 2x$ были бы одинаковой длины.

124. Найти общий вид окружностей, касающихся обеих биссектрис координатных углов.

125. Показать, что геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек находятся в данном отношении, не равном единице, есть окружность. (Окружность Аполлония.)

126. Показать, что геометрическое место точек, касательные из которых к двум данным окружностям имеют одинаковую длину, есть прямая. (Радикальная ось двух кругов.)

127. Доказать, что при любых a и b окружности $x^2 + y^2 = ax$ и $x^2 + y^2 = by$ пересекаются под прямым углом. Здесь под углом между кривыми понимается, как обычно, угол между их касательными в точке пересечения.

128. Показать, что каждая из окружностей $(x-a)^2 + y^2 = a^2 + h^2$ пересекается под прямым углом с каждой из окружностей $x^2 + (y \pm \sqrt{r^2 + h^2})^2 = r^2$.

129. Доказать, что каждая из окружностей $x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0$ пересекается с каждой из окружностей $x^2 + y^2 - 2cy + b^2 = 0$ под прямым углом.

§ 1.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА

130. Из начала координат проведены хорды окружности $x^2 + y^2 = 2ax$. Найти геометрическое место середин этих хорд.

131. Найти уравнение геометрического места точек, расстояния которых до прямых $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ имеют отношение $m : n$.

132. Отрезок длиной $a + b$ скользит концами по осям координат. Найти кривую, описанную точкой M , делящей его на части a и b . (Эллипсограф Леонардо да Винчи.)

133. Проведены две окружности радиусов b и a с центром в начале координат. Переменный радиус пересекает внутреннюю

из них в точке A , внешнюю — в B . Из A проводим прямую параллельно оси Ox , из B — параллельно оси Oy до взаимного пересечения этих прямых в точке M . Найти геометрическое место точки M .

134. Из начала координат проводится прямая, составляющая угол $\frac{\pi\theta}{2}$ с осью Oy . Эта прямая в точке M пересекается прямой $x = a\theta$. Найти уравнение геометрического места точки M . (Квадратриса Динострата.)

135. Из начала координат проводятся хорды окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ и продолжаютя до пересечения с прямой $x = 2a$. Эти продолжения откладываются на тех же хордах из начала координат. Найти геометрическое место концов передвинутых продолжений. (Циссоида Диоклеса.)

136. Из начала координат проведена произвольная прямая, пересекающая окружность $x^2 + y^2 = ay$ и прямую $y = a$ в точках A и B . Из точки A проводится прямая параллельно оси Ox , а из точки B — параллельно оси Oy . Найти геометрическое место точки пересечения этих прямых. (Верзьера Марии Аньези.)

137. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ есть величина постоянная, равная b^2 . (Овалы Кассини.)

138. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек равно квадрату половины расстояния между ними. (Лемниската Бернулли.)

139. Найти геометрическое место точек, между расстояниями которых до двух данных точек существует линейная зависимость $r_1 - ar_2 = b$. (Овалы Декарта.)

140. Через точку $(0, -a)$ проводятся прямые, пересекающие ось Ox . На каждой из них, по обе стороны от точки пересечения с Ox , откладываются отрезки длиной h . Найти геометрическое место концов этих отрезков. (Конхоида Никомеда.)

141. Из точки A на окружности диаметра a проводятся sec-
ущие. На каждой из них по обе стороны от другой точки

пересечения с окружностью откладываются отрезки длиной b . Найти геометрическое место их концов. (Улитка Паскаля.)

142. Нить, намотанная на окружность $x^2 + y^2 = a^2$, разматывается, оставаясь туго натянутой. Найти геометрическое место, описываемое ее концом, если начальное положение конца нити было в точке $(a, 0)$. (Эвольвента круга.)

143. Круг радиуса a катится без скольжения по оси Ox . Найти уравнение кривой, описанной той точкой круга, которая в начальный момент касалась оси Ox в начале координат. (Циклоида.)

144. Найти уравнение кривой, описанной точкой круга радиуса a , катящегося без скольжения по оси Ox , если в тот момент, когда круг касался оси Ox в начале координат, эта точка занимала положение $(0, a - b)$. (Трохоида.)

145. Круг радиуса a катится без скольжения снаружи по кругу $x^2 + y^2 = a^2 n^2$. Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси Ox . (Эпициклоида.)

146. Круг радиуса a катится по кругу $x^2 + y^2 = a^2 n^2$ внутри его без скольжения. Найти геометрическое место, описываемое той точкой катящегося круга, которая в начальный момент касалась неподвижного круга на оси Ox . (Гипоциклоида.)

147. Показать, что при $n = 4$ гипоциклоида обращается в астроиду $x^{2/3} + y^{2/3} = (4a)^{2/3}$.

148. При $n = 1$ эпициклоида обращается в кривую, называемую кардиоидой. Показать, что уравнение кардиоиды в соответственно выбранных полярных координатах имеет вид $r = a(1 + \cos \varphi)$.

149. Показать, что кардиоида (см. предыдущую задачу) есть частный случай улитки Паскаля (см. задачу 141).

150. Показать, что при $n = 2$ гипоциклоида обращается в прямую. (Теорема Кардано.)

151. Прямоугольный треугольник с катетами a и b скользит концами их по осям координат. Найти геометрическое место вершины прямого угла.

152. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в данный треугольник так, что одна из их сторон лежит на основании треугольника.

153. Найти геометрическое место центров параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник, стороны которых параллельны диагоналям четырехугольника.

154. Концы основания треугольника — в точках $(\pm a, 0)$. Один из углов при основании вдвое больше другого. Найти геометрическое место вершины треугольника.

155. Концы основания треугольника — в точках $(\pm a, 0)$. Разность углов при основании равна φ . Найти геометрическое место вершины.

156. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, образуемых прямыми $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{k} + \frac{y}{3-k} = 1$.

157. Три вершины параллелограмма, направления сторон которого даны, скользят по трем данным прямым. Каково геометрическое место четвертой вершины?

158. Четыре стороны изменяющегося параллелограмма все время проходят через четыре данные точки на прямой. Показать, что диагонали параллелограмма тоже проходят через некоторые неподвижные точки.

159. Стороны прямого угла, положение которого меняется, проходят все время через две данные точки. Доказать, что также биссектриса его проходит через постоянную точку.

160. Сторона переменного квадрата проходит через начало координат, а концы ее скользят по прямым, параллельным оси Ox . Каково геометрическое место двух других вершин?

161. Найти геометрическое место середин хорд круга $x^2 + y^2 = a^2$, проходящих через точку $P(c, 0)$ внутри круга.

162. Прямые a , b и c вращаются около точек A , B , C , лежащих на одной прямой. При этом точка пересечения прямых a и b

скользит по прямой P , а точка пересечения прямых a и c скользит по прямой Q . Доказать, что геометрическое место точек пересечения прямых b и c скользит по прямой R , проходящей через точку пересечения прямых P и Q .

163. Доказать теорему Дезарга: если вершины двух треугольников лежат на трех прямых, исходящих из одной точки, то три точки пересечения соответствующих пар сторон треугольников лежат на одной прямой.

§ 1.4 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТЕЙШЕМ ВИДЕ

164. Найти уравнение параболы, проходящей через точку $(6, 9)$, с вершиной в начале координат и симметричной относительно оси Oy .

165. Ось Ox — ось симметрии параболы с вершиной в начале. Найти уравнение этой параболы, зная, что она проходит через точку $(2, 2)$.

166. Параболическое зеркало рефлектора телескопа в Симеизе имело фокусное расстояние $5,4$ м и $1,02$ м в диаметре. Найти глубину параболической вогнутости зеркала.

167. Зеркало автомобильного фонаря имеет в разрезе форму параболы. Диаметр зеркала 20 см, глубина 10 см. Найти положение фокуса зеркала.

168. Доказать, что все параболы $y^2 = 2px$ геометрически подобны.

169. На параболе $y^2 = 24x$ взята точка на расстоянии 14 ед. от фокуса. Определить ее расстояние от вершины.

170. Доказать, что произведение ординат концов любой хорды, проходящей через фокус параболы $y^2 = 2px$, есть величина постоянная.

171. На параболе $y^2 = 2px$ найти точку, такую, что ее расстояния от фокуса и от вершины находятся в отношении $7 : 8$.

172. Дана парабола $y^2 = 4 - 4x$ и прямая $x + y = 1$. Через одну из точек их пересечения провести другую параболу с той же осью и фокусом.

173. Составить уравнение параболы с осью симметрии Ox , проходящей через точки $(a, 0)$, $(0, b)$. При каком соотношении между a и b фокус параболы будет в начале координат?

174. Даны параболы $y^2 = 4x + 8$ и $4x + y^2 - 4y - 8 = 0$. Найти уравнение их общей хорды и точку ее пересечения с прямой, соединяющей фокусы.

175. Даны три точки $(-5, 2)$, $(1, -4)$ и $(5, 12)$, лежащие на параболе с осью, параллельной оси Oy . Найти вершину, фокус и директрису этой параболы.

176. Через три точки $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ и $(6, 1)$ провести окружность и параболу с осью, параллельной оси Oy . Определить расстояние центра окружности от вершины параболы.

177. Доказать, что уравнение $yy_1 = p(x + x_1)$ изображает касательную к параболе $y^2 = 2px$ в точке (x_1, y_1) .

178. Даны параболы $y^2 + 4x = 0$ и $y^2 = 16x + 80$. Проверить, что они софокусны и что касательные в точках пересечения взаимно перпендикулярны.

179. Даны три точки $(-3, 2)$, $(-1, 1)$ и $(3, 5)$, провести через них параболу с осью, параллельной оси Oy , и окружность и найти углы, под которыми они пересекаются.

180. Доказать, что касательная к параболе $y^2 = 2px$, имеющая угловой коэффициент m , изображается уравнением $y = mx + \frac{p}{2m}$.

181. Найти касательную к параболе $4y = x^2$ в точке $(2, 1)$.

182. Через точку $(0, -4)$ провести касательную к параболе $4y = x^2$.

183. Через точку $(-4, -1)$ провести касательную к параболе $y^2 = 2x$.

184. Доказать, что касательные, проведенные в концах хорды параболы, проходящей через фокус, взаимно перпендикулярны.

185. Дана парабола $y^2 = 2px$. Найти угол между касательными к ней, проведенными из точки $(-p, p)$.

186. Найти расстояние от фокуса параболы $y^2 = 2px$ до касательной к ней, угол которой с осью равен α .

187. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней.

188. Дана парабола $4y + x^2 - 4x - 12 = 0$ и прямая $y - 2x = 0$. Провести касательную, параллельную данной прямой.

189. Найти общие касательные к параболе $y^2 = 8x$ и окружности $x^2 + y^2 = 2$.

190. Даны две параболы: $y^2 = 2px$ и $y^2 = 2p(x+a)$. Доказать, что отрезки касательной к первой параболе, лежащие внутри второй, делятся точкой касания пополам.

191. Найти геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом.

192. Ординаты окружности $x^2 + y^2 = 36$ уменьшены в два раза. Найти уравнение полученной кривой.

193. Найти полуоси эллипса $3x^2 + 5y^2 - 30 = 0$.

194. Найти уравнение эллипса, проходящего через точки $(1, 4)$ и $(7, 2)$ и симметричного относительно осей Ox и Oy .

195. Доказать, что эллипсы с одинаковым эксцентриситетом e геометрически подобны, т. е. могут быть совмещены друг с другом при соответствующем увеличении одного из них.

196. Меридиан земного шара — эллипс, у которого сжатие, т. е. $\frac{a-b}{a}$, равно $\frac{1}{298}$. Найти его эксцентриситет.

197. Орбита земного шара — эллипс с полуосью $a = 150 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом $e = 0,017$. Зная, что Солнце в фокусе этого эллипса, найти, на сколько кратчайшее расстояние Земли до Солнца (4 января) короче длиннейшего (3 июля).

198. Даны две точки, лежащие на эллипсе, оси которого служат осями координат, — $(3; 2,4)$ и $(4; 1,8)$. Найти этот эллипс и проекции фокусов на хорду, соединяющую данные точки.

199. Даны эллипс и парабола $y^2 = 18x - 0,36x^2$, $y^2 = 18x$. Найти расстояние от фокуса параболы до ближайшего фокуса эллипса.

200. Найти эксцентриситет равнобочной гиперболы.

201. Директрисы гиперболы делят расстояние между фокусами на три равные части. Найти ее эксцентриситет.

202. Фокусы эллипса делят расстояние между директрисами на три равные части. Найти его эксцентриситет.

203. Каким станет уравнение равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, если повернуть оси на угол $\alpha = -45^\circ$?

204. Расстояние между фокусами эллипса равно 2, расстояние между директрисами 10. Найти полуоси.

205. Эксцентриситет гиперболы равен 2. Найти угол между асимптотами.

206. Малая ось эллипса видна из фокуса под прямым углом. Найти эксцентриситет.

207. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку (4, 6).

208. Дан эллипс $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

209. Найти общее уравнение эллипсов и гипербол с фокусами в точках $(\pm c, 0)$.

210. Дан эллипс $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Найти уравнение гиперболы, имеющей фокусы в вершинах данного эллипса, а вершины — в фокусах.

211. Дан эллипс $\frac{x^2}{33} + \frac{y^2}{8} = 1$. Найти софокусную с ним гиперболу, имеющую эксцентриситет, равный 1,25.

212. Найти эллипс и гиперболу, проходящие через точку (6, 4) и софокусные с гиперболой

$$x^2 - y^2 + 8 = 0.$$

213. Оси координат служат осями гиперболы, проходящей через точку (6, 5) и имеющей эксцентриситет, равный 1,5. Составить уравнение.

214. Найти точки, в которых гипербола $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ пересекается прямыми, параллельными асимптотам и проходящими через правый фокус.

215. Найти расстояние от фокуса гиперболы $b^2x^2 - a^2y^2 =$
 $= a^2b^2$ до асимптоты.

216. Полярное уравнение линии второго порядка есть $r(5 + 3 \cos \varphi) = 16$. Найти ее уравнение относительно осей симметрии.

217. То же для кривой $r(4 + 5 \cos \varphi) = 9$.

218. Доказать равенство

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} = \frac{n}{p},$$

где $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ — радиус-векторы, проведенные из фокуса параболы под углами $\frac{2\pi}{n}$ друг к другу.

219. Доказать равенство

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_2^2},$$

где r_1 и r_2 — взаимно перпендикулярные радиус-векторы, проведенные из центра эллипса.

220. Доказать равенство

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_n^2} = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

где $r_1, r_2, \dots, r_n$ — радиус-векторы из центра эллипса, составляющие между собой углы $\frac{2\pi}{n}$.

221. Найти уравнения диаметров эллипса $x^2 + 6y^2 = 2$, длина которых равна 2.

222. Доказать, что при проектировании взаимно перпендикулярные диаметры круга переходят в сопряженные диаметры эллипса.

223. Пользуясь теоремой о том, что площадь проекции равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между

плоскостью фигуры и плоскостью проекции, доказать теорему Аполлония: $a_1 b_1 \sin \omega = ab$, где a_1 и b_1 — длины сопряженных полуосей эллипса, а ω — угол между ними.

224. Исходя из результата задачи 222, доказать другую теорему Аполлония, в силу которой $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$.

225. Найти угол между равными сопряженными диаметрами эллипса $x^2 + 3y^2 = 6$.

226. Найти длины сопряженных диаметров гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, угол между которыми равен 45° .

227. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $x^2 + 15y^2 = 5$, угол между которыми равен 150° .

228. Угол между сопряженными диаметрами эллипса равен 120° . Один из них вдвое больше другого. Найти эксцентриситет.

229. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{5} + 3y^2 = 1$, составляющих угол 150° .

230. Длины сопряженных диаметров эллипса $8x^2 + 17y^2 = 136$ относятся как 4 : 3. Найти уравнения этих диаметров.

231. Сумма длин сопряженных диаметров 6, угол между ними 150° , а эксцентриситет $e = \frac{3}{5}$. Найти оси эллипса.

232. Найти длины сопряженных диаметров эллипса $3x^2 + 5y^2 = 15$, составляющих наибольший угол.

233. Найти угол между сопряженными диаметрами гиперболы, зная отношение их длин m и эксцентриситет e .

234. Найти угол между асимптотами гиперболы, зная, что сопряженные диаметры ее образуют угол 45° и относятся как 2 к 3.

235. Найти длины сопряженных диаметров гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$, сумма которых относится к сумме осей как 5 к 2.

236. Доказать, что уравнение $Axx_1 + Byy_1 + C = 0$ изображает касательную к кривой $Ax^2 + By^2 + C = 0$ в точке (x_1, y_1) .

237. Дан эллипс $4x^2 + y^2 = 8$ и прямая $y - 2x = 0$. Провести к эллипсу касательные, параллельные этой прямой, и найти расстояние между касательными.

238. Через точку $(2, -1)$ провести касательную к эллипсу $x^2 + 9y^2 = 9$.

239. Через точку $(3, -6)$ провести касательную к гиперболе $4x^2 - 9y^2 = 36$.

240. Через точку $(1, -2)$ провести касательную к гиперболе $x^2 - y^2 = 1$.

241. Провести параллельно прямой $2x - 3y = 0$ касательные к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 4$.

242. Параллельно прямой $10x + 3y = 0$ провести касательные к гиперболе $4x^2 - y^2 = 4$.

243. Найти касательные к гиперболе $\frac{4x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ в точках ее пересечения с прямою $3x = 5y$ и расстояние между этими касательными.

244. Даны: эллипс $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ и гипербола $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. Проверить, что касательные к ним в точках пересечения взаимно перпендикулярны.

245. Даны два эллипса: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ и $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{3} = 1$. Найти касательные к первому эллипсу, проходящие через фокусы второго.

246. Найти касательные к гиперболе $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{21} = 1$ проходящие через фокус сопряженной гиперболы.

247. Найти угол между касательными к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, проведенными из точки $(1, 2)$.

248. Доказать, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, имеющая угловой коэффициент m , изображается уравнением

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

249. Доказать, что касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sigma$, имеющая угловой коэффициент m , изображается уравнением

$$y = mx \pm \sqrt{\sigma(a^2 m^2 - b^2)}.$$

250. Доказать, что хорды, соединяющие точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ с осями координат, касаются эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

251. Показать, что эллипсы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ касаются прямых $\pm x \pm y = c$, если $a^2 + b^2 = c^2$.

252. Доказать, что геометрическое место точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ виден под прямым углом, есть окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

253. Показать, что у гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ произведение расстояний фокусов от касательной равно b .

§ 1.5

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЕМ В ОБЩЕМ ВИДЕ

254. Определить вид линий, заданных уравнениями второго порядка: а) $xy = 0$; б) $x^2 - y^2 = 0$; в) $(x - y)^2 = 0$; г) $(x - y)^2 - 3(x - y) + 2 = 0$; д) $x^2 + y^2 = 0$; е) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

255. Определить вид линий, заданных уравнениями второго порядка:

а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$;

б) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;

в) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

256. Определить k так, чтобы уравнение $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + k = 0$ изображало пару пересекающихся прямых.

257. Определить k так, чтобы уравнение $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + k = 0$ изображало точку.

258. Подобрать λ так, чтобы уравнение $x^2 - 2\lambda xy + 4y^2 + 2x + \lambda y = 0$ изображало пару прямых, и найти их.

259. В уравнении $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$ подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы уравнение изображало пару параллельных прямых.

260. Найти уравнения асимптот кривой $2x^2 - xy + 3x + y - 1 = 0$.

261. Показать, что уравнение $(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda = 0$, где $\lambda \neq 0$ и $ab_1 - a_1b \neq 0$, изображает гиперболу с асимптотами $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$.

262. Найти уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые $x - 1 = 0$ и $y - 1 = 0$ и проходящей через точку $(2, 2)$.

263. Доказать, что при любом значении коэффициентов λ и μ кривая $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ проходит через точки пересечения кривых $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Здесь f_1 и f_2 — полиномы относительно x и y .

264. Пусть $s_{kl} = 0$ — уравнение прямой $A_{kl}x + B_{kl}y + C_{kl} = 0$, проходящей через точки k и l . Доказать, что при любых λ и μ уравнение $\lambda s_{12}s_{34} + \mu s_{13}s_{24} = 0$ изображает линию второго порядка, проходящую через четыре данные точки.

265. Найти уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(1, -2)$, $(-1, 1)$, $(3, 0)$.

266. Найти линию второго порядка по пяти ее точкам: $(3, 1)$, $(2, 1)$, $(-7, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$.

267. Найти параболу, проходящую через четыре точки: $(0, -1)$, $(0, 3)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$.

268. Найти линию второго порядка, проходящую через точку $(1, 1)$ и точки пересечения кривой $x^2 - 2xy + 2x - 2y - 17 = 0$ с прямыми $y = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$.

269. Через начало координат проведены хорды AB и CD окружности $x^2 + (y - h)^2 = a^2$. Рассматривая пучок кривых второго порядка, проходящих через концы хорд, доказать, что прямые AD и CB , а также BD и AC пересекают ось Ox на одинаковых расстояниях от начала.

270. На кривой второго порядка взяты шесть точек: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Уравнения сторон полученного шестиугольника соответственно обозначены следующим образом:

$$s_{12} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{34} = 0, \quad s_{45} = 0, \quad s_{56} = 0, \quad s_{61} = 0.$$

При этих условиях и при любом выборе коэффициентов λ и μ кривая третьего порядка $\lambda s_{12}s_{34}s_{56} + \mu s_{23}s_{45}s_{61} = 0$ проходит через 6 данных точек и через 3 точки пересечения пар противоположных сторон.

Исходя отсюда, доказать теорему Паскаля: в шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, три точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

§ 1.6 ЦЕНТР, ДИАМЕТРЫ. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Полином $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, дополненный до однородного введением степеней переменной z , обращается в тройничную квадратичную форму

$$\tilde{f} = \tilde{f}(x, y, z) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2.$$

Частные производные его по x , y и z выражаются равенствами:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 2Ax + By + Dz; \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = Bx + 2Cy + Ez; \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = Dx + Ey + 2Fz.$$

Значения их при $z = 1$ обозначим через $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_1$, $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_1$, и $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\right)_1$. Определитель из коэффициентов при x , y и z в формулах, выражающих частные производные, называется дискриминантом Δ квадратичной формы трех переменных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}.$$

Его минор

$$\delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$$

есть дискриминант квадратичной формы двух переменных $Ax^2 + Bxy + Cy^2$. В теории квадратичных форм важно тождество, которое можно назвать формулой Тейлора:

$$\tilde{f}(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = \tilde{f}(x, y, z) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \zeta + \tilde{f}(\xi, \eta, \zeta).$$

Из этой формулы при $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ получается тождество Эйлера:

$$x \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + y \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} + z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = 2\tilde{f}(x, y, z).$$

Другое следствие той же формулы выражается равенством

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \zeta = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} x + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} y + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta} z.$$

В дальнейшем для краткости будем писать:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, 1) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, \\ \tilde{f}(x, y, 0) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2. \end{aligned}$$

271. Пусть (x, y) — середина хорды кривой $\tilde{f}(x, y, 1) = 0$, а $(x + \xi t, y + \eta t)$ и $(x - \xi t, y - \eta t)$ — концы хорды. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_1 \xi + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_1 \eta = 0.$$

272. Доказать, что середины хорд кривой $f(x, y, 1) = 0$, параллельных прямой $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta}$, лежат на прямой $(\frac{\partial f}{\partial x})_1 \xi + (\frac{\partial f}{\partial y})_1 \eta = 0$ или, в полном виде:

$$(2Ax + By + D)\xi + (Bx + 2Cy + E)\eta = 0.$$

(Диаметр, сопряженный с данным направлением).

273. Показать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η) уравнение $f(x, y, 1) = 0$ переходит в уравнение

$$f(x_1, y_1, 0) + \frac{\partial f}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial f}{\partial \eta} y_1 + f(\xi, \eta, 1) = 0.$$

274. При $4AC - B^2 \neq 0$ все диаметры проходят через точку (ξ, η) , где пересекаются прямые $(\frac{\partial f}{\partial x})_1 = 0$, $(\frac{\partial f}{\partial y})_1 = 0$. Показать, что при переносе начала в точку, выбранную таким образом, уравнение $f(x, y, 1) = 0$ переходит в такое:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + \frac{1}{2}(D\xi + E\eta + 2F) = 0.$$

Здесь $D\xi + E\eta + 2F$ есть значение $(\frac{\partial f}{\partial z})_1$ при $x = \xi$, $y = \eta$.

275. Перенести начало координат в центр кривой $x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0$ и составить новое уравнение кривой.

276. Упростить уравнение кривой

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0,$$

перенеся начало координат в центр.

277. Упростить уравнение линии

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 3 = 0,$$

перенеся начало координат в тот ее центр, абсцисса которого равна единице.

278. Показать, что прямая $7x + y + 6 = 0$ проходит через центры кривых

$$3x^2 - 7xy - 6y^2 + 3x - 9y + 5 = 0$$

и

$$3x^2 - 5xy + 6y^2 + 11x - 17y + 13 = 0.$$

279. Найти оси симметрии эллипса

$$x^2 + xy - y^2 - x + y - 1 = 0.$$

280. Найти фокусы (относительно старых осей координат) гиперболы $x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$.

281. Определить эксцентриситет линии

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0.$$

282. Упростить уравнение кривой

$$x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0,$$

перенеся начало в центр, а затем повернув оси на соответствующий угол.

283. То же для кривой $x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0$.

284. Упростить уравнение параболы

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0,$$

повернув оси так, чтобы новое уравнение не содержало x_1y_1 , и перенеся затем начало так, чтобы в окончательном уравнении осталось лишь два члена.

285. Доказать, что при $4AC - B^2 = 0$, $A > 0$ (так что можно положить $A = a^2$) имеет место тождество

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = (ax + by + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

где $\alpha = D - 2ah$, $\beta = E - 2bh$, $\gamma = F - h^2$.

286. Доказать, что в тождестве предыдущей задачи число h можно выбрать так, чтобы прямые $ax + by + h = 0$ и $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ были взаимно перпендикулярны, если только числа D и E не пропорциональны числам a и b .

287. Упростить уравнение кривой

$$x^2 + 2xy + y^2 - 9x + 4 = 0$$

с помощью тождества:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 9x + 4 = (x + y + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

подобрав h так, чтобы прямые $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ и $x + y + h = 0$ были взаимно перпендикулярны. При этом формулы преобразования координат имеют вид:

$$y_1 = \frac{x + y + h}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

288. Тем же способом упростить уравнение параболы

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 170x + 310y - 465 = 0.$$

289. Упростить уравнение параболы

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 + 4x - 16y + 8 = 0.$$

290. При данных A , B и C и соответственно подобранном значении λ справедливо тождество

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2,$$

где α и β — вещественные или мнимые коэффициенты. Доказать, что такими значениями λ являются корни уравнения

$$4\lambda^2 - 4(A + C)\lambda + 4AC - B^2 = 0.$$

291. Уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

изображает пару прямых, вещественных или мнимых, тогда и только тогда, если дискриминант Δ равен нулю. Пользуясь этим, доказать, что при любых преобразованиях координат величина Δ не изменяется.

292. Пользуясь инвариантностью величин $A + C$, $4AC - B^2$ и дискриминанта Δ , доказать, что при $4AC - B^2 \neq 0$ уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

после упрощения приводится к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \frac{\Delta}{B^2 - 4AC}.$$

Здесь λ_1 и λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - 2(A+C)\lambda + 4AC - B^2 = 0$.

293. Доказать, что уравнение $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ при $AC - D^2 = 0$ и $\Delta \neq 0$ можно привести к виду

$$(A + C)x_1^2 = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{2(A + C)}} y_1.$$

Привести к простейшему виду уравнения следующих линий:

294. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

295. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

296. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 16 = 0$.

297. $5x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y = 319$.

298. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

299. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

300. $7x^2 + 24xy + 38x + 24y + 175 = 0$.

301. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$.

302. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.

303. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 68x + 26y + 28 = 0$.

§ 1.7

СОПРЯЖЕННЫЕ ДИАМЕТРЫ. ОСИ СИММЕТРИИ. АСИМПТОТЫ

304. Найти уравнение гиперболы, проходящей через точки $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$ и имеющей асимптоту $x + y - 1 = 0$.

305. Найти равнобочную гиперболу, зная ее асимптоту $x - y + 1 = 0$ и точки гиперболы $(1, 1)$, $(2, 1)$.

306. Составить общее уравнение равнобочных гипербол с центром в точке (a, b) .

307. Парабола проходит через точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$, а прямая $x + y + 1 = 0$ — ее ось. Найти параболу.

308. Точки $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$ — на параболе. Ее ось параллельна прямой $y = x$. Найти параболу.

309. Парабола касается оси Oy в начале координат. Прямая $x + y + 1 = 0$ — касательная к вершине. Найти параболу.

310. Прямая $x + y + 1 = 0$ — ось кривой второго порядка, а точки $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$ лежат на кривой. Найти уравнение кривой.

311. Доказать, что у кривой

$$A(ax + by + c)^2 + B(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + C = 0$$

прямые $ax + by + c = 0$ и $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ — сопряженные диаметры, если $\alpha\beta \neq ab$.

312. Доказать, что у параболы

$$(ax + by + c)^2 + A(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0$$

прямая $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ — касательная, а прямая $ax + by + c = 0$ — диаметр, сопряженный с ее направлением. При этом подразумевается, что $\alpha\beta \neq ab$.

313. Найти линию второго порядка, у которой прямые $x - 2y - 1 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$ — сопряженные диаметры и на которой лежат точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

314. Парабола проходит через точку $(0, 0)$, прямая $x + y - 1 = 0$ — диаметр параболы, а $x + 2y - 1 = 0$ — касательная, сопряженная с ним. Найти параболу.

315. Прямая $x + y + 1 = 0$ — касательная, а $x - y + 1 = 0$ — сопряженный с ней диаметр параболы с параметром $\sqrt{2}$. Найти параболу.

316. Прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ — сопряженные диаметры эллипса с полуосями 2 и 1. Найти эллипс.

317. Прямые $x + 2y - 4 = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$ — сопряженные диаметры эллипса с полуосями $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найти уравнение эллипса.

318. Доказать, что отрезки любой прямой, заключенные между гиперболой и ее асимптотами, равны между собой.

§ 1.8 ФОКУСЫ И ДИРЕКТРИСЫ

319. Найти фокус и директрису параболы

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0.$$

320. Найти фокусы и директрисы кривой

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0.$$

321. Найти фокусы и директрисы кривой

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0.$$

322. Кривая второго порядка проходит через начало координат, ее фокус — в точке $(-1, 1)$, а соответствующая директриса имеет уравнение $x + y - 2 = 0$. Найти кривую.

323. Найти эллипс, проходящий через точку $(4, 2)$ и имеющий фокусы в точках $(4, 3)$ и $(0, -1)$.

324. Найти эллипс с фокусами в точках $(1, 2)$, $(2, 1)$, проходящий через точку $(5, 5)$.

325. Найти равнобочную гиперболу по директрисе $x + y - 1 = 0$ и фокусу $(1, 1)$.

326. Найти параболу по ее точкам $(1, 1)$, $(1, 2)$ и директрисе $x + y - 1 = 0$.

327. Кривая второго порядка проходит через точку $(0, -1)$, имеет центром $(1, 1)$, а директрисой — прямую $x + 2y + 1 = 0$. Найти кривую.

328. Найти кривую второго порядка по ее точкам $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ и фокусу $(1, 1)$.

329. Найти кривую второго порядка по директрисе $x + y + 1 = 0$, оси $y = x$ и точкам $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

330. Найти кривую второго порядка по точкам $(4, 5)$, $(-3, 4)$, фокусу $(1, 1)$ и оси симметрии $x + y - 2 = 0$.

331. Найти параболу по ее вершине $(0, 0)$ и фокусу $(1, 1)$.

332. Найти гиперболу по асимптотам $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ и фокусу $(0, 2)$.

333. Найти геометрическое место фокусов парабол, проходящих через точку $(1, -1)$ и имеющих директрисой прямую $x + y + 1 = 0$.

334. Найти геометрическое место вершин парабол, проходящих через данную точку и имеющих данную директрису.

335. Найти геометрическое место центров равнобоких гипербол, проходящих через точку $(0, 0)$ и имеющих директрисой прямую $x + y + 1 = 0$.

336. Каково геометрическое место фокусов кривых второго порядка, вписанных в данный параллелограмм?

§ 1.9 КАСАТЕЛЬНЫЕ К КРИВЫМ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОЛЮСЫ И ПОЛЯРЫ

Если точка (x_1, y_1) лежит на кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

то уравнение касательной к кривой в этой точке можно написать в любой из двух форм:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0,$$

$$(2Ax + By + D)x_1 + (Bx + Cy + E)y_1 + Dx + Ey + 2F = 0.$$

Если же точка (x_1, y_1) не лежит на кривой, то те же уравнения изображают некоторую прямую, называемую полярной точки (x_1, y_1) . Сама точка (x_1, y_1) называется полюсом этой поляры.

337. Найти уравнение касательной в начале координат к кривой

$$5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = 0.$$

338. Найти касательную к кривой $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, параллельную прямой $2x + 2y - 1 = 0$.

339. Найти уравнения касательных к эллипсу $x^2 + xy + y^2 = 3$, параллельных осям координат.

340. Найти уравнение касательной к кривой $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$, проходящей через точку $(2, 1)$.

341. Через точку $(4, -2)$ провести касательную к кривой $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

342. Доказать теорему: если полюс движется по прямой, то поляра вращается вокруг некоторой точки.

343. Доказать теорему: если поляра точки M проходит через точку N , то поляра точки N проходит через точку M .

344. Доказать теорему Брианшона: диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около кривой второго порядка, пересекаются в одной точке.

345. Доказать, что кривая второго порядка определяется своими пятью касательными.

346. Доказать, что полюсы касательных к некоторой кривой второго порядка, взятые относительно данной кривой второго порядка, лежат на кривой второго порядка.

347. Найти геометрическое место полюсов касательных к окружности радиуса R относительно концентрической окружности радиуса r .

348. Если одна из сторон обращается в нуль или две стороны служат продолжением одна другой, то шестиугольник обращается в пятиугольник. Во что переходят при этом теоремы Паскаля (задача 270) и Брианшона (задача 344)?

349. Такой же вопрос — для дальнейших случаев вырождения, когда шестиугольник переходит в четырехугольник или треугольник.

§ 1.10 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

350. Доказать, что площадь, заключенная между касательной к гиперболе и ее асимптотами, имеет постоянную величину.

351. Доказать, что произведение отрезков секущей между асимптотами и точкой на гиперболе равно квадрату полудиаметра, параллельного секущей.

352. Доказать, что у гиперболы точка касания делит пополам отрезок касательной между асимптотами.

353. Найти уравнение кривой второго порядка по ее фокусу $(0, 0)$ и трем касательным: $x - y - 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$.

354. Найти параболу по точке на ней $(5, 0)$, фокусу $(3, 2)$ и касательной $x - 3y - 7 = 0$.

355. Найти гиперболу по ее центру $(1, 1)$, фокусу $(3, 3)$ и касательной $x + 2y - 7 = 0$.

356. Найти геометрическое место точек касания касательных, проведенных из начала координат к параболе

$$((x - a)^2 + y^2 - b^2)(1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0,$$

где m — переменный параметр.

357. Найти геометрическое место проекций фокуса на касательные к кривой $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.

358. Найти точку пересечения поляр точек, расположенных на директрисе.

359. Если a и b — длины двух взаимно перпендикулярных касательных к параболе $y^2 = 4x$, то $a^4 b^4 = (a^2 + b^2)^3$. Доказать.

360. Найти геометрическое место точек касания для касательных данного направления к софокусным кривым $\frac{x^2}{a^2+h} + \frac{y^2}{b^2+h} = 1$, h — переменный параметр.

361. Равнобочная гипербола проходит через начало координат и имеет асимптоту $x + y + 1 = 0$. Найти геометрическое место точек пересечения второй асимптоты с касательной в начале координат.

362. Равнобочные гиперболы проходят через точку $(1, 0)$ и касаются оси Oy в точке $(0, 1)$. Найти геометрическое место центров.

363. Каково геометрическое место вершин равнобочных гипербол, проходящих через данную точку и имеющих данную асимптоту?

364. Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к данной параболе две нормали, составляющие между собой прямой угол?

365. Даны параболы $y^2 = 2px$ и $y^2 = 2p(x - a)$. Доказать, что хорды первой, касающиеся второй, делятся пополам точкой касания.

366. Две параболы имеют общую ось симметрии. Две прямые параллельны оси симметрии. Через точки их пересечения с параболой проводятся хорды. Доказать, что точки пересечения этих хорд лежат на одной прямой, какие бы пары параллельных прямых ни были взяты.

367. Каково геометрическое место вершин парабол с данными фокусом и касательной?

368. Доказать, что круг, описанный около треугольника, составленного из трех касательных к параболы, проходит через фокус.

369. Доказать, что равнобочная гипербола, описанная около треугольника, проходит через точку пересечения его высот.

370. Каково геометрическое место фокусов парабол с данными вершиной и касательной?

371. Из точки вне параболы можно провести три нормали к ней. Доказать, что вершина параболы и три основания нормалей лежат на одной окружности.

372. Даны кривая $Ax^2 + By^2 + C = 0$ и точка $M(a, b)$. Около точки M , как центра, описываются окружности. Найти геометрическое место середин хорд, общих этим окружностям и данной кривой.

373. Дан четырехугольник $ABCD$. Каково геометрическое место таких точек M , что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна сумме площадей треугольников BMC и DMA ?

374. С помощью результата предыдущей задачи доказать теорему Ньютона: в описанном около круга четырехугольнике середины диагоналей и центр этого круга лежат на одной прямой.

375. Прямой угол, вершина которого M находится на кривой второго порядка, вращается около вершины, а A и B — точки

пересечения его сторон с кривой, отличные от M . Доказать, что прямая AB вращается около точки, расположенной на нормали к кривой в точке M .

376. Около точки A внутри данного круга вращается прямой угол. В точках пересечения его сторон с окружностью проводятся касательные к кругу. Найти геометрическое место точек пересечения этих касательных.

377. Переменный круг касается эллипса в данной точке. Каково геометрическое место точек пересечения общих касательных?

378. Фокусы эллипса соединяются радиус-векторами с переменной точкой эллипса. Каково геометрическое место центров кругов, вписанных в треугольники, составленные из фокальной прямой и радиус-векторов?

379. Инверсия, или преобразование обратными радиус-векторами, состоит в том, что переменную точку M заменяют другой точкой M_1 , лежащей на прямой OM так, что $OM \cdot OM_1 = a^2$. Здесь O — данная точка, a — данная величина. Доказать, что при инверсии линия $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ переходит в линию $A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + D_1 = 0$, т. е. круги или прямые переходят в круги или прямые (не обязательно соответственно).

380. Доказать, что инверсией относительно начала координат гипербола $x^2 - y^2 = a^2$ переводится в лемнискату Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2(x^2 - y^2).$$

381. Доказать, что инверсия эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно начала координат с радиусом инверсии, равным $\sqrt{ab}$, дает кривую $(x^2 + y^2)^2 = b^2x^2 + a^2y^2$.

382. Гипербола, конгруэнтная гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a > b$, вписана в угол между осями координат и скользит по ним. Доказать, что ее центр движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

383. Эллипс с полуосями a и b касается осей координат и скользит по ним. Доказать, что его центр движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 2.1

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Орты прямоугольных осей Ox , Oy , Oz большей частью обозначают соответственно i , j , k .

384. Проекция вектора на оси Ox , Oy , Oz равны $(1, -4, 8)$. Найти длину вектора и косинусы его углов с осями.

385. Найти сумму векторов $a + b + c$, если $a = 5i + 7j + 8k$, $b = 3i - 4j + 6k$, $c = -6i - 9j - 5k$, и длину этого вектора.

386. Вычислить скалярное произведение $a \cdot b$, если $a = 2i + 3j + 4k$, $b = 3i + j - 3k$.

387. Вычислить векторное произведение $a \times b$ векторов предыдущей задачи.

388. Проверить тождества:

$$(a - b) \times (a + b) = 2a \times b; \quad (a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

389. Из последнего тождества предыдущей задачи получить тождество Лагранжа

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 = \\ = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2.$$

390. Показать, что если $a + b + c = 0$, то $a \times b = b \times c = c \times a$.

391. Найти угол между векторами $i + 2j + 2k$ и $-i + 2j + 4k$.

392. Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz .

393. В треугольнике ABC найти величину стороны AB и угол BAC , если известны координаты вершин: $A(2, -3, 1)$, $B(4, 11, 6)$, $C(4, -4, 3)$.

394. Воспользовавшись формулой для вычисления векторного произведения, найти площадь треугольника ABC , зная координаты вершин $A(-2, 1, 3)$, $B(2, -1, 7)$, $C(11, 2, -5)$.

395. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление CD , если известны точки $A(1, -2, 3)$, $B(4, -4, -3)$, $C(2, 4, 3)$, $D(8, 6, 6)$.

396. Проверить, что векторы $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ и $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ могут быть взяты за ребра куба. Найти третье ребро куба.

397. Вычислить смешанное (векторно-скалярное) произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

398. Вычислить следующие двойные векторные произведения трех векторов предыдущей задачи: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ и $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

399. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершин $A(2, 1, 5)$, $B(4, 0, 8)$, $C(6, -2, 6)$, $D(5, 0, 3)$.

400. Вычислить высоту тетраэдра $ABCD$ предыдущей задачи, опущенную из точки D .

401. Определить плечо вектора $\overrightarrow{AB}$ относительно точки C , т. е. длину перпендикуляра из точки C на прямую AB . Известны положения точек $A(2, 0, 3)$, $B(4, 6, 0)$, $C(1, -3, 8)$.

402. Проверить тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

403. Доказать формулу:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

404. При каком значении m векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + m\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = \mathbf{j}$; $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ компланарны и, значит, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

405. Решить предыдущую задачу, исходя из соображения, что при компланарности $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеется равенство $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, где λ и μ — скалярные множители.

406. Три вектора $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ называются взаимными с тремя некопланарными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если $\Delta\mathbf{a}^* = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\Delta\mathbf{b}^* = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{c}^* = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, где число Δ определяется равенством $\Delta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Доказать, что вектор $\mathbf{x}$, определяемый из системы уравнений $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = n$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = p$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и m , n , p заданы и $\Delta \neq 0$, имеет вид $\mathbf{x} = m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^* + p\mathbf{c}^*$.

407. Представить в векторном виде решение обыкновенной системы

$$2x_1 - x_2 + x_3 = m, \quad x_1 - 3x_2 - 2x_3 = n, \quad 3x_1 - x_2 - x_3 = p.$$

408. Проверить, что все векторы $\mathbf{x}$, удовлетворяющие уравнению $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$, могут быть даны в таком виде: $\mathbf{x} = \frac{m}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — совершенно произвольный вектор.

409. Проверить, что по векторному уравнению $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ возможно найти $\mathbf{x}$, только если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, и в этом случае

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} + n\mathbf{a},$$

где n — произвольный скалярный множитель.

410. Если заданы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем $\mathbf{a}$ перпендикулярен $\mathbf{b}$, то из двух векторных уравнений $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m$ и $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ вектор $\mathbf{x}$ определяется однозначно. Проверить это и найти $\mathbf{x}$.

411. Определить вектор $\mathbf{x}$ из системы $\mathbf{x} \cdot \mathbf{i} = 3$, $\mathbf{x} \times \mathbf{i} = -2\mathbf{k}$.

412. Если трехгранный угол пересечь сферой единичного радиуса с центром в вершине трехгранного угла, то на поверхности сферы в пересечении получится сферический треугольник. Его стороны α , β , γ измеряют плоские углы трехгранного угла, а его углы A , B , C измеряют двугранные углы трехгранного угла.

Расположив орты ребер: а) $\mathbf{e}_1$ по оси Oz , б) $\mathbf{e}_2$ в плоскости xOz под углом α к оси Oz , в) $\mathbf{e}_3$ в некоторой меридиональной плоскости и сосчитав двояко $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$, получить теорему косинусов сферической тригонометрии

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

413. При таком же расположении ортов вычислить $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3$. Циклически переставляя орты, получить теорему синусов сферической тригонометрии $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$.

414. Три орта составляют между собой углы α, β, γ . Проверить, что объем параллелепипеда, построенного на них (синус Штаудта), равен

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

415. Найти объем параллелепипеда, ребра которого имеют длины 2, 3, 4, а плоские углы трехгранного угла $120^\circ, 150^\circ, 60^\circ$.

416. Проверить, что если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два непараллельных вектора, то векторы $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$, $\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}|}$ являются тремя взаимно перпендикулярными ортами. Найти их расположение относительно данных векторов.

417. Даны орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Найти орт, лежащий в плоскости $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образующий угол θ с вектором $\mathbf{e}_1$.

418. Найти орт, лежащий в плоскости векторов $\mathbf{r}_1 = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ между ними и составляющий угол 45° с $\mathbf{r}_1$.

419. Вектор $\vec{OM} = \mathbf{r}$ повернуть на угол ω вокруг оси, имеющей направление орта $\mathbf{e}$ и проходящей через точку O .

420. Повернуть вектор $\vec{OM} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ около биссектрисы угла xOy на 60° .

421. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 - 1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где буквами α, β, γ обозначены косинусы углов между старыми и новыми осями.

422. Косинусы углов между новыми и прежними осями даны таблицей:

	x_1	y_1	z_1
x	$2/3$	$-1/3$	$2/3$
y	$-11/15$	$-2/15$	$10/15$
z	$-2/15$	$-14/15$	$-1/3$

Доказать, что у точек, для которых $x : y : z = 4 : (-2) : 1$, новые координаты равны старым.

§ 2.2 ПЛОСКОСТЬ

423. Найти плоскость, образующую на осях координат отрезки 2 , -3 , 4 .

424. Найти отрезки на осях, образуемые плоскостью $x + 2y - 3z + 6 = 0$.

425. Найти плоскость, проходящую через точку $(2, 1, -1)$ и образующую на осях Ox и Oz отрезки, равные соответственно 2 и 1 .

426. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ и $(3, -2, 3)$.

427. Найти уравнения граней тетраэдра с вершинами в точках $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$.

428. Найти углы, образованные перпендикуляром к плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$ с осями координат.

429. Найти косинусы углов, образованных плоскостью $2x - 2y + z - 5 = 0$ с координатными плоскостями.

430. Найти синусы углов, образованных плоскостью $6x - 2y - 3z - 6 = 0$ с осями координат.

431. Найти двугранный угол между плоскостями $2x + y - 2z - 4 = 0$ и $3x + 6y - 2z - 12 = 0$.

432. Найти линейный угол того двугранного угла между плоскостями $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - y + z + 2 = 0$, в котором лежит начало координат.

433. Через точку $(1, -1, 1)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскостям $x - y + z - 1 = 0$ и $2x + y + z + 1 = 0$.

434. Через точку $(0, 1, 2)$ провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x + 2y - z = 0$ и к плоскости xOy .

435. Через точки $(1, 1, 1)$ и $(2, 2, 2)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + y - z = 0$.

436. Лежат ли точки $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 3)$ по одну сторону от плоскости $x + 2y - z - 2 = 0$?

437. Найти объем тетраэдра по уравнениям его граней: $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - z - 1 = 0$, $z - 2 = 0$.

438. Найти геометрическое место точек (x, y, z) таких, что объем тетраэдра с вершинами (x, y, z) , $(1, 2, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ равен 10.

439. Найти расстояние точки $(2, 1, 1)$ от плоскости $x + y - z + 1 = 0$.

440. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

441. Найти плоскость, равноудаленную от плоскостей $x + y - 2z - 1 = 0$ и $x + y - 2z + 3 = 0$.

442. На оси Oz найти точку, равноудаленную от плоскостей $12x + 9y - 20z - 19 = 0$ и $16x - 12y + 15z - 9 = 0$.

443. Найти геометрическое место точек на плоскости xOz , равноудаленных от плоскостей $2x + y - 2z = 3$ и $3x + 12y - 4z = 26$.

444. На линии пересечения плоскостей $x + y + z - 2 = 0$ и $x + 2y - z - 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от плоскостей $x + 2y + z + 1 = 0$ и $x + 2y + z - 3 = 0$.

445. Найти плоскость, делящую пополам тот двугранный угол между плоскостями $x + 2y - z - 1 = 0$ и $x + 2y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка $(1, -1, 1)$.

446. Найти плоскость, в два раза более удаленную от плоскости $x + y - z + 1 = 0$, чем от плоскости $x + y - z - 1 = 0$, и не расположенную между ними.

447. Найти плоскость, расположенную между плоскостями $x - 2y + z - 2 = 0$ и $x - 2y + z - 6 = 0$ и делящую расстояние между ними в отношении $1 : 3$.

448. Найти точку пересечения плоскостей: $x + y + z - 6 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$.

449. Доказать, что следующие плоскости пересекаются в одной точке:

$$x + y + 2z - 4 = 0,$$

$$x + 2y - z - 2 = 0,$$

$$2x - y - z = 0,$$

$$x + y + z - 3 = 0.$$

450. Через точку пересечения плоскостей

$$2x + y - z - 2 = 0,$$

$$x - 3y + z + 1 = 0,$$

$$x + y + z - 3 = 0$$

провести плоскость, параллельную плоскости $x + y + 2z = 0$, не находя точки пересечения.

451. Проверив, что плоскости

$$x - 2y + 2z - 7 = 0,$$

$$2x - y - 2z + 1 = 0,$$

$$2x + 2y + z - 2 = 0$$

взаимно перпендикулярны, принять их за новые плоскости координат, приписав новым осям такие направления, чтобы новые координаты прежнего начала были положительны. Составить формулы перехода.

452. Найти общий вид уравнений плоскостей, пересекающих призму, образованную плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$, по равнобедренному треугольнику.

453. В уравнении $x + y + \lambda z = 0$ определить λ так, чтобы через Ox можно было провести только одну плоскость, составляющую угол 330° с плоскостью $x + y + \lambda z = 0$.

454. Определить λ так, чтобы данные плоскости пересекались по прямой:

$$x - y + z = 0,$$

$$3x - y - z + 2 = 0,$$

$$4x - y - 2z + \lambda = 0.$$

455. Доказать, что плоскости, проходящие через середины ребер тетраэдра перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в одной точке.

456. Доказать, что плоскости, делящие пополам двугранные углы тетраэдра, пересекаются в одной точке.

457. Через точку $(1, 4, 1)$ провести плоскость, касающуюся парабол $y = 0$, $z^2 = 8x$ и $z = 0$, $y^2 = 32x$.

458. В уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

все коэффициенты отличны от нуля. Доказать, что плоскость проходит через семь координатных углов.

§ 2.3

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

459. Найти плоскости, проектирующие прямую

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0, \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

на плоскости координат.

460. Найти углы прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 6x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

с осями координат.

461. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

462. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y + z = 0, \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

463. Плоскость $x + y + z = a$ пересекается плоскостями $x = y$ и $3x = y$. Определить угол между этими линиями пересечения.

464. Прямая

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ y = x \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

проектируется: а) на плоскость xOz и б) на плоскость yOz . Определить угол между этими проекциями.

465. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $x - y - z + 1 = 0$.

466. Провести прямую через точки $(1, 2, 1)$ и $(2, 1, 3)$.

467. Провести прямую через точки $(1, 2, 1)$ и $(1, 2, 3)$.

468. Через точки $A(2, -1, 3)$ и $B(0, 2, -1)$ проведена прямая. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью $3x - y + z = 0$.

469. Точки $A(2, 1, 1)$ и $B(1, 2, 2)$ проектируются из начала координат на плоскость $x + y + z = 10$. Найти координаты проекций A' и B' и расстояние $|A'B'|$ между этими точками.

470. Через точку $(2, 1, 3)$ провести прямую, параллельную плоскости $x + y + z = a$ и пересекающую прямую

$$\begin{cases} x = y, \\ y = 2z. \end{cases}$$

471. Через точку $(1, 2, 1)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости $x + 2y - z = 0$.

472. Через точку $(2, 1, 1)$ провести прямую, параллельную плоскостям $2x - y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$.

473. Через точку $(-1, 2, 1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

474. Через точку $(2, 1, 1)$ провести прямую, параллельную плоскостям $x - y + z + 2 = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$.

475. Через точку $(2, 2, 1)$ провести плоскость, перпендикулярную прямой $x + 2y - z + 1 = 0$, $2x + y - z = 0$.

476. Через точку $(1, 1, 2)$ провести плоскость, параллельную прямым

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

477. Через точку $(1, 2, 1)$ провести плоскость, параллельную прямым

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

478. Через прямую

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

и точку $(2, 1, 1)$ провести плоскость.

479. Через прямую $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

провести плоскость перпендикулярно к плоскости $x + y + z = 0$.

480. Найти проекцию прямой

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 5y + z = 10 \end{cases}$$

на плоскость $x + 2y + 3z = 2$ и определить угол, составляемый этой проекцией с плоскостью xOy .

481. Через ось Oz провести плоскость, составляющую угол 60° с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z = 7$.

482. Через прямую $x = y = z$ провести плоскость, составляющую угол 45° с плоскостью $x = y$.

483. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ проектируется из точки $(5, 5, 5)$ на плоскость xOy . Найти уравнения проекции.

484. Через точку $(1, 2, -1)$ провести прямую, пересекающую обе прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

485. Через прямую $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

провести плоскость, параллельную прямой $x = 2y = 3z$.

486. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $z = 0$ и проходящей через перпендикуляр, опущенный из точки $(1, -1, 1)$ на прямую

$$\begin{cases} x = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

487. Найти уравнение и длину высоты треугольника, высекаемого на плоскости $3x - y + 4z - 12 = 0$ координатными плоскостями; высота опущена из вершины, лежащей на Oz .

488. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$$

с плоскостью $x + y - z + 1 = 0$.

489. Найти проекцию точки $(2, 1, 1)$ на плоскость $x + y + 3z + 5 = 0$.

490. Найти проекцию точки $(2, 3, 1)$ на прямую

$$\begin{cases} x = t - 7, \\ y = 2t - 2, \\ z = 3t - 2. \end{cases}$$

491. Найти уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $x + 2y - z = 0$.

492. Найти отражение точки $(-1, 2, 0)$ в плоскости $x + 2y - z + 1 = 0$.

493. Определить λ так, чтобы прямые $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ пересекались.

494. Найти прямые, перпендикулярные прямой

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0, \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

и лежащие в плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

495. Через точку пересечения плоскости $x+y+z=2$ и прямой

$$\begin{cases} 2y = x, \\ z = -1 \end{cases}$$

провести прямую, лежащую в данной плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

496. Найти уравнения и длину перпендикуляра, опущенного из точки $(0, -1, 1)$ на прямую

$$\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

497. Дана прямая $x = 2y = 3z$ и точка $(0, 0, 1)$. Из этой точки опущен перпендикуляр на данную прямую, и сама данная прямая и перпендикуляр, опущенный на нее, спроектированы на плоскость xOz . Найти угол между проекциями.

498. Найти точку, симметричную точке (x_0, y_0, z_0) относительно прямой $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

499. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через перпендикуляр, опущенный из точки $(1, -1, 0)$ на прямую

$$\begin{cases} x = z + 3, \\ y = -2z - 3. \end{cases}$$

500. Найти уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\begin{cases} x + 4z + 1 = 0, \\ x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

501. Прямые

$$x = y = z \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

и общий перпендикуляр к ним спроектированы на плоскость xOy . Определить углы между проекциями.

502. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

503. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0, \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 5y + 4z - 3 = 0, \\ x + 2y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

504. Найти плоскость, в которой лежат прямые

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 3t + 2, \\ z = 2t - 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = 3t - 1, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$$

505. Доказать, что расстояние от точки $M(x, y, z)$ до прямой, проходящей через точку $A(a, b, c)$, можно выразить формулой $d = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|}$, где $\mathbf{r} = \overrightarrow{AM}$, а $\mathbf{P}$ — любой вектор, направленный по прямой.

506. Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что расстояние d от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до прямой

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$$

можно выразить формулой

$$d^2 = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^2} \left((m(x_1 - a) - l(y_1 - b))^2 + (n(x_1 - a) - l(z_1 - c))^2 + (n(y_1 - b) - m(z_1 - c))^2 \right).$$

507. Найти расстояние от точки $(3, -1, 2)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

508. Доказать, что расстояние между двумя непараллельными прямыми можно выразить формулой

$$d = \frac{(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|},$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — какие-нибудь векторы, расположенные на данных прямых, а $\mathbf{r}_3$ — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой.

509. Доказать, что длину d общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$$

можно представить формулой

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a & b_1 - b & c_1 - c \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(lm_1 - l_1m)^2 + (mn_1 - m_1n)^2 + (ln_1 - l_1n)^2}}.$$

510. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x + 2y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

511. Найти расстояние между прямыми $x = y = z$ и

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$$

512. Доказать, что расстояние h между параллельными прямыми можно выразить формулой

$$h = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|},$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий из точки на одной прямой в точку на другой прямой, а $\mathbf{P}$ — вектор, параллельный данным прямым.

513. Доказать, что расстояние между прямыми

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{l} = \frac{y-b_1}{m} = \frac{z-c_1}{n}$$

можно выразить формулой

$$h^2 = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^2} \left((m(a_1 - a) - l(b_1 - b))^2 + (n(b_1 - b) - m(c_1 - c))^2 + (l(c_1 - c) - n(a_1 - a))^2 \right).$$

514. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 1, \\ z = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t - 1, \\ z = t + 1. \end{cases}$$

515. Если векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ имеют равную длину и лежат на данных пересекающихся прямых, то векторы $\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2$ параллельны биссектрисам углов между прямыми. Исходя из этого замечания, доказать, что биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad \text{и} \quad \frac{x-a}{l_1} = \frac{y-b}{m_1} = \frac{z-c}{n_1}$$

можно представить уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a + \left(\frac{l}{\Delta} \pm \frac{l_1}{\Delta_1} \right) t, & y &= b + \left(\frac{m}{\Delta} \pm \frac{m_1}{\Delta_1} \right) t, \\ z &= c + \left(\frac{n}{\Delta} \pm \frac{n_1}{\Delta_1} \right) t, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}, \quad \Delta_1 = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}.$$

516. Найти биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{14} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{2}.$$

517. Найти биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-3}{3}.$$

518. Провести биссектрисы углов между прямыми

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{11} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$$

и найти углы, на которые проекции биссектрис на плоскость xOz делят проекции углов на ту же плоскость.

519. Найти прямые, пересекающие прямые

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

и параллельные плоскости $x + y + z = 0$.

520. Найти прямые, пересекающие три прямые:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

521. Доказать, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных граней, пересекаются по прямой.

522. Три взаимно перпендикулярные прямые неподвижно связаны с твердым телом. Сначала они были направлены по осям Ox , Oy , Oz , а затем расположились по осям Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 . Косинусы углов между осями даются таблицей справа.

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

Доказать, что такое перемещение тела могло быть достигнуто вращением около прямой, и найти эту прямую.

523. Координаты x , y , z переходят в координаты x_1 , y_1 , z_1 по формулам: $9x_1 = 4x + 7y - 4z$, $9y_1 = x + 4y + 8z$, $9z_1 = 8x - 4y + z$. Затем по таким же формулам координаты x_1 , y_1 , z_1 переходят в координаты x_2 , y_2 , z_2 и т. д. Доказать, что $x_4 = x$, $y_4 = y$, $z_4 = z$.

524. Координаты x , y , z переходят в координаты x_1 , y_1 , z_1 по формулам:

$$9x_1 = (5 \cos \varphi + 4)x + (-4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi + 4)y + (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)z,$$

$$9y_1 = (-4 \cos \varphi - 3 \sin \varphi + 4)x + (5 \cos \varphi + 4)y + (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)z,$$

$$9z_1 = (-2 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 2)x + (-2 \cos \varphi - 6 \sin \varphi + 2)y + (8 \cos \varphi + 1)z.$$

Затем по таким же формулам координаты x_1, y_1, z_1 переходят в координаты x_2, y_2, z_2 и т. д. Доказать, что координаты x_n, y_n, z_n выражаются через x, y, z такими же формулами, как и x_1, y_1, z_1 , только угол φ заменяется на $n\varphi$.

§ 2.4

ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

525. Найти геометрическое место точек, удаленных от прямой $x = y = z$ на расстояние, равное $1/\sqrt{3}$.

526. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от осей Ox и Oy .

527. Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от оси Ox и от прямой $y = z = 2$.

528. Найти уравнение геометрического места прямых, образующих с плоскостью xOy угол 45° и проходящих через точку $(1, 0, 0)$.

529. Прямая скользит по прямым

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

оставаясь параллельной плоскости $x + y + z = 0$. Найти поверхность, образованную движением этой прямой.

530. Найти уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым

$$\begin{cases} x = 3 - z, \\ y = 2 - 2z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -z, \\ y = 3z - 3, \end{cases}$$

оставаясь параллельной плоскости $2x - 3y + z + 12 = 0$.

531. Прямая скользит по трем прямым:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Найти уравнение образующей поверхности.

532. Найти поверхность, получающуюся при скольжении прямой по трем данным прямым:

$$\begin{cases} x = -2z - 2, \\ y = -z, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z + 1, \\ y = 2, \end{cases} \quad x = y = z.$$

533. Найти геометрическое место прямых, проходящих через ось Ox и параллельных прямой

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = z. \end{cases}$$

534. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $2x = -2y = z$, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 4y^2 - 2z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0. \end{cases}$$

535. Найти геометрическое место перпендикуляров, опущенных из точки $(0, 0, 1)$ на образующие конической поверхности

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

536. Найти уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x = y = z$, а направляющая — окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

537. Прямая, параллельная плоскости xOy , скользит по оси Oz и по кривой

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha z, \\ y = r \sin \alpha z. \end{cases}$$

Найти уравнение получающейся поверхности.

538. Прямая, параллельная плоскости $x + y + z = 0$, скользит по оси Oz и по окружности $x = b$, $y^2 + z^2 = a^2$. Найти получающуюся поверхность.

539. Найти поверхность, образуемую движением прямой, пересекающей окружность

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

и прямые

$$x - 1 = y = z, \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + 1 = 0. \end{cases}$$

540. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой в начале координат, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = x. \end{cases}$$

541. Доказать, что уравнение конической поверхности вращения, у которой оси Ox , Oy , Oz — образующие, имеет вид $xy + xz + yz = 0$.

542. Найти коническую поверхность, вершина которой в точке $(1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

543. Круглый диск параллелен плоскости yOz . Его центр — в точке $(1, 0, 2)$, а радиус равен единице. На оси Oz расположена светящаяся точка так, что тень от диска на плоскости xOy имеет вид параболы. Найти уравнение этой параболы.

544. Лампочка висит под центром круглого абажура, на 10 см ниже его и в 50 см от стены. Радиус абажура 15 см. Найти очертание тени на стене.

545. Диск с центром в $(1, 0, 2)$ и радиусом единица освещен источником света, расположенным на оси Oz так, что тень от диска на плоскости xOy имеет вид равнобочной гиперболы. Найти точку, в которой расположен источник света, если диск параллелен yOz .

546. Тот же вопрос, если тень имеет вид гиперболы с углом между асимптотами, тангенс которого равен $4/3$.

547. Тот же вопрос для случая тени, имеющей вид эллипса, ось которого, расположенная на оси Ox , равна $\frac{8}{3}$.

548. Куб с центром в начале координат вращается около диагонали длиной $2a$, расположенной по оси Oz . Найти уравнение поверхностей, получаемых при вращении ребер куба.

549. Ось вращения круглого цилиндра проходит через точку (a, b, c) и параллельна вектору $P(l, m, n)$. Доказать, что уравнение цилиндра имеет вид

$$(m(x-a) - l(y-b))^2 + (n(x-a) - l(z-c))^2 + (n(y-b) - m(z-c))^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2).$$

550. Доказать, что три линии:

$$\text{парабола} \quad x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 2y + 3 = 0, \quad z = 0,$$

$$\text{гипербола} \quad x = 0, \quad 4y^2 + 4z^2 - 10yz - 2y + 2z + 3 = 0$$

$$\text{и эллипс} \quad y = 0, \quad x^2 + 4z^2 - 6x + 2z + 3 = 0$$

получаются при пересечении координатными плоскостями одной и той же конической поверхности с вершиной в точке $(1, 1, 1)$.

551. Два шара радиуса a касаются друг друга и плоскости xOy . Найти геометрическое место центров шаров, касающихся данных шаров и плоскости xOy , если центры данных шаров — в точках $(\pm a, 0, a)$.

552. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся двух прямых:

$$\begin{cases} x = a + lt, \\ y = b + mt, \\ z = c + nt \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = a + l_1 t, \\ y = b_1 + m_1 t, \\ z = c_1 + n_1 t. \end{cases}$$

553. Найти уравнение цилиндрической поверхности вращения, имеющей образующими прямые

$$x = y = z, \quad \begin{cases} y = x + 1, \\ z = x + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 2, \\ z = x + 1. \end{cases}$$

554. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся прямых

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = -a. \end{cases}$$

§ 2.5

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЦЕНТР И ДИАМЕТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

555. Найти общее уравнение поверхностей второго порядка, пересекаемых плоскостью xOy по кривой $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$.

556. Найти поверхность второго порядка, на которой лежат окружности

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

557. Через начало координат провести прямые асимптотического направления для поверхности $x^2 - 2y^2 - 4xy - 10xz - 4yz - 10 = 0$, параллельные плоскости $3x + y - 4z - 3 = 0$.

558. Показать, что уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2y + 1 = 0$ удовлетворяют только точки прямой

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

559. Показать, что уравнению

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 2y - 2z + 3 = 0$$

удовлетворяют координаты лишь одной точки $(-1, 1, 1)$.

560. Написать уравнение второго порядка, которому удовлетворяют только координаты точки $(2, 1, 1)$.

561. Составить уравнение второго порядка, которому удовлетворяют только координаты точек прямой $2x + 2 = 3y = 2z$.

562. Найти уравнение совокупности плоскостей $x + 2y - z + 1 = 0$ и $x - y + z + 1 = 0$.

563. Найти прямые, по которым поверхность конуса $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ пересекается с плоскостью $x + y + 2z + 5 = 0$.

564. Найти образующие поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, проходящие через точку $(1, 1, 1)$.

565. Найти образующую поверхности $x^2 - y^2 = 2z$, параллельную плоскости $x + y + z = 0$.

566. Найти прямые, параллельные образующим двух поверхностей:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

567. Через точки $(0, -2, 2)$ и $(-1, 0, 0)$ провести плоскости, пересекающие конус $x^2 + y^2 = z^2$ по параболом.

568. Через те же точки провести плоскости, пересекающие тот же конус по эллипсам.

569. Преобразовать уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0$, перенеся начало координат в центр.

570. То же для поверхности

$$2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$$

571. То же для поверхности $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$.

572. Найти геометрическое место центров поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 + \lambda xz + \mu yz - 2x - 2y - 2z = 0$.

573. Из центра поверхности $x^2 + 4y^2 - 40z^2 + 4x - 8y - 16z - 12 = 0$ провести прямые асимптотического направления.

574. Найти уравнение гиперboloида, проходящего через точку $(2, 1, 1)$, зная асимптотический конус этого гиперboloида $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

575. Доказать, что геометрическое место центров поверхностей второго порядка, проходящих через данный эллипс и через две точки, симметричные относительно плоскости этого эллипса, есть поверхность второго порядка.

576. Обозначая через $s_{\lambda\mu}$ левую часть уравнения плоскости, проходящей через точки λ и μ , доказать, что уравнение

$$s_{123}s_{456} + As_{234}s_{561} + Bs_{345}s_{612} + Cs_{124}s_{356} = 0$$

при любом выборе коэффициентов A , B и C изображает поверхность второго порядка, проходящую через шесть данных точек, обозначенных номерами 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Общее уравнение поверхностей второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0.$$

Для более удобного обзора и запоминания ряда пунктов теории поверхностей второго порядка следует применять обозначения и сведения из теории квадратичных форм. Полином в левой части уравнения введением переменной t можно превратить в квадратичную форму четырех переменных $\Phi(x, y, z, t)$ или попросту Φ , где

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gxt + Hyt + Izt + Kt^2.$$

При $t = 1$ эта форма обращается в левую часть уравнения поверхности, которое можно записать в таком виде: $\Phi(x, y, z, 1) = 0$. При $t = 0$ форма Φ обращается в функцию трех переменных — тройничную квадратичную форму, которую обозначим через $f(x, y, z)$ или, еще короче, через f . Таким образом,

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz.$$

Обозначая для симметрии x , y , z и t через x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и вводя другие обозначения для коэффициентов форм, можем написать еще:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_{ij} = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_3x_4 + \\ & + a_{41}x_4x_1 + a_{42}x_4x_2 + a_{43}x_4x_3 + a_{44}x_4^2. \end{aligned}$$

Таким же образом имеем:

$$\begin{aligned} f = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_{ij} = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \\ & + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2. \end{aligned}$$

При этом положено:

$$A = a_{11}, B = a_{22}, \dots, D = 2a_{12} = 2a_{21}, E = 2a_{13} = 2a_{31}, \dots$$

Частные производные функции Φ выражаются формулами:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

При $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$ правые части обращаются в величины

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

называется дискриминантом формы Φ .

Имеет значение тождество, которое можно назвать формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau) = \\ = \Phi(x, y, z, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tau + \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau). \quad (*) \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tau = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} z + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} t.$$

При этом, например,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{\partial \xi}.$$

Из формулы Тейлора следует тождество Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} t = 2\Phi(x, y, z, t).$$

577. Пользуясь формулой Тейлора (см. (*)), доказать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η, ζ) уравнение поверхности $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ переходит в такое:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} x + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} y + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} z + \Phi(\xi, \eta, \zeta, 1) = 0.$$

578. Если определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то можно найти такие ξ , η , и ζ , при которых $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0$. Доказать, что при переносе начала координат в точку (ξ, η, ζ) уравнение поверхности $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ переходит в такое:

$$f(x, y, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \bigg|_{t=1} = 0.$$

Здесь $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \bigg|_{t=1}$ — частная производная, взятая при $t = 1$. Указанный перенос есть преобразование к центру.

579. Если (x, y, z) — середина хорды поверхности $\Phi(x, y, z, 1) = 0$, а $(x + l\sigma, y + m\sigma, z + n\sigma)$ и $(x - l\sigma, y - m\sigma, z - n\sigma)$ — ее концы, то справедливо равенство

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Доказать.

580. Доказать, что середины хорд поверхности $\Phi(x, y, z, 1) = 0$, параллельных вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, лежат на плоскости

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

(Диаметральная плоскость, сопряженная с направлением вектора $\mathbf{P}$.)

581. Доказать, что для поверхности $f(x, y, z) \mp k = 0$ уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$, можно написать в каждом из двух видов:

$$l \frac{\partial f}{\partial x} + m \frac{\partial f}{\partial y} + n \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial f(l, m, n)}{\partial l} x + \frac{\partial f(l, m, n)}{\partial m} y + \frac{\partial f(l, m, n)}{\partial n} z = 0.$$

582. Доказать, что для поверхности $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$, можно написать в таком виде:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l}x + \frac{\partial f}{\partial m}y + \frac{\partial f}{\partial n}z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial l}$, $\frac{\partial f}{\partial m}$ и $\frac{\partial f}{\partial n}$ — частные производные от $f(l, m, n)$, а $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0}$ — значение величины $\frac{\partial \Phi(l, m, n, t)}{\partial t}$ при $t = 0$.

583. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, сопряженную с направлением вектора $\mathbf{P}(1, -1, 0)$.

584. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, параллельную плоскости $x + y + z = 0$.

585. У той же поверхности найти диаметральную плоскость, проходящую через точки $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 0)$.

586. Найти диаметральную плоскость поверхности $x^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$, проходящую через точку $(2, 1, 0)$, а также направление, с ней сопряженное.

587. Найти диаметральную плоскость поверхности $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0$, проходящую через начало координат.

588. Найти уравнения диаметра поверхности $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y + 4z + 3 = 0$, перпендикулярного к плоскости xOz .

589. Плоскость $x = 0$ есть диаметральная плоскость поверхности $xy = z$. Найти хорды, с которыми она сопряжена.

590. Найти диаметральную плоскость, общую поверхностям $x^2 + y + z = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

591. Найти уравнение диаметра поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, соответствующего плоскости $x + y + z - 6 = 0$.

592. Найти геометрическое место центров сечений поверхности $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2z - 1 = 0$ плоскостями, параллельными плоскости $x - y + z = 0$.

593. Зная диаметр

$$\begin{cases} y = z, \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$, найти уравнения плоскостей, ему соответствующих.

§ 2.6

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение касательной плоскости к поверхности второго порядка $\Phi(x, y, z, 1) = 0$ в точке (x_1, y_1, z_1) может быть написано в каждой из двух форм:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{t=1} x_1 + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{t=1} y_1 + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{t=1} z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right|_{t=1} x + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right|_{t=1} y + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right|_{t=1} z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

В первом из них производные взяты от $\Phi(x, y, z, t)$ и в них положено $t = 1$, во втором — от $\Phi(x_1, y_1, z_1, t)$ и в них положено $t = 1$.

Если в тех же уравнениях x_1, y_1, z_1 — координаты некоторой точки, не обязательно лежащей на поверхности, то они изображают некоторую плоскость, называемую полярной плоскостью для точки (x_1, y_1, z_1) .

Касательная прямая получается при пересечении касательной плоскости с любой плоскостью, проходящей через точку касания.

Если $M(x, y, z)$ — точка поверхности, то вектор $\mathbf{N}$, проекции которого на оси координат равны величинам $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{t=1}, \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{t=1}, \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{t=1}$, направлен по нормали к поверхности в точке M .

594. Доказать, что плоскость, касательная к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_1, y_1, z_1) , может быть представлена уравнением

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

595. Доказать, что плоскость, касающаяся гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \sigma.$$

в точке (x_1, y_1, z_1) , имеет, уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = \sigma.$$

596. Доказать, что плоскость, касающаяся в точке (x_1, y_1, z_1) параболоида $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2z$, имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = z + z_1.$$

597. Найти уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и отсекающей на осях отрезки, отношение которых $a : b : c$.

598. Такой же вопрос для гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

599. На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ найти такую точку, чтобы касательная плоскость в ней отсекала на осях координат отрезки равной длины.

600. На касательной плоскости к эллипсоиду предыдущей задачи плоскостями координат образован треугольник с центром тяжести в точке касания. Найти координаты точки касания.

601. Доказать, что при $a^2 + b^2 + c^2 = l^2$ эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вписан в октаэдр $|x| + |y| + |z| = l$.

602. Доказать, что все нормали к поверхности $xy + xz + yz = 0$ образуют одинаковый угол с прямой $x = y = z$.

603. Доказать то же для поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz + 1$.

604. На поверхности $xy + xz + yz = 3$ найти точку, ближайшую к плоскости $x + y + z = 0$.

605. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 6$ найти наиболее высокую и наиболее низкую точки.

606. На гиперболическом параболоиде $xy = z$ найти точки, нормали в которых составляет с Oz угол 45° .

607. На параболоиде $x^2 - y^2 = az$ проводится линия, во всех точках которой нормаль к поверхности составляет с Oz постоянный угол. Доказать, что проекция этой линии на xOy есть окружность с центром в начале координат.

608. Доказать, что плоскость, касающаяся поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$ в точке $M(x_1, y_1, z_1)$, содержит прямую, проведенную из начала координат в точку M .

609. Плоскость, касательная к гиперболоиду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке $(1, 0, 0)$, пересекается с ним по двум прямым. Определить угол между ними.

610. Тот же вопрос для параболоида $x^2 - y^2 = z$ и точки $(0, 0, 0)$.

611. Через прямую
$$\begin{cases} z = c\sqrt{3}, \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{cases}$$

провести плоскость, касательную к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

612. Конусы касаются эллипсоида предыдущей задачи по плоским линиям, плоскости которых параллельны плоскости $x + y + z = 0$. Доказать, что геометрическое место вершин конусов есть прямая

$$\begin{cases} x = a^2 t, \\ y = b^2 t, \\ z = c^2 t. \end{cases}$$

613. Доказать, что условием касания плоскости $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ и поверхности $Ax^2 + By^2 - 2Cz = 0$ является равенство

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} + \frac{2\gamma}{C} = 0.$$

614. Доказать, что плоскость, параллельная плоскости $z = \alpha x + \beta y$ и касающаяся эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ имеет уравнение

$$z = \alpha x + \beta y \pm \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2}.$$

615. Доказать, что условие касания прямой

$$\begin{cases} x = a + lt, \\ y = b + mt, \\ z = c + nt \end{cases}$$

и поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ выражается равенством $(Aal + Bbm + Ccn)^2 = (Al^2 + Bm^2 + Cn^2)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + D)$.

Если при этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} Aal + Bbm + Ccn &= 0, & Al^2 + Bm^2 + Cn^2 &= 0, \\ Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + D &= 0, \end{aligned}$$

то прямая лежит на поверхности.

616. Прямая, параллельная вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается в точке (x_1, y_1, z_1) поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$. Доказать, что $Alx_1 + Bmy_1 + Cnz_1 = 0$.

617. Плоскость, перпендикулярная к вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$. Показать, что ее уравнение имеет вид

$$lx + my + nz = \pm \sqrt{-D \left(\frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} \right)}.$$

618. Плоскость, перпендикулярная к вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$, касается поверхности $Ax^2 + By^2 + z = 0$. Показать, что ее уравнение имеет вид

$$lx + my + nz = \frac{l^2}{4An} + \frac{m^2}{4Bn}.$$

619. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся гранями поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$, есть поверхность шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = -D \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right),$$

предполагая, что правая часть положительна.

620. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся гранями поверхности $Ax^2 + By^2 + z = 0$, есть плоскость $z = \frac{1}{4A} + \frac{1}{4B}$.

621. Эллипсоид с полуосями a , b и c скользит, касаясь трех координатных плоскостей. Доказать, что расстояние его центра от начала координат равно $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

622. Доказать, что геометрическое место вершин прямоугольных трехгранных углов, касающихся ребрами поверхности

есть поверхность $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$,

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = (A + B + C)(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D).$$

623. Прямоугольный трехгранный угол скользит, касаясь ребрами поверхности $Ax^2 + By^2 + 2z = 0$. Доказать, что его вершина движется по поверхности

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)z = \frac{1}{AB}.$$

624. Найти минимальные размеры ящика со стенками, параллельными плоскостям координат, в который может быть вложен эллипсоид

$$(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

625. Шар $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ освещен пучком лучей, параллельных прямой $x = y = z$. Найти форму тени на плоскости xOy .

626. Найти тень от эллипсоида $(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ на плоскости $x + y + z = 0$, если лучи перпендикулярны к этой плоскости.

627. Параболоид $xy = z$ проектируется на плоскость xOy лучами, параллельными прямой $x = y = z$. Найти форму тени.

628. Точки касания плоскостей с поверхностью второго порядка расположены на линии пересечения ее с плоскостью, проходящей через центр. Доказать, что касательные плоскости параллельны одной и той же прямой.

629. Около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, где $a \geq b \geq c$, $a > c$, можно описать цилиндр с круговым поперечным сечением. Найти уравнение цилиндра.

630. Доказать, что при движении точек по некоторой плоскости полярная плоскость точки относительно данной поверхности второго порядка вращается около соответствующей точки.

631. Доказать, что при движении точки по прямой ее полярная плоскость вращается вокруг соответствующей прямой.

632. Найти геометрическое место точек касания касательных прямых, проведенных из данной точки к данной поверхности второго порядка.

633. Найти геометрическое место точек касания касательных к данной поверхности второго порядка, параллельных вектору $P(l, m, n)$.

634. Круг радиуса a скользит, касаясь трех координатных плоскостей. Найти поверхность, по которой движется его центр.

635. Прямоугольный трехгранный угол касается гранями данной окружности радиуса a . Доказать, что его вершина описывает поверхность шара радиуса $a\sqrt{2}$.

§ 2.7 УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение поверхности второго порядка можно написать в таком виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0,$$

или, сокращенно,

$$F(x, y, z) = 0.$$

Здесь члены второй степени относительно координат образуют тройничную квадратичную форму $f(x, y, z)$ или попросту f . Таким образом

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz.$$

Упрощение уравнений второго порядка можно выполнять, исходя из свойств диаметральной плоскости, сопряженной с направлением вектора $P(l, m, n)$, т. е. делящей пополам хорды, параллельные этому вектору. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} l + \frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial z} n \right) = 0$$

или, в полной форме,

$$(Ax + Dy + Ez + G)l + (Dx + By + Fz + H)m + (Ex + Fy + Cz + I)n = 0.$$

То же уравнение можно записать еще и так:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial l} x + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial m} y + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n} z + Gl + Hm + In = 0; \quad f = f(l, m, n),$$

или, в полном виде,

$$(Al + Dm + En)x + (Dl + Bm + Fn)y + \\ + (El + Fm + Cn)z + Gl + Hm + In = 0.$$

Направления вектора и сопряженной диаметральной плоскости можно назвать главными, если плоскость перпендикулярна к вектору. Главная диаметральной плоскость есть плоскость симметрии поверхности. Для вектора главного направления выполняются условия:

$$\begin{cases} Al + Dm + En = \lambda l, \\ Dl + Bm + Fn = \lambda m, \\ El + Fm + Cn = \lambda n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Поэтому λ удовлетворяет характеристическому уравнению квадратичной формы f , имеющему вид

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & D & E \\ D & B - \lambda & F \\ E & F & C - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Найдя какой-нибудь корень этого уравнения, из равенств (2.1) можно найти направление вектора $\mathbf{P}(l, m, n)$. Уравнение (2.2) всегда имеет вещественные корни, если коэффициенты A, B, C, D, E, F вещественны. Если λ_1 и λ_2 — два различных его корня, то соответствующие им главные направления векторов $\mathbf{P}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\mathbf{P}_2(l_2, m_2, n_2)$ взаимно перпендикулярны.

Если корни характеристического уравнения (2.2) различны, то получаются три взаимно перпендикулярных вектора главного направления: $\mathbf{P}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{P}_2(l_2, m_2, n_2)$ и $\mathbf{P}_3(l_3, m_3, n_3)$. Если оси координат направить по этим направлениям, то уравнение поверхности приобретает вид

$$A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + 2G_1x_1 + 2H_1y_1 + I_1z_1 + K_1 = 0. \quad (2.3)$$

При этом, если уравнение было раньше преобразовано переносом начала координат в центр, то уравнение получает еще более простой вид:

$$A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + K_1 = 0.$$

Если центра у кривой нет, то в уравнении (2.3) один или два из коэффициентов A_1, B_1 и C_1 обращаются в нуль, а соответствующий из коэффициентов G_1, H_1, I_1 не равен нулю.

1. $C_1 = 0, A_1 \neq 0, B_1 \neq 0, I_1 \neq 0$. В этом случае можно перенести начало координат в такую точку, что уравнение принимает вид

$$A_1x_2^2 + B_1y_2^2 + I_2z_2 = 0.$$

2. $B_1 = 0, C_1 = 0, H_1 \neq 0, I_1 \neq 0$. Здесь можно, сохраняя прежнее направление оси O_1x_1 , заменить y_1 и z_1 так, чтобы уравнение получило вид

$$A_1x_2^2 + H_2y_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь равные корни. При этом, если все три корня равны, то менять направления осей излишне —

независимо от их выбора, уравнение, после переноса начала в центр, получает вид

$$A(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + K_1 = 0.$$

Если равны два корня: $\lambda_2 = \lambda_3$, а $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то значение λ_1 дает возможность найти одно главное направление и вектор $\mathbf{P}_1(l, m_1, n_1)$ этого направления. Два других в этом случае не вполне определены. Их можно выбрать следующим способом:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_1.$$

Здесь $\mathbf{r}$ — любой вектор, не параллельный $\mathbf{P}_1$.

Заметим, что характеристическое уравнение в раскрытом виде можно написать так:

$$\lambda^3 - p\lambda^2 + q\lambda - r = 0,$$

где коэффициенты p , q и r выражаются равенствами:

$$\begin{aligned} p &= A + B + C, & q &= AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2, \\ r &= AF^2 + BE^2 + CD^2 - ABC - 2DEF. \end{aligned}$$

Выражения p , q , r являются инвариантами уравнения поверхности второго порядка, т. е. их величина не изменяется при замене координат, включая и поворот осей и перенос начала.

636. Найти плоскость симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - x + 4y - z + 2 = 0.$$

637. Найти плоскости симметрии поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 9z - 1 = 0.$$

638. Найти плоскости симметрии поверхности

$$xy + xz + yz = 1.$$

639. В уравнении поверхности второго порядка

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + \\ + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0 \end{aligned}$$

величины определителей

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A & D & E & G \\ D & B & F & H \\ E & F & C & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix},$$

которые можно назвать дискриминантами квадратичных форм

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

и

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gxt + 2Hyt + 2Izt + Kt^2,$$

являются инвариантами, как и величины

$$p = A + B + C, \quad q = AB + AC + BC - D^2 - E^2 - F^2.$$

Пользуясь этим, доказать, что уравнения поверхности с центром, при $\Delta_3 \neq 0$, можно привести к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

640. Доказать, что при $\lambda_3 = 0$, $q \neq 0$ уравнение поверхности можно привести к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 2\sqrt{-\frac{\Delta_4}{q}} \cdot z.$$

641. Доказать, что при $\Delta_4 = 0$ поверхность либо цилиндрическая, либо уравнение изображает точку, прямую или одну, либо пару плоскостей.

Упростить уравнения следующих поверхностей и дать формулы преобразования координат, которыми это упрощение достигается:

$$\mathbf{642.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 1 = 0.$$

$$\mathbf{643.} \quad 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$$

$$\mathbf{644.} \quad 2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy + 4xz + \\ + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0.$$

$$\mathbf{645.} \quad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12xy - 8xz - 4yz + \\ + 14x + 16y - 12z + 33 = 0.$$

$$\mathbf{646.} \quad 3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 12y - 6z = 0.$$

$$\mathbf{647.} \quad 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz - 10x + 4y + 6 = 0.$$

$$648. y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2x + 6y + 2z + 8 = 0.$$

$$649. 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$$

$$650. y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0.$$

$$651. 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0.$$

$$652. 7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz = 0.$$

$$653. 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = 0.$$

$$654. 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 49.$$

$$655. 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz = 0.$$

$$656. x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 21 = 0.$$

657. Составить уравнение геометрического места вершин поверхностей $4y^2 - 2z^2 + x + ay + bz = 0$.

658. Определить λ и μ так, чтобы уравнение

$$x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 = 1$$

изображало цилиндр вращения.

659. Найти условие для a , b и c , при котором уравнение

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$$

представляет поверхность вращения.

660. Найти ось вращения поверхности

$$y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2) + 2\lambda xz - 2x = 0.$$

661. Найти c , при котором конус $x^2 - 2xy + cz^2 = 0$ есть конус вращения, и дать уравнения оси.

662. Доказать, что конус с вершиной в точке $(1, \frac{1}{2}, 0)$ и с направляющей $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$, $z = 1$ есть конус вращения.

663. Исследовать характер поверхности

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2xy - 2xz - 2yz = 2m^2 - 3m + 1$$

при изменении m от $-\infty$ до $+\infty$.

664. При каком соотношении между α и β уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\alpha xz + 2\beta yz - 2x - 4y + 2z = 0$$

представляет коническую поверхность?

665. Найти уравнение геометрического места точек вне куба со стороной a , произведение расстояний от которых до трех сходящихся граней куба равно произведению расстояний до трех других граней куба.

666. Определить вид поверхности, получающейся при движении прямой, параллельной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и скользящей по прямым

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = a; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = -a. \end{cases}$$

667. Векторы $\mathbf{P}(a, b, c)$, $\mathbf{P}_1(a_1, b_1, c_1)$ и $\mathbf{P}_2(a_2, b_2, c_2)$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что поверхность

$$A(ax + by + cz + d)^2 + B(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)^2 + C(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)^2 + D = 0$$

имеет главными направлениями векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$.

668. Поверхность второго порядка проходит через точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$ и имеет плоскости симметрии $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $y - z + 1 = 0$. Найти ее уравнение.

669. Цилиндр второго порядка проходит через точки $(1, 0, -1)$, $(2, 0, 2)$. Его ось дана уравнениями $x = -y = z$, а плоскости симметрии — уравнениями $x + 2y + z = 0$ и $x = z$. Найти его уравнение.

670. $x = 0$ и $y = 0$ — плоскости симметрии поверхности второго порядка. Точки $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ и $(2, 0, 3)$ — на поверхности. Найти ее уравнение.

671. Поверхность вращения второго порядка проходит через точки $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$. Ось вращения — ось Oz . Найти уравнение поверхности.

672. Образующие параболического цилиндра параллельны прямой $2x = 2y = -z$, уравнение плоскости симметрии $x + y + z = 0$, а точки $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ — на поверхности. Найти уравнение цилиндра.

673. $s_1(x, y, z) = 0$, $s_2(x, y, z) = 0$, $s_3(x, y, z) = 0$ — уравнения трех диаметральных плоскостей поверхности. При этом каждая из них сопряжена с линией пересечения двух других плоскостей. Доказать, что уравнение поверхности можно написать в таком виде:

$$As_1^2 + Bs_2^2 + Cs_3^2 + D = 0.$$

674. Три хорды эллипсоида, проходящие через центр, такие, что каждая из них сопряжена с плоскостью, проходящей через две другие, можно назвать тремя взаимно сопряженными осями эллипсоида. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на трех взаимно сопряженных осях эллипсоида, есть величина постоянная.

675. Доказать, что уравнение

$$(ax + by + cz + d)^2 \pm (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = px + qy + rz + s$$

изображает параболоид, у которого $px + qy + rz + s = 0$ — касательная плоскость, а совместные уравнения

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

дают диаметр, проходящий через точку касания.

676. Найти уравнение параболоида, касающегося плоскости $x + y + z = 0$ в начале координат, имеющего диаметрально плоскость $x = y$ и проходящего через точки $(1, 1, 2)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(\frac{9}{2}, 2, 2)$.

§ 2.8

КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ, ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

677. Через прямую $2x = 2y = z$ провести плоскость, пересекающую поверхность $4x^2 - y^2 + z = 0$ по равнобочной гиперболы.

678. Найти вершину параболы, получающейся при сечении цилиндра $y^2 = 2x$ плоскостью $x + y + z = 1$.

679. Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии эллипсов, получаемых при сечении эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ плоскостями, параллельными плоскости $2x + y + z = 0$.

680. Найти уравнения оси параболы, получаемой в сечении поверхности $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ плоскостью $x + y - 2z = 1$.

681. Найти плоскости, в которых лежат оси симметрии пересечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 0$.

682. Найти плоскость, в которой лежат оси симметрии парабол, получаемых при пересечении поверхности $y^2 + 2z^2 = 2x$ плоскостями, перпендикулярными к вектору $P(0, 1, -1)$.

683. Найти плоскость, проходящую через начало координат и через ось вращения поверхности

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 3x + 2y + z = 0.$$

684. Найти уравнения плоскостей, пересекающих эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ по кругам. При этом $a > b > c$.

685. Найти геометрическое место вершин конусов, касающихся по кругам эллипсоида предыдущей задачи.

686. Найти круговые сечения однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

при $a > b$.

687. Найти круговые сечения поверхности

$$2x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz - 2x = 0.$$

688. Найти геометрическое место центров круговых сечений эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y + 4z + 2 = 0.$$

689. Найти общий вид плоскостей, пересекающих по кругам поверхность

$$x^2 + y^2 - \lambda xz - \mu yz - \lambda az - a^2 = 0.$$

690. Найти круговые сечения поверхности

$$x^2 + y^2 + az^2 + bxz + cyz + dx + ey + fz + g = 0.$$

691. При каких λ и μ круговые сечения поверхности $x^2 + y^2 - \lambda xz - \mu yz - \lambda az - a^2 = 0$ перпендикулярны к вектору $P(1, 1, 1)$?

692. Найти уравнение цилиндра, проходящего через круг

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

и точку $(0, 1, 1)$ и имеющего взаимно перпендикулярные плоскости круговых сечений.

693. Каково геометрическое место центров сфер радиуса R , пересекающих эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ по кругам?

694. Найти геометрическое место вершин конусов вращения, проходящих через параболу
$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

695. Доказать, что геометрическое место вершин круговых конусов, проходящих через эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0, \end{cases}$$

есть гипербола

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

Указание. Сфера, касающаяся кругового конуса и некоторой плоскости, имеет точку касания плоскости в фокусе получившегося сечения.

696. Поверхности второго порядка с центром в точке (a, b, c) проходят через круг

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Найти геометрическое место центров круговых сечений, плоскости которых проходят через начало координат.

697. Найти уравнения прямых, по которым поверхность конуса вращения $xy + xz + yz = 0$ пересекается с плоскостью, проходящей через ось и точку $(1, 2, 3)$.

698. На гиперболическом параболоиде $y^2 - z^2 = 2x$ найти место точек, через которые проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

699. Тот же вопрос для поверхности $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$.

700. Найти прямолинейные образующие поверхности $xy + xz + x + y + 1 = 0$.

701. Тот же вопрос для поверхности $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6 = 0$.

702. Найти уравнения прямолинейных образующих поверхности $4y^2 - z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0$, пересекающих ось Ox .

703. Найти величину наибольшего угла между образующими конуса $x^2 + y^2 = (x + y + z)^2$, а также направление его оси.

704. Найти уравнение гиперboloида, у которого прямые

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ y = z, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = z, \\ y + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -z, \\ y = 1 \end{cases}$$

являются образующими одной системы.

705. Найти уравнение параболоида, у которого прямые

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ y - z - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - z + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

— образующие одной системы.

706. Найти общее уравнение параболоидов, проходящих через окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

и имеющих ось, параллельную вектору $P(l, m, n)$.

707. Найти уравнение конуса, на поверхности которого лежат окружности

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 - 2az = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2bx. \end{cases}$$

708. Найти координаты вершины конуса, на поверхности которого лежат окружность

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 2az \end{cases}$$

и параболы

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

709. Найти параболоид, на котором лежат точки $(0, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$ и прямые

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = -2. \end{cases}$$

710. Найти параболический цилиндр, на котором лежат параболы

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = z, \\ 2y^2 = x + z. \end{cases}$$

711. Найти параболоид вращения, проходящий через точку $(1, 1, 2)$ и круг

$$\begin{cases} x = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z. \end{cases}$$

712. Каково геометрическое место центров сфер данного радиуса, пересекающих эллиптический параболоид по окружностям?

713. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением эллипсоида $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 0$.

714. Найти длины осей эллипса, получаемого сечением параболоида $2y^2 + z^2 - 2x = 0$ плоскостью $x = y$.

715. Найти параметр параболы, лежащей на поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0$ и в плоскости $x = z$.

716. Конус имеет вершину в фокусе вытянутого эллипсоида вращения и опирается на плоское сечение того же эллипсоида. Доказать, что этот конус есть конус вращения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 3.1 ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Если числитель и знаменатель рациональной дроби при $x = a$ обращаются в нуль, то дробь можно сократить на $x - a$. Поэтому, например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3}.$$

Пользуясь этим приемом сокращения дробей, найти пределы в следующих примерах:

$$717. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}.$$

$$718. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$719. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}.$$

$$720. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$721. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}; n \text{ — целое.}$$

$$722. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; m \text{ и } n \text{ — целые.}$$

$$723. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$724. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right); a \text{ и } b \text{ — целые.}$$

$$725. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \dots (x^{n-k+1} - 1)}{(x-1)(x^2-1) \dots (x^k-1)}.$$

Следующие задачи сводятся к предыдущему типу введением новой переменной: величину, стоящую под радикалом, обозначают через u^n , где показатель n выбирают так, чтобы корень извлекался:

$$726. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{p/q} - 1}{x^{r/s} - 1}.$$

$$727. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}.$$

$$728. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}.$$

$$729. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}.$$

Если числитель и знаменатель содержат степени переменной, которая стремится к бесконечности, то во многих случаях предел выражения удобно находить, разделив числитель и знаменатель на соответствующую степень переменной. Так, например, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \sqrt{n^3 + 2}}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^4}}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3.$$

Следующие задачи решаются этим приемом либо прямо, либо после предварительного преобразования.

$$730. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2}.$$

$$731. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1}.$$

$$732. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}.$$

$$733. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n}}{4\sqrt{n^2 + n} - n}.$$

$$734. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}.$$

$$735. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}.$$

$$736. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right).$$

$$737. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$738. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^2 \right).$$

Замечание. В последней задаче, а также и в следующих удобно пользоваться формулой для суммы квадратов натуральных чисел:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

легко доказываемой методом математической индукции.

$$739. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

$$740. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \right).$$

$$741. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{n^3}.$$

$$742. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n^3}.$$

Одним из приемов нахождения пределов иррациональных выражений является перевод иррациональности из знаменателя в числитель или из числителя в знаменатель. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1})(\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1})} \times \\ &\times \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x) - (3x-2)}{(4x+1) - (5x-1)} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{2-x} \cdot \frac{3+3}{2+2} = 3. \end{aligned}$$

Подобными приемами решаются следующие задачи:

743. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$
744. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}.$
745. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}.$
746. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$
747. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}.$
748. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt[3]{2+x+x}}.$
749. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}.$
750. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-1).$
751. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}).$
752. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}).$
753. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3}+x).$
754. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x).$
755. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right).$
756. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{\frac{4}{3}} - (x^2-1)^{\frac{2}{3}} \right).$

$$757. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$758. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right).$$

$$759. \lim_{x \rightarrow +\infty} (n\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} \dots (x+a_n) - x).$$

$$760. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}).$$

761. Определить λ и μ из условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu) = 0.$$

762. Определить λ и μ из условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\nu=1}^n \sqrt{a_\nu x^2 + b_\nu x + c_\nu} - \lambda x - \mu \right) = 0, \quad a_\nu > 0.$$

Иногда оказывается возможным путем удачного преобразования выражения свести вычисление его предела к нахождению пределов более простых выражений. Так, например, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+3x^4} - 1) - (\sqrt{1-2x} - 1)}{(\sqrt[3]{1+x} - 1) - (\sqrt{1+x} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{1+3x^4}-1}{x} - \frac{\sqrt{1-2x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} - \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}} = \frac{0 - (-1)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = -6. \end{aligned}$$

Подобными приемами легко решаются следующие примеры:

$$763. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\sqrt{a+x} - n\sqrt{a-x}}{x}, \quad (n \text{ — целое, положительное}).$$

$$764. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x} - \sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x+x} - \sqrt[6]{1+x}}.$$

$$765. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2} - \sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

$$766. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}.$$

Иногда при нахождении пределов формальные преобразования не достигают цели и нужно рассмотрение по существу. Так, например, при изучении выражений, содержащих a^n , при $n \rightarrow +\infty$, надо иметь в виду, что при $0 < a < 1$ величина $a^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, а при $a > 1$ величина a^n безгранично растет. Пользуясь этим, легко решить следующие примеры, в которых $a > 0$:

$$767. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n}.$$

$$768. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}.$$

$$769. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}.$$

$$770. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}.$$

При изучении пределов тригонометрических выражений очень часто удобно пользоваться фундаментальной теоремой, по которой $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1$. Так, например, при нахождении величины $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ полагаем $x = \pi + u$, где $u \rightarrow 0$. После этого без труда находим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(3\pi + 3u)}{\operatorname{tg}(5\pi + 5u)} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin 3u}{\operatorname{tg} 5u} = - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3u}{\frac{3u}{\operatorname{tg} 5u}} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Подобными приемами, а иногда и применением способов, разобранных раньше, решаются следующие примеры:

$$771. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}.$$

$$781. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$772. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$782. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

$$773. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$783. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2 \sin a}{x^2}.$$

$$774. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

$$784. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2 \cos a}{1 - \cos x}.$$

775. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, где m и n — целые числа.

$$785. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

$$776. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x.$$

$$786. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}.$$

$$777. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$787. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

$$778. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$788. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}.$$

$$779. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}.$$

$$789. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$780. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$790. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

$$791. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{\cos \alpha x} - \sqrt[n]{\cos \beta x}}{x^2}.$$

$$792. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$793. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$$

$$794. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Следующий ряд задач содержит пределы выражений, у которых показатель степени бесконечно возрастает, т. е. выражений вида u^v , где $u \rightarrow 1$, а $v \rightarrow \infty$. Все они могут решаться введением новой переменной n , где $u = 1 + \frac{1}{n}$, по такой схеме:

$$u^v = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^v = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}v} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{(u-1)v}$$

Отсюда следует:

$$\lim u^v = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\lim(u-1)v} = e^{\lim(u-1)v}.$$

Здесь предел выражения в показателе находится предыдущими приемами.

$$795. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

$$802. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m.$$

$$796. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}.$$

$$803. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m} + \lambda \sin \frac{x}{m}\right)^m.$$

$$797. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)x^4.$$

$$804. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$798. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$805. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(a + \frac{b}{m})}{\sin a}\right)^m.$$

$$799. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$806. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$800. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$807. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi}{2}\right)^{\operatorname{tg} \frac{n+1}{n-1} \frac{\pi}{2}}.$$

$$801. \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m.$$

$$808. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Следующие примеры, похожие на предыдущие по виду, отличаются по существу, так как в них основание не стремится к единице. Они решаются прямым рассмотрением вопроса.

$$809. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{x^2}.$$

$$810. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$811. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \left(\frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\operatorname{tg} \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{\pi}{2}}; n — целое положительное.$$

Дальнейшие несколько задач содержат логарифмы и показательные функции. При их решении важны два основных предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

$$812. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$816. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x}.$$

$$813. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10}.$$

$$817. \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n} \right).$$

$$814. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$818. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}.$$

$$815. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \cos \frac{\pi}{n}.$$

$$819. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}.$$

$$820. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})}; \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$821. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) n.$$

$$822. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}); a > 0.$$

$$823. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2 \right).$$

$$824. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}; a > 0, b > 0.$$

$$825. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

$$826. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$827. \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^x - a^c}{x - c}; a > 0.$$

$$828. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}; a > 0.$$

$$829. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n; a > 0, b > 0.$$

$$830. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n; \text{ все } a_i > 0.$$

$$831. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^2}.$$

$$832. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{2a+x}{a+x}.$$

§ 3.2 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

833. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots (1 + \lambda) > 1 + \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

где числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ одного знака и больше, чем -1 .

834. Пользуясь неравенством Бернулли, доказать, что при n целом $(1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{1}{n}$, если $n > 1$.

835. Доказать, что $(1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}$, если $n > 1$.

836. Доказать, что $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} < (1 + \frac{1}{n-1})^n$.

837. Величина $(1 + \frac{1}{n})^n$ возрастает, а величина $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ убывает при возрастании целого числа n . Отсюда и из очевидного неравенства $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ вывести, что обе эти величины при $n \rightarrow \infty$ стремятся к общему пределу. Этот предел обозначается через e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

838. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n,$$

предполагая, что предел в правой части существует.

839. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n},$$

предполагая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ существует и что $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а числа v_n положительны.

840. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}},$$

предполагая, что предел в правой части существует и $v_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а $v_n > v_{n-1}$.

841. При m целом положительном доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

842. При том же условии доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

843. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^m + 3^m + 5^m + \dots + (2n-1)^m}{n^m} - \frac{2^m n}{m+1} \right) = 0;$$

m — целое ≥ 0 .

844. Доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 3^m + 5^m + \dots + (2n-1)^m}{n^{m+1}} = \frac{2^m n}{m+1};$$

m — целое ≥ 0 .

845. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$, заметив сначала, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

846. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right)$.

847. Из неравенств $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ следует, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

Исходя отсюда, доказать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon(n).$$

Здесь C — постоянная, называемая постоянной Эйлера, а $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

848. Пользуясь предыдущим результатом, доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

849. Исходя из равенства $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

850. Пользуясь формулой $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{a}{n^2} + \sin \frac{3a}{n^2} + \dots + \sin \frac{(2n-1)a}{n^2} \right) = a.$$

851. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \cdot \dots \cdot \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \rightarrow e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

852. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} + \dots + \cos \frac{(2n+1)\pi}{4n} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

853. Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2},$$

изучив возможности сокращения дроби, стоящей в одной скобке, с соседними с ней дробями.

Доказать следующие равенства:

$$\mathbf{854.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{855.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{856.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}; |x| < 1.$$

$$\mathbf{857.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \quad (\text{Эйлер}).$$

$$\mathbf{858.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \dots \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ корней}} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Вьет}).$$

859. Последовательность значений u_n дается формулами:

$u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ и вообще $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$. Заменяв последнюю двойку под радикалом на 4, убедиться, что u_n ограничено. Доказав, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ существует, найти его из равенства $u_n^2 = 2 + u_{n-1}$.

Замечание. Еще легче находится этот предел из равенства $u_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

860. Последовательность v_n задана равенствами:

$$v_1 = \sqrt{a}, v_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, v_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots; \quad a > 0.$$

Заменяв под последним корнем число a величиной $a + x$, где x — положительный корень уравнения $x^2 = a + x$, убедиться, что v_n ограничено, и доказать, что $v_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

861. Последовательность чисел задается равенствами

$$x_0 = a; \quad x_1 = b; \quad x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}, \dots, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}.$$

Найти выражение x_n через a и b и найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

862. Даны числа a и b , где $a > b > 0$. Затем составляются новые пары чисел по формулам: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$. При этом $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Доказать, что $a_nb_n = ab$, что

$$\frac{a_n - \sqrt{a_nb_n}}{a_n + \sqrt{a_nb_n}} = \left(\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} \right)^{2n}$$

и, наконец, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{ab}$.

863. По двум данным положительным числам a и b можно построить ряд новых чисел с помощью равенств: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$, и вообще, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$ числа a_n и b_n стремятся к общему пределу. (Арифметико-геометрическое среднее Гаусса.)

864. Две последовательности чисел составляются по формулам:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}.$$

При этом $a_0 = a$, $b_0 = b$ — данные положительные числа. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, равный $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, полагая $a = b \cos \varphi$ при $a < b$ и $a = b \operatorname{ch} \varphi$ при $a > b$.

865. Последовательность чисел составляется по формулам: $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$, где $a > 0$ — данное число, а x_0 — произвольное положительное число. Доказать, что $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ при $n \rightarrow \infty$.

866. Числа последовательности составляются по такому закону: x_0 — произвольное положительное число, а дальнейшие находятся по формуле

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a},$$

где a — данное положительное число.

Доказать, что $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ при $n \rightarrow \infty$.

Замечание. Закон составления чисел x_n здесь сложнее, чем предыдущий, но зато числа x_n быстрее приближаются к $\sqrt{a}$, чем раньше, особенно если x_0 взять близким к $\sqrt{a}$.

867. Доказать, что последовательности, составляемые подобно прежним по формуле $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$ или по формуле $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^3 + 2a)}{2x_n^3 + a}$, стремятся к $\sqrt[3]{a}$.

868. Последовательность y_n определяется следующим способом: $y_1 = \frac{x}{2}$, где $0 < x < 1$; $y_2 = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2}$, и вообще $y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}$. Доказать, что y_n — ограниченная монотонная величина, и найти $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

869. $y_1 = \frac{x}{2}$, где $0 < x < 1$; $y_2 = \frac{x}{2} - \frac{y_1^2}{2}$; $\dots$; $y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2}$. Показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ существует и равен $\sqrt{1+x} - 1$.

§ 3.3

ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

870. Из кусков, длина которых равна 1 дм, 2 дм, 1 дм и вес которых равен 2 кг, 3 кг и 1 кг, составлен один сплошной брус AC . Найти вес отрезка AB этого бруса как функцию его длины x , где x считается от точки A — начала куска весом в 2 кг.

871. В каких промежутках можно рассматривать функции y , z , u и v , определяемые равенствами:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2}, & z &= \ln(x^2 - 3x + 2), \\ u &= \ln(x^2 - 1), & v &= \ln(x+1) + \ln(x-1)? \end{aligned}$$

872. В каких промежутках можно рассматривать функции

$$y = \arccos \frac{3}{x}, \quad z = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}?$$

873. В каких промежутках можно рассматривать функции, определенные равенствами:

$$y = \begin{cases} x \ln x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad z = \begin{cases} \frac{1}{2}x \ln x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

874. Функция задана равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1; \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Будет ли $f(x)$ непрерывна во всем сегменте $0 \leq x \leq 2$?

875. При каком a функция y , заданная равенствами

$$y = \begin{cases} x \ln(x^2), & x \neq 0; \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$?

876. Обозначая через $[a]$ целую часть a , определить, при каких значениях x имеет разрыв функция y , определенная равенством

$$y = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

877. При каком значении x функция $e^{\frac{1}{x}}$ имеет разрыв и каков этот разрыв?

878. Какой разрыв и при каком x имеет функция

$$y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

879. При каких значениях x имеют разрыв функции

$$u = \frac{x}{x^2 - 4}, \quad v = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}, \quad w = \frac{1}{x - x^3}?$$

При каких значениях x имеют разрыв следующие функции:

880. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$

882. $\ln \ln(1 + x^2).$

881. $\frac{x}{\sin x}.$

883. $\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^2(x-1)}.$

884. Имеет ли разрыв функция, определенная равенствами

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0? \end{cases}$$

Построить по точкам графики целых функций 2-й степени (параболы):

885. $y = \frac{x^2}{4}.$ **886.** $y = -\frac{x^2}{2}.$ **887.** $y = \frac{x^2 - 3x}{4}.$ **888.** $y = \frac{4x - x^2}{3}.$

889. $y = ax^2$ при $a = 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$

890. $y = ax^2 + x - 1$ при $a = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{20},$ и прямую $x = y + 1.$

891. Воспользовавшись тождеством

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (a \neq 0),$$

построить график функции $y = ax^2 + bx + c.$

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй (параболы высших порядков):

892. $y = \frac{x^3}{10}.$

896. $y = \frac{x^4 + 15x}{30}.$

893. $y = \frac{x^3 - 9x}{10}.$

897. $y = \frac{4x - 5x^3 + x^5}{10}.$

894. $y = \frac{x^4}{10}.$

898. $y = \frac{x^6}{100}.$

895. $y = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}.$

899. $y = \frac{x^7}{100}.$

Построить гиперболы, являющиеся графиками следующих дробных функций:

900. $y = \frac{1}{x}.$

902. $y = \frac{x^2 + 1}{x}.$

901. $y = \frac{x}{x-1}.$

903. $y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}.$

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные оси Ox .

$$904. y = \frac{1}{1+x^2} \text{ (локон Марии Анъези).}$$

$$905. y = \frac{x}{1+x^2} \text{ (серпентин Ньютона).}$$

$$906. y = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}.$$

Построить графики дробных функций, имеющие асимптоты, параллельные осям:

$$907. y = \frac{1}{x^2}.$$

$$910. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$$908. y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$911. y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$$909. y = \frac{x}{3-x^2}.$$

$$912. y = \frac{2}{(3-x^2)(5-x^2)}.$$

Построить графики дробных функций, имеющие вертикальные и наклонные асимптоты:

$$913. y = x + \frac{1}{x^2}.$$

$$914. y = x + \frac{2x}{x^2-1}.$$

Построить графики следующих иррациональных функций:

$$915. y = \pm\sqrt{x-2} \text{ (парабола).}$$

$$916. y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2} \text{ (эллипс).}$$

$$917. y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \text{ (гипербола).}$$

$$918. y = \pm\frac{x\sqrt{x}}{2} \text{ (парабола Нейля).}$$

$$919. y = \pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}} \text{ (циссоида Диоклеса).}$$

$$920. y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$921. y = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$922. y = \pm x^{\frac{3}{4}}.$$

Построить графики следующих трансцендентных функций:

$$923. y = a^x \text{ при } a > 1 \text{ и при } a < 1.$$

$$924. y = e^{-x^2}.$$

$$925. y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$926. y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$927. y = \ln x.$$

$$928. y = A \sin x \text{ при } A = \frac{1}{2}, 1 \text{ и } 2.$$

$$929. y = \sin \frac{x}{a} \text{ при } a = \frac{1}{2}, 1 \text{ и } 2.$$

930. $y = \cos x$.

931. $y = \sin(x + a)$.

932. $y = \frac{\sin x}{x}$.

933. $y = e^{-ax} \sin bx$.

934. $y = \sin x^2$.

935. $y = \operatorname{tg} x$.

936. $y = \frac{1}{\cos x}$.

937. $y = x \sin \frac{1}{x}$.

В высшей математике обратные тригонометрические функции имеют значительно большую важность, чем в элементарной. По определению имеем:

1. если $\sin y = x$, то $y = \arcsin x$;
2. если $\cos y = x$, то $y = \arccos x$;
3. если $\operatorname{tg} y = x$, то $y = \operatorname{arctg} x$;
4. если $\operatorname{ctg} y = x$, то $y = \operatorname{arctg} x$.

Определенные таким образом функции от x многозначны. Чтобы сделать их однозначными, в определение этих функций вводят дополнительные условия. Они состоят в том, что значения $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ берутся в сегменте $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а значения $\arccos x$ и $\operatorname{arctg} x$ берутся в сегменте $[0, \pi]$.

Построить графики функций:

938. $y = \arcsin x$.

939. $y = \arccos x$.

940. $y = \operatorname{arctg} x$.

941. $y = \operatorname{arctg} x$.

942. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

943. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

944. $y = \arcsin(\sin x)$.

945. $y = \arccos(\cos x)$.

946. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Доказать равенства:

$$947. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при } x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$$948. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \text{ где}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = 0, & \text{если } xy < 1; \\ \varepsilon = -1, & \text{если } xy > 1 \text{ и } x < 0; \\ \varepsilon = 1, & \text{если } xy > 1 \text{ и } x > 0. \end{cases}$$

$$949. \arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi,$$

где

$$\begin{cases} \eta = 1, \varepsilon = 0, & \text{если } xy < 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \eta = -1, \varepsilon = -1, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \text{ и } x < 0, y < 0; \\ \eta = -1, \varepsilon = 1, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \text{ и } x > 0, y > 0. \end{cases}$$

$$950. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } -1 < x < \infty; \\ -\frac{3\pi}{4}, & \text{если } -\infty < x < -1. \end{cases}$$

$$951. \arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$952. \arcsin \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x, \text{ если } \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}.$$

$$953. \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

$$954. 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \text{ при } x > 1.$$

$$955. \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{2x-1}{2} \pi) = [x], \text{ т. е. целой части от } x, \text{ если } x \text{ — не целое.}$$

956. Доказать, что сумма

$$\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

при $x^2 < \frac{1}{2}$ не зависит от x .

Если график функции $y = f(x)$ построен, то уравнение $f(x) = 0$ легко решить графически, измерив абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось Ox .

Таким же образом, измеряя абсциссы точек пересечения линий $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, получаем корни уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$. Степень точности такого решения может быть произвольно высока, если вычертить графики в окрестности точек пересечения в соответственно увеличенном масштабе.

957. Решить уравнение $x^3 - 7x + 5 = 0$ построением графика функции $y = \frac{x^3 - 7x + 5}{6}$.

958. Решить уравнение $x^3 + 3x + 2 = 0$, построив график функции $y = \frac{x^3 + 3x + 2}{10}$.

959. Решить уравнение $x^4 - 7x - 5 = 0$, построив графики двух функций: $y = \frac{x^4}{10}$ и $y = \frac{7x+5}{10}$.

960. Решить графически уравнение $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$, построив графики двух функций: $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{5}$ и $y = \frac{3x - 2}{5x^2}$.

961. Решить уравнение $2^x = 4x$, построив графики функций $y = \frac{2^x}{4}$ и $y = x$.

962. Решить графически систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y = 10, \\ x + y^2 = 4. \end{cases}$$

963. Решить уравнение $x = \operatorname{tg} x$ графическим путем.

964. То же для уравнения $e^x = \sin x$.

965. Найти первые два положительных корня уравнения $x \cos x = 1$, построив графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{x}$.

Изучение последовательностей, заданных законом составления

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \quad \dots$$

можно облегчить, изучая графики двух функций: $u = \varphi(x)$ и $v = x$. Для этого проводим вертикаль $x = x_0$ до пересечения в точке A_0 с графиком функции u . Затем через точку A_0 проводим горизонталь до пересечения в точке B_0 с графиком функции v . Отсюда проводим вертикаль до пересечения в точке A_1 с графиком u . Затем снова ведем горизонталь до точки B_1 графика v , и т. д.

Ординаты точек $A_0, A_1, A_2, \dots$ будут равны числам $x_0, x_1, x_2, \dots$. Во многих случаях из чертежа видно, стремятся ли точки x_n к пределу при возрастании n .

966. Последовательность чисел составляется по такому закону:

$$x_1 = \frac{1}{2}e^{-x_0}, \quad x_2 = \frac{1}{2}e^{-x_1}, \quad x_3 = \frac{1}{2}e^{-x_2}, \quad \dots,$$

где x_0 — произвольное вещественное число. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow \xi$, где ξ — единственный корень уравнения $2\xi = e^{-\xi}$.

967. Числа последовательности составляются по следующему закону:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma x_n + \delta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — данные вещественные числа, такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\gamma \neq 0$; $(\alpha + \delta)^2 \geq 4$. Число x_0 выбирается так, что $\gamma x_0 + \delta \neq 0$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

§ 3.4

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Найти производные от функций, указанных в следующих примерах:

968. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$. **974.** $y = \frac{3x-1}{x^5}$.

969. $y = x^4 - 3x^2 + 17$. **975.** $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

970. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$. **976.** $y = \sqrt{x}$.

971. $y = x^3(x^2 - 1)^2$. **977.** $y = \sqrt[3]{x}$.

972. $y = \frac{x-1}{x+1}$. **978.** $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

973. $y = \frac{x}{1-x^2}$. **979.** $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

980. $y = x \sin x$.
 981. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.
 982. $y = x \ln x - x$.
 983. $y = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3$.
 984. $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
 985. $y = \frac{1}{\sin x}$.
 986. $y = \frac{1}{\cos x}$.
 987. $y = \frac{1}{\ln x}$.
 988. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
 989. $y = e^x (\sin x - \cos x)$.
 990. $y = (ax + b)^n$.
 991. $y = \sin^3 x$.
 992. $y = (x^2 - 1)^5$.
 993. $y = \cos^5 x$.
 994. $y = \sqrt{3x - 5}$.
 995. $y = \sin 5x$.
 996. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.
 997. $y = e^{-x}$.
 998. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 999. $y = \ln \sin x$.
 1019. $y = (x + 2a)\sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$.
 1020. $y = \frac{\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)}{x^2}$.
 1021. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x})$.
 1022. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{2 - x^2} - \sqrt{x^2 + 1}$.
 1023. $y = \ln \frac{3 - x^2}{2 - x^2}$.
 1024. $y = \frac{1}{2a} \left(\ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a + x} - \frac{a}{a + x} \right)$.
 1025. $y = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.
 1026. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x$.
 1027. $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
 1028. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$.
 1029. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.
 1030. $y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x + \operatorname{tg} x - x$.
 1000. $y = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
 1001. $y = \ln \operatorname{tg} x$.
 1002. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$.
 1003. $y = e^{-x^2}$.
 1004. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
 1005. $y = \ln(x^3 + x^2)$.
 1006. $y = \sqrt[3]{(2x + 1)^2}$.
 1007. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.
 1008. $y = \cos ax \cdot \sin bx$.
 1009. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
 1010. $y = e^{ax} \cdot \cos bx$.
 1011. $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.
 1012. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
 1013. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.
 1014. $y = \frac{x^4}{4} \left((\ln x)^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right)$.
 1015. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$.
 1016. $y = \ln \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}{x}$.
 1017. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \frac{\cos \pi x}{2 \sin^3 \pi x}$.
 1018. $y = e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$.

$$1031. y = \ln \frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}.$$

$$1032. y = \ln \frac{e^x + 2 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}{e^x + 2 - \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}.$$

$$1033. y = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}.$$

$$1034. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(1 + \sin x) - x.$$

$$1035. y = \ln \frac{a + b \cos nx + \sqrt{b^2 - a^2} \sin nx}{a + b \cos nx}.$$

$$1036. y = (1 - \sqrt{1-x}) \ln x + 2\sqrt{1-x} - 2 \ln(1 + \sqrt{1-x}).$$

$$1037. y = \frac{x^2 \ln x}{a+bx^2} - \frac{1}{b} \ln \sqrt{a+bx^2}.$$

$$1038. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$$

$$1039. y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$1040. y = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$1041. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$1042. y = (\arcsin x)^2.$$

$$1043. y = \arcsin \sin x.$$

$$1044. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$1045. y = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsin \frac{a}{x}.$$

$$1046. y = \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}}.$$

$$1047. y = \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

$$1048. y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}; x \neq 1.$$

$$1049. y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$1050. y = \arccos(3x - 4x^3).$$

$$1051. y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1052. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$1053. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$$

$$1054. y = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tg} x \right).$$

$$1055. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}.$$

$$1056. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$1057. y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right); a > b \geq 0.$$

$$1058. y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{5}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{3} \right).$$

$$1059. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \ln \sqrt{1-x^2}.$$

$$1060. y = \sqrt{ax-x^2} - a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

$$1061. y = \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$1062. y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}.$$

$$1063. y = \frac{3x+2}{4x^2} \sqrt{x-1} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$1064. y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2x^2}.$$

$$1065. y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$

$$1066. y = \arcsin(\sin x - \cos x) + \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}).$$

$$1067. y = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x} + \ln \frac{1+\sqrt{2 \operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{2 \operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x}.$$

$$1068. y = \ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}) + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

$$1069. y = x \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x}) + \ln(x+2\sqrt{x}+x) - \sqrt{x}.$$

$$1070. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

$$1071. y = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \ln \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}}.$$

$$1072. y = (x^2+1)(\operatorname{arctg} x)^2 - 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \ln(1+x^2).$$

$$1073. y = \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

$$1074. y = x^x.$$

$$1075. y = x^{\sin x}.$$

$$1076. y = |x|.$$

$$1077. y = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

1078. Из равенства $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ найти формулу для суммы $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$.

1079. Из равенства

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

найти формулу для $\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx$.

1080. Из равенства

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

получить формулу для суммы

$$\sin x + 3 \sin 3x + \dots + (2n-1) \sin(2n-1)x.$$

1081. Из формулы

$$\begin{aligned} 2^{m-1} \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{m} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{2\pi}{m} \right) \cdots \\ \cdots \sin \left(x + \frac{(m-1)\pi}{m} \right) = \sin mx \end{aligned}$$

вывести формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{m} \right) + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{2\pi}{m} \right) + \dots \\ \dots + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right) = m \operatorname{ctg} mx. \end{aligned}$$

Получить отсюда, что

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{m} \right)} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \left(x + \frac{m-1}{m} \pi \right)} = \frac{m^2}{\sin^2 mx}.$$

1082. Вывести непосредственно из определения производные функций: $\arcsin x$; $\operatorname{arctg} x$ (см. задачи 948 и 949).

1083. Проверить, что если $xy = 1$, то

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = 0.$$

1084. Если $x\sqrt{1-y^4} = y\sqrt{2}$, то

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Доказать.

§ 3.5

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Если $y = f(x)$ — уравнение кривой, а функция $f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$, то кривая имеет касательную в точке с абсциссой x . Если α — угол наклона касательной, т. е. угол от положительного направления оси Ox до касательной, то $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. В силу этого уравнение касательной к кривой имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

а уравнение нормали таково:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Здесь (x, y) — точка касания, а (X, Y) — точка на касательной или нормали. При этом $y' = f'(x)$. Если $M(x, y)$ — точка касания, P — ее проекция на ось Ox , а касательная и нормаль к кривой в точке M пересекают Ox соответственно в точках T и N , то получающиеся отрезки имеют названия: TP — подкасательная, PN — поднормаль, TM — касательная, MN — нормаль. Они выражаются через y и y' , взятые в точке касания, по формулам:

$$TP = \frac{y}{y'}, \quad PN = yy', \quad TM = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

1085. У параболы $y = \frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$. Найти их углы наклона к оси Ox .

1086. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy = a^2$ в точке (a, a) .

1087. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox ?

1088. Тот же вопрос для синусоиды $y = \sin x$.

1089. При каком значении A синусоида $y = A \sin \frac{x}{a}$ пересекает Oy под углом 45° ?

1090. При каком a кривая $y = a^x$ пересекает ось Oy под углом $\frac{\pi}{4}$?

1091. Под каким углом пересекаются с осью Oy кривые

$$y = \sin x\sqrt{3}, \quad y = \frac{x}{1+x^2}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

1092. При каком значении a кривая $y = \frac{ax-x^3}{4}$ пересекает ось Ox под углом 45° ?

1093. Доказать, что у параболы $y = ax^2$ подкасательная равна половине абсциссы.

1094. Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$ поднормаль постоянна, независимо от выбора точки касания.

1095. Доказать, что у кривой $y = a^x$ подкасательная имеет постоянную длину.

1096. Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$ подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания.

1097. Доказать, что у цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ордината есть среднее геометрическое между нормалью и величиной a .

1098. Доказать, что у кривых $y = ax^n$ отношение подкасательной к абсциссе точки касания есть величина постоянная.

1099. Найти уравнение касательной к параболе $y = 3x - x^2$ в точке $(1, 2)$.

1100. Найти касательную к параболе

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3},$$

параллельную прямой $y = x$.

1101. Доказать, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

1102. Доказать, что у астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

длина отрезка касательной между осями есть величина постоянная.

1103. При каком соотношении между коэффициентами параболы $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox ?

1104. Тот же вопрос для параболы 3-го порядка $y = x^3 + px + q$.

1105. При каком значении a кривая $y = a^x$ касается прямой $y = x$? Найти точку касания.

1106. Последовательность чисел составляется по такому закону:

$$x_1 = a, \quad x_2 = a^a, \quad x_3 = a^{a^a}, \dots$$

и вообще $x_n = a^{x_{n-1}}$. Доказать, рассматривая линии $y = a^x$ и $y = x$, что при $e^{-e} < a < e^{1/e}$ величина x_n стремится к определенному пределу, когда $n \rightarrow \infty$.

Если кривая задана в параметрическом виде уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t — параметр, то производную от y по x удобнее всего находить с помощью дифференциалов: $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$, отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ или $y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

1107. Эллипс задан уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Найти угол касательной к нему с осью Ox .

1108. Астроида задана уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Найти угол касательной к ней с осью Ox в точке, где $t = \frac{3\pi}{4}$.

1109. Циклоида задана уравнениями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Найти угол наклона касательной к ней.

1110. Циклоида образована качением круга по прямой. Доказать, что нормаль к циклоиде проходит через точку касания круга и прямой.

1111. Найти касательную к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4, \\ y = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$$

в точке $(2, 1)$.

1112. На кривой

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1, \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$$

найти точки, касательные в которых параллельны оси Oy .

1113. Найти наклон касательной к кривой

$$\begin{cases} x = t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2, \\ y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2, \end{cases}$$

если $(0, 0)$ — точка касания.

§ 3.6

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная от первой производной, т. е. $(y')'$ или $(f'(x))'$, называется второй производной и обозначается через y'' или $f''(x)$.

Производная от второй производной называется третьей производной и т. д. Во избежание смешения с показателем степени показателя производной обозначают числом, поставленным в скобки. Иногда применяют также римские цифры. Если в данной точке кривой $y = f(x)$ величина $y'' > 0$, то кривая обращена выпуклостью вниз, т. е. в сторону отрицательного направления оси Oy . Если же $y'' < 0$, то кривая в окрестности данной точки обращена выпуклостью вверх. Если при переходе через данное значение x величина y'' меняет знак, то точка на кривой при этом x есть точка перегиба.

1114. Показать, что кривая $y = \ln x$ выпукла вверх.

1115. Показать, что кривая $y = a^x$ выпукла вниз.

1116. Показать, что синусоида $y = \sin x$ выпукла вверх, если $y > 0$, и вниз, если $y < 0$.

1117. Показать, что тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ выпукла вниз там, где $y > 0$, и вверх там, где $y < 0$.

1118. Исследовать направление выпуклости кривой $y = ax^3 + bx$ при $a > 0$.

1119. Найти точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

1120. Тот же вопрос для кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Производные высших порядков обыкновенно находятся последовательным дифференцированием. Иногда при этом обнаруживается закономерность, позволяющая написать производную высшего порядка, не находя предыдущих. К числу таких случаев относится формула Лейбница для производной порядка n от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)} v.$$

Здесь $C_n^1, C_n^2, \dots$ — биномиальные коэффициенты.

В следующих примерах найти производные указанного порядка:

1121. $y = x^5$. Найти $y^{(5)}$.

1122. $y = x^6$. Найти $y^{(7)}$.

1123. $y = (3x + 5)^2(2x^2 + 3)(x + 7)^2$. Найти $y^{(6)}$.

1124. $y = \sqrt[5]{x^3}$. Найти y''' .

1125. $y = x^5 \ln x$. Найти y''' .

1126. $y = a^{3x}$. Найти y''' .

1127. $y = \frac{a}{x^m}$. Найти y^{IV} .

1128. $y = \frac{x^3}{x-1}$. Найти y''' .

1129. $y = x^2 e^{2x}$. Найти y^{IV} .

1130. $y = x^2 \cos 3x$. Найти y^{IV} .

1131. $y = x^2 e^{2x}$. Найти $y^{(50)}$.

1132. $y = x^2 \sin x$. Найти $y^{(40)}$.

1133. $y = e^x \sin x$. Найти y^{IV} .

1134. $y = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$. Найти y''' .

1135. $y = x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Найти y^{IV} .

1136. Полагая $y = e^x \sin x$, $z = e^x \cos x$, доказать равенства $y'' = 2z$, $z'' = -2y$.

1137. Доказать, что функция $y = Ce^{-x} + C_1 e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$.

1138. Полагая y равным одной из функций: $\sin(m \arcsin x)$, $\cos(m \arcsin x)$, $\sin(m \arccos x)$, $\cos(m \arccos x)$, доказать, что $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

1139. Доказать, что функция $y = e^{-x} \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{IV} + 4y = 0$.

В следующих задачах найти общее выражение для величины $y^{(n)}$ при любом n :

1140. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

1144. $y = \sqrt{x}$.

1149. $y = \ln(ax+b)$.

1141. $y = \frac{x}{a+bx}$.

1145. $y = \sin^2 x$.

1150. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

1142. $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

1146. $y = x^3 e^{mx}$.

1151. $y = \sin^3 ax$.

1143. $y = \frac{1}{x(x+1)}$.

1147. $y = x^2 \sin ax$.

1152. $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

1148. $y = x^3 \ln x$.

Доказать равенства:

1153. $(e^{ax} \sin(bx+c))^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + n\varphi + c)$, где

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1154. $\left(\frac{x^4+1}{x^3-x}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} n! \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right); n > 1$.

1155. $(\sin^4 x + \cos^4 x)^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

1156. Полагая $y = \cos(m \ln x)$, доказать, что

$$x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)x y^{(n+1)} + (n^2 + m^2) y^{(n)} = 0.$$

1157. Полагая $y = \operatorname{arctg} x$, доказать, что

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right).$$

1158. Полагая $y = x^m \ln x$, доказать, что

$$y^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n} \times \\ \times \left(\ln x + \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \dots + \frac{1}{m-n+1} \right),$$

при $n \leq m$. Если $n = m+1$, то

$$(x^m \ln x)^{(m+1)} = \frac{m!}{x}.$$

1159. Доказать, что производная $y^{(n)}$ сложной функции $y = f(u)$, где $u = x^2$, выражается формулой

$$y^{(n)} = 2^n x^n f^{(n)} + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} f^{(n-1)} + \\ + 2^{n-4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} f^{(n-2)} + \dots$$

1160. Производная порядка n от e^{-x^2} имеет вид $e^{-x^2} H_n(x)$, где $H_n(x)$ — полином, называемый полиномом Чебышева–Эрмита. Доказать справедливость равенств:

$$\text{а) } H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

$$\text{б) } H_n(x) - H'_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}(x) = 0.$$

$$\text{в) } H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

1161. Доказать для полиномов Чебышева–Эрмита формулу

$$H_n = (-1)^n \left((2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - \dots \right).$$

1162. Полиномы Лагерра $L_n(x)$ определяются формулой

$$(x^n e^{-x})^{(n)} = e^{-x} L_n(x).$$

Доказать равенства:

$$\begin{aligned} xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) &= 0, \\ L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) &= 0, \\ L_n(x) &= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2}x^{n-2} - \dots \right). \end{aligned}$$

1163. Полиномы Лежандра определяются равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

Доказать равенства:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) &= 0, \\ (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

1164. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ определяются равенством

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right) \end{aligned}$$

(полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля). Доказать равенство

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) \frac{d^{m+2}T_n(x)}{dx^{m+2}} + (2m+1)x \frac{d^{m+1}T_n(x)}{dx^{m+1}} + \\ + (m^2 - n^2) \frac{d^m T_n(x)}{dx^m} = 0. \end{aligned}$$

1165. Производная порядка n от $\arcsin x$ имеет вид

$$P_n(x)(1-x^2)^{\frac{1-2n}{2}},$$

где $p_n(x)$ — полином. Доказать равенство

$$(1-x^2)p_n''(x) + (2n-3)xp_n'(x) - (n-1)^2p_n(x) = 0.$$

1166. Для полиномов предыдущей задачи доказать равенства:

$$p_{2m+1}(x) = A \left(1 + \sum_{\nu=1}^m \frac{m^2(m-1)^2 \dots (m-\nu+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2\nu)} (2x)^{2\nu} \right),$$

$$p_{2m}(x) = Ax \left(1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(m-1)^2(m-2)^2 \dots (m-\nu)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} (2x)^{2\nu} \right).$$

Здесь $A = (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1))^2$.

1167. Справедливо равенство

$$\frac{d^n e^{1/x}}{dx^n} = \frac{(-1)^n p_n(x)}{x^{2n}} e^{1/x},$$

где $p_n(x)$ — полином. Доказать равенства:

а) $x^2 p_n'' - ((2n-2)x+1)p_n' + n(n-1)p_n = 0$,

б) $p_n = 1 + \frac{n}{1}(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-1)(n-2)x^2 +$
 $+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-1)(n-2)(n-3)x^3 + \dots$

1168. Доказать равенство $\frac{d^n (x^{n-1} e^{1/x})}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}$.

Указание. Обозначая левую часть через u_n , доказать равенство $u_n = (n-1)u_{n-1} - u_{n-2}$ и применить полную индукцию.

1169. В равенстве $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{p_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ числитель $p_n(x)$ — полином степени n . Доказать равенства:

а) $p_{n+1} + (2n+2)xp_n + n(n+1)(1+x^2)p_{n-1} = 0$,

б) $\frac{dp_n}{dx} + n(n+1)p_{n-1} = 0$,

в) $(1+x^2)p_n'' - 2nxp_n' + n(n+1)p_n = 0$.

1170. Для предыдущих полиномов доказать формулы:

$$p_{2m} = (-1)^m (2m)! \left(\frac{(1+xi)^{2m+1} + (1-xi)^{2m+1}}{2} \right),$$

$$p_{2m-1} = (-1)^m (2m-1)! \left(\frac{(1+xi)^{2m} - (1-xi)^{2m}}{2i} \right).$$

При параметрическом задании связи между переменными $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ производные y'_x , y''_x , y'''_x , ... следует находить, основываясь на инвариантности первого дифференциала: $y'_x = \frac{dy}{dx}$, $y''_x = \frac{dy'_x}{dx}$, $y'''_x = \frac{dy''_x}{dx}$.

В следующих примерах найти производные указанного порядка.

$$1171. \begin{cases} x = e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ y = e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{cases} \quad \text{Найти } y_x''.$$

$$1172. \begin{cases} x = a \left(\cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t. \end{cases} \quad \text{Найти } y_x'''.$$

$$1173. \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases} \quad \text{Найти } y_x'''.$$

$$1174. \begin{cases} x = \frac{a \cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \frac{a \sin t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1175. \begin{cases} x = a \cos \varphi \sqrt[n]{\cos n \varphi}, \\ y = a \sin \varphi \sqrt[n]{\cos n \varphi}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1176. \begin{cases} x = a(1 + \cos t) \cos t, \\ y = a(1 - \cos t) \sin t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1177. \begin{cases} x = \frac{a \cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{a \sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1178. \begin{cases} x = a \cos^5 t, \\ y = a \sin^5 t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1179. \begin{cases} x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}, \\ y = a(2 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1180. \begin{cases} x = (2n + 1) \cos t - \cos(2n + 1)t, \\ y = (2n + 1) \sin t - \sin(2n + 1)t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1181. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

$$1182. \begin{cases} x = a \sin t(2 - \sin^2 t), \\ y = b \sin^2 t \cdot \cos t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1183. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a \cos t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

$$1184. \begin{cases} x = a \cos t + (at + b) \sin t, \\ y = a \sin t - (at + b) \cos t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1185. \begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1186. \begin{cases} x = a(e^t(\sin t + \cos t) - 1), \\ y = a(e^t(\sin t - \cos t) + 1). \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1187. \begin{cases} x = a \frac{e^{t/2}}{\sqrt{\cos t - \sin t}}, \\ y = at - a \ln \sqrt{\cos t - \sin t}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1188. \begin{cases} x = 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t, \\ y = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1189. \begin{cases} x = a \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right), \\ y = \frac{a}{\cos^3 t}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1190. \begin{cases} x = a \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right), \\ y = \frac{a}{\cos^3 t}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

$$1191. \begin{cases} x = \frac{t+t^3}{1+t^4}, \\ y = \frac{t-t^3}{1+t^4}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$1192. \begin{cases} x = \frac{a}{1+t^2}, \\ y = bt - \frac{bt}{2(1+t^2)}. \end{cases} \quad \text{Найти } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

1193. Доказать, что при $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ имеет место равенство $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$.

1194. Доказать, что при $a + b(x + y) + cxy = m(x - y)$ имеет место равенство

$$\frac{dx}{a + 2bx + cx^2} = \frac{dy}{a + 2by + cy^2}.$$

1195. Проверить, что если $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, то

$$\frac{dy}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

1196. Проверить, что если $A(a - cxy) = b + c(x + y)$, то

$$\frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{dy}{a + by + cy^2} = 0.$$

1197. Проверить, что если x и y связаны уравнением

$$x\sqrt{a + by + cy^2} + y\sqrt{a + bx + cx^2} = A(x - y),$$

то

$$\frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{dy}{y\sqrt{a + by + cy^2}}.$$

1198. Если $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы, такие, что

$$\sqrt{1 - P^2(x)} = Q(x)\sqrt{1 - x^2},$$

то $\frac{dP(x)}{\sqrt{1 - P^2(x)}} = n \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, причем n — целое число. Доказать.

Указание. $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые полиномы с одинаковыми коэффициентами при старших членах.

§ 3.7

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Следующие примеры показывают, что понятия предела и непрерывности для функций нескольких переменных несколько сложнее, чем для функций одной переменной.

1199. Показать, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

1200. Показать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4},$$

а величина

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}$$

все же смысла не имеет.

1201. Показать, что если $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$ так, что отношение $\frac{y}{x}$ имеет любое данное постоянное значение, то $\frac{1}{1+(x^2-y)} \rightarrow 0$. В то же время эта величина может не стремиться ни к какому пределу, если отношение $\frac{y}{x}$ не постоянное.

1202. Показать, что $f(x)$, определенная равенством

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m n! 2\pi x,$$

равна единице, если x — рациональное число, и нулю, если x — иррациональное число; m и n — натуральные числа.

1203. Показать, что в любой окрестности точки $(0,0)$ функция $f(x,y)$, определенная равенствами

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0,$$

принимает всякое значение в интервале $(-1, 1)$. При этом под окрестностью точки $(0,0)$ подразумевается любая область (круг, прямоугольник и т. п.), содержащая точку $(0,0)$ внутри.

1204. Функция определена равенствами:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0, \quad f(0,0) = 0.$$

Показать, что эта функция непрерывна относительно каждой из переменных x и y в отдельности, не будучи в окрестности точки $(0,0)$ непрерывной функцией обеих переменных при их совместном изменении.

1205. Показать, что функция, определенная при $x^2 + y^2$ равенством $f(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$, принимает каждое положительное значение в любой области, внутри которой содержится точка $(0,0)$.

В следующих примерах найти частные производные от указанных функций:

1206. $u = x^3 + y^3 - 3xy$.

1207. $u = 2x^3 - 3x^2y^2 + 3y^3$.

1208. $u = xy + xz + yz$.

1209. $u = x^y$.

$$1210. u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z.$$

$$1211. u = e^{xy}.$$

$$1212. u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$1213. u = xy - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}.$$

$$1214. u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz.$$

$$1215. u = (xy)^z.$$

$$1216. u = z^{xy}.$$

Найти полные дифференциалы от функций:

$$1217. u = \sin(x^2 + y^2).$$

$$1218. u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$1219. u = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

$$1220. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$1221. u = \ln(x + y + z).$$

$$1222. u = x^y.$$

Если при увеличении всех переменных в t раз функция умножается на t^n , то она называется однородной функцией измерения n . Так, например, если

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),$$

то $f(x, y, z)$ — однородная функция измерения n . По теореме Эйлера, если $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — однородная функция степени n , то имеет место равенство

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = n f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Проверить на следующих примерах теорему Эйлера непосредственным вычислением производных:

$$1223. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ln \frac{x}{y}.$$

$$1224. u = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{z}}.$$

$$1225. u = \sin \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$1226. u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

$$1227. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$1228. u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

1229. Найти производную функции $f = 4x^3 - 2xy + 3y^3$ в точке $(1, 2)$ по направлению $\frac{\pi}{3}$ к оси Ox .

1230. Найти производную функции $f = 5x + 10x^2y + y^5$ в точке $(1, 2)$ по направлению, идущему к точке $(5, -1)$.

1231. Найти производную функции $f = x^2 + y^2$ в точке $(1, 2)$ по направлению прямой $3x + 4y = 11$: а) в сторону возрастающих x -ов; б) в сторону убывающих x -ов.

1232. Написать выражение производной функции $f(x, y)$:

а) по направлению касательной к кривой $\varphi(x, y) = C$;

б) по направлению нормали к кривой $\varphi(x, y) = C$.

1233. Найти производную функции $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ в точке $(3, 3, 1)$ по направлению вектора $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1234. Найти производную функции $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ по направлению внешней нормали к поверхности $F = \text{const}$.

Найти частные производные в следующих примерах:

1235. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

1236. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $u = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$.

1237. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $u = x \sin(x + y) + y \cos(x + y)$.

1238. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = x^y$.

1239. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \ln(x + y)$.

1240. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$.

1241. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1242. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$.

Найти дифференциалы в следующих примерах:

1243. $d^2 u$, если $u = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7$.

1244. $d^2 u$, если $u = x^2 y^2$.

1245. $d^2 u$, если $u = e^{xy}$.

1246. $d^2 u$, если $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

1247. $d^2 u$, если $u = \sin(x + y + z)$.

1248. $d^4 u$, если $u = x^4 + 4x^3 y + 2xy^2 z - 3xyz^2 + z^4$.

1249. $d^4 u$, если $u = x^4 - 3x^2 y^2 + y^4 + 5xyz - x^3 - y^3 + x^2 - xy + y^2 + 2x - 5y$.

1250. $d^4 u$, если $u = x^4 + 3x^3 y + z^4 - x^2 y + z^3$.

1251. $d^3 u$, если $u = xyz$.

1252. $d^4 u$, если $u = \ln(2x + 3y - z)$.

Найти частные производные, вычислив сначала полные дифференциалы нужного порядка.

1253. $u = \sin(2x + y); \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$.

1254. $u = \cos(x + y); \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.

1255. $u = \ln(ax + by + cz); \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.

1256. $u = e^{x+2y+3z}; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Найти полные дифференциалы первых двух порядков для сложных функций в следующих примерах:

1257. $u = \varphi(t); t = xy$.

1258. $u = \varphi(t); t = x^2 + y^2$.

1259. $u = \varphi(t); t = x^2 + y^2 + z^2$.

1260. $u = \varphi(\xi, \eta); \xi = ax + by + cz, \eta = a_1x + b_1y + c_1z$.

1261. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta); \xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$.

Найти производные первых двух порядков от функций:

1262. $u = \varphi(\xi, \eta); \xi = x + y, \eta = x - y$.

1263. $u = \varphi(\xi, \eta); \xi = x^2 + y^2, \eta = xy$.

1264. Найти производные порядка n от $u = \varphi(t)$, где $t = ax + by + cz$.

1265. Найти $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, если $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

1266. Показать, что если $x^2 = \eta\xi$, $y^2 = \zeta\xi$, $z^2 = \xi\eta$, то $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

1267. Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, найти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

1268. Полагая $x = \rho \sin \varphi \cos \psi$, $y = \rho \sin \varphi \sin \psi$, $z = \rho \cos \varphi$, вычислить величину функционального определителя (якобиана)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}.$$

1269. Положив $r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi$, найти $\frac{D(\rho, \varphi, \psi)}{D(\rho, r, \psi)}$.

1270. Полагая $x = \xi\eta\zeta$, $y = \xi\eta - \xi\eta\zeta$, $z = \eta - \xi\eta$, найти якобиан $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$.

1271. Доказать, что при $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi \cos \theta$, $z = \sin \varphi \sin \theta \cos \psi$ якобиан равен $-\sin^3 \varphi \sin^2 \theta \sin \psi$.

1272. Доказать, что при

$$u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-r^2}}, \quad u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{1-r^2}}, \quad u_3 = \frac{x_3}{\sqrt{1-r^2}},$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; справедливо равенство

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = (1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

1273. Доказать, что

$$\frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{D\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}, \frac{\partial v}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Здесь $v = v(x^1, x^2, \dots, x_n; y^1, y_2, \dots, y_n)$ — функция с непрерывными вторыми производными.

1274. Доказать, что для однородных функций $\varphi(x, y, z)$ измерения n справедливо равенство

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^m \varphi = n(n-1) \dots (n-m+1) \varphi.$$

1275. Проверить, что $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}$.

1276. Проверить, что $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$.

Вычислить выражения:

1277. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \varphi(x+y)$.

1278. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1279. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$, если $u = \varphi(xy)$.

1280. Функция, называемая потенциалом шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, определяется равенствами:

$$u = \begin{cases} 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2), & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 < a^2; \\ \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \geq a^2. \end{cases}$$

Проверить, что u и ее первые производные непрерывны при любых x , y и z и что лапласиан

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad -4\pi,$$

смотря по тому, лежит ли точка $M(x, y, z)$ вне шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ или внутри его.

1281. Проверить равенство

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = 0, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Проверить следующие равенства:

1282. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$; $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

1283. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$; $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

1284. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$; $u = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1285. $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u$; $u = e^{-\alpha x} \varphi(x - y)$.

1287. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\varphi''$; $u = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x)$.

1288. $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$; $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

1289. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$; $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$.

1290. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$.

1291. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u = \ln(x^2 + y^2)$.

1292. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1293. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u$; $u = \frac{1}{r}(Ae^{-ar} + Be^{ar})$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1294. $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x \partial y} = 2z$; $z = \frac{\varphi'(x)\psi'(x)}{(\varphi(x) + \psi(y))^2}$.

1295. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

1296. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = n^2 u$, где $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$1297. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$$

где $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$1298. \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u = f(x + \varphi(y)).$$

$$1299. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ если } u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

$$1300. \quad a^2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) = b^2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right),$$

где $u = \varphi(ay + bx)\psi(bx - ay)$.

Замечание. В задачах от 1283 до 1300 содержатся неопределенные функции $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\psi(x + at)$ и т. д. Эти функции могут выбираться произвольно из числа функций, имеющих нужные в данной задаче производные. Сами же эти задачи содержат решения уравнений в частных производных, встречающихся в вопросах математической физики.

§ 3.8

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Уравнение $f(x, y) = 0$, имеющее решением пару чисел (x_0, y_0) , определяет в окрестности числа x_0 величину y как функцию от x , если частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ отлична от нуля в точке (x_0, y_0) и непрерывна в ее окрестности. Последовательные производные от y по x могут быть получены из равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' &= 0. \end{aligned}$$

.....

Подобным путем можно вычислять и производные от неявных функций, заданных одним уравнением с несколькими переменными.

Если несколько неявных функций заданы несколькими уравнениями, то при вычислении производных иногда удобно пользоваться дифференциалами. При этом следует иметь в виду, что дифференциалы высших порядков от тех переменных, которые приняты за независимые, равны нулю.

$$1301. \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0. \text{ Найти } y' \text{ при } x = y.$$

$$1302. \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0. \text{ Найти } x, \text{ при котором } y' = 0.$$

$$1303. \quad x^y = y^x. \text{ Найти } y' \text{ при } x \neq y.$$

$$1304. \quad x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0. \text{ Найти } y'.$$

$$1305. \quad x = y - \alpha \sin y. \text{ Найти } y' \text{ и } y''.$$

1306. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Найти y''' при $x = 1$, $y = 1$.

1307. $x + y = e^{x-y}$. Найти y'' .

1308. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Найти y'' .

1309. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Считая здесь x независимой переменной, а y — функцией, взять четвертую производную от обеих частей уравнения.

1310. Для уравнения $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ формула $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$ не дает возможности найти y' ; однако y' можно найти и здесь из формулы

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0.$$

Найти y' .

1311. $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Найти y' при $x = 0$, $y = 0$.

1312. Тот же вопрос для уравнения $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

1313. Даны уравнения $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$. Найти y' и z'' при $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

1314. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = a^3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$ Найти y' и z' .

1315. Из уравнений $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ найти $d^2 y$ и $d^2 z$, если x — независимая переменная.

1316. Из уравнений $x^2 + y^2 = 2z^2$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ найти $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{d^2 y}{dz^2}$ в точке $(1, -1, 1)$, если z — независимая переменная.

1317. $x + y + z = a$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Найти производные от y и z .

1318. В точке $(1, 1, -2)$ найти первые и вторые производные от y и z , если $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 = 10$.

1319. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1320. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1321. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1322. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1323. $xy + xz + yz = 1$. Найти dz и $d^2 z$.

1324. Найти d^2z , если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1325. Найти d^2z , если $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$.

1326. Найти d^2z в точке $x = a$, $y = a$, $z = 0$, если $x^3 + z^3 - 3axz = y^3$.

1327. Найти вторые частные производные z , если эта функция от x и y определяется уравнением $y = x\varphi(z) + \psi(z)$.

1328. Показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

1329. $xu + yv = 0$, $uv - xy = 5$; при $x = 1$, $y = -1$ принимаем $u = v = 2$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

1330. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = kt^2$. Найти производные от x и y по z .

1331. $x = a \cos u \sin v$, $y = b \cos u \cos v$, $z = c \sin u$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1332. Показать, что если $F(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$.

1333. Функция u задана формулой $u = x^3 y^2 z$, причем переменные x , y и z связаны уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Определить $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $(1, 1, 1)$, когда: а) независимые переменные — x и y ; б) независимые переменные — x и z .

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные от неизвестной функции. Нахождение этой функции представляет собой трудную задачу; мы будем ее рассматривать во второй части. В следующих шести задачах дело идет о более легком вопросе. В нем предлагается проверить, что указанные функции удовлетворяют данным уравнениям.

1334. Показать, что z , определенная как функция от x и y уравнением $x - az = \varphi(y - bz)$, где φ — любая дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

называемому уравнением цилиндрических поверхностей.

1335. Показать, что z , заданный как функция от x и y уравнением $z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, удовлетворяет уравнению конических поверхностей

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

1336. Показать, что при соблюдении уравнений

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha), \end{aligned}$$

z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

1337. Показать, что при $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

1338. Функция z от x и y задана уравнениями:

$$\begin{aligned} (z - \varphi(\alpha))^2 &= x^2(y^2 - \alpha^2), \\ (z - \varphi(\alpha)) \varphi'(\alpha) &= \alpha x^2. \end{aligned}$$

Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

1339. Даны уравнения:

$$z = \frac{\psi(\alpha)}{(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)} + \frac{1}{x + \alpha}, \quad y + \ln((x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)) = 0.$$

Показать, что

$$\left(z - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

§ 3.9

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Иногда приходится менять роль переменных, принимая за неизвестные переменные те, которые раньше считались функциями. От этого выражения, содержащие производные, обыкновенно меняют вид.

Если независимая переменная x заменяется новой независимой переменной t с помощью равенства $x = \varphi(t)$, то удобнее всего пользоваться формулами

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\varphi'(t) dt}, \quad y''_x = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

или

$$\begin{aligned}y'_x &= \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{dy}{dt}, \\y''_x &= \frac{1}{\varphi'(t)} \left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right)', \\y'''_x &= \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{1}{\varphi'} \left(\frac{1}{\varphi'} \cdot \frac{dy}{dt} \right)' \right)', \dots\end{aligned}$$

Здесь в левых частях производные взяты по x , а в правых частях производные берутся по t .

В частности, если за новую переменную берется y , то, полагая $x = \varphi(y)$, можем применить прежние формулы, где теперь

$$\frac{dy}{dt} = 1; \quad \varphi(t) = x; \quad \varphi'(t) = x', \quad \dots$$

Таким образом получаются равенства:

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \dots$$

1340. Принять y за новую независимую переменную и преобразовать уравнение $y'' - xy'^3 + e^y y'^3 = 0$.

1341. Преобразовать уравнение $y' y''' - 3y''^2 = 0$, приняв независимую переменную x за функцию от y .

1342. Таким же образом преобразовать уравнение

$$y'^2 y^{IV} - 10y' y'' y''' + 15y''^3 = 0.$$

1343. В уравнении $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ положить $x = \cos t$.

1344. В уравнении $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ положить $x = e^t$.

1345. В уравнении $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$ положить $t = \ln x$.

1346. В уравнении $(x+a)^3 y''' + 3(a+x)^2 y'' + (a+x)y' + by = 0$ положить $\ln(a+x) = t$.

1347. В уравнении $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$ положить $x = \operatorname{tg} t$.

1348. Показать, что подстановкой $x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} 2t$ уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \frac{dy}{dx} + \frac{4m^2 y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0$$

преобразуется в уравнение $y'' + 4m^2 y = 0$.

1349. Подстановкой $x = \sqrt{1 - t^2}$ преобразовать уравнение

$$(x - x^3)y'' + (1 - 3x^2)y' - xy = 0.$$

Доказать, что новое уравнение будет того же вида, что и прежнее.

1350. Преобразовать уравнение

$$(1 - x^2)^2 y''' - 2x(1 - x^2)y' + \frac{2xy}{1 - x} = 0,$$

положив $x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$.

В следующих задачах удобно воспользоваться независимыми от выбора аргумента формулами, выражающими производные через дифференциалы:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 x}{dx^3}, \quad \dots$$

1351. Преобразовать выражение $\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}$ к полярным координатам, положив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

1352. Тот же вопрос для выражения $\frac{x + yy'}{xy' - y}$.

1353. Тот же вопрос для выражения $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$.

1354. В уравнении $(1 - x^2)^2(a - y'') = by$ положить

$$x = \operatorname{th} \xi, \quad y = \frac{a\eta}{\operatorname{ch} \xi},$$

где ξ — аргумент, а η — функция.

1355. В уравнении $2y'' + (x + y)(1 - y')^3 = 0$ положить $x - y = u$, $x + y = v$ и принять u за аргумент, а v — за функцию.

1356. Преобразовать уравнение $y'' = \frac{A}{(x - \alpha)^2(x - \beta)^2} y$, положив $u = \frac{y}{x - \beta}$, $t = \ln \frac{x - \alpha}{x - \beta}$ и приняв t за аргумент, а u — за функцию.

1357. Преобразовать уравнение

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

взяв за новый аргумент $t = \frac{x^2}{4}$.

1358. Преобразовать уравнение

$$xy \frac{d^2 y}{dx^2} - x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{dy}{dx} = 0,$$

взяв за аргумент y и за новую функцию $z = \ln \frac{y}{x}$.

1359. Переменная x есть функция от t . Вместо нее вводится новая функция с помощью дробно-линейной подстановки

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Доказать равенство

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2} \left(\frac{x''}{x'} \right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2$$

(Шварц).

Указание. Полезно свести вопрос к случаю подстановки $y = \frac{1}{x}$. В этом случае равенство $xy = 1$ следует трижды продифференцировать по t .

1360. В уравнении $9y'^2 y^V - 45y'' y''' y^{IV} + 40y'''^3 = 0$ переменные x и y подвергаются гомографическому преобразованию по формулам:

$$y = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{aX + bY + c}, \quad x = \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2}{aX + bY + c}.$$

Доказать, что вид уравнения не изменится.

В следующих задачах требуется преобразовать выражение, содержащее частные производные по x и по y , вводя новые независимые переменные. Если новые переменные даны равенствами $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Эти равенства позволяют от производных по x и по y перейти к производным по u и v . Следуя тому же пути дальше, можно выразить и производные высших порядков.

1361. В уравнении $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ввести новые независимые переменные u и v , положив $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

1362. В уравнении $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ положить $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ и принять u и v за новые независимые переменные.

1363. Такой же вопрос для уравнения

$$(x + mz) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + nz) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

где $u = x$, $v = \frac{y+nz}{x+mz}$.

Преобразовать к полярным координатам, положив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, следующие выражения:

1364. $w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}.$

1366. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$

1365. $w = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

1367. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

$$1368. \quad \omega = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

$$1369. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad u = y + ax, \quad v = y - ax.$$

$$1370. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0; \quad 2x = u^2 - v^2, \quad y = uv.$$

$$1371. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0; \quad x = uv, \quad y = \frac{1}{v}.$$

1372. При помощи подстановки вида $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$ преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (a + b) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + ab \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а ω — за новую функцию, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

$$1373. \quad \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}; \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad \omega = xz - y.$$

$$1374. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad \omega = \frac{z}{x}.$$

$$1375. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad u = x + y, \quad v = x - y, \quad \omega = xy - z.$$

1376. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$, если $u = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$?

1377. Тот же вопрос для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

1378. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + a\omega = 0$, если $\omega = \varphi(u)$, где $u = (x - x_0)(y - y_0)$?

1379. Какой вид принимает уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u = 0$, если $y = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?

1380. Выражения

$$\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$$

и

$$\Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = v \cos \theta.$$

1381. Если $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и притом $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$, то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right).$$

Доказать.

1382. Доказать, что, вводя новые переменные по формулам

$$X = \frac{dy}{dx}, \quad Y = x \frac{dy}{dx} - y,$$

получим, что $x = \frac{dY}{dX}$, $y = X \frac{dY}{dX} - Y$.

1383. Преобразование Ампера состоит в том, что новые переменные вводятся формулами:

$$X = x, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = z - y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Доказать, что при этом получаются равенства:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = -y, \quad z = Z - Y \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

1384. Преобразование Лежандра состоит в том, что вместо переменных x , y и z вводятся новые по формулам $X = p$, $Y = q$, $Z = px + qy - z$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Доказать, что для производных от новых переменных получаются равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial X} &= x, & \frac{\partial Z}{\partial Y} &= y, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} &= \frac{t}{rt - s^2}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} &= -\frac{s}{rt - s^2}, & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} &= \frac{r}{rt - s^2}, \end{aligned}$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

§ 4.1

ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ. НЕРАВЕНСТВА

Теорема (Ролля). Если в интервале $a < x < b$ производная $f'(x)$ существует и

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(b-h),$$

то уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень в том же интервале.

Теорема (Лагранжа). Если в интервале $a < x < b$ производная $f'(x)$ существует и

$$f(a) = \lim_{h \rightarrow +0} f(a+h), \quad f(b) = \lim_{h \rightarrow +0} f(b-h),$$

то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c),$$

где c — некоторое число в том же интервале.

1385. Доказать, что корни производной от полинома $y = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ вещественные, и указать пределы, между которыми они заключены.

1386. Доказать, что производная от полинома, все корни которого вещественны, не имеет мнимых корней.

1387. Доказать, что полином Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

имеет все корни вещественные и лежащие в интервале $(-1, 1)$.

1388. Доказать, что у полинома Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

все корни положительные.

1389. Доказать, что у полинома Эрмита—Чебышева $e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ все корни вещественные.

1390. Существует равенство $\frac{d^n \operatorname{arctg} x}{dx^n} = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, где $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$. Доказать, что все корни этого полинома вещественны.

1391. При каких значениях x функция $\frac{x}{1+x^2}$ возрастает?

1392. При каких значениях x функция $x^3(1-x)$ убывает?

1393. Доказать, что функция $x^n e^{-x}$, где $n > 0$, возрастает при $0 < x < n$ и убывает при $x > n$.

1394. Доказать, что при $0 < x < \pi$ функция $\frac{\sin x}{x}$ убывает.

1395. Доказать, что при увеличении числа сторон периметр правильного вписанного многоугольника возрастает, а периметр описанного — убывает.

1396. Доказать, с помощью теорем о возрастании функций, что $(1 + \frac{1}{n})^n$ возрастает при любых $n > 0$.

Пользуясь формулой Лагранжа доказать неравенства:

1397. $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ при $b > a > 0$, $n > 1$.

1398. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$.

1399. $e^x > 1+x$.

1400. $e^x > ex$ при $x > 1$.

1401. $x^\delta |\ln x| < \frac{1}{\delta e}$ при $0 < x < 1$, $\delta > 0$.

1402. Доказать теорему: если при $x = 0$ функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x)$ обращаются в нуль, а функция $\varphi^{(n)}(x)$ положительна при $x > 0$, то $\varphi(x) > 0$ при положительных x .

1403. Доказать теорему: если

$$\varphi(0) = \psi(0), \varphi'(0) = \psi'(0), \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \psi^{(n-1)}(0)$$

и $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > 0$, то при положительных x справедливо неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$.

Доказать неравенства:

1404. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, при $x > 0$.

1405. $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$, при $x > 0$.

1406. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

1407. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$; $x > 0$.

1408. Непосредственным возведением в квадрат доказать неравенства

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 8.$$

1409. Доказать, что при $0 < x < 1$ величина e^{2x} меньше, чем $\frac{1+x}{1-x}$.

1410. Доказать, что если p_n — периметр правильного вписанного, а P_n — правильного описанного многоугольника, то $\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n$ больше длины окружности. (Гюйгенс.)

1411. Доказать, что у геометрической прогрессии с положительными слагаемыми сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, меньше суммы крайних членов.

1412. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы, а все члены прогрессий положительны. Показать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1413. Числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ положительны, а точки

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

лежат на кривой $y = \varphi(x)$. Доказать, что если кривая выпукла вниз, то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) < \\ < \frac{m_1\varphi(x_1) + m_2\varphi(x_2) + \dots + m_n\varphi(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \end{aligned}$$

Если же кривая выпукла вверх, то знак неравенства меняется на обратный.

Следующие задачи сводятся к предыдущей. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в них положительны. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ предполагаются положительными и такими, что среди них имеются неодинаковые.

1414. Доказать, что при $m > 1$ справедливо неравенство

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)^m < \alpha_1 x_1^m + \alpha_2 x_2^m + \dots + \alpha_n x_n^m,$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

1415. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел меньше среднего квадратичного тех же чисел, т. е. что

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

1416. Доказать, что при $m > 1$ и положительных числах $x_1, x_2, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m < n^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m).$$

1417. Если числа α и числа x положительны и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, то справедливо неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n > x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

В частности, среднее арифметическое положительных чисел больше среднего геометрического тех же чисел. Доказать.

1418. При любых вещественных значениях коэффициентов a_ν и b_ν , а также переменной x имеет место очевидное неравенство

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu x + b_\nu)^2 \geq 0.$$

Исходя из него, получить неравенство Коши,

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \end{aligned}$$

В следующих задачах полезно применить преобразование координат.

1419. Доказать, что на окружности $x^2 + y^2 = 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{a^2} \leq Ax^2 + Bxy + Cy^2 \leq \frac{1}{b^2},$$

если кривая $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ есть эллипс с полуосями a и b .

1420. Поверхность $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 1$ после соответственного поворота осей имеет уравнение $A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 = 1$, где $A_1 < B_1 < C_1$. Доказать неравенство

$$A_1 \leq \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz}{x^2 + y^2 + z^2} \leq C_1.$$

§ 4.2

НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В дальнейшем под наибольшим значением функции подразумевается значение, большее всех достаточно близких соседних, и под наименьшим — меньшее всех достаточно близких соседних. Нахождение наибольших и наименьших значений, в собственном смысле слова, сводится к нахождению таких наибольших и наименьших значений по сравнению с соседними, а также к изучению значений функции на концах интервала, в котором она изучается. Основной признак, дающий возможность находить наибольшие или наименьшие (экстремальные) значения функции, доставляет следующая теорема:

Если при переходе через некоторое значение аргумента производная от функции меняет знак $+$ на знак $-$ (при изменении аргумента от меньших значений к большим), то функция получает наибольшее значение; если же знак производной переходит с $-$ на $+$, то функция получает наименьшее значение.

Часто бывает удобен и другой критерий:

Если при некотором значении аргумента величина первой производной равна нулю, а вторая производная отрицательна, то функция имеет максимум; если первая производная равна нулю при положительном значении второй производной, то функция имеет минимум.

1421. Найти максимум функции $y = 6x - x^2$.

1422. Найти минимум функции $y = x^2 - 8x$.

1423. Найти экстремальные значения функции $y = x^3 - 12x$.

1424. Показать, что функция $y = x^3(8-x)$ имеет максимум при $x = 6$ и не имеет экстремума при $x = 0$.

1425. Показать, что функция $y = x^2 + \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{1}{x}$ имеет минимум при $x = 0$, хотя первая производная при переходе x через нуль не меняет знака ни с $-$ на $+$, ни с $+$ на $-$.

Найти экстремальные значения следующих функций:

1426. $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$.

1427. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.

1428. $y = a + (x - b)^4.$

1429. $y = a + (x - b)^3.$

1430. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$

1431. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$

1432. $y = (x - 4)^4(x + 3)^3.$

1433. $y = \frac{x}{1+x^2}.$

1434. $y = x + \frac{1}{x}.$

1435. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}.$

1436. $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}.$

1437. $y = \frac{x^4+1}{x^2}.$

1438. $y = \frac{x^2}{x^4+4}.$

1439. $y = x \ln x.$

1440. $y = x^2 \ln x.$

1441. $y = x^x.$

1442. $y = x \ln^2 x.$

1443. $y = x^n e^{-x}, n$ — положительное.

1444. $y = x^2 e^{-x^2}.$

1445. $y = e^x + e^{-x}.$

1446. $y = e^{-x} - e^{-2x}.$

1447. $y = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ при $-2 \leq x \leq 2.$

1448. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x.$

1449. $y = e^x \cos x.$

1450. $y = \frac{\sin x}{1-a^2 \cos^2 x}$ при $a^2 < 1$ (рассмотреть два случая: $2a^2 > 1$ и $2a^2 < 1$).

1451. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(x+a)}$ при $0 < a < \frac{\pi}{2}.$

1452. $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}.$

1453. $y = \sin 3x - 3 \sin x.$

1454. $y = \arcsin \sin x.$

Найти экстремальные значения функций y , заданных неявно следующими уравнениями:

1455. $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0.$

1456. $y^2 + 2yx^2 - 4x - 3 = 0.$

- 1457.** $xy^2 - x^2y = 2a^3$.
1458. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.
1459. $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.
1460. $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 1 = 0$.
1461. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ при $a > 0$.
1462. $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.
1463. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

§ 4.3

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Графики, предлагаемые в этом параграфе, должны строиться с помощью теорем о возрастании функций, исследования экстремальных значений и направления выпуклости кривой, если это оказывается возможным.

- 1464.** $y = x^3 - 3a^2x$. **1472.** $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$.
1465. $y = \frac{ax^2}{a^2+x^2}$. **1473.** $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.
1466. $y = (x+1)^2(x-2)$. **1474.** $y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}$.
1467. $y = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$. **1475.** $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
1468. $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$. **1476.** $y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.
1469. $y = Ae^{-x^2/a^2}$, $A > 0$. **1477.** $y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
1470. $y = x^n e^{-\frac{x}{a}}$, $n > 0$, $a > 0$. **1478.** $y = \frac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$.
1479. $2y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.
1480. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$.
1481. $y = \pm x^2 \sqrt{x+1}$.
1482. $y = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$.
1483. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
1484. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.
1485. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.
1486. $y = \pm \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.
1487. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

$$1488. y = \pm \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1489. y = \pm \frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

$$1490. ay = \pm x\sqrt{x(a-x)}, a > 0.$$

$$1491. y^2 = x^3 + px + q \text{ при } 4p^3 + 27q^2 > 0.$$

$$1492. y^2 = x^3 + px + q \text{ при } 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

$$1493. y^2 = x^3 + px + q \text{ при } 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

$$1494. y = \cos^3 x + \sin^3 x.$$

$$1495. y = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

$$1496. y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$$

$$1497. y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

$$1498. y = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

$$1499. y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$1500. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$1501. y = \sin x^2.$$

$$1502. y = x \ln x.$$

$$1503. y = x^2 \ln x.$$

$$1504. y = \ln(x^2 - 1).$$

$$1505. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$1506. y = (1+x)^{1/x} \text{ при } x \geq -1.$$

Изучение графиков соответствующих функций во многих случаях позволяет определить число вещественных корней уравнений, даже в случае наличия буквенных коэффициентов. Так, например, имея уравнение $ae^x = x^3$, переписываем его в таком виде: $x^3 e^{-x} = a$. После этого вопрос сводится к определению числа точек пересечения прямой $y = a$ и кривой $y = x^3 e^{-x}$. Ордината последней возрастает от $-\infty$ до $27e^{-3}$ при возрастании x от $-\infty$ до 3. После этого она убывает до нуля при x , изменяющемся от 3 до $+\infty$. Отсюда следуют выводы: а) при $a > 27e^{-3}$ уравнение не имеет вещественных решений; б) при $a = 27e^{-3}$ уравнение имеет корень $x = 3$ — это будет кратный корень; в) при $0 < a < 27e^{-3}$ уравнение имеет два вещественных корня: $0 < x_1 < 3$ и $x_2 > 3$; г) при $a < 0$ уравнение имеет один отрицательный корень.

Определить число вещественных корней уравнений:

$$1507. 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0.$$

$$1508. x^4 - 4ax^3 - 2 = 0.$$

$$1509. 2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0.$$

$$1510. x \ln x = a.$$

$$1511. \ln x = ax.$$

1512. Доказать, что уравнение $x^3 + px + q = 0$ при вещественных p и q имеет один вещественный корень при $4p^3 + 27q^2 > 0$ и три вещественных корня при $4p^3 + 27q^2 < 0$.

1513. Доказать, что при $a > 1$ уравнение $a^x = bx$ имеет два вещественных корня при $b > e \ln a$, не имеет ни одного вещественного корня при $e \ln a > b > 0$ и имеет один корень при $b < 0$.

Определить, при каких значениях параметра следующие уравнения имеют указанное число вещественных корней:

1514. $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + m = 0$ — два различных корня.

1515. $2x^3 - 13x^2 - 20x + m = 0$ — один корень.

1516. $3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + m = 0$ — четыре различных корня.

1517. $2x^3 - 4x^2 - 30x + m = 0$ — два совпадающих корня и один простой.

1518. $x^2 + x + e^{-x} + m = 0$ — два совпадающих корня.

1519. $x^2 - x - \ln x + m = 0$ — ни одного корня.

1520. $6 \arctg x - x^3 + m = 0$ — три корня, из которых два совпадающих.

§ 4.4 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

1521. Определить наибольшую площадь прямоугольника с периметром $4a$.

1522. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса a .

1523. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в сегмент круга радиуса a , если центральный угол, замыкаемый сегментом, равен $2a$.

1524. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в параболический сегмент, ограниченный параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{m^2}{2p}$.

1525. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника,

а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h .

1526. По углам прямоугольной пластинки со сторонами a и b вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся крестообразной фигуры образована коробочка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается наибольший объем коробочки.

1527. Поперечное сечение бревна есть круг радиуса a . Из бревна вытесывается брус с прямоугольным поперечным сечением. Прочность бруса пропорциональна основанию и квадрату высоты поперечного сечения. Найти форму поперечного сечения, при которой брус имеет наибольшую прочность.

1528. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса a с центральным углом 2α .

1529. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в шар радиуса a .

1530. Найти наибольший объем цилиндра, у которого периметр осевого сечения равен $6m$.

1531. Найти наибольшую боковую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса a .

1532. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в данный конус.

1533. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в сегмент параболоида $az = x^2 + y^2$, $a > 0$, ограниченный плоскостью $z = h > 0$.

1534. Найти наибольший объем конуса, вписанного в шар радиуса a .

1535. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса a .

1536. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса a .

1537. Найти наибольший объем цилиндра, ось которого проходит по диагонали куба с ребром a , а основания которого касаются граней куба.

1538. Найти наибольший объем цилиндра, ось которого пересекает под прямым углом ось данного цилиндра с радиусом a , а основания которого касаются боковой поверхности данного цилиндра.

1539. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l .

1540. Из сектора круга данного радиуса свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

1541. Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего данный объем V .

1542. Периметр равнобедренного треугольника равен 2ρ . Какими должны быть его стороны, чтобы объем тела, полученного от вращения этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим.

1543. Цилиндр завершен сверху полушаром того же радиуса. Дан объем всего тела V . При каком радиусе полная поверхность тела будет наименьшей?

1544. Точки равномерно движутся по осям координат со скоростями v_1 и v_2 . В начальный момент они занимали положения $(a, 0)$ и $(0, b)$. Найти кратчайшее расстояние между точками.

1545. Найти кратчайшее расстояние от точки (x_1, y_1, z_1) до точки прямой

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt.$$

1546. Точка перемещается в среде I со скоростью v_1 , а в среде II со скоростью v_2 . Линия раздела сред прямолинейна. Доказать, что перемещение движущейся точки из точки A в одной среде в точку B в другой среде совершается в кратчайшее время при условии, что путь состоит из прямолинейных отрезков AC и CB , где C — на границе двух сред, причем $\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$, где φ_1 и φ_2 — углы, образованные прямыми AC и CB с линией раздела.

1547. Точка движется по плоскости со скоростью v_1 , а попав на ось Ox , может двигаться со скоростью $v_2 > v_1$. Найти скорейший путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$.

1548. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b . Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l , которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

1549. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравнивается силой f на другом конце. При этом на расстоянии a от точки опоры подвешен груз p , а вес единицы длины рычага равен m . Определить длину рычага x так, чтобы сила f была наименьшая.

1550. Из точек A и A_1 по прямым AO и A_1O по направлению к точке O выходят одновременно два тела со скоростями v и v_1 . При этом $AO = l$, $A_1O = l_1$, а угол между AO и A_1O равен α . Когда расстояние между телами наименьшее?

1551. Чашка имеет форму полушара радиусом a . В нее опущен стержень длины $l > 2a$. При каком положении стержня его середина находится ниже всего (положение равновесия)?

1552. Стержень длиной $2b$ опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β . При каком положении стержня его середина находится выше всего?

1553. Светящаяся точка находится на линии двух шаров. При каком ее положении сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1554. Яркость освещения выражается формулой $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние от площадки до источника света, m — постоянная (сила источника света). На какой высоте h надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии a от столба было наибольшим?

1555. Сосуд с вертикальной стенкой высотой h стоит на горизонтальной плоскости. Из отверстия в стенке бьет струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи наибольшая, если скорость вытекающей жидкости по

закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — глубина отверстия.

1556. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b , а меньшее основание равно a .

1557. На одной стороне прямоугольника построен полукруг. Дан периметр всей получившейся фигуры. Найти наибольшую возможную площадь этой фигуры.

1558. На странице книги печатный текст должен занимать площадь S ; верхнее и нижнее поля должны быть шириной a , правое и левое — шириной b . При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

1559. Найти внутренние размеры открытого цилиндрического сосуда данной емкости V с толщиной стенок a , на который потребуется минимум материала.

1560. Определить наибольшую возможную разность между углами, составляемыми с плоскостью основания ребром и апофемой правильной n -угольной пирамиды.

1561. Из какой точки оси Ox отрезок на оси Oy , лежащий между точками $(0, h)$ и $(0, H)$, виден под наибольшим углом ($H > h > 0$)?

1562. Через точку A внутри угла провести прямую MN так, чтобы сумма отрезков сторон $OM + ON$ была наименьшей.

1563. Через точку внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

1564. Верхним основанием правильной шестигранной призмы является шестиугольник $ABCDEF$. Через точку O на оси призмы, лежащую выше верхнего основания, и через диагонали AC , CE и EA проведены три плоскости, пересекающие в точках B_1 , D_1 и F_1 боковые ребра призмы, не проходящие через A , C и E . Объем многогранника, ограниченного с боков и снизу гранями призмы,

а сверху крышей $OAB_1CD_1EF_1A$, не зависит от выбора точки O . При каком условии поверхность многогранника будет наименьшей? (Задача о пчелиных сотах.)

1565. Плоскость, параллельная противоположным ребрам тетраэдра, пересекает его по параллелограмму. Когда площадь этого параллелограмма наибольшая?

1566. Две стороны параллелограмма — на сторонах треугольника, а вершина — на третьей стороне. Когда площадь этого параллелограмма наибольшая?

1567. Прямой круговой конус пересекается плоскостью по параболическому сегменту. Площадь такого сегмента равна произведению $\frac{2}{3}$ основания на высоту. Найти наибольшую площадь сегмента.

1568. К окружности проведены две касательные. Провести третью касательную так, чтобы треугольник, ограничиваемый касательными, имел наименьшую площадь.

1569. Через точку внутри прямого угла провести прямую так, чтобы ее отрезок между сторонами угла был наименьшим.

1570. Через точку внутри прямого угла провести прямую так, чтобы периметр получившегося треугольника был наименьшим.

1571. Найти точку на кривой $xy^2 = a^2(a - x)$, для которой подкасательная максимальна.

1572. В какой точке кривой $x^n y = a^{n+1}$ надо провести касательную, чтобы ее отрезок между осями координат был наименьшим?

1573. Найти наибольшее расстояние от начала координат до касательной к кривой $x^n y = a^{n+1}$.

1574. Найти на параболе $y^2 = 2px$ точку, ближайшую к точке $(a, 0)$. Исследовать результат в зависимости от a .

1575. Найти наименьшую величину отрезка нормали к параболы $x^2 = 2py$, лежащего внутри параболы.

1576. К параболе провести нормаль, отсекающую от нее сегмент наименьшей площади.

1577. Найти наименьшую возможную площадь треугольника, образованного касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осями координат.

1578. Определить наибольший (наименьший) угол между сопряженными диаметрами эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1579. Определить наибольший угол между нормалью к эллипсу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

и диаметром, проведенным в ту же точку.

1580. Найти наибольшее расстояние от нормали к эллипсу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

до его центра.

1581. Найти наибольшее расстояние точки эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

от конца его малой полуоси. Проанализировать разные случаи ($a^2 > b^2$, $b^2 > a^2$, $a^2 = b^2$).

1582. В полукруг радиуса R вписать эллипс наибольшей площади ($s = \pi ab$; см. предыдущую задачу).

1583. Две точки параболы $y = Ax^2$, имеющие абсциссы a и b , надо соединить ломаной в два звена так, чтобы наибольшая по абсолютной величине разность соответствующих ординат параболы и ломаной была бы наименьшей. Найти положение промежуточной вершины ломаной и точек пересечения ломаной с параболой. Во сколько раз эта «ошибка» будет меньше «ошибки» хорды?

1584. Дугу параболы $y = Ax^2$ между точками с абсциссами a и b надо заменить ломаной в n звеньев с наименьшей «ошибкой». Проверить, что наименьшая «ошибка» равна $\frac{h}{2n^2}$, если h — стрелка дуги (ошибка хорды).

§ 4.5

РЯДЫ, ИХ СХОДИМОСТЬ

Если при $n \rightarrow \infty$ сумма $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ стремится к некоторому определенному конечному пределу s , то говорят, что ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ — сходящийся, а s — его сумма. В этом случае пишем: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = s$. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ состоит в том, что при любом положительном постоянном ε можно найти такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

при всех $n > n_0$ и любых положительных p .

Не сходящийся ряд называется расходящимся.

В следующих примерах можно установить сходимость ряда и величину его суммы непосредственно.

1585. Непосредственным делением по возрастающим степеням можно установить тождество:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Исходя из него, показать, что ряд

$$1 + x + x^2 + \dots$$

сходится при $|x| < 1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$.

1586. Пользуясь тождеством $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{\nu(\nu+1)}$, доказать, что ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

сходится и имеет сумму, равную единице.

1587. Доказать равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}.$$

1588. Доказать равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{4}.$$

1589. Пользуясь указанием задачи 1586, найти сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots$$

1590. Доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v,$$

где предполагается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$.

1591. Установив равенство:

$$\frac{m}{(m+1)(m+2)} + \frac{m}{(m+2)(m+3)} + \dots + \frac{m}{(m+3)(m+4)} + \dots = \frac{m}{m+1},$$

доказать, что в данном случае при $m \rightarrow \infty$ предел суммы ряда не равен сумме пределов членов ряда, именно: $\lim_{m \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) = 1$, а

$$\lim u_1 + \lim u_2 + \lim u_3 + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Одним из способов изучения сходимости рядов является признак сравнения: если члены данного ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося ряда положительных слагаемых $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$, то данный ряд — сходящийся. В этом случае ряд называется абсолютно сходящимся.

Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Если же u_n при $n \rightarrow \infty$ не стремится к нулю, то ряд расходящийся.

Исследовать сходимость следующих рядов при разных значениях переменной x :

1592. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

1593. $x + x^4 + x^{16} + x^{25} + \dots$

1594. $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \dots$

1595. $\frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \dots$

1596. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

1597. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots$

1598. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1^2} + \frac{1}{x^2+2^2} + \dots$

Указание. Воспользоваться неравенством $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$.

Во многих случаях для изучения сходимости рядов полезен

Признак Даламбера. Если, начиная с некоторого места, отношение последующего члена ряда к предыдущему по абсолютной величине меньше одной и той же правильной дроби q , т. е. если $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q$, где $q < 1$, то ряд сходится (абсолютно). В частности, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$, то ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ сходится.

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, то ряд расходится. Случай $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ исследуется особо.

Исследовать сходимость рядов:

$$1599. 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$1600. 1 + x + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + \dots$$

$$1601. x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$1602. x + \frac{2x^2}{3} + \frac{2^2x^3}{5} + \frac{2^3x^4}{7} + \dots$$

$$1603. x + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3^3}x^3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4^4}x^4 + \dots$$

$$1604. x + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5}x^3 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}x^4 + \dots$$

$$1605. \frac{x-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{x-1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$1606. 1 + \frac{1}{2x\sqrt{2}} + \frac{1}{4x^2\sqrt{3}} + \frac{1}{8x^3\sqrt{4}} + \frac{1}{16x^4\sqrt{5}} + \dots$$

$$1607. \frac{x-3}{a} + \frac{(x-3)^2}{a+b} + \frac{(x-3)^3}{a+2b} + \frac{(x-3)^4}{a+3b} + \dots; a > 0, b > 0.$$

$$1608. \frac{x}{x+2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x+2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{x+2} \right)^5 - \dots$$

$$1609. \frac{1+x}{x+\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1+x}{5+x}}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{\frac{1+x}{25+x}}{4\left(x+\frac{1}{x}\right)^3} + \frac{\frac{1+x}{125+x}}{8\left(x+\frac{1}{x}\right)^4} + \dots$$

$$1610. \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{9} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{13} + \dots$$

$$1611. 1 + \frac{2 \sin x}{3} + \frac{4 \sin^2 x}{5} + \frac{8 \sin^3 x}{7} + \frac{16 \sin^4 x}{9} + \dots$$

$$1612. x + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \frac{x^9}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}.$$

$$1613. \frac{1}{e^x-1} + \frac{2}{e^{2x}-1} + \frac{3}{e^{3x}-1} + \dots$$

$$1614. \text{Исследовать сходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ если } u_1 = 1, \text{ а } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}.$$

1615. Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ составлен по следующему закону: $u_n = \frac{1}{2^{m\sigma}}$, где $2^m \leq n < 2^{m+1}$, σ — постоянное число. Доказать, что при $\sigma > 1$ ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ сходится, а сумма его равна $\frac{2^\sigma}{2^\sigma - 2}$.

1616. Пользуясь предыдущим результатом, доказать, что при $\sigma > 1$ ряд $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \dots$ сходится.

1617. Члены ряда составляются по правилу:

$$u_n = \frac{1}{2^{m\sigma}},$$

где $2^{m-1} < n \leq 2^m$, σ — постоянное число. Доказать, что при $0 < \sigma < 1$ ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ расходится.

1618. Доказать, что ряд $1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \frac{1}{4^\sigma} + \dots$ при $0 < \sigma \leq 1$ расходится.

1619. Установить, что ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ — расходящийся, опираясь на неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

В тех случаях, когда $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, признак Даламбера недостаточен. Если при этом дробь $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ равна отношению двух полиномов относительно n , то может быть полезно применение признака сходимости Гаусса.

Признак Гаусса. Если $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m}$, то ряд сходится при $b_1 - a_1 > 1$ и расходится при $b_1 - a_1 \leq 1$.

1620. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

1621. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4} + \dots$

1622. $1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \dots$

1623. $1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots; m > 0.$

В обширном классе случаев, когда предыдущие признаки не дают возможности судить о сходимости рядов, можно убедиться в сходимости с помощью других признаков. Из них один, особенно важный, основан на тождестве Абеля.

Тождество Абеля.

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \\ = \sigma_1(b_1 - b_2) + \sigma_2(b_2 - b_3) + \dots + \sigma_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + \sigma_n b_n, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

Признак сходимости Дирихле. Ряд $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots$ сходится, если сумма $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ остается ограниченной при возрастании n , а числа $v_1, v_2, v_3, \dots$ убывают и стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера.

Признак Лейбница. Знакопеременный ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ сходится, если величина u_n убывает при возрастании n и притом $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Этот признак представляет собой частный случай признака Дирихле.

Исследовать сходимость следующих рядов:

$$1624. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots; \quad 1 - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma} + \dots; \quad \sigma > 0.$$

$$1625. \quad 1 + \frac{m}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots; \quad m > -1.$$

$$1626. \quad 1 - \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \dots$$

$$1627. \quad \sin x - \sin \sin x + \sin \sin \sin x - \dots$$

$$1628. \quad \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

$$1629. \quad \cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} + \dots$$

Указание (к задачам 1628 и 1629). Ограниченность

$$\sum_{k=1}^n \sin kx, \quad \sum_{k=1}^n \cos(2k+1)x$$

можно доказать, если найти суммы

$$\sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \sin kx; \quad \sum_{k=1}^n 2 \sin x \cos(2k+1)x.$$

$$1630. \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots$$

$$1631. \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$ сходится, а ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$, составленный из абсолютных значений его членов, расходится, то данный ряд называется неабсолютно (или условно) сходящимся. Следующие примеры показывают глубокую разницу в характере абсолютной и неабсолютной сходимости.

1632. Пользуясь основным критерием сходимости, доказать, что сумма абсолютно сходящегося ряда не изменится, если расположить те же члены ряда в любом другом порядке.

1633. Показать, что сумма неабсолютно сходящегося ряда не меняется, если члены ряда переставить так, что ни один из них не удаляется со своего места больше, чем на m мест, где m — любое заданное число.

1634. Доказать равенство

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - &= \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \right), \end{aligned}$$

показав тем самым, что у неабсолютно сходящихся рядов сумма существенно зависит от порядка слагаемых.

1635. Пользуясь равенствами

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \dots, \\ s_1 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \right) + \dots, \end{aligned}$$

доказать, что $s < 1$, а $s_1 > 1$, и, следовательно, $s_1 \neq s$.

1636. Доказать, что ряд $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ — сходящийся, а ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$, полученный из первого перестановкой слагаемых, — расходящийся.

Если ряд, члены которого зависят от x , остается сходящимся в сегменте $a \leq x \leq b$, то, написав равенство

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + R_n(x),$$

можем быть уверены, что $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любом данном x . Поэтому при любом данном $\varepsilon > 0$ неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ будет выполняться, если n достаточно велико: $n > n_0$. При этом число n_0 , вообще говоря, зависит не только от ε , но и от значения x . Если при любом данном $\varepsilon > 0$ неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех x в интервале $a \leq x \leq b$, как только $n > n_0$, где n_0 зависит только от ε , то ряд называется равномерно сходящимся. Для равномерно сходящихся рядов справедливы теоремы:

Теоремы:

1. Предел суммы равномерно сходящегося ряда равен сумме пределов членов ряда.
2. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть непрерывная функция.
3. Если ряд, составленный из производных от членов данного ряда, сходится равномерно, то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленного из производных от членов данного ряда.
4. Если члены данного ряда по абсолютной величине не больше, чем соответствующие члены сходящегося ряда положительных постоянных слагаемых, то ряд сходится равномерно.

1637. Доказать, что ряд

$$x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + \dots$$

сходится в сегменте $0 \leq x \leq 1$, но неравномерно.

1638. Доказать, что ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

сходится при любом x , но неравномерно. Тот же ряд сходится равномерно в любом конечном сегменте $a \leq x \leq b$.

1639. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

сходится равномерно на всей вещественной оси $-\infty < x < \infty$.

1640. Доказать, что ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots$$

можно дифференцировать почленно.

1641. Доказать, что ряд

$$\frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2x}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \dots$$

представляет непрерывную функцию от x .

1642. Пользуясь тождеством Абеля, доказать, что ряды

$$\begin{aligned} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots, \\ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \end{aligned}$$

при выполнении условий

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

сходятся равномерно во всяком сегменте, не заключающем ни внутри, ни на концах значений $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$.

1643. Доказать, что сумма ряда

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}, \quad a > 1,$$

представляет непрерывную функцию.

1644. Доказать, что при $a > 2$ предыдущая сумма ряда имеет производную:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^{n^2} \cos 2^{n^2} x.$$

1645. Доказать, что при $1 < a < 2$ функция $s(x)$ задачи 1644 не имеет производной (будучи, однако, непрерывной).

Указание. Воспользоваться тождеством:

$$s(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin 2^{\nu^2} x}{a^{\nu^2}} + \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin 2^{\nu^2} x}{a^{\nu^2}},$$

где n — любой выбранный номер, и изучать $\frac{\Delta s(x)}{\Delta x}$, при условии, что $n \rightarrow \infty$, выбирая числа Δx особым образом в зависимости от выбора номера n .

§ 4.6

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ

1646. Непосредственным делением, расположив многочлены по возрастающим степеням переменной x , доказать разложения в ряды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - bx} &= \frac{1}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^3} + \dots, \\ \frac{1}{a + bx} &= \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^3} - \dots, \quad \left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right). \end{aligned}$$

1647. Пользуясь тождеством $\frac{5-2x}{6-5x+x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}$, доказать разложение в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{5-2x}{6-5x+x^2} &= \frac{5}{6} + \frac{13}{36}x + \frac{35}{216}x^2 + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^{n-1} + \dots, \quad |x| < 2. \end{aligned}$$

1648. Предполагая законным разложение в ряд

$$\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

и умножая обе части равенства на $1 - x - x^2$, доказать, что $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, ... и вообще $a_0, a_1, a_2, \dots$ — числа Фибоначчи, определяемые равенствами $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

1649. Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x} \right),$$

найти формулу, дающую общий член a_n ряда Фибоначчи.

1650. Доказать, что в разложении в ряд дроби

$$\frac{a + bx + cx^2}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

имеющем место при $A \neq 0$ и при достаточно малых значениях $|x|$, между коэффициентами a_n существует соотношение: $Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} + Da_{n-3} = 0$; $n > 2$.

Важное средство для разложения функций в ряд дают формулы Тейлора и Маклорена.

Формула Тейлора.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}(x-a)^{n-1} + R_n.$$

Здесь R_n — остаточный член, применяемый в двух видах:

$$(форма Лагранжа), \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}(x-a)^n$$

$$(форма Коши). \quad R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}(x-c)^{n-1}(x-a)$$

В обоих случаях c означает некоторое число, лежащее между числами a и x . Функция $f(x)$ предполагается имеющей в интервале между a и x производную n -го порядка.

Формула Маклорена получается из формулы Тейлора при $a = 0$ и имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}x^{n-1} + R_n.$$

При этом

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n$$

(форма Лагранжа),

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} x(x-c)^{n-1}$$

(форма Коши).

Здесь c — некоторое среднее между числами 0 и x .

В формулах Тейлора и Маклорена величина n может выбираться произвольно, если $f(x)$ имеет производные нужного порядка во всех точках интервала (a, x) .

Если $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из этих формул получаются ряды Тейлора и Маклорена, имеющие вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Сходимость этих рядов следует из условия: $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но не обратно.

Следует заметить, что исследование условий, при которых $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$,

удаётся лишь в сравнительно простых случаях. По счастью, теория функций комплексного переменного даёт простое решение вопроса о законности рядов Тейлора и Маклорена для широкого класса функций.

Следующие пять разложений получаются из ряда Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Первые три из них справедливы при всяком значении x . Два последних справедливы при $|x| < 1$. При $|x| > 1$ последнее лишено смысла, так как ряд расходится. Формула для $(1+x)^m$, называемая биномом Ньютона, при $|x| > 1$ справедлива лишь тогда, когда m — целое положительное или нуль. К указанным пяти рядам по простоте и важности можно присоединить шестой ряд,

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Непосредственное получение его из ряда Маклорена несколько затруднительно, и другие приемы ведут к цели легче.

ПРИМЕР 1. Разложение функции $y = \arcsin x$ в ряд Маклорена. Дифференцируя равенство $y = \arcsin x$ и освобождаясь от знаменателя, получаем: $\sqrt{1-x^2}y' = 1$. Беря еще раз производную и опять освобождаясь от знаменателя, приходим к равенству

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0. \quad (*)$$

Оно представляет так называемое дифференциальное уравнение для функции $y = \arcsin x$. Предполагая, что разложение y по степеням x существует, напомним:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Так как для степенных рядов допустимо почленное дифференцирование, то отсюда следуют равенства:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (*), получаем

$$(1-x^2) \sum n(n-1) a_n x^{n-1} - x \sum n a_n x^{n-1} = 0.$$

Группируя члены по степеням x , что тоже законно для степенных рядов, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n) x^n = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось, необходимо:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_{n+2} = \frac{n^2 a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Исходя отсюда, можно найти все a_n , если знать a_0 и a_1 . Но разложение $\arcsin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ должно совпадать с рядом Маклорена для $\arcsin x$. Поэтому a_0 и a_1 равны значениям $\arcsin x$ и $(\arcsin x)'$ при $x = 0$, т. е. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Отсюда следуют равенства:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, & a_4 &= 0, & a_6 &= 0, & \dots, \\ a_3 &= \frac{1^2 a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, & a_5 &= \frac{3^2 a_3}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}, \\ a_7 &= \frac{5^2 a_5}{6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, если $\arcsin x$ разлагается в ряд по степеням x , то должно быть:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

По признаку Даламбера ряд сходится при $|x| < 1$. То, что $\arcsin x$ действительно разлагается в ряд, с легкостью дает теория функций комплексного переменного.

1651. Разложить по степеням $x - 2$ полином $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$.

1652. Разложить по степеням $x + 1$ полином $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

1653. Доказать равенства:

$$\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$

$$\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x,$$

разложив левые части по степеням x .

1654. В разложении для $\ln(1 + x)$ заменить x на $-x$, исходя из рядов для $\ln(1 + x)$ и $\ln(1 - x)$, получить ряд Грегори:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad |x| < 1.$$

1655. Получить равенство

$$\begin{aligned} \ln(N+1) - \ln N &= \\ &= 2 \left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots \right), \quad N > 0. \end{aligned}$$

1656. Из ряда для e^x получить разложение для e^{-x} , а также разложения:

$$\operatorname{ch} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

годные при всяком x .

Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

найти следующие суммы:

1657. $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x$.

1658. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n-1)x$.

$$1659. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx.$$

$$1660. \sin x - \sin 2x + \dots - \sin 2nx.$$

$$1661. \sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \dots + (-1)^{n-1} \sin^2(2n-1)x.$$

$$1662. x \sin a + x^2 \sin 2a + \dots + x^{n-1} \sin(n-1)x.$$

Доказать равенства:

$$1663. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2 \cos x).$$

$$1664. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$1665. e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n.$$

Здесь, как и в других случаях, считается, что $0! = 1$.

$$1666. \operatorname{ch} x \cdot \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{4n}}{(4n)!}.$$

$$1667. e^{x \operatorname{ctg} a} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{\sin^n a} \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

$$1668. (1+x^2)^{m/2} \sin(m \operatorname{arctg} x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{m(m-1)\dots(m-2\nu)}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1},$$

$$|x| < 1.$$

$$1669. (1+x^2)^{-m/2} \cos(m \operatorname{arctg} x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{m(m+1)\dots(m+2\nu-1)}{(2\nu)!} x^{2\nu},$$

$$|x| < 1.$$

1670. Применив формулу Лагранжа к $\varphi(x) - \varphi(\pi)$, где

$$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{(2n+1)\sin \frac{x}{2}},$$

доказать, что при $0 < x < 2\pi$ имеет место равенство

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots = \frac{\pi - x}{2}.$$

1671. Применив формулу Лагранжа к $\varphi(x) - \varphi(\frac{\pi}{2})$, где

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\cos 2nx}{4n \sin x},$$

доказать, что при $0 < x < \pi$ имеет место равенство

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

1672. Пользуясь биномом Ньютона, получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots, \quad |x| < 1.$$

1673. Доказать, что при $|x| < 1$ справедливы равенства:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n.$$

1674. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{a^7} + \dots, \quad |x| < a.$$

1675. Доказать равенство:

$$(a+x)^n = a^n + nxa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 a^{n-2} + \dots, \quad |x| < a.$$

Разложить по степеням x следующие функции:

1676. $\sqrt{1+x}$.

1677. $\ln \frac{a+x}{a-x}$.

1678. $\ln(1-x+x^2)$.

1679. $\ln(2-3x+x^2)$.

1680. $\frac{(1+x)^2}{x} \ln(1+x)$.

1681. $\ln(1-2x \cos \varphi + x^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} x^n, \quad |x| < 1.$

Проверить, что

1682. $\frac{1-a \cos x}{1-2a \cos x+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx, \quad |a| < 1.$

1683. $\frac{a \sin x}{1-2a \cos x+a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx, \quad |a| < 1.$

С помощью подходящей замены переменной получить следующие разложения в ряды:

$$1684. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right), \quad |x| > 1.$$

$$1685. \ln x = 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right), \quad x > 0.$$

$$1686. \frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{x+1} \right)^3 + \dots, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

Получить следующие разложения в ряды:

$$1687. \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

$$1688. \ln \frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^3}{6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^4}{8} + \dots, \quad |x| < 1.$$

§ 4.7

РЯДЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

1689. Найти сумму ряда $s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$, воспользовавшись равенством:

$$\begin{aligned} s &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + \\ &\quad + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + \\ &\quad + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + \\ &\quad + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + \\ &\quad + x^4 + x^5 + \dots + \\ &\quad + x^5 + \dots + \end{aligned}$$

1690. Найти сумму ряда $s = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$, составив произведения xs и x^2s .

1691. Заметив, что коэффициенты ряда

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots$$

связаны соотношением: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, где a_n — коэффициент при x_n , найти сумму ряда умножением ее на $1 - 2x + x^2$.

1692. У ряда

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + \dots$$

каждый следующий коэффициент равен сумме трех предыдущих. Найти сумму ряда.

1693. Перемножить два ряда:

$$s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad \text{и} \quad s_1 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

1694. Непосредственным умножением доказать, что

$$(1+x)s_m(x) = s_{m+1}(x),$$

$$\text{где } s_m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

1695. Перемножением рядов доказать равенство

$$\begin{aligned} & \left(1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right) \times \\ & \quad \times \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right) = \\ & \quad = 1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x+y)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

1696. Доказать равенства:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x(1-x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} &= 1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^4 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)x^6 + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

1697. Непосредственным суммированием найти S_n и проверить, что при $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \frac{8x^8}{1+x^8} + \dots &= \frac{x}{1-x}, \\ \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \frac{x^8}{1-x^{16}} + \dots &= \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

1698. Для ряда Моргана

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^4} \cdot \frac{x^4}{1+x^8} + \dots$$

можно (при $|x| \neq 1$) получить

$$S_n = x \frac{1 - x^{2^{n+2}-2}}{1 - x^{2^{n+1}}}$$

и потому ряд всегда сходится, но

$$S = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq 1. \\ \frac{1}{x}, & \text{если } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Найти прямым дифференцированием производные от рядов:

1699. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$

1700. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$

1701. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

1702. $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$

1703. Проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

и отсюда получить:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \cos^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

1704. Доказать, что сумма гипергеометрического ряда Гаусса

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots, \quad |x| < 1,$$

удовлетворяет уравнению

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x)y' + \alpha\beta y = 0,$$

где

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

1705. Функция Бесселя $J_0(x)$ определяется рядом

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Доказать, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

1706. Доказать, что

$$y = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + xy = 0.$$

Составив для соответствующей функции дифференциальное уравнение, доказать следующие разложения в ряды ($|x| < 1$):

$$\mathbf{1707.} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{4} - \dots$$

$$\mathbf{1708.} \quad \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \frac{x^4}{3} - \dots$$

$$\mathbf{1709.} \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^3}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\mathbf{1710.} \quad \sin(\mu \arcsin x) = \frac{\mu}{1} x - \frac{\mu(\mu^2-1)}{3!} x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1)(\mu^2-3^2)}{5!} x^5 - \dots$$

$$\mathbf{1711.} \quad \cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!} x^4 - \dots$$

1712. $\cos(\mu \arccos x) = A \sin \frac{\mu\pi}{2} + B \cos \frac{\mu\pi}{2}$, где A и B ряды двух предыдущих задач.

$$\mathbf{1713.} \quad e^{m \arcsin x} = 1 + mx + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(m^2+1^2)(m^2+3^2)\dots(m^2+(2\nu-1)^2)}{(2\nu+1)!} x^{2\nu+1} + \\ + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2)\dots(m^2+4\nu^2)}{(2\nu+2)!} x^{2\nu+2}.$$

1714. Из предыдущей задачи получить

$$\arcsin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot (2n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1};$$

$$(\arcsin x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{(2n)}.$$

1715. Разложив двумя способами e^{e^x} , проверить, что

$$\frac{1^3}{1} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \dots = 5e,$$

$$\frac{1^4}{1} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots = 15e.$$

1716. Замечая, что $\sec x$ — четная функция, можем заключить, что разложение $\sec x$ имеет вид

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

где E_n — соответствующие коэффициенты (числа Эйлера). Умножая почленно на равенство

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m},$$

получить рекуррентную формулу для чисел Эйлера:

$$\frac{E_n}{(2n)!} - \frac{E_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{E_{n-2}}{4!(2n-4)!} - \dots = 0.$$

Так как $E_0 = 1$, то из этой формулы следует, что

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad E_4 = 1385, \quad \dots$$

1717. $1 - \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sum \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}$, где B_n — коэффициенты (называемые числами Бернулли). Доказать, что для чисел Бернулли существует рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{2(2n)!} - \frac{B_{n-1}}{2^3 3!(2n-2)!} + \frac{B_{n-2}}{2^5 \cdot 5!(2n-4)!} - \dots + \\ + \frac{(-1)^{n-1} B_1}{2^{2n-1}(2n-1)!2!} + \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n+1}(2n+1)!} = 0. \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \dots$$

Написать первые пять членов разложения по степеням x для следующих функций:

1718. $\ln(1 + e^x)$.

1720. $(1 + x)^x$.

1719. $e^{\sin x}$.

1721. $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$.

1722. Доказать, что при малости величины $\frac{b}{a^2}$ приближенное равенство $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ имеет погрешность, приблизительно

равную $\frac{a}{8} \left(\frac{b}{a^2}\right)^2$, и вычислить с помощью этого равенства значения радикалов: а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt{24}$, в) $\sqrt{84}$, г) $\sqrt{235}$, д) $\sqrt{240}$.

1723. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$$

и вычислить с ее помощью корни:

$$\sqrt[5]{245}, \quad \sqrt[7]{129}, \quad \sqrt[9]{515}, \quad \sqrt[10]{1027}.$$

1724. Существует следующая приближенная формула для извлечения корней:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{2ab}{2nN - (n+1)b},$$

где a_n — точная степень, близкая к N . Доказать, что погрешность этой формулы приближенно равна $\frac{n^2-1}{12n^3} \left(\frac{b}{a^n}\right)^3$.

1725. Вычислить по предыдущей формуле следующие корни: а) $\sqrt[3]{30}$, б) $\sqrt[3]{70}$, в) $\sqrt[3]{500}$, г) $\sqrt[5]{250}$, д) $\sqrt{60}$, е) $\sqrt{84}$.

1726. Воспользовавшись биномом Ньютона и равенством

$$\sqrt[3]{2} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{128} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}},$$

вычислить с 10 знаками величину $\sqrt[3]{2}$.

1727. С помощью бинома Ньютона и тождества

$$\sqrt{2} = \frac{1}{5} \sqrt{50} = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$$

вычислить $\sqrt{2}$ с 10 знаками.

1728. С помощью ряда для $\ln(1+x)$ при $x = -\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{25}$ и $\frac{1}{80}$, а также тождеств

$$\begin{aligned} \ln \frac{9}{10} &= 2 \ln 3 - \ln 2 - \ln 5, & \ln \frac{24}{25} &= 3 \ln 2 + \ln 3 - 2 \ln 5, \\ \ln \frac{81}{80} &= 4 \ln 3 - 4 \ln 2 - \ln 5 \end{aligned}$$

вычислить натуральные логарифмы чисел 2, 3, 5 и 10 с 10 знаками после запятой.

1729. Доказать, что величины

$$\Delta \ln n = \ln(n+1) - \ln n,$$

$$\Delta^2 \ln n = \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln n,$$

$$\Delta^3 \ln n = \ln(n+3) - 3\ln(n+2) + 3\ln(n+1) - \ln n$$

имеют соответственно следующие разложения в ряды:

$$\Delta \ln n = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right),$$

$$\Delta^2 \ln n = - \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^4} + \frac{1}{3(n+1)^6} + \dots \right),$$

$$\Delta^3 \ln n = 2 \left(\frac{8}{(2n+3)^3} + \frac{48}{(2n+3)^5} + \frac{312}{(2n+3)^7} + \dots \right).$$

1730. Доказать, что табличная разность обыкновенных пятизначных логарифмов чисел, т. е. $\lg(n+1) - \lg n$, при $1000 < n < 10000$ приближенно выражается формулой $\Delta = 10^5 \cdot \frac{M}{n} = \frac{43429}{n}$; $M = 0,43429$ — логарифмический модуль, Δ выражена в сотых тысячных долях.

1731. Доказать, что табличная разность логарифмов синусов, данных через одну минуту, выраженная в сотых тысячных долях, может быть дана приближенной формулой

$$\Delta \lg \sin x \approx 12,6 \operatorname{ctg} x.$$

1732. Доказать, что формулы того же рода для синусов и для логарифмов тангенсов имеют вид:

$$\Delta \sin x \approx 29,1 \cos x, \quad \Delta \lg \operatorname{tg} x \approx \frac{25,2}{\sin 2x}.$$

Несколько следующих задач основано на приближенных равенствах $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, обладающих высокой точностью для малых углов. В некоторых из этих задач нужно воспользоваться более точными формулами:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}.$$

1733. Под каким углом зрения виден за 10 км диаметр фабричной трубы с радиусом 2 м?

1734. Диск Солнца виден под углом $30'$. Во сколько раз расстояние до Солнца больше диаметра Солнца?

1735. Полотно железной дороги имеет уклон 0,012. Какой угол с горизонталью оно составляет?

1736. За сутки земной шар пробегает приблизительно дугу в 1° своей орбиты, радиус которой $150 \cdot 10^6$ км. Определить, на сколько отклоняется от прямой линии путь Земли за 1 секунду (27 км) и за 1 минуту?

1737. Дуга 1° земного меридиана имеет около 112 км. На сколько она длиннее своей хорды?

1738. Доказать приближенную формулу: $l = \sqrt{13h}$, где h — высота наблюдателя над горизонтом в метрах, а l — дальность до горизонта в километрах.

1739. При измерении расстояния между точками отсчет на протянутой ленте показал 12 м. Зная, что провес ленты был 20 см, и считая форму ленты дугой круга, определить расстояние между точками с поправкой на провес.

В следующих задачах вычислить с помощью рядов величины с указанной точностью:

1740. Найти $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-5} .

1741. Найти $\cos 1^\circ$ с точностью до 10^{-5} .

1742. Найти $\sin 10^\circ$ с точностью до 10^{-4} .

1743. Вычислить π с точностью до 10^{-10} с помощью тождества

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

1744. Шенкс вычислил π с 707 знаками с помощью тождества предыдущей задачи. Сколько членов в разложениях $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ он должен был удерживать?

1745. Одно из правил Гюйгенса для вычисления длины окружности эквивалентно равенству

$$2\pi = \frac{P_n + 2p_n}{3r},$$

где P_n и p_n — периметры описанного и вписанного правильных многоугольников, r — радиус круга. Доказать, что погрешность этого равенства приближенно равна $\frac{30}{n^4}$.

§ 4.8

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Решение следующих задач удобно находится с помощью теоремы, которую не совсем точно называют правилом Лопиталья.

Правило Лопиталья. Если при x , стремящемся к конечному или бесконечному пределу, числитель и знаменатель дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ одновременно стремятся к нулю или же к бесконечности, то

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

При этом предполагается, что предел в правой части существует.

Найти пределы следующих выражений:

1746. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^m - 1 + x^2}.$

1747. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$

1748. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}.$

1749. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}.$

1750. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$

1751. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$

1752. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

1753. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{e^{ax}}, \quad a > 0.$

1754. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

1755. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x.$

1756. $\lim_{x \rightarrow a} \arcsin(x-a) \operatorname{ctg}(x-a).$

1757. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^m}, \quad m > 0.$

1758. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^m}, \quad m > 0.$

Применяя разложение в ряды, найти пределы, указанные в следующих задачах:

1759. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}.$

1760. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}.$
1761. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$
1762. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$
1763. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x \sin x}.$
1764. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$
1765. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}.$
1766. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}.$
1767. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$
1768. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$

В следующих задачах пределы находятся разными приемами:

1769. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x}.$
1770. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(1 - x).$
1771. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x^3 \sin \frac{\pi}{x}}{x}.$
1772. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$
1773. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + b e^x)}{\sqrt{m + n x^2}}, \quad b > 0, n > 0.$
1774. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^{x^2}.$
1775. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$
1776. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$
1777. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$
1778. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x} \right).$
1779. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$
1780. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right).$

1781. Найти предел отношения площади сегмента круга к площади треугольника, образованного хордой и касательными в концах дуги, при условии, что дуга сегмента стремится к нулю.

1782. Такой же вопрос по отношению к сегменту и треугольнику, составленному хордой и двумя хордами, соединяющими ее концы с серединой дуги.

1783. Если a, b, c — стороны сферического треугольника, A, B, C — противолежащие углы, то

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Во что переходит эта формула, если a, b и c малы?

1784. Тело падает в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. Путь, пройденный за t секунд, выражается формулой

$$s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2g}{a^2} \left(1 - e^{-\frac{at}{m}}\right),$$

где m — масса, a — коэффициент трения. Найти приближенные формулы для s , если $\frac{at}{m}$ велико, а также для случая, если $\frac{at}{m}$ весьма мало.

§ 4.9

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Наибольшие и наименьшие значения функций от двух переменных, имеющих в данной области частные производные нужных порядков, находятся с помощью следующих теорем:

Теоремы:

1. Для того чтобы функция $f(x, y)$ имела экстремальное значение в некоторой точке (x, y) , необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Для того чтобы $f(x, y)$ в некоторой точке (x, y) имела экстремальное значение, достаточно, чтобы величина $rt - s^2$ была положительна, а величины p и q равны нулю. Если при этом r и $t > 0$, то величина $f(x, y)$ имеет минимальное значение, если же r и $t < 0$, то $f(x, y)$ имеет максимальное значение. Здесь приняты для краткости обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Для функций нескольких независимых переменных существуют подобные же, но несколько более сложные критерии.

Теоремы:

1. Для того чтобы функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имела в некоторой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ экстремальное значение, необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

При этом предполагается, что во всех точках области функция имеет все нужные производные.

2. Для того чтобы функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имела в некоторой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ экстремальное значение, достаточно выполнение следующих условий:

- а) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$;
- б) все главные миноры четного порядка у определителя

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

положительны, а знак у главных миноров нечетного порядка одинаков со знаком p_{11} . При этом для краткости положено:

$$p_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu}.$$

Если при этих условиях $p_{11} > 0$, то функция имеет минимум. Если же $p_{11} < 0$, то функция имеет максимум.

Найти экстремальные значения следующих функций, заданных в явном виде:

1785. $z = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by.$

1786. $z = x^3 y^2 (a - x - y).$

1787. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$

1788. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$

1789. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}, \quad x > 0, y > 0.$

1790. $z = x^3 + y^3 - 3axy.$

1791. $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$

1792. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a; a > 3.$

1793. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ при $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a; a > 1.$

1794. $z = e^{-x^2 - y^2} (ax^2 + by^2); \quad a > 0, b > 0.$

$$1795. z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}.$$

$$1796. z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$1797. z = \sin x + \sin y + \sin(x+y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1798. z = \sin x + \sin y + \cos(x+y); 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$1799. z = \cos x \cos y \cos(x+y); 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$1800. z = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2.$$

$$1801. z = \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha \cos(y - \beta).$$

$$1802. u = xyz(4a - x - y - z).$$

$$1803. u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$$

$$1804. u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$1805. u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$1806. u = (ax + by + cz)e^{-x^2 - y^2 - z^2}.$$

1807. Задача Гюйгенса: между положительными числами a и b вставить n других чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ так, чтобы величина дроби

$$u = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2) \dots (x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$$

получила наибольшее значение.

В следующих задачах требуется найти наибольшее и наименьшее значения функций z , заданных неявно, как функции от x и y .

$$1808. 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

$$1809. 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$$

$$1810. 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0.$$

$$1811. 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

$$1812. x^3 y - 3xy^2 + 6x + y^2 + 7y + z^2 - 3z - 14 = 0.$$

$$1813. x^4 + y^4 + z^4 = 2a^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Дальнейшие примеры содержат вопросы о нахождении относительных экстремальных значений, т. е. о нахождении экстремальных значений функции

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

переменные которой связаны несколькими уравнениями

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где функции $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ имеют первые и вторые частные производные во всей области изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_m; m < n$.

При отыскании экстремальных значений здесь удобен способ Лагранжа. Он заключается в том, что составляют вспомогательную функцию

$$\Phi = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — неопределенные постоянные множители. После этого пишем ряд уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Из них, а также и из уравнений $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0$ (всего получается $m + n$ уравнений), можно найти значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых $u = f$ получает экстремальное значение при соблюдении условий $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0$, находятся среди полученных по способу Лагранжа.

Критерий, дающий возможность узнать, достигается ли экстремальное значение f , и какое именно, при величинах $x_1, x_2, \dots, x_n$, полученных по способу Лагранжа, сравнительно сложен и здесь не приводится.

Найти наибольшие и наименьшие значения следующих функций переменных, связанных указанными условиями:

1814. $u = x + y; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

1815. $u = x^m + y^m; x + y = 2a; \quad a > 0, m > 1.$

1816. $u = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m; x_1 + x_2 + \dots + x_n = na; \quad a > 0, m > 1.$

1817. $u = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m; x_1 + x_2 + \dots + x_n = na; \quad a > 0, m < 1.$

1818. $u = xy; x^2 + y^2 = 1.$

1819. $u = xyz; x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

1820. $u = x + y + z, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1; \quad a > 0, b > 0, c > 0.$

1821. $u = x^2 y^3 z^4; 2x + 3y + 4z = a.$

1822. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = 0.$

1823. $u = xyz; x + y + z = 5, xy + yz + xz = 8.$

1824. $u = x^2 + y^2 + z^2; lx + my + nz = 0, (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$

1825. $u = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}; x + y + z = \pi; \quad x > 0, y > 0, z > 0.$

1826. $u = x - y; \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

1827. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}; \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = p$, все α и β положительны, так же как и числа $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1828. $u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz; x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1829. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}; x^2 + y^2 + z^2 = 1, lx + my + nz = 0$.

1830. Неравенство Адамара для определителя третьего порядка

$$u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

имеет вид

$$|u| \leq 1, \quad \text{если } a^2 + b^2 + c^2 = 1, a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Доказать это неравенство.

1831. Неравенства Маклорена: если $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$, то

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &\leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n &\leq \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3, \end{aligned}$$

и т. д. Доказать эти неравенства.

1832. Задачу Гюйгенса (см. задачу 1807) можно свести к доказательству неравенства:

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \geq (1 + q)^n; \quad u_k > 0,$$

если $u_1 u_2 \dots u_n = q_n$. Доказать это неравенство.

В заключение приводится ряд задач на нахождение наибольших и наименьших величин, которые могут быть решены как изложенными методами, так и другими.

1833. Из всех треугольников с одинаковым периметром $2p$ найти треугольник с наибольшей площадью.

1834. Найти наибольшую площадь треугольника с данными основанием a и углом при вершине A .

1835. Данный треугольник разделить на две равновеликие части отрезком наименьшей длины.

1836. Доказать, что в треугольнике радиус вписанного круга не больше, чем половина радиуса описанного круга.

1837. В данный треугольник вписать треугольник с наименьшим периметром.

1838. В данный квадрат вписать четырехугольник с наименьшим периметром.

1839. Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин была бы наименьшей.

1840. Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до данных точек была бы наименьшей.

1841. Найти наибольшую площадь четырехугольника с данными сторонами a, b, c, d .

1842. Найти многоугольник с наибольшей площадью и с данными сторонами $a_1, a_2, \dots$.

1843. Найти наибольшую площадь многоугольника с n сторонами, вписанного в круг радиуса a .

1844. Найти наименьшую площадь многоугольника с n сторонами, описанного около круга радиуса a .

1845. В данный круг вписать треугольник, сумма квадратов сторон которого была бы наибольшей.

1846. В данный круг вписать наибольший по площади четырехугольник с данным углом α .

1847. На плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

1848. Из всех плоскостей, проходящих через данную точку, найти наиболее удаленную от начала координат.

1849. На эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

найти точку, наиболее удаленную от начала координат.

1850. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме его ребер $12a$.

1851. Найти наибольший объем прямоугольного параллелепипеда с данной полной поверхностью $6a^2$.

1852. Около прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a$, $2b$ и $2c$ описать наименьший по объему эллипсоид.

1853. Через точку (a, b, c) провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

1854. Определить размеры открытого сверху прямоугольного ящика так, чтобы при данных объеме V и толщине стенок h на него пошло наименьшее количество материала.

1855. Определить размеры цилиндрического сосуда с данной поверхностью и наибольшим объемом.

1856. В данный конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

1857. Какой из конусов с данной боковой поверхностью S имеет наибольший объем?

1858. Найти наибольший по объему сосуд формы усеченного конуса с данными основанием и образующей: $l = 4r$.

1859. На эллипсе даны две точки. Где на том же эллипсе поместить третью так, чтобы получившийся треугольник имел наибольшую площадь?

1860. Найти кратчайшее расстояние от точки $(p, 4p)$ до параболы $y^2 = 2px$.

1861. В заданный равнобедренный треугольник вписать параболический сегмент с общей осью и наибольшей площадью. Площадь сегмента параболы равна произведению $\frac{2}{3}$ основания на высоту.

1862. В данный эллипс вписать равнобедренный треугольник наибольшей площади с основанием, параллельным оси.

1863. На эллипсе найти точку, наиболее близкую к данной точке большой оси $(m, 0)$.

1864. Около эллипса описать треугольник наименьшей площади с основанием, параллельным оси.

1865. Найти нормаль эллипса, наиболее удаленную от центра.

1866. Найти нормаль к эллипсу с полуосями a и b , отрезок которой внутри эллипса имел бы наименьшую длину.

1867. Провести к эллипсу касательную, отрезок которой между осями имеет наименьшую длину.

1868. Найти площадь S эллипса, полученного при сечении эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью $lx + my + nz = 0$.

1869. Провести к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ касательную плоскость с наименьшей суммой отрезков на осях.

1870. Доказать, что из хорд, параллельных оси Oz и заключенных между плоскостью $z = ax + by + c$ и эллиптическим параболоидом $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, максимальная проходит через центр плоского сечения.

1871. В сегмент эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, вырезанный плоскостью $z = h$, вписать прямоугольный параллелепипед с наибольшим объемом.

1872. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательную плоскость так, чтобы центр тяжести треугольника, выделяемого на этой плоскости плоскостями координат, был наименее удален от начала.

1873. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательную плоскость, образующую с его плоскостями симметрии тетраэдр наименьшего объема.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 5.1 УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ И ИХ ВИДЫ

1874. На горизонтальную ось насажен плоский диск-эксцентрик. Какую форму он должен иметь, чтобы упирающийся в него вертикальный стержень совершал гармоническое колебательное движение при равномерном вращении оси?

1875. Тот же вопрос, но вертикальный стержень должен совершать равномерное движение вверх и вниз. (Так движется трубка у некоторых микроскопов.)

1876. Косо срезанный цилиндр покрыт красящим веществом и катится по плоскости. Какой кривой ограничена окрашенная часть плоскости?

1877. Доказать, что кривые $r = e^{a\varphi}$ и $r = ce^{a\varphi}$ геометрически подобны — одна переходит в другую при увеличении масштаба рисунка. В то же время они равны, переходя друг в друга при повороте на некоторый угол.

1878. Доказать, что фигуры, заключенные между осью x и кривыми $y = e^x$ и $y = ae^x$, при передвижении одной из этих кривых вдоль оси x могут быть совмещены.

1879. Прямая данной длины l скользит концами A и B по осям Ox и Oy . Из вершины C прямоугольника $OACB$ на прямую опускается перпендикуляр. Найти геометрическое место основания этого перпендикуляра.

1880. Тот же вопрос для конца перпендикуляра, опущенного из начала координат. (Четырехлепестник.)

1881. Дан отрезок $OO_1 = a$. На произвольный луч, проходящий через точку O , опущен из точки O_1 перпендикуляр O_1M_1 , а из основания этого перпендикуляра M_1 опущен перпендикуляр M_1M на луч, симметричный первому относительно линии OO_1 . Найти геометрическое место оснований второго перпендикуляра M .

1882. Из точки $M(\xi, \eta)$ окружности $x^2 + y^2 = a^2$ проводится прямая $y = \eta$ до пересечения с осью ординат в точке N . Из точки $(a, 0)$ проводится прямая в точку N . Найти геометрическое место точки ее пересечения с ординатой точки M .

1883. Прямой угол вращается около вершины $A(a, 0)$. Из начала координат через точку пересечения одной из сторон угла с окружностью $x^2 + y^2 = r^2$ проводится прямая до пересечения с другой стороной угла. Найти геометрическое место точки пересечения.

1884. Прямоугольный треугольник имеет катеты $AC = a$ и $BC = 2a$. Точка B скользит по оси Ox , а точка A скользит по окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Найти геометрическое место вершин прямого угла.

1885. Найти геометрическое место точек касания прямых из начала координат, касательных к окружностям с радиусом a и с центром на оси Ox .

1886. Две равные параболы вращаются около своих вершин так, что четыре точки их пересечения всегда лежат на окружности. Найти геометрическое место центра окружности.

1887. Найти геометрическое место вершины равнобокой гиперболы с данным центром, проходящей через данную точку.

1888. Тот же вопрос для фокуса гиперболы.

1889. Гипербола с полуосью a проходит через данные две точки с расстоянием $2c$. Найти геометрическое место центра гиперболы, если она равнобокая.

1890. Найти геометрическое место середин отрезков нормалей к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, заключенных внутри эллипса.

1891. Два стержня длиной $\sqrt{2}$ вращаются вокруг своих концов, закрепленных в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$. Другие концы их соединены шарнирно стержнем длиной 2. Определить, какую кривую описывает середина соединительного стержня.

1892. Инверсор Поселлье—Липкина состоит из ромба $ABCD$ со стороной, равной a . Точки A и C соединены с неподвижной точкой O прямыми OA и OC длиной b , где $b > a$.

Стороны ромба и отрезки OA и OC — стержни, соединенные шарнирами. Доказать, что точки O , B и D лежат на одной прямой и притом $OB \cdot OD = b^2 - a^2$, так что движение вершины ромба по данной кривой позволяет выполнить инверсию.

1893. Доказать, что при движении точки B в инверсоре Поселлье — Липкина по окружности, проходящей через точку O , точка D описывает прямую.

Какие линии изображаются параметрическими уравнениями:

1894. $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$.

1895. $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$.

1896. $x = a \sin^2 t$, $y = b \cos^2 t$.

1897. $x = a \sin^4 t$, $y = a \cos^4 t$.

1898. На кривой $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 + 2t - 1$ найти самую левую и самую низкую точки.

1899. Воспользовавшись тождеством $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, представить уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в параметрической форме.

1900. Воспользовавшись тождеством $e^{-t} \cdot e^t = 1$, представить уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в параметрической форме.

1901. Представить уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в параметрической форме, приняв за параметр угловой коэффициент хорды окружности, проходящей через точку $(-a, 0)$.

1902. Доказать, что координаты точек кривой второго порядка можно рационально выразить через угловой коэффициент переменной хорды кривой, проходящей через какую-нибудь выбранную точку кривой.

1903. Кривая $F(x, y) = 0$, координаты точек которой можно рационально выразить через параметр, называется уникурсальной. Доказать, что кривые $r = f(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где f — рациональная функция, уникурсальны.

1904. Доказать, что циссоида $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ уникурсальна, выразив координаты ее точек через угловой коэффициент хорды, соединяющей начало с данной точкой кривой.

1905. Решая совместно уравнение декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ и уравнение вспомогательной прямой $y = tx$, получить параметрические уравнения декартова листа:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

1906. Доказать, что три различные точки декартова листа, соответствующие значениям параметра t_1, t_2 и t_3 , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 t_3 = -1$.

1907. Доказать, что координаты точек кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ могут быть выражены через некоторый параметр t формулами:

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2}.$$

1908. При каком условии три точки кардиоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3 (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

1909. Доказать, что координаты точек строфоиды $(2a-x)y^2 = x(x-a)^2$ можно выразить рационально через некоторый параметр t по формулам:

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at(t^2-1)}{1+t^2}.$$

1910. При каком условии точки строфоиды, соответствующие значениям t_1, t_2, t_3 параметра (см. предыдущую задачу), лежат на одной прямой?

1911. При каких значениях t_1, t_2, t_3, t_4 соответствующие точки строфоиды (см. задачу 1909) лежат на одной окружности?

1912. Доказать, что четыре точки циссоиды

$$x = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{t(t^2 + 1)},$$

соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3 и t_4 , лежат на одной окружности при условии $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$.

1913. Выразить рационально через вспомогательный параметр координаты точек лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

1914. Показать, что кривая $x^y = y^x$ распадается на биссектрису первого координатного угла и кривую

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

где n — переменный параметр.

§ 5.2

КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ

1915. Показать, что кривые

$$y = a \sin \frac{x}{a}, \quad y = a \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad y = a \ln \frac{x}{a}$$

пересекают ось Ox под одинаковыми углами, независимо от величины a .

1916. Найти угол, под которым кривая

$$y = \frac{x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

пересекает ось Oy .

1917. При каком значении a кривая $y = \frac{x^3 + ax}{b}$ пересекает ось Oy под углом $\frac{\pi}{4}$?

1918. Тот же вопрос для кривой $y = \frac{ax}{1 + bx^2}$.

1919. Какая из прямых, идущих из начала координат, пересекает гиперболу $xy = a^2$ под прямым углом?

1920. Тот же вопрос для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1921. Найти уравнение синусоиды, пересекающей ось Ox в начале координат под углом $\frac{\pi}{4}$, а в точке $(a, 0)$ — под углом $\frac{3\pi}{4}$.

1922. Доказать, что угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку (r, φ) кривой $r^n = a^n \cos n\varphi$, и касательной к этой кривой равен $n\varphi + \frac{\pi}{2}$.

1923. Доказать, что кривая $r = e^{a\varphi}$ пересекает все радиус-векторы, идущие из начала координат, под одинаковым углом.

1924. Доказать, что угол между касательной к спирали Архимеда $r = a\varphi$ и радиус-вектором, проведенным к точке касания из начала координат, стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $\varphi \rightarrow \infty$.

1925. Найти угол между касательной к кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$ и радиус-вектором точки касания.

1926. Найти уравнение касательной к кривой $y = x \ln x + 1$ в точке с ординатой 1.

1927. Найти уравнение касательной в точке $(1, -2)$ к кривой

$$2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0.$$

1928. Провести нормаль к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке, где $y = 3$.

1929. Найти нормаль к локону Марии Анъези $x^2y = a^2(a - y)$, параллельную прямой $y = 2x$.

1930. Найти нормаль к кривой $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ в точке $x = 2\pi a$.

1931. Найти нормаль к кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$, составляющую угол $\frac{\pi}{4}$ с полярной осью.

1932. На кривой $xy^2 = 2a^3$ найти точки, нормаль в которых проходит через начало координат.

1933. У кривой $x^3 - y^3 = 3x^2$ найти касательную, параллельную прямой $y = x$.

1934. Вычислить расстояние от начала координат до касательной к кривой $x^2y = a^3$, проведенной в точке с абсциссой x_0 .

1935. Найти наиболее удаленную от начала координат касательную к астроидам $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1936. Доказать, что касательные к кривым $y = af(x)$, имеющие общую абсциссу точки касания, пересекаются в одной точке.

1937. Доказать, что в точках с одинаковой абсциссой поднормали к кривым $y = f(x)$ и $y = \sqrt{f^2(x) + a^2}$ одинаковы.

1938. Доказать, что у кривых $y = ax^n$ отношение подкасательной к абсциссе точки касания равно $\frac{1}{n}$.

1939. Доказать, что у кривой $y = a \ln(x^2 - a^2)$ сумма длин касательной и подкасательной пропорциональна величине xy .

1940. Доказать, что длина касательной к трактрисе

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

равна a .

1941. Доказать, что все нормали к кривой

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

одинаково удалены от начала координат.

1942. Доказать, что отрезок нормали к кривой

$$x = 2a \sin t + a \sin t \cos^2 t, \quad y = -a \cos^3 t,$$

заклученный между осями координат, равен $2a$.

1943. Доказать, что у кривой $x = 2a \ln \sin t - 2a \sin^2 t$, $y = a \sin 2t$ отрезок оси Ox между касательной и нормалью равен $2a$.

1944. Доказать, что окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и нормали к эпициклоиде

$$\begin{aligned} x &= a \left((1 + \lambda) \cos t - \lambda \cos \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) t \right), \\ y &= a \left((1 + \lambda) \sin t - \lambda \sin \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) t \right) \end{aligned}$$

пересекаются в точке $(a \cos t, a \sin t)$.

1945. То же для гипоциклоиды

$$\begin{aligned} x &= a \left((1 - \lambda) \cos t + \lambda \cos \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) t \right), \\ y &= a \left((1 - \lambda) \sin t + \lambda \sin \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) t \right). \end{aligned}$$

1946. Определить длину отрезка касательной к астроиде

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

между осями координат.

1947. Найти отрезок нормали к кривой

$$x = (a + b) \sin t - a \sin^3 t, \quad y = (a - b) \cos t + a \sin^2 t \cos t,$$

заклученный между осями координат.

1948. Найти расстояние от начала координат до касательной к кривой $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

1949. Вычислить расстояние от начала координат до касательной к кривой $r = ae^{k\varphi}$.

1950. Вычислить произведение расстояний от фокусов эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ до касательной к нему.

1951. Вычислить длину отрезка нормали к эллипсу $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, лежащего внутри этого эллипса.

1952. Нормаль, проведенная в точке M кривой $xy = a^2$, пересекается с прямой $y = x$ в точке N . Найти отношение $OM : MN$.

1953. Доказать, что площадь трапеции, образованной касательной к кривой $3axy = x^3 + 2a^3$, ординатой точки касания и осями координат, не зависит от выбора точки касания.

1954. Доказать, что касательная к кривой

$$x = a(1 - \cos t), \quad y = a(1 - \sin t)$$

образует вместе с осями координат треугольник, периметр которого постоянен.

1955. Доказать, что касательная к кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ отсекает на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

1956. Доказать, что углы между касательными к кривым $r = f(\varphi)$ и $r = \frac{a}{f(\varphi)}$ и радиус-векторами при одинаковом значении φ в точках касания составляют в сумме π .

1957. Доказать, что касательные к кривым $y = \frac{\lambda\varphi(x) + \mu\varphi_1(x)}{\lambda + \mu}$ при одинаковых абсциссах точки касания пересекаются в одной точке, положение которой не зависит от λ и μ .

1958. Каждый радиус-вектор кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ пересекает ее в трех точках, отличных от полюса. Доказать, что касательные в этих точках составляют равносторонний треугольник.

1959. В трех точках M_1, M_2, M_3 , расположенных на декартовом листе $x^3 + y^3 = 3xy$ на одной прямой, проводятся касательные, пересекающие эту кривую в точках P_1, P_2 и P_3 . Доказать, что эти точки лежат на одной прямой.

1960. Из точки M на строфоиде $(2a-x)y^2 = x(x-a)^2$ проведем прямые, касающиеся строфоиды в точках P и Q . Доказать, что точки M, P и Q лежат на одной окружности с началом координат. (См. задачи 1909, 1910, 1911.)

1961. У лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ параллельно данному направлению можно провести две пары касательных. Доказать, что прямые, соединяющие точки касания каждой пары, составляют между собой угол $\frac{2\pi}{3}$.

1962. Найти длину полярной подкасательной и поднормали у спирали $r^2 = a^2\varphi$.

1963. Доказать, что полярные подкасательные у кривых $r = f(\varphi)$ и $r = \frac{af(\varphi)}{a+f(\varphi)}$ в точках, расположенных на одном радиус-векторе, равны.

1964. Доказать, что у кривых $r = f(\varphi)$ и $r = a + f(\varphi)$ в точках, лежащих на одном радиус-векторе, полярные поднормали равны.

1965. Найти круг радиуса a , касательный к декартову листу $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке, где $(\frac{4a}{3}, \frac{2a}{3})$.

1966. Провести круг радиуса $3a$, нормальный к циссоиде $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$ в точке, где $x = a$.

1967. Найти круг, проходящий через полюс и касательный к спирали Архимеда $r = a\varphi$ при $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Показать, что следующие пары линий пересекаются под прямым углом:

1968. $x^2 - y^2 = a^2, xy = b^2$.

1969. $y^2 = 2ux + u^2, y^2 = -2vx + v^2$.

1970. $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \frac{x^2}{a^2-\mu} + \frac{y^2}{b^2-\mu} = 1; a > \mu > b$.

1971. $(2a-x)y^2 = x^3, (x^2 + y^2)^2 = b^2(2x^2 + y^2)$.

1972. $b^2x^2 + a^2y^2 = c, y^b = c_1x^{a^2}$.

1973. $\sin y = ae^{-x}, \cos y = be^{-x}$.

1974. $r^n = a^n \cos n\varphi$, $r^n = b^n \sin n\varphi$.

1975. $r^2 = \ln \operatorname{tg} \varphi$, $r^2 \cos 2\varphi + 1 = 0$.

1976. Доказать, что кривые

$$r^2 \cos 2\varphi = a^2, \quad r^2 \cos(2\varphi + \alpha) = b^2$$

пересекаются под углом α .

1977. Доказать, что кривая

$$x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u, \quad y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$$

пересекает прямую $y = x$ под прямым углом.

1978. Доказать, что окружности

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

пересекаются под прямым углом при соблюдении условия $aa_1 + bb_1 = 2(c + c_1)$.

1979. Географическая широта есть угол между нормалью к поверхности Земли в данном месте и плоскостью экватора. Геоцентрическая широта — угол между той же плоскостью и радиус-вектором из центра Земли в данную точку. Определить наибольшую разность этих широт, считая меридиан Земли эллипсом, у которого $a = 6400$ км, $a - b = 21$ км.

1980. Кривая $f(x, y) = 0$ называется алгебраической, если $f(x, y)$ — полином относительно x и y . Вводя степени вспомогательной переменной z , можно сделать этот полином однородным. Пусть $f(x, y, z) = 0$ — получившееся уравнение. Доказать, что уравнение касательной к кривой можно написать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}X + \frac{\partial f}{\partial y}Y + \frac{\partial f}{\partial z}Z = 0,$$

где (x, y) — точка касания, (X, Y) — точка на касательной, а величины z и Z после нахождения производных заменяются единицей.

Подэрой кривой относительно данной точки называется геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной

точки на касательные к данной кривой. Найти подэры следующих кривых:

1981. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно центра.

1982. Параболы $y^2 = 2px$ относительно вершины.

1983. Параболы $y^2 = 2px$ относительно фокуса.

1984. Гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ относительно начала координат.

1985. $\left(\frac{x}{a}\right)^n \pm \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ относительно $(0, 0)$.

1986. $r = e^{a\varphi}$ относительно полюса.

1987. $x^2 + y^2 = 2ax$ относительно $(0, 0)$ (ответ дать в полярных координатах).

1988. $r^n = a^n \cos n\varphi$ относительно полюса.

1989. Эвольвенты круга:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

относительно начала координат.

1990. Доказать, что точки касания касательных, проведенных из данной точки к логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$, лежат на окружности, проходящей через полюс и данную точку.

1991. Из начала координат проведен луч, пересекающий строфоиду $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$ в точках M и M_1 . Найти геометрическое место точек пересечения касательных к строфоиде в точках M и M_1 .

1992. Из данной точки M к кардиоиде $r = a(1 + \cos \varphi)$ можно провести три касательные. Каково геометрическое место точек M , для которых три точки касания лежат на одной прямой?

1993. Каково геометрическое место концов полярной подкасательной у гиперболической спирали $r\varphi = a$?

Найти геометрическое место вершин прямого угла, стороны которого касаются следующих кривых:

1994. Гиперболы $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

1995. Астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

1996. Параболы Нейля $4y^3 = 27ax^2$.

1997. Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1998. Каково геометрическое место вершин угла данной величины, стороны которого касаются циклоиды?

1999. Из точки M кривой $y^2 = ce^{x/a} + 4a(x + a)$ проводится нормаль MP до пересечения с осью Ox в точке P . Доказать, что середина MP лежит на параболе $y^2 = ax$.

2000. Каково геометрическое место точек, из которых можно провести к параболе две взаимно перпендикулярные нормали?

2001. При инверсии точка с полярными координатами r и φ переходит в точку с полярными координатами $\frac{a^2}{r}$ и φ , где a — постоянная. Доказать, что инверсия есть конформное отображение, т. е. что изображения кривых пересекаются под теми же углами, что и сами кривые.

2002. Парабола $y = -ax^2$ катится без скольжения по параболе $y = ax^2$. Найти геометрическое место ее вершины в предположении, что в начальный момент вершины совпадали.

2003. Доказать, что при том же движении параболы ее фокус описывает прямую, а именно директрису неподвижной параболы.

2004. По эллипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ катится без скольжения другой такой же эллипс. В начальном положении их большие оси соприкасались концами. Найти геометрическое место центра катящегося эллипса.

Замечание. При решении последних двух задач полезно обратить внимание на расположение подвижной и неподвижной фигур относительно их общей касательной.

§ 5.3

ВЫПУКЛОСТЬ, КРИВИЗНА И РАДИУС КРИВИЗНЫ

2005. При каких значениях x кривая $y = x^3 + ax + b$ обращена выпуклостью вверх?

2006. Определить направление выпуклости кривой $x(x^2 - y^2) + y^2 = 0$ в точках, где $x = \frac{3}{2}$.

2007. Исследовать характер вогнутости кривой $x^4 = y(x^2 - y^2)$ в точках, где $y < 0$.

2008. Исследовать характер выпуклости кривой $r \cos^3 3\varphi = 1$ при $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$.

2009. Показать, что кривая $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ в точках пересечения с осями обращена к началу координат выпуклой стороной, а в точках пересечения с биссектрисами углов — вогнутой.

2010. Показать, что кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ обращена к началу координат вогнутой стороной, если

$$(x'y'' - x''y')(xy' - x'y) > 0.$$

2011. Исходя из определения кривизны, найти длину дуги в 1° земного меридиана у полюса и экватора. Меридиан можно считать эллипсом с полуосями $a = 6378$ км и $b = a - 21$ км (полярная полуось).

2012. Найти радиус кривизны кривой $3ay^2 = 2x^3$.

2013. Найти наименьший радиус кривизны у параболы $y^2 = 2px$.

Найти радиусы кривизны у следующих линий:

2014. $y = x^3$ в точке $(1, 1)$.

2015. $x = t^2$, $y = t^3$ в точке $(1, 1)$.

2016. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (цепная линия) в точке $(0, a)$.

2017. $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$.

2018. $x^n + y^n = 2a^n$ в точке (a, a) .

2019. $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$ в точке $(a, 0)$.

2020. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

2021. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2022. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2023. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, при $\varphi = 0$.

2024.
$$\begin{cases} x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}, \\ y = a(3 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}. \end{cases}$$

2025.
$$\begin{cases} x = ae^{-t}(\cos t - \sin t), \\ y = ae^{-t}(\cos t + \sin t). \end{cases}$$

2026.
$$\begin{cases} x = a(3t + \sin t \cos t (2 \cos^2 t + 3)), \\ y = 2a \cos^4 t. \end{cases}$$

Найти наибольшую кривизну у кривых:

2027. $y = \ln x$.

2028. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (эллипс).

2029. $y = a \ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

2030. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

2031. Если на нормали от точки кривой отложить в сторону вогнутости кривой величину радиуса кривизны, то найдем центр кривизны. Доказать, что его координаты для кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ выражаются формулами:

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Найти координаты центра кривизны у кривых:

2032. Гиперболы $xy = a^2$ в точке (a, a) .

2033. Строфоиды $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$.

2034. $y = x \ln x$ в той точке, где $y' = 0$.

2035. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2036. $r = a \cos^3 \varphi$.

2037. Доказать, что для точек спирали Архимеда $r = a\varphi$ при $\varphi \rightarrow \infty$ величина разности между радиус-вектором и радиусом кривизны стремится к нулю.

2038. Доказать, что при тех же условиях центр кривизны перемещается по кривой, стремящейся к совпадению с окружностью $r = a$.

2039. Доказать, что у кривых $r^n = a^n \cos n\varphi$ полярная нормаль в $n + 1$ раз больше радиуса кривизны.

2040. Доказать, что у кривых $r^n = a^n \sin n\varphi$ часть радиус-вектора, заключенная внутри круга кривизны, равна $\frac{2r}{n+1}$.

2041. Доказать равенство $R = \frac{rdr}{dp}$, где R — радиус кривизны, r — радиус-вектор, p — перпендикуляр из полюса на касательную.

2042. Доказать, что на эллипсе существуют, вообще говоря, три такие точки, что круги кривизны к эллипсу в этих точках проходят через данную точку эллипса.

2043. Доказать, что центры кривизны в точках спирали Архимеда $r = a\varphi$, лежащих на одном луче, расположены на эллипсе, размеры которого не зависят от выбора луча.

2044. Найти наименьшее расстояние от центра кривизны эллипса до центра эллипса.

2045. Координаты точек кривой можно выразить через длину дуги кривой: $x = x(s)$, $y = y(s)$. Обозначая через Δs малое приращение s , а через Δl — соответствующую хорду, доказать равенство

$$\Delta l = \Delta s - \frac{1}{24R^2} \Delta s^3 + \dots,$$

где R — радиус кривизны кривой.

2046. Точка касания принята за начало, касательная — за ось Ox , а ось Oy направлена от точки касания к центру кривизны. Доказать, что в окрестности точки касания, т. е. при малых значениях x , справедливы формулы:

$$y_1 = \frac{x^2}{2R} + ax^3 + \dots, \quad y_2 = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \dots,$$

где R — радиус кривизны в точке $(0, 0)$, y_1 — ордината точек кривой, y_2 — ордината точек круга кривизны.

2047. Найти параболу, соединяющую начало координат O с точкой $B(a+b, 0)$ так, чтобы дуга параболы OB вместе с нижней половиной окружности $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ образовала плавную кривую с непрерывной кривизной.

2048. Найти параболу $y = ax^2 + bx + c$, имеющую с синусоидой $y = \sin x$ в точке $(\frac{\pi}{2}, 1)$, общие касательную и кривизну.

2049. Найти параболу пятого порядка

$$y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F,$$

которая бы в точках (a, h) , $(-a, -h)$ касалась прямых $y = h$ и $y = -h$, имея касание второго порядка.

2050. Доказать, что окружность $(x-3a)^2 + (y-3a)^2 = 8a^2$ и парабола $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$ имеют в точке (a, a) соприкосновение третьего порядка.

2051. Доказать, что соприкасающийся круг (круг кривизны) с кривой второго порядка в вершине кривой имеет соприкосновение третьего порядка.

2052. Доказать, что для каждой точки, где кривая достаточно гладка, существует кривая второго порядка, имеющая с данной кривой в данной точке соприкосновения четвертого порядка.

2053. Доказать, что у циклоиды кривая второго порядка с соприкосновением четвертого порядка — всегда эллипс.

2054. Доказать, что у логарифмической спирали кривые второго порядка, имеющие с ней соприкосновение четвертого порядка, — эллипсы, большие оси которых образуют постоянный угол с радиус-вектором точки касания.

2055. Найти геометрическое место фокусов парабол, имеющих в данной точке соприкосновение второго порядка с данной кривой.

2056. Найти геометрическое место середин хорд, общих эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и его соприкасающемуся кругу.

2057. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на хорды, общие эллипсу и его соприкасающемуся кругу.

§ 5.4 ЭВОЛЮТЫ КРИВЫХ

Геометрическое место центров кривизны кривой называется эволютой данной кривой. Уравнение эволюты для кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ получается исключением параметра t из уравнений

$$X - x = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

Найти эволюты следующих кривых:

2058. Параболы $y^2 = 2px$.

2059. Эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2060. Гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$.

2061. Астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

2062. Циссоиды $y^2(2a - x) = x^3$.

2063. Гиперболы $xy = a^2$.

2064. Цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

2065. Циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2066.
$$\begin{cases} x = a(2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t), \\ y = a(2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t). \end{cases}$$

2067.
$$\begin{cases} x = a \cos t + (at + b) \sin t, \\ y = a \sin t - (at + b) \cos t. \end{cases}$$

2068. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2069. Гипоциклоиды

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

2070. Трактрисы $x = -a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right)$, $y = a \sin t$.

2071. Кривой $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$.

2072. Эвольвенты круга

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

2073. Логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$.

2074. Доказать равенство

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

где (x, y) — точка кривой, а (ξ, η) — соответствующая точка эволюты.

Пользуясь свойствами эволюты, найти длину дуг следующих кривых:

2075. Одной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2076. Астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ между точками $(a, 0)$ и $(0, a)$.

2077. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2078. Параболы Нейля $y^2 = x^3$ от $(0, 0)$ до $(4, 8)$.

2079. Эволюты параболы $y^2 = 2px$ от острия до точки пересечения эволюты с параболой.

2080. Логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$ при $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$.

Замечание. Все перечисленные кривые — эволюты других кривых, которые легко найти, пользуясь решениями задач, помещенных в первой части параграфа.

§ 5.5 ОГИБАЮЩИЕ КРИВЫЕ

Уравнение $f(x, y, a) = 0$ при различных значениях a изображает семейство кривых. Иногда существует огибающая этого семейства, т. е. кривая, касающаяся кривых этого семейства. Координаты точки касания кривой семейства и огибающей удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0. \quad (*)$$

Исключая из них параметр a , получаем уравнение, которому удовлетворяют все точки огибающей. Однако тем же уравнениям $(*)$ удовлетворяют и точки геометрического места особых точек кривых семейства, т. е. точек кривых, где $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

ПРИМЕРЫ:

1. Семейство парабол Нейля: $(y - a)^2 = x^3$.

Уравнения $(*)$ принимают вид

$$y - a = 0, \quad (y - a)^2 = x^3.$$

Из них, исключая a , получаем $x = 0$. Легко видеть, что это уравнение дает геометрическое место особых точек кривых.

2. Семейство листов Декарта:

$$x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0.$$

Уравнения $(*)$ принимают вид:

$$(y - a)^2 - x = 0, \quad x^3 + (y - a)^3 - 3x(y - a) = 0.$$

Исключая a , приходим к уравнению $x^4 = 4x$. Оно распадается на два: $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4}$. Первое из них дает геометрическое место особых точек, а второе — огибающую.

Не всякое семейство линий имеет огибающую: примером может служить семейство концентрических кругов. Может оказаться также, что часть кривых $f(x, y, a) = 0$ касается общей огибающей, а другая часть кривых того же семейства не касается ее и не имеет вообще огибающей.

В следующих задачах найти огибающую семейства линий.

2081. $(x - a)^2 + y^2 = 1$.

2082. $(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

2083. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a^2 + b^2 = 1$.

2084. $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$ при $\lambda + \mu = \lambda\mu$.

2085. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ при $a + b = d$.

2086. Прямых, отсекающих от данного угла величиной ω треугольник с площадью $2m^2$.

2087. $bx + ay = ab$ при $a + b = c$.

2088. $bx + ay = ab$ при $a^2 + b^2 = c^2$.

2089. Вершина угла данной величины α скользит по оси Ox , а одна из сторон проходит через точку $(0, h)$. Найти огибающую другой стороны.

2090. Квадрат со стороной a движется так, что две стороны его AB и BC проходят через точки $(\pm b, 0)$. Найти огибающую диагонали AC .

2091. Прямая равномерно вращается вокруг точки, движущейся с данной скоростью по данной прямой. Найти огибающую подвижной прямой.

2092. Круг катится без скольжения по данной прямой. Найти огибающую его диаметра.

2093. На хордах окружности $x^2 + y^2 = a^2$, параллельных оси Oy , строятся, как на диаметрах, окружности. Найти их огибающую.

2094. Найти огибающую окружностей, имеющих центр на параболы и проходящих через ее вершину.

2095. Найти огибающую окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах параболы, проходящих через фокус.

2096. Найти огибающую системы окружностей, имеющих центры на данном эллипсе и проходящих через центр эллипса.

2097. Найти огибающую окружностей с центрами на гиперболе $xy = a^2$, касающихся оси Ox .

2098. На радиус-векторах кривой, как на диаметрах, строятся окружности. Доказать, что огибающая этих окружностей есть подэра кривой относительно полюса¹.

2099. Круг $x^2 + y^2 = r^2$ есть огибающая семейства $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Какова зависимость между a и b ?

2100. Переменные z и t связаны уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{t}{b}\right)^m = 1$. Найти огибающую кривых $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{t}\right)^m = 1$.

¹Определение подэры см. на стр. 189.

2101. Светящаяся точка имеет координаты $(a, 0)$. Найти огибающую лучей, отраженных от окружности $x^2 + y^2 = a^2$. (Каустика.)

2102. Параллельные лучи падают на сферическое зеркало. Найти огибающую отраженных лучей.

2103. Светящаяся точка имеет координаты $(a, 0)$. Найти огибающую лучей, отраженных от параболы $y^2 = 2px$.

§ 5.6 ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ

Найти вершины, т. е. точки, где касательная параллельна одной из осей координат и где при этом нет точки перегиба, у следующих кривых:

2104. $x^2 + xy + y^2 = 3$.

2105. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2106. $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

2107. $x^4 + 4x^2y^2 - 6a^2x^2 + a^4 = 0$.

2108. $y = \sin \frac{1}{x}$.

2109. $y = \sin x^2$.

2110. Найти расстояние по горизонтали между последовательными вершинами кривой $y = e^{-ax} \cos bx$.

Найти точки перегиба следующих кривых:

2111. $y = x^4 - 6x^2$.

2117. $y = e^{1/x}$.

2112. $x^3 + y^3 = a^3$.

2118. $y = x^2 \ln x$.

2113. $x^3 + y^3 = x^2$.

2119. $y = \operatorname{tg} x$.

2114. $(a^2 + x^2)y = ax^2$.

2120. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

2115. $y = 1 + \sqrt[3]{x^5}$.

2121. $r \cos^3 \varphi = 1$.

2116. $y = x^4 e^{-x}$.

2122. $r = a(\operatorname{tg} \varphi - 1)$.

При исследовании формы кривой вблизи данной ее точки (a, b) полезно разложение в ряд Тейлора. Если $f(x, y) = 0$ — уравнение кривой, то разлагая левую часть по степеням разностей $x - a = \xi$, $y - b = \eta$, в силу равенства $f(a, b) = 0$ получаем:

$$p\xi + q\eta + \frac{1}{2}(r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2) + \dots = 0. \quad (**)$$

Здесь для краткости через p, q, r, s и t обозначены соответственно значения производных $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ при $x = a, y = b$.

Если $p^2 + q^2 > 0$, то при малых значениях $|\xi|$ и $|\eta|$ кривая близка к прямой $p\xi + q\eta = 0$, т. е. к прямой $p(x - a) + q(y - b) = 0$. Эта прямая — касательная к кривой в точке (a, b) . Если же $p = 0$ и $q = 0$, т. е. если в данной точке обе производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в нуль, то уравнение (**) переходит в такое:

$$\frac{1}{2}[r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2] + \dots = 0.$$

Точка (a, b) является особой точкой кривой.

Если при этом $s^2 - rt > 0$, то точка (a, b) — двойная. В ней пересекаются две ветви кривой. Угловые коэффициенты касательных к этим ветвям равны корням квадратного уравнения $t\sigma^2 + 2s\sigma + r = 0$.

Если $s^2 - rt < 0$, то точка (a, b) — изолированная: в достаточной близости от нее на кривой точек нет. Если $s^2 - rt = 0$, то для полного изучения характера особой точки нужно принимать во внимание дальнейшие члены разложения ряда Тейлора. Обычно при этом (a, b) есть точка возврата кривой.

Исследовать особые точки следующих алгебраических кривых:

2123. $y^2 = x^3$.

2124. $y^2 = bx^3 + ax^2$.

2125. $y^2 = ax^2 + bx^5$.

2126. $x^3 + y^3 - xy = 0$.

2127. $x^4 - 2ax^2y + 2ay^3 + a^2y^2 = 0; \quad a \neq 0$.

2128. $x^6 - 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$.

2129. $2y^3x - y^4 = x(y - x)^2$.

2130. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2131. При каком соотношении между a и b кривая

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

имеет двойную точку?

2132. Доказать, что при $4a^3 + 27b^2 < 0$ кривая $y^2 = x^3 + ax + b$ состоит из двух отдельных частей, а при $4a^3 + 27b^2 > 0$ является сплошной линией.

При изучении трансцендентных кривых формула Тейлора не всегда применима. Поэтому трансцендентные кривые имеют особые точки и таких видов, каких не имеется у алгебраических кривых. Таковы, например, точки прекращения и угловые точки.

Исследовать особые точки следующих трансцендентных кривых:

$$2133. y = x^x.$$

$$2134. y = x \ln x.$$

$$2135. y \ln x = 1.$$

$$2136. y = e^{1/x}.$$

$$2137. y = \frac{1}{1+e^{1/x}}.$$

$$2138. y = \frac{x}{1+e^{1/x}}.$$

$$2139. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$2140. y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$2141. y = \sin \frac{1}{x}.$$

$$2142. y = x \sin \frac{1}{x}.$$

$$2143. y = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

$$2144. x^y = y^x.$$

При отыскании асимптот кривых следует различать два случая — асимптоты, параллельные оси Oy , и асимптоты, не параллельные ей. Первые имеют уравнения $x = x_0$, где x_0 — то значение x , при котором $y = f(x)$ обращается в ∞ . Прямая $y = ax + b$, не параллельная оси Oy , будет асимптотой кривой в том случае, если при $x \rightarrow \infty$ для точек кривой имеет место равенство.

$$y = ax + b + \varepsilon(x), \quad \text{где } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

$$\text{Отсюда следует, что } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax).$$

Найти асимптоты следующих кривых:

$$2145. y = \frac{x}{x-1}.$$

$$2146. y = \frac{1}{(x-3)^2}.$$

$$2147. y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$2148. y = x + \frac{1}{x}.$$

$$2149. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$$2150. y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x-a}.$$

$$2151. y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x+b}.$$

$$2152. y^3 - x^3 = x^2 + y^2.$$

$$2153. x^3 + y^3 = a^3.$$

$$2154. x^3 + y^3 = 3axy.$$

$$2155. x^3 + y^3 + 2y - x = 0.$$

$$2156. r\varphi = a.$$

Изучить форму следующих кривых, предварительно решив уравнение кривой относительно одной из координат:

$$2157. y^2 = x^3(2-x).$$

$$2158. x^4 + y^4 = a^4.$$

2159. $x^{2n} + y^{2n} = a^{2n}$, n — целое положительное и большое.

2160. $x^4 - 4x^2y^2 - 6x^2 - 4y^2 = 0$.

2161. $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$.

2162. $y^2 - x^4 + x^6 = 0$.

2163. $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$.

2164. $x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$.

2165. $y^4 - 2xy^2 - 3x^2 + x^4 = 0$.

2166. $x^4 + y^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0$.

2167. $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$.

Изучить форму следующих замкнутых кривых, перейдя к полярным координатам:

2168. $x^4 + y^4 = 2xy$.

2169. $(x^2 + y^2 - 6x)^2 = x^2 + y^2$ (улитка Паскаля).

2170. $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$ (кардиоиды).

2171. $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

2172. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2173. $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$.

2174. $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

При исследовании кривых с ветвями, уходящими в бесконечность, важно выяснить, имеются ли асимптоты и каково расположение далеких частей кривой относительно асимптот.

ПРИМЕРЫ:

1. Кривая $x^4 - 2x^3y + x^2y^2 = y$.

Деля на x^2 и извлекая корень, получаем: $x - y = \pm \frac{\sqrt{y}}{x}$, $y = x \pm \frac{\sqrt{y}}{x}$. Если кривая имеет асимптоту $y = \alpha x + \beta$, то при $x \rightarrow \infty$ величина отношения $\frac{y}{x} \rightarrow \alpha$. Поэтому слагаемое $\frac{\sqrt{y}}{x}$ представляет величину меньшего порядка, чем x . Следовательно, $y \approx x$. Внося это первое приближение в правую часть равенства для y , получаем: $y = x \pm \frac{\sqrt{x}}{x} = x \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$. Это — второе приближение для y при больших значениях $|x|$. Оно показывает, что кривая имеет асимптоту $y = x$. При этом кривая приближается к асимптоте только при $y \rightarrow +\infty$ двумя ветвями — сверху и снизу.

У той же кривой есть и другая асимптота. Разделив уравнение кривой на $(x - y)^2$ и извлекая корень, находим: $x = \frac{\pm \sqrt{y}}{x - y}$. Если x оставаться ограниченным, то отсюда при $|y| \rightarrow \infty$ следует, что $x \approx \pm \frac{\sqrt{y}}{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$. Это показывает, что у кривой есть асимптота $x = 0$. При этом

кривая приближается к ней в сторону ее верхней половины при $y \rightarrow +\infty$. Приближение выполняется двумя ветвями — справа и слева.

2. Кривая $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.

Совокупность слагаемых высшей степени $x^3 + y^3$ имеет линейный множитель $x + y$. Это дает одну асимптоту. Деля на $x^2 - xy + y^2$, находим: $x + y = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + y^2}$ или $y = -x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + y^2}$. В правой части второе слагаемое можем отбросить как величину низшего порядка. Таким образом, получаем первое приближение для y при $x \rightarrow \infty$: $y \approx -x$. Подставляя его в правую часть формулы для y , получаем:

$$y \approx -x + \frac{x^2 + x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = -x + \frac{2}{3}.$$

Это — второе приближение для y . Подставляя его в правую часть формулы для y , получаем:

$$\begin{aligned} y &\approx -x + \frac{x^2 + \left(-x + \frac{2}{3}\right)^2}{x^2 - x\left(-x + \frac{2}{3}\right) + \left(-x + \frac{2}{3}\right)^2} = \\ &= -x + \frac{2x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}}{3x^2 - 2x + \frac{4}{9}} = -x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3x} + \frac{2}{3x^2}}{1 - \frac{2}{3x} + \frac{4}{27x^2}} = \\ &= -x + \frac{2}{3} + \frac{4}{81x^2}. \end{aligned}$$

Это — третье приближение для y . Оно показывает, что кривая имеет асимптоту $y = -x + \frac{2}{3}$. При этом кривая приближается к ней в обе стороны: при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, оставаясь выше, чем асимптота.

Изложенные приемы дают простой способ исследования асимптот алгебраических кривых. Каждая из них получается выделением линейного множителя в совокупности членов уравнения, имеющих высшую степень относительно x и y одновременно.

Более трудно исследование параболических ветвей кривой, по которым кривая уходит в бесконечность, не приближаясь к какой-нибудь прямой. Наиболее полный способ исследования основан на разложении y в ряд по убывающим целым или дробным степеням x .

Способ получения такого разложения принадлежит Ньютону, а полное доказательство сходимости этого разложения при достаточно больших значениях $|x|$ было дано лишь в середине XIX в. французским ученым Пюизё. Этот способ дает заодно и исследование асимптот, если они существуют.

ПРИМЕР. Рассмотрим его в применении к кривой

$$x^4 + x^3y = y^3 + xy.$$

Если заменить здесь y на x^σ , четыре члена уравнения обратятся в степени x с показателями

$$4, \quad 3 + \sigma, \quad 3\sigma, \quad 1 + \sigma. \quad (1)$$

Приравнивая эти показатели попарно друг другу, найдем такие значения σ : $1, \frac{4}{3}, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. При этих значениях σ числа (1) дадут четверки чисел:

σ	4	$3 + \sigma$	3σ	$1 + \sigma$
1	4	4	3	2
$4/3$	4	$13/3$	4	$7/3$
3	4	6	9	4
$3/2$	4	$9/2$	$9/2$	$5/2$
$1/2$	4	$7/2$	$3/2$	$3/2$

В каждой строчке этой таблицы должны находиться по крайней мере два равных числа. Выбираем те строчки, где эти равные части больше остальных чисел той же строчки. Таких строчек две — при $\sigma = 1$ и при $\sigma = \frac{3}{2}$. Каждая из них дает разложение искомого вида. При $\sigma = 1$ разложение будет иметь вид:

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \dots, \quad (2)$$

а при $\sigma = \frac{3}{2}$ —

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx + cx^{\frac{1}{2}} + d + ex^{-\frac{1}{2}} + fx^{-1} + \dots \quad (3)$$

Коэффициенты находятся обычными приемами.

Для получения разложения (2) удобно в уравнении $x^4 + x^3y = y^3 + xy$ положить $y = \frac{u}{\xi}$, $x = \frac{1}{\xi}$. После этого оно переходит в такое:

$$1 + u = \xi u^3 + \xi^2 u. \quad (4)$$

При этих обозначениях разложение (2) принимает вид

$$u = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + \dots$$

Отсюда находим:

$$u^2 = A^2 + 2AB\xi + (2AC + B^2)\xi^2 + \dots,$$

$$u^3 = A^3 + 3A^2B\xi + (3A^2C + 3AB^2)\xi^2 + \dots$$

Подставляя эти разложения в уравнение (4), получаем:

$$1 + A + B\xi + C\xi^2 + \dots = \xi(A^3 + 3A^2B\xi + 3(A^2C + AB^2)\xi^2 + \dots) + \xi^2(A + B\xi + C\xi^2 + \dots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в обеих частях равенства, находим:

$$1 + A = 0, \quad B = A^3, \quad C = 3A^2B + A,$$

$$D = 3(A^2C + AB^2) + B, \quad \dots$$

Отсюда получаются значения коэффициентов:

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = -4, \quad D = -16, \quad \dots$$

Разложение (2) принимает вид

$$y = -x - 1 - \frac{4}{x} - \frac{16}{x^2} - \dots$$

Оно показывает, что у кривой имеется асимптота $y = -x - 1$. При этом, если $x \rightarrow +\infty$, то ветвь кривой приближается к асимптоте снизу, а при $x \rightarrow -\infty$ — сверху.

Для получения разложения (3) в уравнении $x^4 + x^3y = y^3 + xy$ удобно положить $x = \frac{1}{\xi^2}$, $y = \frac{u}{\xi^3}$. После этого уравнение переходит в такое:

$$\xi + u = u^3 + u\xi^4. \quad (5)$$

Разложение (3) принимает вид

$$u = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + \dots$$

Отсюда получаем:

$$u^2 = a^2 + 2ab\xi + (2ac + b^2)\xi^2 + (2ad + 2bc)\xi^3 + \dots,$$

$$u^3 = a^3 + 3a^2b\xi + (3a^2c + 3ab^2)\xi^2 + (2a^2d + 6abc + b^3)\xi^3 + \dots$$

Подставляя эти разложения в равенство (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим:

$$a = a^3, \quad 1 + b = 3a^2b, \quad c = 3a^2c + 3ab^2, \quad d = 2a^2d + 6abc + b^3, \dots$$

Отсюда, так как $a \neq 0$, получаем две системы решений:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{3}{8}, \quad d = 1, \quad \dots;$$

$$a = -1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{8}, \quad d = 1, \quad \dots$$

Поэтому разложение (3) имеет вид

$$y = x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}\sqrt{x} + 1 + \dots \quad (6)$$

Здесь $\sqrt{x}$ может иметь каждое из значений $+\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$.

Полученный результат показывает, что у данной кривой имеются две бесконечные ветви, уходящие в бесконечность при $x \rightarrow +\infty$, так что расстояние между ними и кривыми $y = \pm x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x \mp \frac{3}{8}\sqrt{x} + 1$ стремится к нулю. *Замечание.* В таблице, из которой мы получили значения $\sigma = 1$ и $\sigma = \frac{3}{2}$, имеются значения $\sigma = 3$ и $\sigma = \frac{1}{2}$, при которых равные значения являются наименьшими среди чисел соответствующей строчки. Они дают разложения, сходящиеся при достаточно малых значениях $|x|$ и расположенные по возрастающим степеням x . Эти разложения имеют вид:

$$y = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6 + Ex^7 + \dots,$$

$$y = ax^{\frac{1}{2}} + bx + cx^{\frac{3}{2}} + dx^2 + ex^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Коэффициенты их находятся подобными же приемами, после чего первое разложение дает равенство

$$y = x^3 + x^5 - x^6 + x^7 + \dots$$

Это равенство показывает, что в начале координат кривая имеет соприкосновение четвертого порядка с кривой $y=x^3$ и подобно ей имеет точку перегиба.

Другое разложение в данном случае геометрического смысла не имеет, так как среди его коэффициентов имеются мнимые, — в частности, $a = \pm i$.

Разложения указанного типа дают наиболее сильное средство при изучении кривой в окрестности особой точки, которая путем переноса координат помещена в начале координат.

Построить кривые (считать $a > 0$):

2175. $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$.	2195. $(x^2 - y^2)^2 = 4xy$.
2176. $4y^2 = 4x^2y + x^5$.	2196. $x^2y^2 + y^4 = 4x^2$.
2177. $x^5 + 5ax^4 - 16a^3y^2 = 0$.	2197. $x^4 - y^4 + xy = 0$.
2178. $y^3 - x^2y + x^5 = 0$.	2198. $x^2(x^2 + y^2) = 4(x - y)^2$.
2179. $y^5 + x^4 = xy^2$.	2199. $x^4 - y^4 = 4y^2 - x^2$.
2180. $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$.	2200. $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$.
2181. $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$.	2201. $(x^2 - 1)y^2 = x^4 - 4x^2$.
2182. $y^3 - x^3 + y - 2x = 0$.	2202. $x^2(y - 2)^2 + 2xy = y^2$.
2183. $(x^2 - y^2)^2 = 2x$.	2203. $x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2$.
2184. $x^2(x - y)^2 + y = 0$.	2204. $(x + 1)(x + 2)y^2 = x^2$.
2185. $x^3y^3 = x - y$.	2205. $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$.
2186. $x^2y^2 + x - 2y = 0$.	2206. $(2a - x)y^2 = x^3$.
2187. $(2x + y)^2(x + y) = x$.	2207. $x^3 + y^3 = 3x^2$.
2188. $(x^2 - y^2)(x - y) = 1$.	2208. $x^4 - 2x^2 = y^3(x - 1)$.
2189. $3x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 2x = 0$.	2209. $x^4 - y^4 = 4x^2y$.
2190. $xy(x - y) + x + y = 0$.	2210. $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$.
2191. $x^2y^2 + y = 1$.	2211. $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$.
2192. $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0$.	2212. $x^2y^2 = x^2 + y^2$.
2193. $xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 12$.	2213. $x^5 + y^5 = xy^2$.
2194. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.	2214. $x^4 + 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$.

Изучить следующие кривые, уравнения которых даны в параметрической форме или могут быть заданы в такой форме:

2215. $x = \frac{2+t^2}{1+t^2}, y = t - \frac{t}{1+t^2}$.	2218. $x = \frac{t}{1-t^2}, y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.
2216. $x = \frac{t^2+1}{4(1-t)}, y = \frac{t}{t+1}$.	2219. $x = \frac{t^2}{t^2-1}, y = \frac{t^2+1}{t+2}$.
2217. $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^4+1}$.	2220. $x = \frac{t^2-3}{t^2+1}, y = \frac{t(t^2-3)}{t^2+1}$.

$$2221. x = \frac{t-t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^2-t^3}{1+t^2}.$$

$$2222. x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$2223. x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

$$2224. x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}, y = \frac{2t-1}{t^2(t-1)}.$$

$$2225. y^2 = a^2 \sin \frac{y}{x}.$$

$$2226. y^2 = a^2 \cos \frac{y}{x}.$$

2227. Исследовать линию $x^y = y^x$, заметив, что она распадается на прямую $y = x$ и кривую

$$x = (1 + \sigma)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad y = (1 + \sigma)^{\frac{1}{\sigma} + 1}.$$

§ 5.7

КРИВЫЕ ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ: КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

2228. Показать, что линия

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a_1t^2 + b_1t + c_1, \quad z = a_2t^2 + b_2t + c_2$$

лежит в некоторой плоскости, и найти уравнение этой плоскости.

2229. При каком соотношении между коэффициентами $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ кривая

$$x = a\varphi(t) + b\psi(t) + c\omega(t) + d,$$

$$y = a_1\varphi(t) + b_1\psi(t) + c_1\omega(t) + d_1,$$

$$z = a_2\varphi(t) + b_2\psi(t) + c_2\omega(t) + d_2,$$

лежит в плоскости?

2230. Показать, что кривая

$$x = \sin 2\varphi, \quad y = 1 - \cos 2\varphi, \quad z = 2 \cos \varphi$$

лежит на поверхности шара.

2231. Показать то же для кривой

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}.$$

2232. Перевести в параметрическую форму уравнение кривой Вивиани, определенной пересечением шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, положив $x = a \sin^2 t$.

2233. Доказать, что проекция предыдущей кривой на плоскость xOz есть парабола.

2234. Найти проекцию на плоскость xOy линии пересечения параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $x + y + z = 1$.

2235. Найти проекцию линии

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = 2t$$

на плоскость xOy .

2236. Доказать, что проекция винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

на плоскость yOz есть синусоида.

2237. Доказать, что при переносе начала координат в точку $O_1(0, 0, b\beta)$ и повороте осей абсцисс и ординат вокруг оси O_1z_1 на угол β уравнениям винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

можно придать вид

$$x_1 = a \cos t_1, \quad y_1 = a \sin t_1, \quad z_1 = bt_1.$$

Это показывает, что винтовая линия способна скользить сама по себе.

2238. Найти уравнение касательной к кривой

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

2239. Найти касательную к предыдущей кривой, параллельную плоскости $x + 3y + 2z = 0$.

2240. Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

2241. У кривой

$$x = -t \cos t + \sin t, \quad y = t \sin t + \cos t, \quad z = t + 1$$

найти точки, в которых касательная параллельна плоскости yOz или xOz .

2242. Найти касательную к кривой

$$x^2 + y^2 = 10, \quad y^2 + z^2 = 25$$

в точке $(1, 3, 4)$.

2243. Найти касательную к кривой

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, \quad x^2 + 2y^2 = z$$

в точке $(-2, 1, 6)$.

2244. Найти касательную к кривой

$$x^2 + y^2 = z, \quad x = y$$

в точке $(m, m, 2m^2)$.

2245. Найти косинусы углов с осями у касательной к кривой

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz.$$

2246. Такой же вопрос для круга

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = mx.$$

2247. К кривой

$$y^2 = 2px, \quad z^2 = 2qx$$

проведена касательная в точке, где $x = \frac{p+q}{2}$. Найти ее длину от точки касания до плоскости $x = 0$.

2248. Найти угол между касательной к кривой

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

и вектором, проведенным из начала координат в точку касания.

2249. Найти нормальную плоскость к кривой

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x.$$

2250. В точке, где $x = \frac{b}{2}$, найти нормальную плоскость к кривой

$$y^2 = 2px, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

2251. Доказать, что нормальные плоскости кривой

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin \alpha \sin t, \quad z = a \cos \alpha \sin t$$

проходят через прямую

$$x = 0, \quad z + y \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

2252. Доказать, что кривая

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под одним и тем же углом.

2253. При каком a кривая

$$x = e^{at} \cos t, \quad y = e^{at} \sin t, \quad z = e^{at}$$

пересекает все образующие конуса $x^2 + y^2 = z^2$ под углом $\frac{\pi}{4}$?

2254. Доказать, что линии пересечения цилиндров $y^2 + z^2 = m^2$ с поверхностью $xy = az$ пересекают под прямым углом все образующие этой поверхности, принадлежащие одной системе.

2255. Линия $x = a \operatorname{tg} t$, $y = b \cos t$, $z = b \sin t$ расположена на поверхности параболоида. Доказать, что она пересекает все образующие одной системы под прямым углом.

2256. Кривая, называемая локсодромией, определяется уравнением $\varphi = a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$, где θ — широта, а φ — долгота точки на шаре. Доказать, что она пересекает меридианы шара под углом θ , тангенс которого равен a .

Стереографическая проекция состоит в следующем. Верхняя точка шара $x^2 + y^2 + z^2 = az$, т. е. точка $A(0, 0, a)$, соединяется прямой с произвольной точкой $M(x, y, 0)$ плоскости xOy . Точка M_1 , в которой прямая AM пересекает поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = az$, является изображением на шаре точки M плоскости xOy , а точка M является изображением точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на шаре. Таким образом, стереографическая проекция дает взаимно однозначное соответствие точек плоскости и шара, за исключением точки A , лежащей на верху шара. При этом

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad y_1 = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad z_1 = \frac{a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

2257. Доказать, что стереографическая проекция дает конформное изображение, т. е. что линии на плоскости пересекаются под тем же углом, что и их изображения на шаре.

2258. Доказать, что кривая $r = e^{m\varphi}$, расположенная на плоскости xOy , где полярная ось совпадает с положительной частью оси Ox , при стереографической проекции переходит в локсодромию.

2259. Доказать, что окружности на шаре при стереографической проекции переходят в окружности на плоскости. При этом прямые считаются за частные случаи окружностей.

2260. Центральная проекция шара $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ на плоскость xOy образуется следующим образом. Произвольная точка $M(x, y, 0)$ плоскости xOy соединяется прямой AM с центром шара $A(0, 0, a)$. Точка M_1 , в которой AM пересекает шар, принимается за изображение точки M , и наоборот. Доказать, что эта проекция не есть конформное изображение.

2261. Доказать, что касательная к кривой

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z$$

образует постоянный угол с некоторым определенным направлением.

2262. Координаты точек некоторой кривой удовлетворяют соотношению

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (x dx + y dy + z dz)^2.$$

Доказать, что касательные к этой кривой касаются шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2263. Доказать, что касательные к кривой

$$x = a(\sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - \cos t), \quad z = be^{-t}$$

пересекают плоскость xOy по окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$.

2264. Найти линии, по которым касательные к винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

пересекают:

а) плоскость xOy ;

б) плоскость xOz .

Сферической индикатрисой касательных данной кривой называют геометрическое место концов единичных векторов, проведенных из начала координат и параллельных этим касательным.

2265. Найти сферическую индикатрису касательных винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt.$$

2266. Тот же вопрос для кривой

$$x = 2t - \sin 2t, \quad y = \cos 2t, \quad z = 4 \sin t.$$

§ 5.8

КРИВЫЕ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ: СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ, НОРМАЛЬ И БИНОРМАЛЬ

2267. Пользуясь третьей формулой Френе, показать, что кривая, у которой кручение постоянно равно нулю, лежит в плоскости.

Найти соприкасающиеся плоскости кривых:

2268. $y^2 = x$, $x^2 = z$ в точке $(1, 1, 1)$.

2269. $y = \varphi(x)$, $z = a\varphi(x) + b$.

2270. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

2271. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

2272. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

2273. $x = at^2 + bt + c$, $y = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $z = a_2t^2 + b_2t + c_2$.

2274. Доказать, что соприкасающаяся плоскость линии

$$x^2 = \varphi'(t), \quad y^2 = t^2 \varphi'(t), \quad z = \varphi(t),$$

расположенный на коноидальной поверхности $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, совпадает с касательной плоскостью к этой поверхности.

Найти уравнения главной нормали и бинормали к кривым:

2275. $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$.

2276. $x = y^2, z = x^2$ в точке $(1, 1, 1)$.

2277. $x = \frac{t^4}{3}, y = \frac{t^2}{3}, z = \frac{t^2}{2}$.

2278. $x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{2t^3}{3}, z = \frac{t^4}{2}$ в точке $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

2279. Найти уравнения сферических индикатрис главной нормали и бинормали винтовой линии (см. задачи 2265, 2275).

2280. Кривая

$$x = a \operatorname{ch} t \cos t, \quad y = a \operatorname{ch} t \sin t, \quad z = at$$

лежит на поверхности вращения $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$, называемой катеноидом. Доказать, что в каждой точке кривой бинормаль совпадает с нормалью к поверхности.

2281. Доказать, что одна из биссектрис углов между касательной и бинормалью к кривой

$$x = 3t, \quad y = 3t^2, \quad z = 2t^3$$

имеет постоянное направление.

2282. Кривая имеет проекцией на плоскость xOy синусоиду $y = \sin x$. Какому соотношению должны удовлетворять аппликаты z ее точек, чтобы главные нормали были параллельны плоскости yOz ?

2283. По главным нормальям винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

откладываются отрезки данной длины l . Найти геометрическое место их концов.

2284. Найти поверхность, на которой располагаются все главные нормали винтовой линии предыдущей задачи.

2285. Тот же вопрос для бинормалей.

Найти радиусы кривизны ρ у следующих кривых:

2286. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$.

2287. $x = a \operatorname{ch} t \cos t, y = a \operatorname{ch} t \sin t, z = at$.

2288. $x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}.$

2289. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t.$

2290. $x = a \frac{\cos t}{\operatorname{ch} t}, y = a \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}, z = a(t - \operatorname{th} t).$

2291. $x^2 = 2az, y^2 = 2bz.$

2292. $x^2 - y^2 + z^2 = 1, y^2 - 2x + z = 0$ в точке $(1, 1, 1).$

2293. $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3.$

2294. $x = a(1 - \cos 2t), y = a \sin 2t, z = 2a \cos t.$

2295. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, z = a \cos 2t.$

2296. $x = \sin z - z \cos z, y = \cos z + z \sin z.$

Найти кручение кривых:

2297. $y^2 = x, x^2 = z.$

2298. $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3.$

2299. $x = \sin u - u \cos u, y = \cos u + u \sin u, z = u.$

2300. $x = a(1 - \cos t), y = a \sin 2t, z = 2a \cos t.$

2301. Найти кривизну и кручение кривой

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}.$$

2302. Тот же вопрос для кривой

$$x = 2abt, \quad y = a^2 \ln t, \quad z = b^2 t^2.$$

2303. Тот же вопрос для кривой

$$x = a \frac{\cos t}{\cos kt}, \quad y = a \frac{\sin t}{\cos kt}, \quad z = \frac{a\sqrt{1+k^2}}{k \cos kt}.$$

2304. Доказать равенство радиусов кривизны и кручения у кривой $x = \operatorname{ch} z; y = \operatorname{sh} z.$

2305. Доказать, что у сопровождающего триэдра кривой

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t$$

каждое из ребер образует с Oz постоянный угол.

2306. При каком условии центр кривизны винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

лежит на том же цилиндре, что и сама винтовая линия?

2307. Доказать, что у кривой

$$x = a \operatorname{ch} t \cos t, \quad y = a \operatorname{ch} t \sin t, \quad z = at$$

отрезок нормали (не главной!) от точки на кривой до оси Oz равен радиусу второй кривизны.

2308. Через четыре точки кривой можно провести шар. Если они стремятся к одной точке, то при соответствующих условиях шар этот стремится к некоторому предельному шару, называемому соприкасающимся шаром. Найти его центр и радиус.

2309. Найти приближенные с точностью до малых высшего порядка уравнения проекций кривой на три плоскости сопровождающего триэдра вблизи точки касания.

2310. Из центра шара проводятся радиусы, параллельные главным нормальям замкнутой кривой, не имеющей особых точек. Доказать, что геометрическое место их концов делит поверхность шара на две равновеликие части. (Якоби.)

§ 5.9

ПОВЕРХНОСТИ. ИХ УРАВНЕНИЯ

2311. Поверхности, описанные прямой, проходящей через данную точку (a, b, c) и данную кривую, называются коническими. Доказать, что их уравнения могут быть представлены в виде

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

2312. Поверхности, образованные движением прямой, параллельной вектору $P(l, m, n)$ и проходящей через данную кривую, называются цилиндрическими. Доказать, что общий вид уравнения цилиндрических поверхностей

$$f(nx - lz, ny - mz) = 0.$$

2313. Доказать, что уравнение поверхностей вращения около оси Oz имеет вид $f(x^2 + y^2, z) = 0$.

2314. Доказать, что уравнение поверхности вращения около прямой

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt$$

имеет вид

$$f(lx + my + nz, R) = 0,$$

где

$$R = (n(y - b) - m(z - c))^2 + (l(z - c) - n(x - a))^2 + \\ + (m(x - a) - l(y - b))^2.$$

2315. Найти уравнение цилиндра, описанного около шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, с образующими, параллельными прямой

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt.$$

2316. Найти уравнение цилиндра с образующими, параллельными прямой $x = y = z$, описанного около эллипсоида $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

2317. Найти уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой — кривая

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = ay,$$

а образующие параллельны вектору $\mathbf{P}(l, m, n)$.

2318. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке $(-1, 0, 0)$ и описанной около параболоида $2y^2 + z^2 = 4x$.

2319. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке (a, b, c) , а направляющей — параболу

$$z = 0, \quad y^2 = 2px.$$

2320. Найти уравнение конической поверхности, имеющей вершину в точке $(0, 0, -c)$, а направляющей — лемнискату

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y).$$

2321. Около параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ описать коническую поверхность с вершиной в точке $(0, 0, -2)$.

2322. Найти уравнение конической поверхности, описанной около поверхности $xyz = c^3$ и с вершиной в $(0, 0, -3c)$.

Найти уравнение поверхностей, полученных вращением данной кривой вокруг данной оси:

2323. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox .

2324. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy .

2325. Параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox .

2326. Окружности $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ около оси Oy .

2327. Параболы $y^2 = 2px$ около оси Oy .

2328. Лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около Ox .

2329. Той же кривой около оси Oy .

2330. Поверхность, происходящая от вращения синусоиды

$$x = \sin z, \quad y = 0$$

около оси Oz , освещена параллельными лучами, составляющими с Oz угол $\frac{\pi}{4}$. Найти форму тени, отбрасываемой ею на плоскость xOy .

Параметрическое представление поверхностей, введенное Гауссом, состоит в том, что координаты точек поверхности даются в функции от двух параметров:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v).$$

Следующие вопросы имеют дело с параметрическими уравнениями поверхностей.

2331. Уравнение шара можно представить в виде

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta.$$

Найти подобную форму уравнения для эллипсоида.

2332. Поверхность задана уравнениями

$$x = a \cos^4 u \cos^4 v, \quad y = a \cos^4 u \sin^4 v, \quad z = a \sin^4 u.$$

Найти ее уравнение в обычной форме.

2333. Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a \cos^3 u \cos^3 v, \quad y = a \cos^3 u \sin^3 v, \quad z = a \sin^3 v.$$

2334. Тот же вопрос для поверхности, заданной уравнениями

$$x = a \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = b \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = c \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}.$$

§ 5.10

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И НОРМАЛИ. ОГИБАЮЩИЕ

Найти касательные плоскости к поверхностям:

2335. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке (x_1, y_1, z_1) .

2336. $x^2 + y^2 = z^2$ в точке (x_1, y_1, z_1) .

2337. $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $(1, 2, 2)$.

2338. $x^n + y^n + z^n = a^n$ в точке (x_1, y_1, z_1) .

2339. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$ в точке (x_1, y_1, z_1) .

2340. Уравнение алгебраической поверхности имеет вид $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ — полином. Вводя дополнительно степени вспомогательной переменной t , можно сделать этот полином однородным, после чего уравнение поверхности принимает вид: $F(x, y, z, t) = 0$ при $t = 1$. Доказать, что уравнение касательной плоскости к этой поверхности можно написать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y + \frac{\partial F}{\partial z}Z + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

где переменная t после дифференцирования заменена единицей.

2341. Определить расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $x \cos \frac{2\pi z}{h} = y \sin \frac{2\pi z}{h}$.

2342. К поверхности $xyz = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

2343. Найти линии, по которым касательная плоскость к поверхности $xy = az$ в точке (x_1, y_1, z_1) пересекается с поверхностью.

2344. Найти уравнение касательной плоскости к косому геликоиду

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

2345. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

в точке $(2, 2, 2)$.

2346. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

2347. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, образуют на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

2348. Доказать, что у поверхности

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

сумма квадратов отрезков, образованных касательной плоскостью на осях, есть величина постоянная.

2349. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, проходят через одну и ту же точку.

2350. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z = x + f(y - z)$, параллельны одной и той же прямой.

2351. Доказать, что отрезок на оси Oz , образованный плоскостью, касательной к поверхности $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$, пропорционален расстоянию от точки касания до начала координат.

2352. Найти поверхность, на которой лежат касательные к винтовой линии, и доказать, что нормаль к этой поверхности составляет с осью Oz постоянный угол.

2353. Найти на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ точки, в которых нормаль образует постоянный данный угол α с осью Ox .

2354. Доказать, что точка пересечения нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ с плоскостью xOy одинаково удалена от начала координат и от основания нормали.

2355. Отрезок нормали к поверхности $z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} + b$, заключенный между поверхностью и плоскостью xOy , проектируется на xOy . Доказать, что величина проекции постоянна.

2356. Доказать такое же свойство для нормалей к поверхности

$$\begin{aligned}x &= v \cos u - \varphi(u) \cos u + \varphi'(u) \sin u, \\y &= v \sin u - \varphi(u) \sin u - \varphi'(u) \cos u, \\z &= \sqrt{2v}.\end{aligned}$$

2357. Из точки M на поверхности

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z^2 = -r^2 + f(re^\varphi)$$

проводится нормаль MN до точки N на плоскости xOy , и опускается перпендикуляр MP на плоскость xOy . Доказать, что NOP , где O — начало координат, равен $\frac{\pi}{4}$.

2358. Доказать, что у поверхности $z^2 = a^2 \arctg \frac{y}{x} + f(x^2 + y^2)$ площадь треугольника NOP , полученного таким же путем, как и в предыдущей задаче, есть величина постоянная.

В следующих задачах требуется установить взаимную ортогональность указанных поверхностей (так что, если заданы три поверхности, то надо доказать, что каждая из них пересекается с каждой из остальных под прямым углом).

Доказать ортогональность следующих систем поверхностей:

2359. $xy = az^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $z^2 + 2x^2 = c(z^2 + 2y^2)$.

2360. $xyz = a^3$, $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$.

2361. $xy = \alpha z$, $\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = \beta$, $\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = \gamma$.

2362. $x^2 + y^2 + z^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = by$, $x^2 + y^2 + z^2 = cz$.

2363. $x(x^2 + y^2 + z^2) + a(x^2 + y^2 - z^2) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$.

2364. Через каждую точку (x, y, z) проходят три поверхности вида $\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$ при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, представляющие соответственно эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперboloиды. Доказать ортогональность этих поверхностей.

2365. Из точек прямой

$$y = x, \quad z = \frac{\pi}{4},$$

лежащей на поверхности $y = x \operatorname{tg} z$, проводятся нормали к поверхности. Доказать, что они располагаются на гиперболическом параболоиде.

2366. Такой же вопрос для прямой

$$z = h, \quad by = x\sqrt{a^2 - h^2}$$

и поверхности $b^2y^2 = x^2(a^2 - z^2)$.

2367. Найти геометрическое место проекций центра эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ на касательные плоскости.

2368. По эллипсоиду предыдущей задачи (при $a > b > c$) катится без скольжения и верчения другой такой же эллипсоид так, что в один из моментов концы больших полуосей соприкасались. Найти геометрическое место центра эллипсоида.

2369. Доказать, что поверхность $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 2xyz$ пересекается шаром $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ по четырем кругам.

Поверхности $f(x, y, z, a) = 0$, уравнения которых содержат коэффициент a , меняющийся от одной поверхности к другой, образуют однопараметрическое семейство поверхностей. Если две бесконечно близкие поверхности пересекаются по некоторой линии, то координаты точек этой линии, называемой характеристической линией, удовлетворяют уравнениям:

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Исключая параметр a из этих уравнений, найдем уравнение $F(x, y, z) = 0$. Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то она вся лежит на полученной поверхности.

Подобно этому, уравнение $f(x, y, z, a, b) = 0$ изображает двухпараметрическое семейство поверхностей. Предельное положение точки пересечения трех близких поверхностей

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a, b) &= 0, \\ f(x, y, z, a + \Delta a, b) &= 0, \\ f(x, y, z, a, b + \Delta b) &= 0 \end{aligned}$$

при $\Delta a \rightarrow 0$ и $\Delta b \rightarrow 0$, т. е. характеристическая точка поверхности семейства, удовлетворяет уравнениям:

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Исключая отсюда параметры a и b , получим уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$. Если данное семейство имеет огибающую поверхность, то все ее точки удовлетворяют полученному уравнению; но ему могут удовлетворять и другие точки.

Найти огибающую следующих семейств поверхностей:

2370. Шаров $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2371. Плоскостей, проходящих через точку $(\sqrt{2}, 0, 0)$ и удаленных от начала на расстояние, равное единице.

2372. Найти огибающую шаров

$$(x - lt)^2 + (y - mt)^2 + (z - nt)^2 = a^2,$$

где t — переменный параметр.

2373. Найти огибающую шаров, большие круги которых расположены на параболоиде $z = x^2 + y^2$.

2374. Тот же вопрос для параболоида $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$.

2375. Найти огибающую шаров радиуса a , центры которых лежат на окружности $x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0$.

2376. Найти огибающую плоскостей, касающихся парабол

$$y^2 = 2x, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad y^2 = 2z, \quad x = 0.$$

2377. Найти огибающую шаров

$$(x - lt)^2 + (y - mt)^2 + (z - nt)^2 = p^2 t^2,$$

где t — переменный параметр.

2378. Найти огибающую эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ при условии $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2379. То же при условии $a + b + c = 1$.

2380. Найти огибающую плоскостей, образующих при пересечении с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

2381. Найти огибающую плоскостей, у которых отрезки a, b, c на осях связаны равенством $a^n + b^n + c^n = 1$.

2382. Показать, что круги

$$y = tx, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2f(t)x - a^2 = 0$$

суть характеристики семейства шаров

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(f(t) + tf'(t))x - 2f'(t)y - a^2 = 0.$$

§ 5.11

ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТЕЙ

Найти главные радиусы кривизны следующих поверхностей:

2383. Эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $(0, 0, c)$

2384. Параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ в точке $(0, 0, 0)$.

2385. Геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = tv$.

2386. Параболоида $xy = az$.

2387. Поверхности $e^z \cos x = \cos y$.

2388. $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

2389. Катеноида $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$.

2390. Доказать, что если ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны в некоторой точке эллипсоида, то на линии пересечения эллипсоида с concentричным шаром $\sqrt[3]{\rho_1 \rho_2} = m(\rho_1 + \rho_2)$, где m — постоянная.

2391. Омбилической точкой, или точкой закругления, называется точка поверхности, где главные радиусы кривизны равны: $\rho_1 = \rho_2$. Найти точки закругления эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2392. То же для эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

2393. Найти полную кривизну параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

2394. Доказать, что средняя кривизна поверхности $z = \ln \cos x - \ln \cos y$ равна нулю.

2395. Доказать, что полная кривизна параболоида постоянна для точек пересечения его с соответствующим эллиптическим цилиндром.

2396. Найти полную и среднюю кривизны поверхности вращения $z = f(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2397. Доказать, что поверхность вращения трактрисы

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

вокруг оси Ox обладает постоянной отрицательной кривизной, равной $-\frac{1}{a^2}$.

Замечание. Отсюда следует, что на этой поверхности выполняется геометрия Лобачевского.

2398. Через вершину параболоида вращения $y^2 + z^2 = 2px$ проводятся кривые на его поверхности. Найти геометрическое место их центров кривизны.

2399. Через точку на поверхности проводятся n нормальных сечений, где угол между последовательными сечениями равен $\frac{2\pi}{n}$. Доказать, что арифметическая средняя кривизны сечений не зависит ни от числа n , ни от направления первого сечения ($n \geq 2$).

2400. Линия на поверхности, образующая с плоскостью xOy в каждой своей точке наибольший из углов, какой в этой точке возможен на поверхности, называется линией наибольшего ската. Доказать, что касательная к ней, нормаль к поверхности и линия, идущая через данную точку параллельно Oz , лежат в одной плоскости.

2401. Доказать, что проекции на плоскость xOy горизонталей поверхности пересекаются под прямым углом с проекциями линий наибольшего ската.

2402. Доказать, что кривые, проекции которых на плоскость xOy имеют уравнение $xa^2 = Cy^{b^2}$, где C — постоянная, являются линиями наибольшего ската для эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2403. Две поверхности

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

уравнения которых отличаются величиной λ , являются софокусными. Доказать, что линии пересечения эллипсоида с софокусными ему одно- и двуполостным гиперboloидами будут линиями кривизны для эллипсоида.

2404. Доказать, что у геликоида задачи 2385 вдоль каждой линии кривизны одна из величин $\ln(u + \sqrt{u^2 + m^2}) \pm v$ остается постоянной.

2405. Линия на поверхности, главная нормаль к которой повсюду совпадает с нормалью к поверхности, называется геодезической. Показать, что на поверхности шара геодезической линией является дуга большого круга.

2406. Показать, что на поверхности

$$\begin{aligned}x &= a \cos u \cos v, & y &= a \sin u \cos v, \\z &= a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - a \sin v\end{aligned}$$

для точек геодезической линии выполняется условие

$$\frac{du}{dv} = \frac{c \sin v}{\cos^2 v \sqrt{a^2 \cos^2 v - c^2}},$$

где $c = \text{const}$.

2407. Найти аналогичное условие для геодезических линий поверхности вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = f(r).$$

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

§ 6.1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Представить в тригонометрической форме числа:

2408. $1 + i$.

2409. $1 + i\sqrt{3}$.

2410. $\sqrt{3} - i$.

2411. $1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$; $0 < \alpha < 2\pi$.

2412. $1 + \sin \alpha - i \cos \alpha$.

2413. $1 + i \operatorname{tg} \alpha$; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Вычислить следующие выражения, где $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$:

2414. $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$.

2415. $(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$.

2416. $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3$.

Вычислить квадратные корни:

2417. $\sqrt{i}$.

2418. $\sqrt{3 + 4i}$.

2419. $\sqrt{-7 + 24i}$.

Решить квадратные уравнения:

2420. $x^2 + (5 - 2i)x + 5(1 - i) = 0$.

2421. $x^2 + (1 - 2i)x - 2i = 0$.

Найти все значения следующих корней:

2422. $\sqrt[3]{i}$.

2423. $\sqrt[3]{-1 + i}$.

2424. $\sqrt[6]{-64}$.

2425. $\sqrt[6]{64}$.

Найти корни уравнений:

2426. $\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$.

2427. $(x + i)^n + (x - i)^n = 0$.

Выразить через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ следующие функции:

2428. $\cos 3\varphi$.

2430. $\cos 4\varphi$.

2429. $\sin 3\varphi$.

2431. $\sin 5\varphi$.

Выразить через тригонометрические функции кратных углов следующие функции:

$$\mathbf{2432.} \cos^3 \varphi. \quad \mathbf{2434.} \cos^4 \varphi. \quad \mathbf{2436.} \cos^5 \varphi.$$

$$\mathbf{2433.} \sin^3 \varphi. \quad \mathbf{2435.} \sin^4 \varphi. \quad \mathbf{2437.} \sin^5 \varphi.$$

Доказать равенства:

$$\mathbf{2438.} \quad \operatorname{tg} n\varphi = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} \varphi - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \varphi + C_n^5 \operatorname{tg}^5 \varphi - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

$$\mathbf{2439.} \quad 2^{2n} \cos^{2n} \varphi = 2 \cos 2n\varphi + 2C_{2n}^1 \cos(2n-2)\varphi + \dots \\ \dots + 2C_{2n}^{n-1} \cos 2\varphi + C_{2n}^n.$$

$$\mathbf{2440.} \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{n} \right) + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) + \dots \\ \dots + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{n-1}{n} \pi \right) = n \operatorname{ctg} nx.$$

$$\mathbf{2441.} \quad \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{n-1}{n} \pi \right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}.$$

Вычислить суммы:

$$\mathbf{2442.} \quad 1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + \dots + 2 \cos nx.$$

$$\mathbf{2443.} \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x.$$

$$\mathbf{2444.} \quad \cos \varphi + a \cos 3\varphi + \dots + a^n \cos(2n+1)\varphi.$$

$$\mathbf{2445.} \quad 1 + 2a \cos \varphi + 2a^2 \cos 2\varphi + \dots + 2a^n \cos n\varphi.$$

Найти величины:

$$\mathbf{2446.} \ln(-e). \quad \mathbf{2451.} e^{\pi i}. \quad \mathbf{2456.} \sin(x + iy).$$

$$\mathbf{2447.} \ln(-2). \quad \mathbf{2452.} i^i. \quad \mathbf{2457.} \cos(x + iy).$$

$$\mathbf{2448.} \ln i. \quad \mathbf{2453.} 2^i. \quad \mathbf{2458.} \operatorname{arctg} xi.$$

$$\mathbf{2449.} \ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \quad \mathbf{2454.} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{-i}.$$

$$\mathbf{2450.} \ln(x + iy). \quad \mathbf{2455.} \operatorname{tg} \frac{\pi i}{2}.$$

2459. При каком условии точка $z = x + iy$ лежит внутри круга радиуса R с центром в точке $c = a + bi$?

2460. В круг с радиусом R и с центром в точке $c = a + bi$ вписан правильный n -угольник, одна из вершин которого — в точке $z_0 = a + (b + R)i$. Где остальные вершины?

2461. Две вершины правильного треугольника — в точках $z_0 = 1$ и $z_1 = 2 + i$. Найти третью вершину.

2462. Две смежные вершины правильного n -угольника — в точках z_0 и z_1 . Найти следующую вершину.

2463. Вершины многоугольника — в точках $z_k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1}$, $|z| < 1$. Выяснить, находится ли точка $z = 0$ внутри многоугольника.

2464. Три последовательные вершины параллелограмма — в точках z_1, z_2, z_3 . Найти положение четвертой вершины.

2465. Концы отрезка — в точках z_1 и z_2 . Найти середину.

2466. Массы $m_1, m_2, \dots, m_n$ — в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$. Найти положение центра тяжести.

2467. Точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ — вершины выпуклого n -угольника. Найти геометрическое место точек $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n$, где $\lambda_k > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

2468. Последовательные вершины ломаной лежат в точках

$$z_k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{k-1} z^{k-1}, \quad |z| \leq 1;$$

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{k-1} > 0.$$

Доказать, что ломаная не может замкнуться ни при каком значении k .

2469. Доказать, что уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$$

не может иметь корней, больших по модулю единицы.

2470. Доказать, что равенства $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вещественны, эквивалентны условию, что точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой.

2471. Доказать тождество:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

и указать его геометрический смысл.

2472. Доказать равносильность равенств

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 \quad \text{и} \quad z_2 - z_0 = \lambda i(z_1 - z_0),$$

где λ вещественно.

Доказать равенства:

$$2473. \quad 2|z_1| + 2|z_2| = |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}|.$$

$$2474. \quad |x + y| + |x - y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|.$$

Определить вид кривых, заданных следующими уравнениями, в которых t — вещественный параметр:

$$2475. \quad z = z_0 + te^{\alpha i}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

$$2476. \quad z = z_0 + re^{ti}.$$

$$2477. \quad z = z_0 + ae^{ti} + be^{-ti}.$$

$$2478. \quad z = ate^{ti}.$$

$$2479. \quad z = ae^{\alpha t}, \quad a \text{ и } \alpha — \text{ комплексные постоянные.}$$

2480. Проследить, как изменяется аргумент величины $x(x - 1)$, когда x описывает в направлении против часовой стрелки замкнутую кривую, заключающую внутри точки 0 и 1.

2481. Изучить изменение аргумента величин $\sqrt{x}$, $\sqrt{x - 1}$ и $\sqrt{x(x - 1)}$, когда x описывает тот же контур, что и в 2480.

2482. Как изменится функция $u = (z - a)^\alpha (z - b)^\beta$ при вещественных α и β , если z опишет замкнутый контур, обходящий против часовой стрелки точки a и b ?

2483. Тот же вопрос для функции $u = (z - a)^\alpha \ln(z - a)$ и контура, обходящего точку a против часовой стрелки.

§ 6.2

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМА НА МНОЖИТЕЛИ, СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОРНЯМИ

2484. Определить a и b так, чтобы $x^4 + 3x^2 + ax + b$ делилось без остатка на $x^2 - 2ax + 2$.

2485. Показать, что при целых m , n и p полином $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

2486. Доказать, что $(x + y)^n - x^n - y^n$ при $n = 6m + 5$ делится на $x^2 + xy + y^2$, а при $n = 6m + 1$ делится на $(x^2 + xy + y^2)^2$.

2487. Уравнение $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ имеет корень $1 + i$. Найти остальные корни.

2488. Доказать, что двойной корень уравнения $\varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 0$ удовлетворяет уравнению $\varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 = 0$, если полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ взаимно простые.

2489. Доказать, что корень кратности n уравнения

$$F(u(x), v(x)) = 0$$

есть корень кратности $n - 1$ уравнения $F(u'(x), v'(x)) = 0$. Здесь $u(x)$, $v(x)$ — взаимно простые полиномы и $F(u, v)$ — однородная функция, не имеющая кратных линейных множителей.

2490. Доказать, что полином $f(x)$ тогда и только тогда остается положительным при всех вещественных x , когда

$$f(x) = |\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n|^2,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые комплексные числа.

Доказать тождества:

$$\mathbf{2491.} \quad x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1).$$

$$\mathbf{2492.} \quad x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n (x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1).$$

$$\mathbf{2493.} \quad x^{2n+1} + 1 = (x + 1) \prod_{k=1}^n (x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1).$$

$$\mathbf{2494.} \quad x^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1).$$

$$\mathbf{2495.} \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

$$\mathbf{2496.} \quad \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

$$\mathbf{2497.} \quad \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\mathbf{2498.} \quad \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n} \text{ или } \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \text{ при}$$

нечетном или четном n соответственно.

$$\mathbf{2499.} \quad \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

$$\mathbf{2500.} \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\mathbf{2501.} \quad \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Разложить на множители полиномы:

2502. $(x+1)^n + (x-1)^n$.

2503. $x^{2n} + C_{2n}^2 x^{2n-2} (x^2 - 1) + C_{2n}^4 x^{2n-4} (x^2 - 1)^2 + \dots + (x^2 - 1)^n$.

2504. $x^{2n+1} + C_{2n+1}^2 x^{2n-1} (x^2 - 1) + C_{2n+1}^4 x^{2n-3} (x^2 - 1)^2 + \dots + x(x^2 - 1)^n$.

2505. Вычислить произведение $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \dots (x_n^2 + 1)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни полинома $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, ($a_1, a_2, \dots, a_n$ — вещественные).

2506. Корни полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ связаны соотношениями $x_s + x_{n-s} = m$, $s = 1, 2, \dots, n$. Доказать тождество: $f(x) = (-1)^n f(m - x)$.

2507. Корни полинома $f(x)$ степени $2n$ связаны соотношением $x_s + x_{n+s} = 2m$, $s = 1, 2, \dots, n$. Доказать, что один из корней $f'(x)$ равен m , а остальные попарно связаны формулами $y_s + y_{n+s-1} = 2m$, $s = 1, 2, \dots, n-1$.

2508. Уравнение $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, где $a_0 a_n \neq 0$, имеет $k+1$ член. Показать, что оно не может иметь корней кратности выше, чем k .

2509. Делится ли на $(x-1)^4$ многочлен

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1?$$

2510. Найти зависимость между коэффициентами полинома $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$, если между его корнями имеется зависимость: $x_1 x_2 + x_2 x_3 = 2x_1 x_3$.

2511. Найти зависимость между p , q и r , при которой корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ составляют геометрическую прогрессию.

2512. При каких λ и μ корни уравнения $x^4 + 2x^3 - 21x^2 + \lambda x + \mu = 0$ образуют арифметическую прогрессию и какую именно?

2513. При каких p, q, α ($0 < \alpha < 4$) уравнение $x^4 + px^\alpha + q = 0$ имеет тройной корень?

2514. Остатки от деления полинома на $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ равны A, B, C . Найти остаток от деления на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

2515. Корни полинома $x^3 + x^2 - 2$ равны 1, α и β . Найти полином $\varphi(x)$ второй степени, для которого $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\alpha) = \beta$, $\varphi(\beta) = \alpha$, и доказать, что $\varphi(\varphi(x)) - x$ делится на $x^3 + x^2 - 2$.

2516. Найти полином $f(x)$ седьмой степени, такой, чтобы $f(x) + 1$ делилось на $(x - 1)^4$, а $f(x) - 1$ делилось на $(x + 1)^4$.

2517. Найти полином $f(x)$ степени $2n - 1$, такой, чтобы $f(x) + 1$ делилось на $(x - 1)^n$, а $f(x) - 1$ на $(x + 1)^n$.

2518. Найти полином степени n , который при делении на $(x - a_1)$, $(x - a_2)$, ..., $(x - a_n)$ дает остатки $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2519. Доказать справедливость тождества Эйлера

$$\sum_{k=1}^m \frac{\omega(x_k)}{\varphi'(x_k)} = 0,$$

где $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ различны, а $\omega(x)$ — любой полином степени не выше, чем $m - 2$.

2520. В равенстве

$$\ln(1 - \lambda z) + \ln(1 - \lambda^{-1} z) = \ln(1 - (\lambda + \lambda^{-1})z + z^2)$$

обе части можно разложить по степеням z , если числа $|\lambda z|$, $|\lambda^{-1} z|$ и $|(\lambda + \lambda^{-1})z - z^2|$ меньше чем единица. Приравнявая в обеих частях коэффициенты при одинаковых степенях z , доказать тождество

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} = t^n - n t^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} t^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^{n-6} + \dots, \quad \text{где } t = \lambda + \lambda^{-1}.$$

2521. Полагая в тождестве предыдущей задачи $\lambda = \cos \varphi + i \sin \varphi$ для полинома Чебышева $T_n(x) = 2^{-(n-1)} \cos(n \arccos x)$, получить явное выражение

$$T_n(x) = x^n - \frac{n x^{n-2}}{2} + \frac{n(n-3)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{n-4}}{2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^{n-6}}{2^2} + \dots$$

2522. Учитывая характер изменения полинома $T_n(x)$ в интервале $-1 \leq x \leq 1$, доказать, что всякий другой полином $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ с вещественными коэффициентами не может постоянно оставаться по абсолютной величине меньше, чем $2^{-(n-1)}$, т. е. что полином Чебышева наименее уклоняется от нуля в интервале $(-1, 1)$.

2523. $F(x) = f(x)\varphi(x)^k$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — взаимно простые полиномы без кратных корней. Положив $F(x) = P(x)Q(x)$, $F'(x) = P(x)R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ взаимно простые, доказать, что $\varphi(x)$ есть общий наибольший делитель полиномов $Q(x)$ и $R(x) - kQ'(x)$. (Остроградский.)

§ 6.3 ПОЛИНОМ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

2524. При каких λ все корни полинома $x^3 - 3x + \lambda$ вещественны?

2525. Многочлены

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n); \\ \psi(x) &= (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)\end{aligned}$$

имеют корни: $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$ вещественные и перемежающиеся. Доказать, что при $\lambda > 0$ корни полинома $\varphi(x) + \lambda\psi(x)$ вещественны и перемежаются с корнями полиномов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

2526. При тех же условиях и при $\mu > \lambda > 0$ доказать, что корни уравнений $\varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0$, $\varphi(x) + \mu\psi(x) = 0$ вещественные, простые и взаимно перемежающиеся.

2527. Доказать, что при тех же условиях корни уравнения $\varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0$ возрастают вместе с λ .

2528. При каких значениях p и q уравнение $x^5 + px + q = 0$ имеет три вещественных корня?

2529. Доказать, что уравнение $x^m = 1 + \alpha x^{m+n}$, где m и n нечетные, $\alpha > 0$, имеет при $(m+n)^{m+n} \alpha^m < m^m n^n$ два положительных корня.

2530. Доказать, что при вещественности корней уравнения $x^3 - 3px + q = 0$, $p > 0$ каждый из них по модулю меньше, чем $2\sqrt{p}$. Если же корни x_1 и x_2 комплексные, но не вещественные, то $|x_3| > 2\sqrt{p}$.

2531¹. Доказать, что уравнение $x^{\lambda_1} + a_1 x^{\lambda_2} + \dots + a_n = 0$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1} > 0$, $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ не может иметь более чем n положительных корней.

2532¹. Доказать, что полином $x^n + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots + a_{m-1} x^{n_{m-1}} + a_m$, где $n > n_1 > n_2 > \dots > n_{m-1}$ — целые числа, $a_1 a_2 \dots a_m \neq 0$, не может иметь более чем $2m$ вещественных корней.

2533. Доказать, что все корни уравнения $\frac{d^m x^m (x-1)^m}{dx^m} = 0$ лежат в интервале $(0, 1)$.

2534¹. Все корни полинома $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ вещественные. Доказать, что и все корни полинома

$$(n+1)^s a_0 x^n + n^s a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad s \text{ — целое}$$

тоже вещественны.

2535¹. Доказать, что все корни полинома

$$(m+1)^{m-1} x^m + m^m x^{m-1} + \frac{m(m-1)^m}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \dots + 1 = 0$$

лежат в интервале $(-1, 0)$.

2536¹. Все корни полинома $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ вещественные. Доказать, что корни уравнения

$$a_s x^k + C_k^1 a_{s+1} x^{k-1} + C_k^2 a_{s+2} x^{k-2} + \dots + a_{s+k} = 0, \\ s + k \leq n$$

тоже вещественные,

¹ См. указание в «Ответах».

2537¹. При том же условии доказать неравенства:

$$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1};$$

$$(a_k a_{k+3} - a_{k+1} a_{k+2})^2 \leq 4(a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2})(a_{k+2}^2 - a_{k+1} a_{k+3}).$$

2538¹. Корни полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ вещественны и различны. Доказать, что полином

$$nf(x)f''(x) - (n-1)f'(x)^2$$

не имеет вещественных корней.

2539¹. Все корни полинома $f(x)$ вещественные. Доказать, что корни полинома $f(x) + \lambda f'(x)$ тоже вещественные, если λ вещественно.

2540¹. При том же условии дано, что полином $f(x) + m$ имеет k мнимых² корней. Доказать, что уравнение $f'(x)^2 - f(x)f''(x) - mf''(x) = 0$ имеет не менее чем k вещественных корней.

Доказать теоремы:

2541¹. Если все корни полинома $f(x)$ вещественные, то при $\lambda > 0$ и все корни полинома $xf'(x) + \lambda f(x)$ тоже вещественные. (Лагерр.)

2542¹. Если у полинома $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ все корни вещественные, а у полинома $\varphi(\nu)$ все корни вещественные неположительные, то и у полинома $F(x) = \sum a_\nu \varphi(\nu) x^\nu$ все корни вещественные. (Лагерр.)

2543¹. Если у полинома $f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ все корни вещественны, то вещественны и все корни полинома $F(x) = \sum a_\nu \psi(\nu) x^\nu$, где $\psi(\nu) = e^{A\nu} \prod (1 + \frac{\nu}{a_\nu}) e^{-\frac{\nu}{a_\nu}}$, числа a_ν положительны, A вещественно. (Лагерр.)

2544¹. Если корни полинома $f(x) = \sum a_\nu x^\nu$ и точка $x = 0$ лежат внутри некоторого выпуклого контура, то внутри того

¹См. указание в «Ответах».

²Мнимые числа — это комплексные числа с ненулевой мнимой частью (т. е. не вещественные; не путать с чисто мнимыми).

же контура лежат и корни полинома $F(x) = \sum a_\nu \psi(\nu) x^\nu$, где $\psi(\nu) = e^{A\nu} \prod (1 + \frac{\nu}{a_\nu}) e^{-\frac{\nu}{a_\nu}}$, числа a_ν положительны, $A < 0$.

2545¹. Корни полиномов $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, где $f(x)$ — полином степени n , лежат внутри любого выпуклого контура, внутри которого лежат корни $f(x)$.

2546¹. Если функция $\Phi(x) = f(x) + af'(x) + a^2f''(x) + \dots + a^n f^{(n)}(x)$, где $f(x)$ — полином степени n , имеет корни вещественные, то и полином $f(x)$ — тоже.

2547¹. Если корни полинома $f(x) = P(x) + iQ(x)$, где полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ имеют вещественные коэффициенты, лежат по одну сторону вещественной оси, то корни уравнений $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ вещественные и перемежающиеся. (Эрмит.)

2548. Применяя теорему Ролля к функции $x^m e^x$, доказать, что уравнение

$$x^m + \frac{m}{1^2} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^{m-2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = 0$$

имеет все корни вещественные.

Доказать вещественность корней уравнений:

2549¹. $x^n + \left(\frac{n}{1}\right)^m x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right)^m x^{n-2} + \dots + 1 = 0$; $m = 1, 2, 3, \dots$

2550¹. $(1 + x^2)^{n+1} \frac{d^n(1+x^2)^{-1}}{dx^n} = 0$.

2551¹. $x^{2n} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = 0$

2552¹. $\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} = 0$, $A_\nu > 0$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

2553¹. $\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} = 0$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $A_\nu > 0$ при $\nu < m$, $A_\nu < 0$ при $\nu \geq m$, $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$.

2554¹. Доказать, что корни полинома Эрмита—Чебышева $e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ вещественны и лежат в интервале $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$.

Сколько вещественных корней имеют уравнения:

2555. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$.

2556. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} = 0$.

2557¹. В разложении по степеням λ

$$\frac{\operatorname{sh} \lambda + x \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \lambda^n$$

коэффициент $\varphi_n(x)$ при λ^n есть полином степени $n+1$. Доказать, что все корни $\varphi_n(x)$ лежат в интервале $(-1, 1)$. (Эрмит.)

2558¹. Найти верхнюю границу для числа положительных и отрицательных и нижнюю границу для числа мнимых² корней уравнения $x^{10} - 7x - 2 = 0$

2559¹. В уравнении $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ при некотором k имеется равенство: $a_k^2 = a_{k-1} a_{k+1}$. Показать, что среди корней имеются мнимые².

2560¹. В таком же уравнении четыре последовательных коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что уравнение имеет мнимые² корни. (Эрмит.)

2561¹. Доказать, что уравнение

$$f(n)x^n + f(n-1)x^{n-1} + \dots + f(0) = 0,$$

где $f(x)$ — полином степени не выше, чем $n-2$, имеет мнимые² корни.

2562¹. Доказать, что при вещественных a и b уравнение

$$x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2+ab+b^2)x^{n-2} + \dots + (a^n + a^{n-1}b + \dots + b^n) = 0$$

имеет не больше одного вещественного корня.

§ 6.4

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ

Разложить следующие дроби на простейшие:

2563. $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}.$

2565. $\frac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}.$

2564. $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$

2566. $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}.$

¹ См. указание в «Ответах».

² Мнимые числа — это комплексные числа с ненулевой мнимой частью (т. е. не вещественные; не путать с чисто мнимыми).

$$2567. \frac{4}{(x^2-1)^2} \cdot$$

$$2568. \frac{x^6-x^2+1}{(x-1)^3} \cdot$$

$$2569. \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} \cdot$$

$$2570. \frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} \cdot$$

$$2571. \frac{2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} \cdot$$

$$2572. \frac{8}{x^4+4} \cdot$$

$$2573. \frac{2x^4}{x^4+x^2+1} \cdot$$

2581. Определить коэффициенты в разложении функции

$$2574. \frac{x^{m-1}}{x^n-1}; m \leq n.$$

$$2575. \frac{1-x^2}{1-2x \cos \varphi + x^2} \cdot$$

$$2576. \frac{1}{x^{2n}+1} \cdot$$

$$2577. \frac{1}{x^{2n+1}+1} \cdot$$

$$2578. \frac{3x^3+15x+6}{x^4+x^3+3x^2+2x+2} \cdot$$

$$2579. \frac{2x^3+4x}{x^4+x^2+4} \cdot$$

$$2580. \frac{3x^2-3}{x^3-3x+1} \cdot$$

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)},$$

по убывающим степеням x , если корни знаменателя простые.

2582. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 x^n$, где

$$\frac{x+a}{x^2+2ax+1} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots$$

2583. Если x_1 по абсолютной величине больше остальных корней уравнения $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, то

$$x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

где u_n — коэффициент при x^{-n} в разложении дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum u_n x^{-n}$, если $f'(x_1) \neq 0$. Числа u_n можно находить последовательно из равенства

$$u_{s+n} + a_1 u_{s+n-1} + \dots + a_n u_s = 0.$$

2584¹. Разложение в ряд правильной рациональной дроби имеет вид $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \dots$, где числа u_n имеют значения 0 и ± 1 . Доказать, что

$$\psi(x) = 1 - x^m, \quad \varphi(x) = a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m,$$

где числа a_ν , могут иметь лишь значения 0 и ± 1 . (Лагерр.)

2585¹. Доказать равенство

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2},$$

где x_ν — корни уравнения $x^n = 1$, отличные от единицы.

2586¹. Все корни уравнения $f(x) = 0$ степени n — вещественные. Доказать, что в промежутке $\left(-\frac{x_{\nu}-x_{\nu-1}}{n} + x_{\nu}, \frac{x_{\nu+1}-x_{\nu}}{n} + x_{\nu}\right)$, где $x_{\nu-1}, x_{\nu}, x_{\nu+1}$ — три последовательных корня $f(x)$, нет корней $f'(x)$.

2587¹. Все корни полинома $f(x)$ степени n — вещественные, как и число m . Доказать, что модуль мнимой части каждого из корней уравнения $f(x) + imf'(x) = 0$ меньше, чем $|nm|$.

§ 6.5

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вычислить определители:

$$\mathbf{2588.} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2589.} \quad \begin{vmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 11 & -2 & 10 \\ 2 & -14 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2590.} \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2591.} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2592.} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2593.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2594.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2595.} \quad \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2596.} \quad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2597.} \quad \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{2598.} \quad \begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix}.$$

¹См. указание в «Ответах».

$$2599. \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

$$2600. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

2601. Найти величину определителя Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

предполагая сначала, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны между собой.

2602. Вычислить определители Δ_n и Δ_{n+1} , получающиеся из определителя Вандермонда заменой в последней строчке показателя $n-1$ на n или на $n+1$.

2603. Вычислить величины Δ_1 и Δ_2 определителей, получающихся из определителя Вандермонда Δ дифференцированием по x_1 и заменой x_1 на x_2 или x_1 и x_2 на x_3 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ 2x_2^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x_2^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & x_3 & \dots & x_n \\ 2 & 2x_3 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1)x_3^{n-2} & (n-1)x_3^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2604. Доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{1!2!3! \dots (n-1)!},$$

где

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m},$$

Δ — определитель Вандермонда.

Вычислить определители:

2605.
$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}.$$

2606.
$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix}.$$

2607.
$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix}.$$

2608.
$$\begin{vmatrix} \sin^3 \alpha & \sin^2 \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos^2 \alpha & \cos^3 \alpha \\ \sin^3 \beta & \sin^2 \beta \cos \beta & \sin \beta \cos^2 \beta & \cos^3 \beta \\ \sin^3 \gamma & \sin^2 \gamma \cos \gamma & \sin \gamma \cos^2 \gamma & \cos^3 \gamma \\ \sin^3 \delta & \sin^2 \delta \cos \delta & \sin \delta \cos^2 \delta & \cos^3 \delta \end{vmatrix}.$$

Доказать равенства:

2609.
$$D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}; \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

$$2610. \begin{vmatrix} a_1 & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & a_2 & \dots & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \dots & a_n \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) - \lambda \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где $\varphi(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \dots (a_n - \lambda)$.

$$2611^1. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n),$$

где $\varphi(\alpha) = a_1 + a_2\alpha + \dots + a_n\alpha^{n-1}$; α — корень уравнения $\alpha^n = 1$.

$$2612. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$

2613¹. Доказать неравенство:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & B_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & M_n \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $A_1 > |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$, $B_2 > |b_1| + |b_3| + \dots + |b_n|, \dots$, $M_n > |m_1| + |m_2| + \dots + |m_{n-1}|$.

2614. Доказать, что предыдущий определитель положителен, если, при тех же условиях, его элементы вещественны.

2615. Доказать, что определитель, у которого элементы $a_{\nu\mu}$ и $a_{\mu\nu}$, симметричные относительно главной диагонали, — комплексно сопряженные, имеет вещественное значение.

2616. Элементы определителя порядка n связаны равенствами $a_{\nu\nu} = 0$, $a_{\nu\mu} = ia_{\mu\nu}$, $\nu > \mu$, где $a_{\nu\mu}$ — вещественное число. Найти значения n , при которых определители имеют вещественное значение при любом выборе $a_{\mu\nu}$.

¹ См. указание в «Ответах».

2623.
$$\begin{cases} x & +y & +z = a, \\ x+(1+a)y & & +z = 2a, \\ x & +y+(1+a)z = 0. \end{cases}$$

2630. Показать, что в том случае, когда определитель Δ , составленный из n^2 элементов $a_{\mu\nu}$, равен нулю, имеет место пропорциональность

$$\frac{A_{1\mu}}{A_{1\nu}} = \frac{A_{2\mu}}{A_{2\nu}} = \dots = \frac{A_{n\mu}}{A_{n\nu}},$$

где A_{kl} — алгебраическое дополнение элемента a_{kl} .

2631. Решить систему уравнений:

$$a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu n}x_n = \lambda_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

предполагая, что таблица, составленная из коэффициентов этих уравнений, — ортогональная. Найдя решение, показать, что $A_{\nu\mu} = a_{\nu\mu} \cdot \Delta$, где $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{\nu\mu}$.

$$\mathbf{2632}^1. \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а все определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad m > p, \quad n > p,$$

содержащие Δ как минор, равны нулю. Доказать, что ранг матрицы равен p .

2633. При каком условии три точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) лежат на одной прямой?

2634. При каком условии три прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ пересекаются в одной точке?

2635. При каком условии четыре точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежат в одной плоскости?

¹См. указание в «Ответах».

2636. При каких условиях n точек $M_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, лежат в одной плоскости и при каком лежат на одной прямой?

2637. При каких условиях n плоскостей $A_\nu x + B_\nu y + C_\nu z + D_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, пересекаются в одной точке или по одной прямой?

§ 6.6

МАТРИЦЫ.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

2638. Величина λ равна наибольшему положительному корню характеристического уравнения матрицы $\|a_{ik}\|$ с положительными элементами. Каковы знаки решений системы

$$\lambda x_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \dots + a_{\nu n} x_n, \quad \nu = 1, 2, \dots, n?$$

2639. Найти вид элементов прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

ранг которой равен единице.

2640. Показать, что матрица ранга r может быть представлена в виде суммы r матриц ранга единица. Какое следствие для билинейных форм вытекает отсюда?

2641. Если A_1 и B_1 — транспонированные матрицы A и B , то $(AB)_1 = B_1 A_1$. Доказать.

2642. Найти правила действий для гиперкомплексных чисел вида $q = ae + bi + cj + dk$, где e, i, j и k обозначают следующие матрицы:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

2643. Найти вид матрицы, перестановочной с любой матрицей.

2644. В каком случае матрица A линейного преобразования $y_\nu = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu n}x_n$ удовлетворяет условию $AA_1 = E$, где E — единичная матрица, а A_1 — транспонированная матрица A ?

2645. Найти вещественные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

при условии, что $a_{\nu\mu} = -a_{\mu\nu}$, и все $a_{\nu\mu}$ — вещественные.

2646. Доказать, что характеристическое уравнение ортогональной матрицы возвратное, т. е. его корни связаны попарно зависимостями $x_\nu x_{n-\nu} = 1$.

2647. Квадратичная форма $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ — определенная, а число λ заключается между наибольшим и наименьшим корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} + xb_{11} & a_{12} + xb_{12} & \dots & a_{1n} + xb_{1n} \\ a_{21} + xb_{21} & a_{22} + xb_{22} & \dots & a_{2n} + xb_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + xb_{n1} & a_{n2} + xb_{n2} & \dots & a_{nn} + xb_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказать, что квадратичная форма $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} + \lambda b_{\mu\nu}) x_\mu x_\nu$ является неопределенной. Здесь x_μ и x_ν — независимые переменные.

2648¹. Доказать, что корни характеристического уравнения матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$ имеют вещественную часть, заключающуюся между наибольшим и наименьшим корнями характеристического уравнения симметрической матрицы с элементами $b_{\mu\nu}$ где $2b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$. При этом все $a_{\mu\nu}$ — вещественные.

¹См. указание в «Ответах».

2649. Найти границы величины вещественной части корня характеристического уравнения кососимметрической матрицы с вещественными элементами.

2650. Доказать, что корень s характеристического уравнения матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$ меньше по модулю, чем наибольший положительный корень σ матрицы с элементами $|a_{\mu\nu}|$.

2651. Доказать, что наибольший из положительных корней характеристического уравнения матрицы с положительными элементами больше по модулю, чем любой другой корень того же уравнения.

2652¹. Доказать, что наибольший корень характеристического уравнения матрицы с положительными элементами $a_{\mu\nu}$ больше по модулю, чем любой корень характеристического уравнения матрицы с элементами $b_{\mu\nu} = \sqrt{a_{\mu\nu}a_{\nu\mu}}$.

2653. Показать, что корни характеристического уравнения матрицы с положительными элементами $a_{\mu\nu}$ по модулю меньше наибольшего корня характеристического уравнения матрицы с элементами $b_{\mu\nu}$, где $2b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}$.

2654. Элементы матрицы $\|b_{\mu\nu}\|$ определяются по формулам:

$$b_{\mu+1,\nu} = b_{\mu 1}a_{1\nu} + b_{\mu 2}a_{2\nu} + \dots + b_{\mu n}a_{n\nu};$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n,$$

где $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$ и $a_{\mu\nu}$ — данные числа. Найти величину произведения определителей

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0.$$

2655. Найти элементарные делители матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2656. То же для матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 30 & -48 \\ 3 & 14 - \lambda & -24 \\ 3 & 15 & -25 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2657. Исследовать эквивалентность матриц

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2658. Показать, что матрица $\|a_{\mu\nu}\|$, будучи подставлена вместо x в характеристическое уравнение той же матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0,$$

ему удовлетворяет.

2659. Составить элементарные делители матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix},$$

приведя ее к каноническому виду путем элементарных преобразований.

2660. $M(b_1, b_2, \dots, b_n)$ — двойная точка квадратичной формы

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}, \quad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu},$$

обращающейся в нуль в точке $N(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Найти значение формы в точках прямой MN .

Представить в виде суммы квадратов следующие квадратичные формы:

2661. $4xy + 4xz + 4yz$.

2662. $8x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6yz + 4xz - 2xy$.

2663. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 31v^2 - 2xy + 2xz + 10xv - 6yz + 2yv + 6zv$.

2664. Квадратичная форма $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ посредством линейного преобразования

$$x_{\mu} = c_{\mu 1} y_1 + c_{\mu 2} y_2 + \dots + c_{\mu n} y_n, \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

преобразована в квадратичную форму $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu}$. Найти линейное преобразование, переводящее форму, союзную первой, в форму, союзную второй.

2665. Формы $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$, $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu} y_{\mu} y_{\nu}$ положительны. Доказать, что и форма $\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}$ положительна.

§ 6.7

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2666. Пользуясь основной теоремой о симметрических функциях, доказать, что целая рациональная симметрическая функция степени m от корней уравнения

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

рационально выражается через $p_1, p_2, \dots, p_m$.

2667. Пользуясь результатом предыдущей задачи, доказать, что суммы степеней корней уравнений $S_1, S_2, \dots, S_m$ у уравнений

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

и

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0$$

одни и те же. Здесь $m \leq n$.

2668. Опираясь на результат двух предыдущих задач, доказать, что при $m \leq n$ для сумм степеней корней уравнения справедлива формула

$$S_m + p_1 S_{m-1} + \dots + p_{m-1} S_1 + m p_m = 0.$$

2669. Умножая на подходящую степень x левую часть уравнения $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ получить равенство для сумм степеней корней уравнения при $m > n$:

$$S_m + p_1 S_{m-1} + p_2 S_{m-2} + \dots + p_n S_{m-n} = 0.$$

Найти значения указанных симметрических функций корней данных уравнений:

2670. $x^5 - 3x^3 - 5x + 1 = 0$; $\sum x_\nu^4$.

2671. $x^3 + 3x^2 - x - 7 = 0$; $\sum x_\nu^6$.

2672. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $\sum x_\nu^3 x_\mu$; $\nu \neq \mu$.

2673. $x^3 - x - 1 = 0$; $\sum x_1(x_2 - x_3)^2$.

2674. $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$; $\sum (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2$.

2675. $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$; $\sum x_1^3 x_2^3 x_3^3$; $n > 8$.

2676. $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$; $\sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$.

2677. $x^n + (a+b)x^{n-1} + (a^2+ab+b^2)x^{n-2} + \dots + (a^n+a^{n-1}b + \dots + b^n) = 0$; найти S_m при $m \leq n$.

2678. $x^n + ax^{n-1} + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \dots + \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} = 0$. Найти S_m при $m \leq n+1$.

2679. Доказать формулы Варинга, дающие выражения для S_m , суммы m -х степеней корней уравнений $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0$, через коэффициенты уравнения. Эти формулы можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} S_m &= p_n - \frac{1}{2} \sum' p_\nu p_\mu + \frac{1}{3} \sum p_\nu p_\mu p_\lambda - \dots, \\ p_m &= -\frac{S_m}{m} + \frac{1}{2!} \sum \frac{S_\mu S_\nu}{\mu\nu} - \frac{1}{3!} \sum \frac{S_\mu S_\nu S_\lambda}{\mu\nu\lambda} + \dots \end{aligned}$$

В каждой из сумм в правой части индексы $\mu, \nu, \lambda, \dots$ положительны, а их сумма равна m .

Для кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ вычислить следующие симметрические функции:

2680. $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1 + x_3} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3}$; $\frac{x_1^2 + x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2 + x_1 x_3}{x_1 + x_3} + \frac{x_3^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$.

2681. Площадь треугольника со сторонами x_1, x_2, x_3 .

Представить в виде целой функции от x следующие дробные функции корня данного уравнения (уничтожение иррациональности в знаменателе):

2682. $\frac{6+5x}{1+x+x^2}; x^3 - 2 = 0.$

2683. $\frac{1}{x^3-x+2}; x^4 - 5 = 0.$

2684. $\frac{1}{1+2x+x^2}; x^3 - x - 1 = 0.$

2685. $\frac{1}{a+bx+cx^2}; x^3 - N = 0.$

Узнать, имеют ли общий корень полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

2686. $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, \psi(x) = 2x^3 - 4x + 2.$

2687. $\varphi(x) = x^2 + x + 1, \psi(x) = x^3 + x - 1.$

2688. $\varphi(x) = x^5 + x^2 + 1, \psi(x) = x^5 - x^3 + 2.$

2689. При каких λ и μ уравнения $x^3 - 6x^2 + \lambda x - 3 = 0$, $x^3 - x^2 + \mu x + 2 = 0$ имеют два общих корня?

Решить системы уравнений:

2690.
$$\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 - 3x + 9y = 0, \\ 5x^3 + 5y^3 - 15x^2 - 13xy - y^2 = 0. \end{cases}$$

2691.
$$\begin{cases} 3x^2 + 9x^2y + 9xy^2 + 3y^3 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 5, \\ 4x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 3. \end{cases}$$

Исключить x из систем уравнений:

2692.
$$\begin{cases} x^3 + (y-1)x^2 + (3y-10)x + 12 = 0, \\ x^3 + (y-8)x^2 + (y+16)x - 3 = 0. \end{cases}$$

2693.
$$\begin{cases} x^3 + mx^2 - 4 = 0, \\ x^3 + mx + 2 = 0. \end{cases}$$

2694.
$$\begin{cases} x^3 + 4mx^2 - 3x + 2 = 0, \\ 2x^3 + (m+2)x^2 - 5x + 1 = 0. \end{cases}$$

2695. Найти дискриминант $x^n + a = 0$.

2696. То же для уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

2697. В выражение дискриминанта $D(a_0, a_1, \dots, a_n)$ входит член $Ma_0^{n-1}a_n^{n-1}$. Найти M .

2698¹. Доказать теорему: если все корни уравнения с целыми коэффициентами $x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n = 0$ по модулю равны единице, то они равны корням из единицы. (Кронекер.)

¹ См. указание в «Ответах».

§ 6.8 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

2699. Корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ вещественны при условии $4p^3 + 27q^2 \leq 0$. Когда корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ вещественны?

2700. Решить уравнение $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + 12 = 0$ подстановкой $x = y + \sigma$ при подходящем выборе σ .

Следующие уравнения привести к уравнениям с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшем члене, равном единице, применяя подстановку вида $y = ax$:

2701. $5x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 12x + 18 = 0$.

2702. $900x^4 - 750x^3 + 375x^2 - 13 = 0$.

2703. Доказать, что уравнение $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-2} + \dots + a_n = 0$ имеет невещественные² корни, если уравнение $a_0x^{2n} - a_1x^{2n-2} + \dots + (-1)^n a_n = 0$ имеет вещественные.

2704. Найти уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $x^5 + x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$, и доказать, что у данного уравнения есть мнимые² корни.

2705. У уравнения $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ один из корней равен квадрату другого. Решить уравнение.

Решить уравнения:

2706. $x^4 - 6mx^3 + 2(4m^2 + n)x^2 - 6mnx + n^2 = 0$.

2707. $4(x^2 - x + 1)^3 - 27x^2(x - 1)^2 = 0$.

2708. При каком условии два из корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ отличаются только знаком?

Доказать теоремы:

2709. Возвратное уравнение

$$ax^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_1x + a = 0$$

подстановкой $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ приводится к решению уравнения степени n и квадратного уравнения.

2710¹. Возвратное уравнение с вещественными коэффициентами $x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_1x + 1 = 0$, у которого $|a_n| \leq 2$, имеет по крайней мере одну пару мнимых² корней.

2711. Полином с вещественными коэффициентами

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

в интервале $(-2, 2)$ не может по абсолютной величине все время оставаться меньше, чем 2.

2712. Уравнение с вещественными коэффициентами

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_nx = m$$

в интервале $(-2, 2)$ имеет хотя бы один корень, если $|m| < 2$.

2713. Уравнение с вещественными коэффициентами

$$x^{2n+1} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_nx = m$$

имеет корень в промежутке $(-2l, 2l)$, где $2l^{2n+1} = |m|$. (Чебышев.)

Преобразовать следующие уравнения указанной подстановкой (преобразование Чирнгауза):

2714. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$; $y = x^2 + x - 1$.

2715. $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$; $y = 2x^2 + 3x - 1$.

2716. $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$; $2y = x^2 - 5x + 8$.

2717. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 48 = 0$; $y = x^2 + x - 7$.

Найти уравнения для y , корни которых выражаются через корни данных уравнений указанным образом:

2718. $x^3 + 2x - 1 = 0$; $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_2x_3$.

2719. $x^3 - x^2 - 3 = 0$; $y_1 = \frac{x_1}{x_2 + x_3 - x_1}$ и т. д.

2720. $x^3 + px + q = 0$; $y_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

2721. $x^3 + 3x^2 - 4x + 3 = 0$; $y_1 = \frac{x_1x_2 - x_3^2}{x_1 + x_2 - 2x_3}$.

2722. $ax^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$; $y_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$.

¹ См. указание в «Ответах».

² Мнимые числа — это комплексные числа с ненулевой мнимой частью (т. е. не вещественные; не путать с чисто мнимыми).

Решить уравнения:

$$2723. \quad x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b^2)x - a^3 + ab^2 = 0.$$

$$2724. \quad x^3 - 3(a-b)x^2 + (3a^2 - 6ab - b^2)x - a^3 + 3a^2b + ab^2 - 3b^3 = 0.$$

$$2725. \quad x^3 - (a+1)^2x^2 + (2a^3 + a^2 + 2a - 1)x - a^4 + 1 = 0.$$

$$2726. \quad x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0.$$

$$2727. \quad x^4 - 12ax^3 + (45a^2 - b^2)x^2 - 2a(29a^2 - 5b^2)x + 24a^2(a^2 - b^2) = 0.$$

$$2728. \quad x^4 - 4(a+1)x^3 + (5a^2 + 14a + 4)x^2 - (2a^3 + 14a^2 + 12a)x + 4a^3 + 8a^2 = 0.$$

$$2729. \quad 2x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Полное кубическое уравнение

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

линейной подстановкой $y = x - \frac{A}{3}$ приводится к уравнению

$$x^3 + px + q = 0.$$

Последнее проще всего решается подстановкой $x = u + v$, вводящей две новые неизвестные. После нее данное уравнение переходит в такое:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравнению, достаточно положить $u^3 + v^3 = -q$, $3uv + p = 0$. Отсюда находятся u и v , а потом и x . Окончательно получается формула Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Для кубических радикалов следует брать лишь такие значения, чтобы их произведение было равно $-\frac{p}{3}$ (способ Гудде).

Подобно этому, полное уравнение четвертой степени

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

подстановкой $y = x - \frac{A}{4}$ приводится к уравнению

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Один из наиболее простых способов его решения принадлежит Феррари. Уравнение переписываем в таком виде:

$$4x^4 + 4ax^2 = -4bx - 4c.$$

Прибавляя одинаковые слагаемые к обеим частям, получаем:

$$4x^2 + 4(a + \lambda)x^2 + (a + \lambda)^2 = 4\lambda x^2 - 4bx - 4c + (a + \lambda)^2$$

или

$$(2x^2 + a + \lambda)^2 = 4\lambda x^2 - 4bx + \lambda^2 + 2a\lambda + a^2 - 4c. \quad (6.1)$$

Величину λ можно подобрать так, чтобы полином в правой части имел равные корни. Для этого должно быть

$$\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (a^2 - 4c)\lambda - b^2 = 0.$$

Если λ — один из корней этой кубической резольвенты, то уравнение (6.1) переписывается в таком виде:

$$(2x^2 + a + \lambda)^2 = 4\lambda \left(x - \frac{b}{2\lambda} \right)^2$$

и сводится к двум квадратным уравнениям:

$$2x^2 + a + \lambda = \pm 2\sqrt{\lambda} \left(x - \frac{b}{2\lambda} \right).$$

Решить по формуле Кардано и способу Феррари уравнения:

2730. $x^3 - 6x - 9 = 0$.

2731. $x^3 + 6x - 7 = 0$.

2732. $x^3 + 3x - 2 = 0$.

2733. $x^3 + 3x - 4 = 0$.

2734. $x^3 - 7x - 6 = 0$.

2735. $x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$.

2736. $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$.

2737. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$.

2738. $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$.

§ 6.9

ОТДЕЛЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Найти рациональные корни уравнений:

2739. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$.

2740. $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$.

2741. $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$.

2742. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$.

2743. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.

2744. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0$.

2745. $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0$.

2746. $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$.

Найти кратные корни уравнений:

2747. $x^3 - 12x + 16 = 0$.

2748. $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$.

2749. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

2750. $x^4 - 6x^2 - 8x + 24 = 0$.

2751. $x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$.

2752. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0$.

2753. $x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$.

2754. $(x + 1)^7 - x^7 + 7x + 6 = 0$.

2755. $x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$.

2756. $x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0$.

Отделить вещественные корни уравнений:

2757. $x^3 - 12x + 5 = 0$.

2758. $x^3 - 27x - 17 = 0$.

2759. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$.

2760. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$.

2761. $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0$.

2762. $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 39x - 21 = 0$.

2763. $x^{2n+1} + px + q = 0$.

Отделить по способу Фурье корни уравнений:

2764. $x^3 - 12x - 4 = 0$.

2765. $x^3 - 24x + 11 = 0$.

2766. $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$.

2767. $x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$.

2768. $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

2769. $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$.

2770. $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$.

Отделить по способу Штурма корни уравнений:

2771. $x^3 + 2x - 7 = 0$.

2772. $x^3 - 21x + 7 = 0$.

2773. $x^4 - 6x^3 + x^2 - 1 = 0$.

2774. $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

2775. $x^4 - 12x^3 - 55x^2 + 96 = 0$.

2776. $x^5 + 5x^3 - 7x + 2 = 0$.

2777. $x^5 + 7x^3 - 5x + 11 = 0$.

2778. Составить ряд функций Штурма для уравнений

а) $x^2 + px + q = 0$ и

б) $x^3 + px + q = 0$.

2779. Методом Штурма найти условие вещественности корней уравнения $x^5 - 5px^3 + 5p^2x + 2q = 0$.

2780. Сколько вещественных корней имеет предыдущее уравнение, если $p^5 < q^2$?

2781. Числа a_ν — вещественны, b_ν — положительны. При этом

$$\prod_{\nu=1}^n (x - a_\nu - b_\nu i) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами. Доказать, что корни уравнения $p\varphi(x) + q\psi(x) = 0$ вещественны при любых вещественных p и q .

2782. Отделить корни уравнения относительно λ :

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0, \quad a^2 > b^2 > c^2.$$

2783. Определить число вещественных корней уравнения

$$f(x) = 1 + ax + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n}x^n = 0,$$

воспользовавшись теоремой Штурма и равенством

$$(1-x)f'(x) = af(x) - \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)(a+n)}{1 \cdot 2 \dots n}x^n.$$

Вычислить с точностью до 10^{-5} корни следующих уравнений:

2784. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

2785. $x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0$.

2786. $x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

2787. $x^3 + 6x^2 + 6x - 7 = 0$.

2788. $x^3 - 3x^2 + 8x + 10 = 0$.

2789. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$.

2790. $x^5 + 5x + 1 = 0$.

Найти с точностью до 10^{-3} корни следующих уравнений:

2791. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$.

2792. $10x = 10 + \sin x$.

2793. $10x = e^{-x}$.

2794. $x = e^{-x}$.

2795. $10 \ln x = x^3 - 3$.

2796. Шар с радиусом 1 м имеет удельный вес 0,75. На какую высоту он выступает из воды, плавая в ней?

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 7.1 ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При нахождении неопределенных интегралов важную роль играет таблица основных формул. Ее удобно помнить в таком виде:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; a > 0.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

Следующие четыре равенства дают основные правила интегрирования:

- I. $\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx,$
- II. $\int cu dx = c \int u dx,$
- III. $\int u dv = uv - \int v du,$
- IV. $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt; x = \varphi(t).$

Применяя формулы 1 и 2 и правила I и II, найти интегралы:

2797. $\int x^3 dx.$

2799. $\int x\sqrt{x} dx.$

2798. $\int \sqrt{x} dx.$

2800. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx.$

2801. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 2807. $\int x^2(x^2 - 1)dx.$
 2802. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ 2808. $\int (x^2 - 1)^2 dx.$
 2803. $\int \frac{dx}{x^3}.$ 2809. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x} dx.$
 2804. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$ 2810. $\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x} dx.$
 2805. $\int (x^2 + 6x - 5)dx.$ 2811. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx.$
 2806. $\int (x^4 - 3x^2 + 5x)dx.$ 2812. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$

Следующие интегралы находятся непосредственно применением формул 1–12, а также при помощи замены переменных по формуле $ax + b = t$.

2813. $\int e^{-x} dx.$ 2830. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$
 2814. $\int e^{-3x} dx.$ 2831. $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-2)}.$
 2815. $\int \sin 2x dx.$ 2832. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$
 2816. $\int \cos(3x - 5)dx.$ 2833. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$
 2817. $\int \frac{dx}{x-2}.$ 2834. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
 2818. $\int \frac{dx}{3x+2}.$ 2835. $\int 2^x dx.$
 2819. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-2} dx.$ 2836. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}},$
 2820. $\int \frac{dx}{x^2+2}.$ переводя иррациональность в
 2821. $\int \frac{dx}{x^3-3}.$ числитель.
 2822. $\int \frac{dx}{2x^2+7}.$ 2837. $\int \frac{dx}{(x+2)^2+3}.$
 2823. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$ 2838. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}.$
 2824. $\int \frac{x^4 dx}{x-1}.$ 2839. $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}.$
 2825. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6}}.$ 2840. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$
 2826. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}.$ 2841. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$
 2827. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}.$ 2842. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}.$
 2828. $\int \frac{dx}{(2x-1)^2}.$ 2843. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$
 2829. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$

В ряде случаев бывает удобно преобразовать произведения и степени синусов и косинусов в суммы или разности. При этом можно воспользоваться формулами:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} ((\cos(a-b) + \cos(a+b))); \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2};$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)); \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2};$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)); \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a.$$

Иногда еще удобнее применить формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Найти интегралы:

$$2844. \int \cos x \cos 3x \, dx.$$

$$2845. \int \cos x \sin 3x \, dx.$$

$$2846. \int \cos 3x \cos 4x \, dx.$$

$$2847. \int \cos x \cos 3x \cos 5x \, dx.$$

$$2848. \int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$$

$$2849. \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{12} \, dx.$$

$$2850. \int \sin^2 x \cos^2 3x \, dx.$$

$$2851. \int \sin^4 x \, dx.$$

$$2852. \int \cos^4 x \, dx.$$

$$2853. \int \sin^4 x \cos^4 x \, dx.$$

Следующие интегралы находятся простыми подстановками:

$$2854. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$2855. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}.$$

$$2856. \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$2857. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$2858. \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx.$$

$$2859. \int \sin^3 x \cos x \, dx.$$

$$2860. \int \cos^2 x \sin x \, dx.$$

$$2861. \int e^{x^2} x \, dx.$$

$$2862. \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$2863. \int \frac{x dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2864. \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx.$$

$$2865. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

$$2866. \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}.$$

$$2867. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\cos x}}.$$

$$2868. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 3}.$$

$$2869. \int \frac{\sqrt{\lg x} dx}{\cos^2 x}.$$

$$2870. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$$

$$2871. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 5 \cos^2 x}.$$

$$2872. \int \lg x \, dx.$$

$$2873. \int \lg^2 x \, dx.$$

$$2874. \int \frac{2x+11}{x^2+6x+13} dx.$$

$$2875. \int \frac{x dx}{x^2+x+1}.$$

$$2876. \int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5} dx.$$

$$2877. \int \frac{5x+7}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx.$$

$$2878. \int \frac{3x+2}{\sqrt{3+x+x^2}} dx.$$

$$2879. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-ax}}.$$

$$2880. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x-1}}.$$

$$2881. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$2882. \int \frac{(x+a) dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

С помощью одной из тригонометрических подстановок $x = a \sin \varphi$, $x = a \operatorname{tg} \varphi$, $x = a \sin^2 \varphi$ найти интегралы:

$$2883. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$2886. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$2884. \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

2887. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$, переводя иррациональность в знаменатель.

$$2885. \int \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}.$$

Применяя интегрирование по частям, выражаемое равенством III, найти следующие интегралы:

$$2888. \int x^2 \ln x \, dx.$$

$$2894. \int x^2 e^{-x} \, dx.$$

$$2889. \int x \cos x \, dx.$$

$$2895. \int x^2 \sin x \, dx.$$

$$2890. \int x \operatorname{ch} x \, dx.$$

$$2896. \int x \ln(x^2 - 1) \, dx.$$

$$2891. \int x \sin x \, dx.$$

$$2897. \int \ln x \, dx.$$

$$2892. \int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$2898. \int x \ln^2 x \, dx.$$

$$2893. \int (x^2 + x) \ln(x + 1) \, dx.$$

§ 7.2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

2899. Найти интеграл $\int \frac{x \, dx}{x^2 - 3x + 2}$, пользуясь тождеством

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}.$$

2900. Найти интеграл $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} \, dx$, пользуясь тождеством

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

в котором коэффициенты A и B легко находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x после освобождения от знаменателя.

Найти интегралы:

$$2901. \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

$$2908. \int \frac{x \, dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

$$2902. \int \frac{x \, dx}{x^3 - 1}.$$

$$2909. \int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

$$2903. \int \frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x - 1} \, dx.$$

$$2910. \int \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4} \, dx.$$

$$2904. \int \frac{dx}{x^2(x-1)}.$$

$$2911. \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} \, dx.$$

$$2905. \int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}.$$

$$2912. \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} \, dx.$$

$$2906. \int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} \, dx.$$

$$2913. \int \frac{x^2 \, dx}{x^4 - 1}.$$

$$2907. \int \frac{x^2 \, dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$2914. \int \frac{x dx}{x^3+1}.$$

$$2915. \int \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2} dx.$$

$$2916. \int \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

$$2917. \int \frac{dx}{x^3+2x-3}.$$

В следующих интегралах для разложения знаменателя на множители удобно прибавить и вычесть слагаемое ax^2 , где a — соответственно подобранный коэффициент.

$$2918. \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

$$2920. \int \frac{(x^2+2) dx}{x^4+x^2+4}.$$

$$2919. \int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}.$$

$$2921. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

Если знаменатели разлагаются на простые множители первой степени, то при разложении дроби на простейшие удобна формула

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(a_k)}{\psi'(a_k)} \frac{1}{x - a_k},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — корни полинома $\psi(x)$. Если среди корней есть пара комплексных сопряженных, то в сумме, стоящей в правой части, два соответствующих слагаемых можно заменить одной величиной:

$$\frac{\left(\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} + \frac{\varphi(\bar{a})}{\psi'(\bar{a})} \right) x - \left(\bar{a} \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} + a \frac{\varphi(\bar{a})}{\psi'(\bar{a})} \right)}{x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a}}.$$

Здесь $\bar{a} = \alpha - \beta i$ — число комплексно сопряженное с $a = \alpha + \beta i$.

Найти интегралы:

$$2922. \int \frac{6dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$2923. \int \frac{24dx}{x(x^2-1)(x^2-4)}.$$

$$2924. \int \frac{dx}{x^{2n}+1}.$$

Следующие интегралы сводятся к интегралам предыдущих типов после выделения целой части в подынтегральной дроби.

$$2925. \int \frac{x^4 dx}{x^2+3}.$$

$$2930. \int \frac{x^4 dx}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

$$2926. \int \frac{x^6 dx}{x^2-1}.$$

$$2931. \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} dx.$$

$$2927. \int \frac{x^3 dx}{x^2+x+1}.$$

$$2932. \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx.$$

$$2928. \int \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}.$$

$$2933. \int \frac{x^6 dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$2929. \int \frac{x^6+16}{x^4-4} dx.$$

Пользуясь тождеством $4a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2 = 4ac-b^2$ и интегрируя по частям интеграл $\int \frac{(2ax+b)^2 dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, можно доказать формулу приведения:

$$(4ac-b^2)u_n = \frac{2n-3}{n-1} \cdot 2au_{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}},$$

где

$$u_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Следующие интегралы найти с помощью формулы приведения:

$$2934. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$2936. \int \frac{dx}{(x^2+4)^4}.$$

$$2935. \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

$$2937. \int \frac{dx}{(x^2-3x+3)^2}.$$

2938. Доказать равенство:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = & -\frac{1}{2n-2} \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \\ & + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \frac{x}{a^4(x^2+a^2)^{n-2}} + \dots \\ & \dots + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \cdot 2} \frac{1}{a^{2n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

2939. Доказать равенство:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2ax+b)^m}{(ax^2+bx+c)^n} dx = & \frac{(2ax+b)^{m-1}}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ & + \frac{2a(m-1)}{n-1} \int \frac{(2ax+b)^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} dx. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$2940. \int \frac{x^4 dx}{(x^2+3)^3}.$$

$$2942. \int \frac{x^6 dx}{(x^2+4)^4}.$$

$$2941. \int \frac{x^6 dx}{(x^2-5)^4}.$$

$$2943. \int \frac{x^4 dx}{(x^2-3)^3}.$$

В следующих задачах подынтегральная функция имеет вид $x^m(ax^n+b)^{-p}$. В них полезна подстановка: $x^\sigma = t$, где σ — наибольший общий делитель чисел $m+1$ и n .

$$2944. \int \frac{x^5 dx}{x^4+1}.$$

$$2948. \int \frac{dx}{x(x^3+4)}.$$

$$2952. \int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}.$$

$$2945. \int \frac{x^3 dx}{(x^8+4)^2}.$$

$$2949. \int \frac{x^5 dx}{(x^2+2)^2}.$$

$$2953. \int \frac{x^5 dx}{x^{12}-1}.$$

$$2946. \int \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$$

$$2950. \int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)} dx.$$

$$2947. \int \frac{x^5 dx}{(x^{12}+1)^2}.$$

$$2951. \int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)} dx.$$

В следующих задачах интеграл находится после того, как знаменатель разлагается на множители.

$$2954. \int \frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2} dx.$$

$$2956. \int \frac{4x^3-x^2+10x+5}{x^4-x^3+4x^2+3x+5} dx.$$

$$2955. \int \frac{2x^2+x+4}{x^4+x^3+2x^2-x+3} dx.$$

$$2957. \int \frac{4x^3-17x^2+28x-15}{x^4-7x^3+20x^2-27x+15} dx.$$

Найти алгебраическую часть в интегралах:

$$2958. \int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2} dx.$$

$$2959. \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$$

$$2960. \int \frac{2-3x+x^2}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$2961. \int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx.$$

Ряд дальнейших задач решается разными специальными приемами, позволяющими избежать разложения дроби на простейшие.

Дробно-линейная подстановка вида $\frac{x-a}{x-b} = t$ позволяет удобно найти интегралы:

$$2962. \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)^3}.$$

$$2964. \int \frac{dx}{(x^2-1)^4}.$$

$$2963. \int \frac{dx}{(x^2-x)^3}.$$

$$2965. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2-1)^3}.$$

Подстановки вида $x + \frac{1}{x} = u$ и $x - \frac{1}{x} = v$ позволяют с легкостью найти следующие интегралы, содержащие возвратные полиномы и множитель $x^2 - 1$ или $x^2 + 1$:

$$2966. \int \frac{x^2-1}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1} dx.$$

$$2967. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

$$2968. \int \frac{x^2+1}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1} dx.$$

$$2969. \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx.$$

2970. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$, воспользовавшись тождествами:

$$1 = \frac{1}{2}(x^3+1) - \frac{1}{2}(x^3-1), \quad 1 = \frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2-1).$$

2971. Найти интеграл $\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$, вычтя и прибавив в числителе величину x^2 .

2972. Найти интеграл $A = \int \frac{dx}{x^4+1}$, введя вспомогательный интеграл $B = \int \frac{x^2 dx}{x^4+1}$ и заметив, что интегралы $A + B$ и $A - B$ берутся с легкостью после подстановок $x - \frac{1}{x} = u$ и $x + \frac{1}{x} = v$.

2973. Найти величину интеграла $A = \int \frac{dx}{x^6+1}$, введя в рассмотрение интеграл $B = \int \frac{x^4 dx}{x^6+1}$.

$$2974. \text{ Найти интегралы } C = \int \frac{x^2 dx}{x^8+1} \text{ и } D = \int \frac{x^4 dx}{x^8+1}.$$

§ 7.3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Если в подынтегральной функции содержится корень какой-нибудь степени из дробно-линейной функции $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, то от этой иррациональности можно избавиться подстановкой: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^n$, где n — соответственно выбранный показатель. С помощью этого приема находятся следующие интегралы:

$$2975. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}}.$$

$$2978. \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$2976. \int \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$$

$$2979. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$2977. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

$$2980. \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1}} dx.$$

Следующие четыре интеграла, хотя и иного типа, но тоже находятся подстановкой вида $\frac{x-a}{x-b} = t^n$.

$$2981. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}.$$

$$2983. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

$$2982. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$$

$$2984. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}.$$

Близкими приемами находятся и следующие три интеграла:

$$2985. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2986. \int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}} dx.$$

$$2987. \int \frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}.$$

Следующие интегралы имеют вид $\int x^m(ax^n + b)^p dx$, где m , n и p — рациональные числа. Они сводятся к интегралам от рациональных функций в трех случаях:

1. Если p — целое, хотя бы и отрицательное. Подстановка: $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n .
2. Если $\frac{m+1}{n}$ — целое. Подстановка: $ax^n + b = t^M$, где M — знаменатель числа p .
3. Если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Подстановка: $a + bx^{-n} = t^M$, где M — знаменатель числа p .

Замечание. Если ни одно из трех чисел p , $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n} + p$ не является целым числом, то по теореме Чебышева интегралы данного вида не могут быть выражены конечной комбинацией элементарных функций.

Вычислить интегралы:

$$2988. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$$

$$2989. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^3}.$$

$$2990. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}.$$

$$2991. \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2992. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

$$2993. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$2994. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}}.$$

$$2995. \int x^7 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$2996. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$2997. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$2998. \int \sqrt[3]{x-x^3} dx.$$

$$2999. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}.$$

Следующие интегралы решаются приемом, подобным приемному в третьем случае предыдущего типа:

$$3000. \int \frac{dx}{(5x^3+3)\sqrt[3]{4x^3+3}}.$$

$$3001. \int \frac{dx}{(x^4+3)\sqrt[3]{2x^4+1}}.$$

Во многих случаях при нахождении интегралов от дифференциальных биномов, т. е. интегралов вида $u_{m,p} = \int x^m(ax^n + b)^p dx$, бывает полезно сначала свести интеграл к другому, у которого величины m и p имеют более удобные значения. Это можно сделать с помощью формул приведения. Главнейшие из них имеют такой вид:

$$a(m+np+1)u_{m,p} = x^{m-n+1}(ax^n + b)^{p+1} - b(m-n+1)u_{m-n,p},$$

$$(m+np+1)u_{m,p} = x^{m+1}(ax^n + b)^p + bnp u_{m,p-1}.$$

С помощью формул приведения найти интегралы:

$$3002. \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$3003. \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3004. \int \frac{dx}{x^7 \sqrt{x^4+1}}.$$

$$3005. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$3006. \int (x^2-1)^2 \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$3007. \int \frac{x^9 dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

В большом количестве дальнейших задач даны интегралы, содержащие корень квадратный из квадратного полинома. Все они могут быть сведены к интегралам от рациональных функций одной из трех подстановок Эйлера:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1),$$

где x_1 — корень полинома $ax^2 + bx + c$.

Однако в большинстве случаев подстановки Эйлера приводят к более длинным вычислениям, чем прямые методы. Для их применения следует ознакомиться с тремя основными типами изучаемых интегралов.

I. Интегралы вида $\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $f(x)$ — полином.

В большинстве случаев удобен метод неопределенных коэффициентов. При этом пишем предположительное тождество:

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n) \times \\ \times \sqrt{ax^2 + bx + c} + A_{n+1} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Вычисляя производную от обеих частей равенства, получаем:

$$\frac{f(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ = ((n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \dots + A_{n-1}) \times \\ \times \sqrt{ax^2 + bx + c} + (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots \\ \dots + A_n) \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{A_{n+1}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим в обеих частях равенства полиномы степени n . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим уравнения, из которых коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_n$ находятся один за другим.

Найти интегралы:

$$3008. \int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$$

$$3011. \int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

$$3009. \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{-x^2+x+4}} dx.$$

$$3012. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3010. \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx.$$

$$3013. \int x^2 \sqrt{x^2+2} dx.$$

Предыдущие задачи содержали интегралы вида $\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $f(x)$ — полином. Чтобы иметь возможность интегрировать самый общий интеграл вида $\int f(x, y) dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция от x и y , а $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, важно уметь находить интегралы еще двух видов, которые мы обозначим цифрами II и III.

II. Интегралы вида $\int \frac{f_m(x) dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $f_m(x)$ — полином степени m , меньшей, чем n . Эти интегралы сводятся к интегралам предыдущего класса подстановкой $x - \alpha = \frac{1}{t}$. Если степени полинома $f_m(x)$ не меньше, чем n , то у дроби $\frac{f_m(x)}{(x-\alpha)^n}$ следует выделить целую часть.

С помощью этих методов найти интегралы:

$$3014. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3015. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3016. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

$$3017. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$3018. \int \frac{x^3+x-1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} dx.$$

$$3019. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+2x+4}}.$$

$$3020. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2} dx.$$

$$3021. \int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

III. Третий и наиболее сложный тип представляют интегралы

$$I = \int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где корни трехчлена $x^2 + px + q$ мнимые. Если $p = b = 0$, то

$$\begin{aligned} I &= M \int \frac{x dx}{(x^2 + q)^n \sqrt{ax^2 + c}} + N \int \frac{dx}{(x^2 + q)^n \sqrt{ax^2 + c}} = \\ &= M \int \frac{x dx}{(x^2 + q)^n \sqrt{ax^2 + c}} + N \int \frac{x^{-2n-1} dx}{(1 + qx^{-2})^n \sqrt{a + cx^{-2}}}. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл находится подстановкой $ax^2 + c = u^2$, а второй — подстановкой $a + cx^{-2} = v^2$. В общем случае интеграл I сводится к этому простейшему подстановкой $x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$. При этом получается:

$$I = \int \frac{f_n(t) dt}{(At^2 + Bt + C)^n \sqrt{A_1 t^2 + B_1 t + C_1}},$$

где $f_n(t)$ — полином степени n , а коэффициенты B и B_1 имеют такие значения:

$$B = 2\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + 2q; \quad B_1 = 2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c.$$

Полагая $B = 0$, $B_1 = 0$, получим уравнения, дающие для α и β вещественные значения при вещественных p, q, a, b, c , если хотя бы один из полиномов имеет мнимые корни. При таком выборе чисел α и β интеграл I распадается на сумму интегралов двух видов:

$$\int \frac{t^{2\nu+1} dt}{(At^2 + C) \sqrt{A_1 t^2 + C_1}} \quad \text{и} \quad \int \frac{t^{2\nu} dt}{(At^2 + C) \sqrt{A_1 t^2 + C_1}},$$

которые интегрируются соответственно подстановками:

$$A_1 t^2 + C_1 = \sigma^2 \quad \text{и} \quad A_1 + C_1 t^{-2} = \tau^2.$$

Найти интегралы:

$$3022. \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3023. \int \frac{(x+3) dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3024. \int \frac{(2x+3) dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

$$3025. \int \frac{x dx}{(x^2+x+2)\sqrt{4x^2+4x+3}}.$$

$$3026. \int \frac{(2x+1) dx}{(3x^2+4x+4)\sqrt{x^2+6x-1}}.$$

$$3027. \int \frac{x dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{4x^2-2x+4}}.$$

Самый общий интеграл вида $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция от x и y , сводится к интегралам трех предыдущих видов. Для этого достаточно, уничтожая иррациональность в знаменателе, преобразовать функцию $f(x, y)$ к виду $\varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — рациональные функции от x . При этом $\psi(x)y = \frac{\psi(x)y^2}{y} = \frac{\psi(x)(ax^2 + bx + c)}{y} = \frac{\omega(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Таким образом, дело сводится к нахождению интеграла от рациональной функции $\varphi(x)$ и $\frac{\omega(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $\omega(x)$ — рациональная дробь. В последнем интеграле рациональную дробь $\omega(x)$ можно преобразовать выделением целой части и разложением на простейшие дроби. После этого получатся интегралы трех рассмотренных типов. В простых случаях часть этих преобразований отпадает.

Найти интегралы:

$$3028. \int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}} dx.$$

$$3029. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+2} dx.$$

$$3030. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx.$$

$$3031. \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3032. \int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^2} dx.$$

$$3033. \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$3034. \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$3035. \int \frac{x^2 dx}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3036. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

$$3037. \int \frac{x^3 dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

$$3038. \int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}.$$

$$3039. \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

$$3040. \int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

$$3041. \int \frac{(x^2+1) dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

Подстановкой Абеля иногда называют подстановку $\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = u$, удобную при нахождении интеграла от функции $(ax^2 + bx + c)^{-n-\frac{1}{2}}$, где n — целое число.

Найти интегралы:

$$3042. \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}.$$

$$3044. \int \frac{(3x+2) dx}{(x^2+4x+1)^2 \sqrt{x^2+4x+1}}.$$

$$3043. \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2 \sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3045. \int \frac{(x^3+1) dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Интегралы $\int f(x, y) dx$, где $f(x, y)$ — рациональная функция, а $y = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$, называемые эллиптическими, вообще говоря не интегрируются в конечном виде, если нет особых соотношений между коэффициентами функции $f(x, y)$ или полинома $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.

В следующих примерах с возвратными полиномами одна из подстановок $x + \frac{1}{x} = u$ или $x - \frac{1}{x} = v$ позволяет сравнительно просто получить интеграл.

$$3046. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$3047. \int \frac{x^2+1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$3048. \int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}} dx.$$

$$3049. \int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^3-2x^2-3x+1}}.$$

$$3050. \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx.$$

$$3051. \int \frac{x+1}{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}.$$

Теорема (Абеля). Пусть y — алгебраическая функция от x степени n , т. е. y удовлетворяет уравнению $\varphi(x, y) = 0$, где $\varphi(x, y)$ — полином относительно x и y степени n относительно y . Если интеграл $\int f(x, y) dx$ от функции $f(x, y)$, рациональной относительно x и y , может быть выражен через алгебраические функции, то должно выполняться равенство:

$$\int f(x, y) dx = p_0(x) + p_1(x)y + \dots + p_{n-1}(x)y^{n-1},$$

где $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ — рациональные функции от x .

Следствие. Если $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ — полином степени n , и если интеграл $\int \frac{a_0x^\lambda + a_1x^{\lambda-1} + \dots + a_\lambda}{y^k} dx$ выражается алгебраической функцией, то он должен равняться $f(x)y^{m-k}$, где $f(x)$ — полином степени $\lambda = n + 1$.

Найти следующие алгебраические интегралы:

$$3052. \int \frac{3x^4+2x^3+8x^2+6x+2}{\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}} dx.$$

$$3053. \int \frac{5x^5+11x^3+3x^2}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx.$$

$$3054. \int \frac{5x^7+17x^4+4x^3}{\sqrt[4]{(x^4+4x+1)^3}} dx.$$

§ 7.4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы, содержащие функции $\ln \varphi$, $\operatorname{arctg} \varphi$, $\arcsin \varphi$, где φ — некоторая алгебраическая функция от x , нередко интегрируют по частям, полагая $u = \ln \varphi$, $u = \operatorname{arctg} \varphi$, $u = \arcsin \varphi$.

Этим способом находятся следующие интегралы:

$$3055. \int \ln x dx.$$

$$3056. \int \frac{\ln x}{(2x+5)^3} dx.$$

$$3057. \int \ln(1+x^2) dx.$$

$$3058. \int \frac{\ln(x-1)}{(x+1)^3} dx.$$

$$3059. \int \frac{\ln(x^2-x+1)}{x^2} dx.$$

$$3060. \int \frac{x \ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$3061. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$$

$$3062. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$3063. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3064. \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3065. \int x^6 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3066. \int x^7 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$3067. \int \arcsin x dx.$$

$$3068. \int x \arcsin x dx.$$

$$3069. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$3070. \int \frac{x \arcsin x dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегралы, содержащие произведение полинома на одну из функций e^{ax} , $\cos ax$, $\sin bx$, лучше всего берутся по формуле многократного интегрирования по частям, которой можно придать такой вид:

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} + \dots + \\ + (-1)^m u^{(m)}v^{(n-m-1)} + (-1)^{(m+1)} \int u^{(m+1)}v^{(n-m-1)} dx + C.$$

Если u — полином степени m , то последний член обращается в нуль.

Доказать равенства, в которых $f(x)$ — полином степени m :

$$\mathbf{3071.} \int f(x)e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(f(x) - \frac{f'(x)}{a} + \frac{f''(x)}{a^2} - \dots + (-1)^m \frac{f^{(m)}(x)}{a^m} \right) + C.$$

$$\mathbf{3072.} \int f(x) \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} \left(f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) + \\ + \frac{\cos ax}{a^2} \left(f'(x) - \frac{f'''(x)}{a^2} + \frac{f^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right) + C.$$

$$\mathbf{3073.} \int f(x) \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} \left(f(x) - \frac{f''(x)}{a^2} + \frac{f^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) + \\ + \frac{\sin ax}{a^2} \left(f'(x) - \frac{f'''(x)}{a^2} + \frac{f^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right) + C.$$

Найти интегралы:

$$\mathbf{3074.} \int x^4 e^{-x} dx.$$

$$\mathbf{3078.} \int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx.$$

$$\mathbf{3075.} \int x^5 \cos x dx.$$

$$\mathbf{3079.} \int (x^2 + 3x + 5) \cos 2x dx.$$

$$\mathbf{3076.} \int x^3 \sin(2x + 3) dx.$$

$$\mathbf{3080.} \int x^3 e^{5x} dx.$$

$$\mathbf{3077.} \int x^4 \sin x dx.$$

$$\mathbf{3081.} \int (x^3 - x^2 + x) \sin x dx.$$

Следующие интегралы, содержащие показательные функции, находятся интегрированием по частям, а также и простыми подстановками:

$$\mathbf{3082.} \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$\mathbf{3086.} \int x(x^2 + 1)e^{-x^2} dx.$$

$$\mathbf{3083.} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$\mathbf{3087.} \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\mathbf{3084.} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}.$$

$$\mathbf{3088.} \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^4} e^{-x} dx.$$

$$\mathbf{3085.} \int x^5 e^{-x^2} dx.$$

$$\mathbf{3089.} \int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 2}{(x^2 + x)^2} e^x dx.$$

Следующие интегралы удобнее всего находить, пользуясь тем, что формулы интегрирования для функций, содержащих e^{ax} , остаются в силе и для комплексных значений a . Отделив вещественную и мнимую части, получим равенства с вещественными интегралами. Этим путем находятся интегралы:

$$\mathbf{3090.} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

$$\mathbf{3092.} \int x^2 \sin xe^x dx.$$

$$\mathbf{3091.} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

$$\mathbf{3093.} \int x^2 \cos xe^x dx.$$

Ряд дальнейших интегралов относится к типу $\int f(\cos x, \sin x) dx$, где $f(u, v)$ — рациональная функция. Здесь полезно иметь в виду три правила:

1. Если $f(\cos x, \sin x)$ умножается на -1 от перемены знака перед одной из величин $\cos x$ или $\sin x$, то полезно другую из них обозначить через t .
2. Если $f(\cos x, \sin x)$ не меняется от перемены знака одновременно перед $\cos x$ и $\sin x$, то полезно положить $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.
3. Подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ во всех случаях обращает интеграл рассматриваемого типа в интеграл от рациональной дроби. К сожалению, эта подстановка приводит к более длинным вычислениям чем предыдущие, если они применимы.

Найти интегралы:

$$3094. \int \sin^3 x dx.$$

$$3095. \int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

$$3096. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$3097. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

$$3098. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$3099. \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

$$3100. \int \operatorname{tg}^6 x dx.$$

$$3101. \int \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

$$3102. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$3103. \int \sin^7 x \cos^6 x dx.$$

$$3104. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} dx.$$

$$3105. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx.$$

$$3106. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$3107. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

Для интегралов $U_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$ существуют формулы приведения, позволяющие сводить интегралы к другим, у которых значки m и n ближе к нулю. Эти формулы сводятся к четырем основным:

$$(m+n)U_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)U_{m-2,n};$$

$$(m+n)U_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)U_{m,n-2};$$

$$(n+1)U_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)U_{m-2,n+2};$$

$$(m+1)U_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)U_{m+2,n-2}.$$

Обозначая через U_n интеграл $U_{0,n}$ и через V_m — интеграл $U_{m,0}$ получаем отсюда еще две формулы приведения для интегралов: $U_n = \int \cos^n x dx$ и $V_m = \int \sin^m x dx$:

$$mV_m = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1)V_{m-2},$$

$$nU_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)U_{n-2}.$$

Пользуясь формулами приведения, найти интегралы:

$$3108. \int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$3109. \int \sin^6 x \cos^4 x dx.$$

$$3110. \int \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$3111. \int \sin^4 x \cos^6 x dx.$$

$$3112. \int \sin^6 x dx.$$

$$3113. \int \sin^8 x dx.$$

$$3114. \int \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$3115. \int \frac{\sin^{10} x}{\cos^4 x} dx.$$

В дальнейшем приводится ряд интегралов от тригонометрических функций, находимых разными приемами.

3116. Найти интеграл $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$, сравнив числитель с производной от знаменателя.

3117. Найти интеграл $\int \frac{3 \cos x + 7 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx$, представив числитель в виде $Au + Bu'$, где $u = 5 \cos x + 2 \sin x$.

3118. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$, приведя знаменатель к логарифмическому виду.

3119. Применить такой же прием к интегралу $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

3120. Найти интеграл $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$, пользуясь тем, что $1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$.

Подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ найти интегралы:

$$3121. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

$$3122. \int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx.$$

$$3123. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$$

$$3124. \int \sqrt{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$3125. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$3126. \int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{tg} x}.$$

$$3127. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

$$3128. \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(4 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg}^3 x} dx.$$

$$3129. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

$$3130. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}.$$

$$3131. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2} dx.$$

$$3132. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 \sin^2 x} dx; a^2 \neq b^2.$$

$$3133. \int \frac{2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}{(1 + \cos 2x)\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} dx.$$

$$3134. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$$

Найти интегралы:

$$3135. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$3136. \int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$3137. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx.$$

$$3138. \int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx.$$

$$3139. \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos 3x} dx.$$

$$3140. \int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x} dx.$$

$$3141. \int \frac{\cos^4 x}{\sin 6x} dx.$$

$$3142. \int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx.$$

$$3143. \int \frac{\cos 2x}{\sin^6 x} dx.$$

$$3144. \int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x} dx.$$

$$3145. \int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x} dx.$$

$$3146. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$$

$$3147. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx.$$

$$3148. \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}} dx.$$

Замечание. Здесь полезна подстановка $\frac{\pi}{4} - x = t$.

$$3149. \int \frac{dx}{a + b \cos x} \text{ при } a^2 > b^2 \text{ и при } a^2 < b^2$$

Следующие интегралы содержат гиперболические функции. В этих примерах их удобно выразить через показательные функции:

$$3150. \int \frac{x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} dx.$$

$$3151. \int \frac{\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x + \operatorname{sh}^3 x} dx.$$

$$3152. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$$

$$3153. \int \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th} x}} dx.$$

$$3154. \int (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} dx.$$

В дальнейших примерах удобнее не выражать гиперболические функции через показательные.

$$3155. \int \frac{dx}{(1-\operatorname{ch} x)^2}.$$

$$3159. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

$$3156. \int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch}^2 x)^2}.$$

$$3160. \int \frac{\operatorname{sh}^3 x dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}}.$$

$$3157. \int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{1-\operatorname{th} x}.$$

$$3161. \int \operatorname{th}^3 x dx.$$

$$3158. \int \frac{dx}{1-\operatorname{sh}^4 x}.$$

$$3162. \int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 3x dx.$$

§ 7.5

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

$$3163. \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1} dx.$$

$$3181. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x-1}}.$$

$$3164. \int \frac{x dx}{(x-1)^3(x-2)^2}.$$

$$3182. \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

$$3165. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2(x^2-1)}.$$

$$3183. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax+bx^4}}.$$

$$3166. \int \frac{x^2 dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

$$3184. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1-x^2}}.$$

$$3167. \int \frac{dx}{x^5+2x^3+3x^2}.$$

$$3185. \int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}.$$

$$3168. \int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} dx.$$

$$3186. \int \frac{x^3 dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$$

$$3169. \int \frac{x^2(1-x^2) dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$3187. \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3170. \int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2}.$$

$$3188. \int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$3171. \int \frac{x dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

$$3189. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3172. \int \frac{x^9 dx}{(x^2-1)^3}.$$

$$3190. \int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^6} dx.$$

$$3173. \int \frac{x^3+3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx.$$

$$3191. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-x}}.$$

$$3174. \int x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx.$$

$$3192. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$3175. \int \frac{x dx}{1+\sqrt{x-1}}.$$

$$3193. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+1}}.$$

$$3176. \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}.$$

$$3194. \int \frac{(2-x^3) dx}{(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}.$$

$$3177. \int \frac{x+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx.$$

$$3195. \int \frac{x+1}{x-2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$3178. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

$$3196. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2-x^4}}.$$

$$3179. \int \frac{x dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$3180. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3197. $\int x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx.$
 3198. $\int \frac{(x^2-a^2) dx}{x \sqrt{a^4+x^4}}.$
 3199. $\int \frac{dx}{(1+x^4) \sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}.$
 3200. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(2-3x+x^3)}}.$
 3201. $\int \frac{3x^2+5x^6}{\sqrt{1+x^4}} dx.$
 3202. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^{2k-2}x^{2k}}}.$
 3203. $\int \frac{(x^4-a^4) dx}{(x^4+a^4) \sqrt{x^4+a^4}}.$
 3204. $\int \frac{1+x^2}{1-2x^2 \cos \alpha + x^4} dx.$
 3205. $\int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2}.$
 3206. $\int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2}.$
 3207. $\int \frac{dx}{(a+(ax+b) \operatorname{tg} x)^2}.$
 3208. $\int \frac{a+x}{x^2+ax \ln x} dx.$
 3209. $\int \frac{1-\ln x}{(x+a \ln x)^2} dx.$
 3210. $\int \frac{1+x \ln x}{x} e^x dx.$
 3211. $\int \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 e^x dx.$
 3212. $\int \frac{1+x^2}{(1+x)^2} e^x dx.$
 3213. $\int e^{\operatorname{arctg} x} (1+2x) dx.$
 3214. $\int e^{\sqrt{x}} x dx.$
 3215. $\int \frac{xe^x}{(e^x-1)^3} dx.$
 3216. $\int \frac{dx}{\cos x - 2 \operatorname{tg} x}.$
 3217. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}.$
 3218. $\int \frac{dx}{1-\cos^4 x}.$
 3219. $\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\ln \operatorname{tg} x dx}.$
 3220. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x dx}{\cos^4 x}.$
 3221. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x (1+a^2 \cos^2 x)}.$
 3222. $\int \frac{\cos^2 x dx}{3+\sin x}.$
 3223. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{\cos 2x}}.$
 3224. $\int \operatorname{tg} x \sqrt{\cos 2x} dx.$
 3225. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3 \sin x + \sin^2 x}}.$
 3226. $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{1+\sin^2 x} dx.$
 3227. $\int (b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{3}{2}} dx.$
 3228. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\cos 2x}}.$
 3229. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$
 3230. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}} dx.$
 3231. $\int e^{a \cdot \operatorname{arctg} x} \frac{x dx}{(1+x^2) \sqrt{1+x^2}}.$
 3232. $\int e^{\sin x} \sin 2x dx.$
 3233. $\int e^x \sin^2 x dx.$
 3234. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx.$
 3235. $\int \frac{(x+1) \ln(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx.$
 3236. $\int \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) dx.$
 3237. $\int \frac{dx}{2^x+1}.$
 3238. $\int \frac{x+1}{2^x} dx.$
 3239. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$
 3240. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$
 3241. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt[4]{\cos 2x}}.$
 3242. $\int \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$
 3243. $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$
 3244. $\int \frac{dx}{a+b \cos x + c \sin x}.$
 3245. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{1+3 \sin 2x} dx.$
 3246. $\int x^{\sqrt{2}} \sin \ln x dx.$
 3247. $\int \frac{\ln(\cos \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi})}{1-\cos^2 \varphi} d\varphi.$
 3248. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx.$
 3249. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} e^x dx.$
 3250. $\int \frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)} dx.$
 3251. $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{\sqrt{1+\sin x \cos x}} dx.$
 3252. $\int \frac{dx}{\cos x \cos(x-\alpha)}.$
 3253. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+b+(a+2b) \cos x + b \cos 2x}}.$
 3254. $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$
 3255. $\int \frac{dx}{\cos^5 x - \sin^5 x}.$
 3256. $\int x^2 \sin^3 x dx.$

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 8.1 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенные интегралы могут вычисляться с помощью неопределенных интегралов по теореме Барроу–Ньютона, т. е. по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — функция, производная от которой в интервале (a, b) равна непрерывной функции $f(x)$. Такая же формула применима и для интегралов с бесконечными пределами. При этом, если, например, $b = \infty$, то

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx, \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$$

Найти величины определенных интегралов:

3257. $\int_0^1 \sqrt[n]{x^n} dx, n > 0.$

3263. $\int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

3258. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{x^n}}, m > n.$

3264. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

3259. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}.$

3265. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$

3260. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 3}.$

3266. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$

3261. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}.$

3267. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 1}.$

3262. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$

3268. Доказать равенство:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx, \quad n > -1.$$

3269. Доказать равенство:

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bx}} = \begin{cases} 2 & \text{при } b \leq a; \\ \frac{2a}{b} & \text{при } b \geq a. \end{cases}$$

3270. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x+2)^4} dx.$

3271. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+1)^2} dx.$

3272. $\int_0^\infty \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} dx.$

3273. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^4)^3}.$

3274. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$

3275. $\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos x}{1+2a \cos x+a^2} dx.$

3276. $\int_0^1 e^{-x} \sin \pi x \, dx.$

3277. $\int_0^\pi x^2 \sin nx \, dx, \quad n — \text{целое.}$

3278. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx.$

3279. $\int_{-1}^1 e^{k \arcsin x} \, dx.$

3280. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x+a^2}}.$

3281. $\int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

3282. Доказать, что площадь, ограниченная дугой синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox между точками $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, равна двум квадратным единицам.

3283. Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком оси Ox между точками $(N, 0)$ и $(2N, 0)$, с боков вертикалями, а сверху гиперболой $y = \frac{1}{x}$, равна $\ln 2$.

3284. Доказать, что площадь, ограниченная лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ равна a^2 .

3285. Доказать, что площадь сегмента между параболой $y = ax^2$ и прямой $y = h$ равна $\frac{2}{3}$ произведения основания на высоту. (Архимед.)

3286. Доказать, что объем параболоида вращения, имеющего с данным цилиндром общие основание и высоту, равен половине объема цилиндра. (Архимед.)

3287. Из сосуда, имеющего форму цилиндра с радиусом a и высотой h , выливается через край жидкость. Доказать, что в тот момент, когда обнажилась половина дна, объем оставшейся жидкости равен $\frac{2}{3}a^2h$. (Архимед.)

3288. Доказать, что объем кувшина, получающегося при вращении синусоиды $y = r + b \sin \frac{2\pi x}{h}$ вокруг оси Ox при $0 < x < h$, равен $\pi r^2 h + \frac{1}{2} \pi b^2 h$.

3289. Стержень длиной l вращается вокруг своего конца, совершая n оборотов в секунду. Определить величину натяжения в точке прикрепления, если вес единицы длины стержня равен σ , а центробежная сила для массы m , движущейся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω , равна $m r \omega^2$.

3290. Под действием нагрузки f проволока длиной l с поперечным сечением s и модулем Юнга E получает удлинение Δl , равное $\frac{fl}{Es}$. Определить удлинение такой проволоки, висящей вертикально, под действием своей тяжести. Удельный вес вещества проволоки равен δ .

3291. От нагрузки в 1 кг проволока растягивается на 1 см . Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее на 4 см ?

3292. Найти величину давления воды на вертикальную стенку треугольной формы. Высота треугольника h , основание a — на поверхности жидкости.

3293. Тот же вопрос для стенки в форме полукруга, диаметр которого $2a$ — на поверхности воды.

3294. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом $1,2 \text{ м}$ и высотой 1 м , если удельный вес песка 2 ?

3295. Найти положение центра тяжести однородного конуса.

3296. Найти центр тяжести полушара с радиусом R .

3297. Цилиндр с радиусом 15 см и высотой 60 см наполнен воздухом под давлением 1 кгс/см^2 . Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема в два раза меньшего?

3298. Точка движется по оси Ox , начиная от точки $(1, 0)$, так, что скорость ее численно равна абсциссе. Где она будет через 10 секунд от начала движения?

3299. Электрические заряды отталкиваются друг от друга с силой $\frac{e_1 e_2}{r^2}$, где e_1 и e_2 — величины зарядов, а r — расстояние между ними. Определить работу, необходимую, чтобы

приблизить заряд $e_2 = 1$ к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное R ?

3300. Земля притягивает тело массой m с силой $f = mg \frac{R^2}{r^2}$, где R — радиус земли, а r — расстояние тела до центра земли ($r \geq R$). Определить величину работы, нужной, чтобы удалить тело в бесконечность с поверхности земли.

3301. По закону Джоуля количество тепла, выделяемого постоянным током, равно Rci^2t , где $c = 0,24$ — постоянная, R — сопротивление, t — число секунд, i — сила тока. Найти выделяемое тепло для переменного тока $i = a \cos bt$.

3302. По закону Торичелли скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gh}$, где h — глубина отверстия под уровнем жидкости. Определить время вытекания жидкости из цилиндра с высотой h и поперечным сечением s сквозь отверстие в дне с площадью σ .

3303. Тот же вопрос для конической воронки с вершиной внизу; s — площадь основания, h — высота воронки.

3304. Диск толщиной h и радиусом r состоит из вещества с удельным весом δ и совершает n оборотов в секунду. Какую работу он совершит при торможении?

3305. На картах проекции Меркатора масштаб изображения в отдельных частях ее увеличивается от экватора к полюсу так, что расстояние между двумя меридианами остается постоянным. Расстояние между меридианами, проведенными через 10° , равно a . Найти расстояние между экватором и параллелью φ° .

§ 8.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ (КВАДРАТУРА КРИВЫХ)

3306. Доказать, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и кубической параболой $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, можно выразить формулой

$$S = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

где y_0 , y_1 и y_2 — ординаты при $x = a$, $\frac{a+b}{2}$ и b .

3307. Доказать, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , прямыми $x = -h$, $x = k$ и параболой, проходящей через точки: $(-h, y_1)$; $(0, y_2)$; (k, y_3) , можно выразить формулой

$$S = \frac{k+h}{6} \left(\left(2 - \frac{k}{h}\right) y_1 + \left(1 + \frac{k}{h}\right) \left(1 + \frac{h}{k}\right) y_2 + \left(2 - \frac{h}{k}\right) y_3 \right).$$

3308. Доказать, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и параболой $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, можно вычислять по формуле

$$S = \frac{b-a}{3} (y_1 + y_2 + y_3),$$

где y_1, y_2, y_3 — значения y при $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{a+b}{2}$, $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Чебышев.)

3309. Доказать, что такую же площадь для параболы 5-го порядка $y = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$ можно вычислять по формуле $S = \frac{b-a}{18} (5y_1 + 8y_2 + 5y_3)$, где y_1, y_2, y_3 — значения y при

$$x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

(Гаусс.)

3310. Доказать, что площадь S сегмента параболы можно выразить формулой $S = \frac{2}{3}lh$, где l — длина хорды сегмента, а h — высота сегмента.

3311. Найти площадь фигуры, ограниченной параболлами $y = x^2$, $y^2 = x$.

3312. Найти площадь, ограниченную одной дугой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox .

3313. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

3314. Найти площадь между Oy и кривой $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

3315. Найти площадь астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, приведя ее уравнение к параметрическому виду.

3316. Найти площадь, ограниченную кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$, перейдя к полярным координатам.

Путем перехода к полярным координатам найти площади, ограниченные кривыми:

3317. Петлей листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$.

3318. Лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

3319. Подэрой эллипса $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

3320. Найти площадь, ограниченную осью Ox и трактрисой

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 < y < a.$$

При этом удобно ввести параметр φ , положив $y = a \sin \varphi$.

3321. Найти площадь, лежащую внутри круга $x^2 + y^2 = 4px$ и параболы $y^2 = 2px$.

3322. Найти площадь между кривыми $27py^2 = 8(x - p)^3$ и $y^2 = 2px$.

3323. Найти площадь между параболой и какой-либо из ее нормалей.

3324. К параболе провести нормаль, отсекающую от нее сегмент наименьшей площади.

3325. Найти площадь, лежащую выше оси Ox и ограниченную линиями: $y^2 = 4ax$; $x^2 + y^2 = 2ax$; $2x - y = 4a$.

3326. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного параболками: $y^2 - 9ax + 81a^2 = 0$; $y^2 - 4ax + 16a^2 = 0$; $y^2 - ax + a^2 = 0$ и осью Ox . Показать, что эта площадь равна площади, ограниченной хордами.

3327. Определить площадь, лежащую между кругом $x^2 + y^2 = a^2$ и его подэрой, относительно внутренней точки $(b, 0)$.

3328. Циклоида

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

пересечена прямой $y = ka$ (причем $0 < k < 2$). Определить площади, ограниченные этими линиями.

3329. Удлиненная циклоида $x = a(kt - \sin t)$, $y = a - a \cos t$ (причем $0 < k < 1$) образует петли. Определить площадь петли. (В частности при $k = \frac{2}{\pi}$; $k = \frac{3}{5\pi}$.)

3330. Найти площадь петли строфоиды $(a - x)y^2 = (a + x)x^2$.

3331. Найти площадь, ограниченную линиями: $y(x^2 + 4) = 4(2 - x)$; $x = 0$; $y = 0$.

3332. Найти площадь, ограниченную линией $(y - x)^2 = x^3$ и осью Ox .

3333. Найти площадь, ограниченную полувогнутой кривой $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ и осью Ox .

3334. Определить площадь, ограниченную параболой

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

и осями координат.

3335. Определить одну из площадей между эллипсом

$$\frac{x^2}{20a^2} + \frac{y^2}{5a^2} = 1$$

и гиперболой $xy = 4a^2$.

3336. Определить площадь между параболой $ay = (x - 3a)^2$ и гиперболой $xy = 4a^2$.

3337. Определить площадь между осью Ox , эвольвентой круга

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

и ее первой вертикальной касательной.

3338. Определить площадь части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей вне круга $x^2 + y^2 = ab$.

3339. Определить площадь криволинейного квадрата, принадлежащего обоим эллипсам

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

3340. Показать, что площадь между одной аркой эпициклоиды и основным кругом равна $\pi b^2 \left(3 + 2\frac{b}{a}\right)$, где a и b соответственно радиусы основного и катящегося кругов.

Найти площади, ограниченные линиями, заданными в полярных координатах:

3341. $r = a \cos \varphi$.

3342. $r = a \cos 2\varphi$.

3343. $r = a \cos 3\varphi$.

3344. $r = a \cos 4\varphi$.

3345. $r^2 = a^2 \frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}$ при $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$.

3346. Эллипса $r = \frac{p}{1+e \cos \varphi}$, $e < 1$, $0 < \varphi < \varphi_0$.

3347. Гиперболы $\frac{p}{1+e \cos \varphi}$, $e > 1$, $0 < \varphi < \varphi_0$; $e \cos \varphi_0 > -1$.

3348. Равнобочной гиперболы

$$r^2 \cos 2\varphi = a^2 \quad \text{при } -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0.$$

3349. Кривой $r = a\sqrt{1+\omega^2}$, $\varphi = \omega - \operatorname{arctg} \omega$,

при $0 < \omega < \omega_0$.

3350. Кривой

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \varphi = \omega - \operatorname{arctg} \omega,$$

при $0 < \omega < \omega_0$.

3351. Конхоида Никомеда $r = \frac{a}{\sin \varphi} \pm b$, при $a < b$, имеет петлю.

Найти площадь петли.

3352. Найти площадь, ограниченную внешним контуром кривой

$$r^{2/3} = a^{2/3} \cos \frac{2}{3}\varphi.$$

3353. Кривая $r = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\varphi}{2}\right)$ имеет три петли, площади которых: $a^2\left(\frac{5}{4}\pi + 2\sqrt{3}\right)$; $a^2\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{5}{4}\sqrt{3}\right)$; $a^2\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$. Проверить.

3354. Определить площадь, лежащую между петлями улитки Паскаля $r = a + b \cos \varphi$, при $a < b$.

3355. Найти площадь, лежащую между кривыми $r^2 \cos 2\varphi = a^2$ и $r^2 \cos 2\varphi = 4a^2 \cos^4 \varphi$.

3356. Определить площадь луночки, лежащей внутри лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ и вне окружности $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

3357. Определить площади, ограниченные дугами кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ и окружности $r = \frac{3}{2}a$.

3358. Определить площадь одной петли кривой

$$(x^2 + y^2)^2 - 4axy^2 = 0.$$

3359. Определить площадь, ограниченную кривой

$$x^4 + y^4 = 2a^2xy.$$

3360. В каком отношении делит прямая $x + y = 2a$ площадь петли листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$?

3361. В каком отношении делит площадь петли листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$ парабола $y^2 = ax$?

3362. Дан эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и эллипс, получаемый из него поворотом около центра на угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить площадь, занятую всеми точками, лежащими внутри обоих эллипсов.

3363. Определить площадь луночки, лежащей внутри одного и вне другого эллипса предыдущей задачи.

3364. Определить площадь, ограниченную петлей кривой $x^7 + y^7 = ax^3y^3$.

3365. Определить площадь, ограниченную кривой

$$x = a \cos t, \quad y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \cos t}.$$

§ 8.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИН ДУГ КРИВЫХ

Найти длины дуг следующих кривых:

3366. $y = \sqrt{x}$ при $0 < x < 1$.

3367. $y = \ln x$ при $\sqrt{3} < x < \sqrt{8}$.

3368. $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ при $0 < x < b$.

3369. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ при $0 < x < x_0$.

3370. $y = \frac{x-3a}{3} \sqrt{\frac{x}{a}}$ при $0 < x < x_0$.

3371. $y = 2a \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}$ при $0 < x < x_0$.

3372. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ при $b < y < a$.

3373. $y^3 = px^2$ при $0 < y < y_0$.

3374. $(2a - x)y^2 = x^3$ при $0 < x < x_0$, где $x_0 < 2a$.

3375. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Полный обвод.

3376. $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$. Полный обвод.

3377. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Одной арки.

3378. $r = a(1 + \cos \varphi)$. Полный обвод.

3379. Первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

3380. Логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$, $0 < r < a$.

3381. Доказать, что длина одной дуги эпициклоиды

$$\begin{aligned}x &= a((n+1)\cos t - \cos(n+1)t), \\y &= a((n+1)\sin t - \sin(n+1)t)\end{aligned}$$

равна $8a \frac{n+1}{n}$.

3382. Доказать, что длина одной дуги гипоциклоиды

$$\begin{aligned}x &= a((n-1)\cos t + \cos(n-1)t), \\y &= a((n-1)\sin t - \sin(n-1)t)\end{aligned}$$

равна $8a \frac{n-1}{n}$.

3383. Определить длину дуги кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ между ее точками прикосновения с осями координат.

3384. Найти длину всей кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

3385. Найти длину дуги кривой:

$$\begin{aligned}x &= 8at^3, \\y &= 3a(2t^2 - t^4),\end{aligned}$$

лежащей над осью Ox .

3386. Парабола $4ay = x^2$ катится по оси Ox . Доказать, что ее фокус описывает цепную линию $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

3387. Доказать, что при качении кардиоиды $r = a(1 - \sin \varphi)$ по циклоиде

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

острие ее описывает прямую линию.

Найти длины дуг следующих кривых в пространстве:

3388. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ при $0 < t < t_0$.

3389. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ при $-\infty < t < 0$.

3390. $x = at$, $y = \sqrt{3abt^2}$, $z = 2bt^3$ при $0 < t < t_0$.

3391. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ при $0 < x < x_0$.

3392. $y = \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}$ при $0 < x < x_0$.

3393. $y^2 = 2ax - x^2$, $z = -a \ln \left(1 - \frac{x}{2a}\right)$; $0 < x < x_0$.

3394. $4ax = (y+z)^2$, $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$; $0 < x < x_0$.

3395. $(y-z)^2 = 3a(y+z)$; $9x^2 + 8y^2 = 8z^2$; $0 < x < x_0$.

3396. $x^2 + y^2 = az$, $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$.

3397. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = a$.

§ 8.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

Найти объемы тел, полученных при вращении следующих линий:

3398. Гиперболы $xy = a^2$ вокруг оси Ox при $a < x < \infty$.

3399. Синусоиды $y = \sin x$ около оси Ox при $0 < x < \pi$.

3400. Циссоиды $(2a-x)y^2 = x^3$ около Ox при $0 < x < b < 2a$.

3401. Лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около оси Ox .

3402. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ около полярной оси.

3403. Циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

около оси Ox , при $0 < x < 2\pi a$.

3404. Параболы $y^2 = 2px$ около оси Ox при $0 < x < a$.

3405. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox .

3406. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox при $a < x < m$.

3407. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Oy при $0 < y < h$.

3408. Циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

около прямой $x = \pi a$.

3409. Циклоида

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

вращается около пересекающей ее прямой $y = ka$ причем $0 < k < 2$. Определить объемы получающихся тел вращения.

3410. Найти объем, получающийся от вращения около полярной оси одной петли лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

3411. Кривая $y = \frac{4a^3}{x^2 + 4a^2}$ вращается вокруг своей асимптоты. Найти объем полученного бесконечного веретена.

3412. Кривая $r^3 = a^3 \cos 3\varphi$ вращается около полярной оси. Определить объем тела, полученного от вращения петли, лежащей в третьем квадранте.

3413. Дуга параболы $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$ вращается вокруг прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Доказать, что объем полученного тела вращения $V = \frac{8}{15} S_M \cdot H$, где S_M — площадь наибольшего поперечного кругового сечения, и H — длина этого веретенообразного тела.

3414. Сегмент круга радиуса R , соответствующий центральному углу 2α , вращается вокруг своей хорды. Определить объем полученного тела.

3415. Улитка Паскаля $r = a + b \cos \varphi$ вращается вокруг полярной оси. Определить объемы:

- а) ограниченный поверхностью вращения, когда $a > b$;
- б) ограниченный внешней поверхностью вращения, когда $a < b$;
- в) полости между полученными поверхностями вращения, когда $a < b$.

3416. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной вращением дуги параболы $y^2 = 4ax$ около прямой $y = 2x$.

3417. Куб с ребром a вращается вокруг своей пространственной диагонали. Определить объем тела, полученного от вращения одной грани.

3418. Куб с ребром a вращается вокруг диагонали одной из своих граней. Определить объем тела, полученного от вращения противоположной грани.

3419. Кривая $x^4 + y^4 = 2axy^2$ вращается вокруг оси Oy . Определить объем полученного тела.

3420. Та же задача, что и 3419, но кривая вращается около оси Ox .

При решении следующих задач полезно применять формулу для вычисления объемов

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела, перпендикулярного оси Ox и удаленного от начала на x . Вместо оси Ox можно взять любую другую ось.

3421. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, рассмотрев горизонтальные сечения.

3422. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, ax , $x - z = 0$, $x + z = 0$, рассмотрев сечения, перпендикулярные Ox .

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

3423. $x^2 + 4y^2 = 8z$, $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = 0$.

3424. $y^2 = 2p(a - x)$, $x - z = 0$, $x - 2z = 0$.

3425. $z^2 = (a - x - y)a$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3426. $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

3427. $z = 0$, $by = x(a - z)$, $by = -x(a - z)$, $x = b$.

3428. $y^2 + z^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$, $-b < x < b$.

3429. В прямой круговой цилиндр (стакан) радиуса r налита вода. Ось наклонена под углом α к горизонту. Часть дна — сегмент с центральным углом 2φ — покрыт водой. Найти объем воды.

3430. Прямой круговой конус рассечен на две части плоскостью, проходящей через центр основания и параллельной образующей. Найти объем частей конуса, учитывая, что сечения конуса плоскостями, параллельными образующей, суть параболические сегменты.

3431. Четверть прямого кругового цилиндра рассечена наклонной плоскостью, проходящей через радиус верхнего основания

и конец радиуса нижнего основания, перпендикулярного к первому радиусу. Через ось цилиндра проведена плоскость под углом φ к упомянутому радиусу верхнего основания. Найти объемы четырех частей четверти цилиндра.

3432. Найти объем, ограниченный поверхностью коноида $a^2 l^2 y^2 = b^2 x^2 (a^2 - z^2)$ и плоскостью $x = l$.

3433. Три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через одну точку, являются осями трех круговых цилиндров одинакового радиуса r . Определить объем тела, лежащего внутри их всех.

3434. Оси двух круговых цилиндров радиуса r пересекаются под углом 2α . Определить объем тела, ограниченного этими цилиндрами.

§ 8.5 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

При вращении дуги плоской кривой $M_1 M_2$ вокруг оси, лежащей в ее плоскости, площадь полученной поверхности вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{(M_1 M_2)} |\rho| ds,$$

где $|\rho|$ — расстояние от элемента дуги ds до оси вращения.

Найти площади поверхностей, полученных вращением указанных кривых вокруг данных осей:

3435. $y = \sin x$ вокруг Ox при $0 < x < \pi$.

3436. $y = \operatorname{tg} x$ вокруг Ox при $0 < x < u < \frac{\pi}{2}$.

3437. $y^2 + x^2 = 2ay$ вокруг Ox .

3438. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$; $b > r$; вокруг Ox .

3439. $y^2 = 2px$ вокруг Ox при $0 < x < a$.

3440. $y^3 = px^2$ вокруг Ox при $0 < y < a$.

3441. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$; вокруг Ox . (Удлиненный эллипсоид.)

3442. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$; около Oy . (Сплюснутый эллипсоид.)

3443. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Oy при $-h < y < h$.

3444. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ около Ox при $a < x < m = \lambda a$.

3445. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (циклоида) вокруг Ox при $0 < x < 2\pi a$.

3446. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ около прямой $x = \pi a$ при $0 < t < \pi$.

3447. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (астроида) около Ox .

3448. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактриса) около Ox .

3449. Кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ около полярной оси.

3450. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около Ox .

3451. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около Oy .

3452. Лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ около прямой $y = x$.

3453. Одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

около прямой $y = ka$, причем $0 < k < 2$. При каком значении k эта поверхность будет иметь наименьшую площадь и какова она?

3454. Дуга параболы $y^2 = 2px$, отсекаемая от нее прямой $y = 2x$, вращается вокруг оси Oy . Определить площадь поверхности.

3455. Та же дуга, что и в предыдущей задаче, вращается вокруг своей хорды. Определить площадь поверхности.

3456. Улитка Паскаля $r = a + b \cos \varphi$ вращается вокруг полярной оси. Определить площадь полученной поверхности, если: а) $a > b$, б) $a < b$.

3457. Дуга астроиды

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t,$$

лежащая в первой четверти, вращается около своей хорды. Определить площадь поверхности.

3458. Дуга окружности радиуса a , соответствующая центральному углу 2α , вращается вокруг оси, пересекающей ее и параллельной ее хорде. Определить площадь полученной поверхности вращения, если ось вращения отсекает дугу, соответствующую

центральному углу 2β . При каком β получается минимальная площадь и какова она?

3459. Астроида

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

вращается вокруг прямой $y = x$. Определить полную поверхность.

3460. Определить поверхность тела задачи 3433.

3461. Определить поверхность тела задачи 3434.

3462. Куб вращается вокруг своей пространственной диагонали. Определить площадь поверхности, описанной всеми ребрами куба.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ЛИНИЯМ И ПОВЕРХНОСТЯМ

§ 9.1 ВВЕДЕНИЕ

3463. Определить пределы интегрирования в интеграле

$$\iint_S f(x, y) dx dy,$$

где S — круг $x^2 + y^2 = a^2$, если выполнять интегрирование сначала по x , а потом по y .

3464. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для площади S , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

3465. В интеграле

$$\iint_S f(x, y) dx dy$$

площадь S ограничена прямыми $x = y$, $y = 0$, $x + y = 2$. Определить пределы интегрирования, если внутреннее интегрирование совершается по x , а также, если оно совершается по y .

Определить в интеграле $\iint_S f(x, y) dx dy$ пределы интегрирования, если:

3466. S — параллелограмм со сторонами $y = 0$; $y = a$; $y = x$; $y = x - 2a$. Рассмотреть оба возможных порядка интегрирования.

3467. S — площадь, ограниченная прямыми $y = h$; $ay = hx$; $ay = 4ah - hx$; где $a > 0$; $h > 0$.

3468. S — область между прямой $y = x - 2$ и параболой $y^2 = x$ (оба способа).

3469. S — параллелограмм со сторонами $y = x$; $y = x + a$; $y = 2x$; $y = 2x - a$ (оба способа).

3470. S — область, заданная неравенствами $x^2 - y^2 \leq a^2$; $x^2 + y^2 \leq 3a^2$.

Переменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$\mathbf{3471.} \quad \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx.$$

$$\mathbf{3472.} \quad \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^2 f(x, y) dy.$$

$$\mathbf{3473.} \quad \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dy.$$

$$\mathbf{3474.} \quad \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\mathbf{3475.} \quad \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy dx.$$

$$\mathbf{3476.} \quad \int_0^2 \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^x f(x, y) dy dx + \int_2^4 \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^2 f(x, y) dy dx$$

(и объединить).

Переменить порядок интегрирования, а также перейти к полярным координатам.

$$\mathbf{3477.} \quad \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-ay}} f(x, y) dx dy.$$

$$3478. \int_a^{2a} \int_{2a-y}^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx dy.$$

Определить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_S f(x, y) ds$ в декартовых и полярных координатах, если область определяется так:

$$3479. x^2 + y^2 \leq 4x; y \geq x.$$

$$3480. x^2 + y^2 \leq a^2; x + y \geq a.$$

$$3481. x \geq y; x + y \leq 2a; y \geq 0.$$

$$3482. y^2 \leq 2px + p^2; y \geq x.$$

$$3483. x^2 + y^2 \geq 2a^2; x^2 + y^2 \leq 2ax.$$

Ввести вместо x и y новые переменные и определить пределы интегрирования по новым переменным для следующих интегралов:

$$3484. \int_0^a \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dx dy, \text{ если } u = x + y, uv = y.$$

$$3485. \int_0^a dx \int_0^b f(x, y) dy, \text{ если } u = y + \alpha x, uv = y.$$

3486. $\iint_S f(x, y) dx dy$, если $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$, а площадь S ограничена астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

3487. В интеграле $\iint_S f(x, y) dx dy$ площадь S ограничена прямыми $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $x = a$ (треугольник). Подходящей заменой переменных обратить область интегрирования в прямоугольник. Объяснить, каким образом гладкая замена переменных приводит к появлению лишних углов.

3488. В интеграле $\iint_S f(x, y) dx dy$ область интегрирования — четверть круга: $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$. Заменой переменных превратить ее в прямоугольник.

3489. В том же интеграле обратить область интегрирования в равнобедренный прямоугольный треугольник.

Вычислить двойные интегралы от данных функций по данной области:

3490. $\iint_S (x + y) dx dy$. Границы области S : $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

3491. $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$. Границы области S : $y = 0$, $x = y$, $x = 1$.

3492. $\iint_S (x + y) dx dy$. Границы области S : $x = y$, $x = y^2$.

3493. $\iint_{|x|+|y|<1} x^2 dx dy$.

3494. $\iint_S (x - y) dx dy$. Границы области S : $y = 0$, $x = y$, $x + y = 2$.

3495. $\iint_S xy dx dy$. Границы области S : $y^2 = 2x$, $x = 2$.

3496. Вычислить интегралы:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x} e^{-y/x} dx dy, \quad \int_0^a \int_x^a e^{y^2} dy dx,$$

предварительно изменив порядок интегрирования.

§ 9.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Пользуясь очевидной формулой

$$S = \iint_S dx dy,$$

вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3497. $y = x^2$, $x = y^2$.

3498. $y = 2x - x^2$, $y = x^2$.

3499. $2y = x^2$, $x = y$.

3500. $4y = x^2 - 4x$, $x - y - 3 = 0$.

С помощью этой же формулы и перехода к полярным координатам вычислить площади, ограниченные кривыми:

3501. Лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ и окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

3502. Кардиоидой $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ и окружностью $x^2 + y^2 = ay\sqrt{3}$.

Вводя полярные координаты, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3503. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемниската).

3504. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ (подэра эллипса).

3505. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

3506. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$.

3507. $x^3 + y^3 = axy$ (лист Декарта) — площадь петли.

3508. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3)$.

3509. $x^4 + y^4 = 2a^2xy$.

3510. Пусть $\omega(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — однородные функции степеней n , $n - 2$, $n - 2$, одновременно обращающиеся в нуль лишь при $x = 0$ и $y = 0$ и положительные при других значениях x и y . Обозначим через $S(a, b)$ площадь кривой

$$\omega(x, y) = a\varphi(x, y) + b\psi(x, y), \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

Доказать, что $S(a + \alpha, b + \beta) = S(a, b) + S(\alpha, \beta)$.

3511. В частности, если $\omega(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, $\varphi(x, y) = x^2$, $\psi(x, y) = y^2$, то $S(a, b) = S(b, a)$. Получить отсюда, что $S(a, b) = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ (см. задачу 3510).

В дальнейших задачах полезно применять обобщенные полярные координаты, полагая $x = a \cos^\sigma \varphi$, $y = b r \sin^\sigma \varphi$ где a , b и σ — соответственно выбранные постоянные. При этом якобиан J удобно вычислять по формуле $J = J_1 J_2$, где J_1 — якобиан подстановки $x = a\xi$, $y = \beta\eta$, равный ab , а J_2 — якобиан подстановки $\xi = r \cos^\sigma \varphi$, $\eta = r \sin^\sigma \varphi$, равный величине $\sigma r \cos^{\sigma-1} \varphi \sin^{\sigma-1} \varphi$. Таким образом,

$$J = ab\sigma r \cos^{\sigma-1} \varphi \sin^{\sigma-1} \varphi.$$

Найти площади, ограниченные кривыми:

3512. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

3513. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$; $y > 0$.

3514. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$; $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

3515. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (площадь петли).

3516. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$; $x > 0$, $y > 0$.

3517. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$; $x > 0$, $y > 0$.

3518. $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

$$3519. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; x > 0, y > 0.$$

$$3520. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 = \frac{xy}{c^2} \text{ (площадь петли).}$$

В следующих задачах границы площади заданы уравнениями такого вида: $\varphi(x, y, a) = 0$, $\varphi(x, y, b) = 0$, $\psi(x, y, \alpha) = 0$, $\psi(x, y, \beta) = 0$. В них удобно выразить x и y через новые переменные u и v из уравнений: $\varphi(x, y, u) = 0$, $\psi(x, y, v) = 0$. Найдя якобиан J , можем вычислить S по формуле

$$S = \iint_S dx dy = \int_a^b du \int_\alpha^\beta |J| dv.$$

Найти площади, ограниченные кривыми:

$$3521. x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x; a < b, \alpha < \beta.$$

$$3522. x^2 = ay, x^2 = by, y = m, y = n; a < b, m < n.$$

$$3523. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{x}{a} = 9\frac{y}{b}; x > 0, y > 0.$$

$$3524. xy = a^2, xy = b^2, y = m, y = n; a^2 > b^2, m > n.$$

$$3525. y^2 = mx, y^2 = nx, x = \alpha y, x = \beta y; m > n, \alpha > \beta.$$

$$3526. xy = a^2, xy = b^2, x = \alpha y, x = \beta y; x > 0, y > 0, a > b, \alpha > \beta.$$

$$3527. y^2 = ax, y^2 = bx, x^2 = my, x^2 = ny; a > b, m > n.$$

$$3528. xy = a^2, xy = b^2, y^2 = mx, y^2 = nx; a^2 > b^2, m > n.$$

$$3529. y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = b^2 - 2bx, y^2 = m^2 + 2mx, y^2 = n^2 + 2nx; y > 0, a > b, m > n.$$

$$3530. \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = c^2, \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1} = c^2; u_1 > u_0, x > 0;$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = c^2, \frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} = c^2; v_1 > v_0, y > 0.$$

Замечание. Кривые, ограничивающие область, — софокусные эллипсы и гиперболы, пересекающиеся под прямым углом. Здесь полезно ввести эллиптические координаты u и v , положив

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v.$$

$$3531. \text{Найти площадь, ограниченную эллипсом } (ax + by + c)^2 + (a_1x + b_1y + c_1)^2 = h^2; ab_1 - a_1b \neq 0.$$

$$3532. \text{Найти площадь, ограниченную линией } |ax + by + c| + |a_1x + b_1y + c_1| = h; ab_1 - a_1b \neq 0.$$

§ 9.3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

Найти объемы, ограниченные следующими поверхностями:

3533. $x + y + z = 6, x = 0, z = 0, x + 2y = 4.$

3534. $x - y + z = 6, x + y = 2, x = y, y = 0, z = 0.$

3535. $x + y + z = 6, x = y, y = 0, x = 3, z = 0.$

3536. $z = a + x, z = -x - a, x^2 + y^2 = a^2.$

3537. $z^2 = xy, x = a, y = b, z = 0.$

3538. $x + y + z = a, 3x + y = a, 3x + 2y = 2a, y = 0, z = 0.$

3539. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = b^2, z = 0; a > b\sqrt{2}.$

3540. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = \frac{b}{a}x, y = 0, z = 0; x > 0.$

3541. $x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2, 0 < x < a.$

3542. $y^2 + z^2 = x, x = y; z > 0.$

3543. $z = x^2 + y^2, y = x^2; 0 < y < 1, z = 0.$

3544. $z = \cos x \cos y; |x + y| < \frac{\pi}{2}; z = 0.$

3545. $z = \sin(x^2 + y^2), z = 0; n\pi < x^2 + y^2 < (n + 1)\pi.$

3546. $x^2 + y^2 = cz, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$

3547. $x^2 + y^2 = 2ax, z = \alpha z, z = \beta x; \alpha < \beta.$

3548. $x^2 + y^2 = \alpha z^2, x^2 + y^2 = ax; z > 0.$

3549. $x^2 + y^2 = az, x + z = 2a.$

3550. $cz = xy, x^2 + y^2 = ax, z = 0; y > 0.$

3551. $z = x^2 + y^2, z = x + y.$

3552. Доказать, что объем, ограниченный плоскостью $z = tx + ny + p$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$, равен половине площади круга $x^2 + y^2 = tx + cy + p$, умноженной на разность величин $x^2 + y^2$ и $tx + cy + p$, взятую в центре этого круга.

3553. Доказать, что объем сегмента, отсекаемого плоскостью от эллиптического параболоида, равен площади основания сегмента, умноженной на половину высоты сегмента.

3554. От кругового конуса с радиусом основания R и высотой H отсечена часть плоскостью, параллельной оси конуса. Определить объем отсеченной части, если сегмент в основании соответствует центральному углу 2α .

3555. Правильная призма с квадратным основанием (со стороной a) и высотой H пересекается круговым конусом так, что след его на одном основании есть вписанная в основание окружность, а на другом основании — описанная около него окружность. Какая часть объема призмы лежит вне конуса?

3556. Правильная шестигранная призма (гайка) с шириной грани a пересекается соосной конической поверхностью, образующая которой составляет с осью угол $\alpha = 60^\circ$. Определить объем между боковой поверхностью призмы, ее основанием и конусом, если конус пересекается с основанием по окружности, вписанной в основание. В следующих задачах, как и в некоторых из предыдущих, полезно вводить полярные координаты.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

3557. $x^2 + y^2 = cz$, $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $z = 0$.

3558. $z^2 = 2xy$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $z = 0$; $x > 0$, $y > 0$.

3559. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3560. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 > |ax|$. (Задача Вивiani.)

3561. $z = x^2 + y^2$, $z^2 = xy$; $x > 0$, $y > 0$.

3562. $z(x + y) = ax + by$, $z = 0$; $1 < x^2 + y^2 < 4$, $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

3563. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$, $x^2 + y^2 = c^2$, $z(\varphi(x) + \varphi(y)) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$, где $\varphi(x)$ — любая положительная интегрируемая функция, $a > 0$ и $b > 0$, равен $\frac{1}{2}\pi c^2(a + b)$.

3564. Доказать, что объем, ограниченный поверхностями $z = 0$ и $z = e^{-x^2 - y^2}$, равен π .

3565. Линейной заменой переменных найти величину объема, заключенного между поверхностями $z = 0$ и $z = Ae^{-(ax^2 + bxy + cy^2)}$, где $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

При решении дальнейших задач полезно вводить обобщенные полярные координаты по формулам: $x = ar \cos^\sigma \varphi$, $y = br \sin^\sigma \varphi$, тогда

$$J = ab\sigma r \cos^{\sigma-1} \varphi \sin^{\sigma-1} \varphi.$$

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

$$3566. \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0.$$

$$3567. cz = xy, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0; x > 0, y > 0.$$

$$3568. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$3569. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^k + \frac{z}{c} = 1; z > 0; k > 0.$$

$$3570. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}; z > 0.$$

$$3571. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, z = 0.$$

$$3572. z^2 = 2xy, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{2xy}{c^2}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3573. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2.$$

$$3574. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3575. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 + \frac{z^2}{c^2} = 1; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3576. z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}, x + y = 1; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3577. z^2 = xy, x + y = 1; z > 0.$$

$$3578. cz = xy, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{xy}{ab}; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3579. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{x}{a}; y > 0, z > 0.$$

$$3580. \left(\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^3 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1.$$

$$3581. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1; x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3582. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1; x > 0, y > 0, z > 0.$$

Следующие задачи по способу решения близки к задачам 3521–3530 этого же отдела.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

$$3583. z = ye^{-\frac{xy}{a^2}}, xy = a^2, xy = 2a^2, y = m, y = n, z = 0.$$

$$3584. cz = xy, y^2 = mx, y^2 = nx, x = \alpha y, x = \beta y, z = 0.$$

$$3585. z^2 = xy, xy = a^2, xy = 4a^2, x = 2y, x = 3y, z = 0.$$

$$3586. cz = xy, y^2 = 2x, y^2 = 3x, x^2 = y, x^2 = 2y, z = 0.$$

$$3587. z^2 = xy, xy = 1, xy = 4, y^2 = x, y^2 = 3x, z = 0.$$

$$3588. z = x^2y, y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = m^2 + 2mx, y = 0, z = 0.$$

§ 9.4 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Величина поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, выражается интегралом

$$\iint_S \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy,$$

где площадь S есть проекция искомой части поверхности на плоскость xOy . Если поверхность задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \omega(u, v)$, а элемент длины дуги ds кривой, лежащей на поверхности, выражается формулой

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

то величина поверхности представляется интегралом

$$\iint \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

распространенным на области значений u и v , соответствующих точкам изучаемой части поверхности.

Найти величины поверхностей, указанных в следующих задачах.

3589. $z^2 = 2xy$ при $z > 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$.

3590. $x^2 = 2pz$ при $\alpha x > y > \beta x$, $0 < x < a$.

3591. Части поверхности $z^2 = 2px$, вырезанной поверхностями $y^2 = 2qx$, $x = a$.

3592. Части цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$; $a > b$.

3593. Части шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > b$.

3594. Части шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$. (Задача Вивиани.)

3595. Части цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$, расположенной внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3596. Части конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

3597. Части того же конуса, вырезанной поверхностью $x^2 = ay$.

3598. Части поверхности $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, проекция которой на плоскость xOy ограничена первым витком спирали Архимеда $r = \varphi$ и осью Ox .

3599. Поверхности $2cz = y^2 - x^2 + 2xy \operatorname{ctg} \alpha$ при условиях $z \geq 0$; $x^2 + y^2 < a^2$.

3600. $x^2 + y^2 = 2az$ внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3601. $az = xy$ внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

3602. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3603. $x^2 + y^2 = z^2$ внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ при $z \geq 0$.

3604. $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2$ при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3605. $(x + y)^2 + z = 1$ при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3606. $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2$ при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3607. $(x^2 + y^2)z = x + y$ при $1 < x^2 + y^2 < 4$, $x > 0$, $y > 0$.

3608. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3609. $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$ внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $z > 0$.

3610. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

3611. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $0 < x$, $0 < y$, $x + y < a$, $z > 0$.

3612. $z^2 = 2xy$ при $0 < x$, $0 < y$, $0 < z$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} < 1$.

3613. $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ при $1 < x < 2$.

3614. Части геликоида $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = h\varphi$ для $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

3615. Найти величину поверхности $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

3616. Найти величину телесного угла, под которым виден из начала координат прямоугольник $0 < y < b$, $0 < z < c$, $x = a > 0$. Иными словами, найти часть поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, на которую лучами из начала проектируются точки данного прямоугольника.

§ 9.5 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Если дано уравнение линии либо в виде одного уравнения $f(x, y) = 0$, либо параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то координаты переменной точки $M(x, y)$ этой кривой можно выразить через одну независимую переменную. В первом случае можно, например, выразить y через x из уравнения кривой, а во втором случае x и y уже выражены через переменную t . Криволинейный интеграл по линии AB обозначается через

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Для его вычисления координаты переменной точки $M(x, y)$ линии AB , равно как и дифференциалы этих координат, выражают через одну переменную. Тогда криволинейный интеграл обращается в обыкновенный определенный интеграл. Так, если на линии AB имеем равенства $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$. Если при этом при переходе из A в B параметр t меняется от a до b , то имеем равенство

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi') dt.$$

В правой части имеем обыкновенный определенный интеграл, который вычисляется обычными приемами. Такие интегралы называются криволинейными интегралами второго рода.

Другой тип криволинейных интегралов обозначается через $\int_{AB} f(x, y) ds$, где s — дуга кривой AB , считаемая в определенном направлении от некоторой начальной точки. Он вычисляется подобно прежнему. При этом

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Знак плюс или минус берется в зависимости от того, совпадает ли направление от A к B с направлением отсчета дуг на кривой, или нет.

В некоторых вопросах встречаются интегралы, которые тоже часто обозначают через $\int_{AB} f(x, y) ds$, хотя точнее было бы их обозначать через $\int_{AB} f(x, y) |ds|$. При вычислении этих интегралов следует считать, что

$$ds = +\sqrt{dx^2 + dy^2} = +\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} |dt|.$$

Интегралы этого типа мы будем называть криволинейными интегралами первого рода.

Основные свойства криволинейных интегралов выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \int_{AB} P dx + Q dy + \int_{BC} P dx + Q dy &= \int_{AC} P dx + Q dy, \\ \int_{AB} f(x, y) ds + \int_{BC} f(x, y) ds &= \int_{AC} f(x, y) ds. \end{aligned}$$

При изменении направления пути интегрирования на обратное величина интеграла умножается на минус единицу:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy;$$

$$\int_{AB} f(x, y) ds = - \int_{BA} f(x, y) ds.$$

Для интегралов первого рода величина интеграла не меняется от перестановки пределов:

$$\int_{AB} f(x, y) |ds| = \int_{BA} f(x, y) |ds|.$$

Криволинейные интегралы имеют простой геометрический и физический смысл. Величина $\int_{AB} P(x, y) dx$, где путь интегрирования AB расположен на кривой $f(x, y) = 0$, означает проекцию на плоскость xOz части цилиндрической поверхности, восстановленной перпендикулярно к плоскости xOy из точек кривой $f(x, y) = 0$ над дугой ее интегрирования AB . Эта часть ограничена плоскостью xOy и поверхностью $z = P(x, y)$. Таким же образом интеграл первого рода $\int_{AB} f(x, y) ds$ где под ds разумеется $|ds|$, означает величину цилиндрической поверхности над дугой AB от плоскости xOy до поверхности $z = f(x, y)$. Наконец, интеграл второго рода $\int_{AB} P dx + Q dy$ означает также работу сил поля, при движении точки по линии AB , если силы, действующие на движущуюся точку, когда она приходит в точку (x, y) , имеют проекциями на оси Ox и Oy величины $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

3617. Найти величину интеграла $\int_{AB} x dy - y dx$ по параболе $y = x^2$ между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$.

3618. Найти интеграл $\int_{AB} (x + y) dx + (x - y) dy$, если путь интегрирования — парабола $y = x^2$ между точками $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

3619. Найти интеграл $\int_{AB} x^2 ds$, где путь интегрирования — верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$ между точками $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$.

3620. Найти величину интеграла $\int_{AB} x dy$, взятого на правой полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ между точками $A(0, -a)$ и $B(0, a)$.

3621. Найти величину интеграла $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, взятого по контуру треугольника с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Формула Грина

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

преобразует криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру C в положительном направлении обхода, т. е. против часовой стрелки, в интеграл по площади S , ограниченной этим контуром. Из нее следует, что интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy$, взятый между точками A и B по двум разным путям AmB и AnB , имеет одну и ту же величину, если в области, заключенной между этими путями, для функции P и Q выполняется равенство: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

3622. Из формулы Грина получить равенство: $S = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$, где C — контур, охватывающий площадь S в положительном направлении.

3623. Вычислить с помощью формулы задачи 3622 площадь эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

3624. Вычислить с помощью формулы задачи 3622 площадь сектора гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, ограниченного осью Ox , дугой гиперболы до точки $M(x_0, y_0)$ и прямой OM .

3625. Вычислить площадь сектора астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ограниченного прямыми OM_1 и OM_2 из начала координат и дугой $M_1 M_2$ астроида.

3626. Найти площадь гипоциклоиды с тремя остриями:

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

3627. Найти величину криволинейного интеграла $\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, взятого по замкнутому контуру C в положительном направлении.

3628. Кривые $X(x, y) = 0$ и $Y(x, y) = 0$ имеют несколько простых точек пересечения. Вычислить величину интеграла $\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, взятого в положительном направлении по замкнутому контуру C .

Криволинейные интегралы для пространственных кривых вычисляются подобно интегралам по плоским кривым. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$ — параметрическое представление кривой между точками A и B , соответствующими значениям $t = a$, $t = b$, то имеется равенство

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_a^b (P(\varphi, \psi, \omega) \varphi' + Q(\varphi, \psi, \omega) \psi' + R(\varphi, \psi, \omega) \omega') dt. \end{aligned}$$

Оно сводит нахождение криволинейного интеграла к вычислению определенного интеграла.

Одним из приложений криволинейных интегралов является нахождение центра тяжести (x_c, y_c, z_c) кривой. Для этого служат формулы:

$$Mx_c = \int_{AB} x\mu ds, \quad My_c = \int_{AB} y\mu ds, \quad Mz_c = \int_{AB} z\mu ds, \quad M = \int_{AB} \mu ds.$$

Здесь $\mu(x, y, z)$ — плотность кривой в точке (x, y, z) . Последний интеграл представляет массу кривой.

3629. Найти координаты центра тяжести однородной дуги окружности радиуса a при центральном угле 2φ .

3630. Найти координаты центра тяжести всей дуги однородной кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

3631. Найти координаты центра тяжести одной арки однородной циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(t - \cos t) \quad \text{для } 0 < t < 2\pi.$$

3632. Найти координаты центра тяжести дуги винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht$$

для $0 < t < m$.

3633. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}$$

для $0 < t < \infty$.

§ 9.6

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МЕХАНИКЕ И СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Координаты центра тяжести пластинки находятся по формулам:

$$Mx_c = \iint_S x\mu dx dy, \quad My_c = \iint_S y\mu dx dy, \quad M = \iint_S \mu dx dy.$$

Здесь $\mu = \mu(x, y)$ — плотность пластинки в точке (x, y) . Интеграл, обозначенный через M , означает массу пластинки, а величины Mx_c и My_c представляют статические моменты пластинки относительно осей Oy и Ox .

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими линиями:

3634. $x = 0, y = 0, x + y = a$. **3638.** $x^2 + y^2 = a^2; |y| < \operatorname{tg} \alpha$.

3635. $y^2 = 2px, y = 0, x = x_0$. **3639.** $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (правая

3636. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; x > 0$, петля).

$y > 0$.

3640. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

3637. $x^2 + y^2 = a^2; x > 0$, **3641.** $x^3 + y^3 = 3axy$ (петля).

$y > 0$.

3642. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t); 0 < t < 2\pi; y = 0$.

3643. $x^4 + y^4 = x^2y$ (правая петля).

3644. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$.

3645. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}$ (правая петля).

3646. Доказать, что объем прямого цилиндра (или призмы), срезанного плоскостью, не обязательно параллельной основанию, равен площади основания, умноженной на высоту над центром тяжести основания.

3647. Доказать, что объем тела, полученного при вращении площади S вокруг оси, не пересекающей S и лежащей в той же плоскости, равен площади S , умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести площади S . (Теорема Паппа, называемая часто теоремой Гюльдена.)

Моментом инерции площади S относительно какой-нибудь оси, лежащей в той же плоскости, называется интеграл $I = \iint_S \delta^2 dx dy$, где δ — расстояние переменной точки (x, y) до оси, а интеграл взят по всей площади S . В частности, моменты инерции относительно осей Ox и Oy равны интегралам $I_x = \iint_S y^2 dx dy$ и $I_y = \iint_S x^2 dx dy$. Полярным моментом площади S относительно некоторой точки называется интеграл $\iint_S r^2 dx dy$, где r — расстояние точки (x, y) до данной точки. В частности, полярный момент относительно начала равен $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$. Центробежным моментом называют интеграл $K_{xy} = \iint_S xy dx dy$. Кривая $I_x x^2 - 2K_{xy} xy + I_y y^2 = 1$ называется эллипсом инерции площади S .

3648. Найти моменты инерции сектора с радиусом a и с центральным углом 2φ относительно оси симметрии и относительно перпендикуляра к ней, проходящего через центр тяжести.

3649. Найти момент инерции сегмента с радиусом a и центральным углом 2φ относительно оси симметрии.

3650. Может ли эллипс инерции для сектора обратиться в круг?

3651. У равнобедренного треугольника основание равно a , а высота h . При каком соотношении между a и h эллипс инерции треугольника относительно центра тяжести обращается в круг?

3652. Найти моменты инерции эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно осей и найти уравнение эллипса инерции.

3653. Кольцо между концентрическими кругами с радиусами 13 и 12 имеет ту же площадь, что и круг с радиусом 5. Во сколько раз момент инерции кольца больше, чем у круга, если оба момента берутся относительно диаметра?

3654. Найти момент инерции относительно оси Ox параллелограмма со сторонами $a_1x + b_1y = \pm h_1$, $a_2x + b_2y = \pm h_2$.

3655. Найти центробежный момент инерции того же параллелограмма.

3656. Найти момент инерции площади кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ относительно оси Ox и сравнить его величину с таким же моментом инерции квадрата $|x + y| + |x - y| = 2$.

Жесткость при кручении стержня с односвязным поперечным сечением S измеряется величиной $C = 2\mu \iint_S \psi(x, y) dx dy$, где μ — модуль сдвига вещества стержня, а $\psi(x, y)$ — функция напряжений. Функция $\psi(x, y)$ равна нулю на контуре поперечного сечения, а внутри его удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2$.

3657. Найти жесткость C для круглого сечения, когда $2\psi = a^2 - x^2 - y^2$.

3658. Найти C для эллиптического сечения, когда $(a^2 + b^2)\psi = a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2$, где a и b — полуоси эллипса.

3659. Тот же вопрос для равностороннего треугольника со сторонами $x \pm y\sqrt{3} = h$, $x = 0$. В этом случае

$$2h\psi = x(h - x - y\sqrt{3})(h - x + y\sqrt{3}).$$

3660. Уровень жидкости — ось Ox , а ось Oy направлена вниз. Доказать, что давление жидкости на вертикальную площадку S равно $\gamma \iint_S y dx dy$, где γ — удельный вес жидкости. Доказать, что точка приложения равнодействующей сил давления лежит на глубине h , где $h \iint_S y dx dy = \iint_S y^2 dx dy$.

§ 9.7

ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ, КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Интегралом по поверхности называется интеграл вида

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

При его вычислении переменные x , y и z выражают через две независимые переменные, пользуясь уравнением поверхности $f(x, y, z) = 0$ или ее параметрическими уравнениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \omega(u, v)$. Другая, более отчетливая, запись интегралов по поверхности имеет вид

$$\iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

где α , β , γ — углы нормали с осями координат. Если направление нормали изменить на обратное, то интеграл изменяет знак на обратный.

Примером интеграла по поверхности является момент инерции части $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ относительно оси Oz , т. е. интеграл $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, взятый по данной части поверхности шара.

При его вычислении можно выразить $d\sigma$ по формуле

$$d\sigma = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dx dy.$$

Так как в данном случае $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, то

$$d\sigma = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

После этого получается равенство

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_S \frac{(x^2 + y^2) dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

где интеграл в правой части взят по четверти круга: $x^2 + y^2 = a^2$ при $x > 0$, $y > 0$.

В данном случае удобнее другой путь, в котором координаты точек шара выражают через полярные углы φ и θ по формулам: $x = a \sin \theta \cos \varphi$, $y = a \sin \theta \sin \varphi$, $z = a \cos \theta$. При этом $d\sigma = a^2 \sin \theta d\varphi d\theta$, $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta$ и, окончательно, имеем

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = a^4 \iint_{\sigma} \sin^2 \theta d\varphi d\theta = a^4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi a^4}{3}.$$

Нахождение координат центров тяжести частей однородных поверхностей, имеющих массу, выполняется с помощью интегралов по поверхности по формулам:

$$Sx_c = \iint_S x ds, \quad Sy_c = \iint_S y ds, \quad Sz_c = \iint_S z ds; \quad S = \iint_S ds.$$

Здесь S — данная часть поверхности.

3661. Найти координаты центра тяжести части оболочки шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $x > 0, y > 0, z > 0$.

3662. Найти координаты центра тяжести поверхности сегмента того же шара при $h < z < a$.

3663. Найти координаты центра тяжести поверхности геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = hv$ при $0 < u < a, 0 < v < \pi$.

3664. Найти координаты центра тяжести части поверхности $3z = 2(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

3665. Найти координаты центра тяжести поверхности $x^2 = 2c(c - z)$, ограниченной поверхностями: $y = kx, y = 0, z = 0$.

3666. Найти координаты центра тяжести части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ограниченной поверхностями: $x^2 + y^2 = ax, z = 0$.

3667. Найти координаты центра тяжести части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ограниченной плоскостями: $x + y = \pm a, x - y = \pm a$.

Найти моменты инерции следующих частей однородных поверхностей:

3668. Поверхности конуса $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2$ при $0 < z < h$ относительно оси Oz .

3669. Поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ относительно диаметра.

3670. Поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2az$ относительно Oz при $0 < z < a$.

3671. Поверхности шарового сегмента $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $h < z < a$ относительно Oz .

3672. Вычислить двойной интеграл $\iint \frac{ds}{\rho}$ взятый по поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, где ρ — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу ds поверхности эллипсоида.

3673. Вычислить интеграл $\iint \frac{ds}{\rho^n}$, взятый по поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне шара.

3674. Показать, что интеграл $\omega = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} ds = \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds$, взятый по поверхности S , равен телесному углу, под которым поверхность S видна из начала координат. Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат к элементу поверхности ds ; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, образующая с вектором $\mathbf{r}$, идущим из начала, острый угол. Величина $\frac{\partial}{\partial n}$ определена равенством

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z).$$

§ 9.8

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Определить пределы интегрирования в декартовых, цилиндрических и сферических координатах в тройном интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z) dv,$$

взятом по объему v , заданному неравенствами:

$$\mathbf{3675.} \quad \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \\ x + y \leq a; \\ z \leq h. \end{cases}$$

$$\mathbf{3676.} \quad \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \\ x + y + z \leq a. \end{cases}$$

$$\mathbf{3677.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2; \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{cases}$$

$$\mathbf{3678.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z^2; \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq az. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 3679. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq z^2; \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq az. \end{cases} & 3681. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z^2; \\ x^2 + z^2 \leq a^2; \\ z \geq 0. \end{cases} \\
 3680. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2; \\ x + z \leq a; \quad z \geq 0. \end{cases} &
 \end{array}$$

§ 9.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

В следующих задачах требуется найти объем тела, ограниченного данной поверхностью. Основным методом их решения является введение соответствующих новых переменных, упрощающих интегрирование. Так, например, если нужно найти объем, ограниченный поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \beta,$$

где $\alpha < \beta$, то следует ввести сферические координаты по формулам:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

При этом якобиан удобно вычисляется по формуле $J = J_1 J_2$, где J_1 — якобиан преобразования $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, равный ρ , а J_2 — якобиан преобразования $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $\varphi = \varphi$, равный r . Таким образом,

$$J = \rho r = r^2 \sin \theta.$$

В прежних переменных область изменения характеризовалась неравенствами: $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha < x^2 + y^2 < z^2 \operatorname{tg}^2 \beta$. Для новых переменных эти неравенства после упрощения переходят в такие: $r < 2a \cos \theta$, $\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \alpha < \sin^2 \theta < \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \beta$. Так как $z > 0$, то и $\cos \theta > 0$. Поэтому окончательно имеем неравенства:

$$r < 2a \cos \theta, \quad \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} \beta.$$

Таким образом, при любых данных r и θ переменная φ может иметь любые значения от 0 до 2π , переменная r может при данном θ изменяться от 0 до $2a \cos \theta$, а угол θ может изменяться от α до β . В силу этого имеем для величины объема V равенства:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_V J dr d\varphi d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \theta} = \frac{16\pi a^3}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{16\pi a^3}{3} \cdot \frac{-\cos^4 \theta}{4} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta).
 \end{aligned}$$

В следующих задачах решение удобно получается введением сферических координат.

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

$$3682. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x.$$

$$3683. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$$

$$3684. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2).$$

$$3685. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

$$3686. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

$$3687. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2.$$

$$3688. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz.$$

$$3689. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3); x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$3690. (x^2 + y^2 + z^2)^5 = (a^3 x^2 + b^3 y^2 + c^3 z^2)^2.$$

$$3691. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z e^{-\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$3692. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y).$$

$$3693. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z.$$

$$3694. (x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3 xyz.$$

$$3695. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

$$3696. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{a^6}{x^2 + y^2}.$$

В следующих задачах удобно вводить обобщенные сферические координаты по формулам:

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta;$$

$$J = abc r^2 \sin \theta.$$

Найти объемы, ограниченные поверхностями:

$$3697. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}.$$

$$3698. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{xyz}{h^3}.$$

$$3699. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{z^4}{h^4}.$$

$$3700. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{xyz}{h^3}.$$

$$3701. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \alpha^2 \right)^2 = 4 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right); \alpha^2 < 1.$$

$$3702. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h} e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

$$3703. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{k}.$$

$$3704. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^3 + \frac{z^6}{c^6} = \frac{xyz}{h^3}.$$

В дальнейших задачах объем находится путем введения обобщенных сферических координат по формулам:

$$x = ar \sin^\sigma \theta \cos^\sigma \varphi, \quad y = br \sin^\sigma \theta \sin^\sigma \varphi, \quad z = cr \cos^\sigma \theta.$$

Якобиан в этом случае лучше всего вычислять по формуле $J = J_1 J_2 J_3$, где J_1 , J_2 и J_3 — якобианы подстановок:

$$\begin{aligned} x &= a\xi^\sigma, & y &= b\eta^\sigma, & z &= c\zeta^\sigma; \\ \xi &= \rho \sin \theta \cos \varphi, & \eta &= \rho \sin \theta \sin \varphi, & \zeta &= \rho \cos \theta; \\ \rho &= r^{\frac{1}{\sigma}}, & \theta &= \theta, & \varphi &= \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$J = abc\sigma^2 r^2 \sin^{2\sigma-1} \theta (\cos \theta \sin \varphi \cos \varphi)^{\sigma-1}.$$

$$3705. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{z}{l}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3706. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3707. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3708. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3709. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^6 = \frac{xyz}{h^3}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3710. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3711. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3712. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^3 = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3713. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^3 = \sin \frac{\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3714. \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b} \right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c} \right)^{2/3} = 1.$$

$$3715. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

$$3716. \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

С помощью замены переменных найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

$$3717. \quad x + y + z = a, \quad x + y + z = 2a, \quad x + y = z, \quad x + y = 2z, \\ y = x, \quad y = 2x.$$

$$\mathbf{3718.} \quad a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3.$$

$$\mathbf{3719.} \quad (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = 1.$$

$$\mathbf{3720.} \quad (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = 1, \quad a_3x + b_3y + c_3z = \pm h.$$

$$\mathbf{3721.} \quad |a_1x + b_1y + c_1z| + |a_2x + b_2y + c_2z| + |a_3x + b_3y + c_3z| = 1.$$

§ 9.10

КООРДИНАТЫ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Координаты x_c , y_c , z_c центра тяжести тела, занимающего объем V , определяются формулами:

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz, \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz, \\ z_c = \frac{1}{m} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz,$$

где ρ — плотность тела в точке (x, y, z) , а m — масса тела. Моментом инерции относительно некоторой оси L называется интеграл

$$I_L = \iiint_V \rho l^2 \, dx \, dy \, dz,$$

где l — расстояние от переменной точки тела (x, y, z) до оси L .

Моменты инерции относительно координатных осей даются формулами:

$$I_x = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz, \quad I_y = \iiint_V \rho (z^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz, \\ I_z = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Центробежные моменты инерции определяются интегралами:

$$I_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz, \\ I_{zx} = \iiint_V \rho zx \, dx \, dy \, dz.$$

В дальнейших задачах тело будет предполагаться однородным и $\rho = 1$.

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

3722. $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$.

3723. $z^2 = xy, x = a, y = b, z = c$.

3724. $abz = c(a - x)(b - y), x = 0, y = 0, z = 0$.

3725. $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2; 0 < z < h$.

3726. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x > 0, y > 0, z > 0$.

3727. Сегмента шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; h < z < a$.

3728. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$.

3729. $x^2 + y^2 = z, x + y + z = 0$.

3730. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = a(a - 2z)$.

3731. $x^2 + y^2 = 2a^2, x + y + z = 2a, x = 0, y = 0, z = 0$.

3732. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz; x > 0, y > 0, z > 0$.

3733. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

3734. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}; z > 0$.

3735. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1, z = 0$.

3736. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1; x > 0, y > 0, z > 0$.

3737. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1; x > 0, y > 0, z > 0$.

Найти моменты инерции относительно оси Oz тел, ограниченных следующими поверхностями:

3738. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$.

3739. $z^2 = 2ax, z = 0, x^2 + y^2 = ax$.

3740. $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2; 0 < z < h$.

3741. $x + y + z = a\sqrt{2}, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

3742. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

3743. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3744. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

3745. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

3746. Найти моменты инерции тора

$$x = (a + r \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + r \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

относительно его оси вращения.

3747. Найти момент инерции того же тора относительно его экваториального диаметра.

3748. Найти момент инерции эллиптического конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{h^2}$, $z = h$ относительно оси Ox .

3749. Найти момент инерции кругового цилиндра высоты H и радиуса основания a — относительно диаметра основания.

3750. Найти момент инерции кругового конуса высоты H и радиуса основания R — относительно диаметра основания.

3751. а) Доказать, что момент инерции тела J_σ относительно оси $\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma}$ выражается формулой

$$J_\sigma = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - \\ - 2D \cos \alpha \cos \beta - 2E \cos \alpha \cos \gamma - 2F \cos \beta \cos \gamma,$$

где коэффициенты равны соответствующим моментам инерции и центробежным моментам:

$$A = J_x, \quad B = J_y, \quad C = J_z, \quad D = J_{xy}, \quad E = J_{xz}, \quad F = J_{yz}.$$

б) На каждой прямой σ , проходящей через центр тяжести тела, отложен отрезок, длиной $\frac{1}{\sqrt{J_\sigma}}$. Доказать, что концы этих отрезков лежат на эллипсоиде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy - 2Exz - 2Fyz = 1;$$

этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции данного тела.

3752. Определить высоту h и радиус основания a однородного цилиндра так, чтобы эллипсоид инерции для этого цилиндра обратился в шар.

3753. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для однородного конуса.

3754. Определить высоту h прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a , так, чтобы эллипсоид инерции для однородной массы, заполняющей этот параллелепипед, обратился в шар.

3755. Доказать, что из всех однородных эллипсоидов лишь у шара эллипсоид инерции есть шар.

3756. Доказать, что для однородных тел, симметричных относительно плоскости yOz , величина $J_{xy} = 0$.

3757. Доказать, что у однородных правильных многогранников эллипсоид инерции есть шар.

3758. Доказать, что однородный эллипсоид может быть подобен своему эллипсоиду инерции лишь в том случае, когда эллипсоид есть шар.

§ 9.11

ИНТЕГРАЛЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Если $u(x, y, z)$ — функция точки, то поверхность $u(x, y, z) = c$ называется поверхностью уровня. Вектор, проекции которого на оси Ox , Oy и Oz равны величинам $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, называется градиентом u и обозначается $\text{grad } u$. Он направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Его направление есть направление наискорейшего возрастания функции $u(x, y, z)$, а его величина дает скорость этого возрастания. Скорость изменения функции по направлению l , составляющему с осями углы α , β и γ , равна производной от функции по этому направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$, где

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Иными словами, $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, направленная в сторону возрастания u .

Если в каждой точке пространства дан вектор $\mathbf{u}$ с проекциями u_x , u_y , u_z на оси, равными данным функциям точки, то говорят, что имеется поле векторов. Скалярная величина $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ называется расхождением или дивергенцией поля и обозначается $\text{rot } \mathbf{u}$. Вектор с проекциями на оси Ox , Oy и Oz , равными величинам $\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$, $\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$, называется ротором или вихрем поля векторов $\mathbf{u}$ и обозначается $\text{rot } \mathbf{u}$. Вводя символический вектор Гамильтона — «набла» ∇ с проекциями $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, можно записать $\text{div } \mathbf{u}$ и $\text{rot } \mathbf{u}$ в виде скалярного и векторного произведений: $\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\text{rot } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Если дана поверхность σ , а u_n — проекция вектора на нормаль к ней, идущую в определенную сторону этой поверхности, то потоком вектора сквозь поверхность называют интеграл по поверхности $\iint_{\sigma} u_n d\sigma$ или, в векторной форме, $\iint_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma$. Если вектор $\mathbf{u}$ представляет скорость жидкости в установившемся движении, то поток вектора $\mathbf{u}$ сквозь поверхность дает объем жидкости, протекающей сквозь поверхность за единицу времени. Другим важным понятием в теории поля является циркуляция вектора $\mathbf{u}$ по данной линии L . Она представляется криволинейным интегралом $\int_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала

координат. Выражая циркуляцию через проекции вектора $\mathbf{u}$, можем написать:
 $\int_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_L u_x dx + u_y dy + u_z dz$.

Проверить, что:

$$3759. \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = 2\mathbf{r}.$$

$$3760. \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

$$3761. \operatorname{div} \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = 6.$$

$$3762. \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

3763. Доказать, что если $u_x = -\frac{ay}{x^2 + y^2}$, $u_y = \frac{ax}{x^2 + y^2}$, $u_z = 0$, то циркуляция $\mathbf{u}$ по замкнутой кривой равна нулю, если кривая не обходит ось Oz . Она равна $2\pi n$, если кривая n раз обходит ось Oz так, что ее проекция на плоскость xOy обходит начало координат против часовой стрелки n раз.

3764. Доказать, что у вектора предыдущей задачи $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ во всех точках, кроме точек оси Oz .

3765. Среда совершает вращение, как твердое тело, вокруг оси Oz с угловой скоростью ω . Вектор скорости $\mathbf{v}$ имеет проекции на оси $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. Найти $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

3766. Найти циркуляцию предыдущего вектора по окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в положительном направлении.

3767. Найти циркуляцию того же вектора по окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

Особую важность в теории поля имеют две формулы:

Формула Остроградского—Гаусса.

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv &= \\ &= \iint_{\sigma} (P \cos(x, \mathbf{n}) + Q \cos(y, \mathbf{n}) + R \cos(z, \mathbf{n})) d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь V — объем, σ — поверхность, ограничивающая его, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали, P , Q , R — проекции u_x , u_y , u_z вектора поля $\mathbf{u}$ на оси Ox , Oy , Oz . В векторной форме та же формула имеет сжатый вид:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dv = \iint_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} u_n d\sigma.$$

Таким образом, интеграл от дивергенции вектора по объему равен потоку вектора сквозь поверхность этого объема.

Формула Стокса. Если P, Q, R — функции точки, имеющие частные производные в области, в которой расположена поверхность σ , а L — контур, ограничивающий эту поверхность, то

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma, \end{aligned}$$

где α, β, γ — косинусы углов нормали с осями. В векторной форме эту формулу можно записать короче. Если P, Q, R — проекции вектора $\mathbf{u}$ на оси, то формула Стокса принимает вид

$$\int_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \mathbf{u} d\sigma$$

т. е. циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря вектора сквозь поверхность, ограниченную контуром. Направление обхода контура L при интегрировании и направление нормали $\mathbf{n}$ в формуле Стокса должны быть выбраны согласованно. Для этого следует вообразить наблюдателя, стоящего головой по направлению нормали к поверхности σ , расположенной вблизи от участка контура L . Движение точки по контуру L в направлении интегрирования должно казаться ему направленным в ту же сторону, как и движение от оси Ox к оси Oy для наблюдателя, стоящего головой по оси Oz .

3768. Доказать равенство $\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) d\sigma = 0$, где S — замкнутая поверхность, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ней.

3769. Найти величину интеграла

$$\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds,$$

где α, β, γ — углы внешней нормали к поверхности S , а интеграл берется по всей поверхности S некоторого тела.

3770. Найти интеграл

$$\iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) ds,$$

взятый по поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Здесь α, β, γ — углы внешней нормали с осями.

3771. Найти интеграл

$$\iint_S ((z^n - y^n) \cos \alpha + (x^n - z^n) \cos \beta + (y^n - x^n) \cos \gamma) ds,$$

взятый по верхней половине поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; α, β, γ — углы внешней к шару нормали.

3772. Применяя формулу Остроградского—Гаусса к вектору $u \operatorname{grad} v$, получить *формулу Грина*:

$$\iiint_{\omega} \left(u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\omega = - \iint_{\sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Здесь ω — объем; σ — его поверхность; $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma$ — производная по внутренней нормали, и

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

3773. Исходя из предыдущего результата, доказать *вторую формулу Грина*:

$$\iiint_{\omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\omega = - \iint_{\sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

3774. Функция u , для которой $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$, называется гармонической. Доказать, что для гармонических функций справедлива формула

$$\iiint_{\omega} |\operatorname{grad} u|^2 d\omega = - \iint_{\sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

3775. Доказать формулу, подобную формуле Остроградского—Гаусса:

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma = \int_S (u \cos \alpha + v \cos \beta) ds.$$

Здесь σ — площадь, а S — линия, ограничивающая ее; α и β — углы внешней нормали с осями.

3776. Доказать формулу, подобную формуле Грина:

$$\iint_{\sigma} \left(u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Здесь σ — площадь, S — ее контур, $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

3777. Доказать равенство:

$$\iint_{\sigma} (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma = - \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

3778. Доказать, что для гармонических функций от двух переменных справедливо равенство

$$\iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\sigma = - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

3779. Доказать для тех же функций, что и в предыдущей задаче, формулу

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

3780. Доказать, что для гармонических функций от трех переменных

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

3781. С помощью второй формулы Грина (см. 3773), примененной к области между поверхностью σ и шаром радиуса $\rho \rightarrow 0$ с центром в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, лежащей внутри поверхности σ , доказать для гармонической функции от трех переменных равенство

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{d\sigma}{r},$$

где r — расстояние точки M до переменной точки поверхности, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали.

3782. Доказать, что

$$\iint_{\sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\sigma = 4\pi \text{ или } 0,$$

смотря по тому, лежит ли точка, из которой проводятся радиус-векторы $\mathbf{r}$ до точек поверхности, внутри поверхности или вне ее. Поверхность предполагается односвязной, замкнутой и без особых точек.

3783. Доказать, что для гармонических функций от двух переменных справедлива формула

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds,$$

где производные взяты по внутренней нормали, а точка $M(x, y)$ — внутри контура S .

3784. Доказать равенство

$$\int_{AB} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \varphi,$$

где φ — угол, под которым линия AB видна из точки (ξ, η) , $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, $\mathbf{n}$ — нормаль к линии AB .

3785. Доказать, что для гармонических функций от трех переменных справедлива формула

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\sigma} u d\sigma,$$

где σ — поверхность шара с центром в точке (x, y, z) . (Гаусс.)

3786. Доказать для гармонических функций от двух переменных формулу

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_S u ds,$$

где S — окружность с центром в точке (x, y) .

3787. Доказать, что для функции $u(x, y, z)$, гармонической внутри шара объема ω , имеет место формула

$$u_c = \frac{1}{\omega} \iiint_{\omega} u d\omega,$$

где u_c — значение u в центре шара; а для функции $u(x, y)$, гармонической внутри круга площади σ , доказать формулу

$$u_c = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} u \, d\sigma,$$

где u_c — значение u в центре круга.

3788. Пользуясь разложением в ряд Тейлора, доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi r} \int_S u \, du = u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Delta^n u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

и т. д., а интегрирование произведено по окружности радиуса r с центром в точке (x, y) .

3789. Доказать равенство

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\sigma} u \, du = u(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n+1)!} \Delta^n u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad \Delta^3 u = \Delta(\Delta^2 u), \dots,$$

а интегрирование взято по поверхности шара радиуса r , с центром в точке (x, y, z) .

3790. Доказать формулу Максвелла

$$\begin{aligned} & \iiint_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta u \, d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \cos(\mathbf{n}, x) \, d\sigma + \\ & \quad + \iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \, d\sigma + \iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z) \, d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь σ — поверхность объема ω , в котором функция u непрерывна со вторыми производными.

3791. Доказать равенство Римана

$$\iint_{\sigma} (uF(v) - vG(u)) d\sigma = \int_S M dx + N dy.$$

Здесь S — контур площади σ ,

$$F(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} - cv,$$

$$G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

а выражения для M и N должны быть найдены.

3792. Если проекции скорости жидкости в момент t в точке (x, y, z) равны функциям $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$, то количество жидкости, протекающей сквозь поверхность σ за время от t_1 до t_2 равно интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma} (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) d\sigma,$$

где α, β, γ — углы нормали к поверхности σ с осями. Вывести отсюда, что для несжимаемой жидкости должно выполняться условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

3793. Изучить изменение функции $P(x)$, где $P(x) = \mu \int_a^b |y - x| dy$, при изменении x в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

3794. Найти вторую производную от

$$P(x) = \int_a^b \mu(y) |y - x| dy,$$

где функция $\mu(y)$ непрерывна.

3795. Пользуясь интегралом Пуассона

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos \varphi + 1) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < a < 1; \\ 2\pi \ln |a|, & \text{если } |a| > 1, \end{cases}$$

найти логарифмический потенциал однородного круга, т. е. интеграл $\mu \iint_\sigma \ln r d\sigma$, где r — расстояние между точкой M и точкой на площади круга σ , радиус которого R .

3796. Логарифмическим потенциалом однородного отрезка $(-1, 1)$ называется интеграл $P = \int_{-1}^{+1} \ln r d\xi$, где r — расстояние между точками (x, y) и $(\xi, 0)$. Найти уравнение кривой, на которой $P(x, y) = P(1, 0)$.

3797. Найти логарифмический потенциал круга $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность μ в точке (x, y) есть данная функция радиус-вектора из начала: $\mu = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Логарифмическим потенциалом площади σ в точке (x, y) называется интеграл

$$P(x, y) = \iint_\sigma \mu(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta.$$

3798. Найти в точке $M(x, y, z)$ ньютонов потенциал однородной оболочки шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с поверхностной плотностью μ , равной некоторой постоянной, т. е. найти интеграл $\iint_\sigma \mu \frac{d\sigma}{r}$, где σ — поверхность шара, а r — расстояние от переменной точки (ξ, η, ζ) на этой поверхности до данной точки M .

3799. Найти в точке $M(x, y, z)$ ньютонов потенциал однородного шара, т. е. интеграл

$$P = \iiint_\omega \mu \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r},$$

где ω — шар радиуса a с центром в начале координат, μ — постоянная плотность, (ξ, η, ζ) — точка внутри шара, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ — расстояние от точки (ξ, η, ζ) до точки (x, y, z) .

3800. Тот же вопрос для шара, у которого плотность μ равна данной функции $f(\rho)$, где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

3801. В точке $(0, 0, z)$ найти ньютонов потенциал верхней половины шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при постоянной плотности μ .

3802. Найти ньютонов потенциал однородного сферического слоя между двумя концентрическими сферами радиусов a и b , где $a < b$.

3803. Найти в вершине конуса ньютонов потенциал тела конуса с радиусом основания r и высотой h .

3804. Показать, что тело постоянной плотности и данной массы сильнее всего притягивает материальную точку (по закону Ньютона), если оно ограничено поверхностью $R = a\sqrt{\cos\theta}$ (материальная точка взята за начало координат, направление силы притяжения за ось Oz ; R, θ — сферические координаты). Найти эту силу и сравнить ее с силой притяжения шаром (той же массы) материальной точки, лежащей на его поверхности.

3805. Найти в точке $M(x, y)$ ньютонов потенциал неоднородного отрезка $(-a, a)$, т. е. интеграл $\int_{-a}^a \frac{\mu(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2+y^2}}$, если $\mu(\xi) = \frac{\xi}{a}$.

3806. Найти ньютонов потенциал однородной круговой пластинки $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ в точке $(0, 0, z)$.

3807. Доказать равенство

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1 \iiint_{\omega} \mu \frac{d\omega}{r} = \iiint_{\omega} \mu d\omega.$$

Здесь $r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$, r — расстояние от точки (x, y, z) до произвольной точки (ξ, η, ζ) внутри объема ω .

3808. Доказать тождество

$$\iiint_{\omega} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) d\sigma,$$

где σ — поверхность тела объема ω ; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль σ ; $\mathbf{r}$ — вектор от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ) ; r — его длина.

3809. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, доказать тождество

$$\iiint_{\omega} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2} = \iint_{\omega} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\sigma.$$

3810. Написать аналогичные тождества (см. задачу 3809) для площади σ и ее контура S .

3811. Доказать равенство $\int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = 0$, если точка (x, y) лежит вне области, ограниченной контуром S , и $= 2\pi$, если контур S совершает один полный обход вокруг точки (x, y) .

3812. Проекция на оси Ox , Oy , Oz силы, с которой точка с массой m притягивается по закону Ньютона телом с плотностью μ , выражаются формулами:

$$X = \iiint_{\omega} \mu \frac{\partial P}{\partial x} = \iiint_{\omega} \mu \frac{(\xi - x) d\omega}{r^3},$$

$$Y = \iiint_{\omega} \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \iiint_{\omega} \mu \frac{(\eta - y) d\omega}{r^3},$$

$$Z = \iiint_{\omega} \mu \frac{\partial P}{\partial z} = \iiint_{\omega} \mu \frac{(\zeta - z) d\omega}{r^3},$$

где $P = \iiint \mu \frac{d\omega}{r}$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, f — постоянная закона тяготения. Пользуясь этим, вычислить силу притяжения шаром радиуса a с плотностью μ точки массы m , расположенной на его поверхности.

3813. По закону Био—Савара каждый элемент $d\mathbf{s}$ тока силой I создает в точке $M(x, y, z)$ магнитное поле, напряженность которого можно выразить векторным произведением $-\frac{kI}{r^2} d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, идущий от $d\mathbf{s}$ к M . Доказать, что напряженность поля $\mathbf{H}$, создаваемая замкнутым током, идущим по контуру S , выражается векторным интегралом $\mathbf{H} = -kI \int_S \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^2}$, здесь k — коэффициент пропорциональности.

3814. Пользуясь предыдущим результатом и формулой Стокса, доказать равенство $\mathbf{H} = -kI \operatorname{grad} W$, где W — телесный угол, под которым из точки M видна площадь σ с контуром S , равный интегралу $\iint_{\sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\sigma$.

3815. Вычисляется $\int_{s_1} d\mathbf{s}_1 \int_{s_2} \frac{d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}}{r^3}$, взятый по двум замкнутым контурам s_1 и s_2 , где $\mathbf{r}$ — вектор, соединяющий

переменные точки на контуре. Рассматривая $\frac{ds_1 \times ds_2 \cdot e_r}{r^2}$ как телесный угол, доказать, что этот двойной интеграл равен 0, если один контур не зацепляется с другим, и равен $\pm 4\pi$, если он зацепляется (один раз).

§ 9.12

МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В простейших случаях многократные интегралы вычисляются непосредственно интегрированием по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \int_{x'_1}^{x''_1} dx_1 \int_{x'_2}^{x''_2} dx_2 \dots \int_{x'_n}^{x''_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Здесь пределы интегрирования определяются из условий, которыми задается область ω . Пределы интегрирования по какой-нибудь переменной могут зависеть от наружных переменных. Пределы последнего интегрирования, т. е. числа x'_1 и x''_1 , должны быть постоянными.

В более сложных случаях приходится прибегать к замене переменных. Если при этом формулы замены переменных имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ x_2 &= \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

то формула для преобразования интеграла будет

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \int_{\omega_1} \cdots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) |J| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Здесь J — якобиан, величина которого предполагается сохраняющей знак; область ω_1 — область изменения переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, соответствующая области ω изменения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Найти следующие интегралы:

3816. $\iint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$, где все $x_k > 0$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$.

3817. $\iint \dots \int x_1 dx_1 dx_2 \dots dx_n$, при $x_k > 0$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$.

$$3818. \quad \int \cdots \int_{|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|<a} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$3819. \quad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$3820. \quad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

3821. Доказать равенство

$$u_n(a) = a^n v_n,$$

где

$$u_n(a) = \int \cdots \int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 < a^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad v_n = u_n(1).$$

3822. При прежних обозначениях очевидны равенства:

$$\begin{aligned} v_n &= \iint_{x_1^2+x_2^2 < 1} dx_1 dx_2 \int \cdots \int_{x_3^2+x_4^2+\dots+x_n^2 < 1-x_1^2-x_2^2} dx_3 dx_4 \dots dx_n = \\ &= \iint_{x_1^2+x_2^2 < 1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n}{2}-1} v_{n-2} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Пользуясь ими, доказать, что

$$u_n(a) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

В частности, $u_1 = 2a$, $u_2 = \pi a^2$, $u_3 = \frac{4}{3} \pi a^3$, $u_4 = \frac{\pi^2}{2} a^4$, ...

3823. Если

$$u_n = \int \cdots \int_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_n < 0 \\ 0 < x_1, 0 < x_2, \dots, 0 < x_n}} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

то легко доказать, что $u_n(a) = a^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} v_n$, где $v_n = u_n(1)$.

Пользуясь этим и равенством

$$v_n = \int_0^1 x_1^{\alpha_1-1} dx_1 \int \cdots \int_{\substack{x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2 < 1-x_1^2 \\ 0 < x_2, \dots, 0 < x_n}} x_2^{\alpha_2-1} x_3^{\alpha_3-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} dx_2 dx_3 \dots dx_n,$$

доказать, что

$$u_n(a) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)} a^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}.$$

Доказать равенства:

$$3824. \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x) dx_n = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

$$3825. \int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n \int_0^{x_n} f(t) dt = \\ = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \int_0^x f(t)(x^2 - t^2)^n dt.$$

3826. Привести к простому интегралу кратный интеграл

$$\iint \dots \int x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} F(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

взятый по области, определяемой неравенствами

$$0 < x_1, \quad 0 < x_2, \quad \dots, \quad 0 < x_n, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n < a.$$

Указание. Один из путей — замена переменных по формулам $x_1 + x_2 + \dots + x_n = u$, $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $\dots$, $x_{n-1} = x_{n-1}$.

3827. Точки $M(x, y, z)$ и $M_1(\xi, \eta, \zeta)$ независимо друг от друга пробегают весь объем тела с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Потенциалом тела на себя называется интеграл

$$\frac{1}{2} \iiint \iiint \frac{\rho(x, y, z) \rho(\xi, \eta, \zeta) dx dy dz d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Найти величину потенциала на себя однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Его величина измеряет работу, производимую при передвижении из бесконечности в одно тело частиц, притягивающихся по закону Ньютона.

Указание. Два пути быстро приводят к цели: 1) Воспользоваться тем, что интеграл по переменным (ξ, η, ζ) дает потенциал шара во внутренней точке (x, y, z) , найденный в одной из прежних задач. 2) Учесть работу dA , совершаемую, если массы, приходящие из бесконечности, увеличивают радиус шара с r на $r + dr$, и проинтегрировать полученное по r от 0 до a .

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 10.1 СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ДАННЫМ ИХ ИНТЕГРАЛАМ

Уравнение $f(x, y, a) = 0$, где a — параметр, постоянный в каждом уравнении, но изменяющийся от уравнения к уравнению, изображает обычно семейство линий. Взяв производную от этого уравнения, получаем: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$. Если исключить a из двух уравнений, то получится уравнение вида: $\varphi(x, y, y') = 0$. Оно отражает некоторое свойство, общее различным кривым данного семейства, и называется дифференциальным уравнением семейства кривых $f(x, y, a) = 0$. Само исходное уравнение $f(x, y, a) = 0$ называется общим интегралом дифференциального уравнения $\varphi(x, y, y') = 0$. Если дано уравнение $f(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, содержащее n параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$, то оно изображает семейство линий с n параметрами. Дифференцируя его n раз и исключая $a_1, a_2, \dots, a_n$ из этих n уравнений и данного уравнения $f(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, получим уравнение, не содержащее параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$. Оно имеет вид $\psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ и называется дифференциальным уравнением данного семейства линий с n параметрами. Само исходное уравнение $f(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ называется общим интегралом дифференциального уравнения $\psi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Найти дифференциальные уравнения следующих семейств линий и отметить там, где это просто, свойства линий, выражаемые этими уравнениями.

3828. $y = ax$.

3829. $x^2 + y^2 = a^2$.

3830. $x^2 + y^2 = ax$.

3831. $y = ax^2$.

3832. $y = ax + a^2$.

3833. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3834. $(x - a)^2 + y^2 = 1$.

3835. $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

3836. Семейства софокусных кривых второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1,$$

где λ — параметр.

3837. Семейства циклоид $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где a — параметр.

3838. Семейства циклоид $x + C = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где C — параметр.

3839. Семейства трактрис

$$x + C = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2},$$

где C — параметр.

Найти дифференциальные уравнения следующих семейств линий с несколькими параметрами и отметить там, где это просто, свойство, выраженное каждым из этих уравнений.

3840. $y = ax + b$.

3843. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$.

3841. $y = ax^2 + bx + c$.

3844. $y = A \sin(x + \alpha)$.

3842. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$.

3845. $y = e^x(Ax + B)$.

3846. Доказать, что дифференциальное уравнение всех парабол

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad B^2 - 4AC = 0$$

имеет вид $\left((y'')^{-\frac{3}{2}}\right)'' = 0$ или $5y''' - 3y''y^{IV} = 0$.

3847. Доказать, что дифференциальное уравнение кривых второго порядка имеет вид $\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0$.

Найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют координаты (x, y, z) точек следующих семейств линий.

3848. $y = ax$, $z = bx$.

3849. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = b$.

3850. $y = a \cos x$, $z = a \sin x$.

3851. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

3852. Найти дифференциальные уравнения нормалей к конусу $x^2 + y^2 = z^2$.

3853. Тот же вопрос для параболоида $x^2 + y^2 = 2z$.

§ 10.2

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ

Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в том и только в том случае, если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. В этом случае величина $u(x, y)$ легко может быть получена вычислением криволинейного интеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Такого же рода результаты существуют и для функций от большего числа переменных. Так, например, выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом функции $u(x, y, z)$ в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

При этом

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz.$$

В этих формулах выбор постоянных x_0 , y_0 , z_0 и формы пути, по которому идет интегрирование, произвольны. Поэтому, в частности, для двух переменных можно писать:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy.$$

Аналогичная формула для трех переменных имеет вид

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz.$$

Найти функции по их полным дифференциалам:

3854. $dz = (x^2 - y^2)dx - 2xydy$.

3855. $dz = ydx + xdy + \frac{x dy - y dx}{x^2}$.

3856. $dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x dy + y dx$.

3857. $dz = \frac{2x(1 - e^y)dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1 + x^2}$.

3858. $dz = \frac{(x + 2y)dx + y dy}{(x + y)^2}$.

3859. $du = \frac{dx - 3 dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2} dz$.

3860. $du = (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$.

Если сила, действующая в поле, есть $\text{grad } u$, т. е. если ее проекции на оси f_x , f_y , f_z равны соответственным частным производным: $f_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial u}{\partial z}$, то u называется потенциалом сил.

3861. Найти потенциал сил, если $f_x = 2x$, $f_y = f_z = 2y + 2z$.

3862. Найти потенциал сил, если $\mathbf{f} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат в точку (x, y, z) .

3863. Проекция силы на оси даны формулами:

$$f_x = \frac{x + y - 3z}{(x + y + z)^3}, \quad f_y = \frac{ax + by + cz}{(x + y + z)^3}, \quad f_z = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{(x + y + z)^2}.$$

Определить постоянные a , b , c , α , β , γ так, чтобы сила имела потенциал u , и найти его.

3864. Определить постоянные a и b так, чтобы выражение

$$\frac{(ax^2 + 2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, и найти эту функцию.

3865. Доказать, что выражение $\frac{\partial^{n+1} \ln r}{\partial x^n \partial y} dx - \frac{\partial^{n+1} \ln r}{\partial x^{n+1}} dy$ есть полный дифференциал некоторой функции u , и найти эту функцию, учитывая, что $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = 0$.

3866. Дифференциал длины дуги на некоторой поверхности выражается формулой $ds^2 = A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$. Введя новые переменные по формулам: $u = P(x, y)$, $v = Q(x, y)$, где P и Q — некоторые функции, формуле для ds^2 можно придать вид $ds^2 = du^2 + dv^2$, если функции P и Q удовлетворяют условиям:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = A(x, y), \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 = B(x, y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Доказать, что для возможности подбора таких P и Q функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial \sqrt{B}}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{B}} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial y} \right)}{\partial y} = 0.$$

§ 10.3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

причем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

то левая часть его есть дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Уравнение можно переписать в таком виде: $du = 0$. Его общий интеграл: $u = \text{const}$.

Проинтегрировать следующие уравнения:

3867. $(x + y) dx + (x - y) dy = 0$.

3868. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$.

3869. $(x^3 - 3xy^2) dx + (y^3 - 3x^2y) dy = 0$.

3870. $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$.

3871. $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$.

В следующих задачах требуется, найдя общий интеграл, выбрать в нем постоянную C так, чтобы получилась кривая, проходящая через данную точку $M(1, 1)$.

3872. $\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$.

3873. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

§ 10.4

УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Если в уравнении $P dx + Q dy = 0$ функции P и Q распадаются на два множителя, каждый из которых содержит не более чем одну из переменных x или y , т. е. если $P = \psi(x)F(y)$, $Q = f(y)\varphi(x)$, то уравнение принимает вид $\psi(x)F(y) dx + f(y)\varphi(x) dy = 0$. Если $F(y)$ и $\varphi(x)$ отличны от нуля, то отсюда следует, что $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx + \frac{f(y)}{F(y)} dy = 0$. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx + \int \frac{f(y)}{F(y)} dy = C.$$

Замечание. Равенства $F(y) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ представляют особые интегралы данного уравнения, если по смыслу вопроса соответствующая переменная имеет право обратиться в постоянную.

Проинтегрировать уравнения:

$$3874. (1 + y^2) dx + xy dy = 0.$$

$$3875. xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

$$3876. (1 + y^2) dx = x dy.$$

В следующих задачах, найдя общий интеграл, выделить, где это указано, кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

$$3877. \frac{x dx}{1+y} = \frac{y dy}{1+x}; M(1, 1); M(0, 1).$$

$$3878. y' \sin x = y \ln y; M(0, 1); M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

$$3879. (1 + e^x)yy' = e^x; M(1, 1).$$

$$3880. x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0; M(0, 1).$$

$$3881. 2\sqrt{y} dx = dy; M(0, 1).$$

$$3882. y \ln y dx + x dy = 0; M(1, 1).$$

$$3883. (a^2 + y^2) dx + 2x\sqrt{ax - x^2} dy = 0; M(a, 0).$$

$$3884. y' + x^2 y = x^2; y = 1 \text{ при } x = 2; y = a \text{ при } x = 0.$$

$$3885. (1 - x^2)y' - xy = axy^2.$$

$$3886. dy + (xy - xy^3) dx = 0.$$

$$3887. y = xy'^2 + y'^2.$$

$$3888. xyy'^2 + (x^2 + y^2)y' + xy = 0.$$

$$3889. x(1 + y'^2) = 1.$$

$$3890. x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a.$$

$$3891. x = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

$$3892. y\sqrt{1 + y'^2} = y'.$$

3893. Найти кривую, у которой средняя ордината, т. е. величина $\frac{1}{x} \int_0^x y dx$, пропорциональна последней ординате.

3894. Найти кривую, у которой абсцисса центра тяжести площади, заключенной между прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = \xi$ и самой кривой равна $\frac{3}{4}\xi$.

Иногда переменные непосредственно не отделяются, но после введения новых переменных могут быть отделены. В ближайших задачах такое отделение достигается подстановкой $ax + by + c = u$, где a , b и c соответственно подобраны.

Проинтегрировать следующие уравнения:

$$3895. y' = (x - y)^2 + 1.$$

$$3896. y' = \sin(x - y).$$

3897. $y' = ax + by + c.$

3899. $y' = (ax + by + c)^2.$

3898. $y'^2 = ax + by + c.$

3900. $(x + y)^2 y' = a^2.$

3901. Найти общий интеграл уравнения

$$(y - x)\sqrt{1 + x^2} dy = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx,$$

применив подстановку

$$x = \operatorname{tg} u, \quad y = \operatorname{tg} v.$$

Следующие задачи приводят к уравнениям с отделяющимися переменными при соответственном их выборе.

3902. Найти кривые, у которых длина подкасательной — постоянная, равная a . (Лейбниц, 1684.)**3903.** Найти кривые, у которых поднормаль повсюду равна p .**3904.** Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями, делится пополам точкой касания.**3905.** Найти кривые, у которых такой же отрезок делится точкой касания в отношении $m : n$.**3906.** Пользуясь полярными координатами, найти кривые, пересекающие все радиус-векторы под углом α , где $\operatorname{tg} \alpha = a$.**3907.** Найти кривые, у которых угол φ от полярной оси до радиус-вектора в точку касания равен углу μ от продолжения радиус-вектора до касательной.**3908.** Такой же вопрос, что и в предыдущей задаче, но $\mu = 2\varphi$.**3909.** На поверхности $z^2 = 2ay$ найти линии, касательные к которым составляют с Oz данный угол γ .**3910.** Тот же вопрос для поверхности $x^2 + y^2 = 2az$.**3911.** Найти кривые, пересекающие все параллели поверхности вращения $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$ под углом 45° .**3912.** Тот же вопрос для конуса $x^2 + y^2 = z^2$.**3913.** Найти кривые, пересекающие все образующие цилиндра $y = \varphi(x)$ под углом α .**3914.** Найти локсодромию, т. е. кривую, пересекающую под углом α все меридианы сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (Здесь лучше

всего для точек поверхности шара ввести сферические координаты.)

3915. Какой угол с меридианами составляет локсодромия, идущая от Измаила на Дунае до мыса Дежнева? Их широты $45^\circ 20'$ и 66° , а долготы $28^\circ 45'$ и 170° (восточная).

3916. Найти кривую, у которой площадь криволинейной трапеции между точками оси Ox : $(a, 0)$ и $(x, 0)$ и точками кривой: $A(a, m)$ и $B(x, y)$ была бы равна произведению дуги AB на m .

3917. Сосуд содержит $M \text{ см}^3$ раствора. В него каждую секунду непрерывно поступает $q \text{ см}^3$ воды, которая тут же размешивается. Из сосуда вытекает в секунду $q \text{ см}^3$ раствора. Доказать, что количество растворенного вещества m выражается формулой $m = m_0 e^{-\frac{q}{M}t}$, где m_0 — начальное количество вещества, а t — время в секундах от начала процесса.

3918. Канат намотан на столб радиуса r . Сила, прижимающая его элемент Δs к столбу, эквивалентна величине $\frac{T}{r} \Delta s$, где T — натяжение каната в данной точке. Благодаря трению элемент может скользить лишь в том случае, если движущая его сила больше, чем kf , где k — коэффициент трения, а f — сила, прижимающая элемент к столбу. Получить отсюда дифференциальное уравнение $dT = -\frac{kT}{r} ds$ и его общий интеграл $T = T_0 e^{-\frac{ks}{r}}$, где T — натяжение, при котором начинается скольжение, T_0 — натяжение в начальной точке.

3919. Свет с яркостью f_0 падает на поглощающую свет среду. Считая, что поглощение слоем Δx приближенно пропорционально Δx и яркости f , доказать, что на глубине x яркость выражается равенством $f = f_0 e^{-kx}$, где k — коэффициент пропорциональности.

3920. Лучи от источника света поглощаются окружающей средой. Считая, что поглощение света между шарами с радиусами r и $r + \Delta r$ и с центром в источнике света, с точностью до малых высшего порядка, равно $kf \cdot 4\pi r^2 \Delta r$, доказать, что яркость на расстоянии r от источника света равна $f_0 \frac{e^{-kr}}{r^2}$, где $f_0 e^{-k}$ — яркость света при $r = 1$, а k — коэффициент пропорциональности.

3921. Найти кривую, которая повсюду была бы одинаково освещена (с данной освещенностью a) точечным источником света силы A . Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния и пропорциональна синусу угла между лучом и освещаемой поверхностью.

3922. В цилиндрический сосуд с площадью основания S см² и высотой H см равномерно вливается вода (V см³/сек) и одновременно частью выливается через отверстие в дне площадью σ см². Через какое время сосуд наполнится до верха и каково условие того, чтобы он когда-нибудь наполнился? Скорость истечения определяется законом Торичелли (см. задачу 3302).

3923. Тяжелая материальная точка массы m начинает падать в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления зависит от скорости по закону $f = kv^n$. Определить закон изменения скорости во времени и путь, пройденный за время t при $n = 1; 2$.

3924. Газ с первоначальной плотностью ρ_0 и давлением p_0 находится в сосуде, вращающемся около своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти закон распределения давления в установившемся движении, когда все частицы газа будут вращаться с угловой скоростью ω . Газ подчиняется закону Бойля—Мариотта, весом газа пренебречь.

§ 10.5

УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНЫЕ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Однородные уравнения приводятся к каждому из видов: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q — однородные функции одинакового измерения. Они приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными любой из подстановок: $y = tx$ или $x = ty$.

Решить следующие уравнения, выделив интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$, там, где она дана:

3925. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$.

3926. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$; $M(1, -1)$.

$$3927. \quad x \, dy - y \, dx = y \, dy.$$

$$3928. \quad y^2 \, dx + (x^2 - xy) \, dy = 0.$$

$$3929. \quad (x^2 + xy + y^2) \, dx = x^2 \, dy.$$

$$3930. \quad (3x^2 + 6xy + 3y^2) \, dx + (2x^2 + 3xy) \, dy = 0.$$

$$3931. \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$$

$$3932. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$$

$$3933. \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad M(-1, 0).$$

$$3934. \quad xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

$$3935. \quad y \, dx + (2\sqrt{xy} - x) \, dy = 0.$$

$$3936. \quad xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

$$3937. \quad y'(y' + y) = x(x + y); \quad M(0; 0).$$

$$3938. \quad (xy' + y)^2 = y^2 y'.$$

$$3939. \quad x^2 y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0.$$

Уравнения $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ при $ab_1 - a_1b \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где (α, β) — точка пересечения прямых $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же $ab_1 - a_1b = 0$, то подстановка $ax + by + c = u$ позволяет отделить переменные.

Решить уравнения:

$$3940. \quad (x + y + 1) \, dx + (2x + 2y - 1) \, dy = 0.$$

$$3941. \quad (x - 2y + 5) \, dx + (2x - y + 4) \, dy = 0.$$

3942. Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$(ax + by + c) \, dx + (ay - bx + c_1) \, dy = 0$$

— логарифмические спирали.

3943. Доказать теорему: если $P \, dx + Q \, dy = 0$ — однородное уравнение, а выражение $P \, dx + Q \, dy$ — полный дифференциал, то общий интеграл данного уравнения имеет вид $Px + Qy = C$, если степени P и Q отличны от -1 .

3944. Найти кривые, у которых треугольник между Oy , касательной и радиус-вектором из начала в точку касания — равнобедренный (три варианта).

Дифференциальное уравнение можно назвать обобщенным однородным, если, подобрав соответствующее значение α , можно достичь того, что все члены уравнения окажутся имеющими одно и то же измерение, когда считать x

и dx — величинами первого измерения, а y и dy — измерения α (т.е. измерение y' надо считать равным $\alpha - 1$). В этом случае подстановка $\frac{y}{x^2} = t$ приводит к разделению переменных.

Решить уравнения:

3945. $y(1 + xy)dx + (1 - xy)x dy = 0$.

3946. $(x^2 y^2 + 1)y dx + (x^2 y^2 - 1)x dy = 0$.

3947. $(x^2 - y^4)y' - xy = 0$.

3948. $(y + y\sqrt{x^2 y^4 - 1})dx + 2x dy = 0$.

3949. $(y^4 - 3x^2)dy + xy dx = 0$.

3950. $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

3951. $(x^2 y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$.

3952. $(x^6 - y^4)dy = 3x^5 y dx$.

3953. $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$.

3954. $x^2(y' + y^2) = a(xy - 1)$.

3955. $xy^2(xy' + y) = a^2$.

§ 10.6

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫЕ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Линейные уравнения 1-го порядка имеют вид $y' + Py + Q = 0$. Один из способов их решения состоит в том, что уравнение умножают на множитель u , выбранный так, чтобы величина Pu равнялась u' . Тогда уравнение принимает вид $uy' + u'y = -uQ$ или $(uy)' = -uQ$, и интегрируется без труда. Таким интегрирующим множителем u является

$$u = e^{\int P dx}.$$

Для следующих уравнений найти общий интеграл, а в случаях, где указано, найти частный интеграл, который обращается в y_0 при $x = x_0$.

3956. $xy' + 2y = 3x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3957. $xy' + 3y = x^2$.

3958. $y' + ay = e^{mx}$.

3959. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

3960. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

3961. $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

$$3962. y' + y \cos x = \sin x \cos x; x_0 = 0, y_0 = 1.$$

$$3963. (1 - x^2)y' + xy = 1; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Следующие уравнения оказываются линейными, если принять y за независимую переменную, а x — за функцию:

$$3964. (y^2 - 6x)y' + 2y = 0.$$

$$3965. (x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

Уравнения $y' + Py + Qy^n = 0$ называются уравнениями Бернулли. Они сводятся к линейному делением на y^n с последующей подстановкой $y^{1-n} = u$.

Найти общий интеграл уравнений:

$$3966. xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$3969. y^{n-1}(ay' + y) = x.$$

$$3967. y' + 2xy = 2x^3 y^3.$$

$$3970. dx + (x + y^2)dy = 0.$$

$$3968. 3y^2 y' - ay^3 = x + 1.$$

$$3971. (xy + x^2 y^3)y' = 1.$$

Следующие уравнения сводятся к линейным простыми заменами переменных:

$$3972. (x^2 + y^2 + 1)dy + xy dx = 0.$$

$$3973. (x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y - 1)dy = 0.$$

$$3974. y' - 1 = e^{x+2y}.$$

$$3975. xy' + 1 = e^y.$$

$$3976. y' \cos y + \sin y = x + 1.$$

$$3977. y' + \sin y + x \cos y + x = 0.$$

Дальнейшие задачи сводятся к линейным уравнениям, а также другим уравнениям, уже рассмотренным раньше.

$$3978. \text{ Решить функциональное уравнение } \int_0^1 \varphi(\alpha x) d\alpha = n\varphi(x).$$

$$3979. \int_a^x xy dx = x^2 + y. \text{ Найти } y.$$

$$3980. x \int_0^x y dx = (x + 1) \int_0^x xy dx. \text{ Найти } y.$$

$$3981. \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\sqrt{x} + y. \text{ Найти } y.$$

$$3982. 2 \int_0^x y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2x + y^2.$$

$$3983. \text{ Доказать, что дифференциальное уравнение}$$

$$f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy + \varphi(x, y)(x dy - y dx) = 0,$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\varphi(x, y)$ однородные функции, причем f_1 и f_2 — одного и того же измерения, сводится к уравнению Бернулли после введения новой переменной $z = \frac{y}{x}$.

3984. $(x + 3y)dx + 2ydy + a(x + y)(x dy - y dx) = 0.$

3985. $y^2(x + a)dx + x(x^2 - ay)dy = 0.$

3986. $(x^3 - xy^2)dx + 2x^2ydy - (x dy - y dx) = 0.$

3987. Если R — сопротивление, L — коэффициент самоиндукции, а V — напряжение, то сила тока в цепи I удовлетворяет уравнению: $L \frac{dI}{dt} + RI = V$. Найти силу тока через t секунд после включения, если V постоянно, а при $t = 0$ сила тока была I_0 .

3988. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, при $V = V_0 \sin 2\pi nt$.

3989. Найти кривую, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, касательной и ординатой в точке касания, равна a^2 . Выделить кривую, проходящую через точку (a, a) .

§ 10.7

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Так называются уравнения, имеющие вид $y' + Py + Qy^2 + R = 0$. Если удастся найти частное решение y_1 , то подстановкой $y = y_1 + u$ такое уравнение приводится к уравнению Бернулли.

Найти общий интеграл следующих уравнений, имеющих частный интеграл вида $\frac{a}{x}$.

3990. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1.$

3991. $y' + y^2 = 2x^{-2}.$

3992. $4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0.$

3993. $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0.$

Уравнение, изучавшееся самим Риккати, имеет вид $y' + Ay^2 = Bx^m$, где A , B и m — постоянные. После подстановки $y = \frac{u}{x}$ и $x^{m+2} = t$ оно переходит в такое: $tu' + \alpha u + \beta u^2 = \gamma t$. Последнее при $\beta = 0$ обращается в линейное, а при $\gamma = 0$ — в уравнение Бернулли. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ уравнение можно переписать в таком виде:

$$-\sqrt{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{u} \right)' + \beta = \gamma \left(\frac{\sqrt{t}}{u} \right)^2,$$

после чего оно легко интегрируется. Если же $\gamma\beta \neq 0$ и $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение можно преобразовать двумя путями:

I. Подстановкой $u = \frac{t}{a+vt}$, где $a = \frac{1+\alpha}{\gamma}$, оно преобразуется к виду

$$tv' + (\alpha + 1)v + \gamma v^2 = \beta t.$$

II. Подстановкой $u = a + \frac{t}{v}$, где $a = -\frac{\alpha}{\beta}$, оно преобразуется к виду

$$tv' + (\alpha - 1)v + \gamma v^2 = \beta t.$$

При $\alpha = \nu + \frac{1}{2}$, где ν — целое число, ряд подстановок указанных типов приводит к полному решению, но $\alpha = -\frac{1}{m+2}$. Поэтому уравнение Риккати в узком смысле, т. е. уравнение $y' + Ay^2 = Bx^m$, интегрируется в конечном виде при $m = -\frac{4n}{2n+1}$, где n — любое целое число, не исключая и отрицательных.

Решить уравнения:

$$3994. xy' + 3y + y^2 = x^2.$$

$$3998. y' + y^2 = x^{-4}.$$

$$3995. xy' - 5y - y^2 = x^2.$$

$$3999. y' + y^2 = -x^{-4}.$$

$$3996. 3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$4000. y' - y^2 = x^{-\frac{8}{3}}.$$

$$3997. 5y' + y^2 = x^{-\frac{12}{5}}.$$

$$4001. y' - y^2 = -x^{-\frac{4}{3}}.$$

§ 10.8 УРАВНЕНИЕ ЯКОБИ

Уравнение Якоби имеет вид

$$(Ax + By + C)dx + (A_1x + B_1y + C_1)dy + \\ + (A_2x + B_2y + C_2)(x dy - y dx) = 0.$$

Один из наиболее простых для запоминания путей его решения состоит в следующем. Подстановкой $x = \frac{\xi}{\zeta}$, $y = \frac{\eta}{\zeta}$ данное уравнение переводится в такое:

$$-s_1(\zeta d\eta - \eta d\zeta) + s_2(\zeta d\xi - \xi d\zeta) + s_3(\xi d\eta - \eta d\xi) = 0, \quad (*)$$

где

$$\begin{aligned} -s_1 &= A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta, & s_2 &= A\xi + B\eta + C\zeta, \\ s_3 &= A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta. \end{aligned}$$

Уравнение (*) можно записать в виде равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы удовлетворить ему, можно положить

$$\frac{d\xi}{dt} = s_1, \quad \frac{d\eta}{dt} = s_2, \quad \frac{d\zeta}{dt} = s_3, \quad (**)$$

где t — новая вспомогательная переменная. Полученная система линейных уравнений решается сравнительно простыми методами, которым посвящен один из дальнейших параграфов. Решение этих уравнений дает три равенства с ξ , η , ζ и t . Присоединив к ним еще формулы $x = \xi/\zeta$, $y = \eta/\zeta$, получаем пять уравнений. Исключая из них ξ , η , ζ и t , найдем общий интеграл данного уравнения.

В простейшем и нередком случае решение уравнений (**) дается равенствами:

$$\begin{aligned}a\xi + b\eta + c\zeta &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta &= C_2 e^{\lambda_2 t}, \\a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta &= C_3 e^{\lambda_3 t}.\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$(a\xi + b\eta + c\zeta)^{\lambda_2 - \lambda_3} (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta)^{\lambda_3 - \lambda_1} (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta)^{\lambda_1 - \lambda_2} = C,$$

где C — новая постоянная. Так как левая часть есть однородная функция нулевой степени, то выражения в скобках можно разделить на ζ , после чего получается общий интеграл уравнения Якоби в таком виде:

$$(ax + by + c)^{\lambda_2 - \lambda_3} (a_1 x + b_1 y + c_1)^{\lambda_3 - \lambda_1} (a_2 x + b_2 y + c_2)^{\lambda_1 - \lambda_2} = C.$$

Решить дифференциальные уравнения:

4002. $(x - y + 1)dx + (x - y - 1)dy + (x + y - 1)(x dy - y dx) = 0.$

4003. $(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(x dy - y dx) = 0.$

4004. $(x + 3y + 2)dx - (x - y - 2)dy + (x + y + 2)(x dy - y dx) = 0.$

4005. $(14x + 13y + 6)dx + (4x + 5y + 3)dy - (7x + 5y)(x dy - y dx) - y dx = 0.$

4006. $(7x - 8y + 5)dx + (7x - 8y)dy + 5(x + y)(x dy - y dx) = 0.$

4007. $(-x + 1)dx + (1 - y)dy + (x - y)(x dy - y dx) = 0.$

4008. Найти кривую, у которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox виден из точки $(0, 1)$ под углом 45° .

§ 10.9

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Если выражение $Pdx + Qdy$ не есть полный дифференциал некоторой функции, то его можно сделать полным дифференциалом, помножив на некоторый множитель M . Последний должен удовлетворять уравнению в частных производных

$P \frac{\partial M}{\partial y} - Q \frac{\partial M}{\partial x} = M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$. Если после умножения на M выражение

$Pdx + Qdy$ обращается в полный дифференциал функции u , то $\varphi(u)M$, где $\varphi(u)$ — любая интегрируемая функция, тоже будет интегрирующим множителем для $Pdx + Qdy$. Таким образом, существует бесчисленное множество интегрирующих множителей. Тем не менее найти хотя бы один из них, вообще говоря, трудно. Исключение составляет случай, когда множитель имеет вид $M = f(u)$,

где u — данная функция. В этом случае отношение величин $P \frac{\partial u}{\partial y} - Q \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ должно быть функцией одного u , а уравнение в частных производных для

множителя M обращается в обыкновенное линейное уравнение первого порядка и может быть полностью решено. Как только множитель M для выражения $P dx + Q dy$ найден, уравнение $P dx + Q dy = 0$ можно заменить уравнением $MP dx + MQ dy = 0$. Так как в левой части стоит полный дифференциал, то последнее уравнение может быть проинтегрировано.

Найти интегралы следующих уравнений, имеющих множитель одного из видов $M = f(x)$ или $M = f(y)$.

4009. $(x^2 + y) dx - x dy = 0$.

4010. $(x^2 + y^2)(x dy - y dx) = (a + x)x^4 dx$.

4011. $(xy^2 + y) dx - x dy = 0$.

4012. $(2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0$.

4013. $(1 - x^2 y) dx + x^2(y - x) dy = 0$.

4014. $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0$.

4015. $(x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$.

Интегрировать следующие уравнения с множителем одного из видов $M = f(x + y)$ или $M = f(xy)$:

4016. $(x^2 + x^2 y + 2xy - y^2 - y^3) dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3) dy = 0$.

4017. $(2x^3 y^2 - y) dx + (2x^2 y^3 - x) dy = 0$.

4018. $xy^2 dx + (x^2 y - x) dy = 0$.

4019. $x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0$.

Решить следующие уравнения с помощью множителей одного из видов: $M = f(x^2 - y^2)$ или $M = f(x^2 + y^2)$.

4020. $(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$.

4021. $(y + x^2) dy + (x - xy) dx = 0$.

4022. $\omega(x^2 + y^2)x dx + \omega_1(x^2 + y^2)y dy = 0$.

Иногда интегрирующий множитель удастся находить постепенно, представив величину $P dx + Q dy$ в виде суммы пар слагаемых такого же вида:

$$P dx + Q dy = (P_1 dx + Q_1 dy) + (P_2 dx + Q_2 dy) + \dots + (P_n dx + Q_n dy).$$

Найдя множитель M_1 для первой суммы в правой части, получаем:

$$M_1(P dx + Q dy) = (M_1 P_1 dx + M_1 Q_1 dy) + (M_1 P_2 dx + M_1 Q_2 dy) + \dots$$

Если при этом $M_1 P_1 dx + M_1 Q_1 dy$ оказалось равным du , где u — известная функция, то стараются выбрать $M_2 = \varphi(u)$ так, чтобы в равенстве

$$M_1 M_2 (P dx + Q dy) = \varphi(u) du + (M_1 M_2 P_2 dx + M_1 M_2 Q_2 dy) + \dots$$

второе слагаемое в правой части стало полным дифференциалом. Первое слагаемое при этом остается полным дифференциалом. Продолжая дальше подобным образом, мы достигнем того, что вся правая часть станет полным дифференциалом. Так, например, в уравнении $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$ первые два слагаемых равны $\frac{1}{2} du$, где $u = x^2 + y^2$. Поэтому, умножая на $\varphi(u)$, пишем уравнение:

$$\frac{1}{2} \varphi(u) du + \varphi(u) x^3 \cdot \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0.$$

Правая часть будет полным дифференциалом, если $\varphi(u)x^3$ будет функцией дроби $v = \frac{y}{x}$. Это будет при $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{u^3}}$. Это уравнение принимает тогда вид $\frac{du}{2u\sqrt{u}} + \frac{dv}{\sqrt{(v^2+1)^3}} = 0$ и без труда интегрируются.

Найти интегралы уравнений:

4023. $(x^2 + y^2 + y) dx - x dy = 0$.

4024. $x dy + y dx + y^2(x dy - y dx) = 0$.

4025. $y(x^2 + y^2) dx + x(x dy - y dx) = 0$.

4026. $y^2(x + a) dx + x(x^2 - ay) dy = 0$.

4027. $2x dy + y dx + xy^2(x dy + y dx) = 0$.

4028. $x dy - 2y dx + xy^2(2x dy + y dx) = 0$.

4029. Доказать, что для однородного уравнения $M dx + N dy = 0$ величина $\frac{1}{Mx+Ny}$ есть интегрирующий множитель.

4030. Доказать теорему: если уравнение $M dx + N dy = 0$ однородное, а $M dx + N dy$ есть полный дифференциал, то общий интеграл уравнения можно написать в таком виде: $Mx + Ny = C$.

§ 10.10 УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Если уравнение $P dx + Q dy = 0$ имеет два интегрирующих множителя M_1 и M , отношение которых отлично от постоянной, то равенство $\frac{M_1}{M} = C$ дает общий интеграл уравнения. Если общий интеграл можно представить в двух видах: $u(x, y) = C$, $v(x, y) = C_1$, где C и C_1 — произвольные постоянные, то $v = \varphi(u)$.

ПРИМЕРЫ:

1. Уравнение $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ при умножении на xy переходит в $y dx + x dy = 0$ и, значит, имеет два множителя 1 и xy . Поэтому его общий интеграл есть $xy = C$. С другой стороны, его общий интеграл есть также $\ln x + \ln y = C_1$. Поэтому $\ln x + \ln y = \varphi(xy)$. При $y = 1$

получаем: $\ln x = \varphi(x)$. Отсюда получаем основное равенство теории логарифмов: $\ln x + \ln y = \ln xy$.

2. Несколько сложнее получаются подобные результаты для уравнения

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0,$$

которое имеет один интегрирующий множитель $M = 1$. Чтобы найти другой, обозначим левую часть через ω и умножим ее на $(x^2+1)(y^2+1)$, после чего получим $(x^2+1)\omega = y^2 dx + x^2 dy + d(x+y)$. С другой стороны, замечаем, что $(x+y)d(xy) = y^2 dx + x^2 dy + xy d(x+y)$. Поэтому

$$(x^2+1)(y^2+1)\omega = (x+y)d(xy) + (1-xy)d(x+y).$$

Деля на $(1-xy)^2$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+1)(y^2+1)}{(1-xy)^2} \omega &= \\ &= \frac{(1-xy)d(x+y) - (x+y)d(1-xy)}{(1-xy)^2} = d \frac{x+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

Данное уравнение $\omega = 0$ эквивалентно такому: $d \frac{x+y}{1-xy} = 0$. Его общий интеграл $\frac{x+y}{1-xy} = C$. С другой стороны, ясно, что общий интеграл уравнения ω есть $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C_1$. Поэтому $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \varphi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$. При $y = 0$ находим: $\operatorname{arctg} x = \varphi(x)$. Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Найти алгебраическую форму интегралов следующих четырех уравнений:

4031. $\frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{dy}{a+2by+cy^2} = 0.$

4032. $\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$

4033. $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2}} = 0.$

4034. $\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dy}{y\sqrt{a+by+cy^2}}.$

- 4035.** Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$$

может быть представлен в форме

$$y\sqrt{1-x^4} + x\sqrt{1-y^4} = C(1+x^2y^2).$$

4036. Доказать, что частный интеграл того же уравнения, удовлетворяющий условию $y = 1$ при $x = 0$, выражается уравнением

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 = 1.$$

4037. На дуге лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ рассматриваются точки $M(\varphi, r)$ и $M(\varphi_1, r_1)$ такие, что дуги OM и AM_1 равны, где $O(\frac{\pi}{4}, 0)$, $A(0, a)$. Доказать, что $\cos \varphi \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4038. Уравнение $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ имеет общий интеграл $\arcsin x + \arcsin y = C$. Установить, что оно имеет также алгебраический интеграл

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C_1.$$

4039. Полагая $x = \sin \varphi$, $y = \sin \psi$, $\sqrt{1-x^2} = \cos \varphi$, $\sqrt{1-y^2} = \cos \psi$, с помощью результата предыдущей задачи доказать теорему сложения для синусов:

$$\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi = \sin(\varphi + \psi).$$

4040. При изучении уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

положить $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = R(x)$, $dx = R(x)dt$, $dy = -R(y)dt$ и доказать равенства

$$\begin{aligned} yx' - xy' &= yR(x) + xR(y), \\ yx' + xy' &= yR(x) - xR(y), \\ yx'' - xy'' &= 2k^2xy(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

4041. Доказать, что общий интеграл уравнения предыдущей задачи можно написать в таком виде:

$$\begin{aligned} y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \\ = C(1 - k^2x^2y^2). \end{aligned}$$

4042. Определив функцию $x = \operatorname{sn} u$ равенством

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

и введя функции $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u$, доказать равенство:

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{sn}(u+v).$$

4043. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}} = 0$$

можно представить в таком виде:

$$\sqrt{y(1-x)(1-\lambda x)} + \sqrt{x(1-y)(1-\lambda y)} = C(1-\lambda xy).$$

4044. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi}} = 0$$

можно написать в таком виде:

$$\sqrt{\cos \varphi} - \sqrt{\cos \psi} = C \sin \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

§ 10.11

УРАВНЕНИЯ,

НЕ РЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО y'

Один из способов решения таких уравнений состоит в том, что данное уравнение сначала разрешают относительно y' . Таким способом можно решить уравнения 4046–4053.

Решить уравнения:

4045. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

4051. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 =$
 $= x^2y^2 - x^4.$

4046. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}.$

4047. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$

4052. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 =$
 $= 0$

4048. $xy'^2 + 2yy' - x = 0.$

4049. $x^3 + y'^2 = x^2.$

Замечание. Здесь можно положить $y = ux$ и потом $x = e^t$.

4050. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2).$

Найти интегралы следующих двух уравнений, опираясь на то, что в них величина y' постоянна.

4053. $y'^3 - 3y' + 1 = 0$.

4054. $y' = e^{y'} \sin y'$.

Если уравнение имеет один из видов, $f(x, y') = 0$ или $f(y, y') = 0$, то нередко бывает удобно принять y' за параметр или за какую-нибудь функцию параметра. Если положить $y' = p$, а из уравнения $f(x, y') = 0$ получается $x = \varphi(p)$, то $dx = \varphi'(p)dp$. Поэтому $dy = p dx = p\varphi'(p)dp$. Отсюда и из предыдущего получаются параметрические выражения x и y через p :

$$x = \varphi(p), \quad y + C = \int p\varphi'(p)dp.$$

Подобно этому решается и уравнение типа $f(y, y') = 0$.

Решить уравнения:

4055. $x = ay' + by'^2$.

4058. $y'^2 - 2xy' - 1 = 0$.

4056. $y = y'^2 + 2y'^3$.

4059. $xy' = y'^x$.

4057. $y = y' \ln y'$.

4060. $x^3 + y'^3 = axy'$.

Замечание. В последних двух задачах следует и x и y' выразить через вспомогательный параметр.

Для интегрирования уравнения $F(x, y, y') = 0$ бывает полезно разрешить его относительно y . Если при этом получится $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, то уравнение интегрируется. Здесь приходится разбирать три случая:

1. $y = y'x + \psi(y')$ (уравнение Клеро). Его общий интеграл имеет вид $y = Cx + \psi(C)$. Кроме того, уравнение может иметь еще особый интеграл, который получается исключением p из уравнений $y = px + \psi(p)$ и $x + \psi'(p) = 0$.
2. $y = \varphi(y')x + \psi(y')$, где $\varphi(y') \neq y'$ (уравнение Лагранжа).

Если положить $y' = p$ и принять x за функцию, то уравнение обращается в линейное:

$$(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Кроме того, уравнение может иметь особые интегралы вида $y = \varphi(C)x + \psi(C)$, где C — корень уравнения $C = \varphi(C)$.

3. $y = xy' + x^\alpha \varphi(y')$ или $y = xy' + y^\alpha \varphi(y')$ таким же способом, как во втором случае, приводится к уравнению Бернулли.

Решить уравнения:

4061. $y = xy' + y'^2$.

4066. $y'^3 - 3y' = y - x$.

4062. $y = xy' + y' - y'^2$.

4067. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

4063. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

4068. $y = xy'^2 + y'^2$.

4064. $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y'^2 = 1$.

4069. $y = x(1 + y') + y'^2$.

4070. $y = 2xy' - y'^2$.

4065. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

4071. $yy' = 2xy'^2 + 1$.

4072. Найти кривую, у которой касательная образует на осях отрезки, сумма длин которых равна $2a$.

4073. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями равна a .

4074. Найти кривые, у которых произведение расстояний от касательной до двух данных точек постоянное.

4075. Найти кривую, касательная к которой образует с осями треугольник площади $2a^2$.

4076. Найти интегральную кривую уравнения

$$y'^2 + 2xy' + 2y = 0,$$

которая пересекает ось Oy под углом 45° .

§ 10.12

ОСОБЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Если интеграл уравнения имеет вид $f(x, y, C) = 0$, то особенное решение может получиться исключением C из уравнений $f(x, y, C) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial C} = 0$. Может случиться, однако, что эти уравнения несовместны или не дают вещественного решения. Может случиться также, что уравнение, полученное указанным способом, не дает особенного решения. Если само уравнение имеет вид $f(x, y, y') = 0$, то особенное решение может получаться также исключением y' из уравнений $f(x, y, y') = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$.

Ввиду возможности посторонних решений всегда требуется проверка по самому заданному дифференциальному уравнению.

Найти особенные решения уравнений:

4077. $y = xy' + y' + y'^2$.

4078. $(xy' - y)^2 = x^3(2y - xy')$.

4079. $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$.

4080. $2xy(1 + y'^2) - (xy' + y)^2 = 0$.

4081. $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

4082. $(y - xy')(ay' - b) = aby'$.

4083. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

4084. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

4085. $y'^2 - 2xy'\sqrt{y} + 4y\sqrt{y} = 0$.

4086. $xy^2y'^2 - y^3y' + a^2x = 0$.

§ 10.13

ЗАДАЧИ НА ТРАЕКТОРИИ

Ортогональной траекторией семейства $f(x, y, a) = 0$ называется линия, пересекающая кривые семейства под прямым углом. Чтобы получить дифференциальное уравнение траекторий, надо исключить a из уравнений:

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(-\frac{1}{y'} \right) = 0.$$

Ортогональные траектории встречаются в ряде вопросов физики.

Найти ортогональные траектории следующих семейств линий:

4087. Парабол $y = ax^2$.

4088. Кривых $y = ax^\sigma$ при данном σ .

4089. Эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ при данных a и b .

4090. Эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при данном a .

4091. Кривых $x^\sigma + y^\sigma = a^\sigma$.

4092. Софокусных эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ при данном c .

Указание. Один из способов решения уравнения задачи — подстановка $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$.

4093. Кругов $(x - \lambda)^2 + y^2 = a^2$ при данном a .

4094. Парабол $(y - h)^2 = 2px$, скользящих без вращения вершиной по оси Oy .

4095. Парабол $(y - \eta)^2 = 2p(x - \xi)$, где $\eta^2 + 2p\xi = 0$, перемещающихся без вращения, проходя через начало координат.

4096. Циссоид $(2a - x)y^2 = x^3$.

4097. Лемнискат $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Замечание. Здесь лучше всего ввести полярные координаты.

4098. Строфонид $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.

4099. Парабол, у которых Ox — ось симметрии, Oy — директриса.

4100. Кругов, касающихся двух прямых $y = \pm ax$ при данном a .

4101. Кардиоид $r = a(1 + \cos \varphi)$.

4102. Кривых $r^2(\pi - \varphi) = a^2\varphi$.

4103. $r^2 = \ln \operatorname{tg} \varphi + C$.

4104. $r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\varphi + a^{2n} = c^{2n}$ при данных a и n .

4105. Найти эвольвенту параболы, т. е. ортогональную траекторию касательных к ней.

4106. Найти эвольвенту цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

4107. Найти эвольвенту эвольвенты круга

$$x = 2a(\cos t + t \sin t), \quad y = 2a(\sin t - t \cos t).$$

4108. Найти кривые, пересекающие кардионды $r = a(1 + \cos \varphi)$ при любых a под углом α .

4109. То же для кривых $r^2 \cos 2\varphi = a^2$.

4110. То же для окружностей $r = a \cos \varphi$.

4111. Найти семейство кривых $r = af(\varphi)$ таких, чтобы каждая из кривых при повороте ее на любой угол β пересекала все остальные кривые семейства под углом α , где α — некоторая функция от β .

4112. Найти кривые, пересекающие под углом 45° касательные к кругу $x^2 + y^2 = a^2$.

4113. Найти кривые, пересекающие все образующие конуса $\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ под постоянным углом α .

4114. Найти линию, пересекающую под углом α меридианы параболоида вращения.

4115. Тот же вопрос для тора

$$(r - l)^2 + z^2 = a^2, \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad l > a.$$

4116. Найти поверхность вращения около Oz , такую, чтобы проекции на плоскость xOy линий на поверхности, пересекающих меридианы под углом α , имели вид парабол с фокусом в начале координат.

4117. Найти линии наибольшего ската поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4118. Найти линии наибольшего ската наклонного кругового цилиндра $x^2 + (y - z \operatorname{tg} \alpha)^2 = a^2$.

4119. Найти линии наибольшего ската прямого кругового цилиндра, отклоненного от вертикали на угол α : $x^2 + (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 = a^2$.

4120. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для наклонного параболического цилиндра $y^2 = 2p(x - z \operatorname{tg} \alpha)$.

§ 10.14 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Найти интегралы уравнений:

4121. $(x + y)(1 - xy)dx + (x + 2y)dy = 0$.

4122. $(x^2 + xy - ay)dx + axdy = 0$.

4123. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = xdy$.

4124. $2xdx + (x^2 + y^2 + 2y)dy = 0$.

4125. $(x - y - 4)dx = (x + y - 2)dy$.

4126. $2xy' + y^2 - 1 = 0$.

4127. $(x^2 + y^2)y' = xy$.

4128. $y = xy' + y'^2$.

4129. $xy' + 2y = \sqrt{y}$.

4130. $xy' - y = y^2$.

4131. $(3x^2 + 6xy + y)dx + (3x^2 + x - 1)dy = 0$.

4132. $x(x - 1)y' - y = (x - 1)^2$.

4133. $(y^2 + 2xy - x)y' = y^2$.

4134. $(y + xy')^2 = x^2y'$.

4135. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}$.

4136. $y^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

4137. $y^2(1 + y'^2) = a(x + yy')$.

4138. $2y = x^2 + xy' + y'^2$.

4139. $4y = (x + y')^2$.

4140. $4y = x^2 + y'^2$.

4141. $2y = 2x^2 + 4xy' + y'^2$.

4142. $x^2(y - xy') = yy'^2$.

4143. $x(1 + y'^2)(y - xy') = 2a^2$.

$$4144. y' = m \ln x + \ln(xy' - y).$$

$$4145. x^3 y'^2 + x^2 y y' + a^3 = 0.$$

$$4146. (x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

$$4147. y = \left(y' - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^3.$$

$$4148. (xy' - y)^2 = y'^2 - 2\frac{y}{x}y' + 1.$$

$$4149. (1 + 6y^2 - 3x^2 y)y' = 3xy^2 - x^2.$$

$$4150. y^2 - (y'^2 + y'^3)xy + x^2 y'^5 = 0.$$

$$4151. x^2 + y = y'^2.$$

$$4152. y' \sqrt{a^2 + x^2} + y = \sqrt{a^2 + x^2} - x.$$

$$4153. y - xy' = a(y^2 + y').$$

$$4154. (\sin(x + y) + x \cos(x + y)) dx + x \cos(x + y) dy = 0.$$

$$4155. (x^2 + 1)y' + x \sin y \cos y - x(x^2 + 1) \cos^2 y = 0.$$

$$4156. (x^2 + y^2 + a)yy' + (x^2 + y^2 - a)x = 0.$$

$$4157. (x^2 y^2 + 1)y + (xy - 1)^2 xy' = 0; M(a, 1).$$

$$4158. y'^2 - yy' + e^x = 0.$$

$$4159. (x^2 - a^2)dx + 2xy dy = 0; M(2a, 3a).$$

$$4160. y' = ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}.$$

$$4161. (x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0; M(a, 3a).$$

$$4162. (x^2 - 1)dx + (x^2 y^2 + x^3 + x) dy = 0.$$

$$4163. 2(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2}) dx + x^3 dy = 0.$$

$$4164. xy y' = x^2 y' + y^2; M(1, 1).$$

$$4165. (x + 2y^3)y' = y.$$

$$4166. xy y' - y^2 = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}.$$

$$4167. y - (x + 5)y' - y'^3 = 0.$$

$$4168. ax y' + by = x^m y^n (\alpha x y' + \beta y).$$

$$4169. (x^n + y^2)dx - 2xy dy = 0; n > 1, M(a, 0).$$

4170. Какую форму надо придать зеркалу, поверхность которого — поверхность вращения, чтобы оно все лучи, параллельные оси, отражало в начало координат?

4171. Найти кривые, у которых длина нормали равна расстоянию от точки касания до начала координат.

4172. Найти такую кривую, чтобы расстояния от начала координат до касательной и до нормали в переменной точке кривой находились в постоянном отношении.

4173. Найти кривую, у которой произведение отрезков, образованных касательной и нормалью на оси Ox , равно a^2 .

4174. Найти кривую, у которой отношение расстояний от нормали до двух данных точек есть величина постоянная.

4175. Найти кривую, у которой поднормаль в любой точке равна радиус-вектору из начала координат в эту точку.

4176. Точка движется по оси Ox и тащит точку M , соединенную с ней стержнем длины a . Найти путь точки M (трактриса прямой).

4177. Тот же вопрос, но движущаяся точка описывает окружность $x^2 + y^2 = a^2$; начальное положение точки M — на положительной оси.

4178. Найти кривую, двигаясь по которой, без трения, тяжелая точка совершала бы равномерное движение по горизонтали.

4179. Найти кривую, скользя по которой, тяжелая точка в равные промежутки времени снижалась бы на равные расстояния.

4180. Доказать, что функциональное уравнение $f(2x) = 2f(x)$ имеет решение $f(x) = ax$, единственное среди функций, имеющих производную при $x = 0$.

4181. Найти кривые, у которых проекция ординаты на нормаль постоянна.

4182. Найти кривые, у которых начальная ордината касательной равна абсциссе точки касания.

4183. Найти кривые, у которых расстояние от касательной до начала координат пропорционально длине нормали.

4184. Найти линии, у которых площадь сектора, ограниченного любыми радиус-векторами, пропорциональна длине дуги, ограничивающей этот сектор.

4185. Найти линии, у которых середина отрезка касательной, заключенного между осями координат, лежит на параболе $y^2 = 2px$.

4186. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox , радиус-вектором точки и касательной в ней, имеет постоянную величину Q .

4187. Найти линии, у которых отрезок оси Oy , заключенный между касательной и нормалью, имеет постоянную длину a .

4188. Найти кривые, у которых длина дуги связана с координатами ее конца так: $s = x - \frac{a^2}{y}$.

4189. Найти кривые, у которых длина дуги s пропорциональна квадрату абсциссы.

4190. Найти кривые, у которых $s = f(y)$, где $f(y)$ — данная функция.

4191. Найти кривую, у которой $s^2 = 8ay$.

4192. Найти кривую, у которой $s^2 = y^2 - a^2$.

4193. Найти кривую, у которой $y = ae^{\frac{8}{a}}$.

4194. Найти кривые, у которых центр тяжести дуги, взятой от начала координат до любой точки, имел бы абсциссу, равную $\frac{1}{n}$ абсциссы конца дуги.

4195. Найти угловые коэффициенты касательных, проведенных в точке $(1, 2)$ к двум интегральным кривым уравнения $y'^2 = y^2 - 2x + x^2$, проходящим через эту точку. Показать, что радиус кривизны каждой из этих кривых в этой точке равен 4.

4196. Найти геометрическое место точек, обладающих свойством, что две интегральные кривые уравнения $xy'^2 - yy' + 1 = 0$, проходящие через эти точки, пересекаются:

а) под прямым углом;

б) под углом 45° .

4197. Найти кривую, которая после поворота около начала координат на любой угол α и соответствующего пропорционального изменения обеих координат совместились бы с кривой до поворота.

4198. Найти плоскую кривую, которая после любого растяжения ординат в k раз оказалась бы себе подобной, т. е. совпала бы с кривой, полученной из данной, пропорциональным изменением обеих координат в λ раз.

4199. Найти асимптотические линии коноидов $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Соприкасающаяся плоскость у асимптотических линий совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

4200. Найти линии кривизны гиперболического параболоида $az = xy$. Линии кривизны поверхности удовлетворяют уравнению

$$\frac{(1 + p^2)dx + pq dy}{r dx + s dy} = \frac{pq dx + (1 + q^2)dy}{s dx + t dy},$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

4201. Найти линии кривизны эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (Монж.)

§ 10.15

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Следующие уравнения решаются непосредственным интегрированием соответствующей производной от y .

Решить уравнения:

4202. $y'' = x + \sin x$.

4203. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$.

4204. $y^{IV} = x$.

Общий интеграл уравнения $y^{(n)} = f(x)$ можно представить формулой

$$y = \int_a^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1}.$$

4205. Найти общий интеграл уравнения $y^{IV} = f(x)$, где $f(x) = x$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ вне этого промежутка.

4206. Найти интеграл уравнения $y^{IV} = f(x)$, где $f(x) = |x|$ при $|x| < 1$ и $f(x) = 0$ при $|x| > 1$, такой, чтобы при $x = 0$ величины y, y', y'', y''' обращались соответственно в $0, 0, 0, 0$.

Следующие уравнения сводятся к уравнению низшего порядка простыми подстановками: $y' = u$, или $y'' = u$ и т. д.

4207. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

4208. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

4209. $y''^2 = y'$.

$$4210. ay''' = y''.$$

$$4211. y''' + y''^2 = 0.$$

$$4212. 4y' + y''^2 = 4xy''.$$

$$4213. y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$4214. y'y''' - 3y''^2 = 0.$$

$$4215. 1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1 + y'^2}.$$

$$4216. y'(1 + y'^2) = ay''.$$

$$4217. y''' = y''^3.$$

$$4218. y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

Уравнения вида $f(y, y', y'') = 0$ могут быть сведены к уравнению первого порядка заменой переменных: $y' = p$, откуда $dy = p dx$, $dp = y'' dx$ и $y'' = \frac{p dp}{dy}$.

$$4219. yy''^2 = 1.$$

$$4220. y'' = ae^y.$$

$$4221. 3y'' = y^{-\frac{5}{3}}.$$

$$4222. 2(2a - y)y'' = 1 + y'^2.$$

$$4223. 1 + y'^2 = 2yy''.$$

$$4224. y^4 - y^3 y'' = 1.$$

$$4225. 2y'^2 = (y - 1)y''.$$

$$4226. y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2).$$

$$4227. yy'' = y'^2.$$

$$4228. 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$$

$$4229. 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

В следующих задачах требуется выбрать значения произвольных постоянных в общем интеграле так, чтобы получился частный интеграл, удовлетворяющий указанным условиям.

4230. Из общего интеграла уравнения $yy'' + y'^2 = 1$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 1)$, касаясь в ней прямой $x + y = 1$.

4231. В интеграле уравнения $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 0)$, касаясь в ней прямой $x + y = 0$.

4232. Найти интеграл уравнения $y^3 y'' + 1 = 0$, удовлетворяющий начальным данным $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 1$.

4233. Выделить интегральную кривую уравнения $y'^2 + 2yy'' = 0$, касающуюся прямой $y = x$ в точке $(1, 1)$.

4234. Найти интегральную кривую уравнения $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, касающуюся прямой $y = 1$ в точке $(0, 1)$.

4235. Найти интеграл уравнения $yy'' + n^2y^2 - ky'^2 = 0$, удовлетворяющий начальным данным $y = a$, $y' = 0$ при $x = 0$. При этом $0 < k < 1$.

Следующие уравнения легко интегрируются подстановками

$$y - xy' = u, \quad yy' = u \quad \text{и} \quad y \pm x = u.$$

4236. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

4237. $y'^2 - 2xy'' + x^2 = y^2.$

4238. $x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0.$

4239. $x^3y'' = (y - xy')^2.$

Из уравнений, допускающих понижение порядка, следует отметить уравнения $f(x, y, y', y'') = 0$, однородные относительно y , y' , y'' . У них можно положить $y' = uy$, $y'' = (u' + u^2)y$, после чего порядок понижается на единицу. В уравнениях $f(x, y, y', y'') = 0$ или $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, у которых левая часть не меняется при одновременном изменении x , dx , dy , d^2y в одно и то же число раз, бывает полезно вводить новую независимую переменную, полагая $x = e^t$.

Таковыми приемами решаются нижеследующие уравнения.

Решить уравнения:

4240. $x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0.$

4241. $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

4242. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}.$

4243. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$

4244. Найти интеграл уравнения

$$x^4y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0,$$

введя новую функцию подстановкой $y = x^2u$.

Доказать, что можно привести к квадратурам уравнения:

4245. $f(x^2y'', xy', y) = 0$, где f — однородная функция своих аргументов. (Бурле.)

4246. $x^3y'' = F\left(\frac{y}{x}\right)f(xy' - y)$. Здесь удобно положить $x = e^t$, $y = ze^t$.

4247. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} F\left(\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) f(x^2 + y^2)$. Здесь следует ввести полярные координаты.

4248. Проинтегрировать уравнение конических сечений

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2y^V = 0.$$

Найти общий интеграл (или соответственно интеграл по начальным данным) следующих уравнений:

4249. $xyy'' + xy'^2 + ayy' + f(x) = 0$.

4250. $y'' + ay'^2 + b \sin y = 0$.

4251. $y'' + f(y)y'^2 + \varphi(x)y' = 0$.

4252. $y''^2 - 2xy'' - y' = 0$.

4253. $y''y^2 = -a^2$; $x = 0$, $y = R$, $y' = 0$.

4254. $(1 + y^2)y'' + 2yy'^2 = y'$; $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$.

4255. $(x + a)y'' + xy'^2 = y'$; $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$.

Полное решение уравнений в частных производных представляет задачу более трудную, чем нахождение общего интеграла обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача облегчается, если разыскивается интеграл уравнения в частных производных, представляющий функцию не от x и y в отдельности, а от данной функции их. Следующие четыре задачи дают примеры этого.

4256. Найти функцию $u = f(x^2 + y^2)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4257. Найти общий вид функций $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа от трех переменных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

4258. Найти общий вид функций $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, удовлетворяющих бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Замечание. Уравнение Лапласа имеет исключительное значение в ряде отделов математической физики. Бигармоническое уравнение имеет большое значение в теории упругости.

4259. Поверхности, у которых средняя кривизна равна нулю, называются минимальными. Координаты их точек удовлетворяют уравнению

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0,$$

где
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

У поверхностей вращения вокруг оси Oz должно быть $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Найти минимальные поверхности вращения. (Монж.)

4260. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален нормали. Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности μ равен числам ± 1 и ± 2 .

4261. Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

4262. Найти кривые, у которых радиус кривизны пропорционален радиус-вектору из начала координат в точку кривой.

4263. У каких кривых, кроме окружностей, радиус кривизны равен радиус-вектору из начала координат?

4264. Определить форму равновесия нерастяжимой нити, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепных мостов).

4265. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием ее веса. (Цепная линия.)

Найти кривые, у которых радиус кривизны есть данная функция $f(\alpha)$ угла α , образуемого касательной с осью Ox :

4266. $f(\alpha) = a$.

4271. $f(\alpha) = a \sin \alpha$.

4267. $f(\alpha) \sin^3 \alpha = a$.

4272. $f(\alpha) = a \sin m\alpha$.

4268. $f(\alpha) \cos^2 \alpha = a$.

4273. $f(\alpha)(1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} = p$;

4269. $f(\alpha) = ae^{m\alpha}$.

$0 < e < 1$.

4270. $f(\alpha) = a\alpha$.

Найти кривые, у которых длина дуги s есть данная функция угла α , образуемого касательной в конце дуги с осью Ox :

4274. $s = a\alpha$.

4277. $2s = a\alpha^2$.

4275. $s = a \operatorname{tg} \alpha$.

4278. $s = a \cos \alpha$.

4276. $s = ae^{m\alpha}$.

4279. $s = a \cos m\alpha$.

В следующих задачах найти кривые, у которых радиус кривизны R есть данная функция длины дуги s .

4280. $s^2 = a(R - a)$.

4282. $R^2 + s^2 = a^2$.

4281. $R = ms$.

4283. $R^2 = 2as$.

Найти кривые, у которых существует указанное ниже соотношение между соответствующими радиусами кривизны самой кривой R и ее эволюты R_1 .

4284. $R^2 + R_1^2 = a^2$.

4285. $R_1^2 = 2aR$.

4286. $\frac{R^2}{a^2} + \frac{R_1^2}{b^2} = 1$.

4287. Найти кривую, дуга которой, считаемая от некоторой начальной точки, равна расстоянию касательной в конце дуги от начала координат.

§ 10.16

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами бывают двух видов — однородные:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

и неоднородные:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x).$$

Общий интеграл линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами находится с помощью характеристического уравнения:

Если
$$s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n = 0,$$

$$s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_n = (s - s_1)^\alpha (s - s_2)^\beta \dots (s - s_\nu)^\lambda,$$

где $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$, т. е. если s_1 есть корень кратности α , s_2 — корень кратности β и т. д., то общий интеграл можно написать в таком виде:

$$y = e^{s_1 x} P_\alpha(x) + e^{s_2 x} P_\beta(x) + \dots + e^{s_\nu x} P_\lambda(x),$$

где $P_\alpha(x)$, $P_\beta(x)$, ..., $P_\lambda(x)$ — полиномы степеней $\alpha - 1$, $\beta - 1$, ..., $\lambda - 1$ с неопределенными коэффициентами.

В частности, если $\alpha = \beta = \dots = \lambda = 1$, т. е. если все корни характеристического уравнения простые, то

$$y = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + \dots + C_n e^{s_n x}.$$

В большинстве приложений коэффициенты уравнений $p_1, p_2, \dots, p_n$ — вещественные. В таком случае корни характеристического уравнения, если они мнимые, являются попарно сопряженными. В силу этого общему интегралу

линейного однородного уравнения можно дать другой вид. Если $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ — корень кратности ν_1 , $s_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ — корень кратности ν_2 и т. д., то общий интеграл можно написать в такой форме:

$$y = e^{\alpha_1 x} (\cos \beta_1 x P_1(x) + \sin \beta_1 x Q_1(x)) + \\ + e^{\alpha_2 x} (\cos \beta_2 x P_2(x) + \sin \beta_2 x Q_2(x)) + \\ + \dots$$

Здесь $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — полиномы степени ν_1 с неопределенными коэффициентами, $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ — полиномы степени ν_2 с неопределенными коэффициентами и т. д.

Написать общие интегралы линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$4288. y'' - y = 0.$$

$$4294. y'' + 4y' + 13y = 0.$$

$$4289. y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$4295. y'' + y' + y = 0.$$

$$4290. y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$4296. y'' + y = 0.$$

$$4291. y'' + 2y' + y = 0.$$

$$4297. y''' - 8y = 0.$$

$$4292. y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$4298. y^{IV} - 16y = 0.$$

$$4293. y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$$4299. y^{IV} + 4y = 0.$$

$$4300. y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

$$4301. y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$$

$$4302. y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$$

$$4303. y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$$

$$4304. y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

$$4305. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

$$4306. y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0.$$

$$4307. y^{IV} - y''' + y'' - y' + 12y = 0.$$

$$4308. y^{VII} + 3y^{VI} + 3y^V + 3y^{IV} = 0.$$

Найти частный интеграл, определяемый указанными требованиями, для следующих дифференциальных уравнений:

$$4309. y^{IV} + a^4 y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0, y'' = 0, y''' = 1.$$

$$4310. y^{IV} + 4y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0; \text{ при } x = \pi, y = 0, y' = a.$$

$$4311. y^{IV} + 4y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 1; \text{ при } x = +\infty, y = 0.$$

$$4312. y^{IV} - a^4 y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0; \text{ при } x = l, y'' = 0, y''' = b.$$

4313. При каких значениях a будут существовать отличные от нуля решения предыдущей задачи в случае задания $b = 0$.

Для неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = f(x)$$

наиболее простой способ, хотя и не всегда применяемый, основан на теореме: если y_1 есть частный интеграл неоднородного уравнения, то общий интеграл равен $y_1 + u$, где u — общий интеграл вспомогательного однородного уравнения $u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_n u = 0$. При этом интеграл y_1 во многих случаях удастся найти способом неопределенных коэффициентов.

ПРИМЕР 1. В применении к уравнению $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin x + x^2$ этот способ проводится следующим образом. Предположительно пишем:

$$y_1 = (Ax + B)e^{2x} + C \sin x + D \cos x + Ex^2 + Fx + G.$$

Здесь правая часть написана по типу правой части данного уравнения, только множитель x перед e^{2x} заменяется общим двухчленом первой степени, слагаемое x^2 заменяется общим квадратным трехчленом, а наличие в правой части уравнения функций $\sin x$ заставляет ввести в состав y_1 заодно с синусом и косинус. Дальнейшее вычисление имеет вид

$$\begin{array}{l|l} -2 & y_1 = (Ax + B)e^{2x} + C \sin x + D \cos x + Ex^2 + Fx + G. \\ 1 & y_1' = 2(Ax + B)e^{2x} + Ae^{2x} + C \cos x - D \sin x + 2Ex + F, \\ 1 & y_1'' = 4(Ax + B)e^{2x} + 4Ae^{2x} - C \sin x - D \cos x + 2E \end{array}$$

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = 4(Ax + B)e^{2x} + 5Ae^{2x} + (-3C - D)\sin x + (C - 3D)\cos x - 2Ex^2 + (2E - 2F)x + (2E + F - 2G).$$

Чтобы y_1 было интегралом данного уравнения, надо выбрать неопределенные пока коэффициенты в y_1 так, чтобы правая часть в получившемся равенстве совпала с правой частью уравнения. Приравнявая коэффициенты при однотипных слагаемых, получаем:

$$4A = 1, \quad 4B + 5A = 0, \quad -3C - D = 1, \quad C - 3D = 0, \quad -2E = 1,$$

$$2E - 2F = 0, \quad 2E + F - 2G = 0.$$

Отсюда следует, что $A = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{5}{16}$, $D = -\frac{1}{10}$, $C = -\frac{3}{10}$, $E = -\frac{1}{2}$, $F = -\frac{1}{2}$, $G = -\frac{3}{4}$. Таким образом,

$$y_1 = \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{16}\right)e^{2x} - \frac{3 \sin x + \cos x}{10} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 3).$$

Общий интеграл u вспомогательного однородного уравнения $u'' + u' - 2u = 0$ имеет вид $u = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. После этого из равенства $y = y_1 + u$ получаем:

$$y = \frac{4x - 5}{16}e^{2x} - \frac{3 \sin x + \cos x}{10} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 3) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Изложенный способ применим в тех случаях, когда $f(x)$ в правой части данного уравнения состоит из сумм и произведений функций вида e^{ax} , $\sin bx$, $\cos bx$ и x^n — целое и положительное.

ПРИМЕР 2. Следует иметь в виду одно осложнение, которое иногда возникает в применении этого способа. Его сущность видна на следующем уравнении:

$$y^V - y^{IV} - y' + y = x^2 e^x + x \sin x + e^{2x}.$$

По правилу $y = y_1 + u$, где $u^V - u^{IV} - u' + u = 0$. Чтобы найти общий интеграл этого вспомогательного однородного уравнения, надо решить характеристическое уравнение $s^5 - s^4 - s + 1 = 0$ или $(s-1)^2(s^2+1)(s+1) = 0$.

Поэтому $u = e^x(C_1 + C_2x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5 e^{-x}$. (*)

Здесь слагаемое, содержащее e^x , появилось в силу наличия корня $s = 1$ двойной кратности, а слагаемые $\cos x$ и $\sin x$ — из-за корня $s = i$ первой кратности. При нахождении y_1 , вообще говоря, было бы естественно написать

$$y_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)\sin x + (Fx + G)\cos x + He^{2x}. \quad (**)$$

В данном случае слагаемые, содержащие множитель e^x , имеются и в общем интеграле u , где их появление связано с наличием корня $s = 1$ двойной кратности. Поэтому слагаемое $(Ax^2 + Bx + C)e^x$ в формуле для y_1 надо умножить на x^2 . Таким же образом слагаемые, содержащие $\sin x$ и $\cos x$, имеются и в правой части (*) из-за наличия корня $s = i$ первой кратности в характеристическом уравнении. Поэтому в правой части (**) слагаемые, содержащие $\sin x$ и $\cos x$, надо умножить на x . Таким образом, вместо (**) следует писать:

$$y_1 = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)e^x + (Dx^2 + Ex)\sin x + (Fx^2 + Gx)\cos x + He^{2x}.$$

Применяя прежний способ, найдем величины коэффициентов A , B , C , D , E , F , G и H .

Найти общие интегралы следующих неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами (методом неопределенных коэффициентов).

4314. $y'' + a^2 y = e^x$.

4315. $y'' - y = xe^x + e^{2x}$.

4316. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.

4317. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$.

4318. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$.

4319. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$.

4320. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

4321. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x} + e^x$.

$$4322. y'' + y = 2 \sin x \sin 2x.$$

$$4323. y'' - a^2 y = e^{bx} \text{ при } b \neq a \text{ и } b = a.$$

$$4324. y'' + a^2 y = \sin bx \text{ при } b \neq a \text{ и } b = a.$$

$$4325. y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x.$$

$$4326. y'' + 4y' + 20y = a \sin 4x.$$

$$4327. y''' - 2y' + 4y = e^{-x} \cos x + e^x \sin x.$$

$$4328. y''' + y'' - y' + 15y = \sin 2x.$$

$$4329. y'' + n^2 y = \sin^3 nx.$$

$$4330. y'' + n^2 y = ax \sin mx + b \cos mx; m \neq n.$$

$$4331. y'' + n^2 y = ax \sin nx + b \cos nx.$$

В более сложных случаях изложенный способ бывает неприменим, так как угадать вид частного интеграла y_1 трудно или совсем невозможно. Тогда приходится прибегать к более сложному, но и более сильному способу Лагранжа вариации произвольных постоянных. В применении к уравнению третьего порядка

$$y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$$

он состоит в следующем. Ищут общий интеграл вспомогательного однородного уравнения

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0.$$

Пусть он имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$. Здесь определитель $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$, называемый определителем Вронского, отличен от нуля. Ищем неизвестный интеграл данного уравнения y в таком виде: $y = uy_1 + vy_2 + wy_3$, где u , v и w — неизвестные функции. Их находим из уравнений:

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 + w'y_3 &= 0, \\ u'y_1' + v'y_2' + w'y_3' &= 0, \\ u'y_1'' + v'y_2'' + w'y_3'' &= f(x). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно u' , v' и w' , находим: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$. Тогда для y получаем равенство

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + y_1 \int \varphi(x) dx + y_2 \int \psi(x) dx + y_3 \int \omega(x) dx.$$

Способ этот приложим к линейным уравнениям любого порядка, даже с переменными коэффициентами, если удастся найти общий интеграл вспомогательного однородного уравнения.

Следующие уравнения решаются способом Лагранжа.

Решить уравнения:

$$4332. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$4333. y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

$$4334. y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$4335. y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$4336. y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

$$4337. y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x} - \frac{12x+1}{x\sqrt{x}}.$$

К уравнениям с постоянными коэффициентами сводятся уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x).$$

Для этого достаточно ввести новую независимую переменную по формуле $x = e^t$. Еще проще решать однородные уравнения Эйлера с помощью характеристического уравнения. Ищем решение уравнения, полагая $y = x^\sigma$. Подставляя в уравнение и сокращая на x^σ , для показателя σ получаем уравнение

$$\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1) + p_1\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+2) + \dots + p_n = 0.$$

После этого общий интеграл y находится в виде суммы слагаемых, соответствующих корням уравнения для σ . Каждому вещественному корню σ кратности ν соответствует слагаемое $x^\sigma P_\nu(\ln x)$, где P_ν — полином степени $\nu - 1$ с произвольными коэффициентами. Каждой паре мнимых сопряженных корней $\sigma = \alpha \pm \beta i$, имеющих кратность μ , соответствует слагаемое

$$x^\alpha (Q_\mu(\ln x) \cos(\beta \ln x) + R_\mu(\ln x) \sin(\beta \ln x)),$$

где Q_μ и R_μ — полиномы степени $\mu - 1$ с произвольными коэффициентами.

Замечание. Более общее уравнение Эйлера:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + p_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

сводится к только что рассмотренному простейшему случаю подстановкой $ax + b = t$.

Проинтегрировать уравнения:

$$4338. x^2 y'' + x y' + y = 0.$$

$$4339. x^2 y'' + x y' - y = 0.$$

$$4340. x^2 y''' = 2y'.$$

$$4341. x^3 y''' + x y' - y = 0.$$

$$4342. x^3 y''' + 2x^2 y'' - x y' + y = 0.$$

$$4343. x^2 y'' + x y' + y = x.$$

$$4344. x^2 y'' - x y' + y = 2x.$$

$$4345. x^2 y'' - 2x y' + 2y = 2x^3 - x.$$

$$4346. x^3 y''' - x^2 y'' + 2x y' - 2y = x^3 + 3x.$$

$$4347. (3x + 2)^2 y'' + 7(3x + 2)y' = -63x + 18.$$

$$4348. x^2 y'' - 4x y' + 6y = 2ax + \frac{12b}{x}.$$

$$4349. x^4 y^{IV} + 6x^3 y''' + 5x^2 y'' - x y' + y = x^2.$$

$$4350. (x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1).$$

$$4351. x^3 y'' - x^2 y' - 3xy + 16 \ln x = 0.$$

$$4352. (x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = x^2 + 2 \sin \ln(1+x).$$

$$4353. x^2 y'' + xy' - y = \frac{x}{(x+1)^2} - \ln(x+1).$$

$$4354. x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1 \text{ при условии: если } x = 1, \text{ то } y = 0, y' = 0, y'' = 0.$$

В следующих задачах требуется найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий дополнительным условиям:

$$4355. y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = Ae^{\gamma x}; \alpha \neq \beta \neq \gamma; \text{ при } x = 0, y = a, y' = b.$$

$$4356. y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = Ae^{\alpha x}; \alpha \neq \beta; \text{ при } x = 0, y = a, y' = b; \text{ получить нужное решение:}$$

а) из общего интеграла,

б) предельным переходом из решения предыдущей задачи.

$$4357. y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = Ae^{\alpha x}; \text{ при } x = 0, y = a, y' = b. \text{ Получить нужное решение: а) из общего интеграла, б) предельным переходом из решения предыдущей задачи.}$$

$$4358. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x} + e^{3x} \text{ при } x = 0, y = 1, y' = 0, y'' = 0.$$

$$4359. y'' + n^2 y = h \sin^2 nx \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0.$$

$$4360. y'' + 4n^2 y = h \sin^2 nx \text{ при } x = 0, y = a, y' = 0.$$

$$4361. y''' + y = 1 \text{ при } x = 0, y = 0, y' = 0, y'' = 0.$$

$$4362. y^{IV} + y = 1 \text{ при } x = 0, y = 0; \text{ при } x = \infty y \text{ конечная величина.}$$

$$4363. \text{ Найти интеграл уравнения } y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \frac{\pi}{2} + 4 \cos x, \text{ удовлетворяющий условиям } y = y' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = \pi.$$

$$4364. \text{ Найти непрерывную с непрерывной производной при } 0 < x < 2 \text{ функцию от } x, \text{ удовлетворяющую при } x < 1 \text{ уравнению } y'' - y = 0, \text{ а при } x > 1 \text{ уравнению } y'' - 4y = 0 \text{ и такую, чтобы } y = 0 \text{ и } y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$4365. \text{ Тело падает с высоты } h \text{ под действием силы тяжести } f_1 = -mg; \text{ на него действуют силы трения, пропорциональные}$$

скорости: $f_2 = -kv$. Начальная скорость равна нулю. Найти формулу для высоты y через t секунд от начала движения.

4366. Тело массы m скользит по плоскости с углом наклона α под действием силы тяжести. Сила трения выражается формулой $f = -lp - kv$, где p — нормальное давление, v — скорость тела, l и k — постоянные. Найти зависимость пройденного пути от времени.

4367. Тело массы m подвешено на пружине и находится в равновесии. Затем пружина вытянута на длину h силой kh и тело отпущено. Определить дальнейшее движение тела, считая, что сила сопротивления среды пропорциональна скорости $f = -nv$.

4368. По закону Ньютона при движении тела по оси Ox $m \frac{d^2x}{dt^2} = f$, где f — сила, действующая на тело. Найти движение тела, на которое действуют одновременно две силы: 1) сила упругости f_1 , пропорциональная отклонению от положения равновесия: $f_1 = -a^2x$; 2) сила трения f_2 , пропорциональная скорости: $f_2 = -k \frac{dx}{dt}$.

4369. При тех же обозначениях, что и в задаче 4368, найти движение тела с массой m , на которое действуют две силы: $f_1 = -a^2x$ и $f_2 = b \sin nt$. Рассмотреть случаи $n \neq \frac{a}{\sqrt{m}}$ и $n = \frac{a}{\sqrt{m}}$. При $t = 0$ величины x и $\frac{dx}{dt}$ равны 0.

4370. Тело массы m скользит по горизонтальной плоскости под действием толчка, давшего начальную скорость v_0 . На тело действует сила трения, равная $-km$. Найти расстояние, какое тело способно пройти.

4371. На тело единичной массы действуют две силы: $f_1 = -k^2x$ и $f_2 = -fk^2 \operatorname{sign} x'$, равная fk^2 и направленная обратно скорости. Начальная скорость $x' = 0$, а начальное расстояние от начала $x_0 = nf$. Найти движение тела.

4372. Струна длиной l расположена по оси Ox между точками $(0,0)$ и $(l,0)$ и колеблется в плоскости xOy . Отклонение y в точке x и в момент t удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Найти те виды колебаний, при которых $y = u(x) \sin bt$, где b характеризует частоту колебаний.

Концы струны закреплены: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ при любом t .

4373. При установившемся распределении тепла в однородном теле температура u удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Внутренность цилиндрической трубки с однородными стенками наполнена жидкостью с температурой t_1 , а снаружи — жидкостью с температурой t_2 . Найти распределение температуры в стенках.

4374. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для слоя между концентрическими шарами с радиусами r_1 и r_2 .

4375. Балка расположена по оси Ox от точки $(0, 0)$ до точки $(l, 0)$. Ее прогиб в точке x равен y и удовлетворяет уравнению $y^{IV} = af(x)$, где $f(x)$ — нагрузка, a — коэффициент, зависящий от вещества балки и формы поперечного сечения. Найти прогиб балки при $f(x) = 1$, если балка заделана на концах ($y = y' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$).

4376. Стержень между теми же точками, что и в предыдущей задаче, вращается вокруг оси Ox . Его отклонение y от оси Ox , если оно возможно, удовлетворяет уравнению $y^{IV} - a^4 y = 0$, где a зависит от скорости и свойств стержня. При $x = 0$ и $x = l$ величины y и y'' равны нулю. При каких a отклонение возможно?

4377. Упругая тонкая плита расположена в плоскости xOy и изогнута действующими на нее распределенными усилиями интенсивности $p(x, y)$. Прогиб w в точке (x, y) (отклонение от плоскости xOy) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y)$$

(постоянная D — жесткость плиты).

Определить прогиб $w(r)$ для круглой равномерно нагруженной плиты радиуса a , с заделанным краем. На заделанном краю $w = 0$ и $\frac{dw}{dr} = 0$, в центре плиты w и $\frac{d^2 w}{dr^2}$ конечны ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

4378. Решить предыдущую задачу для равномерно нагруженной круглой плиты радиуса a , опертой по краю. На опертю краю $r = a$ граничные условия имеют вид: $w = 0$ и $\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0$ (постоянная ν — коэффициент Пуассона); в центре плиты условия прежние.

§ 10.17 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Если y_1 есть частное решение однородного линейного уравнения $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$, то подстановка $y = y_1 u$ приводит к уравнению, порядок которого легко понижается, если положить $u' = v$.

Решить уравнения:

4379. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $xy_1 = \sin x$.

4380. $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$; $y_1 = x^2$.

4381. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$.

4382. $xy'' - (1 + x)y' + y = 0$; $y_1 = 1 + x$.

4383. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$; $y_1 = \sin x$.

4384. $y'' \sin^3 x = 4y \sin 3x$; $y_1 = \sin^4 x$.

4385. $x(1 - x)^2 y'' = 2y$; $(1 - x)y_1 = x$.

4386. $(1 + x^2)y'' + xy' - n^2 y = 0$; $y_1 = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n$.

4387. $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$; $y_1 = e^{mx}$ при соответствующем выборе m .

4388. $x(x - 1)y'' - (2x - 1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$, зная частный интеграл соответствующего однородного уравнения $z_1 = x^2$.

Если линейное уравнение с рациональными коэффициентами имеет частным решением полином, то он легко может быть найден. Так, если уравнение $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$ имеет решение в виде полинома $y = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + M$, то после подстановки полинома в левую часть этого уравнения коэффициенты при степенях x после приведения подобных членов должны равняться нулю. Для коэффициента при высшей степени x получаем равенство: $-An(n - 1) - An + 9A = 0$ или $A(n^2 - 9) = 0$. Так как $A \neq 0$ и $n \neq -3$, то $n = 3$. Поэтому если y в данном уравнении может быть полиномом, то только полиномом третьей степени. Полагая $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и подставляя в данное уравнение, приравниваем нулю коэффициенты при степенях x . Отсюда получаются уравнения: $B = 0$, $4C = -3A$, $D = 0$. Поэтому $y = A_1(4x^3 - 3x)$ есть решение данного уравнения.

Проинтегрировать следующие уравнения, имеющие частное решение, равное полиному:

4389. $xy'' - (x + 5)y' + 3y = 0$.

4390. $(x^2 - 1)y'' = 6y$.

4391. $y'' - 2xy' + 4y = 0$.

4392. $xy'' - (x + 2)y' + y = 0$.

4393. Показать, что уравнение Лежандра $((x^2 - 1)y')' - n(n + 1)y = 0$, где n — целое и положительное число, имеет частные решения в виде: $y_1 = P(x)$ и $y_2 = P(x) \ln \frac{x+1}{x-1} + Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы.

4394. При каком значении μ уравнение

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0$$

имеет частное решение в виде полинома третьей степени? Найти его.

4395. Показать, что уравнение $xy'' - (x + p + q)y' + py = 0$, где p и q — положительные и целые числа, имеет одно частное решение в виде полинома, а другое — в виде $e^x P(x)$, где $P(x)$ — тоже полином.

В следующих пяти уравнениях общий интеграл — рациональная функция. Это позволяет найти его. При этом важно иметь в виду, что знаменатель такого интеграла может состоять лишь из линейных множителей, являющихся делителями полинома $a(x)$, если данное уравнение имеет вид $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — полиномы.

Интегрировать уравнения:

4396. $(x^2 - x)y'' + (2x - 3)y' - 2y = 0$.

4397. $(x^2 - x)y'' + (x + 1)y' - y = 0$.

4398. $(x^2 - x)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0$.

4399. $x^2(2x + 1)(x + 1)y'' - 2x(x^2 + 3x + 1)y' + (6x + 2)y = 0$.

4400. $(1 + x^2)y'' + 6xy' + 6y = 0$.

В следующих задачах решение достигается тем, что вводят новую независимую переменную, полагая $x = \varphi(t)$ и выбирая

функцию $\varphi(t)$ так, чтобы в преобразованном уравнении обратился в нуль коэффициент при $\frac{dy}{dt}$.

$$4401. 2xy'' + y' - 2y = 0.$$

$$4402. x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0.$$

$$4403. (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0.$$

$$4404. (1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

$$4405. y'' \operatorname{ch}^2 2x + y' \operatorname{sh} 4x + \frac{m^2}{4} y = 0.$$

$$4406. y'' \sin x \cos x - y' + m^2 y \operatorname{tg} x \sin^2 x = 0.$$

Следующие уравнения надо решать специальными приемами, связанными с конструкцией этих уравнений.

$$4407. x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = \frac{1}{x}, \text{ положив } x = \frac{1}{t}.$$

$$4408. xy'' + 2y' - xy = e^x, \text{ положив } y = \frac{u}{x}.$$

$$4409. y'' + \frac{2}{x}y' - a^2 y = 2, \text{ положив } y = \frac{u}{x}.$$

$$4410. x^4 y'' + c^2 y = 0, \text{ положив } y = xu, x = \frac{1}{t}.$$

$$4411. x^4 y'' - c^2 y = 0, \text{ положив } y = \frac{u}{t}, x = \frac{1}{t}.$$

4412. $\sin^2 xy'' + \sin x \cos xy' - y = 0$, подобрав интегрирующий множитель.

4413. Решить уравнение

$$y''' = (x^2 y'' - 2xy' + 2y)P + Q$$

подстановкой $x^2 y'' - 2xy' + 2y = u$. Здесь P и Q — данные функции от x .

4414. Проинтегрировать уравнение $xy'' - 4y' - xy = 0$, применив к нему четыре раза дифференцирование и используя полученные равенства.

4415. Найти общий интеграл уравнения Стокса

$$x^2(1 - x)^2 y'' + \beta y = 0,$$

где β — постоянная, отыскав частное решение вида $y = x^m(1 - x)^n$.

4416. Найти решение уравнения Стокса

$$x^2(1 - x^2)y'' + \beta y = \beta x^2(1 - x)^2$$

такое, что $y = y' = 0$ при $x = 0$.

§ 10.18 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Систему уравнений, содержащих высшие производные, введением новых переменных можно заменить системой, содержащей производные только первого порядка. Исключением неизвестных ее можно привести к виду

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (10.1)$$

Как правило и обратно: систему вида (10.1) с помощью дифференцирования и исключения переменных можно свести к одному или нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией каждое. Системе (10.1) можно придать также такой вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n. \quad (10.2)$$

Один из способов решения систем приведенных видов состоит в получении интегрируемых комбинаций из данных уравнений. Если удастся получить уравнение, содержащее только две переменных x_l и x_m , то оно интегрируется как таковое. После этого получается один из интегралов уравнения $\varphi(x_l, x_m) = C$. Иногда удастся умножением на подходящие множители и сложением получить равенство вида $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_n dx_n = 0$, где левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда имеем равенство $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, дающее один из интегралов системы. Когда получено $n - 1$ интегралов системы с n переменными, то решение закончено, если эти интегралы независимы. Каждый найденный интеграл исключением переменных позволяет свести систему к системе с меньшим числом переменных.

ПРИМЕР 3. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z dz}{xy}$.

Здесь первое уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ представляет интегрируемую комбинацию и дает интеграл $y = Cx$. Подставляя это в равенство $\frac{dx}{x} = \frac{z dz}{xy}$, находим: $Cx dx = z dz$, $Cx^2 = z^2 + C_1$. Равенства $y = Cx$, $xy = z^2 + C_1$ дают полное решение системы.

ПРИМЕР 4. $\frac{dx}{\Delta_1} = \frac{dy}{-\Delta_2} = \frac{dz}{\Delta_3}$, где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — миноры определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix},$$

соответствующие элементам третьей строки.

Вводя переменную t , переписываем систему в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = \Delta_1, \quad \frac{dy}{dt} = -\Delta_2, \quad \frac{dz}{dt} = \Delta_3.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \Delta_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Delta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} \Delta_3 \right) dt = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \Delta_1 - \frac{\partial f_2}{\partial y} \Delta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z} \Delta_3 \right) dt = 0.$$

Это сразу дает два интеграла системы:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

ПРИМЕР 5. Решить систему:

$$\begin{aligned} x dx + y dy + z dz &= a \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ x^2 + y^2 &= z^2. \end{aligned}$$

Учитывая последнее равенство, пишем $x = z \cos \varphi$, $y = z \sin \varphi$. После этого первое уравнение переписывается в таком виде:

$$2z dz = a \sqrt{z^2 d\varphi^2 + 2dz^2} \cdot z\sqrt{2}$$

и интегрируется без труда.

Системы, данные в следующих задачах, решаются просто, так как из уравнений этих систем легко получаются интегрируемые комбинации.

4417. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$

4418. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}.$

4419. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}.$

4420. $\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z}.$

4421. $(z-y)^2 dy = z dx, (z-y)^2 dz = y dx.$

4422. $dx = (x^3 + 3xy^2) dt, dy = 2y^3 dt, dz = 2y^2 z dt.$

4423. $z dy = (z-1) dx, dx = (y-x) dz.$

4424. $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$

4425. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

4426. $\frac{dx}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \frac{dy}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \frac{dz}{dt} = x - y + 1.$

4427. $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$

4428. $\frac{dx}{y(x+y)} = \frac{-dy}{x(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$

4429. $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)}; z = -1, y = 1 \text{ при } x = 0.$

В следующих двух задачах использовать замечание: если $a^2 + b^2 = c^2$, то можно положить $a = c \cos \varphi$, $b = c \sin \varphi$.

4430. $x dy - y dx = s ds$, $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

4431. $dx^2 + dy^2 = a^2 dt^2$, $(d^2x)^2 + (d^2y)^2 = b^2 dt^4$.

Систему можно сводить к уравнениям высшего порядка, применяя исключение переменных и дифференцирование.

ПРИМЕР 6. В системе

$$x' = x + y + z + t, \quad y' = 3x - y + z + t, \quad z' = 2x + 2y - z, \quad (10.3)$$

где t — независимая переменная, из первого уравнения имеем: $z = x' - x - y - t$. Подставляя это в два других уравнения, получаем:

$$y' = x' + 2x - 2y,$$

$$y' = x'' - 3x - 3y - t - 1.$$

Вычитая, приходим к равенству: $x'' - x' - 5x - y - t - 1 = 0$. Отсюда $y = x'' - x' - 5x - t - 1$. Подставляя это в равенство $y' = x' + 2x - 2y$, имеем:

$$x''' + x'' - 8x' - 12x = 2t + 3.$$

Интегрируя это линейное уравнение, находим:

$$x = C_1 e^{3t} + e^{-2t}(C_2 + C_3 t) - \frac{t}{6} - \frac{5}{36}.$$

После этого y и z находятся без всякого интегрирования из равенств

$$y = x'' - x' - 5x - t - 1, \quad z = x' - x - y - t.$$

ПРИМЕР 7. Ту же систему можно решить и иным, более симметричным, путем. Умножая и складывая уравнения (10.3), получаем:

$$ax' + by' + cz' = (a + 3b + 2c)x + (a - b + 2c)y + (a + b - c)z + (a + b)t. \quad (10.4)$$

Коэффициенты a , b и c определим из равенств:

$$a + 3b + 2c = \lambda a, \quad a - b + 2c = \lambda b, \quad a + b - c = \lambda c,$$

что возможно, если равен нулю определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 2 \\ 1 & -1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

После этого уравнение (10.4) переписывается так:

$$(ax + by + cz)' = \lambda(ax + by + cz) + (a + b)t.$$

Отсюда следует равенство:

$$ax + by + cz = Ce^{\lambda t} - \frac{a+b}{\lambda}t - \frac{a+b}{\lambda^2}. \quad (10.5)$$

Уравнение $D = 0$ дает значения λ : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. При $\lambda = 3$ имеем $\frac{a}{14} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$. Можем положить $a = 14$, $b = 6$, $c = 5$. При $\lambda = -2$ можем положить $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Из уравнения (10.5) получаем два интеграла системы:

$$14x + 6y + 5z = C_1 e^{3t} - \frac{20}{3}t - \frac{20}{9},$$

$$x - y = C_2 e^{-2t}.$$

Определив отсюда x и y и подставив в уравнения системы, получим для z линейное уравнение первого порядка.

Решить системы уравнений, выделив, где это указано, решение, удовлетворяющее начальным данным.

4432. $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$, $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$; $y = z = 1$ при $x = 0$.

4433. $\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$; $x = y = 1$ при $t = 0$.

4434. $\frac{dx}{dt} = z + y - x$, $\frac{dy}{dt} = z + x - y$, $\frac{dz}{dt} = x + y + z$; $x = 1$, $y = z = 0$ при $t = 0$.

4435. $\frac{dx}{dt} = y + z$, $\frac{dy}{dt} = z + x$, $\frac{dz}{dt} = x + y$; $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$ при $t = 0$.

4436. $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 2z$, $3\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = y + 9z$.

4437. $\frac{dx}{dt} = z - y$, $\frac{dy}{dt} = z$, $\frac{dz}{dt} = z - x$.

4438. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$.

4439. $\frac{dx}{dt} = y - z$, $\frac{dy}{dt} = z - 2x$, $\frac{dz}{dt} = 2x - y$.

4440. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} - 2m^2x = 0$.

4441. $\frac{d^2x}{dt^2} = 3(y - x - z)$, $\frac{d^2y}{dt^2} = x - y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -z$.

4442. $\frac{dx}{dt} = -x + y + z$, $\frac{dy}{dt} = x - y + z$, $\frac{dz}{dt} = x + y - z$.

4443. $\frac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z$, $\frac{d^2y}{dt^2} = x - y + z$, $\frac{d^2z}{dt^2} = x + y - z$.

4444. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3y + 4z - 3$, $\frac{d^2z}{dx^2} + y + z - 5 = 0$.

4445. $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}$.

4446. $x' + 5x - 2y = e^t$, $y' - x + 6y = e^{2t}$.

4447. $y' = 3z - y$, $z' = z + y + e^{ax}$.

4448. $x' = 2x + 4y + \cos t$, $y' + x + 2y = \sin t$.

4449. $y'' + y' + z'' - z = e^x$, $y' + 2y - z' + z = e^{-x}$.

4450. $y' - y + z = 3x^2$, $z' + 4y + 2z = 2 + 8x$.

4451. $x^2y'' + xz' + y + z = x + 1$, $x^2z'' + xy' - y - z = -x - 1$.

4452. $x' + n^2y = \cos nt$, $y' + n^2x = \sin nt$.

4453. $x^2 y' + z = x^2, z' + y = x.$

4454. $y' + z = 1, x^2 z' + 2y = x^2 \ln x.$

4455. $tx'' + 2x' + tx = 0, ty' + 2y - tx' = 0.$

4456. $tx' = t - 2x, ty' = t(x + y) + 2x - t.$

4457. Решить систему Лиувилля:

$$9x'' + 8(x - 3 \cos t(x \cos t + y \sin t)) = 0,$$

$$9y'' + 8(y - 3 \sin t(x \cos t + y \sin t)) = 0,$$

введя переменные $u = x \cos t + y \sin t, v = x \sin t - y \cos t.$

4458. Доказать, что интегрирование системы Гессе:

$$x' = X + xT, \quad y' = Y + yT, \quad z' = Z + zT,$$

где X, Y, Z и T — линейные формы от переменных x, y и z , подстановками

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}$$

сводится к интегрированию системы линейных однородных уравнений.

Интегрировать с помощью приема Гессе системы:

4459. $\frac{dx}{dt} = y + xz, \frac{dy}{dt} = x + yz, \frac{dz}{dt} = x + z^2.$

4460. $\frac{dx}{dt} = x + x(x + y), \frac{dy}{dt} = z + y(x + y), \frac{dz}{dt} = y + z(x + y).$

При решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами полезно применять символический метод. При этом вводят символический множитель D , заменяющий действие дифференцирования, и пишут, например,

$$(D^2 + 3D + 2)u$$

вместо $u'' + 3u' + 2u$. Для таких символических множителей применимы правила обыкновенной алгебры. При этом, например, тождество

$$(D + 1)(D + 2) = D^2 + 3D + 2$$

эквивалентно равенству $(u' + 2u)' + (u' + 2u) = u'' + 3u' + 2u$.

Если даны два уравнения:

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x + \alpha_1 y'' + \beta_1 y' + \gamma_1 y = 0,$$

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x + \alpha_1 y'' + \beta_1 y' + \gamma_1 y = f(t),$$

где t — независимая переменная, то их можно переписать в таком виде:

$$(aD^2 + bD + c)x + (a_1D^2 + \beta_1D + \gamma_1)y = 0,$$

$$(\alpha D^2 + \beta D + \gamma)x + (\alpha_1 D^2 + \beta_1 D + \gamma_1)y = f(t).$$

Чтобы удовлетворить первому уравнению, достаточно положить:

$$x = (a_1 D^2 + b_1 D + c_1)u, \quad y = -(aD^2 + bD + c)u,$$

где u — неизвестная функция. После этого второе уравнение переходит в такое:

$$\begin{aligned} & ((\alpha D^2 + \beta D + \gamma)(a_1 D^2 + b_1 D + c_1) - \\ & - (\alpha_1 D^2 + \beta_1 D + \gamma_1)(aD^2 + bD + c))u = f(t). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и заменив степени D соответствующими производными, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами для u . Решив его, найдем величины x и y по формулам:

$$x = a_1 u'' + b_1 u' + c_1 u, \quad y = -(au'' + bu' + cu).$$

Такой же метод применим и для большого числа уравнений. Так, в уравнениях:

$$\begin{aligned} \varphi(D)x + \psi(D)y + \omega(D)z &= 0, \\ \varphi_1(D)x + \psi_1(D)y + \omega_1(D)z &= 0, \\ \varphi_2(D)x + \psi_2(D)y + \omega_2(D)z &= f(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(D)$, $\psi(D)$, $\dots$, $\omega_2(D)$ — полиномы относительно D , можем удовлетворить первым двум уравнениям, положив:

$$\begin{aligned} x &= (\psi(D)\omega_1(D) - \psi_1(D)\omega(D))u, \\ y &= (\omega\varphi_1 - \omega_1\varphi)u, \\ z &= (\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi)u. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Подставляя это в третье уравнение, получим:

$$(\varphi\psi_1\omega_2 - \varphi\psi_2\omega_1 + \varphi_1\psi_2\omega - \varphi_1\psi\omega_2 + \varphi_2\psi\omega_1 - \varphi_2\psi_1\omega)u = f(t).$$

Раскрыв скобки и заменив степени D соответствующими производными, получим линейное уравнение для u с постоянными коэффициентами. Решив его, из равенств (10.6) найдем x , y и z .

Более подробное изложение указанного приема дано в книге академика В.И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II.

Решить символическим методом системы уравнений:

$$4461. \quad \begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + 2y = 0, \\ x'' + x' + 2x + y'' + 3y = 4t + 5. \end{cases}$$

$$4462. \quad \begin{cases} x'' - x' + 6x + y'' - y' + 2y = 0, \\ 2x'' + x' + 3x + y'' + y = t - 1. \end{cases}$$

$$4463. \quad \begin{cases} x''' - x'' - x' + x - y'' + 3y' - 2y + z' - z = 0, \\ 3x'' - 6x' + 3x - y'' + 4y' - 3y + 2z' - 2z = 0, \\ x'' - 2x' + x + y' - y + z' - z = 0. \end{cases}$$

$$4464. \quad \begin{cases} 5x'' + 5x + 3y'' + 3y + 8z'' + 8z = 0, \\ x'' + 4x + 3y'' + 12y + 3z'' + 12z = 0, \\ x'' - 2x - 2y'' - 11y - 9z = 0. \end{cases}$$

Уравнения движения материальной точки массы m под действием силы, проекции которой на оси равны X, Y, Z имеют вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

где x, y, z — координаты движущейся точки.

4465. Найти траекторию движущейся точки, если сила, действующая на нее, направлена по перпендикуляру к оси Oz и пропорциональна расстоянию от точки до этой оси.

4466. Если проекции силы на ось равны производным от некоторой функции u по соответствующим координатам: $X = \frac{\partial u}{\partial x}, Y = \frac{\partial u}{\partial y}, Z = \frac{\partial u}{\partial z}$, то справедливо равенство $\frac{mv^2}{2} = u + C$, где u — скорость точки, равная $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Доказать.

4467. Если линия действия силы проходит через ось Oz , то проекция радиус-вектора на xOy в равные времена описывает равные площади. Доказать.

4468. Определить движение тела, падающего с высоты h в среде, сопротивление которой пропорционально v^n , где v — скорость тела. Начальная скорость v_0 наклонена к горизонту под углом α_0 .

4469. Если V — потенциал электрического поля, а $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, то уравнение движения наэлектризованной частицы в векторной форме таково:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \operatorname{grad} V + e \mathbf{H} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt}.$$

Найти движение частицы, считая $\operatorname{grad} V$ и $\mathbf{H}$ постоянными.

4470. Та же задача, что и предыдущая, но

$$V = \text{const}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \frac{k}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

§ 10.19

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Задачи этого параграфа основаны на теореме:

Общий интеграл уравнения

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X_{n+1}$$

получается из уравнения

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

где $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ — данные функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и z , F — произвольная дифференцируемая функция, а равенства

$$u_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_1, \dots, u_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = C_n$$

дают полную систему независимых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{X_{n+1}}.$$

Найти общий интеграл уравнений:

4471. $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y.$

4472. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0.$

4473. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x.$

4474. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

4475. $x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - \sqrt{R^2 - z^2}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

4476. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

4477. $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axz.$

4478. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 - z^2}.$

4479. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$

4480. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + z^2.$

4481. $xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2.$

4482. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

4483. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2.$

4484. $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0.$

4485. $(xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(y^3 - x^3).$

4486. $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2 z = 0.$

- 4487.** $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$.
4488. $(y + x) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
4489. $(x + y) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.
4490. $(z + y - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y - z$.
4491. $(z + x)x \frac{\partial z}{\partial x} + (z + y)y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - xy$.
4492. $(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - e^{x+y}$.
4493. $x \frac{\partial u}{\partial x} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = y + z$.
4494. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.
4495. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$.
4496. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$.
4497. $xy \frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1 - y^2} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z}\right) = axy \frac{\partial u}{\partial z}$.
4498. $(s - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (s - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (s - z) \frac{\partial u}{\partial z} = s - u$; $s = x + y + z + u$.
4499. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.
4500. $\frac{\partial z}{\partial x} - a \frac{\partial z}{\partial y} = e^{mx} \cos py$.
4501. $\frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.
4502. $\frac{1}{\cos x} \frac{\partial z}{\partial x} + a \frac{\partial z}{\partial y} = z \operatorname{ctg} y$.
4503. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.
4504. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \sqrt{a^2 - z^2}$.
4505. $(y - bz) \frac{\partial z}{\partial x} - (x - az) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$.
4506. Если $u(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(Z - z) = 0$$

— уравнение касательной плоскости. Найти уравнение в частных производных для конических плоскостей, образующие которых проходят через начало координат.

4507. Найти уравнение в частных производных для цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны вектору $P(l, m, n)$.

4508. Проинтегрировать уравнение конических поверхностей $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. С помощью полученного результата найти уравнение конической поверхности, направляющая которой имеет уравнение $x^2 + y^2 = ax$, $z = 1$.

4509. Проинтегрировать уравнение цилиндрических поверхностей и в полученном общем интеграле определить вид произвольной функции так, чтобы поверхность проходила через окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 1$.

4510. Однородные функции измерения n по определению обладают свойством (в случае трех переменных): $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$. По теореме Эйлера для них имеет место равенство: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf$. Доказать обратную теорему: из этого уравнения в частных производных вытекает функциональное свойство однородных функций.

4511. Найти поверхность, проходящую через кривую $xy = a^2$, $z = h$ и удовлетворяющую уравнению

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

4512. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

и проходящую через кривую $x = a$, $2ayz = a^2 + 2$.

4513. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$ и проходящую через кривую $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4514. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $z \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = y - x$ и проходящую через кривую $x = 1$, $z = y^2$.

4515. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$ и проходящую через окружность $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4516. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2 \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \right) = 0$$

и проходящую через окружность $z = h$, $x^2 + y^2 = a^2$.

4517. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом конусы $xy = \alpha z^2$.

4518. Найти уравнение поверхностей, ортогональных к поверхностям $xyz = \alpha$.

4519. Найти поверхность, проходящую через прямую $y = x$, $z = h$ и ортогональную к поверхностям шаров $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x$.

4520. Найти поверхность, проходящую через окружность $z = h$, $x^2 + y^2 = a^2$ и ортогональную к гиперболическим параболоидам $xy = \alpha z$.

4521. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x$, $z = x^3$ и удовлетворяющую уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

4522. Найти асимптотические линии предыдущей поверхности, зная, что асимптотические линии поверхности $f(x, y, z) = 0$ определяются уравнением $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 0$.

4523. Найти решение уравнения $z(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, обращающееся в $z = \sqrt{y}$ при $x = 1$.

4524. Проинтегрировать уравнение $x^n \frac{\partial z}{\partial x} + y^n \frac{\partial z}{\partial y} = z^n$. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению и проходящую через прямую $z = 1$, $x = y\sqrt{2}$. Рассмотреть случаи $n = \pm 1$.

4525. Найти линии кривизны предыдущей поверхности при $n = -1$. Линии кривизны поверхности $z = f(x, y)$ определяются уравнением

$$\frac{(1 + p^2) dx + pq dy}{r dx + s dy} = \frac{pq dx + (1 + q^2) dy}{s dx + t dy},$$

где p, q, r, s, t — соответственно частные производные $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$.

4526. Найти поверхности, удовлетворяющие уравнению

$$2y(2a - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + z^2 - y^2 - 4ax) \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0,$$

и доказать, что они получаются движением кругов.

4527. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$$

и проходящую через эллипс $x = 2z$, $x^2 + y^2 = a^2$. Доказать, что это — линейчатая поверхность, и найти ортогональные траектории ее образующих.

4528. Найти решение уравнения $2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$, заключающее гиперболу $x = a$, $z^2 - y^2 = a^2$.

4529. Проинтегрировать уравнение

$$2 \operatorname{ch} x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \operatorname{sh} x \frac{\partial z}{\partial y} - z \operatorname{sh} x = 0.$$

4530. Найти поверхности, удовлетворяющие предыдущему уравнению и проходящие через линии: а) прямую $x = y = z$; б) параболу $x = 0$, $z^2 = 2m(y - a)$; в) цепную линию $z = 0$, $y = \alpha \operatorname{ch} x$.

4531. Найдя решение уравнения $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$, проходящее через кривую $z = y = 2x^3$, найти ортогональные траектории проекций на xOy его асимптотических линий (см. задачу 4522).

4532. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$(y^2 - x^2 + 2xz) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

и заключающую эллипс $x = 0$, $y^2 + 4z^2 = 4a^2$.

4533. Для предыдущей поверхности найти линии стока, т. е. ортогональные траектории линий уровня или сечений поверхности плоскостями $z = C$.

4534. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2)$, зная, что одно из семейств ее асимптотических линий состоит из характеристических линий.

4535. Найти ортогональные поверхности для семейства поверхностей предыдущей задачи.

4536. Найти поверхность, проходящую через окружность $z = 0$, $x^2 + y^2 = y$ и удовлетворяющую уравнению

$$2yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

4537. Среди функций, удовлетворяющих уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, найти такую, которая удовлетворяет и уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{x^2 + y^2}.$$

4538. Найти поверхности, у которых касательная плоскость в любой точке M пересекает ось Oz в точке, равноудаленной от начала координат и от точки M .

4539. Найти поверхности, у которых касательная плоскость в точке с координатой z пересекает Oz в точке с координатой nz .

4540. Найти решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

в котором $u = z^2$ при $x = y = 0$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 11.1 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ, КАК ПРЕДЕЛ СУММЫ

Конечный интервал (a, b) разбит на n частичных интервалов $n + 1$ числами:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Длины этих интервалов обозначим $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$. Если дана функция $f(x)$, определенная для каждого x в интервале (a, b) , ограниченная в этом интервале, то можно составить сумму произведений любых значений этой функции в частичных интервалах на длины этих интервалов. Эту сумму $\sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta x_\nu$ будем называть суммой Римана. Здесь ξ_ν — какое-нибудь число в сегменте $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, т. е. $x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu$. Если число частичных интервалов $n \rightarrow \infty$ так, что $\max \Delta x_\nu \rightarrow 0$, то для всех непрерывных функций $f(x)$ и обширного класса разрывных функций сумма Римана стремится к пределу, называемому определенным интегралом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_\nu \rightarrow 0} \sum f(\xi_\nu) \Delta x_\nu.$$

Разность $O(\Delta x_\nu)$ между точной нижней границей M_ν и точной верхней границей m_ν функции в интервале Δx_ν называется колебанием функции в интервале Δx_ν . Функции, для которых определенный интеграл в указанном смысле существует, называются интегрируемыми в смысле Римана, или просто интегрируемыми в данном интервале.

Необходимое и достаточное условие того, что $f(x)$ интегрируема в данном интервале, состоит в равенстве:

$$\lim_{\max \Delta x_\nu \rightarrow 0} \sum O_\nu \Delta x_\nu = 0,$$

где $O_\nu = O(\Delta x_\nu)$.

Если вместо чисел $f(\xi_\nu)$ в сумме Римана взять числа M_ν или m_ν , то получатся верхние суммы $\sum M_\nu \Delta x_\nu$ или нижние суммы $\sum m_\nu \Delta x_\nu$. Если при этом составлять новые разбиения интервала (a, b) на частичные путем разделения прежних частичных интервалов, то верхние суммы приближаются к своему пределу, не возрастаая, а нижние — не убывая.

Непрерывная функция $F(x)$, у которой $F'(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, может быть названа неопределенным интегралом $f(x)$. По теореме Барроу–Ньютона:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Найти с помощью определенных интегралов пределы следующих сумм:

$$4541. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}.$$

$$4542. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right).$$

$$4543. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi a}{n} + \frac{2\pi a}{n} + \dots + \frac{(n-1)\pi a}{n} \right).$$

$$4544. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

$$4545. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right).$$

$$4546. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right).$$

$$4547. \text{Найти } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n}}{n}.$$

4548. Найти величину интеграла $\int_0^1 e^x dx$, рассматривая его как предел суммы.

4549. Найти при $b > a > 0$ величину интеграла $\int_a^b x^n dx$, рассматривая его как предел суммы $\sum x_\nu^n \Delta x_\nu$ где значения x_ν идут в геометрической прогрессии. (Ферма.)

4550. Исходя из разложения дроби на простейшие:

$$\frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_{n-1}}, \quad x_\nu = e^{\frac{2\pi\nu i}{n}},$$

получить равенство:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x - e^{i\varphi}} = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| < 1; \\ \frac{2\pi}{x}, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

4551. Исходя из формулы

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right),$$

получить величину интеграла Пуассона:

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x \cos \varphi + x^2) d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| < 1; \\ \pi \ln(x^2), & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

4552. Из разложения дроби на простейшие:

$$\frac{2nx^{2n-1}}{x^{2n} - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2x - 2 \cos \frac{k\pi}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1}$$

получить равенство:

$$\int_0^{\pi} \frac{x - \cos \varphi}{x^2 - 2x \cos \varphi + 1} d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| < 1; \\ \frac{\pi}{x}, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

4553. Функция $[u]$ равна целой части переменного u , т. е, такому целому числу m , что $m \leq u < m + 1$. В таком случае

$$\begin{cases} [2u] - 2[u] = 0, & \text{если } u - m < \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} \leq u - m < 1. \end{cases}$$

Доказать, что для функции $f(x) = \left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]$ в интервале $(0, 1)$ справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^n O_{\nu} \Delta x_{\nu} < 3\sqrt{\max \Delta x_{\nu}},$$

и, следовательно, функция $f(x)$ — интегрируема в смысле Римана.

4554. Функция $f(x)$ определена равенствами:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ f(x) = \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

где p и q — взаимно простые целые числа. Доказать, что для интервала $(0, 1)$ справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^n O_{\nu} \Delta x_{\nu} < 2\sqrt{\max \Delta x_{\nu}}.$$

Таким образом, $f(x)$ интегрируема в интервале $(0, 1)$, хотя она имеет разрыв в каждой точке с рациональной абсциссой.

4555. Функция $f(x)$ определена равенствами $f(x) = 0$ при x иррациональном и $f(x) = 1$ при x рациональном. Доказать, что она неинтегрируема в любом интервале.

§ 11.2

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теорема (Первая теорема о среднем). Если $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , а $\varphi(x)$ знакопостоянна в том же интервале, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c) \int_a^b \varphi(x)dx,$$

где c — некоторое промежуточное значение аргумента между a и b .

В приложениях зачастую бывает еще удобней теорема: если при $a < x < b$, справедливы неравенства:

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$$

При этом знак равенства исключается, если в некоторой части интервала разность $f(x) - \varphi(x)$ или соответственно $\psi(x) - f(x)$ остается больше некоторого положительного числа h .

Теорема (Вторая теорема о среднем). Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции, из которых $\varphi(x)$ монотонна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x)dx,$$

где ξ — некоторое промежуточное значение аргумента между a и b .

Если $\varphi(a) > \varphi(b) \geq 0$, то можно написать:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x)dx, \quad a < \xi < b.$$

Доказать следующие формулы:

$$4556. \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx < \frac{1}{20}.$$

$$4557. \quad 0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x} dx}{20+x} < 0,01.$$

$$4558. \quad -\frac{\pi}{4} < \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{4+x^2} dx < \frac{\pi}{4}.$$

$$4559. \quad 0 < \int_2^{\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{4e^4}.$$

$$4560. \quad 0 < \int_{10}^{20} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1} < \frac{1}{20}.$$

$$4561. \quad \frac{1}{19} < \int_1^{\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}.$$

$$4562. \quad 1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx < 1 + \frac{1}{42}.$$

$$4563. \quad \frac{20}{19} < \int_0^{\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx < \frac{20}{19} + \frac{1}{20}.$$

$$4564. \quad 0 < \int_1^{\infty} e^{-x^n} dx < \frac{1}{ne}; \quad n > 1.$$

$$4565. \quad 1 - \frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n} dx < 1; \quad n > 1.$$

$$4566. \quad 1 - \frac{1}{n} < \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx < 1 + \frac{1}{ne}.$$

4567. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{100+x} = \frac{1}{100} - \frac{x}{100(100+x)},$$

доказать равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{100+x} = 0,01 - 0,0001\theta; \quad 0 < \theta < 1.$$

4568. Пользуясь тождеством

$$\frac{x^3}{x^4+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x(x^4+x+1)},$$

доказать равенство:

$$\int_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4+x+1} = \ln 2 - \frac{\theta}{3 \cdot 10^6}; \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказать равенства:

$$4569. \quad \int_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \frac{\theta}{100\pi}; \quad |\theta| < 1.$$

$$4570. \quad \int_a^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2\theta}{\sqrt{a}}; \quad |\theta| < 1; \quad b > a > 0.$$

$$4571. \quad \int_{100}^{200} \sin \pi x^2 dx = \frac{\theta}{200\pi}; \quad 0 < \theta < 1.$$

$$4572. \quad \int_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x} dx = \frac{0,005}{\pi} \frac{2\theta}{\pi^3 \cdot 10^6}; \quad |\theta| < 1.$$

Интегралы, имеющие один из видов:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

определяются соответственно предельными переходами:

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-m}^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{-m}^n f(x) dx. \end{aligned}$$

При этом предполагается, что соответствующий предел существует. В противном случае интегралы, стоящие в левых частях написанных равенств, смысла не имеют и называются расходящимися. Необходимое и достаточное условие сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$ состоит в том, что при любом заданном положительном ε неравенство $|\int_{n_1}^{n_2} f(x) dx| < \varepsilon$ выполняется, как только числа n_1 и n_2 больше некоторого $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Аналогичные критерии имеются и для интегралов двух других видов.

Если функция $f(x)$ в интервале (a, b) обращается в бесконечность, то $\int_a^b f(x) dx$, как предел суммы Римана, тоже не имеет смысла. Смысл может быть придан такому интегралу дополнительным предельным переходом. Так, если $f(x)$ обращается в ∞ при $x = c$, то по определению:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{c-\eta} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c-\delta}^b f(x) dx, \quad (*)$$

предполагая, что эти пределы существуют. В противном случае интеграл в левой части расходится. Необходимое и достаточное условие сходимости состоит в том, что каждый из интегралов

$$\int_{c-\eta_1}^{c-\eta_2} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\delta_1}^{c+\delta_2} f(x) dx$$

по абсолютной величине должен быть меньше произвольно задаваемого положительного постоянного ε , если положительные числа η_1 , η_2 , δ_1 , δ_2 , остаются меньше соответствующей малой величины $h = h(\varepsilon)$.

В обоих рассмотренных случаях два вида сходимости особенно важны. Интеграл от функции $f(x)$ называется абсолютно сходящимся, если интеграл от $|f(x)|$ сходится. Интеграл $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ называется равномерно сходящимся относительно y , если абсолютное значение интеграла $\int_n^{\infty} f(x, y) dx$ меньше чем ε при $n > n_0(\varepsilon)$, где величина $n_0(\varepsilon)$ может быть указана одна и та же для всех рассматриваемых значений параметра y .

Если несобственный интеграл расходится, то иногда все же можно говорить о его главном значении

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Именно, под главным значением (valeur principale), если оно существует, понимают предел (если он существует) подобный выше приведенному, но при симметрично выключенных особых точках или бесконечности. Таким образом, в формуле (*) надо считать $\eta = \delta$, т. е.

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\eta} f(x) dx + \int_{c+\eta}^b f(x) dx \right).$$

Точно так же:

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$

Исследовать сходимость следующих интегралов:

$$4573. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1}.$$

$$4574. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + x + 1}.$$

$$4575. \int_0^{\infty} \sin ax dx.$$

$$4576. \int_0^{\infty} \sin x^n dx, \quad n > 0.$$

$$4577. \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

$$4578. \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma} dx}{x^2 + 1}.$$

$$4579. \int_0^{\infty} x^{\sigma} \frac{x+2}{x+1} dx.$$

$$4580. \int_0^{\infty} x^m \sin x^n dx.$$

$$4581. \int_0^1 x^m (1 - x^2)^n dx.$$

$$4582. \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n dx.$$

$$4583. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$4584. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^n}.$$

$$4585. \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$4586. \int_0^{\infty} x^x e^{-x^n} dx.$$

$$4587. \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx.$$

$$4588. \int_0^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

4589. Доказать, что при $a \geq 0$ интегралы $\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax} dx$ и $\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax^2} dx$ равномерно сходятся, если интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ сходится.

4590. Доказать, что $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(x)\varphi(x, a) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$, если интеграл в правой части имеет смысл, а $\varphi(x, a)$ удовлетворяет условиям:

- а) $\varphi(x, a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$ равномерно относительно x в любом конечном интервале $0 < x < N$;
- б) При всех a , достаточно близких к нулю, $\varphi(x, a)$ монотонна относительно x и по абсолютной величине не превосходит некоторой постоянной.

4591. Интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ — абсолютно сходящийся. Доказать, что $\int_0^{\infty} f(x) \sin nx dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

4592. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 x^{n-1} (1-x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{n-1} (1-x) dx$$

4593. Доказать, что $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$, если $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$ равномерно относительно x .

4594. Доказать, что $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$, если $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$ равномерно относительно x в любом конечном интервале $(0, n)$ и притом $|f(x, y)| < F(x)$, а $\int_0^{\infty} F(x) dx$ — сходящийся.

4595. Доказать, что если интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

4596. Доказать, что $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, предполагая, что интеграл в левой части и предел в правой части имеют смысл.

4597. В переписке Эйлера и Лагранжа интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,$$

равный $\ln \frac{b}{a}$ при $b > a > 0$, преобразуется так:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx}}{x} dx.$$

В правой части первый интеграл преобразуется подстановкой $ax = t$, а второй — подстановкой $bx = t$. После этого получается:

$$\ln \frac{b}{a} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

Где причина полученного абсурда?

§ 11.3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ И ПОДСТАНОВКАМИ

Формула замены переменных имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

При этом подразумевается, что при изменении t от α до β переменная $x = \varphi(t)$ монотонно изменяется от a до b . Удачное применение подстановок во многих случаях позволяет значительно упростить нахождение определенных интегралов с помощью неопределенных. Приведем несколько характерных примеров:

ПРИМЕРЫ:

1. $A = \int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$, где n — целое. Полагая $x = \pi - u$, имеем:

$$A = - \int_\pi^0 \frac{\sin(2\pi n - 2nu)}{\sin(\pi - u)} du = - \int_0^\pi \frac{\sin 2nu}{\sin u} du = -A.$$

Отсюда: $2A = 0$, $A = 0$.

2. $B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$. При $x = \operatorname{tg} \varphi$ имеем:

$$B = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln \cos \varphi d\varphi.$$

Полагая в последнем интеграле $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$, находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln \cos \varphi d\varphi &= - \int_{\pi/4}^0 \ln \left(\cos \psi \cos \frac{\pi}{4} + \sin \psi \sin \frac{\pi}{4} \right) d\psi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln \left((\cos \psi + \sin \psi) \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\psi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi - \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi - \frac{\pi \ln 2}{8}. \end{aligned}$$

Подставляя в равенство для B , получаем:

$$B = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

3. $C = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi$. Полагая $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, имеем:

$$C = - \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) d\psi = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

4. $D = \int_0^\infty \frac{Ax^2+B}{x^4+ax^2+1} dx$, где $a > -2$. Полагая $x = \frac{1}{t}$ и переименовывая потом t в x , получаем:

$$D = - \int_\infty^0 \frac{\frac{A}{t^2} + B}{\frac{1}{t^4} + \frac{a}{t^2} + 1} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_0^\infty \frac{A + Bx^2}{1 + ax^2 + x^4} dx.$$

Беря полусумму этих равенств, находим:

$$D = \frac{A+B}{2} \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+ax^2+1} dx = \frac{A+B}{2} \int_0^\infty \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{x^2 + \frac{1}{x^2} + a}.$$

Применяя подстановку $x - \frac{1}{x} = t$, окончательно получаем:

$$D = \frac{A+B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a + 2} = \frac{A+B}{2\sqrt{a+2}} \pi.$$

Таким же образом, но после предварительной подстановки $x = u\sqrt[4]{b}$, получаем равенство

$$D = \int_0^\infty \frac{Ax^2+B}{x^4+ax^2+b} dx = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{b}} \frac{A\sqrt{b}+B}{\sqrt{a+2\sqrt{b}}};$$

$$b > 0, \quad a + 2\sqrt{b} > 0.$$

Следующие интегралы находятся сравнительно легко, простыми подстановками и приемами, подобными предыдущим.

Доказать равенства:

$$4598. \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$4599. \quad \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$4600. \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}; \quad a > 1.$$

$$4601. \quad \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

$$4602. \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} x dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$$

$$4603. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^4}{16}.$$

$$4604. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \quad |b| < a.$$

$$4605. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} = \frac{2\pi}{2|\sin \alpha|}.$$

$$4606. \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2a \cos x + a^2}} = \begin{cases} 2 & \text{при } |a| \leq 1, \\ \frac{2}{|a|} & \text{при } |a| > 1. \end{cases}$$

$$4607. \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{1 + 2a \cos x + a^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } |a| < 1, \\ \frac{\pi}{2a^2} & \text{при } |a| > 1. \end{cases}$$

$$4608. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}};$$

$$|a| < 1, \quad |b| < 1, \quad ab > 0.$$

$$4609. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0.$$

$$4610. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad a > 0.$$

$$4611. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab}.$$

$$4612. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}.$$

$$4613. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

доказать равенства (m и n — целые положительные):

$$4614. \int_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$4615. \int_0^{\pi} \frac{\cos(4n+1)x}{\cos x} dx = \pi.$$

$$4616. \int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2n; \\ \pi & \text{при } m = 2n + 1. \end{cases}$$

$$4617. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

$$4618. \int_0^{\pi} \cos^n x \sin nx dx = 0.$$

$$4619. \int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m - n \text{ нечетное;} \\ \frac{\pi}{2^m} C_m^{\frac{m-n}{2}}, & \text{если } m - n \text{ четное;} \end{cases}$$

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}; \quad m \geq k.$$

$$4620. \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos(2m-1)x}{\cos x} dx = \frac{(-1)^{m+1}}{a} + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{m+n-1} a}{a^2 + 4n^2};$$

$$a > 0.$$

В следующих задачах следует применять формулу многократного интегрирования по частям, которую можно написать в таком виде:

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} + \dots +$$

$$+ (-1)^{\nu} u^{(\nu)} v^{(n-\nu-1)} + (-1)^{\nu+1} \int u^{(\nu+1)} v^{(n-\nu-1)} dx.$$

4621. Доказать равенства:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx = 0, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx = 0,$$

где $f(x)$ — произвольный полином степени $n-1$, а полиномы Лежандра $P_n(x)$, Лагерра $L_n(x)$ и Эрмита—Чебышева $H_n(x)$ определяются равенствами:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}; \quad L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n};$$

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

4622. Найти при целом $n > 0$ величину интеграла Эйлера

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

4623. Найти при целых $p > 0$ и $q > 0$ величину интеграла Эйлера

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

§ 11.4

НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ ПРИВЕДЕНИЯ

Для интегралов, зависящих от целого положительного параметра, иногда удается найти формулу приведения, выражающую его через интеграл того же вида, но с меньшим значением параметра. Если интеграл при нулевом значении параметра удастся найти, то и данный интеграл может быть найден.

Так, например, для гамма-функции Эйлера $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$, $n > 0$, интегрируя по частям, находим:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n} e^{-x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma(n+1).$$

Отсюда $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Применяя эту формулу несколько раз, получаем равенство

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Найти величины интегралов (m и n — целые, положительные):

$$4624. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx.$$

$$4625. \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx.$$

$$4626. \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

$$4627. \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \quad AC-B^2 > 0.$$

$$4628. \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx.$$

$$4629. \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx.$$

$$4630. \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x dx.$$

4631. С помощью известного равенства $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ найти величину интеграла $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx$.

4632. Для полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита—Чебышева, упомянутых в задаче 4621, доказать равенства:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2,$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Найти интегралы (m и n целые, положительные).

$$4633. \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$$

$$4636. \int_0^{\pi/4} \frac{\cos mx}{\cos x} dx = u_m.$$

$$4634. \int_0^\infty x^n e^{-x} \sin x dx.$$

$$4637. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2m-1)x}{\cos x} dx.$$

$$4635. \int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x dx.$$

Замечание. В двух последних задачах полезно сложить два интеграла, у которых m отличается на одну или две единицу. В двух следующих полезно вычесть два интеграла, у которых m отличается на две единицы, и применить дважды интегрирование по частям.

$$4638. \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n} x dx, \quad a > 0.$$

$$4639. \int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n+1} x dx, \quad a > 0.$$

$$4640. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-mx} \cos^{2n+1} x \, dx.$$

$$4641. \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} \, dx, \quad a > 0.$$

4642. Доказать равенство:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin mx}{\sin x} \, dx = \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^1 \frac{x^m \, dx}{1+x^2},$$

проверив его при $m = 0$ и $m = 1$ и установив, что при возрастании m на две единицы обе части равенства изменяются на одинаковую величину.

4643. Найти интеграл $U_m = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2mx \, dx$, установив линейное соотношение между U_m и U_{m-1} .

§ 11.5

ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Не всякий ряд можно интегрировать почленно. Иными словами, равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b (u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots) \, dx &= \\ &= \int_a^b u_1(x) \, dx + \int_a^b u_2(x) \, dx + \int_a^b u_3(x) \, dx + \dots \end{aligned}$$

не всегда верно. Так, например, если положить

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos x, & u_2(x) &= (2 \sin x - 1) \cos x, \\ u_3(x) &= (3 \sin^2 x - 2 \sin x) \cos x, \dots \end{aligned}$$

и, вообще,

$$u_n(x) = (n \sin^{n-1} x - (n-1) \sin^{n-2} x) \cos x,$$

то $S = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$ равна нулю при любом x , как в этом нетрудно убедиться, изучая S_n . Поэтому в данном случае имеем:

$$\int_0^{\pi/2} (u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots) \, dx = \int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx = 0.$$

С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^{\pi/2} u_1(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1,$$

при $n > 1$ имеем:

$$\int_0^{\pi/2} u_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} (n \sin^{n-1} x - (n-1) \sin^{n-2} x) \cos x dx = 1 - 1 = 0.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} u_1(x) dx + \int_0^{\pi/2} u_2(x) dx + \int_0^{\pi/2} u_3(x) dx + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Таким образом, в данном случае равенство, приведенное в начале параграфа, неверно.

Существует теорема, гарантирующая законность интегрирования почленно: если в сегменте $[a, b]$ ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$ сходится равномерно, то его можно интегрировать почленно. Отсюда в частности, следует, что ряд, расположенный по степеням какой-нибудь переменной, можно интегрировать почленно, если при изменении x в сегменте интегрирования указанная переменная остается внутри области сходимости степенного ряда. Общий метод для выяснения законности интегрирования почленно состоит в том, что сумму ряда $S(x)$ представляют в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда. Необходимое и достаточное условие законности интегрирования в пределах от a до b состоит в том, что $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это условие пригодно и в случае бесконечных пределов интегрирования.

Следующие задачи решаются с помощью разложения в ряд по степеням некоторого переменного подынтегральной функции или одного из ее множителей.

Вычислить величины интегралов с точностью до 10^{-5} :

4644. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

4645. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

4646. $\int_5^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$

4647. $\int_{100}^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$

4648. $\int_3^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}.$

4649. $\int_0^{1/2} \ln \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{x^2}.$

$$4650. \int_{1/2}^{3/2} \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

4651. Выразить рядом, расположенным по степеням эксцентриситета, длину контура эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

4652. Скорость тяжелой точки, соскользнувшей по какой-нибудь кривой с высоты h на высоту y , равна $\sqrt{2g(h-y)}$. Поэтому период колебания маятника, длины l , совершающего колебания с углом максимального отклонения α , выражается формулой

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})}}.$$

Отсюда, после подстановки $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi$, получается:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sigma^2 \sin^2 \psi}}; \quad \sigma = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Разлагая по степеням σ и интегрируя почленно, получим формулу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right).$$

Следующие задачи основаны на знании трех рядов Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Найти величины интегралов:

$$4653. \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2}.$$

$$4654. \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x}.$$

$$4655. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$4656. \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

$$4660. \int_0^{\pi/2} (\ln \operatorname{tg} x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/4} (\ln \operatorname{tg} x)^2 dx.$$

4661. Доказать, что

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$$

4662. Доказать равенство, справедливое при любом a :

$$2 \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ax dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

4663. Пользуясь формулой $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$, доказать равенство:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} a^{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

(Лаплас.)

4664. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{a^{2n}} + \frac{x^{2n}}{a^{2n}(a+x)},$$

доказать формулу

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{a+x} dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots - \frac{(2n-1)!}{a^{2n}} + \frac{\theta \cdot (2n)!}{a^{2n+1}}; \quad 0 < \theta < 1,$$

$$4657. \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1}.$$

$$4658. \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1}.$$

$$4659. \int_0^\infty \frac{x dx}{e^{ax} - e^{-ax}}.$$

весьма удобную для вычисления интегралов в левой части, если a положительно и велико.

4665. Формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа для функции $(1+x)^{-m}$ пригодна при любом $x > -1$. Пользуясь этим, доказать равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^m} dx = e^{-a} \left(\frac{1}{a^m} - \frac{m}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{a^{m+2}} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{a^{m+n}} + \theta R \right),$$

где $0 < \theta < 1$, $R = (-1)^{n+1} \frac{m(m+1) \dots (m+n)}{a^{m+n+1}}$; $m > 0$, $a > 0$.

4666. Доказать равенство:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-a^2}}{2a} \left(1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2a^2)^2} - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2a^2)^n} + \theta R \right), \\ 0 < \theta < 1, \quad a > 0, \quad R = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(2a^2)^{n+1}}.$$

В ряде вопросов имеют большое значение тригонометрические ряды, имеющие вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Имеет место

Теорема. Если сумма тригонометрического ряда есть функция $\varphi(x)$, интегрируемая в смысле Римана, то равенство

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (*)$$

можно интегрировать почленно, хотя бы ряд в правой части и не был равномерно сходящимся.

Достоин внимания и другое обстоятельство. Умножая равенство (*) на другое равенство того же типа:

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

можем формально написать:

$$\varphi(x)\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

Двойной ряд в правой части не обязан быть сходящимся. Тем не менее это формальное равенство в целом интервале $(0, 2\pi)$ можно интегрировать почленно. При этом получится верное равенство:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\psi(x) dx = 2\pi a_0 \alpha_0 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

В частности, при $\psi(x) = \varphi(x)$ имеем формулу (равенство Парсеваля):

$$\int_0^{2\pi} \varphi^2(x) dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Следующие задачи основаны на разложении в ряды трех функций:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} &= \sin x + a \sin 2x + a^2 \sin 3x + \dots, \\ \ln(1 - 2a \cos x + a^2) &= -2 \left(a \cos x + \frac{a^2}{2} \cos 2x + \frac{a^3}{3} \cos 3x + \dots \right), \\ \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx. \end{aligned}$$

В этих разложениях предполагается, что $|a| < 1$.

Найти величины следующих интегралов (m и n — целые, положительные):

$$4667. \int_0^{\pi} \frac{\cos mx dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad a \neq \pm 1.$$

$$4668. \int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$$

$$4669. \int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x} dx, \quad |a| < 1. \quad (\text{Положить } a = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}.)$$

$$4670. \int_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x} x dx, \quad |a| < 1.$$

$$4671. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad |a| < 1.$$

$$4672. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$4673. \int_0^{2\pi} \sin nx \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$4674. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) \cos mx dx.$$

$$4675. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

$$4676. \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx.$$

$$4677. \int_0^{\pi/2} \cos 2mx \ln \sin x dx.$$

$$4678. \int_0^{\pi} \frac{(1 - a^2)(1 - b^2) dx}{(1 - 2a \cos nx + a^2)(1 - 2b \cos mx + b^2)},$$

m и n — целые, $|a| < 1$, $|b| < 1$.

$$4679. \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - 2a \cos x + a^2)(1 - 2b \cos x + b^2)};$$

$|a| < 1$, $|b| < 1$.

$$4680. \int_0^{\pi/2} \ln^2 \sin x \, dx.$$

В следующих трех задачах полезно применить два интеграла Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \operatorname{sign} a.$$

$$4681. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2a \cos mx + a^2)}; \quad |a| < 1.$$

$$4682. \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{(1+x^2)(1+2a \cos mx + a^2)} \, dx; \quad |a| < 1.$$

$$4683. \int_0^{\infty} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) \frac{dx}{1+x^2} \, dx; \quad |a| < 1.$$

Кроме разложений степенных и тригонометрических, в некоторых случаях применяются разложения в ряды рациональных дробей. Из формул такого рода отметим следующие:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n\pi)^2};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2};$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - \pi^2} + \frac{2x}{x^2 - 4\pi^2} - \frac{2x}{x^2 - 9\pi^2} + \dots;$$

$$\frac{1}{\cos x} = -\frac{\pi}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} + \frac{3\pi}{x^2 - \frac{9\pi^2}{4}} - \frac{5\pi}{x^2 - \frac{25\pi^2}{4}} + \dots;$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2 n^2};$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + \pi^2} + \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2} - \frac{2x}{x^2 + 9\pi^2} + \dots;$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2};$$

С помощью указанных формул доказываются следующие равенства:

$$4684. \quad 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin ux \, du}{e^{2\pi u} - 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

$$4685. \quad 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin ux \, du}{e^u + 1} = \frac{1}{x} - \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi x}.$$

$$4686. \quad 2 \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{ch} xt}{e^{\pi t} - 1} dt = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}; \quad |x| < \pi.$$

$$4687. \quad \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh} xt}{e^{\pi t} - 1} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x; \quad |x| < \pi.$$

§ 11.6

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Формула дифференцирования по параметру имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

Она справедлива, если $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна по y , равномерно относительно x .

Она остается в силе и для несобственных интегралов при соответствующих условиях. Например, она имеет место, если интеграл в левой части сходится при данном y , а интеграл в правой части равномерно сходится для значений y , равных данному и близких к нему.

Формула интегрирования под знаком интеграла имеет вид

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx.$$

Эта формула аналогична перемене порядка интегрирования в двойном интеграле. Она справедлива для функций, интегрируемых в смысле Римана. При соответствующих дополнительных условиях она остается в силе и для несобственных интегралов.

Третья операция, близкая к предыдущим, состоит в предельном переходе под знаком интеграла:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

Для ее законности достаточно, чтобы $f(x, y)$ стремилась к пределу равномерно относительно x . Она справедлива и для несобственных интегралов, если соблюдаются соответствующие дополнительные условия.

Условия законности трех указанных операций для несобственных интегралов сравнительно сложны. Было бы затруднительно выразить их коротко и вместе с тем достаточно полно и точно. Отметим, что они подробно рассмотрены в книге: Г. М. Фихтенгольца, Курс дифференциального интегрального исчисления, т. II.

Приводим несколько классических интегралов в виде примеров.

ПРИМЕРЫ:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} \quad \text{при } 0 < p < 1.$$

Имеем равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{1+x} + \int_1^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x}.$$

В первом из них величину $\frac{1}{1+x}$ заменяем рядом

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

а во втором — рядом $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \dots$

Интегрируя почленно, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} + \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{2-p} + \frac{1}{3-p} - \frac{1}{4-p} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2-1} + \frac{2p}{p^2-2^2} - \frac{2p}{p^2-3^2} + \dots = \frac{\pi}{\sin \pi p}. \end{aligned}$$

Законность почленного интегрирования здесь можно доказать, хотя ряды и не сходятся равномерно.

$$2. \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

Исходим из равенства: $\int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{y}$, $y > 0$. Интегрируя по y в интервале от a до b , получаем:

$$\int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \frac{dy}{y}.$$

Отсюда следует равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$$

Интегрирование под знаком интеграла законно, так как при $0 < a \leq y \leq b$ интеграл $\int_0^{\infty} e^{-xy} dx$ сходится равномерно.

$$3. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

Исходим из равенства

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

которое получается при $\alpha > 0$ непосредственным интегрированием. Интегрируя по β от 0 до a , получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^a \frac{\alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{a}{\alpha}. \quad (*)$$

Интеграл $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx$ при данном $\alpha > 0$ сходится равномерно для любых вещественных β . Поэтому интегрирование под знаком интеграла законно.

В равенстве (*) при $a > 0$ будем приближать α к нулю. Интеграл в левой части сходится при $\alpha \geq 0$ равномерно. Поэтому предел интеграла равен интегралу от предела и из (*) получается при $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

При $a < 0$ таким же приемом получили бы $-\frac{\pi}{2}$, а при $a = 0$ и интеграл равен нулю. Применяя обозначение Кронекера, можем написать:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a.$$

Здесь

$$\begin{cases} \operatorname{sign} a = +1 & a > 0, \\ \operatorname{sign} a = -1 & a < 0, \\ \operatorname{sign} a = 0 & a = 0. \end{cases}$$

4. Интегралы Лапласа $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ и $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$.

Пусть $a > 0$ и положим: $y = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$. Дифференцируя по параметру a , имеем: $y' = -\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$. Дальнейшее дифференцирование непосредственно невозможно, так как получится расходящийся интеграл. Складывая с полученным равенством новое равенство: $\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$, получаем: $y' + \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx$. Дифференцировать теперь можно. Это дает равенство: $y'' = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ или $y'' = y$. Отсюда следует, что

$y = Ce^a + C_1 e^{-a}$, где C и C_1 — некоторые постоянные. Так как $|y| < \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, то $C = 0$ и $y = C_1 e^{-a}$. При $a \rightarrow 0$ получаем: $\frac{\pi}{2} = C_1$. Поэтому $y = \frac{\pi}{2} e^{-a}$; $y' = -\frac{\pi}{2} e^{-a}$. Отсюда следуют равенства:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \operatorname{sign} a.$$

5. Интеграл Эйлера $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Исходим из очевидных неравенств:

$$\iint_{S_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{S_2} e^{-x^2-y^2} dx dy;$$

здесь S_2 — площадь круга $x^2 + y^2 = 2n^2$, а S_1 — площадь круга $x^2 + y^2 = n^2$. Интегралы, взятые по S_1 и S_2 , легко вычисляются введением полярных координат и оказываются равными $\pi(1-e^{-n^2})$ и $\pi(1-e^{-2n^2})$. Оба они стремятся к π при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, имеем:

$$\int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Из сравнения со сказанным следуют равенства:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

6. Интеграл Лапласа $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$.

Обозначая его через y и дифференцируя по a , получаем:

$$y' = -2 \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax \cdot x dx.$$

Интеграл в правой части интегрируем по частям, полагая $-2e^{-x^2} dx = dv$, $\sin 2ax = u$. После этого получаем:

$$y' = -2 \sin 2ax \cdot e^{-x^2} \Big|_0^\infty - 2a \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx; \quad y' = -2ay.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим: $y = Ce^{-a^2}$.

Так как при $a = 0$ интеграл Лапласа обращается в интеграл Эйлера, равный $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поэтому:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

7. Интегралы Френеля $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ и $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ подстановкой $x = \sqrt{t}$ переходят в такие: $\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ и $\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$. С другой стороны, заменяя x на $\sqrt{ut}$ в интеграле Эйлера, находим:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{t}}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ut} du}{\sqrt{u}}.$$

Поэтому $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ut} du}{\sqrt{u}}$. После этого можем написать:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin t dt \int_0^\infty \frac{e^{-ut} dt}{\sqrt{u}}.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x^2 dx &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^\infty e^{-ut} \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1+u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

Для оправдания законности перестановки порядка интегрирования можно рассмотреть при $\alpha > 0$ равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin t dt \int_0^\infty \frac{e^{-ut} du}{\sqrt{u}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^\infty e^{-(u+\alpha)t} \sin t dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1+(u+\alpha)^2)}. \end{aligned}$$

Здесь легко доказывается законность перехода к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, что приводит к предыдущему результату. Таким же образом получается и другой интеграл Френеля. Окончательно получаем:

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

8. Разрывный множитель Дирихле, т. е. интеграл

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x} dx.$$

Можем написать:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(1+a)x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(1-a)x}{x} dx,$$

так как оба последних интеграла имеют смысл — они уже вычислены. Поэтому

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(1+a) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(1-a).$$

Таким образом,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} 1 & -1 < a < 1, \\ 0 & a > 1 \text{ или } a < -1, \\ \frac{1}{2} & a = \pm 1. \end{cases}$$

Задачи этого параграфа решаются дифференцированием или интегрированием по параметру и при случае опираются на результаты рассмотренных примеров.

4688. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$, где $a > 0$, найти при n целом и положительном величину интеграла $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx$.

4689. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$, найти величину интеграла $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

4690. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a > 0$, найти интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$$

при $b > a > 0$.

4691. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a$, найти величину интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$.

Найти величины интегралов:

4692. $\int_0^{\infty} \frac{Ae^{-\alpha x} + Be^{-\beta x} + Ce^{-\gamma x} + De^{-\delta x}}{x} dx$; $A+B+C+D=0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$.

4693. $\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4694. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4695. $\int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \frac{a}{x^2})} dx$; $a > 0$ (Лаплас.)

4696. $\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx$.

4697. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^2 bx \frac{dx}{x}$; $a > 0$.

$$4698. \int_0^\infty e^{-ax} \sin^2 bx \frac{dx}{x^2}; a > 0.$$

$$4699. \int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin 2bx \, dx.$$

$$4700. \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\beta x \, dx, n — \text{целое положительное.}$$

$$4701. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} \, dx; a > 0, b > 0.$$

$$4702. \int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + a^2)}{x^2 + b^2} \, dx.$$

$$4703. \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, dx; a^2 < 1.$$

$$4704. \int_0^\alpha \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2} \, dx.$$

$$4705. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx; |\alpha| < 1.$$

$$4706. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x \sqrt{1 - x^2}} \, dx; |\alpha| < 1.$$

$$4707. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x) \, dx.$$

$$4708. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \frac{dx}{\sin x}; |a| < 1.$$

$$4709. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} \, dx; |a| < 1.$$

$$4710. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \, dx.$$

$$4711. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1 + \beta^2 x^2)} \, dx.$$

$$4712. \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} \, dx.$$

$$4713. \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} \, dx.$$

$$4714. \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2 x^2) \ln(1 + b^2 x^2)}{x^2} \, dx.$$

$$4715. \int_0^\infty \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} \, dx.$$

Доказать равенства:

$$4716. \int_0^x e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} \, dt.$$

$$4717. \int_0^x e^{t^2} \, dt = e^{x^2} \int_0^\infty e^{-t^2} \sin 2xt \, dt.$$

$$4718. \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \ln(1 + \alpha^2) - \int_0^\alpha \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} \, d\alpha; \alpha > 0.$$

$$4719. \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)} \, du}{1 + u^2}.$$

§ 11.7

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Желая найти функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, Эйлер угадал, что такой функцией является предел бесконечного произведения:

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{p(p+1) \dots (p+n)} n^p.$$

Отсюда $\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx$ при $p > 1$ и, выполняя предельный переход под знаком интеграла:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Если n — целое положительное, то

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! = 1 \cdot 2 \dots (n-1); \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Одно из основных свойств гамма-функции $\Gamma(x)$ выражается равенством

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p},$$

другое, найденное Гауссом, а в частном случае, при $n = 2$, Лежандром, — формулой

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(p + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-np} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(np).$$

Через гамма-функции выражается другой интеграл Эйлера — бета-функция $B(p, q)$. По определению, при $p > 0$ и $q > 0$ имеем:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Существует формула

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Заменой переменных к бета-функции сводятся интегралы вида

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{(a + bx^n)^p} dx \quad \text{при } a > 0 \text{ и } b > 0.$$

Часто полезна замена дроби $\frac{1}{a^n}$, где $n > 0$, $a > 0$ с помощью формулы

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx.$$

Доказать равенства при целых положительных n и m :

$$4720. \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m} x}{x^p} dx = \frac{(2m)!}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{t^{p-2} dt}{(t^2+2^2)(t^2+4^2)\dots(t^2+4m^2)},$$

$$1 < p < 2m+1.$$

$$4721. \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2m+1} x}{x^p} dx =$$

$$= \frac{(2m+1)!}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(t^2+1)(t^2+3^2)\dots(t^2+(2m+1)^2)},$$

$$1 < p < 2m+2.$$

$$4722. \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x+a} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} dt}{1+t^2}, \quad a > 0.$$

$$4723. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x+a} = \int_0^{\infty} \frac{te^{-at} dt}{1+t^2}, \quad a > 0.$$

$$4724. \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-nx} \sin nx dx =$$

$$= 4n^2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^4+4n^4)(e^{2\pi x}-1)}.$$

Найти величину интегралов:

$$4725. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

$$4728. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$$

$$4726. \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

$$4729. \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx.$$

$$4727. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx.$$

$$4730. \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx.$$

$$4731. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$$

$$4734. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$4732. \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt[3]{x(1-x)^2}}.$$

$$4735. \int_0^{\infty} \frac{x^{2\alpha-1}}{1+x^2} dx; \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$4736. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^3)^2}.$$

$$4733. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}.$$

$$4737. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^n}.$$

$$4738. \int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}; \quad a > 0, \quad b > 0, \quad np > m+1 > 0.$$

$$4739. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2a-1} x dx; \quad 0 < a < 1.$$

$$4740. \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx; \quad n > -1.$$

$$4741. \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx; \quad m > 0, \quad n > 0.$$

$$4742. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} \varphi d\varphi}{(1-k \sin \varphi)^n}; \quad 0 < k < 1, \quad n > 0.$$

$$4743. \int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx; \quad 0 < a < 1.$$

$$4744. \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} dx; \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad a > 0.$$

$$4745. \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{(1-x)\ln x} dx.$$

$$4746. \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n}; \quad m > 0, \quad n > m.$$

$$4747. \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^2} dx; \quad 0 < a < 2.$$

$$4748. \int_0^{\infty} \frac{x^a \ln x}{1+x^2} dx; \quad -1 < a < 1.$$

$$4749. \int_0^{\infty} \frac{x^a \ln^2 x}{1+x^2} dx; \quad a^2 < 1.$$

$$4750. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \mu x}{\operatorname{sh} \nu x} dx; \quad \nu > \mu > 0.$$

$$4751. \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\operatorname{ch} \nu x} dx; \quad \nu > \mu > 0.$$

$$4752. \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

$$4753. \int_0^{a+1} \ln \Gamma(x) dx; \quad a > 0.$$

Доказать равенства:

$$4754. \int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$4755. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$4756. \int_0^{\infty} x^{p-1} \cos ax dx = \frac{1}{a^p} \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}; \quad 0 < p < 1.$$

$$4757. \int_0^{\infty} x^{p-1} \sin ax dx = \frac{1}{a^p} \Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}; \quad -1 < p < 1.$$

$$4758. \int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{(x^2+ax+b)^p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}(a+2\sqrt{b})^{p-\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p)}; b > 0,$$

$$a + 2\sqrt{b} > 0, p > \frac{1}{2}.$$

4759. Найти площадь, ограниченную кривой $x^n + y^n = a^n$, при $x > 0, y > 0, n > 0$.

4760. Найти объем, ограниченный поверхностью $x^n + y^n + z^n = a^n$, при $x > 0, y > 0, z > 0, n > 0$.

§ 11.8

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

4761. Если $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, то $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. Справедливо ли равенство: $\int_a^b -\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{b} - \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$?

4762. Если $F(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, то $F'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})^2} = f(x)$. Когда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) - 1?$$

4763. Доказать, что $\int_0^\infty (\sin^2 x) x^3 x^\alpha dx$ сходится при $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, хотя подынтегральная функция положительна и не стремится к нулю, когда $x \rightarrow \infty$, ибо при сколь угодно больших значениях x может иметь сколь угодно большие значения.

Доказать равенства:

$$4764. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx = 1.$$

$$4765. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx = 1.$$

$$4766. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \int_0^\infty e^{-x^n} dx \right) = -\Gamma'(1).$$

$$4767. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+u) du}{\alpha^2 + u^2} = \pi \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \text{ если интеграл аб-}$$

солютно сходящийся, а $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — правый и левый пределы $f(\xi)$ при $\xi \rightarrow x$.

4768. $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$, $a > 0$, $b > 0$, если при $A > 0$ интеграл $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ имеет смысл (формула Фруллани).

4769. $\lim_{a \rightarrow \infty} a^n \int_0^\infty f(x) \cos ax dx = 0$, если $f(x)$ — четная функция, у которой интеграл от модуля $f^{(m)}(x)$ в интервале $(-\infty, \infty)$ имеет смысл при любом $m \leq n + 1$.

4770. $\lim_{a \rightarrow \infty} a^n \int_0^\infty f(x) \sin ax dx = 0$, если $f(x)$ — нечетная функция, а интеграл от абсолютного значения $f^{(m)}(x)$, взятый от $-\infty$ до $+\infty$, имеет смысл при любом $m \leq n + 1$.

4771. Доказать, что $f(x) = 0$ при $a < x < b$, если $f(x)$ непрерывна и при любом целом $n \geq 0$ интеграл $\int_a^b f(x) x^n dx = 0$.

4772. Доказать, что $f(x) = 0$ при $0 \leq x \leq 2\pi$, если она непрерывна, и при любом целом положительном n (и при $n = 0$) интегралы $\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$ и $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ равны нулю.

4773. Доказать, что для $f(x) = e^{-\sqrt[n]{x}} \sin x \sqrt[n]{x}$ при всех целых $n = 0$ справедливо равенство: $\int_0^\infty f(x) x^n dx = 0$.

4774. Доказать, что для функции $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ при любом целом целых $n \neq 1$ справедливы равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin nx dx = 0.$$

4775. Доказать равенство:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x+h)^{1-\alpha}} = \ln \frac{1}{h} + A + O(h),$$

где $O(h)$ означает величину, отношение которой к h остается ограниченным по абсолютному значению, когда $h \rightarrow +0$ и $0 < \alpha < 1$.

4776. Доказать, что по абсолютному значению интеграл $\int_a^b \varphi(x) e^{i\mu x} dx$ не превосходит величины $\frac{2\varphi(a)}{\mu}$, если $a < b$, а $\varphi(x)$ — убывающая положительная функция; $\mu > 0$.

Доказать неравенства:

4777. $\int_0^\infty f(x) \sin ax dx > 0$, если $f(x)$ — убывающая функция; $a > 0$ и интеграл сходится.

4778. $\int_0^\infty f(x) \sin ax \, dx > 0$, если $f(x)$ — убывающая функция и интеграл сходится.

4779. Доказать, что при $h \rightarrow 0$ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(t-x)^2}{h^2}} dt = f(x),$$

если $f(x)$ — непрерывная функция, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\frac{t^2}{h^2}} dt$ имеет смысл при достаточно малых $|h|$.

4780. Доказать теорему Лапласа: если $f(x)$ в интервале (a, b) имеет конечную производную, а $\varphi(x) > 0$ и достигает наибольшего значения при $x = c$, где $a < c < b$, то при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) (\varphi(x))^n dx = f(c) (\varphi(c))^n \sqrt{-\frac{2\pi\varphi(c)}{n\varphi''(c)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right),$$

где $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ по абсолютной величине не больше, чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$, умноженное на некоторую постоянную. Если c совпадает с одним из чисел a или b , то в правой части надо поставить добавочный множитель, равный $\frac{1}{2}$.

Доказать равенства:

$$\mathbf{4781.} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\mathbf{4782.} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

$$\mathbf{4783.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{1+x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\mathbf{4784.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{1+x} dx = \frac{1}{\pi+2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказать неравенства:

$$\mathbf{4785.} \left(\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

(Буняковский.)

4786. $\varphi \left(\frac{\int_a^b p(x) f(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \right) \leq \frac{\int_a^b p(x) \varphi(f(x)) dx}{\int_a^b p(x) dx}$, где $p(x) \geq 0$, а кривая $y = \varphi(x)$ выпукла вниз.

4787. Получить аналогичное неравенство для случая, когда кривая $y = \varphi(x)$ выпукла вверх.

4788. Доказать, что функция от t , равная величине

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^t dx \right)^{\frac{1}{t}}, \quad a < b,$$

не убывает с возрастанием t , если $f(x)$ имеет положительную нижнюю границу.

4789. Моментами функции $f(x)$ в интервале (a, b) называются интегралы

$$M_n = \int_a^b f(x) x^n dx.$$

Доказать, что если $0 < a < b$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, то ряд $\sum \frac{t^n}{M_n}$ имеет конечный или бесконечный радиус сходимости, смотря по тому, конечен или бесконечен интервал (a, b) .

4790. Разбивая интервал $(-\infty, \infty)$ на части: $(-\infty, x-h)$, $(x-h, x)$, $(x, x+h)$, $(x+h, \infty)$, где h — произвольно выбранное число, доказать равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin n(u-x)}{u-x} du = f(x).$$

При этом для простоты предполагается, что $f(x)$ всюду непрерывна, $f'(x)$ всюду существует и в каждом данном интервале ограничена, а $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$ абсолютно сходится.

4791. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, относительно $f(x)$ доказать формулу Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos u(v-x) dv.$$

4792. Показать, что интеграл Фурье (см. предыдущую задачу) остается в силе и в том случае, когда $f(x)$ в отдельных точках имеет конечные разрывы, при сохранении в остальных точках прежних условий. При этом в точках разрыва значение интеграла равно $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, где $f(x+0)$ и $f(x-0)$ — пределы справа и слева величины $f(\xi)$ при $\xi \rightarrow x$.

4793. Доказать, что для функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям предыдущей задачи, справедлива теорема: если $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{ixt} dt$, то $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-ixt} dt$.

4794. Доказать для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, введенных в предыдущей задаче, равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx.$$

4795. Запись $\varphi(x) \sim \frac{a_0}{x^\sigma} + \frac{a_1}{x^{\sigma+1}} + \frac{a_2}{x^{\sigma+2}} + \dots$ читается: функции $\varphi(x)$ соответствует асимптотический ряд, стоящий в правой части; эта запись означает, что при $x \rightarrow \infty$ при любом ν

$$x^{\sigma+\nu} \left(\varphi(x) - \frac{a_0}{x^\sigma} - \frac{a_1}{x^{\sigma+1}} - \dots - \frac{a_\nu}{x^{\sigma+\nu}} \right) \rightarrow 0.$$

Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \sim \frac{a_0}{x} + \frac{a_1 \cdot 1!}{x^2} + \frac{a_2 \cdot 2!}{x^3} + \frac{a_3 \cdot 3!}{x^4} + \dots,$$

если $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ и интеграл сходится.

4796. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 x^{n-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} + \frac{a_1 \Gamma(\frac{3}{2})}{n\sqrt{n}} + \frac{a_2 \Gamma(\frac{5}{2})}{n^2\sqrt{n}} + \dots,$$

если $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + a_1 \sqrt{t} + a_2 t \sqrt{t} + \dots$

4797. Пользуясь равенствами:

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u+m} du = \int_0^\infty \frac{e^{-mu}}{1+u^2} du, \quad \int_0^\infty \frac{\cos u}{u+m} du = \int_0^\infty \frac{ue^{-mu}}{1+u^2} du,$$

доказать формулу:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\cos m}{m} \left(1 - \frac{2!}{m^2} + \frac{4!}{m^4} - \dots + \theta(-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{m^{2\nu}} \right) + \\ &+ \frac{\sin m}{m^2} \left[1 - \frac{3!}{m^2} + \frac{5!}{m^4} - \dots + \theta_1(-1)^\nu \frac{(2\nu+1)!}{m^{2\nu}} \right], \end{aligned}$$

где θ и θ_1 — некоторые положительные правильные дроби.

Найти величины следующих интегралов:

$$4798. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

$$4799. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$4800. \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

$$4801. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{e^{x-a} + e^{a-x}}.$$

$$4802. \int_{-a}^a \frac{dx}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}},$$

где $\varphi(x)$ — нечетная функция.

$$4809. \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2+2xy \cos \alpha} dx dy.$$

$$4810. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^4} dx.$$

$$4811. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^2 + b^2 x^2}.$$

$$4812. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\lambda} dx.$$

$$4813. \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

$$4803. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg} \sin x}{\sin x} dx.$$

$$4804. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 + 2abx} dx.$$

$$4805. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x-a)^2 + b^2} dx.$$

$$4806. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{(x-a)^2 + b^2} dx.$$

$$4807. \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \cos \beta x}{1+x^2} dx.$$

$$4808. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \sin \alpha x dx.$$

$$4814. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2 x^2 (x-\alpha)^2}}.$$

$$4815. \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx.$$

$$4816. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx;$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

$$4817. \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx; a > 0, b > 0.$$

$$4818. \int_0^\infty \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx; a > 0, b > 0.$$

$$4819. \int_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2} dx; a \geq 0.$$

$$4820. \int_0^\infty \frac{ax \cos x - \sin ax}{x^2} dx; a \geq 0.$$

$$4821. \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx.$$

$$4822. \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$4823. \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2 + a^2} dx.$$

$$4824. \int_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^4} dx.$$

$$4825. \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx; a \geq b > 0.$$

$$4826. \int_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2} dx; a > 0.$$

$$4827. \int_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos ax}{x} dx; a > 0.$$

$$4828. \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin^2 x}{x^3} dx.$$

$$4829. \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

$$4830. \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx.$$

$$4831. \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$4832. \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{x \sin 2x - \sin^2 x}{x^2} dx.$$

4846. Доказать, что $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin px}{\sin x} \cos^{p-1} x dx = \frac{\pi}{2}$ при $p > 0$. (Лиувиль.)

4847. Доказать тождество Рамануджана:

$$\sqrt{\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{\operatorname{ch} \alpha x} = \sqrt{\beta} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{\operatorname{ch} \beta x}; \quad \alpha\beta = \pi.$$

4848. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$ абсолютная величина интеграла

$$\int_0^n x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) dx \rightarrow \infty.$$

$$4833. \int_0^\infty \frac{x^{n-1} \ln x}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

$$4834. \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$4835. \int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$4836. \text{ v. p. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a - b \cos x}, \quad 0 < a < b.$$

$$4837. \text{ v. p. } \int_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}.$$

$$4838. \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$4839. \int_0^{2\pi} \frac{x dx}{1 - a \cos x}, \text{ при } |a| < 1.$$

$$4840. \text{ v. p. } \int_0^{2\pi} \frac{x dx}{1 - a \cos x}, \text{ при } |a| > 1.$$

$$4841. \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}.$$

$$4842. \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}} dx.$$

$$4843. \int_0^\pi \frac{dx}{1 - 2 \sin 2\alpha \cos x + \cos^2 x}; \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

$$4844. \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1 - \cos ax)}{x} dx.$$

$$4845. \int_0^\infty J_0(x) e^{-bx} dx, \text{ где } J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \varphi) d\varphi.$$

4849. Доказать равенство:

$$\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{a}{x}\right) dx = \int_0^{\infty} f(\sqrt{x^2 + 4a}) dx, \quad a > 0.$$

предполагая, что оба интеграла имеют смысл.

4850. Пользуясь интегралами Френеля и предыдущим результатом, доказать равенство:

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 2a - \sin 2a).$$

4851. С помощью подстановки $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{e^t}{e^{-t}}$ доказать равенство:

$$\begin{aligned} \int_a^b ((x-a)(b-x))^{-\frac{3}{2}} e^{\left(-\frac{\alpha^2}{x-a} + \frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx = \\ = \sqrt{\pi} \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} (b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}. \end{aligned}$$

4852. Пользуясь тождеством

$$4 \cos^2 x = (1 + e^{2xi})(1 + e^{-2xi}),$$

доказать равенства при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln \cos x dx &= -x \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2} \sin 2\nu x, \\ \int_0^x \ln \sin x dx &= -x \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \sin 2\nu x. \end{aligned}$$

(Н. И. Лобачевский.)

4853. Разлагая по степеням a , где $|a| < 1$, доказать равенство:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^n x dx}{(1 + a \cos x)^{n+1}} = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(1 - a^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(Н. И. Лобачевский.)

Проверить равенства:

$$4854. \int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\alpha} = \frac{\pi a}{4 \sin \alpha}; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

(Н. И. Лобачевский.)

$$4855. \int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\alpha} = \frac{\pi(\pi - \alpha)}{4 \sin \alpha}; \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

(М. В. Остроградский.)

$$4856. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{\pi^2 + x^2}} \cos \alpha x dx = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{1 + \alpha^2} \sqrt{\pi^2 + x^2}} dx.$$

(Н. И. Лобачевский.)

§ 11.9

РЯДЫ ФУРЬЕ И БЛИЗКИЕ ВОПРОСЫ

Разложить в простейший ряд Фурье функцию $f(x)$, определенную в интервале $(-\pi, \pi)$ следующими условиями:

$$4857. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } 0 < x < \pi; \\ -\frac{\pi}{4} & \text{при } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

$$4858. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$4859. f(x) = |x| \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$4860. f(x) = x \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$4861. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x, & 0 < x < \pi; \\ 1 + \cos \frac{1}{2}x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

$$4862. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}x, & 0 < x < \pi; \\ -\frac{\pi+x}{2}x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

$$4863. f(x) = x^2 \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$4864. f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi; \\ -\cos x, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

$$4865. f(x) = |\sin x| \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$4866. f(x) = \cos ax \text{ при } -\pi < x < \pi, a — \text{не целое.}$$

4867. $f(x) = \sin ax$ при $-\pi < x < \pi$, a — не целое.

4868. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$; $f(x) = \sin^2 x$ при $0 < x < \pi$.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию:

4869. $f(x) = \{x\}$ — дробная доля числа x , т. е. разность $x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x .

4870. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

4871. $f(x) = x$, 1 или $3 - x$, смотря по тому, в каком из интервалов $(0, 1)$, $(1, 2)$ или $(2, 3)$ лежит x , предполагая при этом, что период $f(x)$ равен 3.

Если функция не задана периодической и ищется разложение, верное лишь в заданном промежутке, то ее можно разлагать в ряд Фурье с периодом, равным длине данного промежутка или с любым большим, но в последнем случае функцию надо доопределить любым образом (лишь бы соблюдались условия Дирихле). Этим можно пользоваться для получения разложения по одним косинусам или по одним синусам или ограничиться только синусами или косинусами углов нечетной кратности.

В дальнейших задачах будет предполагаться, что период надо выбирать наименьшим, при котором удовлетворяются требования задачи.

4872. В интервале $(-h, h)$ разложить функцию e^x .

4873. Разложить $\operatorname{ch} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4874. Разложить $\operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4875. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по косинусам.

4876. В интервале $(0, \pi)$ разложить x^3 по синусам.

4877. В интервале $(0, \pi)$ разложить $\sin x$ по косинусам.

Функция $f(x) = x^2(a - x)$ задана в интервале $(0, a)$.

4878. Разложить ее в ряд Фурье с периодом a .

4879. Разложить ее в ряд Фурье как четную функцию.

4880. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную функцию.

Функция $f(x) = x$ задана в интервале $(0, a)$.

4881. Разложить ее в ряд Фурье с периодом a .

4882. Разложить ее в ряд Фурье как четную функцию.

4883. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную функцию.

4884. Разложить ее в ряд Фурье как нечетную, по синусам углов нечетной кратности.

Функции, рациональные относительно $\cos x$ и $\sin x$, могут разлагаться в ряд Фурье без формул Фурье. Для этого пишем:

$$\cos x = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad \sin x = \frac{t^2 - 1}{2ti},$$

где $t = e^{xi}$. После этого дело сводится к разложению функции по положительным и отрицательным степеням t . Перейдя обратно от t к x , получим искомое разложение в ряд Фурье.

Изложенным способом и подобными ему получить следующие разложения:

$$\mathbf{4885.} \quad \frac{1-a^2}{1-2a \cos x + a^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$\mathbf{4886.} \quad \frac{1-a \cos x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$\mathbf{4887.} \quad \frac{a \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin nx; \quad |a| < 1.$$

$$\mathbf{4888.} \quad \ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx; \quad |a| < 1.$$

$$\mathbf{4889.} \quad \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|^{-1} = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

4890. Функция $f(x)$, данная в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, продолжена в интервал $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, при этом $f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$; доказать, что при $0 < x < \pi$ имеется равенство

$$f(x) = \sum a_n \cos(2n+1)x,$$

причем

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos(2n+1)x \, dx.$$

4891. Как продолжить в интервал $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ функцию $f(x)$, данную в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$, так, чтобы при $0 < x < \pi$

$$f(x) = \sum b_n \sin(2n+1)x$$

и как можно вычислять коэффициенты?

Доказать при $0 < x < \pi$ следующие равенства:

$$\mathbf{4892.} \quad \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x.$$

$$\mathbf{4893.} \quad \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots = \frac{\pi x}{8} (\pi - x).$$

$$4894. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\theta}{n(n+1)} = \\ = \sin 2\theta - (\pi - 2\theta) \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \ln 4 \sin^2 \theta.$$

$$4895. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{n^2(n+1)^2} = \\ = 2(\pi - 2\theta) \sin \theta + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi\theta + 2\theta^2 - 3 \right) \cos \theta.$$

4896. Доказать правильность разложения:

$$\frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x$$

в промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Доказать равенства:

$$4897. \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(n+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \cos 2\pi n x, \quad a > 0.$$

$$4898. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \right), \quad x > 0.$$

$$4899. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x}(x+x^4+x^9+\dots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$4900. \lim_{x \rightarrow 1-0} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \dots) = \frac{1}{2}.$$

$$4901. \sum_{n=a}^b f(n) = \\ = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \int_a^b f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x) \cos 2\pi n x dx.$$

(Формула Пуассона.)

4902. Модулем непрерывности $\omega(h)$ называется точная верхняя граница колебания функции $f(x)$ в интервалах длиной h , т. е. чисел $|f(x_2) - f(x_1)|$, где $|x_2 - x_1| < h$. Доказать, что для непрерывной функции $f(x)$ интегралы

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) \sin nx dx$$

по абсолютному значению не больше, чем $C\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$, где C — соответствующая постоянная.

4903. Доказать равенство:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin mx|}{\sin x} dx = \frac{2}{\pi} \ln m + O(1),$$

где $O(1)$ при $m \rightarrow \infty$ — ограниченная величина.

4904. Доказать неравенство Лебега:

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| < CM \ln m.$$

Здесь a_n и b_n — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, а M — верхняя граница $|f(x)|$.

4905. Доказать, что при $0 < x < \pi$ существует равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} &= -\frac{x}{2} + \int_0^{x/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt + \\ &+ \int_0^{x/2} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(2n+1)t dt. \end{aligned}$$

4906. Доказать, что при любом вещественном x и целом $n > 0$ имеется равенство

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = 2\pi\theta; \quad |\theta| < 1.$$

4907. При $0 < x < \pi$ доказать равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin 2nt dt. \end{aligned}$$

4908. При любом вещественном x и целом $n > 0$ доказать равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1} = \frac{3}{2}\theta; \quad |\theta| < 1.$$

4909. Доказать неравенство Фейера:

$$\left| \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \frac{\cos(n+2)x}{2} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \right| < 10.$$

4910. Суммой Фейера σ_n называется арифметическое среднее первых n сумм Фурье функции $f(x)$:

$$n\sigma_n = s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1},$$

где при $m \geq 1$

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^m (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x); \quad s_0 = \frac{a_0}{2},$$

a_ν, b_ν — коэффициенты Фурье для функции $f(x)$. Доказать, что $|\sigma_n(x)| < M$, если $|f(x)| < M$ во всем периоде.

4911. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция на интервале $[-\pi, \pi]$, $l \leq f(x) \leq L$ и при любом m , $|ma_m| < A$, $|mb_m| < B$, то

$$l - (A + B) \leq s_n(x) \leq L + (A + B);$$

где a_m, b_m — коэффициенты Фурье, $s_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

4912. Доказать, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[-\pi, \pi]$ $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

4913. Доказать, что для периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши—Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| < C|x_2 - x_1|,$$

существует неравенство $|\sigma_n - f(x)| < \frac{A \ln n}{n}$, где A постоянная.

Считая $f(x)$ там, где она встречается, непрерывной функцией с периодом 2π , доказать следующие формулы и утверждения:

4914. Интеграл $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cos^{2n} \frac{u}{2} du$ есть тригонометрический полином, который стремится к $f(x)$, если $n \rightarrow \infty$.

4915. $\int_0^{\pi/2} F_m(u) du > \frac{\pi}{3m} - \frac{1}{11m^2}$; $2\pi \int_0^{\pi/2} u F_m(u) du < \frac{c}{m^2}$, где $F_m(u) = \left(\frac{\sin mu}{m \sin u}\right)^4$, а c — некоторая постоянная.

$$\int_0^{\pi/2} F_m(u) du = \frac{\pi}{3m} + \frac{\pi}{6m^3} = \frac{1}{2A_m}.$$

4916. Величина $T_m(x)$, где

$$T_m(x) = A_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2u) F_m(u) du,$$

есть тригонометрический полином порядка $2m-2$.

4917. $f(x) - T_m(x) = A_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - f(x+2u)) F_m(u) du$.
Значение A_m см. задачу 4915.

4918. Если $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| < C|x_2 - x_1|,$$

то справедливо неравенство Джексона:

$$|f(x) - T_m(x)| < \frac{M}{m},$$

где M — соответствующая постоянная.

4919. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая в интервале $(0, 2\pi)$, a_n и b_n — ее коэффициенты Фурье, $S_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ — ее сумма Фурье, а $P_m(x)$ — любой тригонометрический полином порядка m , отличный от $S_m(x)$. Доказать неравенство:

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - S_m(x))^2 dx < \int_0^{2\pi} (f(x) - P_m(x))^2 dx.$$

4920. Доказать неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

4921. Исходя из неравенства Бесселя и неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$, доказать сходимость рядов $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2)$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_{\nu}| + |b_{\nu}|}{\nu^{\alpha}}$, где $\alpha > \frac{1}{2}$.

4922. Доказать неравенство:

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx < 2 \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx + 2 \int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)|^2 dx.$$

4923. Пусть $f(x)$ — интегрируемая в $(0, 2\pi)$ функция, ε — произвольная положительная постоянная, $\varphi(x)$ — такая непрерывная функция, что $\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon$, а $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера (см. 4910) для $\varphi(x)$, отличающаяся от $\varphi(x)$ меньше, чем на $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$. Доказать неравенство:

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx < 4\varepsilon.$$

4924. Пользуясь предыдущими результатами, доказать теорему А. М. Ляпунова (теорема замкнутости):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx,$$

справедливую для любой интегрируемой функции $f(x)$.

4925. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \psi(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \alpha_{\nu} + b_{\nu} \beta_{\nu}),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы в интервале $(0, 2\pi)$, a_{ν} , b_{ν} , α_{ν} , β_{ν} — коэффициенты Фурье этих функций.

4926. Доказать теорему В. А. Стеклова:

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u) du = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) \frac{\sin \nu h}{\nu h}.$$

4927. Доказать неравенства В. А. Стеклова:

а) $\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$, если $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$,

б) $\int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^{\pi} f^2(x) dx$; $f(0) = f(\pi) = 0$.

4928. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2) + \sum_{\nu=n}^{\infty} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2),$$

где $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера функции $f(x)$ (см. 4910).

4929. Доказать, что для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Коши—Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| < A \cdot |x_2 - x_1|^{\alpha},$$

справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=n}^{2n} (a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2) < \frac{k}{n^{2\alpha}},$$

где k — соответствующая постоянная.

4930. Доказать теорему С. Н. Бернштейна: ряд Фурье для функции, удовлетворяющей условию Коши—Липшица при $\alpha > \frac{1}{2}$, сходится абсолютно.

4931. Параметрическому уравнению замкнутой кривой можно придать вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt); \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Пользуясь формулами: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и

$$A = \frac{1}{2} \int_S x dy - y dx,$$

где A — площадь, ограниченная замкнутой кривой S , доказать неравенство $4\pi A \leq L^2$ (L есть длина кривой S), выражающее, что из всех замкнутых кривых с длиной L наибольшую площадь имеет окружность (доказательство Гурвица).

Полиномы Чебышева:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

Эрмита—Чебышева:

$$H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

и полиномы Абеля—Лагерра:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$$

обладают свойством ортогональности, в силу которого при $n \neq m$ имеются равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 0; & \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x) dx &= 0; & \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

При $n = m$ правые части этих равенств заменяются соответственно величинами:

$$\frac{\pi}{2^{2n-1}}; \quad \frac{2}{2n+1}; \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}; \quad 1.$$

Надо заметить, что в литературе под полиномами Эрмита—Чебышева понимаются несколько отличающихся друг от друга выражений. Иногда за вес берется $e^{-\frac{x^2}{2}}$, иногда e^{-x^2} , иногда вводится множитель $(-1)^n$ или $\frac{1}{n!}$, иногда нет, руководствуясь удобством применения в рассматриваемых задачах. В главе 3 под полиномом Эрмита понимался

$$H_n^{(x)} = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

в настоящей

$$H_n^{(x)} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}.$$

Разложить по полиномам Чебышева $T_n(x)$ функции, определенные в интервале $(-1, 1)$ условиями:

4932. $f(x) = x^3$

4934. $f(x) = |x|$.

4933. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$

4935. $f(x) = x^{2n}$.

Разложить при $-1 < x < 1$ по полиномам Лежандра функции, определенные условиями:

$$4936. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad 4937. f(x) = |x|.$$

Разложить по полиномам Лагерра $L_n(x)$ при $x > 0$ следующие функции:

$$4938. e^{-ax}. \quad 4939. x^n. \quad 4940. \sin ax. \quad 4941. \cos ax.$$

Разложить по полиномам Чебышева—Эрмита при $-\infty < x < \infty$ следующие функции:

$$4942. \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad 4944. e^{-ax}. \\ 4945. \cos ax.$$

$$4943. |x|. \quad 4946. \sin ax.$$

Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$4947. f(x) = \begin{cases} e^{-mx}, & x > 0; \\ e^{mx}, & x < 0; m > 0. \end{cases}$$

$$4948. f(x) = \begin{cases} e^{-mx}, & x > 0; \\ -e^{mx}, & x < 0; m > 0. \end{cases}$$

$$4949. f(x) = \begin{cases} e^{-mx}, & x > 0; \\ 0, & x < 0; m > 0. \end{cases}$$

$$4950. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \tau; \\ 0, & |x| > \tau. \end{cases}$$

$$4951. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \tau; \\ -1, & -\tau < x < 0; \\ 0, & |x| > \tau. \end{cases}$$

$$4952. f(x) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|x-x_0|}{a} \right), & |x-x_0| < a; \\ 0, & |x-x_0| > a. \end{cases}$$

$$4953. f(x) = \begin{cases} e^{-kx} \sin \omega x, & x > 0; \\ 0, & x < 0; k > 0. \end{cases}$$

$$4954. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < n\pi; n — \text{целое}; \\ 0, & x < 0; x > n\pi. \end{cases}$$

РЯДЫ

§ 12.1

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Если $|u_n| \leq v_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Два признака сходимости нередко бывают полезны.

Признак Даламбера. Если $0 < q < 1$ и при всех $n > n_0$ имеем $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Если же $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, при всех $n > n_0$, то ряд расходится.

Признак Коши—Маклорена. Если $u_n = f(n)$ — положительная убывающая функция n , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Ряды с членами разных знаков могут сходиться, хотя ряд из модулей членов расходится. При изучении их сходимости нередко полезен

Признак Абеля—Дирихле. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ сходится, если $\sum_{n=1}^N u_n$ ограничена при $N \rightarrow \infty$, а числа v_n убывают и стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Доказать теоремы:

4955. Если $|u_n| < \frac{c}{n^a}$, где c — постоянная, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $a > 1$.

4956. Если $u_n > \frac{c}{n^a}$, где $c > 0$ — постоянная, $a \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

4957. Если $|u_n| < \frac{c}{n(\ln n)^a}$, где $a > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а если $|u_n| > \frac{c}{n(\ln n)^a}$, где $a \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

4958. Обозначим $\ln \ln n = \ln_2 n$, $\ln \ln \ln n = \ln_3 n$, ..., тогда ряд $\sum u_n$ сходится, если

$$|u_n| < \frac{c}{n \ln n \ln_2 n \dots \ln_{m-1} n (\ln_m n)^a}, \quad a > 1$$

и расходится, если

$$u_n > \frac{c}{n \ln n \ln_2 n \dots \ln_{m-1} n (\ln_m n)^a}, \quad a \leq 1.$$

4959. Признак Ермакова. Пусть $f(x)$ есть положительная и убывающая функция при $x > x_0$. Если при тех же x имеется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \lambda,$$

где $\lambda < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, где $u_n = f(n)$. Если при тех же условиях $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Указание. Легко доказать неравенства:

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu+1} f(t) dt \leq \lambda \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t) dt$$

в первом случае и

$$\int_{x_\nu}^{x_\nu+1} f(t) dt \geq \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t) dt$$

— во втором. Здесь $x_1 = e^{x_0}$, $x_2 = e^{x_1}$, $x_3 = e^{x_2}$, ...

4960. Теорема Куммера. Если для данного ряда положительных чисел $\sum u_n$ можно найти такую последовательность положительных чисел c_n , что при всех n имеем $c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} > \rho u_{n+1}$, где $\rho > 0$ — постоянная, то ряд $\sum u_n$ сходится.

4961. Признак сходимости Куммера. Если члены ряда $\sum u_n$ положительны и можно найти такой ряд положительных чисел $c_1, c_2, c_3, \dots$, что при всех $n > n_0$ имеется неравенство:

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \geq a u_{n+1},$$

где $a > 0$, то данный ряд сходится.

Если же при всех $n > n_0$ имеет место неравенство:

$$c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \leq 0,$$

числа $c_1, c_2, c_3, \dots$ положительны, а ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходится, то ряд $\sum u_n$ тоже расходится.

Замечание. В первом случае $u_2 + u_3 + \dots + u_n < \frac{c_1 u_1}{a}$, а во втором легко доказать, что $u_{n+1} \geq \frac{c_1 u_1}{c_{n+1}}$.

4962. Признак Раабе. Если $u_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$, то ряд сходится. Если тот же предел < 1 , то ряд расходится.

4963. Признак Бертрана для ряда $\sum u_n$, где $u_n > 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n = A.$$

Если $A > 1$, ряд сходится, а при $A < 1$ он расходится.

4964. Признак Гаусса для рядов $\sum u_n$ при $u_n > 0$ и

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где λ и μ — постоянные, а θ_n — ограниченная.

Если $\lambda > 1$ — ряд сходится, если $\lambda < 1$ — расходится. При $\lambda = 1$ ряд сходится, если $\mu > 1$, и расходится при $\mu \leq 1$.

Исследовать сходимость следующих рядов с данным общим членом.

4965. $u_n = \frac{1}{x^n + 1}, x > 0.$

4966. $u_n = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$

4967. $u_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}.$

4968. $u_n = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}.$

4969. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

4970. $u_n = n! \left(\frac{x}{n} \right)^n.$

4971. $u_n = \frac{n^n}{n!} x^n.$

4972. $u_n = \frac{x^{n^2}}{n!}.$

4973. $u_n = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{n!} x^n.$

4974. $u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$

4975. $u_n = n \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}; a > 0, b > 0.$

4976. $u_n = \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\dots(nb+1)}; a \geq 0, b \geq 0.$

4977. $u_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}; \alpha > 0, \beta > 0.$

4978. $u_n = (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}).$

Указание. Полезно заметить, что $e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

$$4979. u_n = \ln \cos \frac{x}{n}.$$

$$4980. u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$4981. u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x \ln a}{n}\right)^n.$$

$$4982. u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

$$4983. u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$4984. u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$4985. u_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^a.$$

Указание. В трех последних задачах удобно воспользоваться неравенствами

$$\frac{1}{2\sqrt{2n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

которые получаются из очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1}.$$

4986. Исследовать сходимость гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

4987. Исследовать сходимость ряда $\sum u_n$, если $u_1 = 1$, а

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}.$$

4988. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

4989. Исследовать сходимость ряда $\sum u_n^{-1}$, где u_n — числа Фибоначчи: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, ..., $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Исследовать сходимость рядов:

$$4990. 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \frac{1}{4^a} + \dots$$

$$4991. 1 + \frac{1}{2^a} - \frac{2}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} - \frac{2}{6^a} + \dots$$

4992. $\sin x - \sin \sin x + \sin \sin \sin x - \dots$

4993. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$

4994. Доказать, что ряд $\nu_0^a + \nu_1^a + \nu_2^a + \dots$, где $\nu_0 = x$, $\nu_1 = \sin \nu_0$, $\nu_2 = \sin \nu_1$, ..., сходится при $a > 2$ и расходится при $a \leq 2$, если $x \neq 0$, $\sin x \neq 0$.

4995. $\nu_1 = \operatorname{arctg} x$, $\nu_2 = \operatorname{arctg} \nu_1$, $\nu_3 = \operatorname{arctg} \nu_2, \dots$ Исследовать сходимость ряда $\sum \nu_m^a$ при $a > 0$.

4996. Если члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ограничены при $x = x_0$ и $x = x_1$, $|x_1| > |x_0|$, то ряд сходится при $|x_0| < |x| < |x_1|$. Доказать.

4997. Функция $f(t)$ называется выпуклой, если при любых $m > 0$, $n > 0$ имеется неравенство:

$$f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{m+n}\right) \leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{m+n}.$$

Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося при $0 < x_0 < x < x_1$, где $a_n > 0$, есть выпуклая функция от $t = \ln x$.

4998. Доказать теорему Абеля: если $a_n > 0$ и $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum \frac{a_n}{A_n^\sigma}$ сходится при $\sigma > 1$ и расходится при $\sigma \leq 1$.

4999. Так как среднее геометрическое положительных чисел не больше, чем их среднее арифметическое, то

$$\alpha_{n-1} \alpha_n^{p-1} \leq \frac{\alpha_{n-1}^p + (p-1)\alpha_n^p}{p}; \quad \alpha_{n-1} > 0; \quad \alpha_n > 0.$$

Пользуясь этим, доказать неравенство

$$\alpha_n^p - \frac{p}{p-1} \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{1}{p-1} ((n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p),$$

где $n\alpha_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ положительны.

5000. При тех же условиях показать, что

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^m \alpha_n^{p-1} a_n.$$

5001. Если числа a_ν и $b_\nu > 0$, $0 < \lambda < 1$; $\lambda + \mu = 1$, то по неравенству Гельдера

$$\sum_{\nu=1}^m a_\nu b_\nu \leq \left(\sum_{\nu=1}^m a_\nu^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \cdot \left(\sum_{\nu=1}^m b_\nu^{\frac{1}{\mu}} \right)^\mu.$$

Пользуясь им и предыдущим результатом, доказать неравенства Харди и Ландау:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

где $a_n > 0$, а ряд в правой части сходящийся.

5002. Доказать неравенство Карлемана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где $u_n > 0$, а ряд в правой части сходится.

§ 12.2

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ СУММИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ СУММ И БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Если $u_\nu = v_{\nu+1} - v_\nu$, то имеется тождество:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = v_n - v_0.$$

Это замечание и близкие подобные приемы дают решение следующих задач.

Доказать тождества:

5003. $\sum_{\nu=1}^n \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

5004. $\sum_{\nu=1}^n \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$

5005. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}.$

5006. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2.$

5007. $\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 (n - \nu)^2 = \frac{n^5 - n}{30}.$

5008. $1^4 - 2^4 + 3^4 - \dots + (-1)^{n-1} n^4 = (-1)^{n-1} \frac{n^4 + 2n^3 - n}{2}.$

5009. $s_5 + s_7 = 2s_3^2$; $s_\nu = 1^\nu + 2^\nu + \dots + n^\nu.$

Пользуясь формулами Эйлера, найти следующие суммы:

$$5010. 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x.$$

$$5011. \cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x.$$

$$5012. \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

$$5013. \sin x - \sin 2x + \dots - \sin 2nx.$$

$$5014. \sin^2 x - \sin^2 3x + \dots + (-1)^{n-1} \sin^2(2n-1)x.$$

$$5015. x \sin a + x^2 \sin 2a + \dots + x^{n-1} \sin(n-1)a.$$

Доказать равенства:

$$5016. x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}; |x| < 1.$$

$$5017. 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + \dots = \frac{1-x}{(1+x)^3}; |x| < 1.$$

Доказать тождества:

$$5018. \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n+1)(a+n)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}.$$

$$5019. \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)} = \\ = \frac{1}{2a(a+1)} - \frac{1}{2(a+n)(a+n+1)}.$$

$$5020. \frac{1}{a(a+p)} + \frac{1}{(a+1)(a+p+1)} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+p+n-1)} = \\ = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+p-1} \right) - \\ - \frac{1}{p} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a+n+1} + \dots + \frac{1}{a+n+p-1} \right).$$

Доказать равенства:

$$5021. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}.$$

$$5022. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots = \frac{1}{3}.$$

$$5023. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots = \frac{11}{18}.$$

$$5024. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \dots = \frac{23}{90}.$$

$$5025. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$5026. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

$$5027. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$5028. \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots = \frac{1}{90}.$$

$$5029. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{5}{36}.$$

$$5030. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2 \ln 2 - 1.$$

$$5031. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8}.$$

Пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{b}{a+n-1} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a+n} &= \\ &= \operatorname{arctg} \frac{b}{b^2 + (a+n)(a+n-1)}, \end{aligned}$$

доказать равенства:

$$5032. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$5033. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Доказать при $|x| < 1$ равенства:

$$5034. (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots = \frac{1}{1-x}.$$

$$5035. \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

$$5036. \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

Доказать равенства:

$$5037. \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

$$5038. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \cos^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}.$$

Пользуясь равенствами:

$$\int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}, \quad \int_0^1 t^{n-1}(1-t) dt = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2 dt = \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

доказать, что:

$$5039. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right).$$

$$5040. 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\pi + 2 \ln(\sqrt{2} + 1)).$$

$$5041. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$5042. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = \frac{5\pi}{12}.$$

$$5043. \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{n} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

$$5044. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} dx; \alpha > -1, \beta > -1, \alpha \neq \beta.$$

$$5045. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

$$5046. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right).$$

$$5047. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$5048. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

$$5049. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

$$5050. \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Указание. Здесь полезно применить равенство: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

$$5051. \frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2} + \dots = \frac{3\pi^2}{256} - \frac{1}{9}.$$

$$5052. \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \dots = \frac{4\pi^2 - 39}{16}.$$

$$5053. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{(1-x)^2}{2x^2} \ln \frac{1}{1-x}.$$

$$5054. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{5}{24x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{(1-x)^2}{8x^2} \cdot R;$$

$$R = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

если $x > 0$; $R = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-x}$, если $x < 0$.

5055. Пользуясь биномом Ньютона, доказать, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5056. Пользуясь равенством $\int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}$, получить, что

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt,$$

и вывести формулу:

$$\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^2 + \dots = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1-x+xt^2} dt;$$

$$|x| < 1.$$

Доказать равенства:

$$5057. \quad \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$5058. \quad \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^6 + \dots = 1 - \frac{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x}; \quad |x| < 1.$$

$$5059. \quad \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \dots = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$5060. \quad \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Замечая, что $\int_0^1 t^{n-1} \ln t \, dt = -\frac{1}{n^2}$; $\int_0^1 t^{n-1} \ln^2 t \, dt = \frac{2}{n^3}$; $n > 0$, доказать равенства:

$$5061. \quad 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$5062. \quad 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^3} + \dots = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} (\ln 2)^2.$$

5063. Исходя из равенства $\frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)} = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^n \, dt$, доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x^2}{a(a+1)(a+2)} + \dots = \int_0^1 (1-t)^{a-1} e^{xt} \, dt;$$

$$a > 0.$$

5064. Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \dots =$$

$$= e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1!(a+1)} + \frac{1}{2!(a+2)} - \dots \right).$$

5065. Пользуясь тождеством

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = \frac{n!}{(x-2)x(x+1)\dots(x+n-2)} -$$

$$- \frac{(n+1)!}{(x-2)x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

доказать равенство:

$$\frac{1}{x} + \frac{2!}{x(x+1)} + \frac{3!}{x(x+1)(x+2)} + \dots = \frac{1}{x+2}; \quad x > 2.$$

5066. Доказать равенство Стирлинга:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1+n}{x(x+1)(x+2)} + \frac{(1+n)(2+n)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots = \\ = \frac{1}{x^2 - nx}; \quad x > n. \end{aligned}$$

5067. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t+n)^2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t(t+1)} + \frac{2!}{3t(t+1)(t+2)} + \dots$$

5068. Доказать, что при $\gamma > \alpha > 0$, $|x| < 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-xu)^{-\beta} du, \end{aligned}$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

(гипергеометрический ряд Гаусса).

5069. Доказать, что при $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ имеется равенство

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

(Re обозначает действительную часть комплексного числа).

Доказать равенства:

5070. $1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2 + \dots = 1 + ax \int_0^1 \frac{(1-u)^{b-1}}{(1-ux)^{a+1}} du; \quad b > 0.$

5071. $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{2}{\pi}.$

$$5072. \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + 5 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

5073. Доказать равенство $\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\varphi(2x)$, где

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

5074. Пользуясь предыдущим результатом, показать, что

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2}.$$

5075. Интегрированием получить равенство Эйлера

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

5076. Интегрируя и переходя от логарифмов к числам, доказать равенство:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right). \quad (\text{Эйлер.})$$

Доказать равенства Эйлера, дающие разложение в бесконечный ряд дробей следующих функций:

$$5077. \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 - x^2}.$$

$$5078. \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

$$5079. \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)\pi}{x^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}.$$

$$5080. \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

§ 12.3

НАХОЖДЕНИЕ СУММ РЯДОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ; НЕКОТОРЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Дифференцированием равенства $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ получить следующие формулы (при $|x| < 1$):

$$5081. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$5082. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$5083. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

$$5084. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

$$5085. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}.$$

Доказать равенства:

$$5086. x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$5087. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x} + 2 \cos x).$$

$$5088. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} \right).$$

5089. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$; $|x| < 1$, где $\tau(n)$ — число целых делителей n (ряд Ламберта).

5090. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} T(n)x^n$; $|x| < 1$, здесь $T(n)$ — сумма делителей n .

$$5091. \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} r(n)x^n; \quad |x| < 1,$$

$r(n)$ — число различных целых квадратов в разложении n на сумму двух целых квадратов.

5092. Функция $f(x) = x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ четная, т. е. $f(-x) = f(x)$. Поэтому можно положить: $f(x) = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots$, где $A_0, A_1, A_2, \dots$ — неизвестные коэффициенты. Можно положить, что $A_n = \frac{(-1)^{n-1} B_n 4^n}{(2n)!}$, где B_n — другие коэффициенты, называемые числами Бернулли. Разлагая в ряд в написанном неравенстве e^x и e^{-x} и выражая A_n через числа B_n , получим:

$$\frac{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots} = B_0 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 + \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \dots$$

Доказать, что числа Бернулли B_n можно получить одно за другим с помощью рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{4^n B_n}{(2n)!} + (-1)^{n-2} \frac{4^{n-1} B_{n-1}}{3!(2n-2)!} + (-1)^{n-3} \frac{4^{n-2} B_{n-2}}{5!(2n-4)!} + \dots \\ \dots + \frac{4B_1}{(2n-1)!2!} + \frac{B_0}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Применяя ее, можно получить следующие значения первых чисел Бернулли:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1; & B_1 &= \frac{1}{6}; & B_2 &= \frac{1}{30}; \\
 B_3 &= \frac{1}{42}; & B_4 &= \frac{1}{30}; & B_5 &= \frac{5}{66}; \\
 B_6 &= \frac{691}{2730}; & B_7 &= \frac{7}{6}; & B_8 &= \frac{3617}{510}; \\
 B_9 &= \frac{43\,867}{798}; & B_{10} &= \frac{174\,611}{300}; & B_{11} &= \frac{854\,513}{138}; \\
 B_{12} &= \frac{236\,364\,091}{2730}
 \end{aligned}$$

и т. д.

5093. Пользуясь рекуррентной формулой для чисел Бернулли, доказать неравенство: $\frac{4^n B_n}{(2n)!} < \frac{1}{5^n}$, показывающее, что ряд для функции $x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ сходится при $|x| < \sqrt{5}$.

5094. Положив

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n},$$

доказать рекуррентную формулу для чисел Эйлера E_n :

$$\frac{E_n}{(2n)!} - \frac{E_{n-1}}{2!(2n-2)!} + \frac{E_{n-2}}{4!(2n-4)!} - \dots + (-1)^n \frac{E_0}{(2n)!} = 0.$$

5095. Исходя из формулы для чисел E_n , доказать неравенство: $\left| \frac{E_n}{(2n)!} \right| < \rho^n$, где $\rho = \operatorname{ch} 1 - 1 = 0,543\dots$, и показать, что степенной ряд для $\frac{1}{\cos x}$ сходится при $|x| < \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

5096. Из результата задачи 5092 получить разложение:

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n x^{2n-1}}{(2n)!}.$$

5097. Сопоставляя результаты задач 5080 и 5096, получить равенство $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}} = \frac{B_n(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$ и доказать, что ряд задачи 5096 сходится при $|x| < 2\pi$ и расходится при $|x| > 2\pi$.

5098. Сопоставляя задачи 5079 и 5094, получить равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{2n+1}} = \frac{E_n \cdot \pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}.$$

и доказать, что ряд задачи 5094 сходится при $|x| < \frac{\pi}{2}$ и расходится при $|x| > \frac{\pi}{2}$.

Составив дифференциальное уравнение для соответствующих функций, доказать следующие разложения в ряды ($|x| < 1$):

5099. $\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{4} - \dots$

5100. $\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \frac{x^4}{3} - \dots$

5101. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{x^3}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{x^5}{5} + \dots$

5102. $\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{4!} x^4 -$
 $- \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{6!} x^6 + \dots$

5103. $\sin(m \arcsin x) = mx - \frac{m(m^2-1)}{3!} x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{5!} x^5 - \dots$

5104. $\cos(m \arccos x) = A \cos \frac{m\pi}{2} + B \sin \frac{m\pi}{2}$, где A и B — ряды двух предыдущих задач.

Доказать, что в равенствах задач 5102 и 5103 обе части при $|x| < 1$ можно разложить по степеням переменной m . Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях m , получить разложения при $|x| < 1$.

5105. $\arcsin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$

5106. $(\arcsin x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$

5107. $(\arcsin x)^3 =$
 $= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$

$$5108. (\arcsin x)^4 =$$

$$= 6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right).$$

Замечание. Разложения $(\arcsin x)^n$ при $n > 4$ имеют гораздо более сложный вид.

Доказать равенства:

$$5109. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{36 + 2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

$$5110. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{(4n)!} = \frac{16}{15} + \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$5111. \ln \frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^3}{6} + \dots; \quad |x| < 1.$$

$$5112. \left(\frac{2(1-\sqrt{1-x})}{x} \right)^m = 1 + \frac{m}{1} \left(\frac{x}{4} \right) + \\ + \frac{m(m+3)}{2!} \left(\frac{x}{4} \right)^2 + \frac{m(m+3)(m+5)}{3!} \left(\frac{x}{4} \right)^3 + \dots; \quad |x| < 1.$$

5113. Написав интеграл при $0 < x < \pi$ от тождества

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}}$$

и применяя интегрирование по частям, получить равенство:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{\pi - x}{2} + \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2}} + \\ + \frac{1}{2n+1} \int_x^{\pi} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) u \cos \frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} du.$$

5114. Доказать, что

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{при } 0 < x < \pi; \\ -\frac{\pi+x}{2}, & \text{при } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

5115. Применяя подобным образом тождество

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{\sin x},$$

доказать, при $0 < x < \pi$, разложение:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

5116. Исходя из предыдущего разложения, доказать формулу Стеклова:

$$f(x + \pi) - f(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_x^{x+\pi} f(u) \cos((2m+1)(u-x)) du,$$

где $f(x)$ — функция, дифференцируемая в интервале $(x, \pi + x)$.

5117. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, заметив, что

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx.$$

Найти суммы следующих рядов при указанных условиях:

5118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}; 0 < x < 2\pi.$

5119. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}; 0 < x < \pi.$

5120. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}; 0 < x < \pi.$

5121. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}; 0 < x < 2\pi.$

5122. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2-1}; 0 < x < 2\pi.$

5123. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)}; 0 < x < \pi.$

5124. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n(n^2+a^2)}; -\pi < x < \pi.$

5125. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^4-4}; -\pi < x < \pi.$

§ 12.4 РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

5126. Доказать тождество Каталана

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

и, пользуясь им, показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$

5127. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n;$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \frac{C}{2} + \ln \sqrt{4n} + \eta_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а ε_n и $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

5128. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2;$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{2} \ln 2;$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots = 0.$$

5129. Пусть ряд $\sum u_n$ получен из ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ перестановкой членов так, что члены одного знака убывают по абсолютной величине, а среди первых n членов отношение числа положительных членов к числу отрицательных стремится к σ при $n \rightarrow \infty$. Доказать равенство: $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu} = \ln \sqrt{4\sigma}$.

5130. Доказать равенства:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} =$$

$$= \frac{C}{4} + \frac{\pi}{8} + \ln \sqrt[4]{8n} + \varepsilon_n; \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{4n-1} =$$

$$= \frac{C}{4} - \frac{\pi}{8} + \ln \sqrt[4]{8n} + \delta_n; \quad \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

5131. $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \ln 2.$

5132. $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln 2.$

5133. Из гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ выброшены члены, в знаменателе которых содержится цифра 9. Доказать, что полученный ряд сходится, а его сумма меньше 80.

Доказать равенства:

$$5134. s_2 + s_3 + s_4 + \dots = 1; s_\nu = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\nu}.$$

$$5135. s_3 + s_5 + s_7 + \dots = \frac{1}{4}.$$

$$5136. s_2 + \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{3}s_6 + \dots = \ln 2.$$

Пусть a_n — числа натурального ряда, имеющие вид p^q , где p и q — целые числа, большие единицы. Пусть b_m — те из чисел a_n , которые делятся на 2. Доказать равенства Эйлера:

$$5137. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} = 1.$$

$$5138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}.$$

$$5139. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_m - 1} = \ln 2.$$

$$5140. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_m + 1} = \frac{\pi^2}{12} + \ln 2 - 1.$$

Доказать равенства:

$$5141. \varphi(x) + \varphi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x); \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

$$5142. \varphi(1-x) + \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

$$5143. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$$

$$5144. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n S_n}{n!} = 0; S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

5145. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{n!} = e \cdot p_m$, где целые числа p_m связаны равенством:

$$p_{m+1} = 1 + mp_1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} p_2 + \dots + p_m.$$

$$\begin{aligned} 5146. p^\sigma + \frac{\sigma}{1} p^{\sigma-1} q + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2!} p^{\sigma-2} q^2 + \dots + \\ + \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-n+1)}{n!} p^{\sigma-n} q^n = \\ = \frac{\Gamma(\sigma+1)}{n! \Gamma(\sigma-n)} \int_0^p x^{\sigma-n-1} (1-x)^n dx; \end{aligned}$$

здесь $\sigma > n$, $0 < p < 1$, $p+q=1$.

5147. Доказать, что сумма ряда

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{a_4+x} + \dots$$

равна $\frac{a_1}{x}$, если ряд $\sum \frac{1}{a_n}$ расходящийся, и равна

$$\frac{a_1}{x} \left(1 - \prod_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{a_{\nu} + x} \right),$$

если ряд $\sum \frac{1}{a_n}$ сходящийся. Числа $x, a_1, a_2, a_3, \dots$ положи-
тельны.

Доказать равенства:

$$5148. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)} = \frac{1}{x}; \quad x > 0.$$

$$5149. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)\dots(x^2+n^2)} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\pi x(x^2+1)}{\operatorname{sh} \pi x} \right).$$

Найти суммы рядов:

$$5150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}.$$

$$5151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2}.$$

$$5152. \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^4}.$$

Доказать следующие предложения:

$$5153. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$5154. \text{ Если } u_n > 0, u_n - u_{n+1} > 0, u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} > 0, \text{ то } \\ \frac{u_0}{2} < u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots < u_0 - \frac{1}{2}u_1.$$

$$5155. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \dots \right) = \frac{1}{4}.$$

5156. Если $a_n > 0, b_n > 0$, ряд $\sum a_n x^n$ расходящийся при $x = 1$, и сходящийся при $|x| < 1$ и $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum \frac{a_n x^n}{b_n x^n} = A.$$

5157. Если $\sum a_n$ расходится и $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow A$, где $A_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}$, $B_n = \sum_{\nu=1}^n b_{\nu}$, то $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum \frac{a_n x^n}{b_n x^n} = A$.

$$5158. \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} x^n = \Gamma(p); \quad p > 0.$$

5159. Если $\frac{a_n}{n^{p-1}} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a \Gamma(p).$$

5160. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^p} = a$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a\Gamma(p+1); \quad p > -1.$$

5161. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x}(x+x^4+x^9+\dots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{5162.} \quad \sum_{n=a}^b f(n) &= \frac{f(a)+f(b)}{2} + \\ &+ \int_a^b f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x) \cos 2\pi n x dx \end{aligned}$$

(формула Пуассона).

$$\mathbf{5163.} \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \right).$$

$$\mathbf{5164.} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \dots) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{5165.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(n+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}} \cos 2\pi n x.$$

5166. Если ряд $\sum a_n$ сходится и имеет сумму s и притом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = f(x), \quad \text{то} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = s \quad (\text{Борель}).$$

5167. Если R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$, то радиус сходимости ряда $\sum a_n b_n x^n$ не меньше, чем $R_1 R_2$.

5168. Для сходимости ряда $\sum a_n$ с положительными убывающими членами условие $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ необходимо.

5169. Если $f(x) < M$ при $0 < x < 2\pi$, то для ее коэффициентов Фурье справедливы неравенства:

$$|a_n| < 2M - a_0; \quad |b_n| < 2M - a_0.$$

5170. Ряды $\sum \frac{\cos x \sqrt{n}}{n^\sigma}$ и $\sum \frac{\sin x \sqrt{n}}{n^\sigma}$ при $x \neq 0$ сходятся при $\sigma > \frac{1}{2}$ и расходятся при $\sigma < \frac{1}{2}$.

5171. Ряд $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^\sigma}$, где $[\sqrt{n}]$ — целая часть $\sqrt{n}$, сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$ и расходится при $\sigma < \frac{1}{2}$.

5172. Пользуясь равенством $\frac{1}{a} = \int_0^1 x^{a-1} dx$, $a > 0$, доказать формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{n}{m+p} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{m+2p} - \dots + (-1)^n \frac{1}{m+np} = \\ = \frac{n!p^n}{m(m+p)\dots(m+np)}. \end{aligned}$$

5173. Доказать тождество:

$$\begin{aligned} (1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) = \\ = 1 + \frac{q^n - 1}{q - 1}x + \frac{(q^n - 1)(q^n - q)}{(q - 1)(q^2 - 1)}x^2 + \\ + \frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)}{(q - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1)}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Замечание. При замене x на qx левая часть умножается на $1 + q^n x$ и делится на $1 + x$.

Доказать равенства при $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{5174.} \quad (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots = 1 + \frac{q}{1-q}x + \\ + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5175.} \quad (1+qx)(1+q^3x)(1+q^5x)\dots = 1 + \frac{q}{1-q^2}x + \\ + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}x^2 + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5176.} \quad \prod_{\nu=0}^{n-1} (1+q^{2\nu+1}x)(1+q^{2\nu+1}x^{-1}) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}(x^{\nu} + x^{-\nu}); \\ A_{\nu} = q^{\nu^2} \cdot \frac{(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\dots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n-2\nu})}. \end{aligned}$$

5177. Пользуясь предыдущим результатом, получить тождество Якоби:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2}(x^{\nu} + x^{-\nu}) = \\ = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1+q^{2\nu+1}x)(1+q^{2\nu+1}x^{-1})(1-q^{2\nu}). \end{aligned}$$

5178. Заменой переменных из предыдущего результата получить тождество Эйлера:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

5179. Доказать тождества Якоби (при $|q| < 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} x^{2n+1} &= \\ &= q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} x^2)(1 - q^{2n} x^{-2})(x - x^{-1}); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} x^{2n+1} &= \\ &= q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} (x + x^{-1}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n} x^2)(1 + q^{2n} x^{-2}); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^{2n} &= \\ &= q_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} x^2)(1 - q^{2n-1} x^{-2}), \end{aligned}$$

где $q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$.

5180. Тэта-функции Якоби определяются равенствами (при $|q| < 1$).

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi v; \\ \vartheta_2(v) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)\pi v; \\ \vartheta_3(v) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n v; \\ \vartheta_4(v) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\pi n v. \end{aligned}$$

Доказать равенства (при $|q| < 1$):

$$\vartheta_1(v) = 2q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n});$$

$$\vartheta_2(v) = 2q_0 \cdot q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n});$$

$$\vartheta_3(v) = q_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2});$$

$$\vartheta_4(v) = q_0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}),$$

где q_0 имеет прежнее значение.

5181. Полагая

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}); \quad B = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}); \quad C = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})$$

и $f(q) = ABC$, где $|q| < 1$, доказать, что $f(q) = f(q^2)$ и, следовательно, $ABC = 1$.

5182. Доказать равенство Якоби: $\vartheta'_1 = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4$, где $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta'_1$ — значения этта-функций и производной от них при $v = 0$.

Доказать равенства:

5183. $\sqrt{N} = a \left(1 + \beta + \frac{1 \cdot 3}{2!} \beta^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \beta^3 + \dots \right)$, где $N = a^2 + b$; $\beta = \frac{b}{2N}$; $|b| < N$.

5184. $\sqrt[3]{N} = a \left(1 + \beta + \frac{1 \cdot 4}{2!} \beta^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3!} \beta^3 + \dots \right)$, где $N = a^3 + b$; $\beta = \frac{b}{3N}$; $|b| < N$.

Проверить равенства:

5185. $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16885\dots$

5186. $\sqrt[3]{2} = 1,25991\ 20498\ 94873\ 16476\ 72106\dots$

5187. Проверить равенство Рамануджана:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002^2} + \frac{3}{1003^3} + \frac{4^2}{1004^4} + \frac{5^3}{1005^5} + \dots = \\ = \frac{1}{1000} - 10^{-440} \cdot 1,0125\dots \end{aligned}$$

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 13.1 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

5188. Полагая, что написанные числа верны только до последней значащей цифры, найти приближенные значения следующих величин:

а) $0,53784 \cdot 42,46578$;

б) $0,234 + 4,3758 + 15,372 \cdot 0,3762$;

в) $\sqrt{2,375} + \frac{0,375}{4,578}$.

5189. Угол при измерении угломерным прибором оказался равным $32^{\circ}13'25'' \pm 10''$. Какова относительная погрешность?

5190. Сторона квадрата приблизительно равна 1 м. С какой степенью точности ее надо измерить, чтобы погрешность площади была не больше 1 см^2 ?

5191. Маятник длиной около 2 м совершил около 400 качаний. Зная, что длина его измерена с точностью до 1 мм, а общая продолжительность колебаний измерена с точностью до 0,5 с, определить, с какой точностью можно найти по этим данным величину ускорения g , а также выяснить, какая ошибка измерения сильнее сказывается на результате.

5192. При измерении длины пролета строящегося моста на одном берегу реки отложена линия (базис), равная $200 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м}$. Измерены углы между базисом и направлениями из концов его на точку за рекой. Они оказались $90^{\circ} \pm 1'$ и $60^{\circ} \pm 1'$. С какой степенью точности можно определить по этим данным длину пролета моста?

5193. При какой величине угла относительная ошибка вычисления катета прямоугольного треугольника по данному катету и противолежащему углу будет особенно мала, если пренебрегать ошибкой в измерении данного катета?

5194. В поле зрения зрительной трубы нивелира видны две горизонтальные линии. При рассмотрении в эту трубу вертикальной рейки с дециметровыми делениями между нитями видны 10 делений рейки, если рейка удалена на 50 м. При переносе рейки в другой пункт между теми же делениями видны $25 \pm 0,2$ деления. Каково расстояние до нового положения рейки?

5195. В пятизначных логарифмических таблицах даны десятичные логарифмы чисел с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Как велика может быть погрешность при нахождении числа по логарифму, если число заключено между числами 300 и 400?

5196. Тот же вопрос в применении к таблице логарифмов синусов и логарифмов тангенсов, если угол около 45° .

5197. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которой пользовался Архимед при вычислении π , выражается при $r = 1$ формулой

$$P = 96 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить P с точностью до 0,001, с какой точностью надо производить вычисление подкоренных величин?

5198. Гипсометрическая формула, по которой определяют высоту места над землей, такова:

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{18400(1-at)}}.$$

При этом p_0 — давление на поверхности земли, p — давление в данном месте на высоте h , $a = \frac{1}{273}$, t — температура по Цельсию. Определить, какова погрешность в определении высоты, если $t = 0^\circ$, а величина $p = 500$ мм с точностью до 1 мм.

5199. Найти целую функцию от x , по возможности низкой степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10$ соответственно значения 3, 7, 9, 19.

5200. Найти целую функцию от x , по возможности низкой степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10, 15$ соответственно значения 3, 7, 9, 19, 0.

5201. Найти целую функцию от x , по возможности низкой степени, принимающую при $x = 1, 2, 3, 4, 5$, соответственно значения 2, 1, -1 , 5, 0.

5202. Найти многочлен $f(x)$, по возможности низкой степени, принимающий при $x = -2, -1, 0, 1, 2$ те же значения, что и функция $y = \sin \frac{\pi x}{2}$. Определить величину разности $f(x) - y$ при значениях x , равных $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 10$.

5203. Найти многочлен $f(x)$, по возможности низкой степени, принимающий при $x = -2, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, 2$ те же значения, что и функция $y = \cos \frac{\pi x}{4}$. Определить значения разности $f(x) - y$ при значениях x , равных $-1, 3, 10$.

5204. Для функции $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ при $x = 0$ вычислены значения разностей $\Delta y_0 = +3$, $\Delta^2 y_0 = 0$, $\Delta^3 y_0 = 5$, соответствующие приращению $h_0 = 1$ аргумента. Требуется вычислить разности $\overline{\Delta y_0}$, $\overline{\Delta^2 y_0}$, $\overline{\Delta^3 y_0}$, соответствующие приращению аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

5205. Для функции $y = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$ при $x = 0$ вычислены разности $\Delta y_0 = 4$, $\Delta^2 y_0 = 28$, $\Delta^3 y_0 = 66$, $\Delta^4 y_0 = 48$, соответствующие приращению $h_0 = 1$ аргумента. Требуется вычислить разности $\overline{\Delta y_0}$, $\overline{\Delta^2 y_0}$, $\overline{\Delta^3 y_0}$, $\overline{\Delta^4 y_0}$, соответствующие приращению аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

5206. Найти уравнение прямой, для которой сумма квадратов расстояний до точек $(3, 2)$, $(7, 5)$, $(12, 9)$, $(-3, -2)$ была бы наименьшей.

5207. Найти уравнение параболы второго порядка так, чтобы сумма квадратов расстояний до нее по вертикали от точек $(-3, 4)$, $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ была бы наименьшей.

5208. Пользуясь таблицей

x	$\ln x$	$10^{10} \Delta \ln x$	$10^{10} \Delta^2 \ln x$
1 005	3,002166059	4319184,7	-4291,3
1 006	3,002597978	4314893,4	-4282,8

вычислить $\ln 1005,237$, определив точность вычислений.

Указание. $\left| \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right| < \frac{1}{10}$ при $0 < x < 1$.

Числа таблицы даны с точностью до $\frac{1}{2}$ последнего знака.

5209. Пользуясь таблицей задачи 5208, найти x по данному $\ln x = 3,002268651$.

5210. Пользуясь таблицей

u	$\ln \operatorname{sh} u$	$10^5 \Delta \ln \operatorname{sh} u$	$\ln \operatorname{ch} u$	$10^5 \Delta \ln \operatorname{ch} u$
0,500	9,71692	94,0	0,05217	20,1
0,501	9,71786	93,8	0,05237	20,1
0,502	9,71879	93,7	0,05257	20,1
0,503	9,71973	93,5	0,05277	20,2
0,504	9,72066	93,3	0,05297	20,2

найти $\operatorname{sh} 0,50235$.

5211. Найти корень уравнения $\operatorname{ch} u = 1,1287$. См. таблицу задачи 5210.

5212. При помощи данных таблицы справа, вычислить с возможной точностью $\sin 41^\circ 20'$.

x	$\sin x$
41°	0,6560590290
42°	0,6691306064
43°	0,6819983601
44°	0,6946583705

5213. По данным таблицы 13.1 вычислить $F(\varphi)$ при $\varphi = 21^\circ 15'$.

5214. По данным таблицы 13.2 вычислить корень уравнения $F(\varphi) = 0,5$.

Таблица 13.1

φ	$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$
$21,0^\circ$	0,3706344
$21,5^\circ$	0,3796626
$22,0^\circ$	0,3887052
$22,5^\circ$	0,3977625

Таблица 13.2

φ	$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$
$28,0^\circ$	0,49846361
$28,5^\circ$	0,50772435
$29,0^\circ$	0,51700422
$29,5^\circ$	0,52630357

Таблица 13.3

x	$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx}$
0,71	0,2164501462
0,72	0,2242928871
0,73	0,2320769593
0,74	0,2398032061

Таблица 13.4

x	$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx}$
0,83	0,3068612
0,84	0,3140589
0,85	0,3212000
0,86	0,3282922

5215. По данным таблицы 13.3 вычислить $\psi(0,715)$. Для оценки погрешности следует принять в соображение, что $\psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots$

5216. По данным таблицы 13.4 вычислить корень уравнения $\psi(x) = 0,31$.

Погрешность, получаемая при замене данной функции ее интерполяционным многочленом, зависит от значения производной соответствующего порядка в интервале интерполирования. Точная величина производной высокого порядка часто выражается слишком сложно, а нередко и вовсе неизвестна. В практике интерполяции часто применяют интерполяционную формулу, выраженную через последовательные разности, учитывая, в зависимости от желаемой точности, члены соответственной малости. Если величины последовательных производных изменяются не очень прихотливо, то такой прием дает погрешность приблизительно того же порядка, что первые из отброшенных членов формулы. Таблицы функций обычно дают значения функций через равные промежутки. Поэтому особо важны формулы, составленные по равностоящим значениям аргумента. Вот некоторые из них.

1. Формула Ньютона—Грегори:

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

2. Формула Ньютона—Гаусса:

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x^2-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{x(x^2-1)(x-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots$$

3. Формула Ньютона—Стирлинга:

$$y_x = y_0 + x\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\ + \frac{x(x^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots$$

4. Формула Ньютона–Бесселя:

$$\begin{aligned}
 y_x = & \frac{1}{2}(y_0 + y_1) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \\
 & + \frac{x(x-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
 & + \frac{x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\
 & + \frac{x(x-1)(x^2-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

Принятые здесь обозначения разностей даны в следующей схеме:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$x-4$	y_{-4}				
		Δy_{-4}			
$x-3$	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$	
$x-2$	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
$x-1$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
x	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
$x+1$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$x+2$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
$x+3$	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$	
$x+4$	y_4		$\Delta^2 y_3$		
		Δy_4			
$x+5$	y_5				

5217. Пользуясь таблицей значений обратных величин целых чисел и интерполяционной формулой, взятой до четвертых разностей включительно, найти величины дроби $\frac{1}{12,5}$ с помощью формул:

- Ньютона–Грегори при $y_0 = \frac{1}{12}$, $y_1 = \frac{1}{13}$, $y_2 = \frac{1}{14}$, ...
- Ньютона–Гаусса и
- Ньютона–Бесселя, сравнив полученные результаты с точной величиной.

5218. Подобный же вопрос для величины $\sqrt{12,25}$; $y_0 = \sqrt{12}$, $y_1 = \sqrt{13}$, $y_2 = \sqrt{14}$; ...

5219. Из 1000 родившихся доживает до возраста 20 лет, 30 лет, 40 лет, 50 лет, 60 лет соответственно 560, 530, 480, 400 и 300 человек. Сколько людей из 1000 доживает до 35 и 45 лет?

5220. В некоторой местности числа людей, возрасты которых относятся к трем последовательным пятилетиям, такие:

$$37\ 237, \quad 40\ 118, \quad 42\ 652.$$

Сколько людей в возрасте среднего года второго пятилетия?

5221. Числа людей в возрастах 25–30, 30–35, 35–40, 40–45 лет соответственно таковы:

$$458\ 572, \quad 441\ 424, \quad 423\ 123, \quad 402\ 918.$$

Скольким людям идет 38-й год?

5222. Таблица содержит в одной колонне 20 последовательных значений функции. Суммы трех последовательных колонок таковы: 630 611, 1 946 935, 3 246 319. С какого числа начинается четвертая колонна?

§ 13.2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Вычислить по способу трапеций следующие интегралы, принимая указанное в каждой задаче число промежутков n :

5223. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}; n = 4.$

5224. $\int_1^3 \frac{dx}{x+1}; n = 4.$

5225. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; n = 4.$

5226. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx; n = 4.$

5227. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx; n = 6.$

5228. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx; n = 6.$

5229. Вычислить те же интегралы при $n = 4$ по формуле Симпсона.

5230. То же по формуле Котеса.

5231. То же по способу Чебышева.

5232. То же по способу Гаусса.

5233. После подстановки $x = \sin \varphi$ вычислить по способу Симпсона при $n = 4$ интегралы:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

5234. То же с подстановкой $1-x = u^2$.

5235. После подстановки $x = \frac{1}{t}$ вычислить по способу Симпсона при $n = 4$ интеграл $\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

5236. С помощью формулы Симпсона и параметрического уравнения эллипса получить приближенную формулу для длины дуги четверти эллипса с полуосями a и b :

$$l = \frac{\pi}{12} \left(a + b + \sqrt{8(a^2 + b^2)} \right).$$

5237. Исследовать степень точности предыдущей формулы при $b = 0$, при $b = a$ и при $b = \frac{a}{2}$ (в последнем случае сравнить с результатом формулы Симпсона при $n = 4$).

Доказать следующие формулы квадратур типа Гаусса, из которых первая принадлежит Эрмиту, а остальные Стильтесу.

$$\mathbf{5238.} \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f \left(\cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} \right).$$

$$\mathbf{5239.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f \left(\cos \frac{\nu\pi}{n} \right).$$

$$\mathbf{5240.} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{m} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{m} f \left(\cos \frac{2\nu\pi}{m} \right).$$

$$5241. \int_0^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f\left(\cos^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{4n}\right).$$

$$5242. \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) dx = \frac{\pi}{4n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} f\left(\cos^2 \frac{\nu\pi}{n}\right).$$

$$5243. \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} f(x) dx = \frac{2\pi}{m} \sum_{\nu=1}^n \sin^2 \frac{\nu\pi}{m} f\left(\cos^2 \frac{\nu\pi}{m}\right).$$

(В задачах 5240 и 5243 положено $m = 2n + 1$.)

Формулы 5239 и 5241 вполне точны, если $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем $2n-2$. Остальные, если $f(x)$ — многочлен степени меньшей чем $2n$.

Пользуясь этими формулами при $n = 4$, вычислить интегралы:

$$5244. \int_0^1 \sqrt{x(1-x^2)} dx$$

$$5245. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Доказать точность формул:

5246. $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2})$, где $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем четыре.

5247. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right)$, где $f(x)$ — многочлен степени меньшей, чем шесть.

В приложениях нередко приходится вычислять интегралы от функций, для которых имеется таблица значений, для равномерно растущих значений аргумента. В таких случаях бывает удобно применять формулы квадратур, содержащие разности. Из них отметим две.

Формула Грегори (1670)

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+nh} y dx = \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n + \sum_{\nu} A_{\nu} (\Delta^{\nu} y_{n-\nu} + (-1)^{\nu} \Delta^{\nu} y_0),$$

где значения первых коэффициентов A_{ν} таковы:

$$A_1 = -\frac{1}{12}; \quad A_2 = -\frac{1}{24}; \quad A_3 = -\frac{19}{720};$$

$$A_4 = -\frac{3}{160}; \quad A_5 = -\frac{863}{60480}, \dots$$

Формула Гаусса

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+nh} y \, dx = \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + \frac{1}{2} y_n + \sum_{\nu} B_{\nu} \times \\ \times \left(\frac{\Delta^{2\nu+1} y_{n-\nu} + \Delta^{2\nu+1} y_{n-\nu-1}}{2} - \frac{\Delta^{2\nu+1} y_{-\nu} + \Delta^{2\nu+1} y_{-\nu-1}}{2} \right),$$

где значения B_{ν} такие:

$$B_0 = -\frac{1}{12}; \quad B_1 = \frac{11}{720}; \quad B_2 = -\frac{191}{60\,480}.$$

В обеих формулах $y_0, y_1, \dots, y_n$ суть значения y при $x = a, a+h, \dots, a+nh$. Величины $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots$ — последовательные разности. На практике вычисление правой части равенства продолжают до слагаемых, которыми считают возможным пренебречь по их малости. Так как обычно успех оправдывает эту практику, то теоретической оценкой сделанной погрешности, вообще довольно затруднительной, пренебрегают.

5248. Применить формулу Грегори к вычислению интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, полагая $n = 1, h = 0,1$, ведя вычисление с семью знаками после запятой.

5249. То же для формулы Гаусса.

5250. Провести аналогичные вычисления для интеграла

$$\int_{100}^{110} \frac{dx}{x}.$$

§ 13.3 ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА—МАКЛОРЕНА И ПОДОБНЫЕ МЕТОДЫ

Формула Эйлера—Маклорена имеет вид

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) \, dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{B_1}{2!} |f'(x)|_a^b - \frac{B_2}{4!} |f'''(x)|_a^b + \dots \\ \dots + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{(2m-2)!} |f^{(2m-3)}(x)|_a^b + \theta \frac{(-1)^{m+1} B_m}{(2m)!} |f^{(2m-1)}(x)|_a^b.$$

Здесь подразумевается, что $f^{(2m)}(x)$ сохраняет знак при $a < x < b$, $0 < \theta < 1$, а коэффициенты $B_1, B_2, B_3, \dots$ — числа Бернулли (см. задачу 5092).

5251. Доказать при $m > 1$ формулу:

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \frac{1}{(m-1)a^{m-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{a^m} + \frac{B_1}{2!} \frac{m}{a^{m+1}} - \\ - \frac{B_2}{4!} \frac{m(m+1)(m+2)}{a^{m+3}} + \dots + \\ + (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \frac{m(m+1)\dots(m+2p-2)}{a^{m+2p-1}} \theta; \quad 0 < \theta < 1.$$

5252. Полагая $\sigma_m = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^m}$, доказать, что величины первых σ_m , выраженные в единицах 15-го знака после запятой, таковы:

$\sigma_2 =$	10516 63356 81686	$\sigma_8 =$	199 42680
$\sigma_3 =$	552 49174 85401	$\sigma_9 =$	18 23673
$\sigma_4 =$	38 66502 17381	$\sigma_{10} =$	1 69270
$\sigma_5 =$	3 04137 98676	$\sigma_{11} =$	15894
$\sigma_6 =$	25495 43018	$\sigma_{12} =$	1506
$\sigma_7 =$	2224 31766	$\sigma_{13} =$	144
		$\sigma_{14} =$	14

5253. Доказать равенство $\sum_{m=2}^{\infty} \sigma_m = \frac{1}{9}$ и, пользуясь им, проверить точность значений σ_m , данных в предыдущей задаче.

5254. Пользуясь сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$, формулой Эйлера—Маклорена, а также тем, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{m+p} u_n,$$

доказать равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} = \\ = C + \ln m + \frac{1}{2m} - \frac{B_1}{2} \cdot \frac{1}{m^2} + \dots \\ \dots + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1}}{2p-2} \frac{1}{m^{2p-2}} + (-1)^p \frac{B_p}{2p} \frac{1}{m^{2p}} \cdot \theta; \\ 0 < \theta < 1.$$

5255. Полагая в предыдущем результате $m = 3$, $p = 9$, вычислить постоянную C (постоянная Эйлера).

5256. Вычислить сумму $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n}$ с точностью до 10^{-7} .

5257. Пользуясь формулой Эйлера—Маклорена, доказать равенство:

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} = A + 2\sqrt{m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{B_1}{2!2m\sqrt{m}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!2^3} \frac{B_2}{m^3\sqrt{m}} - \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^p \cdot 1 \cdot 3 \dots (4p-3)B_p}{(2p)!2^{2p-1}m^{2p-\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{p+1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (4p-1)}{(2p+2)!2^{2p+1}} \cdot \frac{B_{p+1}}{m^{2p+\frac{3}{2}}} \cdot \theta; \quad 0 < \theta < 1.$$

5258. Пользуясь формулой Эйлера—Маклорена, вычислить суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ с точностью до 10^{-7} .

Пользуясь интегралами

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} dx = \frac{1}{m}, \quad \int_0^{\infty} e^{-mx} \sin nx dx = \frac{n}{m^2 + n^2}; \quad m > 0,$$

доказать равенства:

$$\mathbf{5259.} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx.$$

$$\mathbf{5260.} \quad \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \dots = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2nx}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$\mathbf{5261.} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} n}{n^2 + (n + \nu + 1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx} \sin nx}{e^x + 1} dx.$$

Исходя из соответствующих разложений в ряды дробей, можно доказать, что при любом вещественном x справедливы формулы:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu} \frac{(2^{2\nu} - 1)B_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} +$$

$$+ \theta \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n \cdot x^{2n-1}.$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} + \theta \cdot (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu} E_{\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu} + \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Здесь B_n и E_n — числа Бернулли и Эйлера, $0 < \theta < 1$.

Пользуясь этим и предыдущими результатами, доказать равенства:

$$\begin{aligned} 5262. \quad \ln 2 = & \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + \frac{(-1)^n}{2n} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n+\mu}}{n^{2\mu}} \frac{(2^{2\mu}-1)B_{2\mu}}{\mu} + \theta \cdot (-1)^{n+m} \frac{(2^{2m}-1) \cdot B_m}{n^{2m} \cdot m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5263. \quad \frac{\pi}{4} = & \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} + \\ & + n \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{n+\mu-1} E_{\mu-1}}{(2n)^{2\mu}} + \frac{n\theta \cdot (-1)^{n+m} \cdot E_m}{(2n)^{2m+2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5264. \quad \frac{\pi}{2} = & \sum_{\nu=1}^n \frac{2n}{n^2 + \nu^2} - \frac{2\pi}{e^{2\pi n} - 1} + \frac{1}{2n} + \\ & + \sum_{\mu=1}^m \frac{(-1)^{\mu-1} B_{2\mu-1}}{(2n^2)^{2\mu-1}} \frac{1}{2\mu-1} + \frac{\theta(-1)^m B_{2m+1}}{(2n^2)^{2m+1}} \frac{1}{2m+1}. \end{aligned}$$

Здесь $0 < \theta < 1$. Последняя формула была дана Эйлером без указания остаточного члена.

5265. Доказать формулу:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\ln \nu}{\nu} = C + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{\ln n}{2n} + \frac{1 - \ln n}{12n^2} + \theta \frac{6 \ln n - 11}{720n^4},$$

где $C = -0,072815 \dots$; $0 < \theta < 1$.

Доказать равенства:

$$5266. \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\ln \nu}{\nu^2} = 0,9375483 \dots$$

$$5267. \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \ln \nu}{\nu^2} = 0,1013166 \dots$$

$$5268. \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\sqrt{\nu}} = 0,604898 \dots$$

§ 13.4

УСИЛЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Преобразование Эйлера

5269. Пусть $S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \dots$ — сходящийся ряд, а числа $u_0, u_1, u_2, \dots$ не обязательно положительны. Доказать равенство:

$$S = \frac{u_0}{2} - \frac{\Delta u_0}{2} + \frac{\Delta u_1}{2} - \frac{\Delta u_2}{2} + \dots,$$

где $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots$ — разности: $\Delta u_0 = u_1 - u_0, \Delta u_1 = u_2 - u_1$.

5270. Повторным применением предыдущего приема доказать равенство:

$$S = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{4}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\Delta^{n-1}u_0 + (-1)^n R_n,$$

где $2^n R_n = \Delta^n u_0 - \Delta^n u_1 + \Delta^n u_2 - \dots$.

5271. Если числа $\Delta^n u_0, \Delta^n u_1, \Delta^n u_2, \dots$ одного знака и по абсолютной величине убывают, то $R_n = \frac{\theta \cdot \Delta^n u_0}{2^n}$; $\frac{1}{2} < \theta < 1$.

5272. Полагая $S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} \rho_{n+1}$, где $\rho_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$, доказать тождество

$$S = \frac{u_0}{2} - \frac{\Delta u_0}{2} + \frac{\Delta u_1}{2} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{\Delta u_{m-1}}{2} + (-1)^m \frac{\Delta \rho_m}{2}.$$

5273. Для величины R_n в задаче 5270 доказать равенство:

$$2^n R_n = \Delta^n \rho_0,$$

где $\rho_\nu = u_\nu - u_{\nu+1} + u_{\nu+2} - \dots$.

5274. Доказать теорему: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится, то

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 - \dots,$$

где ряд в правой части тоже сходится. (Преобразование Эйлера.)

5275. Пользуясь тождеством $a = \frac{a}{1+x} + \frac{ax}{1+x}$, доказать тождество

$$u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - \dots = \frac{u_0 x}{1+x} - \frac{\Delta u_0 \cdot x^2}{1+x} + \frac{\Delta u_1 \cdot x^3}{1+x} - \dots,$$

где ряд $u_0 x - u_1 x^2 + \dots$ сходится по условию при $-1 < x < 1$.

5276. При тех же условиях доказать равенство:

$$S = u_0 y - \Delta u_0 \cdot y^2 + \Delta^2 u_0 \cdot y^3 - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} u_0 \cdot y^n + (-1)^n R_n,$$

где $y = \frac{x}{1+x}$; $\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \dots$ — последовательные разности, а величина

$$\begin{aligned}(1+x)^n R_n &= x^{n+1} \Delta^n u_0 - x^{n+2} \Delta^n u_1 + \dots = \\ &= x((-1)^n x^n \rho_0 + (-1)^{n-1} x^{n-1} \rho_1 + \dots + \rho_n),\end{aligned}$$

где $\rho_p = u_p x^p - u_{p+1} x^{p+1} + \dots$.

5277. Доказать, что

$$\begin{aligned}u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - \dots = \\ = u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right) - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \Delta^2 u_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 - \dots,\end{aligned}$$

если $0 < x < 1$, а ряд в левой части сходится.

5278. Доказать при $m > 0$, $x > -\frac{1}{2}$ равенство:

$$\begin{aligned}\frac{x}{m} - \frac{x^2}{m+1} \frac{x^2}{m+2} - \dots = \\ = \frac{1}{m} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{m(m+1)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \\ + \frac{1 \cdot 2}{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots\end{aligned}$$

5279. Доказать равенство:

$$\arctg x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^n.$$

Найти преобразованием Эйлера с точностью до 10^{-5} суммы следующих рядов. (Первые несколько членов полезно суммировать непосредственно).

5280. $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

5281. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

5282. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$

5283. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$

5284. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$

5285. $\frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 11} + \frac{1}{\ln 12} - \frac{1}{\ln 13} + \dots$

5286. Доказать, что, применяя преобразование Эйлера к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, мы улучшаем сходимость, а применяя его к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, ухудшаем.

Преобразование Куммера

Если ряд $\sum u_n$ сходится, а ряд $\sum C_n$ имеет известную сумму C и притом $\frac{u_n}{C_n} \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$, то очевидное тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = C\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} (u_n - C_n\gamma)$$

заменяет данный ряд другим, более сходящимся, так как очевидно, что $\frac{u_n - C_n\gamma}{u_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В частности, если подобрать такой ряд чисел $p_1, p_2, p_3, \dots$, что $p_n u_n \rightarrow 0$ и $\frac{p_n u_n - p_{n+1} u_{n+1}}{u_{n+1}} \rightarrow 1$, то можно положить в предыдущем тождестве $C_{n+1} = p_n u_n - p_{n+1} u_{n+1}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (p_1 + 1)u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - p_n u_n + p_{n+1} u_{n+1}),$$

выражающее преобразование Куммера.

5287. Полагая для ряда $\sum \frac{1}{n^2}$, что $C_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, доказать равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 - 1)}.$$

5288. Доказать равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 - 1)} = -\frac{2}{9} - 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}.$$

5289. Из ряда $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, выбирая p_n в форме $an + b + \frac{c}{n+d}$, где a, b, c, d — соответствующие коэффициенты, преобразованием Куммера получить равенство:

$$\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3}.$$

5290. Из ряда $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ получим формулу:

$$\frac{3\pi^2}{32} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^3}.$$

Доказать равенства:

$$5291. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^4(n+1)^4}.$$

$$5292. e = 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}.$$

$$5293. \ln 2 = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2(n+1)^2}.$$

$$5294. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2(n+1)^2} = \frac{7}{96} - \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)n^2(n+2)^2}.$$

$$5295. \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}.$$

$$5296. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(4n^2-1)^3}.$$

$$5297. \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{3}{5} - 27 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \frac{4n-1}{(2n-1)^2(8n^2-12n+9)(8n^2+4n+5)},$$

$$\text{где } u_n = (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2.$$

Преобразование Куммера в его простейшей форме с пользой применяется к тригонометрическим рядам. Применяя преобразование такого типа, доказать равенства при $0 < x < \pi$.

$$5298. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin nx}{n^3+1} = \frac{\pi-x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^3+1)}.$$

$$5299. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n+1} \cos nx = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n^3+n+1)}.$$

$$5300. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1} \sin nx = \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n(n^2+1)} \sin nx.$$

$$5301. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \cos nx = \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)} \cos nx.$$

$$5302. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \sin(2n+1)x = \\ = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{(n^2+1)(2n+1)} \sin(2n+1)x.$$

5303. Доказать, что функция $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+1}$ при $0 < x < \pi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' - y = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

5304. Доказать, что функция $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin 2nx$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет уравнению

$$y^{\text{VI}} + 64y = -\frac{16 \cos x}{\sin^3 x}.$$

§ 13.5 ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Разложением подынтегральной функции найти величины следующих интегралов с точностью до 10^{-5} .

$$5305. \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$5308. \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

$$5306. \int_0^1 \operatorname{ch}(x^2) dx.$$

$$5309. \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$5307. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$5310. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

В следующих интегралах полезно сначала выполнить соответствующую замену переменных и лишь тогда разлагать в ряд.

$$5311. \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x)\ln(1+x)}; x+1 = e^t.$$

$$5312. \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}; \operatorname{tg} x = u.$$

$$5313. \int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x}; x = 2 \operatorname{arctg} u.$$

Разложив в ряд, проинтегрировав и применяя затем преобразование Эйлера, вычислить следующие интегралы с точностью до 10^{-5} :

$$5314. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$5315. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}.$$

5316. Разлагая $x^x = e^{x \ln x}$ по степеням $x \ln x$, получить равенство:

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \dots = 0,7834305 \dots$$

5317. Положив $x = \sin \varphi$ и разлагая по степеням $\sin^2 \varphi$, доказать при $|k| < 1$ равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \\ & = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right). \end{aligned}$$

В следующих задачах полезно воспользоваться интегралом из теории гамма-функций, а также формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^\sigma} &= 1 - \sigma x + \frac{\sigma(\sigma+1)}{2!} x^2 - \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+n-1)}{n!} x^n + R_n, \end{aligned}$$

где

$$R_n = (-1)^{n+1} \cdot \theta \frac{\sigma(\sigma+1) \cdots (\sigma+n)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Здесь $0 < \theta < 1$; $\sigma > 0$, x — любое положительное число.

Доказать асимптотические формулы, весьма удобные при больших значениях параметра n . (В этих формулах θ — некоторое число из промежутка $(0, 1)$.)

$$\begin{aligned} 5318. \quad \int_n^\infty \frac{e^{-x}}{n+x} dx = \\ = e^{-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2!}{n^3} - \dots + \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}} + \theta \cdot \frac{(-1)^{m+1} (m+1)!}{n^{m+2}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5319. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{n^2 + x^2} dx = \frac{1}{n^2} - \frac{2!}{n^4} + \frac{4!}{n^6} - \dots \\ \dots + (-1)^m \frac{(2m)!}{n^{2m+2}} + \theta \cdot \frac{(-1)^{m+1} (2m+2)!}{n^{2m+4}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5320. \quad \int_n^\infty e^{-x^2} dx = \\ = \frac{e^{-n^2}}{2n} \left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 n^4} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2^{m-1} n^{2m-2}} + R \right), \end{aligned}$$

где

$$R = \theta \cdot \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m n^{2m}}.$$

$$\begin{aligned} 5321. \quad \int_n^\infty \frac{e^{-x}}{x^\sigma} dx = \frac{e^{-n}}{n^\sigma} \left(1 - \frac{\sigma}{n} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{n^2} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^m \frac{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+m-1)}{n^m} + R \right), \end{aligned}$$

где

$$R = \theta \cdot (-1)^{m+1} \cdot \frac{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+m)}{n^{m+1}}.$$

5322. При вычислении интеграла $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ полезно положить сначала $x = a + t$, а затем заменить величину $\frac{1}{a+t}$ интегралом $\int_0^\infty e^{-u(a+t)} du$. Используя в дальнейшем, после перемены

порядка интегрирования, предыдущие приемы, получить равенство:

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = P \sin a + Q \cos a,$$

где

$$P = \frac{1}{a^2} - \frac{3!}{a^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{a^{2n}} + \theta \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2n+1)!}{a^{2n+2}},$$

$$Q = \frac{1}{a} - \frac{2!}{a^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{a^{2n-1}} + \theta \cdot (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{a^{2n+1}}.$$

Если $\varphi(x)$ — данная функция, а n — параметр, стремящийся к бесконечности, то асимптотическая величина интегралов

$$\int_0^1 x^{n-1} \varphi(x) dx$$

может изучаться подстановкой $x = e^{-t}$. Затем для функции $\varphi(e^{-t})$ находится формула

$$\varphi(e^{-t}) = \sum_{\nu=1}^{m-1} a_{\nu} t^{\nu} + A \cdot \theta \cdot t^m,$$

где a_{ν} и A — соответствующие коэффициенты.

Установить равенства (где $0 < \theta < 1$):

5323.
$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu} E_{\nu}}{(n-1)^{2\nu+1}} + \frac{\theta}{2} \cdot \frac{(-1)^m E_m}{(n-1)^{2m+1}},$$

где $0 < \theta < 1$, а E_{ν} — числа Эйлера.

5324.
$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right).$$

5325.
$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} - \frac{5}{32n^3} + \frac{7}{128n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Доказать следующие равенства (где $0 < \theta < 1$):

5326.
$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-2t\sqrt{x}} dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} 2\sqrt{\pi}} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu}}{(4\sqrt{x})^{\nu}} \cdot \frac{\Gamma^2(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{(-1)^n \theta}{(4\sqrt{x})^n} \cdot \frac{\Gamma^2(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \right).$$

$$5327. \sum_0^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{1 \cdot 3 \dots (2\nu+1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x} + \\ + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} \frac{(2\nu)!}{\nu! 2^\nu} \cdot \frac{1}{x^{2\nu+1}} + \theta \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! 2^n \cdot x^{2n+1}}.$$

$$5328. 1 + \frac{x}{(1+\sigma)} + \frac{x^2}{(1+\sigma)(2+\sigma)} + \dots = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{x^\sigma} e^x - \frac{\sigma}{x} + \\ + \frac{\sigma(1-\sigma)}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{\sigma(1-\sigma) \dots (n-1-\sigma)}{x^n} + \\ + \theta(-1)^{n+1} \frac{\sigma(1-\sigma) \dots (n-\sigma)}{x^{n+1}}.$$

5329. Доказать, что длина l четверти эллипса

$$x = \cos t, \quad y = b \sin t$$

при малых значениях b может быть дана формулой $l = 1 + \frac{1}{2}b^2 \ln \frac{1}{6} + \theta(b)b^3$, где $\theta(b)$ — функция, остающаяся конечной при $b \rightarrow 0$.

§ 13.6

РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Найти корни следующих уравнений с четырьмя знаками после запятой.

5330. $x^3 - 7x - 7 = 0$.

5331. $x^3 - 8x + 15 = 0$.

5332. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

5333. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$.

Вычислить с точностью до 10^{-5} корни уравнений:

5334. $x \ln x = 100$.

5335. $x = \cos x$.

5336. $x^2 = 20 \sin x$.

5337. $3x = e^x$.

Найти наименьшие положительные корни уравнений:

5338. $x = \operatorname{tg} x$.

5339. $\operatorname{ch} x \cos x = 1$.

5340. $1 - \frac{x^2}{1!^2} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \dots = 0$.

5341. В силу одного тождества Рамануджана

$$\frac{1}{e^{2\pi} - 1} + \frac{2}{e^{4\pi} - 1} + \frac{3}{e^{6\pi} - 1} + \dots = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}.$$

Поэтому число $e^{-2\pi}$ есть корень уравнения

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^5}{1-x^3} + \dots = a,$$

где $a = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$. Пользуясь этим, найти равенство: $e^{-2\pi} = x = a - 3a^2 + 14a^3 - 82a^4 + 546a^5 + \dots = 0,0018674428 \dots$

§ 13.7

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Найти разложение в степенной ряд общего интеграла уравнений:

5342. $y' - xy = 1$.

5344. $y'' + y = 0$.

5343. $(1+x)y' - ny = 0$.

5345. $y'' - xy = 0$.

Доказать, что соответствующие частные интегралы следующих дифференциальных уравнений могут быть представлены указанными степенными рядами:

5346. $x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0$,

$$y = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

(гипергеометрический ряд Гаусса).

5347. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}$

(функция Бесселя $J_n(x)$).

5348. $x(x^4 - 1)u'' - (3x^4 - 1)u' + x^3 u = 0$,

$u = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^2 x^8 + \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 x^{12} + \dots; |x| < 1$.

5349. $x^2(x^4 - 1)v''' + 3x(3x^4 - 1)v'' + (19x^4 - 1)v' + 8x^3 v = 0$,

$v = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 x^8 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 x^{12} + \dots; |x| < 1$.

5350. Доказать равенство Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8} \right)^2 x^8 + \left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12} \right)^2 x^{12} + \dots \right)^2 = \\ & = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^3 x^8 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^3 x^{12} + \dots; \\ & |x| < 1. \end{aligned}$$

Способ Пикара нахождения интеграла уравнения $y' = \varphi(x, y)$, который при $x = a$ обращается в b , состоит в том, что составляется последовательно ряд функций $y_0, y_1, y_2, \dots$ по формуле

$$y_n = b + \int_a^x \varphi(x, y_{n-1}) dx; \quad y_0 = b.$$

Если $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, то y и есть искомый интеграл.

5351. Доказать, что, применяя способ Пикара к уравнению $y' = y$, при $a = 0, b = 1$, получим:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

5352. Доказать, что в предыдущем примере $y_n \rightarrow y$, если $n \rightarrow \infty$ при произвольном выборе функции y_0 .

5353. Доказать, что, заменив уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

системой уравнений

$$y' = u; \quad u' = -p(x)u - q(x)y$$

и применяя способ Пикара к решению этих уравнений, получим сходящийся процесс, если радиус-вектор из начала в точку x не проходит на комплексной плоскости переменной x ни через одну особую точку функций $p(x)$ и $q(x)$.

5354. Решить уравнение $y' - y = axu$ по методу последовательных приближений, полагая $y_0 = 0$ и вычисляя величины y_n по формуле $y'_n - y_n = axy_{n-1}$ (при $x = 0$ должно быть $y = C$).

5355. Таким же путем решить уравнение $y'' + a^2y = \sigma xy$, где σ — малый параметр. При этом $y = 0$, $y' = a$ при $x = 0$. Полезно применить теорему: если $y'' + a^2y = f(x)$, то

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + \frac{1}{a} \int_0^x f(t) \sin a(x-t) dt.$$

5356. Пользуясь подстановкой $x = n + \frac{1}{\sqrt{n}}$, показать, что интеграл уравнения $y'' + xy = 0$ в интервале $(n, \pi + n)$, где n велико, имеет приблизительно $\sqrt{n}$ корней.

5357. Доказать, что интеграл уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

в весьма удаленном от начала интервале $(a, a + b)$ имеет приблизительно $\frac{b}{\pi}$ корней.

5358. Интеграл уравнения $y'' + y = \sigma y'^2$ имеет начальные условия: $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$. Найти три первых члена его разложения по степеням малого параметра σ .

5359. Многочлены Чебышева–Эрмита: $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ удовлетворяют уравнению

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

Подстановкой $H_n(x) = f(x) \cdot y$ преобразовать это уравнение к виду

$$y'' + \left(-\frac{x^2}{4} + n + \frac{1}{2}\right)y = 0.$$

5360. Найти асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$ для многочленов $H_n(x)$.

5361. Найти при $0 < x < \pi$ интеграл уравнения

$$y'' + 4y = \pi x - x^2,$$

разложив его в ряд вида $\sum a_n \sin nx$. Краевые условия: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \pi$.

5362. Найти интеграл уравнения $y^{IV} + y = \pi - |x|$ при $-\pi < x < \pi$ и краевых условиях $y' = y''' = 0$ для $x = \pm\pi$.

Численное интегрирование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ состоит в том, что по данному начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$, составляют таблицу значений y для значений x , равных числам $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h$, где h — выбранное число, обычно довольно малое. Наиболее удобны методы численного интегрирования, основанные на применении разностей высших порядков от функции $u = hf(x, y)$. Для начала из уравнения $y' = f(x, y)$ находят несколько последовательных производных по формуле

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y} \cdot f(x, y).$$

Отсюда определяем величины $y'_0, y''_0, y'''_0, \dots$, т. е. значения этих производных при $x = 0$. После этого по формуле Тейлора находим несколько значений $y_0, y_1, y_2, \dots$, т. е. значения y при $x = x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$. По этим значениям x и y вычисляем $u_0(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y), \dots$, т. е. значения $u(x, y) = hy'$ в точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$. По значениям $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ можно вычислить величины последовательных разностей разных порядков, а именно числа: $\Delta u_0, \Delta u_1, \dots, \Delta u_{n-1}$; $\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \dots, \Delta^2 u_{n-2}$; $\Delta^3 u_0, \Delta^3 u_1, \dots, \Delta^3 u_{n-3}$; ... Формула Адамса—Штермера:

$$\begin{aligned} \Delta y_n = u_n + \frac{1}{2} \Delta u_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 u_{n-2} + \\ + \frac{3}{8} \Delta^3 u_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 u_{n-4} + \frac{1}{3} \Delta^5 u_{n-5} + \dots, \end{aligned}$$

дает возможность вычислить y_{n+1} . Зная x_{n+1} и y_{n+1} , можем вычислить величины $u_{n+1}, \Delta u_n, \Delta^2 u_{n-1}, \dots$. Новое применение формулы Адамса дает Δy_{n+1} и, следовательно, y_{n+2} и т.д.

В применениях стараются подобрать величину h настолько малой, чтобы разностями высоких порядков можно было пренебречь.

5363. Составить таблицу значений y через 0,05, если $y' + 2xy = 0$ и $y = 1$ при $x = 0$. При этом значения $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2$ вычислить с помощью разложения в ряд, в формуле Адамса удерживать члены до третьих разностей, а вычисления вести до шестого знака после запятой.

5364. Найти по методу Адамса—Штермера при $x = 2$ интеграл уравнения $y' = x + y$, обращающийся в единицу при $x = 1$; при этом пользоваться формулой для Δy , взятой до четвертых разностей включительно, и вести вычисления до пятого знака.

5365. Найти таблицу значений интеграла уравнения

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{для} \quad x = 0; 0,1; 0,2; \dots 1,$$

если при $x = 0$ $y = 0$.

Указание. Разложение y в начале имеет вид

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}x^{\frac{9}{4}} + \dots$$

Выгодно ввести новую переменную, положив $x = \xi^4$.

5366. Составить таблицу значений функций $\sin x$ и $\cos x$ через 0,1 от 0 до 1, пользуясь уравнениями: $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$ и применив метод Адамса—Штермера.

5367. Составить таблицу значений функций Бесселя $J_0(x)$ и $J'_0(x)$ для значений x через одну десятую от нуля до единицы, при этом уравнение для $J_0(x)$, имеющее вид

$$xJ''_0(x) + J'_0(x) + xJ_0(x) = 0,$$

заменить системой: $xv' + v + xu = 0$; $u' = v$.

Для уравнений второго порядка вида $y'' = f(x, y, y')$ можно пользоваться формулами:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{n-1} &= h^2 f_n + \frac{1}{12} h^2 \Delta^2 f_{n-2} + \frac{1}{12} h^2 \Delta^3 f_{n-3} + \\ &+ \frac{19}{240} h^2 \Delta^4 f_{n-4} + \frac{3}{40} h^2 \Delta^5 f_{n-5}, \\ \Delta y_n &= h y'_n + \frac{h^2}{2} f_n + \frac{h^2}{6} \Delta f_{n-1} + \\ &+ \frac{h^2}{8} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{19h^2}{180} \Delta^3 f_{n-3} + \frac{3h^2}{32} \Delta^4 f_{n-4}, \\ \Delta y'_n &= h f_n + \frac{h}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8} h \Delta^3 f_{n-3} + \frac{251}{720} h \Delta^4 f_{n-4}. \end{aligned}$$

5368. Составить таблицу значений через 0,1 в интервале $(0, 1)$ функции $y = \operatorname{ch} x$, удовлетворяющей уравнению $y'' = y$ и начальным условиям: при $x = 1$ $y = 1$, $y' = 0$.

5369. Составить таблицу значений функции $J_0(x)$ для значений x , идущих через 0,1, зная, что $J_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xJ''_0(x) + J'_0(x) + xJ_0(x) = 0$, и начальные ее значения при $x = 0$: $J_0(0) = 1$, $J'_0(0) = 0$.

5370. Зная величины: $\cos 1 = 0,54030$; $\cos 1,1 = 0,45360$; $\cos 1,2 = 0,36236$; $\cos 1,3 = 0,26750$; $\cos 1,4 = 0,16997$, с помощью уравнения $y'' = -y$ найти значения $\cos x$ при $x = 1,5$; $1,6$; $1,7$; $1,8$; $1,9$; $2,0$.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 14.1 УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА

В дальнейшем приняты такие обозначения: $z = x + iy = re^{\varphi i}$ — независимая переменная, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$ — модуль z , $\varphi = \arg z$ — аргумент z . Величина, сопряженная с z , будет обозначаться через $\bar{z}$, т. е.

$$\bar{z} = x - iy = re^{-\varphi i}.$$

Для функции $w = f(z)$, аналитической или регулярной в области S , имеет равенство $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где вещественные функции u и v удовлетворяют условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пользуясь ими, можно найти одну из функций с точностью до постоянной интегрирования, если известна другая. При этом, если дана функция $u(x, y)$, то можно, например, пользоваться интегралом:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по следующим условиям:

5371. $u = x^2 - y^2 + xy$; $w(0) = 0$.

5372. $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; $w(0) = 0$.

5373. $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $w(2) = 0$.

5374. $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$; $w(0) = 0$.

5375. $u = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$.

5376. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ — некоторая функция.

5377. $u = F(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

5378. $v = f(x^2 + y^2)$.

5379. Доказать, что уравнение $u(x, y) = C$ может изображать семейство линий равного потенциала только в том случае, если отношение величин

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

есть функция только одного u .

5380. Доказать, что кривые $x^n + y^n = C$ могут быть линиями равного потенциала только при $n = 1$ и при $n = 2$.

Найти аналитическую функцию $w(z)$ по условиям:

5381. Линии $\operatorname{Re} w(z) = c$ — окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

5382. Линии $|w(z)| = c$ — окружности $x^2 + y^2 = ax$.

5383. Линии $|w(z)| = c$ — лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

5384. Линии $\arg w(z) = c$ — окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

5385. Доказать равенство:

$$\frac{\partial^2 |w(z)|}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |w(z)|}{\partial y^2} = \frac{|w'(z)|^2}{|w(z)|}.$$

5386. Функция $w = f(z)$ регулярна в односвязной области, ограниченной кривой $|w(z)| = c$. Показать, что $\arg w$ изменяется монотонно, если z пробегает кривую $|w(z)| = c$ в положительном направлении.

§ 14.2

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ. РЯД ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Найти особые точки функций:

5387. $\frac{z}{z^2 + 1}$.

5390. $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$.

5392. $\sqrt{1 - z^2}$.

5388. $\frac{1}{z - z^3}$.

5391. $\sin \frac{1}{z}$.

5393. $\sqrt{1 - z^3}$.

5389. $\frac{1}{\sin z}$.

5394. Построить линии равного модуля и равного аргумента для функции $w = e^{\frac{1}{z}}$.

5395. Показать, что при любом $A \neq 0$ уравнение $e^{1/z} = A$ в любой данной окрестности точки $z = 0$ имеет бесконечное множество корней.

5396. Показать, что в той же области уравнение $\cos \frac{1}{z} = A$ имеет бесконечное множество корней при любом значении A .

5397. Изучить изменение $\arg \sqrt[n]{z-a}$, если точка z описывает простой замкнутый контур, обходящий точку $z = a$ в положительном направлении.

5398. Изучить изменение функции $\sqrt{1-z^2}$, если точка z описывает простой замкнутый контур одного из трех видов:

- а) обходящий одну из точек $z = \pm 1$,
- б) обходящий обе эти точки,
- в) оставляющий эти точки вне контура.

5399. Найти в точке $z = -e$ значение функции $w = z^z = e^{z \ln z}$, если $\ln 1 = 0$ и если w изменяется непрерывным образом при движении z в верхней полуплоскости или при движении в нижней полуплоскости.

5400. Найти при $z = e^{-\varphi i}$ значение той ветви функции $\sqrt{z - e^{\varphi i}}$, которая при $z = 0$ имеет значение $ie^{\frac{\varphi i}{2}}$ и которая непрерывно продолжается при движении z вдоль по радиусу из начала координат в точку $z = e^{-\varphi i}$.

5401. В плоскости z проведен разрез по линиям: $y = 0$; $|x| > 1$ и $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$; функция $\ln(1 - z^2)$ равна нулю при $z = 0$. Найти ее значение при $z = 3$.

5402. Показать, что функция $w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ однозначна в плоскости с разрезами по вещественной оси при $-\infty < x < -1$ и $1 < x < \infty$. Найти значения w при $z = +i$ и $z = -i$, исходя из условия, что на верхнем краю правого разреза w положительна.

Пользуясь разложением в ряд для $\frac{1}{\cos z}$ и $z \operatorname{ctg} z$, доказать равенства:

$$\mathbf{5403.} \quad \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \quad |z| < \frac{\pi}{2};$$

E_n — числа Эйлера ($E_0 = 1$).

$$5404. \operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} z^{2n-1}; \quad |z| < \frac{\pi}{2};$$

B_n — числа Бернулли.

$$5405. \frac{z}{\sin z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-2)B_n}{(2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \pi.$$

$$5406. \ln \frac{\sin z}{z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}B_n}{n(2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \pi.$$

$$5407. \ln \cos z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n \cdot (2n)!} z^{2n}; \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Найти первые шесть коэффициентов в разложении функций и определить области сходимости этих рядов.

$$5408. \omega_1 = \frac{z}{\ln(1+z)}; \quad \omega_2 = \frac{z}{\operatorname{arctg} z}.$$

5409. Разложить в ряд по степеням z ту ветвь функции $\sqrt{z+i}$, значение которой при $z=0$ равно $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

5410. Найти круг сходимости для разложения по степеням z для функций $\frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z}$ и $\frac{\cos 2\pi z^2}{\cos \pi z}$.

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных областях:

$$5411. \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)} \text{ при } 1 < |z| < 2.$$

$$5412. \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2} \text{ при } 1 < |z| < 2.$$

$$5413. \text{ То же при } |z| > 2.$$

$$5414. \operatorname{ctg} z \text{ при } |z| < \pi \text{ и при } \pi < |z| < 2\pi.$$

5415. $\frac{1}{z-2} \ln \frac{z-i}{z+i}$ при $1 < |z| < 2$, считая при $z=2i$ величину логарифма вещественной.

$$5416. \text{ То же при } |z| > 2.$$

$$5417. z^5 e^{1/z}.$$

$$5418. e^{z+1/z}.$$

Доказать теоремы:

5419. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет на краю круга сходимости лишь одну особую точку, а именно полюс порядка m , то справедливо равенство: $a_n = \frac{A n^{m-1}}{z_0^n} (1 + \varepsilon(n))$, где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, A — постоянная, z_0 — полюс.

5420. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$ равен единице, а особые точки на круге сходимости лишь полюсы, порядок которых не больше, чем m , то коэффициенты ряда не превосходят An^{m-1} , где A — постоянная.

5421. Если у ряда $\sum a_n z^n$ все $a_n \geq 0$, а радиус круга равен 1, то $z = 1$ является особой точкой.

Указание. Доказательство от противного, основанное на разложении суммы ряда по степеням $z - a$, где $0 < a < 1$.

5422. Если радиус сходимости рядов $\sum a_n z^n$ и $\sum \operatorname{Re} a_n \cdot z^n$ равен 1 и все $\operatorname{Re} a_n \geq 0$, то точка $z = 1$ — особая точка для сумм этих рядов.

§ 14.3 ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Найти вычеты следующих функций в указанных точках:

5423. $\frac{1}{z^3 - z^5}$ в точках $z = 0, z = \pm 1$.

5424. $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$ в точках $z = \pm i$.

5425. $\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ в точках $z = -1$ и $z = \infty$.

5426. $e^z \ln \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ в точке $z = \infty$.

Вычислить интегралы от следующих функций по указанным кривым, беря обход против часовой стрелки:

5427. $\int \frac{dz}{z^4 + 1}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

5428. $\int \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

5429. $\int \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ по астроице $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

5430. $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$; $|a| < 1, |b| < 1$.

5431. $\int \frac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$ по окружности $|z| = r \neq 1$.

5432. $\int \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ по окружности $|z| = 2$.

5433. $\int \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz$ по краю полуокружности $|z| = R$, при условиях $n < R^3 < n+1$, где n — целое число.

5434. Найти интеграл $\int \frac{dt}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$, взятый по параболе $x = y^2$ в направлении возрастающих y , считая, что значение $\sqrt{z^2+1}$ равно единице при $z = 0$.

5435. При каком соотношении между a и b будет однозначна функция

$$\int_0^t \frac{at \sin t + b \cos t}{t^2} dt.$$

Вычислить интегрированием по контуру следующие интегралы:

5436. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

5437. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$

5438. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx.$

5439. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}.$

5440. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx; m < n.$

5441. $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + a}; a > 1$ (положить $z = e^{i\varphi}$).

5442. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p \cos \varphi + p^2} d\varphi; |p| < 1.$

5443. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2p \cos 2\varphi + p^2} d\varphi; |p| < 1.$

5444. $\int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a) dx; \operatorname{Im} a \neq 0.$

5445. Доказать равенство $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_C e^{miz} Q(z) dz = 0$, где C — полукружность: $z = re^{i\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq \pi$; $m > 0$, а функция $Q(z)$ равномерно стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ в угле $0 \leq \varphi \leq \pi$ и регулярна в верхней полуплоскости. (Лемма Жордана.)

Вычислить интегралы:

5446. $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z-ir} dz; I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z+ir} dz; \operatorname{Re} r > 0; a > 0.$

5447. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+r^2} dx.$

5448. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+r^2} dx.$

5449. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

5450. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^4} dx; a > 0.$

5451. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx; a > 0, b > 0.$

5452. Исходя из равенства $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, доказать формулы для интегралов Френеля:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Доказать равенства:

$$5453. \int_0^\infty x^{s-1} e^{-ix} dx = \Gamma(s) e^{-\frac{\pi si}{2}}; \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

$$5454. \int_0^\infty \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}; \quad n > 1.$$

$$5455. \int_0^\infty \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n}; \quad |n| > 1.$$

$$5456. \int_0^\infty \frac{\sin x^n}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}; \quad 0 < \frac{1}{n} < 2.$$

$$5457. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \Gamma(s) z^{-s} ds = e^{-z}; \quad a > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Указание. Воспользоваться теоремой:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \left(\ln \Gamma(s) - \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s + s - \frac{1}{2} \ln 2\pi \right) = 0,$$

если s находится направо от любой данной вертикальной прямой.

$$5458. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1; \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a > 0.$$

$$5459. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s^2} ds = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x > 1; \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a > 0.$$

$$5460. \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)} ds = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{2}, & \text{если } x > 1; \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \\ a > 0.$$

$$5461. \int_0^{\pi/2} \frac{f(e^{i\varphi}) - f(e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{2} f(1) - \int_0^1 \frac{f(ix) + f(-ix)}{1+x^2} dx, \text{ если } f(x) \text{ голоморфна в правой половине круга } |z| < 1.$$

$$5462. \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$$

$$5463. \int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \left(e^{-a} - \frac{1}{2} \right); \quad a > 0.$$

Пользуясь контуром, который целиком или частью состоит из краев разреза вдоль положительной или отрицательной части OX и окружностей вокруг начала радиусов $\rho \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, доказать равенства:

$$5464. \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}; \quad 0 < p < 1.$$

$$5465. \text{ v.p. } \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi; \quad 0 < a < 1,$$

где

$$\text{v.p. } \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\sigma} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx + \int_{1+\sigma}^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx \right).$$

$$5466. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \pi(\operatorname{ctg} a\pi - \operatorname{ctg} b\pi);$$

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1.$$

$$5467. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum \lambda_{\nu} e^{a_{\nu} x}}{1 - e^x} dx = \pi \sum \lambda_{\nu} \operatorname{ctg} \pi a_{\nu};$$

$$0 < a_{\nu} < 1, \quad \sum \lambda_{\nu} = 0.$$

$$5468. \int_0^{\infty} \frac{x^{-p}}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \cdot \frac{\sin p\lambda}{\sin \lambda};$$

$$-1 < p < 1, \quad -\pi < \lambda < \pi.$$

Получить при $-1 < p < 2$ следующие равенства, пользуясь контуром, в состав которого входит разрез по оси OX между точками $z = 0$ и $z = 1$, дополненный кружками радиуса $\rho \rightarrow 0$ вокруг этих точек.

$$5469. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi p(1-p)}{8 \sin \pi p} \cdot 2^p.$$

$$5470. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left(2^{\frac{p}{2}} \cos \frac{\pi p}{4} - 1 \right).$$

$$5471. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(a+x)^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left(\frac{1+a-p}{a} \left(\frac{1+a}{a} \right)^{p-1} - 1 \right).$$

$$5472. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} (1 + p - 2^p).$$

$$5473. \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} \left(\sin \frac{\pi p}{2} + \cos \frac{\pi p}{2} - 1 \right).$$

Доказать равенства:

$$5474. \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{1}{1+a^2}; \quad a > 0.$$

$$5475. \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + (2n+1)^2 \pi^2)} = \\ = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2a} \sum_{k=-n}^n \frac{4k+1}{\left(\ln^2 a + (4k+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \right)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

$$5476. \int_0^\infty x^{a-1} \varphi(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2a\pi i}} \sum \operatorname{Res} z^{a-1} (\varphi(z)),$$

где $\sum \operatorname{Res} z^{a-1} (\varphi(z))$ означает сумму вычетов функции $z^{a-1} \varphi(z)$, взятую по всем полюсам рациональной функции $\varphi(z)$. Предполагается, что $\varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

$$5477. \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\ln^2 x + \pi^2} dx = \sum \operatorname{Res} \frac{(\varphi(z))}{\ln z - \pi i},$$

где $\varphi(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на положительной вещественной оси, $z\varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и $\ln z$ соответствует изменению $\arg z$ от 0 до 2π .

Доказать теоремы:

5478. Если ряд $\sum_{-\infty}^\infty f(n)$ абсолютно сходится, а $f(z)$ — мероморфная функция, регулярная при всех целых z , и существует последовательность расширяющихся контуров $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, удаляющихся по всем направлениям в бесконечность при $n \rightarrow \infty$ так, что

$$\int_{C_n} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz \rightarrow 0, \quad (*)$$

то справедливо равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum \operatorname{Res} \operatorname{ctg} \pi z (f(z)),$$

где $\sum \operatorname{Res} \varphi(z)(f(z))$ означает сумму вычетов функции $\varphi(z)f(z)$, взятую по полюсам $f(z)$.

5479. При подобных же условиях, где вместо (*) дано условие:

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} dz \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

справедливо равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum \operatorname{Res} \frac{\pi}{\sin \pi z} (f(z)).$$

Доказать равенства:

$$\mathbf{5480.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \frac{\pi^2}{b^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi a}{b}.$$

$$\mathbf{5481.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a.$$

$$\mathbf{5482.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \pi a}.$$

$$\mathbf{5483.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi a n} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a}}.$$

$$\mathbf{5484.} \quad \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \frac{3}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} - \dots = \frac{1}{8\pi}.$$

5485. Полагая по определению

$$f(u) = \int_{\gamma} \frac{e^{-\pi i z^2 + 2\pi i u z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} dz,$$

где интегрирование идет снизу вверх по всей прямой $x + y = \frac{1}{2}$, проверить тождество:

$$f(u+1) - f(u) = e^{\pi i(u+\frac{1}{2})^2} \int_{\gamma} e^{-\pi i z^2} dz.$$

5486. Передвинув в предыдущей задаче контур интегрирования на прямую $x + y = -\frac{1}{2}$, доказать равенство:

$$f(u) = e^{-2\pi i u} f(u+1) + 1.$$

5487. Доказать, что $\int_{\gamma} e^{-\pi i z^2} dz = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ и, пользуясь предыдущими результатами, вывести формулу Римана:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-\pi i z^2 + 2\pi i u z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} dz = \frac{e^{\pi i u} - e^{\pi i u^2}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}}.$$

5488. Рассмотреть интеграл от функции $\frac{e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{1 - e^{2\pi i z}}$, где n — целое положительное, по краю области

$$0 < x < \frac{n}{2}, \quad -\omega < y < \omega, \quad |z| > \rho, \quad \left| z - \frac{n}{2} \right| > \pi.$$

Предельным переходом, при $\rho \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, получить формулу для суммы Гаусса:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i \nu^2}{n}} = \frac{1 + (-i)^n}{1 - i} \cdot \sqrt{n}.$$

§ 14.4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ

По теореме Руше функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные внутри контура, имеют там одинаковое число нулей, если на контуре $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)|$. Пользуясь этим, найти число корней, лежащих в круге $|z| < 1$, для следующих уравнений:

5489. $z^4 - 5z + 1 = 0$.

5490. $z^6 - 6z + 10 = 0$.

5491. $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$.

5492. $z = \varphi(z)$, где $|\varphi(z)| < 1$ при $|z| \leq 1$.

Сколько корней в каждом квадрате имеют уравнения:

5493. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$.

5494. $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$.

Доказать следующие утверждения:

5495. При $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ в полуплоскости $x > 0$ имеет единственный и притом вещественный корень.

5496. $z = ae^z$ имеет при $0 < a < \frac{1}{e}$ лишь один корень в круге $|z| \leq 1$.

5497. Уравнение $z^2 = ae^z$, где $0 < a < \frac{1}{e}$, в круге $|z| < 1$ имеет два корня. Они вещественны и разных знаков.

5498. Уравнение $1 + z + az^n = 0$, где n — целое число, большее единицы, имеет в круге $|z| \leq 2$ при любом a по крайней мере один корень.

5499. Уравнение $z = \operatorname{tg} z$ имеет только вещественные корни — трехкратный корень $z = 0$ и корни $z_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - \rho_n$, где $\rho_n > 0$, $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

5500. Уравнение $\operatorname{ch} z \cos z = 1$ имеет четырехкратный корень $z = 0$ и корни вида $\pm r_n$, $\pm ir_n$, $r_n = (n + \frac{1}{2})\pi + (-1)^{n-1}\rho_n$, где $\rho_n > 0$ и $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

5501. Если последовательность функций $\{f_n(z)\}$, регулярных в области G , равномерно сходится внутри этой области к некоторой функции $f(z) \not\equiv 0$, то каждый нуль функции $f(z)$ является пределом соответствующих нулей функций $f_n(z)$.

5502. Если, в условиях предыдущей задачи, функция $f(z)$ имеет внутри области G нуль $z = z_0$ кратности m , то можно указать постоянные $\rho_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что коль скоро на границе области G выполняется соотношение $|f_n(z) - f(z)| < \rho < \rho_0$, то функция $f_n(z)$ имеет в круге $|z - z_0| < C\sqrt[m]{\rho}$ ровно m нулей.

5503. Если $\operatorname{Im} z_\nu > 0$, а $\prod_{\nu=1}^n (z - z_\nu) = \varphi(z) + i\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, то корни этих многочленов будут вещественными, простыми и перемножающимися.

5504. При тех же условиях и при $a > 0$ такими же свойствами обладают и корни уравнений:

$$\varphi(z) \sin az + \psi(z) \cos az = 0, \quad \varphi(z) \cos az - \psi(z) \sin az = 0.$$

5505. Число корней вещественного тригонометрического многочлена $\sum_{\nu=m}^n (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$, в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ не меньше $2m$ и не больше $2n$.

Указание. Рассмотреть многочлен $P(z) = \sum_{\nu=m}^n (a_\nu - ib_\nu) z^\nu$.

5506. При $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ легко доказать умножением на $1 - z$, что многочлен $\sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ не имеет корней в области $|z| \geq 1$. Пользуясь этим, показать, что тригонометрический многочлен $\sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu\varphi$, с теми же a_ν , имеет в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ ровно $2n$ различных корней (так же, как и многочлен $\sum_{\nu=1}^n a_\nu \sin \nu\varphi$).

5507. Пусть при $0 < t < a$ функция $f(t)$ положительна и не убывает, а интеграл $\int_0^a f(t) dt$ имеет смысл. Доказать, что целая функция $f(z) = \int_0^a f(t) \cos zt dt$ имеет только вещественные нули. (Теорема Полия.)

5508. Доказать, что при тех же условиях и при $b > 0$ целые функции

$$\varphi(z) = \int_0^a f(t) \cos t(z+b) dt; \quad \psi(z) = \int_0^a f(t) \sin z(t+b) dt$$

тоже имеют только вещественные нули.

5509. Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z| \leq r$ и имеет внутри круга корни $a_1, a_2, \dots, a_n$, отличные от нуля. Соединяя каждый из нулей a_ν разрезом с окружностью $|z| = r$ и интегрируя по полуценному контуру соответствующую функцию, доказать формулу Иенсена:

$$\ln f(0) + \sum_{\nu=1}^n \ln \frac{r}{|a_\nu|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

5510. Доказать, что если в условиях предыдущей задачи максимум $|f(z)|$ равен M , $|f(0)| = m$ и N — число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leq \frac{r}{e}$, то

$$N \leq \ln \frac{M}{m}.$$

5511. Доказать теорему: корни функции

$$f(z) = Ae^{ax} + Be^{bx} + \dots + Me^{mx},$$

где $a > b > \dots > m$, а числа A и M отличны от нуля, расположены в полосе $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, а N — число их в прямоугольнике $-\sigma < \operatorname{Re} z < \sigma$, $0 < \operatorname{Im} z < T$ — выражается формулой

$$N = \frac{a-m}{2\pi} \cdot T + O(1),$$

где $O(1)$ ограничено при $T \rightarrow \infty$.

§ 14.5

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Доказать справедливость следующих разложений в ряд дробей, имеющих место во всех точках, где разлагаемые функции регулярны.

$$\mathbf{5512.} \quad \operatorname{ctg}(z-a) + \operatorname{ctg} a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a-n\pi} + \frac{1}{a+n\pi} \right).$$

$$\mathbf{5513.} \quad \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2 \pi^2}.$$

$$\mathbf{5514.} \quad \frac{1}{\cos z} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{z^2 - (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}.$$

$$\mathbf{5515.} \quad \frac{\sin z}{\cos^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z - (2n+1)\frac{\pi}{2})^2}.$$

$$\mathbf{5516.} \quad \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z + \frac{1}{2} - n)^2}.$$

$$\mathbf{5517.} \quad \frac{e^{az}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z \cos 2\pi n a - 4\pi n \sin 2\pi n a}{z^2 + 4n^2 \pi^2}; \quad 0 < a < 1.$$

$$\mathbf{5518.} \quad \frac{\sin az}{\sin \pi z} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot \sin na}{z^2 - n^2}; \quad -\pi < a < \pi.$$

$$5519. \frac{\operatorname{ch} az}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z \cos na}{z^2 + n^2}; \quad -\pi \leq a \leq \pi.$$

$$5520. \frac{1}{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z} = \frac{1}{4z^2} + 4\pi z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi n} \cdot \frac{1}{4z^4 + n^4 \pi^4}.$$

$$5521. \frac{z \sin z}{\sin z - z \cos z} = \frac{3}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \lambda_n^2}; \quad \operatorname{tg} \lambda_n = \lambda_n > 0.$$

Доказать справедливость следующих разложений в бесконечные произведения:

$$5522. \cos \frac{\pi z}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2} \right).$$

$$5523. \frac{\sin z - a}{\sin a} = e^{-z \operatorname{ctg} a} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a + n\pi} \right) \cdot e^{\frac{z}{a + n\pi}}.$$

$$5524. \cos \pi z - \cos \pi a = \\ = -\frac{\pi^2}{2}(z^2 - a^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z+a}{2n} \right)^2 \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{z-a}{2n} \right)^2 \right).$$

$$5525. e^z - e^a = e^{\frac{z+a}{2}} \cdot (z-a) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z-a}{2\pi n} \right)^2 \right).$$

$$5526. \operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4} \right).$$

$$5527. \sin z - z \cos z = \frac{z^2}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right); \quad \operatorname{tg} \lambda_n = \lambda_n > 0.$$

$$5528. \frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z-z^2}{n+n^2} \right).$$

$$5529. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad |a| > 1; \quad \prod_{\nu=1}^n (a^\nu - 1) = \frac{(-1)^n}{c_n}.$$

$$5530. \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(3\nu)!} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{8r_\nu^3} \right).$$

$$2 \cos r_\nu \sqrt{3} + e^{-3r_\nu} = 0, \quad r_\nu > 0.$$

5531. При $\operatorname{Re} s > 0$ для гамма-функции Эйлера существует представление в виде интеграла $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$. Легко доказать, что при $0 < x < n$ справедливы формулы:

$$e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}.$$

Пользуясь этим, доказать данное Эйлером представление $\Gamma(s)$ в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

5532. Пользуясь предыдущим, а также формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C,$$

где C — постоянная Эйлера, доказать формулу Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{Cs} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{\nu}\right) e^{-\frac{s}{\nu}}.$$

Доказать равенства:

$$\mathbf{5533.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

$$\mathbf{5534.} \quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right).$$

$$\mathbf{5535.} \quad \left(\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right)' = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(s+\nu)^2}.$$

$$\mathbf{5536.} \quad \ln s \Gamma(s) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - C\right)s + \\ + \ln \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu s^\nu}{\nu} \sigma_\nu,$$

где $\sigma_\nu = \frac{1}{5\nu} + \frac{1}{6\nu} + \frac{1}{7\nu} + \dots$

$$\begin{aligned}
 5537. \lg_{10} x\Gamma(x) = & \lg_{10} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)} + \\
 & + 0,65409856x - 0,00005089x^5 + \\
 & + 0,04805967x^2 + 0,00000740x^6 - \\
 & - 0,00353152x^3 - 0,00000116x^7 + \\
 & + 0,00038775x^4 + 0,00000019x^8 - \\
 & - 0,00000003x^9 \dots
 \end{aligned}$$

Здесь $|x| < 5$.

5538. Из эйлеровского произведения для $\Gamma(s)$ следует, что

$$S = - \sum_{\nu=0}^m \ln(s + \nu) + \ln m! + s \ln m \rightarrow \ln \Gamma(s).$$

Если множитель -1 , имеющийся в сумме, заменить по формуле $-1 = (s + \nu - \frac{1}{2}) - (s + \nu + \frac{1}{2})$, то легко получить равенства:

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{\nu=0}^m \left(\left(s + \nu + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right) + \\
 & + \left(s - \frac{1}{2} \right) \ln s - \left(s + m + \frac{1}{2} \right) \ln(s + m + 1) + \\
 & + \ln m! + s \ln m + m + 1 = \\
 = & \sum_{\nu=0}^m \left(\left(s + \nu + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right) + \left(s - \frac{1}{2} \right) \ln s - \\
 & - s + m + \ln m! - m \ln m - \frac{1}{2} \ln m + \frac{M}{m},
 \end{aligned}$$

где M ограничено при $m \rightarrow \infty$.

Пользуясь сказанным, получить ряд Гудермана:

$$\begin{aligned}
 \ln \Gamma(s) = & \left(s - \frac{1}{2} \right) \ln s - s + A + \\
 & + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left(s + \nu + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{s + \nu + 1}{s + \nu} - 1 \right),
 \end{aligned}$$

где A — соответствующая постоянная, а равенство справедливо при всех s , отличных от чисел: $0, -1, -2, -3, \dots$

5539. Применяя разложение $\cos \frac{\pi z}{2}$ в бесконечное произведение, доказать формулу Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \right)^2 \cdot (2n+2),$$

а пользуясь ею, доказать, что постоянная A в ряде Гудермана равна $\ln \sqrt{2\pi}$.

5540. С помощью ряда Гудермана доказать, что

$$\ln \Gamma(s) - \left(\left(s - \frac{1}{2} \right) \ln s - s \right) \rightarrow \ln \sqrt{2\pi},$$

если расстояние точки s до отрицательной части вещественной оси безгранично растет, а $\operatorname{Re} s$ ограничена снизу.

5541. Доказать справедливость разложения:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (a-1)(a-2) \cdots (a-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{1}{x+n};$$

$$a > 0.$$

§ 14.6

ДРУГИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Некоторые из дальнейших задач решаются с помощью теоремы о ряде Лагранжа. В силу этой теоремы, если в области S расположена точка $z = a$, а на контуре имеется неравенство $|tf(z)| < |z - a|$, то уравнение относительно z

$$z = a + tf(z)$$

имеет в этой области единственный корень, представляющий функцию t . Если $F(z)$ — функция этого корня, регулярная в S , то имеет место разложение (ряд Лагранжа):

$$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{F'(a)[f(a)]^n\}^{(n-1)} t^n}{n!}.$$

В частности, например:

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{[f(a)]^n\}^{(n-1)}}{n!} t^n.$$

В следующих задачах разложить по возрастающим степеням ω тот корень уравнения в z , который обращается в 0 при $\omega = 0$.

$$5542. \omega = 2z + z^2.$$

$$5544. (1 - z^2)\omega = 2z.$$

$$5543. \omega = ze^{-z}.$$

$$5545. (z^{m+1} - b)\omega = -z.$$

5546. Разложить e^z по возрастающим степеням ω , если

$$(z + 1)^2\omega = z.$$

5547. Найти подобное же разложение для e^{-z} , где $z\omega = z - a$.

5548. Разложить в ряд по степеням эксцентриситета e эллиптической орбиты эксцентрическую аномалию E , связанную со средней аномалией M уравнением Кеплера:

$$E = M + e \sin E.$$

Алгебраические функции удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен относительно комплексных переменных x и y . Если обе эти переменные остаются вещественными, то написанное уравнение изображает алгебраическую кривую. Если уравнение имеет степень n относительно y , то оно определяет n ветвей $y_1, y_2, \dots, y_n$ многозначной функции от x . Они представляют регулярные функции от x в области, где их значения конечные и неравные. Если x_0 — точка, лежащая в такой области, то каждая из функций y_ν разлагается по целым степеням $x - x_0$. Если же в точке x_0 несколько из y_ν равны, то в окрестности этой точки функции y_ν разлагаются по дробным степеням $x - x_0$ по формуле

$$y = \sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^{\frac{\mu}{m}},$$

где число μ_0 может быть и отрицательным, а m не превосходит n . Значения a_ν можно найти подстановкой этих рядов в уравнение. Сами особые точки могут быть найдены из уравнений:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Найти особые точки следующих уравнений:

$$5549. y^3 - 3y + 2x = 0.$$

$$5550. y^3 - 3y^2 + x^6 = 0.$$

$$5551. y^3 - 3y + 2x^2(2 - x^2) = 0.$$

$$5552. y^3 - 3y + 2x^3(2 - x^3) = 0.$$

Найти первые два члена в разложении y по возрастающим степеням x для проходящих через начало ветвей следующих кривых:

$$5553. x^3 - 3xy + y^3 = 0.$$

$$5554. y^4 - 4y = x.$$

$$5555. y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0.$$

$$5556. 4(x-1)y^5 + 2xy^3 - 3x^3y + x^4 = 0.$$

Доказать теоремы:

5557. Функция $f(z)$, регулярная внутри эллипса с фокусами $z = \pm 1$ и контуром C , разлагается в этом эллипсе в ряд:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n - (z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) (z - \sqrt{z^2 - 1})^n dz; \quad |z + \sqrt{z^2 - 1}| \geq 1.$$

5558. При тех же условиях справедливо разложение:

$$f(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left((z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n \right),$$

где

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} dz.$$

По теореме Коши для функции $f(x)$, удовлетворяющей в интервале $a < x < b$ условиям Дирихле внутри этого промежутка, имеет место разложение:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)}{\psi'(\lambda_n)} e^{\lambda_n x} \int_a^b e^{-\lambda_n \mu} f(\mu) d\mu.$$

Здесь $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые функции, нули функции $\psi(z)$ простые и равны числам λ_n , а при $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ справедливы равенства:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(re^{i\theta}) - \varphi(re^{i\theta})}{\psi(re^{i\theta})} e^{(x-a)re^{i\theta}} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi(-re^{i\theta})}{\psi(-re^{i\theta})} e^{(b-x)re^{i\theta}} \right) = 0.$$

5559. Применяя разложение Коши при $\psi(z) = e^{\pi z} + 1$; $\varphi(z) = -1$, получить разложение:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2n+1)(x-\mu) \cdot f(\mu) d\mu;$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

5560. С помощью функций $\psi(z) = e^{az} - z$; $\varphi(z) = e^{az}$; $a > 0$, получить разложение:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{a\lambda_n - 1} e^{\lambda_n x} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\lambda_n \mu} f(\mu) d\mu; \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2},$$

где λ_n — корни уравнения $z = e^{az}$.

5561. Доказать равенство при прежних λ_n :

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n \operatorname{sh} \frac{a(1-\lambda_n)}{2}}{(a\lambda_n - 1)(1 - \lambda_n)} e^{\lambda_n x}.$$

Доказать равенства для сумм следующих рядов аналитических функций:

$$\mathbf{5562.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} = \begin{cases} \frac{z}{(1-z)^2} & \text{при } |z| < 1; \\ \frac{1}{(1-z)^2} & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{5563.} \quad \frac{1}{1-z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^n} - 1} = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| < 1; \\ 0 & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$$

5564. $1 - z + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2} - \frac{z(z-1)(z-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$; или $= \infty$ при $\operatorname{Re} z < 0$.

$$\mathbf{5565.} \quad 1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^2(z^2-1)}{2!^2} - \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)}{3!^2} + \dots = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Найти область сходимости следующих рядов:

$$\mathbf{5566.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z)(1+z^2)\dots(1+z^n)}.$$

$$\mathbf{5567.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}.$$

$$\mathbf{5568.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z(z+n)}{n} \right)^n.$$

$$\mathbf{5569.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1+a^{2n}z^2}; \quad |a| > 1.$$

5570. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+nz)^2}, \quad m^2 + n^2 > 0,$$

рассматриваемая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, там регулярна и имеет вещественную ось существенной купюрой.

5571. Доказать, что функция $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{z - e^{2\pi ni\sqrt{2}}}$, регулярная при $|z| < 1$, не продолжается за окружность $|z| = 1$.

5572. Доказать, что такой же особенностью отличаются ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n},$$

если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ расходится.

5573. Пусть a, b, c — числа, изображаемые тремя вершинами треугольника, а x, y, z — правильные дроби. Ряд:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^m y^n z^p}{\frac{ma+nb+pc}{m+n+p} - \zeta}, \quad m+n+p > 0,$$

представляет вне треугольника аналитическую функцию ζ , которая не продолжается внутри треугольника. Доказать, что, вопреки сказанному в книге Эрмита «Курс анализа», ряд сходится и внутри треугольника на всюду плотном множестве точек.

Преобразование Абеля состоит в тождестве:

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} b_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} s_{\nu} (b_{\nu} - b_{\nu+1}) + b_n s_n,$$

где $s_{\nu} = a_1 + a_2 + \dots + a_{\nu}$.

Рядом Дирихле называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где a_n — коэффициент. Обобщенным рядом Дирихле называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p_n^s}$, где $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — некоторая бесконечно возрастающая последовательность чисел. Положим еще $s = \sigma + i\tau$. Равенство $u = O(v)$ означает, что отношение $\left| \frac{u}{v} \right|$ остается ограниченным при бесконечном возрастании v .

У всякого ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ существует число s_0 такое, что ряд сходится при $s > s_0$ и расходится при $s < s_0$. Оно называется абсциссой сходимости.

Доказать теоремы:

5574. Если общий ряд Дирихле сходится при $\sigma = \sigma_0$, то он сходится при любом s , у которого $\sigma > \sigma_0$.

5575. Если для величины $A_n = \sum_{\nu=1}^n a_\nu$ имеется равенство $A_n = O(n^{\sigma_0})$, $\sigma_0 \geq 0$, то ряд Дирихле $\sum \frac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma > \sigma_0$, сходится абсолютно и равномерно при $\sigma > \sigma_0 + 1 + \delta$, где δ — любая положительная постоянная.

5576. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ сходится при $\sigma = \sigma_0 \geq 0$, то $A_n = O(n_0^\sigma)$.

5577. Верхний предел бесконечной последовательности чисел u_ν обозначается через $\overline{\lim} u_\nu$. Он представляет наибольшую из точек сгущения последовательности u_ν .

Нетрудно доказать теорему Прингсхейма, в силу которой у сходящегося ряда положительных убывающих слагаемых $\sum u_\nu$ должно выполняться условие $nu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь сказанным, доказать, что абсциссой сходимости общего ряда Дирихле $\sum p_n^{-s}$ является $\overline{\lim} \frac{\ln n}{\ln p_n}$.

§ 14.7 ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Функция $\Phi(z, f)$ называется для функций $\varphi_n(z)$ производящей, если

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) t^n.$$

Если $\Phi(z, t)$ сравнительно проста, то из ее свойств можно получить ряд свойств функций $\varphi_n(z)$.

Приводим примеры производящих функций для некоторых важных классов многочленов с указанием основных свойств этих многочленов, которые требуется доказать, пользуясь производящими функциями, а также и другими путями.

5578.
$$t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{n!} t^n.$$

Здесь $\varphi_n(z)$ — многочлены Бернулли, для которых

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = nz^{n-1}.$$

При целом $z > 0$ имеем

$$\frac{1}{n} \varphi_n(z) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (z-1)^{n-1}.$$

$$\mathbf{5579.} \quad e^{-tz - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) t^n.$$

Здесь $H_n(z)$ — многочлены Чебышева–Эрмита, главнейшие свойства которых выражаются равенствами:

$$H_n(z) = \frac{1}{n!} e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{z^2}{2}}}{dz^n}; \quad H'_n(z) = -H_{n-1}(z);$$

$$nH_n(z) + zH_{n-1}(z) + H_{n-2}(z) = 0;$$

$$H''_n(z) - zH'_n(z) + nH_n(z) = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) H_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{m!}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

$$\mathbf{5580.} \quad \frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a)}(z) t^n.$$

Здесь $L_n^{(a)}(z)$ — обобщенные многочлены Чебышева–Лагерра. Их свойства:

$$L_n^{(a)}(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-a} \frac{d^n z^{n+a} e^{-z}}{dz^n},$$

$$nL_n^{(a)}(z) + (z - 2n - a + 1)L_{n-1}^{(a)}(z) + (n + a - 1)L_{n-2}^{(a)}(z) = 0,$$

$$z(L_n^{(a)}(z))'' + (a + 1 - z)(L_n^{(a)}(z))' + nL_n^{(a)}(z) = 0,$$

$$\int_0^{\infty} z^a e^{-z} L_n^{(a)}(z) L_m^{(a)}(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ \frac{\Gamma(a+n+1)}{n!} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

При $a = 0$ получаются обычные многочлены Лагерра.

$$5581. \frac{2^{\alpha+\beta}}{r} (1-t+r)^{-\alpha} (1+t+r)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x) t^n;$$

$$r = \sqrt{1-2xt+t^2}.$$

$P_n^{\alpha,\beta}$ — многочлены Якоби. Их свойства:

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n d^n (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}}{2^n \cdot n! dx^n}.$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx = 0, \text{ если } m \neq n.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} (P_n^{\alpha,\beta}(x))^2 dx = \\ = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) - \\ - \frac{1}{2}(2n+\alpha+\beta+1)((2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x + \\ + (\alpha^2 - \beta^2)) P_n^{\alpha,\beta}(x) + (n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) \times \\ \times P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0; \\ y = P_n^{\alpha,\beta}(x). \end{aligned}$$

$$5582. \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

$P_n(x)$ — многочлены Лежандра, которые получаются из многочленов Якоби при $\alpha = \beta = 0$.

$$5583. \frac{4-t^2}{4-4tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

($n = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева.

$$5584. \frac{1}{1-2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n,$$

$$u_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 + 1})^{n+1}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

5585. Используя разложение $(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(x)t^{-\nu-1}$, доказать для многочленов Лежандра равенство:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^n}{\sqrt{1-2t \cos \theta + t^2}} dt,$$

где C — замкнутый контур, внутри которого обе особые точки подынтегральной функции.

5586. Из предыдущего получить формулу Дирихле—Мелера:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})t}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} dt.$$

5587. Пользуясь разложением

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}(x)t^{-\nu-1},$$

получить формулу Лапласа:

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (z + \sigma \sqrt{z^2 - 1})^n \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

5588. Применяя производящую функцию и тождество

$$1 - 2t \cos \theta + t^2 = (1 - te^{i\theta})(1 - te^{-i\theta}),$$

доказать равенство:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \times \\ &\times \left(2 \cos n\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot 2 \cos(n-2)\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \cdot 2 \cos(n-4)\theta + \dots \right). \end{aligned}$$

§ 14.8

КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Какие кривые описываются точкой z плоскости комплексной переменной, если z выражена через вещественную переменную t , меняющуюся от $-\infty$ до ∞ ? Коэффициенты a , b и ω — вещественные.

$$5589. z = e^{(a+bi)t}.$$

$$5592. z = a(1 + e^{it})^{-2}.$$

$$5590. z = at + be^{i\omega t}.$$

$$5593. z = a(1 + it)e^{-it}.$$

$$5591. z = ae^{it} + a^{-1}e^{-it}.$$

Какие линии или области в плоскости переменной z определяются следующими условиями?

$$5594. |z - 2| < |z|.$$

$$5597. \operatorname{Im} z^{-1} = 2.$$

$$5595. |z - 1| \geq 2|z - i|.$$

$$5598. 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}.$$

$$5596. |z^2 - 1| < 1.$$

$$5599. |2z| < |1 + z^2|.$$

5600. Показать, что все корни уравнения

$$(z - a)^n - K^n(z - b)^n = 0$$

лежат на одной окружности.

Показать, что следующие функции $w = f(t)$ отображают данные области плоскости $z = x + iy$ конформно и взаимно однозначно в указанные области плоскости $w = u + iv$.

5601. $w = z^2$ — первый квадрант плоскости z в верхнюю полуплоскость w .

5602. $w = e^z$ — полосу $0 < y < \frac{\pi}{2}$ в первый квадрант плоскости w .

5603. $w = \ln z$ — область $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$ в полосу $u > 0$, $0 < v < \pi$.

5604. $w = \cos z$ — полосу $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ в полуплоскость $v > 0$.

5605. $w = \frac{1}{z+i}$ — полуплоскость $y \geq 0$ в круг $u^2 + v^2 + v \leq 0$.

5606. $w = \frac{i-z}{i+z}$ — первый квадрант z в верхний полукруг $|w| < 1$.

5607. Во что переходят линии $|z| = C$ и $\arg z = C$ и область $|z| > C > 1$; $a < \arg z < \pi - a$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$ при конформном преобразовании $2w = z + z^{-1}$?

5608. Во что преобразуется верхняя полуплоскость z на плоскости w , если $\cos w = \operatorname{ch} a \cos z$ и при $z = \frac{\pi}{2}$ величина $w = \frac{\pi}{2}$.

5609. Функция $w = \operatorname{arctg} z$ преобразует круг $|z| < 1$ на полосу в плоскости w . Найти ширину этой полосы.

5610. На какую область отображается круг $|z| < 1$ функцией $w = a(nz - z^n)$, где $a > 0$, $n > 1$ — целое? Найти площадь этой области.

5611. Функция $w = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ отображает некоторую область S_n в верхнюю полуплоскость. Найти S_n и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

5612. Точка $w = \frac{a^2}{z}$ называется отражением точки z относительно окружности $|z| = a$. Найти отражение в этой окружности полуплоскости $\operatorname{Re} z > 2a$.

5613. Доказать, что при дробно-линейном преобразовании $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$, точка и ее отражение относительно окружности переходят в точку и ее отражение относительно преобразованной окружности.

5614. Доказать, что равенство

$$\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

дает дробно-линейную функцию $w(z)$, переводящую точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 .

5615. Доказать, что круг $|z| < 1$ переходит в себя при дробно-линейном отображении лишь при $w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где $|a| < 1$.

5616. Найти условия, при которых дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость.

Найти функции, дающие следующие конформные отображения:

5617. Круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ так, чтобы точки $1, i, -i$ переходили в точки $w = +1, 0, -1$.

5618. Того же круга в себя так, чтобы точки $z = -1, i, 1$ переходили в точки $w = -1, \frac{3i+4}{5}, 1$.

5619. Двухгольника, ограниченного дугами окружностей, пересекающихся в точках $z = a$, $z = b$ под углом $\frac{\pi}{\alpha}$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z = a$, $z = b$ переходили в $w = 0$, $w = \infty$.

5620. Верхнего полукруга $|z| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы при $z = 0, 1, -1$ было $w = 0, 1, -1$.

5621. Квадранта $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на круг $|w| < 1$ так, чтобы при $z = 1 + i$, 0 было бы $w = 0, 1$.

5622. Круга $|z| < 1$ на плоскость с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.

5623. Плоскости с разрезом вдоль всей вещественной оси, кроме отрезка между точками a и b на область $\operatorname{Im} w > 0$.

5624. Плоскости с разрезом вдоль отрезка $a < z < b$ на $\operatorname{Im} w < 0$.

5625. Круга $|z| < 1$ с вырезом по отрезку $0 < z < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

5626. Полосы $0 < \operatorname{Re} z < a$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

5627. Области $|z - a| > a$; $|z - b| < b$, где $0 < a < b$, на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$.

5628. Области $0 < a < |z| < b$, $0 < \arg z < \pi$ на прямоугольник.

5629. Области $|z - 3| > 9$; $|z - 8| < 16$ на кольцо между кругами: $\rho < |w| < 1$.

5630. Внутренней области эллипса $4x^2 + 5y^2 = 20$ с разрезом между фокусами на внутренность кольца $1 < |w| < A$ и найти A .

5631. Внутренней части параболы $y^2 = 4x$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

5632. Внутренней части гиперболы $x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

5633. Внутренности правой половины лемнискаты $z^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ на круг $|w| \leq 1$.

Следующие задачи связаны с интегралами Кристоффеля–Шварца. Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ может быть отображена на многоугольник с помощью функции

$$w = A \int_0^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1}, \dots, (z-l)^{\lambda-1} dz + B,$$

где A и B — постоянные, $\alpha\pi, \beta\pi, \dots, \lambda\pi$ — углы многоугольника, $a, b, \dots, l$ — точки на оси OX .

Та же функция дает отображение внутренности круга $|z| < 1$ на многоугольник с такими же углами, если точки $a, b, \dots, l$ лежат на окружности $|z| = 1$. Чтобы многоугольник был замкнутым, должно выполняться условие: $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n - 2$, где n — число величин $a, b, \dots, l$. Если условие не выполнено, то получается отображение на область, расположенную по определенную сторону от ломаной.

5634. Доказать, что функция $w = \int_0^z z^{\frac{1}{3}-1}(1-z)^{\frac{1}{3}-1} dz$ отображает верхнюю полуплоскость z на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$.

5635. Доказать, что функция $w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ отображает круг $|z| < 1$ на квадрат со стороной

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

5636. Доказать, что функция

$$w = \int_0^z (1-z^2)^{-\frac{1}{3}}(1+z^2)^{-\frac{2}{3}} dz$$

отображает внутренность круга $|z| < 1$ на площадь ромба с углом 60° и со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$.

5637. Доказать, что функция

$$w = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$$

отображает внутренность круга $|z| < 1$ на площадь правильного n -угольника, длина стороны которого равна

$$\frac{2}{\pi n}\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

5638. На какую область отображает внутренность круга $|z| < 1$ функция $(-1 < \lambda < 1 - \frac{2}{n})$

$$w = \int_0^z \frac{(1+z^n)^\lambda}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}+\lambda}} dz?$$

Найти функции, дающие указанные конформные отображения:

5639. Круга $|z| < 1$ на правильную пятиконечную звезду.

5640. Того же круга на внешность правильного n -угольника.

5641. Полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на ту же полуплоскость с разрезом между точками $w = 0$ и $w = i$.

5642. Полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость с вертикальными разрезами от точек $w = n\pi$ вниз до бесконечности.

5643. Круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с радиальным разрезом между точками $w = \frac{1}{2}$ и $w = 1$.

5644. Плоскости с разрезом по оси OX от точки $z = 1$ до ∞ на круг $|w| < 1$.

§ 14.9

ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ

5645. Применяя интеграл Коши к функции $(f(z))^n$, где n — целое и стремится к ∞ , доказать теорему: если $f(z)$ регулярна внутри контура C , а на контуре справедливо неравенство $|f(z)| \leq M$, то оно остается в силе и внутри контура.

Доказать теорему:

5646. Если $f(z)$ регулярна внутри круга $|z| \leq R$, причем $|f(z)| < M$, а $f(0) = 0$, то при $|z| < R$ выполняется неравенство $|f(z)| < \frac{M}{R} \cdot |z|$, в котором равенство хотя бы в одной точке возможно только тогда, когда $f(z)$ имеет вид $f(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z$. (Лемма Шварца.)

5647. Если $f(z)$ регулярна при $r < |z| < R$, то при $r < \rho < R$ имеется равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum |a_n|^2 \rho^{2n},$$

где a_n — коэффициент ряда Лорана.

5648. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| < R$ и притом $|f(z)| \leq M$, то $\sum |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2$.

5649. Если равенство $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ дает отображение круга $|z| < R$ на площадь S , то $S = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$.

5650. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и отлична от постоянной, то функция

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi$$

возрастает вместе с r при $0 < r < R$.

5651. Из всех функций $f(z)$, регулярных внутри круга $|z| < R$ и удовлетворяющих условиям $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\varphi})|^2 d\varphi = M$, линейная функция дает наименьшую площадь, в какую отображается круг $|z| < R$.

5652. Для функции $f(z)$, регулярной при $r < |z| < R$, величина

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi = K(\ln \rho)$$

представляет выпуклую функцию $\ln \rho$, т. е. выполняется неравенство (при $m > 0, n > 0$):

$$K\left(\frac{m \ln \rho_1 + n \ln \rho_2}{m + n}\right) \leq \frac{mK(\ln \rho_1) + nK(\ln \rho_2)}{m + n}.$$

5653. Если $f(z)$, кроме прежних условий, отлично от нуля при $r < |z| < R$, то величина

$$I_\sigma(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^\sigma d\varphi$$

при любом $\sigma > 0$ есть тоже выпуклая функция $\ln \rho$.

5654. Показать, что от условия $f(z) \neq 0$ в предыдущей задаче можно освободиться.

5655. Если $f(z)$ регулярна при $|z| < R$, то величина $I_\sigma(\rho)$ возрастает вместе с ρ .

5656. Если $f(z)$ регулярна при $r < |z| < R$, а $M(\rho)$ есть максимум модуля $f(\rho e^{i\varphi})$, то при $r < \rho < R$ величина $M(\rho)$ есть выпуклая функция от $\ln \rho$ (теорема Адамара о трех кругах).

Указание. Полезно рассмотреть функцию $z^n f(z) = F(z)$, подобрав n так, чтобы величины $M(r)$ и $M(R)$ для $F(z)$ были одинаковы.

5657. Если многочлен $f(z)$ степени n в интервале $-1 \leq z \leq 1$ по модулю не превосходит M , то для любого z справедливо неравенство: $|f(z)| \leq M(a+b)^n$, где a и b — полуоси эллипса, проходящего через точку z и имеющего фокусы в точках $z = \pm 1$.

Указание. Положить $z = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$ и применить теорему о модуле к функции

$$\zeta^{-n} f\left(\frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta}\right).$$

5658. Если при $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и $|f(z)| < M$, а $f(\alpha) = 0$, где $|\alpha| < 1$, то при $|z| < 1$ имеет место неравенство:

$$|f(z)| \leq M \cdot \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|.$$

5659. Если $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$; $f(0) \neq 0$; $|f(z)| < M$ и $f(z) = 0$ при $z = z_1, z_2, z_3, \dots$, то бесконечное произведение $\prod_{\nu=1}^{\infty} |z_{\nu}|$ сходится.

Указание. Рассмотреть неравенство

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \cdots \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|.$$

5660. Если при $|z| < 1$ функция $f(z)$ регулярна и ограничена, а при $a < \varphi < b$ величина $f(re^{i\varphi})$ при $r \rightarrow 1$ равномерно стремится к нулю, то $f(z)$ тождественно равна нулю.

Указание. Рассмотреть функцию $f(z) \cdot f(\omega z) \cdots f(\omega^{n-1} z)$, где $\omega = e^{2\pi i/n}$, а n достаточно велико.

5661. Если последовательность $f_n(z)$ при $|z| \leq 1$ равномерно ограничена и стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ на множестве точек, имеющих точкой сгущения начало, то $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в любой внутренней точке круга $|z| < 1$.

Указание. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_m$ — точки, лежащие внутри фиксированного круга $|z| > \rho$, в которых $f_n(z) \rightarrow 0$. Рассматривая формулу

$$f_n(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f_n(z_{\nu})}{\omega'(z_{\nu})} \cdot \frac{\omega(z)}{z - z_{\nu}} + \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f_n(t)}{\omega(t)(t - z)} dt;$$

$$\omega(z) = \prod_{\nu=1}^m (z - z_{\nu}),$$

фиксировать при заданном $\varepsilon > 0$ достаточно малое ρ , потом соответствующее большое m и затем устремить n к ∞ .

5662. Если функции $f_n(z)$ регулярны внутри контура C и равномерно ограничены на нем, а внутри контура имеется точка сгущения точек, в которых $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и в любой точке внутри контура $f_n(z) \rightarrow 0$. (Теорема Витали.)

5663. Если функции $f_n(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$, не имеют в нем корней, а по модулю не больше, чем 1, и, кроме того, $f_n(0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то во всей внутреннейности круга $|z| < 1$ функции $f_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Указание. Воспользоваться интегралом Пуассона для $\ln |f_n(z)|$.

5664. Пусть z_ν — корни целой функции $f(z)$ и

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_{N-1}| \leq R < |z_N|,$$

а для функции $f(z)$ справедливо неравенство:

$$|f(z)| < Ce^{|z|^\sigma}.$$

Доказать, что при $|z| \leq 3R$

$$|f(0)| < \left| \frac{f(z)}{\prod_{\nu=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)} \right| < \frac{Ce^{(3R)^\sigma}}{2^{N-1}}.$$

5665. Доказать, что при тех же условиях ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^n}$ сходится при $n > \sigma$.

5666. При тех же условиях доказать разложение в бесконечное произведение Вейерштрасса:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция, а

$$\varphi_\nu(z) = \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{\frac{z}{z_\nu} + \frac{z^2}{2z_\nu^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)z_\nu^{n-1}}}.$$

5667. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

удовлетворяет в круге $|z| \leq R$ условию: $\operatorname{Re} f(z) \leq M$, где $M > 0$.

Тогда

$$|a_1| < \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R}.$$

Указание. Рассмотреть сначала случай $a_0 = 0$, используя разложение $\frac{f(z)}{2M - f(z)} = \frac{a_1}{2M}z + bz^2 + \dots$ и соотношение $|f(z)| < |2M - f(z)|$.

5668. Рассматривая при тех же условиях функцию

$$F(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (f(\omega^\nu z) - a_0),$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, доказать неравенство:

$$|a_n| \leq \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0|}{R^n}.$$

5669. При прежнем условии относительно роста $f(z)$ (см. задачу 5664) доказать, что при $|z| \leq 2R$, а следовательно, и $|z| \leq R$, имеем:

$$|\psi(z)| = \left| \frac{f(z)}{\prod_{\nu=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)} \right| < Ce^{(2R)^\sigma},$$

где в произведении $|z_\nu| \leq R$.

5670. Пользуясь тем, что $\ln \psi(z)$ — регулярная функция z при $|z| \leq R$, доказать, что при $z = 0$ величина

$$(\ln f(z))^{(n)} - \sum_{\nu=1}^N (\ln \varphi_\nu(z))^{(n)}$$

по абсолютному значению меньше, чем $\frac{c}{R^{n-\sigma}}$, где c — соответствующая постоянная.

5671. Доказать теорему Адамара: если $f(z)$ удовлетворяет при любом z условию $|f(z)| < Ce^{|z|^\sigma}$, где $\sigma < n$ и $f(0) \neq 0$, то справедливо разложение Вейерштрасса

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z),$$

где $g(z)$ — многочлен, степень которого меньше n .

5672. Доказать теорему Каратеодори: если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ регулярна в круге $|z-a| \leq R$ и в нем имеет место

$\operatorname{Re} f(z) < M$, где $M > 0$, то при $|z - a| = r < R$ справедливо неравенство:

$$|f(z)| < |a_0| + \frac{2|M - \operatorname{Re} a_0| \cdot r}{R - r}.$$

5673. Доказать теорему Линделефа: если $|f(z)| \leq C$ на краях области $-a < x < a$, а внутри этой области $|f(z)| < e^{\lambda|y|}$, где λ — некоторая постоянная, то и внутри области $|f(z)| \leq C$, причем знак равенства во внутренней точке возможен только тогда, когда $f(z) \equiv C$.

Указание. Полезно изучить функцию $f(z)e^{\varepsilon z^2}$ при $\varepsilon > 0$.

§ 14.10 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Способ Коши для нахождения интегралов линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_m}{dt} + \sum_{\nu=1}^n \alpha_{m\nu} x_\nu = \varphi_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

состоит в следующем:

1. Введя символ $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$ и $\delta_{\nu\nu} = 1$, решаем уравнения

$$\sum_{\nu=1}^n (\alpha_{\mu\nu} + s \delta_{\mu\nu}) A_\nu = \xi_\mu; \quad \mu = 1, 2, \dots, n; \quad (**)$$

при этом получится:

$$A_\nu = \frac{\sum_{\mu=1}^n B_{\nu\mu}(s) \xi_\mu}{\Delta(s)},$$

где $\Delta(s)$ — определитель системы (**).

2. Составляем функции

$$\omega_m(s) = \sum_{\mu=1}^n B_{m\mu}(s) \left(\xi_\mu + \int_0^t \varphi_\mu(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) e^{s\tau}.$$

Тогда уравнения (*) имеют систему частных интегралов:

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega_m(s)}{\Delta(s)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь интегрирование берется в положительном направлении по кругу $|s| = R$, настолько большому, что все корни уравнения $\Delta(s) = 0$ лежат внутри круга.

При $t = 0$ величины x_m обращаются в ξ_m .

Для одного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

правило Коши обращается в такое:

1. Составляем функцию

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_0^{(\nu)} \psi_\nu(s),$$

где $\psi_\nu(s) = s^{n-\nu-1} + a_1 s^{n-\nu-2} + \dots + a_{n-\nu-1}$.

2. Тогда

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sum_{\nu=0}^{n-1} y_0^{(\nu)} \psi_\nu(s) \cdot e^{sx} + \int_0^x e^{(x-t)s} f(t) dt}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} ds.$$

Здесь $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — значения при $x = 0$, а интегрирование идет по кругу $|s| = R$, внутри которого лежат все корни знаменателя.

Решить по способу Коши уравнения и системы уравнений при данных начальных условиях:

5674. $y'' - 2y' + y = f(x); y_0 = a, y'_0 = b.$

5675. $x' - x + y = 0, y' + x + z = 0, z' - x + y = 0; x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c.$

5676. $x' + x + y = e^t, y' - x + 3y = e^{-t}; x_0 = -y_0 = 1.$

5677. $x' = 4x + 2y + 2z, y' + x + z = 0, z' + 2x + y = 0; -x_0 = y_0 = z_0 = 1.$

5678. $x'' = 3x + 4y, y'' + x + y = 0; x_0 = y'_0 = 1, y_0 = x'_0 = 0.$

В следующих задачах найти общий интеграл при помощи степенных рядов:

5679. $y'' - xy = 0.$

5683. $(1-x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

5680. $y'' - x^2 y = 0.$

5684. $xy'' + y' + y = 0.$

5681. $y''' + xy = 0.$

5685. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

5682. $y''' + x^3 y = 0.$

5686. Доказать, что уравнению $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0$ удовлетворяют ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},$$

первый из которых равен $\frac{1}{2}((\arcsin x)^2)''$.

5687. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - (\alpha + \beta + 1)xy' - \alpha\beta y = 0$$

равен $C_1y_1 + C_2y_2$, где

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+2)\cdots(\alpha+2n-2)\beta(\beta+2)\cdots(\beta+2n-2)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)!} (\alpha+1)(\alpha+3)\cdots \right. \\ \left. \cdots (\alpha+2n-1)(\beta+1)(\beta+3)\cdots(\beta+2n-1)x^{2n+1} \right).$$

5688. Доказать, что уравнению $x^2y' + (x-1)y + 1 = 0$, общий интеграл которого

$$y = \frac{C}{x}e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \int xe^{\frac{1}{x}} dx,$$

формально удовлетворяет ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, расходящийся при любом $x \neq 0$.

5689. Найти интеграл уравнения

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

где $2n$ — нецелое число, в виде ряда по положительным степеням x .

5690. То же для отрицательных степеней x .

5691. Найти общий интеграл уравнения

$$4x(x-1)y'' + 4((a+2)x - a - 1)y' + (2a+1)y = 0,$$

представив его равенством $y = C_1\varphi(x, a) + C_2x^{-a}\varphi(-a, x)$, где $\varphi(a, x)$ — ряд по степеням x , равный 1 при $x = 0$.

5692. Найти интегралы предыдущего уравнения при $a = 0$ в виде рядов, сходящихся в окрестности точки $x = 1$.

5693. Найти интеграл уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

полагая $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1 и y_2 — обобщенные степенные

ряды вида $x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$, где σ — некоторая постоянная, не обязательно целая. Число n предполагается отличным от целого числа.

5694. Показать, что общий интеграл уравнения Гаусса

$$x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0$$

при $|x| < 1$ может быть представлен формулой

$$y = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x),$$

где через $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ обозначен гипергеометрический ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Дифференциальные операторы

$$M(u) = \sum_{\nu=0}^n p_\nu \frac{d^{n-\nu} u}{dx^{n-\nu}}, \quad \bar{M}(v) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \frac{d^{n-\nu}(p_\nu v)}{dx^{n-\nu}}$$

называются сопряженными. Если v — интеграл уравнения $\bar{M}(v) = 0$, то $vM(u)$ — полный дифференциал выражения $P(u, v)$, билинейного относительно $u, u', \dots, u^{(n-1)}, v, v', \dots, v^{(n-1)}$.

Преобразование Лапласа для уравнения $M(u) = 0$ состоит в том, что полагают $y = \int_\alpha^\beta e^{xt} v(t) dt$ и ищут функции $v(t)$ и пределы α и β так, чтобы y оказался интегралом данного уравнения. Для этого достаточно взять за $v(t)$ интеграл сопряженного уравнения $\bar{M}(v) = 0$, а пределы α и β выбрать так, чтобы величины

$$v(t), v'(t), \dots, v^{(n-1)}(t)$$

обращались в нуль при $t = \alpha$ и при $t = \beta$.

При помощи преобразования Лапласа проинтегрировать уравнения:

5695. $xy'' + (2n+1)y' + xy = 0$.

5696. $xy'' - (\alpha + \beta)(1+x)y' + \alpha\beta xy = 0$.

5697. $xy'' + 2ay' - q^2 xy = 0$; $a > 0$.

5698. Доказать, что при $0 < a < 2$ общий интеграл уравнения $xy'' + ay' - q^2 xy = 0$ можно представить формулой

$$y = \int_0^\pi e^{xq \cos \varphi} (A \sin^{a-1} \varphi + B x^{1-a} \sin^{1-a} \varphi) d\varphi,$$

а при $a = 1$ формулой:

$$y = \int_0^{\pi} e^{xq \cos \varphi} (A + B \ln(x \sin^2 \varphi)) d\varphi.$$

5699. Найти два частных интеграла уравнения $xy''' - y = 0$, полагая:

$$y_1 = \int \sin \frac{x}{t} \cdot u(t) dt; \quad y_2 = \int \cos \frac{x}{t} \cdot v(t) dt.$$

5700. Найти две пары частных интегралов системы

$$2xy' + 2z' + y = 0; \quad 2y' = 2xz' + z; \quad \operatorname{Im} x < 1,$$

отыскивая одну из неизвестных в виде интеграла $\int u(t) \sin xt dt$, а другую в виде интеграла $\int v(t) \cos xt dt$.

5701. Доказать, что интеграл уравнения Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

можно представить в одной из форм:

$$y = \int_0^1 t^{-\frac{n+1}{2}} (1-t)^{-\frac{n+2}{2}} (x^2 - t)^{\frac{n}{2}} dt; \quad n > 0,$$

$$y = \int_0^1 t^{\frac{n}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - t)^{-\frac{n+1}{2}} dt; \quad n > -1.$$

5702. Пусть $\varphi(x, t) = t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha}$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_1^{\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \alpha + 1 > \gamma > \beta;$$

$$\int_0^{1/x} \varphi(x, t) dt; \quad \beta > 0, \alpha < 1;$$

$$\int_0^1 \varphi(x, t) dt; \quad \gamma > \beta > 0, \alpha < 1;$$

$$\int_0^{-\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \beta > 0, \alpha + 1 > \gamma, \alpha < 1;$$

$$\int_{1/x}^{1/x} \varphi(x, t) dt, \quad \gamma > \beta, \alpha < 1;$$

$$\int_{1/x}^{\infty} \varphi(x, t) dt; \quad \alpha + 1 > \gamma, \alpha < 1$$

есть частный интеграл гипергеометрического уравнения

$$x(x-1)y'' + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)y' + \alpha\beta y = 0.$$

5703. Показать, что уравнение

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + Fy = 0$$

простой заменой переменных приводится к гипергеометрическому уравнению.

Доказать равенства:

5704. $(1+x)^n = F(-n, \beta, \beta, -x).$

5705. $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1, n, 1, \frac{x}{n}).$

5706. $\ln(1+x) = xF(1, 1, 2, -x).$

5707. $\frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} = F(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2).$

5708. $(1+x)^n + (1-x)^n = 2F(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, x^2).$

5709. $\operatorname{ch} x = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4\alpha\beta}\right).$

5710. $\cos n \arccos x = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$

5711. $J_n(x) = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)} F\left(\alpha, \beta, n+1, -\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right)^2\right),$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя, равная

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

5712. Обозначая $F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, \frac{1-x}{2})$ через F_n , доказать, что

$$\begin{aligned} ((1-x)^\gamma(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+1}F_1)' &= \\ &= -2\gamma(1-x)^{\gamma-1}(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma}F_0. \end{aligned}$$

5713. Пользуясь предыдущим, показать, что

$$\begin{aligned} ((1-x)^{\gamma+n-1}(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma+n}F_n)^{(n)} &= (-1)^n 2^n \gamma(\gamma+1) \cdots \\ &\cdots (\gamma+n-1)(1-x)^{\gamma-1}(1+x)^{\alpha+\beta-\gamma}F_0. \end{aligned}$$

5714. Полагая $\gamma = \beta + 1$, $\beta = -n$, $\alpha = p + q + n + 1$ для многочлена Якоби

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n!}{(p+1) \cdots (p+n)} P_n^{(p,q)}(x) = \\ &= F\left(p+q+n+1, -n, p+1, \frac{1-x}{2}\right), \end{aligned}$$

доказать равенство:

$$\begin{aligned} (1-x)^p(1+x)^q Q &= \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n(p+1) \cdots (p+n)} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}). \end{aligned}$$

5715. В частном случае при $p = q = 0$ получить формулу Родрига для многочленов Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}.$$

5716. Доказать тождество для многочленов Чебышева:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{n-1}} \frac{d^n(1-x)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}. \end{aligned}$$

Доказать равенства:

5717.
$$\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1} du = \frac{x^p}{p} F(1-q, p, p+1, x).$$

$$5718. \int_0^x u^{p-1} e^{-u} du = \frac{x^p}{p} \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1-n, p, p+1, \frac{x}{n}\right).$$

$$5719. \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right).$$

§ 14.11

ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости характеризуется аналитической функцией $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока. Проекции скорости на оси координат v_x и v_y равны частным производным $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Поэтому $\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$. Каждая частица жидкости движется по линии тока $\psi(x, y) = C$. Разность значений величины ψ в двух точках представляет объем жидкости, протекающей в единицу времени через цилиндр единичной высоты, стенки которого расположены на линии, соединяющей в плоскости XOY данные точки. Любая линия тока или часть ее может быть заменена твердой стенкой без нарушения движения жидкости.

Найти линии равного потенциала, линии тока и величину скорости и ее проекции на оси, если движение жидкости определяется функцией движения $w = \varphi + i\psi$, данной в следующих задачах:

$$5720. w = az; a > 0.$$

$$5723. w = \frac{1}{z}.$$

$$5721. w = iaz; a > 0.$$

$$5724. w = \frac{1}{z^2}.$$

$$5722. w = z^2.$$

$$5725. w = \ln z.$$

5726. Потенциал скорости имеет вид

$$\varphi = \ln |z^2 - a^2| - \ln |z^2 + a^2|.$$

Найти уравнение линий тока и показать, что дуги окружности $|z| = a$ и оси координат вне точек $z = \pm a$, $z = \pm ia$ суть линии тока.

5727. Функция тока имеет вид

$$\psi = \ln(r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4),$$

где $z = re^{i\theta}$. Найти потенциал φ .

5728. Функция тока определяется уравнением:

$$\operatorname{th} \frac{\pi x}{a} \cdot \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \frac{\pi y}{a}; \quad a > 0.$$

Найти функцию движения w .

5729. Линии тока — окружности $x^2 + y^2 = 2ax$. Найти отношение скорости жидкости в точках $(2a, 0)$ и (a, a) .

5730. Такой же вопрос для лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ и точек $(a, 0)$ и $\left(a\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{a}{\sqrt{8}}\right)$.

Назовем потоком сквозь замкнутый контур C количество жидкости E , протекающей в единицу времени сквозь цилиндр с высотой единица и с основанием, расположенным по контуру C . Величина E дается формулой:

$$E = \int_C v_x dy - v_y dx.$$

Циркуляцией скорости по тому же контуру C называется величина $\Gamma = \int_C v_x dx + v_y dy$. Так как $\Gamma + iE = \int_C \frac{dw}{dz} \cdot dz$, то E и Γ удобно находятся с помощью вычетов. Если же $w = \frac{E}{2\pi} \ln(z - a)$, где E — вещественно, то точка a называется источником обильности E . Если же $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a)$, где Γ вещественно, то точка a называется вихрем интенсивности Γ .

5731. Для источника $z = a$ обильности E найти линии равного тока и равного потенциала.

5732. Движение жидкости вызывается источником обильности E , помещенным в точке a . Доказать, что поток сквозь простой замкнутый контур C равен нулю, если точка a вне контура, и равен E , если точка a внутри контура.

5733. При тех же условиях доказать, что циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

5734. Получить соответствующие результаты для движения, вызванного вихрем интенсивности Γ в точке a .

5735. Движение жидкости создается источником E и вихрем Γ , помещенными в точке a . Доказать, что линии тока — логарифмические спирали.

5736. Функция движения $w = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Найти величину потока сквозь окружность $2|z| = 3$ и циркуляцию по ней.

5737. Функция движения $w = 2i \ln(z^2 - a^2)$. Найти циркуляцию по окружностям $|z - a| = a$; $|z + a| = a$.

5738. Функция движения $w = \ln(z^2 + z^{-2})$. Каковы источники?

5739. Доказать, что вещественная ось есть линия тока, если движение создается источниками обильности E , помещенными в точках $a \pm bi$.

Замечание. Если линия тока C делит плоскость на две части, а движение создается источниками и вихрями, то совокупность источников и вихрей по одну сторону линии C называется отражением источников и вихрей по другую сторону той же линии.

5740. Доказать, что отражением в вещественной оси вихря Γ в точке $a + bi$ является вихрь $-\Gamma$ в точке $a - bi$.

5741. В точке a вне круга $|z| = R$ помещен источник E . Доказать, что его отражением в окружности являются два источника: источник E в точке $\frac{R^2}{a}$ и источник с обильностью $-E$ в точке $z = 0$.

5742. Вихрь интенсивности Γ помещен вне круга $|z| = R$. Доказать, что его отражением в окружности является вихрь $-\Gamma$ в точке $\frac{R^2}{a}$.

5743. Найти движение жидкости вне круга $|z| = 1$, вызываемое источником обильности E в точке a , где $a > 1$.

5744. То же для вихря интенсивности Γ .

5745. Найти движение жидкости в области $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, вызванное вихрем в точке $z = ai$, $a > 1$ с интенсивностью Γ .

5746. Положительные части осей координат — непроницаемые стенки. Только в точке $z = 1$ имеется точечный источник (точнее, источник вдоль по щели, перпендикулярной к плоскости XOY и проходящей через $z = 1$), из которого в пространстве высотой 1 в первый квадрант втекает Q единиц в 1 секунду. Найти движение жидкости.

5747. Найти движение жидкости в области $0 < y < x\sqrt{3}$, вызванное источником обильности E в точке $z = ae^{\frac{\pi i}{6}}$; $a > 0$.

5748. Найти движение жидкости в первом квадранте, если в точках $z = 1$ и $z = i$ в стенках квадранта имеются точечные источники, через которые соответственно входит и выходит Q единиц объема жидкости в секунду.

5749. Источники обильности $\pm \frac{E}{a}$ находятся в точках $z = \pm a$, где $a \rightarrow 0$ (диполь). Найти предельное движение жидкости.

5750. На окружности, непроницаемой в остальных точках для жидкости, помещены два источника обильности E и $-E$. Доказать, что линии тока внутри круга представляют дуги окружностей, проходящих через оба источника.

5751. Два вихря Γ и $-\Gamma$ помещены в двух точках. Доказать, что в движении, вызванном ими, линии тока — окружности.

5752. Движение жидкости вызвано потоком из бесконечности, имеющим скорость, равную a и направленную в отрицательную сторону оси Ox , и источником $E = 1$ в начале координат. Доказать, что жидкость, поступающая из источника, заполняет область внутри кривой $x \operatorname{tg} 2\pi ay = y$.

5753. Движение в полуплоскости $y > 0$ вызвано источником в точке $z = ai$. Доказать, что линии тока являются гиперболами $x^2 - y^2 + a^2 = Cxy$.

5754. Движение жидкости создано наложением источников $z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$ с обильностью $E = 2\pi$ каждый. Доказать, что скорость движения стремится к единице при удалении от OY и направлена от оси OY почти перпендикулярно к ней.

5755. В тех же точках расположены вихри интенсивности Γ . Доказать, что в точках, далеких от оси OY , скорость по величине близка к $\frac{\Gamma}{2\pi}$, а по направлению почти параллельна оси OY .

5756. Движение жидкости создано наложением источников с обильностью $E = 2\pi$ в точках $z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$ и течения со скоростью $v > 1$, параллельного отрицательному направлению оси Ox . Доказать, что наибольшая абсцисса точек, куда заходит жидкость из источников, равна $\frac{1}{2} \ln \frac{v+1}{v-1}$.

5757. Доказать, что при условиях прежней задачи область, заполняемая жидкостью из источника $z = 0$, ограничена кривой $\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} vy$, расстояние между ветвями которой стремится к $\frac{2\pi}{v+1}$ при $x \rightarrow -\infty$.

5758. Источник обильности $E = 2\pi$ расположен в точке $z = ai$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что движение, созданное им в полосе $0 < y < \frac{\pi}{2}$, имеет функцию движения:

$$w = \ln \operatorname{sh}((z + ia) \operatorname{sh}(z - ia)).$$

5759. Источник обильности $E = 2\pi$ расположен в точке $z_0 = a + bi$, где $a > 0$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Доказать, что функция движения, созданного им в области $0 < y < \frac{\pi}{2}$; $x > 0$, дается формулой:

$$w = \ln (\operatorname{sh}(z - z_0) \operatorname{sh}(z + z_0) \operatorname{sh}(z - \bar{z}_0) \operatorname{sh}(z + \bar{z}_0)).$$

5760. Движение жидкости в области $|z| > 1$, вызванное источником обильности E в точке $a > 1$, характеризуется функцией $w = \frac{E}{2\pi} \ln(z + \frac{1}{z} - a - \frac{1}{a})$. Полагая $E = 2\pi b(a + \frac{1}{a})$ и $a \rightarrow \infty$, найти движение при обтекании круга $|z| < 1$ потоком, у которого скорость на бесконечности $v_\infty = v$ и направлена в сторону отрицательной оси OX .

Если движение жидкости в односвязной области, определяемое функцией $w(z)$, вызывается вихрем интенсивности Γ , находящимся в данный момент в точке $z = a$, то этот вихрь перемещается со скоростью

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{d\bar{w}_1}{dz} \right)_{z=a},$$

где

$$w_1 = w - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - a) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Траектория вихря дается уравнением

$$\psi(\xi, \eta) = C, \text{ где } a = \xi + i\eta,$$

а скорость жидкости на бесконечности предполагается равной нулю.

5761. Вдоль вещественной оси — непроницаемая стенка. На расстоянии h от нее помещен вихрь интенсивности Γ . Доказать, что он движется параллельно оси OX со скоростью $\frac{\Gamma}{4\pi h}$.

5762. Доказать, что вихрь, помещенный в непроницаемую окружность, движется по концентрической окружности.

5763. Движение в области $x > 0$, $y > 0$ вызывается вихрем с интенсивностью Γ , помещенным в точке (ξ, η) . Доказать, что

траектория вихря выражается уравнением $\xi^{-2} + \eta^{-2} = C$, а проекции скорости вихря выражаются формулами:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\Gamma \xi^2}{4\pi\eta(\xi^2 + \eta^2)}; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\Gamma \eta^2}{4\pi\xi(\xi^2 + \eta^2)}.$$

5764. Доказать, что функция движения, вызванного бесконечной цепочкой вихрей, каждого с интенсивностью $\Gamma = 2\pi$, помещенных в точках $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, выражается формулой

$$\omega(z) = -i \ln \sin z.$$

5765. Найти функцию движения, вызванного наличием вихрей двух родов: а) с интенсивностью Γ в точках $l\left(n + \frac{1}{4}\right) + \frac{hi}{2}$, б) с интенсивностью $-\Gamma$ в точках $l\left(n - \frac{1}{4}\right) - \frac{hi}{2}$. Здесь $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

5766. Найти скорость вихря интенсивности Γ , помещенного между параллельными стенками, на расстоянии h от одной из них, если расстояние между стенками d .

Если в равенстве $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $z = x + iy$ ввести новую переменную $\zeta = \xi + i\eta$, положив

$$z = \varphi(\zeta) = p(\xi, \eta) + iq(\xi, \eta),$$

то, обозначив величины $\omega(z)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$, выраженные через ζ , ξ и η , через $\omega_1(\zeta)$, $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$, мы получим $\omega_1(\zeta) = u_1(\xi, \eta) + iv_1(\xi, \eta)$. После этого область S на плоскости z перейдет в область S_1 на плоскости ζ , а линии тока $v(x, y) = C$ перейдут в линии тока $v_1(\xi, \eta) = C$.

Таким образом, конформное отображение дает возможность по движению в области S , данному функцией $\omega(z)$, находить движение в области S_1 с помощью функции $\omega_1(\zeta)$.

5767. Найти движение в области $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, если в точке $(0, 0)$ находится источник мощности Q .

5768. Аналогичный вопрос, если источник находится в точке $(\frac{\pi}{2}, h)$.

5769. Найти функцию движения при симметричном и непрерывном обтекании цилиндра с круглым основанием $|z| = a$, если скорость потока на бесконечности равна v и направлена в сторону отрицательной оси OX . (Один из путей решения — отобразить область $|z| > a$, $\text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость нового переменного.)

5770. Найти функцию движения при обтекании прежним потоком отрезка между точками $z = \pm i$. Обтекание ищется непрерывное и симметричное.

5771. Функция $w(z) = a\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ дает несимметричное непрерывное обтекание круга $|z| = R$. Найти v_∞ , циркуляцию вдоль по окружности и точки, где скорость равна нулю.

5772. Найти функцию движения при течении жидкости из полуплоскости $y > 0$ в полуплоскость $y < 0$ сквозь отверстие в стенке $y = 0$ между точками $z \pm 1$. Скорость на бесконечности равна нулю.

5773. Найти функцию течения $w(z)$ для непрерывного симметричного обтекания эллиптического цилиндра с сечением $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ потоком, имеющим на бесконечности скорость $v_x = v$; $v_y = 0$.

5774. Доказать, что функция $w = i \ln(1 + z^{-1})$ дает обтекание жидкостью пространства, ограниченного прямой и кругом, при условии $v_\infty = 0$.

5775. Найти функцию, дающую обтекание полукруга $|z + \frac{4}{3}| < \frac{2}{3}$, $\text{Im } z > 0$ при условии на бесконечности $v_x = -v$, $v_y = 0$.

Плоское электростатическое поле при отсутствии непрерывно распределенных зарядов характеризуется аналитической функцией $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. При этом

$$i \frac{dw}{dz} = E_x - iE_y,$$

где E_x и E_y — проекции электрической силы на оси координат. Уравнение $u(x, y) = C$ дает силовые линии, а $v(x, y) = C$ — эквипотенциальные линии. Внутри и на границе проводника потенциал v должен быть постоянным. Плотность электричества в каком-либо месте контура проводника с точностью до знака дается формулой: $\sigma = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dw}{dz} \right|$.

5776. Показать, что функция $w = 2i\delta \ln \frac{R}{z}$ определяет электрическое поле вне кругового цилиндра $|z| = R$, на котором равномерно распределен заряд, равный δ для цилиндра единичной высоты.

5777. Найти силовые и потенциальные линии в предыдущей задаче.

5778. Найти силовое поле между поверхностями двух цилиндров с круглыми основаниями $|z| = 1$, $|z - 1| = 4$, если потенциал на первом равен 1, а на втором — нулю.

5779. На изолированном цилиндре с круглым сечением $|z - 2i| = 1$ плотность электричества $\sigma = 1$. Как она распределяется, если заземлить плоскость, параллельную образующей и пересекающую плоскость XOY по вещественной оси (электростатическая индукция)?

5780. На цилиндре $|z - 5i| = 4$ потенциал равен 1, а на цилиндре $|z + 5i| = 4$ он равен нулю. Найти наибольшую и наименьшую плотности электричества на обоих цилиндрах.

5781. В точке $z = 2$ точечный заряд δ . Мнимая ось заземлена. Чему равен потенциал в точке $z = 1$?

5782. Представив уравнение параболы $y^2 = 2px$ в параметрическом виде:

$$x = 2pu^2, \quad y = 2pu,$$

доказать, что функция w , определяемая равенством $z = 2p(w^2 + iw)$, дает поле вне параболы, в котором потенциал на самой параболе равен нулю и в котором нет зарядов.

5783. Найти поле вне эллипса

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u,$$

представляющего одну из эквипотенциальных линий поля.

5784. Потенциал равен ν_0 в точках прямой $z = x + ih$ и равен нулю на вещественной оси. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

5785. На линии $3x^2 + 4y^2 = 12$ потенциал равен единице, а на отрезке между фокусами он равен нулю. Найти потенциал в точке $z = i$.

5786. Найти наибольшую и наименьшую плотности на эллипсе предыдущей задачи.

5787. На линии $z = x > 1$ потенциал равен ν_0 , а на линии $z = x < -1$ он равен $-\nu_0$. Найти функцию $w(z)$, дающую электростатическое поле.

5788. На линии $z = iy$, где $y > 1$, потенциал равен 1, а на вещественной оси равен нулю. Найти плотность распределения электричества на оси OX .

5789. Потенциал равен π на ломаной, состоящей из линий:

$$z = x + \pi i; \quad x < 0 \quad \text{и} \quad z = iy; \quad y > \pi.$$

На оси OX потенциал равен нулю. Найти электростатическое поле в области, ограниченной указанными линиями, пользуясь интегралом Кристоффеля—Шварца.

Если на контуре C находится заряд q и если область вне контура отображается конформно на область вне круга $|\zeta| = 1$ аналитической функцией

$$z = a_1 \zeta + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^{-n},$$

то поле вне C дается функцией

$$w = 2iq \ln \frac{w_0}{\zeta(z)},$$

где w_0 — некоторая постоянная.

5790. Найти поле вне эллипса $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

5791. Найти поле вне квадрата $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, на котором расположен заряд q .

Плоская задача установившегося распределения тепла внутри однородного тела дается аналитической функцией

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $v(x, y)$ — температура в точке (x, y) . Уравнение $v(x, y) = C$ дает изотермические линии, а $u(x, y) = C$ — линии тока тепла.

5792. На окружности $|z| = 1$ температура 0° , а на окружности $|z - 1| = \frac{5}{2}$ она 100° . Найти температуру t в кольце между кругами.

5793. На окружности $|z - 5i| = 4$ температура 100° , а на оси OX она нуль. Найти температуру t в точке $z = i + 1$.

5794. Найти распределение температуры в области $0 < \varphi < \pi$, $r > a$, где $z = re^{i\varphi}$, если температура равна нулю на вещественной оси и единице на полукруге $z = ae^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$.

5795. Найти распределение тепла внутри полукруга $|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi$, если температура равна нулю на полуокружности и единице на диаметре.

5796. Та же задача для сектора круга: $0 < \varphi < \alpha$, $0 < r < a$, где $z = re^{i\varphi}$, а температура 0° на радиусах и 1° на дуге круга.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Глава разделяется на 6 параграфов, § 15.1 — составление дифференциальных уравнений — введен с двойкой целью: с одной стороны, чтобы дать учащимся достаточную практику в процессе сведения того или иного физического вопроса к математическому исследованию, а с другой стороны, дать им в руки тот материал, которым им придется широко пользоваться в дальнейших параграфах главы.

§ 15.2 носит вводный характер к основным методам: методу характеристик и способу Фурье, которым посвящены § 15.3 и § 15.5.

§ 15.6 — интегральные уравнения относятся главным образом к теории линейных уравнений типа Фредгольма.

§ 15.1 СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

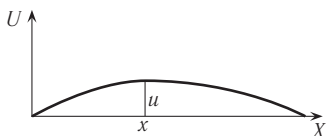


Рис. 15.1

5797. Абсолютно гибкая однородная нить под влиянием сильного натяжения T_0 находится в прямолинейном положении равновесия.

Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

где u есть смещение точки с абсциссой x , t — время, а ρ — линейная плотность нити (рис. 15.1)

5798. Тонкий однородный стержень совершает продольные колебания, при которых его поперечные сечения, оставаясь плоскими, перемещаются вдоль оси OX . Доказать, что уравнение малых колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где u есть смещение сечения с абсциссой x , ρ — плотность, а E — модуль упругости материала стержня (рис. 15.2).

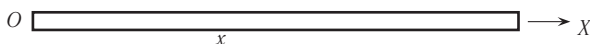


Рис. 15.2

5799. Доказать, что уравнение продольных колебаний конического стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где u есть перемещение стержня с абсциссой x , а h — высота конуса (рис. 15.3).

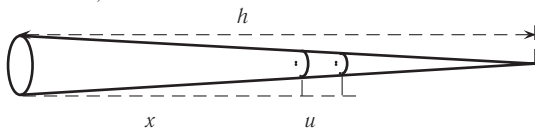


Рис. 15.3

5800. Крутильными колебаниями стержня называются такие колебания, при которых его поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, вращаясь при этом около оси стержня. Доказать, что уравнением малых колебаний круглого стержня служит уравнение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{GI}{k}},$$

где θ есть угол поворота сечения с абсциссой x , G — модуль сдвига, I — полярный момент инерции поперечного сечения,

а k — момент инерции части стержня, имеющей единицу длины относительно оси стержня.

5801. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена в одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((l-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{g},$$

где u есть смещение точки с абсциссой x , l — длина нити, а g — ускорение силы тяжести (рис. 15.4).

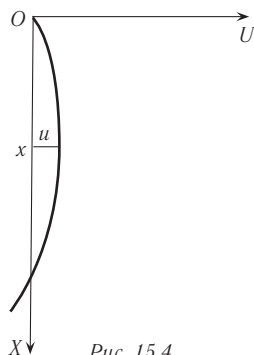


Рис. 15.4

5802. Абсолютно гибкая нить длиной l подвешена за конец $x = l$, а на другом конце $x = 0$ прикреплен груз в P кг. Линейная плотность нити ρ изменяется по закону

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{l_1 + x}},$$

где постоянные A и l_1 связаны с массой M груза соотношением

$$M = 2A\sqrt{l_1}.$$

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего равновесного положения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{g}{2}}, \quad \text{где } \theta = \sqrt{l+l_1} - \sqrt{l_1+x}.$$

5803. Тяжелая однородная нить длиной l , закрепленная верхним концом ($x = 0$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 15.5).

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего верти-

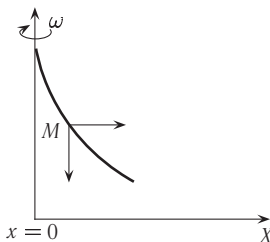


Рис. 15.5

кального положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u,$$

где $a = \sqrt{g}$.

5804. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена в одном из концов и в положении равновесия располагается по оси x . Выведенная

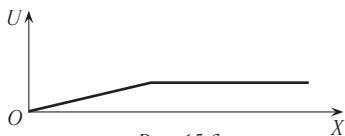


Рис. 15.6

из положения равновесия, она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси u (рис. 15.6).

Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего относительного положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \frac{\omega}{\sqrt{2}},$$

где через l обозначена длина нити.

5805. Неоднородная нить, плотность которой изменяется по закону

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}; \quad b > l,$$

прикреплена концом $x = 0$ к неподвижной оси, а на другом конце $x = l$ прикреплен шарик, масса которого выражается равенством

$$M = \frac{a}{l} \sqrt{b^2 - l^2}.$$

Доказать, что при вращении нити с постоянной угловой скоростью ω вокруг указанной оси уравнение малых колебаний будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где

$$y = \arcsin \frac{x}{b}.$$

5806. Вывести уравнение поперечных колебаний нити, закрепленной на концах, взяв за исходную точку минимальный принцип Гамильтона.

Указание. При малых колебаниях нити величины потенциальной и кинетической энергий выражаются формулами:

$$U = \frac{T_0}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad T = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

где T_0 есть величина начального натяжения, а l — длина нити. Согласно принципу Гамильтона при любых моментах времени t_1 и t_2 имеет место равенство

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0.$$

5807. Исходя из принципа Гамильтона, решить задачи 5801 и 5804.

5808. Гибкая однородная нить натянута на абсолютно гладкой сфере радиуса R и в положении равновесия направлена по экватору. Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \theta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

где θ и φ обозначают географические координаты точки M , T_0 есть начальное натяжение, а ρ — линейная плотность нити (рис. 15.7).

Указание. Можно воспользоваться принципом Гамильтона, приняв во внимание следующие выражения для потенциальной и кинетической энергий:

$$U = \frac{RT_0}{2} \int_0^a \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 - \theta^2 \right) d\varphi, \quad T = \frac{R^3 \rho}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\varphi,$$

где $aR = l$ и через l обозначена длина нити.

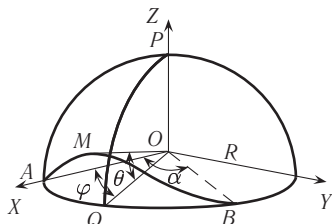


Рис. 15.7

5809. Гибкая однородная нить длиной l закреплена одним из концов в полюсе абсолютно гладкой сферы и под действием

своего веса располагается по дуге большого круга. Доказать, что уравнение малых колебаний нити имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left((\cos \varphi - \cos a) \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right) + (\cos \varphi - \cos a) \theta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

где через g обозначено ускорение силы тяжести, а через R — радиус сферы (рис. 15.8).

Указание. Выражения потенциальной и кинетической энергий имеют следующий вид:

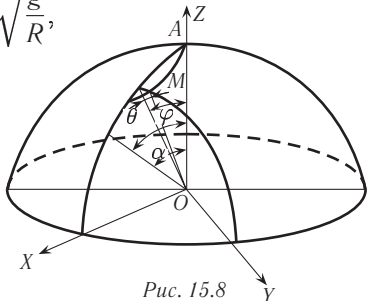


Рис. 15.8

$$U = \frac{g\rho R^2}{2} \int_0^a (\cos \varphi - \cos a) \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)^2 - \theta^2 \right) d\varphi,$$

$$T = \frac{\rho R^3}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\varphi.$$

5810. Доказать, что при непрерывно распределенных вдоль провода омическом сопротивлении R , емкости C , индуктивности L и утечки изоляции G дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют напряжение p и сила тока i , имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} + Gp = 0.$$

Указание. Первое уравнение выводится из закона индукции, примененного к весьма малому участку провода. Второе уравнение получается из условия непрерывности тока в проводе.

5811. Абсолютно гибкая однородная пленка (мембрана) натянута на каркасе C . Это положение мембраны принимается за плоскость координат XOY . Доказать, что уравнение малых поперечных колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}},$$

где T_0 есть сила начального натяжения, рассчитанная на единицу контура C , а σ обозначает поверхностную плотность мембраны (рис. 15.9).

5812. Тонкий однородный стержень изолирован от внешнего пространства и имеет в точке $M(x)$ температуру $u(x, t)$, изменяющуюся с течением времени. Доказать, что эта температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

где c есть теплоемкость, k — коэффициент внутренней теплопроводности, а ρ — плотность вещества стержня.

5813. Доказать, что уравнение распространения тепла в тонкой изолированной пластинке имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

где значение постоянной a то же, что и в предыдущей задаче.

5814. Дано однородное кольцо с очень малым поперечным сечением (рис. 15.10). Приняв во внимание потерю тепла в окружающую кольцо среду вследствие лучеиспускания через боковую поверхность, доказать, что уравнением распространения тепла в кольце служит уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - bu = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, \quad b = \frac{hl}{\sigma k},$$

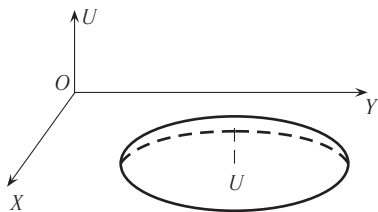


Рис. 15.9

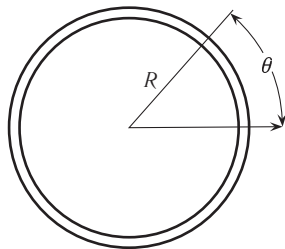


Рис. 15.10

где через θ обозначена длина дуги кольца, а входящие в уравнение постоянные имеют следующие значения: k, h — коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности, c, ρ — теплоемкость и плотность вещества кольца, σ, l — площадь и периметр поперечного сечения.

5815. Доказать, что температура однородного проводника, находящегося под действием постоянного тока, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{c\rho\omega}(u - u_0) + \frac{0,24i^2 r}{c\rho\omega^2},$$

где через i и r обозначены силы тока и удельное сопротивление проводника, через p и ω — периметр и площадь его поперечного сечения, а через u_0 — температура окружающей среды; значения букв k, h, c, ρ см. в задаче 5813.

5816. Доказать, что уравнение радиального распространения тепла в однородной изолированной сфере имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v(r, t) = ru(r, t), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}},$$

где u есть температура сферы в точке, отстоящей на расстояние r от ее центра; значения букв см. в задаче 5814.

§ 15.2 ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Привести к канонической форме следующие дифференциальные уравнения:

5817. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

5818. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

5819. $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

5820. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

$$5821. (l-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$5822. (l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}u = 0.$$

5823. Найти замену переменных, при которых уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta' \operatorname{ctg}(x-y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \operatorname{ctg}(x-y) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \beta' u = 0$$

преобразовывается в уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{m}{\xi - \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{n}{\xi - \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{p}{(\xi - \eta)^2} v = 0.$$

§ 15.3

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

5824. Доказать, что общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

имеет вид $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, где φ и ψ — произвольные функции.

5825. Показать, что общему решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

можно придать форму

$$u = \frac{\varphi(x - at) + \psi(x + at)}{x - h}.$$

5826. Доказать, что решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющим условиям

$$u \Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x),$$

служит выражение

$$u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz.$$

Указание. Следует воспользоваться результатом задачи 5824.

5827. Отрезок однородной струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через середину отрезка $(0, l)$. Определить форму струны в моменты времени $t = \frac{l}{2a}$ и $t = \frac{l}{a}$, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

5828. Доказать, что уравнение, приведенное в задаче 5825, при условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$$

имеет решение вида

$$u = \frac{(h-x+at)f(x-at) + (h-x-at)f(x+at)}{2(h-x)} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{h-z}{h-x} F(z) dz.$$

5829. Найти интеграл уравнения

$$(p-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < p$$

при условиях:

$$u|_{y=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$$

5830. Проинтегрировать уравнение

$$(p^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < p$$

при условиях:

$$u|_{y=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$$

5831. Доказать, что общее решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

имеет форму

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Указание. См. задачу 5818.

5832. Показать, что общему решению уравнения

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

можно придать вид

$$u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Указание. См. задачу 5820.

5833. Доказать, что уравнение, приведенное в предыдущей задаче, при условиях

$$u\Big|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{2}f(xy) + \frac{y}{2}f\left(\frac{x}{y}\right) + \\ & + \frac{1}{4}\sqrt{xy} \int_{xy}^{x/y} \frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{1}{2}\sqrt{xy} \int_{xy}^{x/y} \frac{F(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx. \end{aligned}$$

Указание. Следует воспользоваться результатом предыдущей задачи.

5834. Доказать, что если при $x = ct$, $c = \text{const}$ имеют место равенства $u = f(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = F(t)$, то решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

служит выражение

$$u = \frac{1+\beta}{2} f\left(\frac{at+x}{a(1+\beta)}\right) + \frac{1-\beta}{2} f\left(\frac{at-x}{a(1-\beta)}\right) + \frac{a(1-\beta^2)}{2} \int_{\frac{t-\frac{x}{a}}{1-\beta}}^{\frac{t+\frac{x}{a}}{1+\beta}} F(z) dz,$$

где $\beta = \frac{c}{a}$.

Указание. Следует воспользоваться результатом задачи 5824 и принять во внимание равенства

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=ct} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=ct} + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=ct} \cdot \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x=ct}.$$

5835. На конце $x = 0$ цилиндрического стержня, настолько длинного, что его можно считать простирающимся в одну сторону до бесконечности, действует возмущающая гармоническая сила $A \sin \omega t$. Доказать, что перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается формулой

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } at \leq x; \\ A \sin \frac{\omega}{a}(at - x) & \text{при } at \geq x. \end{cases}$$

Указание. Применить способ характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при граничном условии $u|_{x=0} = A \sin \omega t$ и при начальных условиях: $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} = 0$; $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, имеющих место при всяком положительном x .

5836. Идеальный газ, плотность которого изменяется по закону $\rho = f(at - x)$, совершает продольные колебания в неограниченной цилиндрической трубке. Доказать, что скорость газа в сечении с абсциссой x выражается формулой

$$v = \frac{af(at - x) + (v_0 - a)f(at)}{f(at - x)},$$

где v_0 — скорость в сечении $x = 0$.

Указание. Воспользоваться уравнением непрерывности.

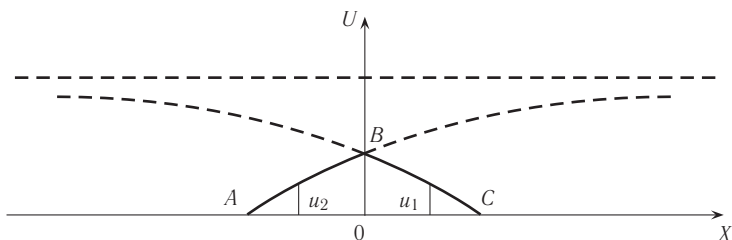


Рис. 15.11

5837. Бесконечная струна, находящаяся в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент времени ($t = 0$) удар от молоточка, масса которого равна M , причем этот молоточек касается струны в точке $x = 0$ и имеет начальную скорость v_0 .

Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рисунке 15.11, где u_1 — п р я м а я в о л н а:

$$u_1 = \begin{cases} \frac{MAv_0}{2T_0} \left(1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)} \right), & \text{при } x - at < 0; \\ 0, & \text{при } x - at > 0, \end{cases}$$

а u_2 — о б р а т н а я в о л н а:

$$u_2 = \begin{cases} \frac{MAv_0}{2T_0} \left(1 - e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x+at)} \right), & \text{при } x + at > 0; \\ 0, & \text{при } x + at < 0. \end{cases}$$

Значения букв a и T_0 см. задачу 5797.

Указание. При интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

следует принять во внимание условие

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = -T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} + T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

5838. Начало координат $x = 0$ помещается в плоскости раздела двух газов (I) и (II), заполняющих очень длинную цилиндрическую трубку. Конденсация газов обозначается

через s_1 и s_2 . Из области (I) движется прямая волна $s_1 = F(t - \frac{x}{a_1})$, претерпевающая в сечении $x = 0$ отражение и поглощение.

Доказать, что между падающей волной F , отраженной f и поглощенной φ существует соотношение

$$\frac{f}{F} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\varphi}{F} = \frac{2a_2}{a_1 + a_2},$$

где a_2 означает скорость поглощенной волны.

5839. Область начальных колебаний однородного газа представляет собою шар радиуса R . Начальные скорости частиц газа всюду равны нулю, а начальная плотность S_0 постоянна внутри шара и равна нулю вне его. Найти выражение для плотности S в момент времени $t > 0$.

Указание. Применить метод характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 (r\Phi(r, t))}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\Phi(r, t))}{\partial r^2}, \quad \left(S = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

при начальных условиях

$$\Phi|_{t=0} = f(r) = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = F(r) = \begin{cases} a^2 S_0 & \text{при } r < R; \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

5840. Решить предыдущую задачу, применяя интеграл Пуассона:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{r} d\sigma + \iint_{\Sigma} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{t} d\sigma \right),$$

где через Σ обозначена сфера, описанная радиусом $r = at$ из точки M , а α, β, γ суть координаты переменной точки сферы Σ (рис. 15.12)

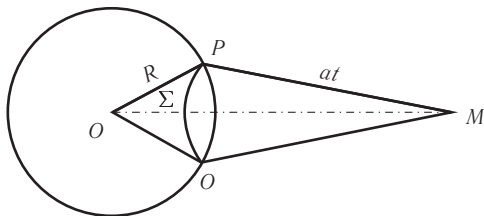


Рис. 15.12

§ 15.4 МЕТОД РИМАНА

5841. Проинтегрировать по способу Римана уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ при условиях

$$u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = F(x).$$

Указание. В данном случае функция Римана равна единице.

5842. Решить по способу Римана задачу 5833.

Указание. За область интегрирования следует принять криволинейный треугольник, образованный характеристиками MP , MQ и дугой равнобочной гиперболы $xy = 1$ (рис. 15.13). Функция Римана определяется равенством:

$$v(x, y; x_0, y_0) = \sqrt{\frac{x_0}{x}}.$$

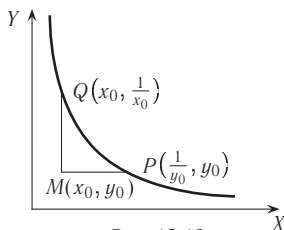


Рис. 15.13

5843. Показать, пользуясь методом Римана, что интеграл уравнения $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \theta = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, удовлетворяющий условиям $\theta|_{t=0} = f(\varphi)$; $\frac{\partial \theta}{\partial t}|_{t=0} = F(\varphi)$, имеет вид

$$\theta(\varphi, t) = \frac{f(\varphi - at) + f(\varphi + at)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\varphi - at}^{\varphi + at} \Phi(\varphi, t, z) dz,$$

где

$$\Phi(\varphi, t, z) = \frac{1}{a} F(z) J_0 \left(\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2} \right) - at f(z) \frac{J'_0 \left(\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2} \right)}{\sqrt{(z - \varphi)^2 - a^2 t^2}}.$$

Указание. Функция Римана определяется равенством

$$v(x, y; x_0, y_0) = J_0 \left(\sqrt{(x - x_0)(y - y_0)} \right),$$

где $J_0(x)$ обозначает функцию Бесселя нулевого порядка.

5844. Применить способ Римана, доказать, что при условиях $u|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x)$ уравнение

$$(l - x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

имеет решение

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{\sqrt{\sqrt{b-x} - \frac{at}{2}} f\left(x + \sqrt{l-x}at - \frac{a^2 t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}} + \\
 & + \frac{\sqrt{\sqrt{l-x} + \frac{at}{2}} f\left(x - \sqrt{l-x}at - \frac{a^2 t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt[4]{l-x}} \int_{\sqrt{l-x} - \frac{at}{2}}^{\sqrt{l-x} + \frac{at}{2}} \Phi(x, t, z) dz; \\
 \Phi(x, t, z) = & \frac{\sqrt{z}}{a} \varphi(l - z^2) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4} - (z - \sqrt{l-x})^2}{4\sqrt{l-x}z}\right) + \\
 & + \frac{at f(l - z^2)}{8\sqrt{l-x}\sqrt{z}} F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4} - (z - \sqrt{l-x})^2}{4\sqrt{l-x}z}\right),
 \end{aligned}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ есть гипергеометрический ряд.

Указание. Заданное уравнение надо привести к простейшей канонической форме (см. задачу 5820). За область интегрирования следует принять треугольник, образованный характеристиками MP , MQ и биссектрисой $y = -x$ (рис. 15.14). Функция Римана определяется равенством

$$\begin{aligned}
 v(x, y; x_0, y_0) = \\
 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x_0-y_0)(x-y)}\right).
 \end{aligned}$$

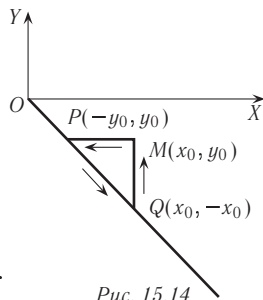


Рис. 15.14

5845. Проинтегрировать по способу Римана уравнение

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4} u = 0, \quad 0 < x < l,$$

подчинив его интеграл условиям

$$u|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi(x).$$

Указание. Функция Римана имеет следующий вид:

$$v(x, y; x_0, y_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sin(x-x_0)\sin(y-y_0)}{\sin(x_0-y_0)\sin(x-y)}\right).$$

§ 15.5

МЕТОД ФУРЬЕ

5846. Для однородной струны длиной l , закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, известны в начальный момент времени отклонение от прямолинейного положения равновесия и скорости точек. Изучить по способу Фурье поперечные колебания струны (см. задачу 5797).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

и выполнению условий: $u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0$ при всяком t ;

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x) \quad \text{при } 0 < x < l.$$

5847. Изучить с помощью метода Фурье продольные колебания цилиндрического стержня длиной l , у которого один конец закреплен, а другой свободен (см. задачу 5798).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} &= 0 & \text{при всяком } t; \\ u|_{t=0} &= f(x), & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= F(x) & \text{при } 0 < x < l. \end{aligned}$$

5848. Решить предыдущую задачу при условии, что оба конца стержня свободны.

5849. Проинтегрировать по способу Фурье уравнение крутильных колебаний вала $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$, $a = \sqrt{\frac{GI}{k}}$ при условии, что один из концов вала заделан, а на другом прикреплен шкив (см. задачу 5801).

Указание. Интеграл уравнения колебаний удовлетворяет условиям

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t^2}|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l}$$

при всяком t и $\theta|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$ при $0 < x < l$, где $c = \sqrt{\frac{GI}{k_1}}$ и k_1 обозначает момент инерции шкива относительно оси вала.

5850. Решить ту же задачу в предположении, что на концах вала прикреплены два одинаковых шкива.

Указание. Предельные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right|_{x=0} = c^2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right|_{x=l} = -c^2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=l}, \quad \text{где } c = \sqrt{\frac{GI}{k_1}}.$$

5851. К концу $x = l$ однородного стержня, закрепленного в точке $x = 0$, подвешен груз в P кг. Изучить вынужденные продольные колебания стержня, предполагая, что на него действует внешняя непрерывно распределенная сила $\rho Y(x, t)$.

Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Y(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

при условиях

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0; & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=l} &= -c^2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}, & c &= \sqrt{\frac{gE}{P}}; \\ u|_{t=0} &= 0; & \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0; \end{aligned}$$

g — ускорение свободного падения.

5852. Струна длиной l закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$ и в начальный момент времени оттянута в точке $x = c$ на расстояние h от оси OX ; затем она отпу-

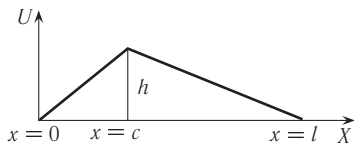


Рис. 15.15

щена без сообщения ее точкам начальной скорости (рис. 15.15). Определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени (см. задачу 5846).

5853. Струна длиной l закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$ и в начальный момент времени в точке $x = c$ получает удар от молоточка (струна пианино). Предполагается, что во время удара молоточек касается очень малого участка струны и что сам удар длится очень недолго по сравнению с периодом колебания струны. Найти выражение для отклонения $u(x, t)$ струны (см. задачу 5846).

Указание. Начальные условия колебания: $f(x) = 0$ во всем интервале $(0, l)$, $F(x) = 0$ во всем интервале $(0, l)$ за исключением очень малого участка $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где $F(x) > 0$.

5854. Абсолютно изолированный электрический провод длиной l в некоторый момент времени, принимаемый за начальный, заряжен до некоторого постоянного потенциала p_0 . Определить величину напряжения и силу тока i по истечении времени t от начального момента, предполагая, что один из концов провода замкнут накоротко, а другой открыт (см. задачу 5810).

Указание. Задача приводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

при условиях:

$$\begin{aligned} p|_{x=0} &= 0, & i|_{x=l} &= 0 \text{ при всяком } t, \\ p|_{t=0} &= p_0, & i|_{t=0} &= 0 \text{ при } 0 < x < l. \end{aligned}$$

5855. Однородная струна длиной l под влиянием сильного натяжения T_0 находится в прямолинейном положении равновесия и закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ на струну действует

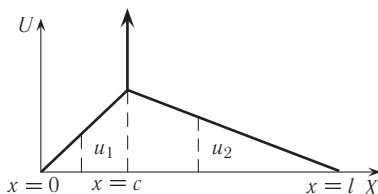


Рис. 15.16

сосредоточенная гармоническая сила $\rho P(t) = \rho A \sin \omega t$.

Определить отклонение $u(x, t)$ струны от положения равновесия (рис. 15.16).

Указание. Задачу можно привести к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

и выполнению пограничных условий:

$$\begin{aligned} u_1|_{x=0} &= 0, & u_1|_{x=c} &= u_2|_{x=c}, & u_2|_{x=l} &= 0. \\ T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=c} - T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=c} &+ P\rho = 0. \end{aligned}$$

5856. Однородная струна длиной l , закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, колеблется под действием внешней возмущающей силы $\rho Y(x, t)$, распределенной непрерывным образом вдоль всего отрезка струны. Найти отклонения струны от положения равновесия, приняв во внимание ее

свободные колебания, вызываемые начальным отклонением и начальной скоростью.

Указание. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Y(x, t); \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}; \quad (15.1)$$

интеграл этого уравнения пишется в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где u_1 есть интеграл однородного уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющий условиям:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0, \quad u_1|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = F(x),$$

а u_2 есть интеграл неоднородного уравнения (15.1), подчиненный условиям:

$$u_2|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l} = 0, \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

5857. Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$.

5858. Решить предыдущую задачу в предположении, что струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$ и что внешняя возмущающая сила сосредоточена в точке $x = c$ струны. Исследовать частный случай, когда сила действует гармонически.

Указание. Сосредоточенную в точке $x = c$ силу можно рассматривать как предельный случай силы $\rho Y(x, t) > 0$, непрерывно распределенной по очень малому участку $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

5859. Две разнородные струны длиной l_1 и l_2 , связаны между собою в точке $x = l_1$ и закреплены на концах $x = 0$ и $x = l_1 + l_2$. Определить период поперечных колебаний.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; \quad a_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_1}}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_2}}$$

при условиях

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l_1+l_2} = 0, \quad u_1|_{x=l_1} = u_2|_{x=l_1}; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=l_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=l_1}.$$

5860. Струна, закрепленная на концах, состоит из двух неоднородных частей $AB = l_1$ и $BC = l_2$, причем в точке B помещается

шарик массы M . Доказать, что период T поперечных колебаний определяется из уравнения

$$\frac{1}{a_1} \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_1}{Ta_1} + \frac{1}{a_2} \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_2}{Ta_2} = M \frac{2\pi}{TT_0},$$

где T_0 — величина натяжения нити.

Указание. Следует принять во внимание условие

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1} = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \Big|_{x=l_1} = -T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} + T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1}.$$

5861. Стержень AC , закрепленный в начале A и свободный на конце C , состоит из двух неоднородных частей $AB = l_1$ и $BC = l_2$. Доказать, что период T продольных колебаний стержня определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{a_1 T} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{a_2 T} = \frac{E_1 a_2}{E_2 a_1},$$

где $a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$.

Указание. Выделить колебания одной и той же частоты, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u_1 \Big|_{x=l_1} = u_2 \Big|_{x=l_1}; \quad E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_1}.$$

5862. Тяжелый растяжимый стержень, длина которого в нерастянутом состоянии равна l , подвешен за конец $x = 0$, а конец $x = l$ оставлен свободным. Изучить вынужденные колебания стержня.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g$$

при условиях:

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

5863. Доказать, что радиальные колебания однородного газа, заключенного между двумя неподвижными концентрическими

сферами радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$, могут происходить гармоническим образом, причем период тона выражается формулой

$$T_1 = \frac{2\pi(R_2 - R_1)}{\mu} \sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}},$$

где μ — наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{p\mu^2 + 1}; \quad p = \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)^2};$$

здесь γ — постоянная Пуассона, p_0 и ρ_0 — начальные давление и плотность.

5864. Доказать, что уравнение радиальных колебаний газа $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ имеет решение $\Phi = \frac{A}{r} \cos \frac{\omega}{a}(at - r)$, обращающееся в нуль при $r \rightarrow \infty$.

5865. Доказать, что если уравнение малых колебаний газа имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

то оно допускает интеграл

$$\Phi = \frac{A \cos \theta}{r} \left(\cos \frac{\omega}{a}(at - r) + \frac{a}{\omega r} \sin \frac{\omega}{a}(at - r) \right),$$

обращающийся в нуль при $r \rightarrow \infty$.

5866. Доказать, что решением задачи 5802 служит ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx; \quad f(x) = u|_{t=0},$$

$$b_k = \frac{1}{a \mu_k \sqrt{l} J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 F(x) J_0 \left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) dx, \quad F(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a} \right)^2},$$

а $\mu_1, \mu_2, \dots$ означают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

5867. Линейная плотность подвешенной нити изменяется по закону $\rho = ax^m$, где $m > -1$. Вывести уравнение малых колебаний нити и доказать, что отклонение от равновесного положения выражается формулой

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{J_m\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{x^{\frac{m}{2}}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l(m-1)}} \mu_k t + \varphi_k\right),$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots$ — положительные корни уравнения $J_m(x) = 0$, а N_k и φ_k — постоянные, зависящие от начальных условий.

5868. На круглую мембрану, закрепленную по краю, действует внешняя гармоническая сила

$$\rho Y = \rho A \sin \omega t,$$

непрерывно распределенная по всей ее площади.

Доказать, что вынужденные колебания мембраны выражаются равенством

$$u = \frac{A}{\omega^2} \left(\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a} r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} R\right)} - 1 \right) \sin \omega t,$$

где R — радиус мембраны.

5869. Дан тонкий однородный стержень длиной l , изолированный от внешнего пространства. Во все время наблюдения концы $x = 0$ и $x = l$ удерживаются при постоянной температуре $u = 0$. Кроме того, известно начальное распределение температуры вдоль стержня.

Определить его температуру в момент времени t (см. задачу 5812).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ при условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = 0$, при всяком t ; $u|_{t=0} = f(x)$ при $0 < x < l$.

5870. Решить предыдущую задачу в предположении, что конец $x = 0$ стержня имеет температуру, равную нулю, а на конце

$x = l$ происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, температура которой считается равной нулю.

Указание. Второе из пограничных условий предыдущей задачи следует заменить условием: $k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -hu \Big|_{x=l}$, где через k и h обозначены коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности вещества стержня.

5871. Решить предыдущую задачу в предположении, что лучеиспускание тепла в окружающую среду происходит на обоих концах стержня.

Указание. Пограничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{h}{k} u \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{h}{k} u \Big|_{x=l}.$$

5872. Применить метод Фурье к исследованию распространения тепла в однородном кольце, предполагая, что известно начальное распределение тепла (см. задачу 5814).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, \quad u = ve^{-bt}$$

при выполнении начального условия

$$u \Big|_{t=0} = f(\theta) \text{ при } 0 < \theta < 2\pi.$$

5873. Дана однородная сфера радиуса R , центр которой расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки сферы зависит только от расстояния r этой точки от центра сферы. Во все время наблюдения внешняя поверхность сферы удерживается при температуре 0° . Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени t (см. задачу 5816).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $u = \frac{v}{r}$, $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ и выполнению условий: $v \Big|_{r=0} = 0$, $v \Big|_{r=R} = 0$ при всяком t ; $v \Big|_{t=0} = rf(r)$ при $0 < r < R$.

5874. Решить предыдущую задачу в предположении, что поверхность сферы все время свободно охлаждается в среде, имеющей температуру 0° .

Указание. Второе из предельных условий в предыдущей задаче надо переменить на следующее:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} + \left(H - \frac{1}{R}\right) v \Big|_{r=R} = 0, \quad H = \frac{h}{k}.$$

5875. Однородный газ заключен в неподвижный сосуд, имеющий форму шара радиуса R . Исследовать радиальные колебания газа, предполагая, что движение происходит с потенциалом скоростей.

Указание. При малых колебаниях потенциал скоростей удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, где p_0 и ρ_0 — начальные давление и плотность, а γ — постоянная Пуассона.

Преобразовав уравнение колебаний к сферическим координатам r, θ, φ , искать по способу Фурье интеграл, удовлетворяющий условиям $u|_{r=0} =$ конечной величине,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \text{ при всяком } t, \quad u|_{t=0} = f(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r)$$

при $0 < r < R$.

5876. Тяжелая однородная нить длиной l , подвешена за один из своих концов ($x = l$), выводится из положения равновесия и отпускается без начальной скорости (рис. 15.17). Определить отклонение u в функции от абсциссы x и времени t .

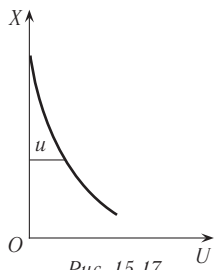


Рис. 15.17

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $a = \sqrt{g}$ при условиях: $u|_{x=0} =$ конечной величине, $u|_{x=l} = 0$ при всяком t , $u|_{t=0} = f(x)$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ при $0 < x < l$.

5877. Дана цилиндрическая трубка радиуса R настолько длинная, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности. Исследовать малые радиальные колебания однородного газа, заключенного в трубке.

Указание. Уравнение колебаний следует преобразовать к цилиндрическим координатам r, φ, z , направив ось z по оси трубки, затем искать интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

удовлетворяющий условиям: $u|_{r=0} =$ конечной величине, $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ при всяком t ; $u|_{t=0} = f(r)$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r)$ при $0 < r < R$.

5878. Применить метод Фурье к исследованию радиальных колебаний мембраны, имеющей форму круга радиуса R и закрепленной на краю (см. задачу 5811).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}$ при условиях $u|_{z=0}$ = конечной величине, $u|_{r=R} = 0$ при всяком t и $u|_{t=0} = f(r)$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r)$ при $0 < r < R$.

5879. Исследовать радиальное распространение тепла в бесконечном цилиндре радиуса R , боковая поверхность которого все время имеет температуру 0° .

Указание. Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

Следует искать интеграл этого уравнения, удовлетворяющий условиям $u|_{r=0}$ = конечной величине, $u|_{r=R} = 0$ при всяком t и $u|_{t=0} = f(r)$ при $0 < r < R$.

5880. Цилиндр с радиусом основания R и высотой h имеет во все время опыта температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную 0° , а температура верхнего основания есть определенная функция от r . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Указание. Для решения задачи необходимо отыскать такой интеграл уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, который удовлетворял бы условиям: $u|_{r=0}$ = конечной величине, $u|_{z=0} = 0$, $u|_{r=R} = 0$, $u|_{z=h} = f(r)$ при $0 < r < R$.

5881. Решить предыдущую задачу в предположении, что боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для теплоты чехлом.

Указание. Третье из пограничных условий, указанных в предыдущей задаче, заменить следующим: $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = 0$.

5882. Решить задачу 5880 в предположении, что боковая поверхность цилиндра свободно охлаждается в воздух, имеющий температуру 0° .

Указание. Пограничное условие на боковой поверхности имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} + h_1 u|_{r=R} = 0$, где $h_1 = \frac{h}{k}$; значение букв h и k см. в задаче 5870.

5883. Цилиндр с радиусом основания R и высотой h имеет температуру обоих оснований, равную 0° , а температура боковой поверхности представляет данную функцию от z : $u = f(z)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

5884. Дана тонкая прямоугольная пластинка со сторонами l и m (совпадающими с осями координат), для которой известно начальное распределение температуры. В течение всего времени наблюдения периметр пластинки удерживается при температуре 0° . Требуется определить температуру каждой точки пластинки по истечении времени t от начального момента (см. задачу 5813).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

при условиях:

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \text{ при } x = 0 \\ u = 0 \text{ при } x = l \end{array} \right\} \text{ при } 0 < y < m \text{ и при всяком } t,$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \text{ при } y = 0 \\ u = 0 \text{ при } y = m \end{array} \right\} \text{ при } 0 < x < l \text{ и при всяком } t,$$

$$u|_{t=0} = f(x, y) \quad \text{при } 0 < x < l \text{ и } 0 < y < m.$$

5885. Дан прямоугольный параллелепипед с ребрами l , m , n (три его ребра совпадают с осями координат). Во все время наблюдения боковые грани удерживаются при температуре 0° , а оба основания имеют данное распределение температуры. Определить стационарную температуру внутренних точек параллелепипеда.

Указание. Искомая функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ при условиях: $u = 0$ при $x = 0$, $u = 0$ при $x = l$, $u = 0$ при $y = 0$, $u = 0$ при $y = m$, $u = f(x, y)$ при $z = 0$, $u = F(x, y)$ при $z = n$.

5886. Исследовать малые колебания мембраны, закрепленной на краях и имеющей форму прямоугольника, стороны которого l и m совпадают с осями координат x и y (см. задачу 5811).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}$$

при условиях:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{при } x &= 0, & u &= 0 & \text{при } x &= l, \\ u &= 0 & \text{при } y &= 0, & u &= 0 & \text{при } y &= m. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= F(x, y) \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{aligned} 0 &< x < l, \\ 0 &< y < m. \end{aligned}$$

5887. Исследовать распространение тепла в бесконечно длинном стержне, изолированном от внешнего пространства (см. задачу 5812).

Указание. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

и условию $u|_{t=0} = f(x)$.

5888. Дан однородный стержень, у которого один конец удален на бесконечность, а другой имеет температуру, изменяющуюся известным образом с течением времени. Определить температуру стержня по истечении времени t от начального момента.

Указание. Следует проинтегрировать уравнение распространения тепла в стержне при условиях: $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $u|_{t=0} = f(x)$.

5889. Исследовать распространение тепла в тонкой пластинке, предполагая, что она настолько велика, что ее можно считать неограниченно простирающейся во все стороны (см. задачу 5813).

Указание. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

и условию $u|_{t=0} = f(x, y)$.

5890. Исследовать распространение тепла в бесконечной пластинке, ограниченной с одного края, на котором температура изменяется известным образом.

Указание. Если провести ось ординат вдоль края пластинки, то задача приводится к интегрированию уравнения, указанного в предыдущей задаче при выполнении условий:

$$u|_{x=0} = \varphi(y, t); \quad u|_{t=0} = f(x, y).$$

5891. Определить температуру в точке $M(x, y, z)$ неограниченного пространства, предполагая, что известно начальное распределение температуры.

Указание. Искомая температура удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$$

и условию $u|_{t=0} = f(x, y, z)$.

5892. Гибкая однородная нить вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В момент времени, принимаемый за начальный, нить выводится из своего относительного положения равновесия, и ее точкам сообщаются начальные скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ нити по истечении времени t от начального момента (см. задачу 5804).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

при условиях: $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l}$ — конечной величины при всяком t и $u|_{t=0} = f(x)$, $\frac{du}{dt}|_{t=0} = F(x)$ при $0 < x < l$.

5893. Доказать, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

допускает частное решение

$$u = \left(Ar^m + \frac{B}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos \theta),$$

где A и B обозначают произвольные постоянные, m есть целое положительное число или нуль, а $P_m(\cos \theta)$ есть многочлен Лежандра с индексом m .

5894. Данная функция $f(r)$ может быть разложена в ряды следующего вида:

$$f(r) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n + \dots \quad \text{при } r < R,$$

$$f(r) = \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^3} + \dots + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} + \dots \quad \text{при } r > R.$$

Найти такое решение уравнения, приведенного в предыдущей задаче, которое удовлетворяло бы условию

$$u|_{\theta=0} = f(r).$$

5895. Круговое проволочное кольцо радиуса R заряжено E единицами статического электричества. Найти потенциал $v(r, \theta)$ наэлектризованного кольца на любую точку поля (рис. 15.18).

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

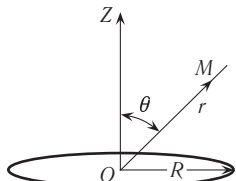


Рис. 15.18

5896. Найти такое решение уравнения задачи 5893, чтобы при $r = R$ (на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат) оно обращалось в данную функцию угла θ , т. е. $u|_{r=R} = f(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \pi$.

Указание. Принять во внимание результат задачи 5893 и воспользоваться разложением функции $f(\theta)$ в ряд по многочленам Лежандра

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta),$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

5897. Слой непроводящего вещества поверхность шарового кондуктора радиуса R разделена на две полусферы, заряженные до потенциалов: v_1 (верхняя) и v_2 (нижняя). Найти потенциал $v(r, \theta)$ такого кондуктора на любую точку поля (рис. 15.19).

Указание. Следует воспользоваться результатом предыдущей задачи, приняв во внимание равенства:

$$v|_{r=R} = f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ v_2 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

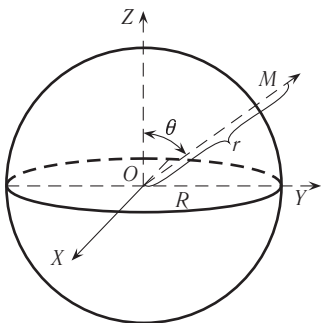


Рис. 15.19

5898. Металлический шарик радиуса R с закопченной поверхностью подвержен действию солнечных лучей в воздухе, температура которого равна 0° . Определить стационарную температуру внутренних точек шарика (рис. 15.20).

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения Лапласа (см. задачу 5893) при следующем условии:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} + H(u - f(\theta)) \Big|_{r=R} = 0,$$

где H постоянно, а

$$f(\theta) = \begin{cases} M \cos \theta, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (M = \text{const}); \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

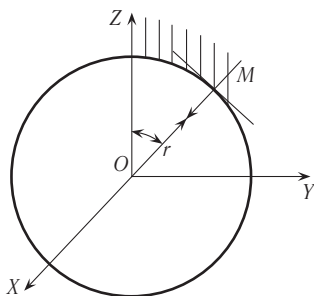


Рис. 15.20

5899. Проинтегрировать по способу Фурье уравнение поперечных колебаний балки $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ при условиях $u = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = 0, x = l$, выражающих, что

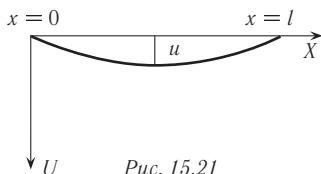


Рис. 15.21

оба конца балки закреплены наглухо (рис. 15.21).

Указание. Характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ задачи определяются из уравнения

$$\operatorname{ch} \lambda l \cdot \cos \lambda l = 1,$$

а соответствующие им фундаментальные функции

$$X_n(x) = (\operatorname{sh} \lambda_n l - \sin \lambda_n l)(\operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x) - (\operatorname{ch} \lambda_n l - \cos \lambda_n l)(\operatorname{sh} \lambda_n x - \sin \lambda_n x)$$

образуют систему функций, ортогональных на интервале $(0, l)$.

§ 15.6

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5900. В точке $x = \xi$ однородной нити ($\rho = 1$), подверженной действию сильного натяжения T_0 и закрепленной на концах $x=0$ и $x=1$, подвешен груз $Q = 1$ (рис. 15.22).

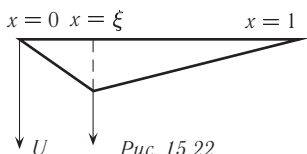


Рис. 15.22

Доказать, что уравнение провиса нити имеет вид

$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi) \cdot \frac{1}{T_0} & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1 - x) \cdot \frac{1}{T_0} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

5901. Тяжелая однородная нить закреплена в точке $x = 1$ и подвержена в точке $x = \xi$ действию горизонтальной силы $Q = 1$ (рис. 15.23).

Доказать, что равновесное уравнение нити имеет форму

$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} -\ln \xi, & \text{при } x \leq \xi, \\ -\ln x, & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Указание. Натяжение нити в точке $M(x)$ принимается равным $-x$.

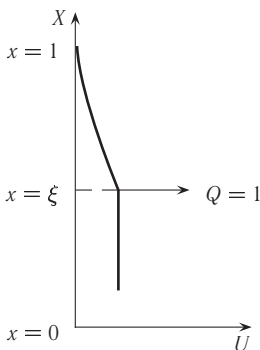


Рис. 15.23

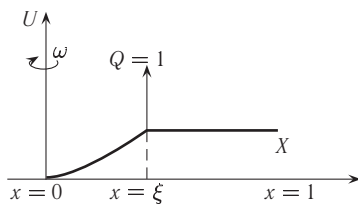


Рис. 15.24

5902. Однородная нить длиной $l = 1$ прикреплена концом $x = 0$ к неподвижной оси и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью. К точке $x = \xi$ такой нити приложена сила $Q = 1$ (рис. 15.24).

Доказать, что уравнение относительного равновесия нити имеет вид

$$u = K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Указание. Натяжение нити в точке $M(x)$, вызываемое центробежной силой, принимается равным

$$R = 2 \int_x^1 x dx = 1 - x^2.$$

5903. Доказать, что при непрерывно распределенной нагрузке уравнение провиса нити имеет форму

$$u = \int_0^1 K(x, \xi) p(\xi) d\xi,$$

где через $p(\xi)$ обозначена величина нагрузки, рассчитанная на единицу длины нити.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 5900.

5904. Доказать, что задача о малых колебаниях закрепленной нити может быть приведена к решению однородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где симметричное ядро $K(x, \xi)$ имеет вид, указанный в задаче 5901.

5905. На однородную струну, закрепленную на концах, действует непрерывно распределенная сила

$$F(\xi, t) = p_0(\xi) \sin \omega t.$$

Доказать, что задача о вынужденных колебаниях такой нити сводится к решению неоднородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi.$$

5906. Рассматривая последовательность $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ в промежутке $(-1, +1)$, заменить ее последовательностью ортогональной и нормальной, взяв за весовую функцию

$$p(x) = 1.$$

Составить первые три члена последовательности.

Примечание. Рассматривая квадратичную погрешность

$$\int_a^b p(x) (f(x) - s_n(x))^2 dx,$$

мы называем $p(x)$ весом.

5907. Решить задачу 5905, взяв за весовую функцию

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5908. Рассматривая последовательность $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ в промежутке $(0, \infty)$, заменить ее ортогональной и нормальной, считая, что весовая функция

$$p(x) = e^{-x}.$$

Составить первые три члена последовательности.

5909. Рассматривая последовательность $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, заменить ее ортогональной и нормальной, считая, что весовая функция

$$p(x) = e^{-x^2}.$$

Составить первые три члена последовательности.

Указание. Использовать свойства функции $\Gamma(p)$.

5910. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5911. Найти $u(x)$ из уравнения

$$u(x) = x + 4 \int_0^x (t-x)u(t) dt.$$

5912. Заменить нахождение y из уравнения $y'' + y = 0$ при начальном условии $y(0) = 0, y'(0) = -1$ решением интегрального уравнения.

5913. Заменить нахождение y из уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 1$ решением интегрального уравнения.

5914. Заменить нахождение y из уравнения $y'' + y = \cos x$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ решением интегрального уравнения.

Решить уравнения (5915–5918):

5915. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt\varphi(t) dt + \frac{5x}{6}.$

5916. $\varphi(x) = 3 \int_0^1 xt\varphi(t) dt + 3x - 2.$

5917. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 xt\varphi(t) dt + \frac{5x}{6}.$

5918. $\varphi(x) = 3 \int_0^2 xt\varphi(t) dt + 3x - 2.$

5919. Найти определитель Фредгольма и резольвенту для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy + F(x),$$

а также первое характеристическое число и его фундаментальную функцию, если

$$K(x, y) = g(x)g(y);$$

решить уравнение, считая, что λ нехарактеристическое число.

5920. То же, предполагая $K(x, y) = g(y).$

5921. То же, предполагая

$$K(x, y) = g(x).$$

5922. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^2 - 1} \int_0^1 e^x e^y \varphi(y) dy.$$

5923. Решить уравнение

$$\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy)\varphi(y) dy.$$

5924. Найти все решения уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 y \varphi(y) dy + F(x).$$

5925. В уравнении

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy + F(x)$$

$$K(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x < y; \\ y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Найти определитель Фредгольма и резольвенту.

5926. Найти определитель Фредгольма и резольвенту для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + F(x),$$

а также первое характеристическое число и его фундаментальную функцию, если

$$K(x, y) = c.$$

5927. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy + F(x)$$

найти характеристические числа и фундаментальные функции.

5928. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x + y) \varphi(y) dy + 18x^2 - 9x - 4.$$

Указание. См. задачу 5927.

5929. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y) \varphi(y) dy + F(x)$$

составить определитель Фредгольма, его миноры, резольвенту и фундаментальные функции.

5930. Для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y) dy + F(x)$$

составить определитель Фредгольма, его минор, резольвенту, фундаментальные функции и решение.

5931. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi} \cos(x+y)\varphi(y) dy + 1.$$

Указание. См. задачу 5930.

5932. Найти резольвенту уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy;$$

найти фундаментальные функции.

5933. Решить уравнение

$$\varphi(x) = 6 \int_0^1 \left(xy - \frac{x+y}{2} + \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + x.$$

Найти резольвенты уравнений (5934–5937):

5934.
$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + y^2)\varphi(y) dy + F(x).$$

5935.
$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 y + y^2 x)\varphi(y) dy + F(x).$$

5936.
$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (1 + x + y)\varphi(y) dy + F(x).$$

$$5937. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-y)\varphi(y) dy + F(x).$$

5938. Проверить, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy$$

имеет решение при всяком $\lambda > \frac{1}{2}$.

Указание. Составить дифференциальное уравнение для $\varphi(x)$.

5939. Решить систему уравнений

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-y)\psi(y) dy, \quad \psi(x) = \lambda \int_0^1 (y-x)\varphi(y) dy.$$

Указание. См. задачу 5932.

5940. Дано, что

$$K(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } x < y, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \pi \int_0^1 K(x, y)\psi(y) dy, \\ \psi(x) &= \pi \int_0^1 K(y, x)\varphi(y) dy. \end{aligned}$$

5941. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$(xy')' + \lambda xy = 0$$

при граничных условиях: $y(0)$ ограничено, $y(1) = 0$.

5942. Свести к интегральному уравнению нахождение решений уравнения

$$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0$$

при граничных условиях: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

5943. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — лежандровы функции порядка m :

$$((1-x^2)y')' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0;$$

граничное условие: y ограничено при $x = -1$ и $x = +1$.

5944. Решить задачу 5943 для случая $m = 0$ лежандровых многочленов.

Указание. Рассматривать уравнение

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = \frac{1}{2}.$$

5945. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — многочлены Эрмита:

$$y'' + (1-x^2)y + \lambda y = 0,$$

$y = 0$ при $x = \pm\infty$.

Указание. Положить $\lambda = -2 + \mu$.

5946. Составить интегральное уравнение, фундаментальные функции которого — многочлены Лагерра:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0;$$

y ограничено при $x = 0$ и $x = +\infty$.

Указание. Положить $\lambda = -1 + \mu$.

5947. Найдя соответственную функцию Грина, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

интегральным.

5948. Найдя соответственную функцию Грина, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y'(0) = hy(0), \quad y'(1) = -Hy(1)$$

интегральным уравнением.

5949. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(y) |x - y| dy + F(x).$$

Указание. Выяснив граничные условия, свести нахождение характеристических чисел к интегрированию обыкновенного уравнения.

5950. Найдя соответствующую функцию Грина $G(\xi, x)$, заменить уравнение

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = -hy(1)$$

интегральным.

5951. Проверив, что фундаментальные функции уравнения задачи 5950 равны

$$\sqrt{\frac{2(h^2 + k_n^2)}{h^2 + h + k_n^2}} \sin k_n x,$$

где k_n — корень уравнения

$$k = -h \operatorname{tg} k,$$

решить уравнение

$$y(x) = k^2 \int_0^1 G(\zeta, x) y(\zeta) d\zeta + 1.$$

5952. Проверить, что для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

в случае круга радиуса R при граничном условии $u = 0$ функция Грина равна

$$G(x, y, \zeta, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}{R},$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки (x, y) до точек

$$(\zeta, \eta) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\zeta R^2}{\zeta^2 + \eta^2}, \frac{\eta R^2}{\zeta^2 + \eta^2} \right).$$

Убедиться в симметрии функции $G(x, y, \zeta, \eta)$.

5953. Проверить, что для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

в случае сферы радиуса R при граничном условии $u = 0$ функция Грина равна

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{r_2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки (x, y, z) до точек (ξ, η, ζ) и

$$\left(\frac{\xi R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\eta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\zeta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right).$$

5954. Проверить, что характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$\varphi(x, y) = \lambda \iint_{\Omega} G(x, y, \zeta, \eta) \varphi(\zeta, \eta) d\zeta d\eta,$$

где G — функция Грина задачи 5952, а Ω — круг радиуса R , могут быть найдены нахождением характеристических чисел и фундаментальных функций уравнения

$$\psi(l) = -\lambda \int_0^R \rho J(\rho, l) \psi(\rho) d\rho,$$

где

$$J(\rho, l) = \begin{cases} \ln l - \ln R, & \rho < l; \\ \ln \rho - \ln R, & \rho > l, \end{cases}$$

ρ и l — расстояния от точек (ζ, η) , (x, y) до центра круга.

Указание. Обратить внимание на симметрию граничных условий относительно центра круга.

5955. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения задачи 5954.

5956. Найти характеристические числа и фундаментальные функции уравнения

$$V(x, y, z) = -\frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{\Omega} V(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta + F(x, y, z),$$

где $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ — функция Грина задачи 5953, а Ω — сфера радиуса R .

Указание. Используя симметрию относительно центра, можно прийти к заключению, что фундаментальные функции зависят только от расстояния до начала координат. Воспользоваться дифференциальным уравнением второго порядка, определяющим эти функции.

5957. Найти решение уравнения

$$\Delta V = \lambda V + F(a),$$

где $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, удовлетворяющее на границе сферы радиуса R с центром в начале координат условию $V = 0$; функция V должна быть задана внутри сферы.

Указание. См. задачу 5956.

5958. Фундаментальные функции уравнения

$$V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{V(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta + F(x, y, z),$$

где r — расстояние между точками (x, y, z) и (ξ, η, ζ) , называемые универсальными функциями Корна.

Найти универсальные функции Корна, предполагая, что область Ω есть сфера радиуса R .

Указание. Вследствие симметрии искомые функции зависят только от расстояния a от точки до начала координат ($a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Функция выражается линейно через решения некоторого дифференциального уравнения, и неопределенные коэффициенты вместе с характеристическими числами находятся подстановкой в данное уравнение. Нормирование достигается использованием дифференциального уравнения.

5959. Доказать, что интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^{\infty} J_{\nu}(xt) t u(t) dt, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

имеет следующее решение:

$$u(x) = \frac{f(x) + \lambda \int_0^\infty J_\nu(xt) t f(t) dt}{1 - \lambda^2}.$$

Указание. Следует воспользоваться формулой Фурье—Ганкеля:

$$f(x) = \int_0^\infty \alpha d\alpha \int_0^\infty f(\beta) J_\nu(\alpha\beta) J_\nu(x\alpha) \beta d\beta.$$

5960. Доказать, что интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^\infty J_\nu(xt) t u(t) dt, \quad v > -\frac{1}{2}$$

при $\lambda = \pm 1$ имеет следующее решение:

$$u(x) = \frac{x^\nu}{(a^2 + x^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \pm \frac{\sqrt{\pi} x^{\nu-1} e^{-ax}}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})},$$

где через a обозначен произвольный параметр, подчиненный единственному условию $\operatorname{Re} a > 0$.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первые два параграфа настоящей главы содержат в себе упражнения на основную простейшую задачу вариационного исчисления. Задачи § 16.1 сводятся к разысканию экстремалей того или другого интеграла. В задачах 5971–5973 приемом Эйлера изопериметрическая задача сводится к обычной. Задачи 5974–5975 являются примерами обратных задач вариационного исчисления.

Часть задач § 16.2 решается элементарно, путем составления полного приращения интеграла, другая часть решается обычными методами; наконец, ряд задач относится к случаю, когда общая теория неприменима и служит для выяснения различных случаев, которые могут здесь представиться.

В задачах § 16.3 разобраны геодезические линии на простейших поверхностях, как примеры задач на минимум интегралов в параметрической форме. Вторая половина параграфа служит для уяснения понятия трансверсальности и дает примеры задач с переменными пределами. Следующий параграф содержит задачи на постоянные поля, инвариантный интеграл Гильберта и уравнение Гамильтона–Якоби. Эта теория имеет большие приложения в физике и механике.

В § 16.5 о минимуме интегралов, содержащих высшие производные или несколько неизвестных функций, часть задач трактует теоретические вопросы, например составление обобщенных условий трансверсальности. Следует обратить внимание на задачи 6043–6048 об устойчивости прямолинейной формы стержня при сжатии его продольной силой. В то время как при граничных условиях, данных в задачах 6043 и 6044, можно рассматривать экстремум интеграла, содержащего только первую производную от некоторой функции, в задачах 6045–6047 этого сделать нельзя; здесь приходится рассматривать или изопериметрическую задачу или же задачу о минимуме интеграла, содержащего вторую производную. В задаче 6048 требуется найти минимум выражения, которое, кроме интеграла, содержит аддитивно заданную функцию от значения искомой функции на верхнем пределе.

В § 16.6 задачи о разрывных решениях сводятся по большей части к установлению условий Эрмита для угловых точек. Другой тип задач этого параграфа, в которых допускаемые до сравнения линии лежат в определенной области, решаются при помощи метода односторонней вариации.

В § 16.7 задачи 6087 и 6090 освещают вопрос об инвариантном характере дифференциальных выражений, получающихся из задач вариационного исчисления. В этом же параграфе дан ряд задач на вывод уравнений математической физики из принципа Гамильтона. Как в задачах этого параграфа, так и в двух последующих параграфах ставится почти исключительно вопрос об экстремальных.

§ 16.1 УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

5961. Найти достаточные условия сильного минимума интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

при условии, что конечные точки минимальной кривой лежат соответственно на прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

П р и м е р ы :

1) $I = \int_{-1}^{+1} (y^3 - 3x^4 y) dx;$

2) $I = \int_0^1 y(y + x) dx;$

3) $I = \int_{-a}^{+a} (x^2 y + \frac{1}{3} y^3 - a^2 y) dx; a > 0;$

4) $I = \int_0^{x_1} (6ax - y^2) y dx; a > 0, x_1 > 0.$

Указание. Воспользоваться формулой Тейлора с остаточным членом.

5962. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (y^2 + 2xyy') dx.$$

5963. Найти экстремум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (xy + y^2 - 2y^2 - 2y^2 y') dx.$$

5964. Найти экстремум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (x^2 + y^2 + yy') dx.$$

5965. Найти экстремаль интеграла

$$I = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx,$$

проходящую через заданные точки A и B , лежащие в верхней полуплоскости $y > 0$.

5966. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \sqrt{y(1 + y'^2)} dx, \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0.$$

5967. Найти в квадратурах экстремали интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} y^n \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

5968. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} r^n ds$$

(в полярных координатах r, θ), выражающего момент n -й степени дуги $M_1 M_2$ относительно начала координат.

5969. Материальная точка движется в плоскости так, что ее скорость v обратно пропорциональна расстоянию до начала координат, причем $\int v ds$, взятый вдоль траектории между двумя любыми точками последней, является экстремумом. Найти направление силы, действующей на точку и орбиту точки.

5970. Плоская кривая является орбитой для свободного движения материальной точки под действием центральной силы и в то же время брахистохроной (см. задачу 5989) для другого движения уже при другой центральной силе. Показать, что если v и v' суть скорости точки в этих двух движениях в некоторой точке траектории, то для всех точек траектории произведение vv' остается постоянным.

5971. Среди всех кривых, соединяющих начало координат с прямой $x = a$, определить ту, которая, заключая вместе с осью Ox и указанной прямой площадь заданной величины S , имеет наименьшую длину.

Указание. Взять за независимую переменную $u = \int_0^x y dx$, т. е. площадь, ограниченную кривой, осью Ox и переменной ординатой (прием Эйлера).

5972. На сторонах OA и OB угла с вершиной O даны точки A и B ; требуется соединить их кратчайшей линией ACB , при условии, что площадь $OACBO$ имеет заданную величину S .

Указание. Взять за независимую переменную площадь сектора OAC , за функцию — длину радиуса OC .

5973. Найти поверхность вращения около оси OX , имеющую заданную площадь и заключающую наибольший объем при условии, что поверхность пересекает ось вращения ровно два раза.

5974. Найти все интегралы

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} F(x, y, y') dx,$$

для которых экстремалами служат прямые линии.

Указание. Составив дифференциальное уравнение экстремалей, $y'' = G(x, y, y')$, получить из уравнения Эйлера $G F_{y' y'} + y' F_{y' y'} + F_{y' x} - F_y = 0$ дифференцированием по y' уравнение в частных производных для $R = F_{y' y'}$

$$\frac{\partial R}{\partial x} + y' \frac{\partial R}{\partial y} + G \frac{\partial R}{\partial y'} + G_{y'} R = 0.$$

Таким образом, существует бесчисленное множество задач вариационного исчисления, имеющих заданное уравнение $y'' = G(x, y, y')$ своим уравнением Эйлера.

5975. Найти все интегралы

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

для которых экстремалами являются параболы $y = ax + bx^2$.

Указание. См. задачу 5974.

§ 16.2
НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ
ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5976. Среди кривых, соединяющих точки $A(1, 3)$ и $B(2, 5)$, найти ту, которая дает минимум интеграла

$$I = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx.$$

Указание. Рассмотреть также полное приращение интеграла ΔI .

5977. Найти среди линий, соединяющих точки $A(0, 1)$ и $B(1, 4)$, ту, которая дает минимум интеграла

$$I = \int_0^1 (12xy + yy' + y'^2) dx.$$

5978. Среди линий, соединяющих точки $A(1, 0)$ и $B(2, 1)$, найти ту, которая дает минимум интеграла

$$I = \int_1^2 (xy'^2 - y) dx.$$

Найти характер минимума.

5979. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(1,0)}^{(2,1)} (xy'^4 - 2yy'^3) dx$$

и определить его характер.

5980. Показать, что если подынтегральная функция интеграла

$$I = \int_{(A)}^{(B)} F(x, y') dx$$

не содержит явно y , то каждая экстремаль всегда может быть окружена полем, и для сильного минимума достаточно выполнения условия $\frac{\partial^2 F(x, y')}{\partial y'^2} > 0$ в каждой точке поля для любого направления.

5981. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} e^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

5982. Показать, что прямая $y = 0$ дает только слабый минимум интеграла

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,0)} (y'^2 - yy'^3) dx,$$

хотя условие Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ в точках экстремали $y = 0$ выполняется для всех y' .

5983. Найти критические сопряженные точки на экстремалих интеграла

$$I = \int_A^B y \sqrt{1+y'^2} dx$$

при помощи дифференциального уравнения Якоби.

5984. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (y'^2 + 2y'y - 9y^2) dx.$$

5985. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

Найти экстремали, проверить условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и найти характер минимума.

5986. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{y}{y'^2} dx.$$

Найти экстремали, проверить условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и найти характер минимума.

5987. Показать, что экстремали интеграла

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} y^m G(y') dx$$

получаются одна из другой преобразованием подобия и переноса параллельно оси OX . При этом касательные в сопряженных критических точках пересекаются на оси OX .

5988. Среди кривых, соединяющих точки $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$, найти ту, которая при вращении около OX дает наименьшую поверхность. При этом:

- а) найти экстремали;
- б) исследовать вопрос о возможности проведения экстремали через две данные точки;
- в) в случае существования экстремали, проходящей через две данные точки, выяснить, какая из них дает минимум, и найти характер этого минимума.

5989. Задача о брахистохроне. Среди кривых, лежащих в плоскости XOY (ось OY направлена вертикально вниз), найти ту, скользая по которой, тяжелая точка скорее всего скатится из точки $O(0, 0)$ в точку $M(a, b)$. При этом начальная скорость точки равна нулю.

5990. Найти в вертикальной плоскости XOY кривую, двигаясь по которой, тяжелая материальная точка придет в кратчайшее время из точки $O(0, 0)$ в точку $M(a, b)$; при этом дано, что начальная скорость в точке O равна $\sqrt{2gh}$.

5991. Задача Ньютона. Найти форму, какую надо придать телу вращения, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление при равномерном движении вдоль оси вращения. При этом предполагается, что при скорости v элемент $d\sigma$ испытывает в направлении оси OX сопротивление $kv^2 \cos^3 \varphi d\sigma$. Здесь φ — угол нормали к $d\sigma$ с OX . Требуется найти экстремали, рассмотреть условие Якоби, исследовать характер минимума.

Указание. Если уравнение меридиана поверхности $y = f(x)$, то полная сила сопротивления будет равна интегралу

$$k \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y v^2 \cos^3 \varphi \, ds = 2\pi k v^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{y y'^3}{1 + y'^2} \, dx.$$

Принять за параметр $q = \frac{1}{y'}$. По поводу условия Якоби см. задачу 5987.

5992. Среди линий, соединяющих точки $A(-1, -1)$ и $B(1, 1)$, найти ту, которая дает минимум интеграла

$$I = \int_{(-1, -1)}^{(1, 1)} (x^2 y'^2 + 12y^2) \, dx.$$

Исследовать полное приращение интеграла ΔI .

Указание. Здесь общая теория неприменима, так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ обращается в нуль внутри данного интервала.

5993. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{(0, 0)}^{(1, 1)} x y'^2 \, dx.$$

5994. Показать, что для интеграла

$$I = \int_{(-1, 0)}^{(1, 0)} (x^2 y'^2 + x y'^3) \, dx$$

OX является такой экстремалью, для которой вторая вариация положительна, но интеграл все же не имеет сильного минимума.

5995. Показать, что не существует непрерывной функции $y = \varphi(x)$, которая давала бы минимум интеграла

$$I = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 \, dx$$

и удовлетворяла бы условиям: $\varphi(-1) = -1$; $\varphi(1) = 1$. (Пример Вейерштрасса.)

Указание. Вывод можно основать на изучении функции $y = \frac{\arctg ax}{\arctg a}$.

5996. Найти минимум интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,1)} y'^2 \cos^2 x \, dx.$$

5997. Найти минимум интеграла

$$\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} x^{\frac{2}{3}} y'^2 \, dx.$$

§ 16.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ИНТЕГРАЛОВ, ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

5998. Найти максимум интеграла

$$I = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \left(\frac{1}{2} (xy' - yx') - R \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) d\tau, \quad R > 0.$$

Указание. Взять уравнение Эйлера в форме

$$\frac{1}{r} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_{x'y} - F_{y'x}}{F_1(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

5999. Найти геодезические линии на поверхности вращения $r^2 = 2f(z)$ (r, φ, z — цилиндрические координаты). Выяснить, для каких дуг M_1M_2 интеграл $\int_{M_1}^{M_2} ds$ действительно будет минимумом.

6000. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

6001. Найти геодезические линии конуса $r = z \operatorname{tg} \alpha$.

6002. Исследовать геодезические линии на шаре радиуса R , найти экстремали, исследовать условие Якоби и выяснить характер минимума интеграла $\int ds$.

Указание. Полезно ввести сферические координаты.

6003. Найти геодезические линии на параболоиде вращения $2z = r^2$. При каком условии геодезическая линия между двумя точками на одном меридиане будет кратчайшим расстоянием?

6004. Для сплюснутого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b$$

экватор ($y = 0, x^2 + z^2 = a^2$) есть геодезическая линия. Показать, что сопряженная с точкой A критическая точка A' этой линии отстоит от A на расстоянии πb .

Указание. Применить дифференциальное уравнение Якоби.

6005. Имеем две окружности радиуса r с центрами в точках $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$. Кривая лежит в верхней полуплоскости, кончаясь на данных окружностях, а при вращении вокруг OX дает поверхность наименьшей площади. В каких точках и под каким углом она пересекает окружности?

6006. Написать условие трансверсальности для интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{1}{2}(xy' - x'y) - R\sqrt{x'^2 + y'^2} \right) d\tau.$$

6007. Для каких интегралов вида $\int F(x, y, y') dx$ трансверсальность приводится к ортогональности?

6008. Найти все интегралы $\int f(x, y, y') dx$, у которых трансверсали пересекают экстремали под углом 45° .

6009. Среди линий, соединяющих точку $O(0, 0)$ с кривой $y^3 = 2 - x$, найти ту, которая дает минимум интеграла

$$I = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} (y'^2 - y^2) dx.$$

6010. В вертикальной плоскости XOY с направленной вниз осью OY найти кривую, двигаясь вдоль которой, тяжелая материальная точка придет в кратчайшее время из точки O на заданную прямую $y = (x - c) \operatorname{tg} \beta$; $0 < \beta < \pi$. При этом начальная скорость равна нулю.

Указание. Положить $y' = \operatorname{ctg} \psi$, где ψ — параметр.

§ 16.4

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

6011. Найти функцию поля $p(x, y)$ и само поле экстремалей, проходящих через начало координат, интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y > 0.$$

6012. Дано, что семейство экстремалей проходит через точку (x_0, y_0) . Обозначая через (x_1, y_1) точку пересечения этих экстремалей с некоторой трансверсалью, показать, что взятый по экстремали интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} f(x, y, y') dx$$

имеет постоянную величину.

6013. Семейство экстремалей, зависящих от одного параметра, пересечено двумя трансверсальями. Доказать, что интеграл $\int f(x, y, y') dx$, взятый по любой экстремали между точками пересечения с трансверсальями, имеет постоянное значение.

Указание (к задачам 6012 и 6013). Использовать криволинейный интеграл Гильберта

$$w = \int (f(x, y, p) - pf_p(x, y, p)) dx + f_p(x, y, p) dy,$$

а также условие трансверсальности.

6014. Среди линий, соединяющих прямую $x = 0$ с точкой $A(x_1, y_1)$, где $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, найти ту, которая дает минимум интегралу:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y > 0.$$

Составить также уравнение Гамильтона—Якоби и найти эквидистантные кривые для экстремалей, трансверсально пересекающих прямую $x = 0$.

6015. Найти уравнение Гамильтона—Якоби и трансверсали для поля экстремалей $y = ax$ интеграла $\int y'^2 dx$.

6016. Найти трансверсали для поля экстремалей $y = ax$ интеграла

$$I = \int G(y') dx.$$

6017. Найти трансверсали для поля экстремалей $y = x + a$ интеграла

$$I = \int (xy'^4 - 2yy'^3) dx.$$

6018. Найти трансверсали для поля экстремалей $y = x - \frac{x^2}{a}$ интеграла $\int \sqrt{y(1 - y'^2)} dx$, $a > 0$, $x > 0$; $y > 0$.

6019. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} G(y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

путем решения уравнения Гамильтона—Якоби и обратно — найти решение уравнения Гамильтона—Якоби, исходя из первого интеграла уравнения Эйлера.

6020. Найти экстремали интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

при помощи решения уравнения Гамильтона—Якоби.

6021. Зная, что путями лучей света являются такие кривые, по которым свет распространяется в наикратчайшее время, и зная, что скорость света обратно пропорциональна коэффициенту преломления среды n , показать, что брахистохрона (задача 5989) есть путь света в среде, в которой коэффициент преломления n выражается формулой

$$n = \frac{1}{\sqrt{2gy}}.$$

В связи с этим найти пути лучей света в такой среде и уравнение волновых поверхностей. Для брахистохрон найти синхроны, т. е. кривые, куда точки,двигающиеся из точки $(0, 0)$ по разным брахистохронам, приходят одновременно.

6022. Найти траекторию материальной точки, движущейся под влиянием силы тяжести, исходя из принципа наименьшего действия, согласно которому для траектории точки первая вариация интеграла «действие» обращается в нуль:

$$I = \int \sqrt{2(U + h)} ds.$$

Здесь U — потенциал; в данном случае $U = -gy$, если ось OY направлена вверх.

Составить уравнение Гамильтона—Якоби и, решив его, найти экстремали, в частности те, которые проходят через начало координат. Исследовать характер минимума интеграла.

Указание. Если масса точки равна единице, то закон сохранения энергии дает:

$$\frac{v^2}{2} = h - gy.$$

6023. Найти траекторию для движения точки в плоскости под действием силы отталкивания от оси OX , пропорциональной расстоянию точки до этой прямой и направленной параллельно оси OY при условии, что интеграл энергии имеет вид $\frac{v^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 0$, исходя из интеграла «действие»

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y > 0.$$

6024. Материальная точка описывает окружность $r = 2R \cos \theta$ (в полярных координатах r и θ) радиуса R под действием центральной силы $\frac{k}{r^5}$, обратно пропорциональной пятой степени расстояния от центра силы, лежащего в начале координат. Показать, что интеграл «действие», взятый по любой дуге этой окружности: $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, является сильным минимумом.

Указание. В рассматриваемом случае $U = \frac{k}{4r^4}$, и действие пропорционально $\int \sqrt{\frac{k}{4r^4} + h} ds$. Показать, что $h = 0$.

6025. Изучить движение материальной точки под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию от центра O силы, исходя из принципа наименьшего действия и применяя метод Якоби—Гамильтона.

Показать, что в сопряженных критических точках какой-либо траектории точки, рассматриваемой как экстремаль интеграла «действия», касательные взаимно перпендикулярны.

6026. Решая уравнение Гамильтона—Якоби, найти геодезические линии на поверхности Лиувилля, для которой элемент дуги имеет вид

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2).$$

6027. Доказать, что для поверхностей, у которых элемент дуги определяется равенством

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2,$$

уравнение Якоби—Гамильтона для задачи о геодезической линии имеет вид

$$G \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + E \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2.$$

6028. Найти кратчайшее расстояние между заданной точкой и параболой $y^2 = 2px$.

6029. Найти минимум интеграла

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 + y y' + y' + y \right) dx,$$

если значения на концах интервала не даны.

6030. Найти кратчайшее расстояние между двумя окружностями C_1 и C_2 , лежащими в одной плоскости.

6031. Для задачи о нахождении минимума интеграла

$$I = \int f(x, y, y') dx$$

дано уравнение Гамильтона—Якоби: $w_x = H(x, y, w_y)$. Найти функцию $f(x, y, y')$.

Пример. $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 1$.

Указание. Воспользоваться равенствами:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x, y, p) - pf_p(x, y, p), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = f_p(x, y, p),$$

где p — функция поля.

6032. Уравнение Гамильтона—Якоби для задачи о минимуме интеграла $\int f(x, y, y') dx$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Найти функцию $f(x, y, y')$.

§ 16.5 ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ИЛИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

6033. Для задачи о минимуме интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'') dx$$

найти уравнение Эйлера и граничные условия, считая заданными только координаты конечных точек.

6034. Показать, что уравнение Эйлера для условий задачи 6033 имеет первый интеграл:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = \text{const},$$

если f не содержит y . В случае же, если f не содержит x , то первый интеграл можно написать в таком виде:

$$f - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right) - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = \text{const}.$$

Если, наконец, f не содержит ни x , ни y , то уравнение Эйлера имеет второй интеграл:

$$f - y'' \frac{\partial f}{\partial y''} = C_1 + C_2 y'.$$

6035. Среди линий, проходящих через точки $A(0,0)$ и $B(1,0)$, найти ту, которая обращает в минимум интеграл $\int_0^1 y''^2 dx$ в двух случаях: а) если $y'(0) = a$, $y'(1) = b$; б) если не дано никаких других условий.

6036. Найти экстремали интеграла $\int (y'')^n dx$.

6037. Ищется минимум интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'') dx,$$

причем для переменного верхнего предела дано условие: $\varphi(x, y, y') = 0$. Найти условие на этом конце, обобщающее условие трансверсальности.

6038. Та же задача, но на верхнем пределе даны значение $y'(x_2)$ и кривая $h(x, y) = 0$, на которой должна лежать точка (x_2, y_2) .

6039. Найти такую плоскую кривую, чтобы площадь ограниченная дугой M_1M_2 , нормальными M_1C_1 и M_2C_2 в точках M_1 и M_2 и дугой эволюты C_1C_2 , обратилась в минимум. При этом даны величины x_1, y_1, y'_1 и x_2, y_2, y'_2 , т. е. положения и направления концов M_1M_2 .

Пример. $x_1 = y_1 = 0, y'_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 0; y'_2 = -1$.

Указание. Положить $y' = \operatorname{tg} \psi$ и принять ψ за параметр.

6040. Прежняя задача, только не даны направления в точках M_1 и M_2 . При этом $M_1(0,0)$ и $M_2(2\pi,0)$.

6041. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ при любом выборе функции y была полной производной по x от некоторой функции

$$\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

6042. Является ли функция

$$v = x^2 y''' + xy'' + (2xy - 1)y' + y^2 + 2x$$

полной производной от функции $u(x, y, y', y'')$, и если это так, то найти функцию u .

6043. Вертикальный стержень зажат на своих концах O и A . Нижний конец O неподвижен, верхний может перемещаться по горизонтали. На верхний конец A действует сила P , направленная вниз. Определить критическую нагрузку P_0 , при которой прямолинейная форма перестает быть устойчивой. Модуль упругости E . Момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно к плоскости изгиба, равен I .

Указание. В случае равновесия полная потенциальная энергия должна быть минимумом. При этом потенциальная энергия изгиба выразится интегралом $\frac{1}{2}EI \int_0^l \frac{ds}{\rho^2}$, где ρ — радиус кривизны. Потенциальная энергия, происходящая от опускания верхнего конца, равна $P \cdot \Delta y$, где Δy — смещение конца A против неизогнутого состояния (ось OY направлена вертикально вверх). За искомую функцию полезно принять угол θ между касательной к стержню и осью OY . На концах очевидно $\theta = 0$. На нижнем конце должно быть равно нулю боковое смещение конца.

6044. Тот же вопрос, но при условии, что нижний конец зажат, верхний свободен, т. е. на нижнем конце $\theta = 0$, на верхнем не задано.

Указание. Вопрос о минимуме разобрать в предположении малых прогибов, считая $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

6045. Та же задача при условии опертых концов.

Указание. Считать прогибы малыми и положить

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dy^2}; \quad \theta = \frac{dv}{dy},$$

где v — горизонтальное смещение точки. Полная потенциальная энергия может быть выражена интегралом

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left(EI \left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right)^2 - P \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \right) dy.$$

На концах $v = 0$.

6046. Та же задача, но при условии, что оба конца зажаты, т. е. на них $v = 0$, $v' = 0$.

6047. Та же задача, но нижний конец зажат, а верхний оперт, т. е. на верхнем конце $v = 0$, а v' не задано.

6048. Горизонтальный стержень AB длиной l одним концом свободно оперт, а другим лежит на упругой опоре и сжимается двумя горизонтальными силами P . Определить критическую нагрузку P_0 , считая, что при вертикальном смещении v упругая опора дает сопротивление, равное $-kv$.

Указание. Потенциальная энергия упругой опоры равна $\frac{kv^2}{2}$.

6049. Если интеграл $I = \int f(x, y, y', y'') dx$ преобразовать по Вейерштрассу в $I = \int F(x, x', x'', y, y', y'') dt$, то функция F будет тождественно удовлетворять равенствам:

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'} + 2x''F_{x''} + 2y''F_{y''}; \quad 0 = x'F_{x''} + y'F_{y''}.$$

6050. Показать, что уравнения Эйлера для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx$$

допускают следующие первые интегралы:

а) $\frac{\partial f}{\partial y'} = C$, если f не содержит y ;

б) $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = C$, если f не содержит x .

6051. Показать, что уравнения Эйлера для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx$$

могут быть представлены так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \eta}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial H}{\partial \zeta}; \quad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial z};$$

$$H(x, y, z, \eta, \zeta) = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta' \frac{\partial f}{\partial z'} - f; \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial y'}; \quad \zeta = \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

6052. Найти условие трансверсальности для интеграла

$$\int f(x, y, y', z, z') dx,$$

если конечная точка лежит на поверхности $S(x, y, z) = 0$.

6053. Та же задача, но конечная точка лежит на кривой

$$y = F(x), \quad z = G(x).$$

6054. Показать, что для интегралов $\int f(x, y, z) ds$ и только для них условия трансверсальности на поверхности или кривой совпадают с условиями ортогональности.

6055. Ищется минимум интеграла

$$I = \int_{M_1}^{M_2} \mu(x, y, z) ds,$$

где $\mu(x, y, z)$ — положительная функция, непрерывная вместе со своими производными. Показать, что:

- а) В точке пересечения экстремали с поверхностью уровня $\mu = C$ соприкасающаяся плоскость экстремали содержит нормаль к поверхности уровня.
- б) Если ψ — угол между касательной к экстремали и нормалью к поверхности уровня, причем поверхность проходит через точку касания, то $\mu \sin \psi = C$ на всей экстремали.
- в) Условие Вейерштрасса выполняется.

6056. Гибкая нить находится под действием силы F , имеющей потенциал U , так что

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

При этом сила F отнесена к единице длины нити. Уравнения равновесия нити имеют вид:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Здесь T — натяжение нити, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Из этих уравнений следует, что $T = U + h$, где h — постоянная.

Доказать, что условия равновесия нити являются необходимыми условиями минимума интеграла $\int \varphi(x, y, z) ds$, где $\varphi = U + h$.

6057. Найти дифференциальные уравнения геодезических линий в n -мерном пространстве Римана, т. е. экстремали интеграла, определяющего длину кривой между двумя точками:

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) x'_i x'_k} d\tau.$$

При этом квадратичная форма $dS^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k$ симметрична (т.е. $g_{ik} = g_{ki}$) и положительна.

6058. Найти кривую между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ так, чтобы ее линейный момент относительно оси OX , т. е. интеграл

$$\int \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

был минимумом.

6059. Найти минимум интеграла $\int \sqrt{h - x^2 - y^2 - z^2} ds$, дающего «действие» в случае, если материальная точка притягивается к неподвижному центру силою, пропорциональную расстоянию.

а) Найти экстремали непосредственно и по способу Гамильтона—Якоби.

б) Найти сопряженные критические точки.

6060. Найти кратчайшее расстояние между кругом

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

и гиперболой

$$z^2 - y^2 = c^2, \quad x = 0.$$

§ 16.6

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ. ОДНОСТОРОННЯЯ ВАРИАЦИЯ

6061. Найти разрывные решения с угловой точкой для задачи о минимуме интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} y'^2 (y' - 1)^2 dx.$$

6062. Среди линий, идущих из точки $A(0,0)$ в точку $B(2,0)$, найти линию с угловой точкой, вдоль которой интеграл

$$\int_A^B (y'^4 - 6y'^2) dx$$

принимает минимальное значение.

6063. Найти разрывные решения с угловой точкой задачи о минимуме интеграла

$$\int_{M_1}^{M_2} (y'^4 - 2y'^2) dx.$$

6064. Для задачи об экстремуме интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \sin y' dx$$

найти непрерывные решения, а также решения с угловой точкой.

6065. Среди всех цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными OZ , найти ту, на которой плоскость $z = 0$, конус $z = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} a$ и две образующие, проходящие через точку $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, отсекают наименьшую площадь.

Указание. См. задачу 5968.

6066. В плоскости XOY найти кривую, соединяющую две точки $M_1(r_1, \theta_1)$ и $M_2(r_2, \theta_2)$ и имеющую наименьший момент инерции относительно точки O . Найти непрерывные и разрывные решения.

6067. Среди линий, лежащих в верхней полуплоскости и соединяющих точки A и B , найти ту, которая при вращении вокруг OX дает наименьшую поверхность.

Найти разрывные решения (см. задачу 5988).

6068. Найти кривую, лежащую в области $y \geq k > 0$, соединяющую точки $M_1(-a, b)$ и $M_2(a, b)$ и образующую при вращении вокруг OX наименьшую поверхность.

6069. Среди линий, соединяющих данные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, найти разрывное решение задачи о минимуме интеграла

$$I = \int_A^B \sqrt{(h - gy)(x'^2 + y'^2)} d\tau.$$

6070. Найти кратчайший путь из точки $A(-2, 3)$ в точку $B(2, 3)$, расположенный в области $y \leq x^2$.

Указание. На пограничной линии в силу односторонности вариации должно быть выполнено неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \leq 0.$$

6071. Среди кривых, соединяющих точки $A(0, 0)$ и $B(b, 0)$ и лежащих в области $y \geq 0$, найти ту, которая дает максимум интеграла

$$\int_A^B \left(y^2 - ay\sqrt{1 + y'^2} \right) dx$$

при условии $b \geq 2a > 0$.

6072. Ищется минимум интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{U(x, y) + h} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

в области $y \geq f(x)$ при условии, что на одном пределе заданы значения функции и ее производной (a, y_a, y'_a) , а на другом пределе дано только само число b . Показать, что если экстремаль встречается граничную кривую $y = f(x)$, то ее дальнейшее продолжение составляет с граничной кривой тот же угол, т. е. угол падения равен углу отражения.

6073. Внутри выпуклой области B заданы две точки M_1 и M_2 . Найти кратчайший путь из M_1 в M_2 с заходом на границу B .

6074. Найти минимум интеграла

$$\int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 - y'^2} dx$$

при условиях $y \geq 0$; $1 - y'^2 \geq 0$.

6075. Между кривыми, соединяющими точки $A(a, y_a)$ и $B(b, y_b)$, найти ту, которая дает экстремальное значение интегралу

$$\int_a^b y \sqrt{1 - y^2 y'^2} dx$$

при условии $y \geq 0$, $1 - y^2 y'^2 \geq 0$.

6076. На поверхности $z = \varphi(x, y)$ даны точки M_1 и M_2 .

Провести на поверхности кратчайшую линию из M_1 в M_2 при условии, чтобы наклон кривой, т. е. $\frac{dz}{ds}$, не превосходил данного числа k (горная железная дорога).

6077. Соединить точки A и B кратчайшим путем, выходящим из A в данном направлении и имеющим кривизну, не превосходящую данной величины $\frac{1}{R}$. Точка B лежит вне кругов радиуса R , касающихся данного направления в точке A . (Задача Маркова.)

6078. Свет идет по такому пути, что первая вариация интеграла

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} n(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

вдоль пути равна нулю. При этом $n(x, y)$ — показатель преломления среды.

Если луч проходит из одной среды в другую, то $n(x, y)$ может получать внезапное изменение. Вывести условие преломления луча света при переходе луча из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 (см. задачу 6055).

§ 16.7

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6079. Составить уравнение Эйлера для интеграла $\iint \nu dS$, где ν — отрезок нормали между поверхностью и плоскостью xy .

6080. Уравнение Эйлера для интеграла

$$\iiint_S f(x, y, z, p, q) dx dy,$$

где f принимает на контуре заданные значения, способно обращаться в тождество. Доказать, что необходимым и достаточным условием для этого является равенство:

$$f = L(x, y, z) + M(x, y, z)p + N(x, y, z)q; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$

(С другой стороны, необходимым и достаточным условием является независимость величины интеграла от вида поверхности S .)

6081. Найти уравнение Эйлера для задачи о минимуме интеграла

$$\iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf(x, y) \right) dx dy$$

при заданных значениях u на контуре области.

6082. Найти минимум интеграла

$$\iint_S (p^2 + q^2) dx dy,$$

если даны значения функции u на контуре. При этом:

- а) составить уравнение Эйлера;
- б) показать, что всякое решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям на контуре, дает сильный минимум.

6083. Найти уравнение Эйлера для задачи об экстремуме интеграла

$$I = \iint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

Указание. Обратит внимание на то, что можно найти функцию $\varphi(x, y)$, имеющую непрерывные первые производные, но не имеющую вторых производных и, следовательно, не удовлетворяющую уравнению Эйлера, но тем не менее обращающую первую вариацию интеграла в нуль.

6084. Получить дифференциальное уравнение минимальных поверхностей, т. е. среди всех поверхностей $z = z(x, y)$, опирающихся на заданный контур C (или несколько контуров), найти ту, которая имеет наименьшую площадь. В частности, найти минимальные поверхности, уравнение которых имеет форму $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

6085. Показать, что если мы имеем минимальную поверхность $z = z(x, y)$, опирающуюся на заданный контур C , то эта поверхность дает сильный минимум интеграла

$$I = \iint_S \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

6086. Показать, что задача о минимуме интеграла

$$\iint G(\sqrt{u^2 + v^2}) \, dx \, dy,$$

где

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

приводит к уравнению Эйлера

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

где

$$c^2 = \frac{-q^2 G'(q)}{q G''(q) - G'(q)}$$

(к такому уравнению приводит задача о плоском стационарном адиабатическом движении сжимаемой жидкости с потенциалом скорости φ , если положить:

$$G(q) = (2\alpha^2 + (\gamma - 1)(U^2 - q^2))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$

α, γ, U — постоянные).

6087. Пусть $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ — криволинейные координаты и пусть:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = e(\xi, \eta) d\xi^2 + 2f(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(\xi, \eta) d\eta^2.$$

Исходя из первой вариации интеграла

$$J = \iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx \, dy,$$

показать, что оператор Лапласа Δu преобразуется к новым криволинейным координатам по формуле

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{eu_\eta - fu_\xi}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \right).\end{aligned}$$

Пример. Полярные координаты, где $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Указание. Если

$$D = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}},$$

то

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{D(\xi, y)}{D(x, y)} = Dy_\eta; & \xi_y &= -Dx_\eta; & \eta_x &= -Dy_\xi; & \eta_y &= Dx_\xi; \\ \xi_x^2 + \xi_y^2 &= D^2 g; & \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y &= -D^2 f; & \eta_x^2 + \eta_y^2 &= D^2 e.\end{aligned}$$

Поэтому

$$I = \iint D(gu_\xi^2 - 2fu_\xi u_\eta + eu_\eta^2) d\xi d\eta.$$

6088. Значения функции u даны на поверхности объема V .

Найти необходимое условие минимума интеграла

$$\iiint_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz.$$

6089. Тот же вопрос в применении к интегралу

$$\iiint_V \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} dx dy dz.$$

6090. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — криволинейные ортогональные координаты, определяемые формулами:

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Пусть также

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 d\xi_1^2 + H_2^2 d\xi_2^2 + H_3^2 d\xi_3^2.$$

Пользуясь первой вариацией интеграла

$$\iiint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz,$$

показать, что оператор Лапласа Δu в новых координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right).$$

Пример. Сферические координаты, где

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2.$$

6091. Показать, что для задачи о минимуме интеграла

$$I = \frac{1}{2} \iiint (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) dx dy dz dt,$$

где

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; & H_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; & H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \\ E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}; & E_y &= -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}; & E_z &= -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned}$$

уравнения Эйлера совпадают с уравнениями Максвелла распространения электромагнитных волн:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial t}; & \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

6092. Составить дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня, исходя из принципа Гамильтона.

Стержень расположен по оси OX между точками $(0, 0, 0)$ и $(l, 0, 0)$ и работает на продольное сжатие и растяжение. Обозначения: $u(x, t)$ — смещение; $\omega(x)$ — площадь поперечного

сечения; $\rho(x)$ — плотность материала; E — модуль упругости; σ — коэффициент Пуассона; $I(x)$ — полярный момент поперечного сечения относительно точки $(x, 0, 0)$; $F(x)$ — внешняя сила на единицу массы. Выяснить, какие граничные условия можно рассматривать на концах.

Указание. Потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} E \int_0^l \omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx,$$

кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^l \rho l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx.$$

Для работы внешних сил имеем выражение

$$\delta A = \int_0^l \rho \omega F \delta u dx.$$

6093. Составить дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний стержня, исходя из принципа Гамильтона. Стержень длиной l расположен по оси OX и работает на изгиб. Колебания происходят в плоскости XOY . Обозначения: $v(x, t)$ — смещение; $\omega(x)$ — поперечное сечение; $\rho(x)$ — плотность материала; E — модуль упругости; $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести его перпендикулярно к XOY ; $F(x)$ — внешняя сила, отнесенная к единице массы. Найти также вид предельных условий, которые должны выполняться в разных случаях.

Указание. Потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} E \int_0^l I \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Кинетическая энергия имеет выражение

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \omega \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right)^2 dx,$$

если учитывать и поступательное и вращательное движение элемента стержня.

6094. Исходя из принципа Гамильтона, составить дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний мембраны, расположенной в плоскости XOY и работающей только на растяжение. Обозначения: $\zeta(x, y, t)$ — смещение, перпендикулярное к XOY ; $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность; S_0 — площадь мембраны в положении равновесия; P — натяжение мембраны, постоянное и дающее силу, действующую в плоскости XOY на единицу длины контура, ограничивающего какой-либо элемент площади; $(F(x, y))$ — внешняя сила, перпендикулярная к XOY , отнесенная к единице массы; φ — внешняя сила, перпендикулярная к XOY , действующая на контуре и отнесенная к единице длины контура. Найти также вид предельного условия на контуре C мембраны, когда он не закреплен (если он закреплен, то предельное условие будет $\zeta = \varphi(c, t)$ — заданная функция положения точки на контуре).

Указание. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \iint_{S_0} \rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

потенциальная энергия

$$V = \iint_{S_0} P(dS - dS_0).$$

Для малых деформаций

$$V = \frac{1}{2} P \iint_{S_0} \left(\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

6095. Составить дифференциальное уравнение равновесия мембраны и выяснить граничные условия в том случае, когда на нее действует внешняя сила только на контуре, равная $k(s)\zeta(s)$, где k — коэффициент пропорциональности, а $\zeta(s)$ — поперечное смещение точки мембраны. Сила направлена противоположно смещению.

Указание. Потенциальная энергия, происходящая от внешней силы, равна

$$\frac{1}{2} \int k(s) \zeta^2(s) ds.$$

6096. Составить точное дифференциальное уравнение равновесия мембраны, служащей дном цилиндрического сосуда, в котором налита жидкость плотностью ρ_0 , глубиной h (относительно первоначального положения мембраны). Обозначения: $\zeta(x, y, t)$ — смещение точки мембраны в вертикальном направлении OZ (положительное направление вниз), P — постоянное натяжение мембраны.

Указание. Потенциальная энергия, происходящая от силы тяжести,

$$V_1 = \frac{1}{2}g \iint_{S_0} \rho_0(h^2 - \zeta^2) dx dy,$$

энергия растяжения мембраны

$$V_2 = P \iint_{S_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2} - 1 \right) dx dy.$$

При этом

$$\iint_{S_0} \rho_0(h + \zeta) dx dy = M \text{ — масса жидкости.}$$

6097. Исходя из принципа Гамильтона, составить уравнение малых поперечных колебаний тонкой пластинки. Пластика работает на растяжение и изгиб, толщина ее $2h$. В положении равновесия срединная плоскость пластинки лежит в плоскости XOY и ограничена контуром C . При этом: $\zeta(x, y, t)$ — смещение точки по OZ , ρ — постоянная плотность пластинки, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, внешних сил нет. Выяснить характер предельных условий.

Указание. Кинетическая энергия пластинки

$$T = \rho h \iint_{S_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx dy.$$

Потенциальная энергия

$$V = \frac{Eh^3}{3(1 - \sigma^2)} \iint_{S_0} \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - \frac{2(1 - \sigma)}{R_1 R_2} \right) dx dy.$$

Полезны приближенные формулы:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

В дальнейшем величины $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial y}$ полезно выразить через $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial n}$ и $\frac{\partial \delta \zeta}{\partial s}$, где n и s — направления нормали и касательной к контуру.

6098. Вывести уравнения равновесия упругого изотропного тела, исходя из принципа виртуальных перемещений, т. е. из условия:

$$\delta \iiint \Pi \, dx \, dy \, dz = 0,$$

где

$$\Pi = A - W, \quad W = \rho(uX + vY + wZ),$$

$$2A = (\lambda + 2\mu)(u_x + v_y + w_z)^2 + \mu((w_y + v_z)^2 + (v_x + u_y)^2 + (u_z + w_x)^2 - 4v_y w_z - 4w_z u_x - 4u_x v_y),$$

λ и μ — упругие постоянные, A — энергия деформации, рассчитанная на единицу объема, X, Y, Z — составляющие внешней силы на единицу массы, u, v, w — перемещения точек упругого тела, заданные на поверхности; u_x обозначает $\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д.

6099. Вывести уравнения движения упругого изотропного тела, исходя из принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) \, dt = 0,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx \, dy \, dz,$$

а величина Π имеет то же значение, что и в задаче 6098.

§ 16.8

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

6100. Найти форму тела вращения относительно оси OX , однородного, имеющего данный объем V и оказывающего наибольшее притяжение по закону Ньютона на точку, лежащую на пересечении тела с OX .

6101. Найти однородное тело вращения около оси OX с заданным объемом V и с наименьшим моментом инерции относительно оси OZ .

6102. Стоимость земли зависит от ее положения и может быть характеризована заданием положительной функции $\rho(x, y)$. Среди кривых длиной l , соединяющих точки M_1 и M_2 , найти ту, которая вместе с хордой M_1M_2 ограничивала бы площадь наибольшей стоимости.

Указание. Ищется максимум $\iint \rho(x, y) dx dy$; найти только кривизну экстремали.

6103. Из кривых длиной l , соединяющих точки $M_1(-a, 0)$, $M_2(a, 0)$, определить ту, которая вместе с OX ограничивает наибольшую площадь. При этом $l > 2a$.

6104. Соединить две неизвестные точки M_1 и M_2 на оси OX кривой наименьшей длины, заключающей вместе с OX площадь данной величины S .

6105. Найти замкнутую кривую данной длины l , ограничивающую площадь наибольшей величины.

6106. На двух данных ординатах $AA_1 (x=a)$ и $BB_1 (x=b)$ найти такие точки M и N и такую соединяющую их кривую, чтобы площадь $AMNB$ была максимальная. При этом дана сумма длин дуги MN и ординат AM и BN .

6107. Среди всех кривых, проведенных между ординатами $x = x_0$ и $x = x_1$ и образующих вместе с ними и OX заданной величины площадь, найти ту, у которой центр тяжести этой площади занимает наинизшее положение.

6108. Данную точку $(0, b)$ оси OY соединить с OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY данную площадь S и образующей при вращении около OX наименьшую поверхность.

6109. Из начала координат плоскости XOY провести кривую OA длиной l , кончающуюся на прямой $y = h$ и образующую вместе с ординатой точки A и осью OX наибольшую площадь.

6110. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку M_1 на одной стороне угла с неизвестной точкой другой стороны M_2 кривой длины l так, чтобы площадь между кривой и сторонами угла была наибольшая.

6111. Среди кривых длиной l , соединяющих точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, найти ту, у которой центр тяжести лежит наиболее низко.

6112. Найти форму тяжелой однородной нити, один конец которой закреплен в точке $B(x_1, y_1)$, а другой конец находится на оси OY . Длина нити l .

6113. Среди кривых, проведенных от периферии круга $x^2 + y^2 = R^2$ в точку $M(a, 0)$ и для которых площади сектора с вершиной в центре круга имеют данное значение, найти такую, для которой потенциал дуги в точке O имеет наименьшее значение. Плотность постоянна, притяжение — по закону Ньютона.

6114. Среди кривых длиной l , проходящих через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и имеющих в этих точках данные углы наклона θ_1 и θ_2 , определить ту, которая вместе с нормальными M_1N_1 и M_2N_2 и дугой эволюты N_1N_2 заключает наименьшую площадь.

Указание. Взять дугу s за независимую переменную, а угол θ за функцию.

Получим:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^l \rho ds = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{ds}{\theta'} = \min;$$

$$\int_0^l \cos \theta ds = x_2 - x_1, \quad \int_0^l \sin \theta ds = y_2 - y_1.$$

6115. Найти положение равновесия упругого стержня, зажатого на концах.

Указание. Надо найти экстремум интеграла $I = \int_0^l \frac{dx}{r^2}$, где r — радиус кривизны. Условия на концах дают координаты концов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , а также углы наклона θ_1 и θ_2 .

Задача сводится к изопериметрической, если за функцию взять угол наклона θ .

6116. Самолет имеет собственную скорость u . Ветер дует параллельно оси OX со скоростью $v < u$. Самолет имеет запас горючего на определенное время полета. Определить максимальную площадь кривой, какую может описать самолет при полете с возвратом в точку отлета.

6117. Найти минимум интеграла $\int_0^\pi y'^2 dx$, если $\int_0^\pi y^2 dx = 1$, $y(0) = y(\pi) = 0$. Найти экстремали и проверить условие Якоби.

6118. Найти минимум интеграла $\int_0^\pi y''^2 dx$ при условиях:

$$\int_0^\pi y'^2 dx = 1; \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

6119. Найти минимум $\int_0^\pi y''^2 dx$, если $\int_0^\pi y^2 dx = 1$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

6120. Среди линий, идущих из $A(0, 0)$ в $B(1, \frac{1}{4})$, найти ту, которая дает экстремум интегралу $\int_0^1 y'^2 dx$ при условии:

$$\int_0^1 (y - y'^2) dx = \frac{1}{12}.$$

6121. Из линий от точки $A(0, 0, 0)$ до $B(1, 1, 1)$, у которых

$$\int_A^B (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2,$$

найти ту, у которой

$$\int_A^B (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

— минимум. Рассмотреть такую же задачу при условии, что точку A известно лишь, что она лежит в плоскости YOZ .

6122. Среди всех поверхностей $z = z(x, y)$, опирающихся на заданный контур L и ограничивающих вместе с цилиндром, проектирующим L на XOY , и основанием этого цилиндра данный объем v , найти ту, которая имеет наименьшую площадь. При этом составить уравнение Эйлера и выяснить его геометрическое значение.

6123. Среди поверхностей с заданной площадью S , опирающихся на плоскость XOY и ограничивающих данный объем V , найти ту, у которой центр тяжести этого объема имел бы наинизшее положение. При этом выяснить геометрическое значение уравнения Эйлера и найти, какие граничные условия должны выполняться на линии пересечения поверхности с плоскостью XOY .

6124. Среди всех поверхностей $z = z(x, y)$ заданной площади и опирающихся на данный контур найти ту, у которой центр тяжести лежит наиболее низко. Составить уравнение Эйлера и выяснить его геометрическое значение.

6125. Среди замкнутых поверхностей данной площади найти ограничивающую наибольший объем. Составить уравнение Эйлера, выяснить его геометрическое значение и показать, что сферическая поверхность удовлетворяет уравнению Эйлера.

6126. Дана система материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_n$. Масса точки M_ν равна m_ν , координаты ее — x_ν, y_ν, z_ν , действующая на нее сила имеет составляющие X_ν, Y_ν, Z_ν . Пусть существует функция $V(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t)$ — потенциальная энергия, такая, что

$$X_\nu = -\frac{\partial V}{\partial x_\nu}, \quad Y_\nu = -\frac{\partial V}{\partial y_\nu}, \quad Z_\nu = -\frac{\partial V}{\partial z_\nu}.$$

Обозначим через T кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n m_\nu (\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2);$$

при этом точка означает дифференцирование по t . Пусть дано m условий вида $\varphi_a(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0$, $a = 1, 2, \dots, m$.

Показать, что отыскание экстремума интеграла Гамильтона

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$

при заданных x_ν, y_ν, z_ν для $t = t_1$ и $t = t_2$ приводит к дифференциальным уравнениям Лагранжа первого рода:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = X_\nu + \sum_{a=1}^m \lambda_a \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\nu}.$$

Если же выразить координаты через $r = 3n - m$ независимых переменных $q_1, q_2, \dots, q_r$ и t , то придем к дифференциальным уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial V}{\partial q_\nu} + \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, r.$$

6127. При обозначениях предыдущей задачи допустим, что функции φ_a и $V = -U$ не содержит t . Назовем траекторией кривую в $3n$ -мерном пространстве:

$$x_\nu = x_\nu(\tau), \quad y_\nu = y_\nu(\tau), \quad z_\nu = z_\nu(\tau),$$

удовлетворяющую всем условиям $\varphi_a(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0$.

Каждому движению точек под действием заданных сил отвечает своя траектория. Показать, что эта траектория является экстремалью для задачи о минимуме интеграла «действия»

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\sum m_\nu (x'_\nu{}^2 + y'_\nu{}^2 + z'_\nu{}^2)} d\tau.$$

Здесь h — величина полной энергии $T = U + h$, а дифференцирование совершается по τ ; значения переменных на концах заданы.

Указание. Составив уравнения Эйлера, выбрать τ так, чтобы оказалось:

$$\sum m_\nu (x'^2_\nu + y'^2_\nu + z'^2_\nu) = 2(U + h).$$

Найденное значение параметра τ обозначить через t .

§ 16.9

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

6128. Функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнению

$$y^2 + y'^2 = z'.$$

Кроме того, дано, что

$$y(0) = a + b, \quad y(n) = ae^n + be^{-n}, \quad z(0) = a^2 - b^2.$$

Найти y и z из условия, что $z(n)$ — максимум.

6129. Задачу о кратчайшем расстоянии между двумя точками M_1 и M_2 в пространстве рассмотреть как задачу Майера.

Указание. $u' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, $z(t_1) = z_1$, $x(t_2) = x_2$, $y(t_2) = y_2$, $z(t_2) = z_2$; $u(t_1) = 0$, $u(t_2)$ — минимуму.

6130. Среди всех кривых, соединяющих данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие в вертикальной плоскости $ХОУ$ (OY — вниз), найти ту, двигаясь по которой, тяжелая точка придет из M_1 в M_2 в кратчайший срок. Начальная скорость v_1 , на точку действует, кроме тяжести, сопротивление $R = kv^n$.

Указание. Закон сохранения энергии дает

$$vv' - gy' + kv^n \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0.$$

За параметр принять v .

6131. Среди кривых, соединяющих данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие в плоскости $ХОУ$ (OY — вниз), найти ту, двигаясь вдоль которой точка придет в M_2 с наибольшей скоростью. При этом скорость точки в M_1 равна v_1 , на точку действует сила тяжести и сила сопротивления $R = kv^n$. Сравнить нормальную реакцию кривой с центробежной силой.

Указание. За параметр взять $p = \frac{dy}{dx}$.

6132. Соединить точки $M_1(0, 0, 0)$ и $M_2(a, 0, 0)$ кривой, имеющей данную кривизну $\frac{1}{\rho}$ и наибольшую длину.

6133. Самолет вылетает из точки $A(x_1, y_1)$ в момент $t = 0$, имея в виду в кратчайшее время попасть в точку $B(x_2, y_2)$. Найти, как нужно для этого направлять самолет, если известно распределение ветра в пространстве и времени, т. е. известны проекции скорости ветра ω на оси OX и OY ; $\omega_x = u(x, y, t)$, $\omega_y = v(x, y, t)$. Собственная скорость самолета V , причем $w^2 = u^2 + v^2 < V^2$.

6134. Крыло самолета длиной l расположено по оси OX и движется параллельно оси OY со скоростью v_0 (плоскость $ХОУ$ горизонтальна). Обозначим через $f(x)dx$ подъемную силу элемента крыла длиной dx . В аэродинамике показывается при некоторых допущениях, что при таких условиях от элемента крыла отходит вихрь интенсивности $d\Gamma = \frac{1}{\rho v_0} f'(x)dx$. Здесь ρ — плотность воздуха, считаемая постоянной. (Эта формула есть следствие основной формулы Н. Е. Жуковского.) Эти вихри

вызывают в каждой точке ξ крыла направленную вниз скорость воздуха

$$\omega(\xi) = \frac{1}{4\pi\rho v_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f'(x)}{\xi - x} dx.$$

При этом ось OZ направлена вниз, а у интеграла берется здесь и дальше главное значение. Индуктивное сопротивление крыла определяется по формуле

$$B = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\omega(\xi)}{v_0} f(\xi) d\xi = \frac{1}{4\pi\rho v_0^2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f'(x)f(\xi)}{\xi - x} dx d\xi.$$

Требуется определить при заданной полной подъемной силе крыла

$$A = \int_{-l/2}^{l/2} f(x) dx$$

такое распределение подъемной силы, т. е. такую функцию $f(x)$, чтобы индуктивное сопротивление было наименьшим. При этом следует учесть, что благодаря отсутствию вихрей вне промежутка $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$ должно быть выполнено условие: $f(\pm \frac{l}{2}) = 0$.

Указание. Обратить внимание на формулу

$$\frac{d}{dx} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f'(\xi)}{\xi - x} d\xi - \frac{f(\frac{l}{2})}{\frac{l}{2} - x} - \frac{f(\frac{l}{2})}{\frac{l}{2} + x}.$$

6135. Даны два уравнения

$$u' = f(x, y, y', z, u), \quad z' = g(x, y, y', z, u).$$

Найти y как функцию от x при условии, что значения x , y , z и u даны при $x = x_0$, дано также y при $x = x_1$ и $u(x_1)$ должно быть экстремумом. Пример:

$$u(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', z) dx; \quad z = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Составить дифференциальные уравнения Эйлера.

6136. Найти экстремум функции $W = f(u, v)$, где

$$u = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt, \quad v = \int_{t_1}^{t_2} G(x, y, x', y') dt$$

при заданных значениях x и y на концах промежутка (t_1, t_2) .

6137. Найти вид экстремалей для задачи о минимуме интеграла

$$\int_A^B y dx \cdot \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — заданные точки.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задачи § 17.1 имеют целью разъяснить применение основных теорем теории вероятностей. Начинаясь с примеров непосредственного вычисления вероятности и постепенно усложняясь, задачи рассматривают разнообразные случаи использования основных теорем. При составлении текста задач этого параграфа, как и везде в дальнейшем, было обращено внимание на четкую формулировку условий, при которых производится вычисление вероятности, так как только в этом случае можно говорить об определенной числовой характеристике вероятности. При решении задач, особенно в начале, на это следует обратить должное внимание.

В § 17.2 даются задачи на вычисление математических ожиданий и задачи, решение которых связано с вычислением математических ожиданий. Здесь же рассматриваются и более сложные вопросы, решение которых связано с использованием конечных разностей и метода производящих функций.

К § 17.3 отнесены задачи, связанные с законом больших чисел. Задачи § 17.3 дают примеры на применение неравенства Чебышева. Они непосредственно примыкают к задачам § 17.4, в котором рассматривается применение теорем Лапласа и Ляпунова—Маркова.

В § 17.4 введены задачи на выборочный метод, который непосредственно связан с упомянутыми теоремами. С целью облегчения решения задач § 17.4 в конце главы приложена таблица значений интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Эта таблица позволяет избежать при решении задач § 17.4 обращения к специальным таблицам или компьютеру, которые не всегда могут быть под рукой учащегося.

§ 17.5 посвящен задачам на вычисление геометрических вероятностей. В этом параграфе обращено внимание на составление кривых распределения и даются примеры на вычисление характеристической функции.

Все сложные задачи сопровождаются либо указаниями к их решению, либо подробными ответами, разъясняющими ход решения.

§ 17.1

ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

6138. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых равно 360, оказалось, что начальной буквой фамилии у семи была *А*, у пяти была *Е*, у восьми была *И*, у девяти — *О*, у четырех — *У*, у двух — *Ю*, у всех прочих фамилия начиналась с согласной. Требуется определить вероятность P того, что фамилия члена данного собрания начинается гласной.

6139. Из ящика, в котором находится 20 шаров белого цвета и 2 черного, вынимается m шаров, причем после каждого вынимания шар кладется обратно; требуется определить наименьшее значение x_0 числа m выниманий, при котором вероятность P достать хоть один раз черный шар больше $\frac{1}{2}$ ($P > \frac{1}{2}$).

6140. При тех же условиях определить наименьшее значение x числа выниманий m , чтобы вероятность P достать хоть один белый шар была более $\frac{1}{2}$, если шар не кладется обратно.

6141. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление хоть один раз 6 очков получило вероятность больше 0,7? больше 0,8? больше 0,9?

6142. Колода карт разделяется на две пачки поровну (по 26 карт). Требуется определить вероятность P , что в обеих пачках окажется равное (2) число тузов.

6143. При тех же условиях определить вероятность P_1 , что карт красных и черных мастей в каждой пачке будет поровну (13).

6144. Из колоды карт берется 6 карт. Требуется определить вероятность P , что среди этих карт будут представительницы всех четырех мастей.

6145. Каково наименьшее число x_0 карт, которое необходимо взять из колоды, чтобы вероятность P_{x_0} , что среди

них встретятся две карты одинакового наименования, была более $\frac{1}{2}$?

6146. 20 человек, среди которых 10 мужчин и 10 женщин, группируются попарно. Какова вероятность P , если группировка происходит случайно, что каждая из 10 пар состоит из лиц разного пола?

6147. Общество из 5 мужчин и 10 женщин разбивается на 5 групп по 3 человека. Какова вероятность при случайной группировке, что в каждой группе будет по 1 мужчине?

6148. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Определить вероятность P , что все цифры различны (каждая цифра может иметь 10 значений).

6149. В трех урнах содержатся белые и черные шары. В первой содержатся 3 белых шара и 1 черный, во второй урне 6 белых и 4 черных, в третьей — 9 белых и 1 черный. Из урны, выбранной наудачу, извлекается шар. Вычислить вероятность, что этот шар белый, считая, что выбор любой из урн одинаково вероятен.

6150. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложено два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

6151. В трех урнах содержатся белые и черные шары. В первой 2 белых и 3 черных шара, во второй 2 белых и 2 черных шара, в третьей 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложен шар во вторую. После этого шар из второй урны переложен в третью. Наконец из третьей урны шар переложен в первую.

Какое распределение черных и белых шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? Вычислить эту вероятность.

Что представляется более вероятным: сохранение первоначального состава урны или его изменение?

6152. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что состав шаров во всех урнах не изменится от перекладывания.

6153. В условиях задачи 6150 вычислить вероятность того, что при перекладывании шаров из одной урны в другую два раза был переложен шар белого цвета и один раз шар черного цвета. Указать вероятность того, что при этом состав первой урны не изменится.

6154. Требуется показать, что

$$(A \text{ или } B) = (A) + (B) - (A \text{ и } B);$$

в частности, если A и B независимы, то

$$(A \text{ или } B) = (A) + (B) - (AB).$$

6155. Доказать, что если $Y = X + \delta$, причем вероятность того, что $X \leq 10$, равна 0,9, а вероятность того, что $|\delta| \leq 1$, равна 0,95, то вероятность P_1 того, что $Y \leq 9$, и вероятность P_2 того, что $Y \leq 11$, удовлетворяют неравенствам

$$P_1 \leq P_2 \leq 0,95,$$

какова бы ни была зависимость между X и δ .

6156. Доказать, что

$$\begin{aligned} (A \text{ или } B \text{ или } C) &= (A) + (B) + (C) - \\ &\quad - (A \text{ и } B) - (A \text{ и } C) - (B \text{ и } C) + (A \text{ и } B \text{ и } C). \end{aligned}$$

6157. Рассматриваются n фактов $A_1, A_2, \dots, A_n$; обозначим через $p_i = (A_i)$; $p_{ik} = (A_i \text{ и } A_k)$, $p_{ikl} = (A_i \text{ и } A_k \text{ и } A_l)$ и т. д. Показать, что вероятность

$$\begin{aligned} (A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } \dots A_n) &= \sum_{i=1}^{i=n} p_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{i-1} p_{ik} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{i-1} \sum_{l=1}^{k-1} p_{ikl} + \dots + (-1)^{n-1} p_{12\dots n}. \end{aligned}$$

6158. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, \dots, N$, производятся последовательно извлечения шара. Каждый раз по извлечении шар возвращается обратно в урну.

Вычислить вероятность, что при n -кратном извлечении номера последовательно вынутых шаров будут идти в возрастающем порядке.

6159. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, n$ отмечено число k . Какова вероятность, что два числа, выбранных наудачу из этой последовательности, окажутся одно меньше и другое больше, чем k ?

6160. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, N$ отобраны наудачу n чисел: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Найти вероятность того, что $x_m = M$.

6161. Из урны, содержащей шары с номерами $1, 2, 3, \dots, N$, производятся последовательные извлечения n шаров. Каждый раз по извлечении шар возвращается в урну обратно. Номера вынутых шаров записаны в порядке возрастания. Вычислить вероятность, что номер m -го шара окажется равным M .

6162. Предполагая в предыдущей задаче числа M и N весьма большими и отношение их равным x , найти предельный закон распределения величины x .

6163. 6 билетов с номерами $1, 2, \dots, 6$, последовательно вынимаемых из ящика, имеют одинаковую вероятность появиться в любом порядке. Нужно определить (пользуясь решением задачи 6157) вероятность P того, что порядковый номер по крайней мере у одного из билетов совпадает с его собственным номером. Решить ту же задачу, если число билетов неограниченно возрастает.

6164. Дано N билетов с номерами $1, 2, \dots, N$, как в предыдущей задаче. Определить вероятность P того, что, последовательно выбирая $n < N$ из них, по крайней мере один раз порядковый номер извлечения билета совпадает с его собственным номером. Рассмотреть случай $N = 10, n = 5$.

6165. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, вынимаются последовательно шары и не возвращаются обратно в урну. Операция продолжается, пока не появится белый шар. Выяснить закон распределения числа извлеченных черных шаров.

6166. Предполагая в предыдущей задаче величины m , n весьма большими, установить предельный закон распределения. Отношение $n : (m + n) = a$.

6167. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекается шар и возвращается в сосуд обратно. Извлечение продолжается до тех пор, пока не появится белый шар. Вычислить вероятность k -кратного извлечения черного шара.

6168. Предположив в задаче 6167, что величины m и n возрастают беспредельно и отношение $n : (m + n)$ стремится к a , установить предельный закон распределения.

6169. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают шары. По извлечении шар каждый раз возвращается в сосуд обратно. Извлечение прекращается при появлении белого шара.

Вычислить вероятность извлечь первым белый шар каждому из участников, если шар извлекается не больше $2k$ раз.

6170. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают шар. Вычислить вероятность вынуть первым белый шар каждому из участников.

6171. Двое играют в игру, бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым откроет решетку. Во сколько раз больше вероятность выигрыша начавшего, если бросание монеты может быть продолжено сколь угодно долго?

6172. В сосуде заключается N билетов с различными номерами. Из сосуда вынимают m раз по n билетов, каждый раз возвращая их обратно. Вычислить вероятность, что k билетов не появится. Вычислить вероятность, что все билеты появятся.

6173. В сосуде заключается N билетов с различными номерами. Из сосуда k раз вынимаются n билетов и по извлечении возвращаются обратно. Установить закон распределения для числа различных номеров, появившихся при k извлечениях.

6174. В трех ящиках находятся соответственно:

- а) 2 белых и 3 черных шара,
- б) 4 белых и 3 черных шара,
- в) 6 белых и 2 черных шара.

Предполагая, что извлечение из всех трех ящиков одинаково вероятно, определить вероятность того, что извлечение было произведено из первого ящика, в следующих случаях:

- а) если известно, что вынутый шар оказался белым;
- б) если вынутый шар оказался черным;
- в) ту же задачу решить, если вероятность извлечения из каждого ящика $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,7$; $a_3 = 0,2$.

6175. При тех же условиях определить вероятности x_1 и x_2 того, что извлечение было произведено из первого ящика, если известно, что после трех извлечений (с возвратом шара) из того же ящика: а) все три шара оказались белыми; б) все три шара оказались черными.

6176. Даны два ящика: в первом находятся 2 белых, 3 красных и 20 черных шаров, во втором — 8 белых, 15 красных и 2 черных шара. После извлечений шара из одного, а потом из другого ящика вынутыми оказались сперва черный, а потом красный шары.

Определить вероятность того, что извлечение производилось сначала из первого, а потом из второго ящика, предполагая обе последовательности $\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2$ равновероятными.

6177. Событие A имеет вероятность P произойти в любой момент промежутка времени T . Требуется определить его вероятность p произойти в течение остающегося времени $T - t$, если по истечении времени $t < T$ событие A еще не произошло.

6178. Если известно, что вероятность двум близнецам быть одинакового пола вдвое больше, чем вероятность быть разного пола причем вообще, вероятность рождения мальчика равна 0,51, требуется определить вероятность того, что другой из близнецов мальчик, после того как установлено, что первый из них — мальчик.

6179. Какова вероятность p_0 , что среди 1000 лампочек нет испорченной, если из взятых 100 наудачу все оказались исправными? Решить задачу при предположении, что число плохих лампочек не может превысить 5 на тысячу и все значения (0, 1, 2, 3, 4, 5) числа испорченных лампочек $\dot{a}$ priori равно возможны.

6180. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность вынуть белый шар из этого сосуда? Все предположения о первоначальном составе шаров считаются одинаково возможными.

6181. Из сосуда, содержащего n шаров неизвестного цвета, вынут один шар, оказавшийся белым. Вычислить вероятность того, что вновь вынутый шар будет тоже белый. Все предположения о первоначальном составе шаров в сосуде считать одинаково возможными.

6182. Из сосуда, содержащего n шаров неизвестного цвета, вынут один шар, оказавшийся белым. По возвращении этого шара в урну вновь вынут шар. Определить вероятность того, что этот шар будет белого цвета. Первоначальный состав сосуда представляется одинаково вероятным.

6183. Из сосуда, содержащего N шаров, вынуты $m + n$ шаров, среди которых m шаров белого цвета. Установить вероятность того, что до изъятия в сосуде было M шаров белого цвета.

6184. Из отвала, содержащего на поверхности n кусков окисленной руды и n' кусков сульфидной руды, отобрано наудачу m образцов и отправлено в лабораторию для анализа. При вскрытии ящика с образцами оказалось, что первые k из вынутых кусков относятся к рудам окисленным.

Какова вероятность, что и следующий кусок будет относиться к той же руде? При решении задачи принять, что любые m из $n + n'$ кусков на поверхности отвала могли быть отобраны в ящик с одинаковой вероятностью.

6185. В сосуде содержатся белые и черные шары. Общее число N шаров в сосуде известно, но не известно ни число белых, ни число черных шаров.

При $(m + n)$ -кратном извлечении шара из сосуда m раз появился белый шар и n раз черный.

Какой состав шаров в сосуда представляется наиболее вероятным? Все предположения о первоначальном составе сосуда одинаково вероятны.

6186. Обозначая через $P_{i,n}$ вероятность появления события A i раз при n независимых опытах, если вероятности A последовательно равны $p_1, p_2, \dots, p_n$, доказать неравенства

$$\frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} > \frac{P_{2,n}}{P_{1,n}} > \dots > \frac{P_{n,n}}{P_{n-1,n}},$$

из которых вытекает, что $P_{i,n}$ возрастает вместе с i до некоторого максимального значения, после которого она начинает убывать.

Пример. $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = \frac{1}{5}$, $p_5 = \frac{1}{6}$.

6187. Даны 3 попарно независимых события, которые, однако, все 3 вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность x , определить наибольшее возможное значение x .

§ 17.2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ. СПОСОБ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

6188. В лотерее разыгрываются два предмета: велосипед стоимостью в 2500 руб. и часы ценою в 500 руб. Чему равно математическое ожидание выигрыша для лица, обладающего одним билетом, если общее число выигрышных билетов равно 1000?

6189. Из ящика, содержащего 4 белых и 20 черных шаров, вынимают 5 шаров и перекладывают в другой ящик, где положено было 16 белых шаров; после этого из второго ящика в первый обратно перекладывают 6 шаров. Спрашивается, каковы будут после этого математические ожидания чисел белых шаров x_1 и x_2 в обоих ящиках?

6190. При бросании 3 игральных костей игрок выигрывает 100 руб., если на всех костях по 6 очков, и получает 10 руб., если шесть будет только на 2 костях. Какую сумму он должен внести за билет на право участия в игре, чтобы игра была безобидна?

6191. При бросании n игральных костей определить м.о. (математическое ожидание) суммы очков на всех костях и дисперсию этой суммы.

6192. Вероятность появления события A равна p . Вычислить м.о. x числа последовательных опытов, где A неизменно повторяется, и дисперсию B этого числа.

6193. За каждую серию из $a > 0$ опытов, где A неизменно повторяется, игрок получает y^a руб.; напротив, если $a = 0$, он платит 1 руб. Требуется определить величину y при условии, что игра будет безобидной. Рассмотреть пример $p = \frac{1}{13}$.

6194. В случаях задачи 6167 найти EM .

6195. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, вынимаем шары, извлекая их последовательно до тех пор, пока не появится белый шар. Определить м.о. числа вынутых при этом черных шаров.

6196. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары и возвращаются обратно, пока не появится белый шар. Вычислить м.о. числа вынутых черных шаров и его дисперсию.

6197. В сосуде содержится a билетов с номером 1, b билетов с номером 2, ... и k билетов с номером m . Из сосуда вынута n билетов. Вычислить м.о. числа не вышедших номеров.

6198. В сосуде содержится a билетов с номером 1, b билетов с номером 2, c билетов с номером 3 и т. д., k билетов с номером m , причем $a + b + \dots + k \geq m$. Определить м.о. числа совпадений номера вышедшего билета с номером извлечения, когда извлекаются все шары.

6199. Доказать, что если $Ex^2 = Ex^3 = Ex^4 = a$, то величина x не может получать иных значений, кроме 0 и 1.

6200. Известно, что $x \leq A$ и $Ex = 0$; показать, что вероятность P неравенства $x < -At^2$ меньше, чем $\frac{1}{1+t^2}$.

6201. Доказать тождество

$$1 + 2\frac{A-a}{A-1} + 3\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)} + \dots + \frac{(A-a)!}{(A-1)\cdots a} = \frac{A(A+1)}{a(a+1)}$$

(где $A \geq a$ — целые положительные числа), вычисляя двумя различными способами м.о. числа m черных шаров, отделяющих 2 соседних белых в серии, состоящей из $A+1$ шара, среди которых имеется a белых.

6202. Показать, что дисперсия σ^2 величины x не может превысить квадрата полуразности между крайними ее значениями. Указать условия, при которых этот верхний предел достигается.

6203. Величина x может получать все целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Требуется определить знаменатель прогрессии q так, чтобы $Ex = 10$, и вычислить при этом условии вероятность P_{10} того, что $x \leq 10$, и вероятность P_{100} того, что $x \leq 100$.

6204. Величина x может получать значение 0 с вероятностью a_0 и любое целое положительное значение $n > 0$ с вероятностями p_n , убывающими в геометрической прогрессии ($p_n = B^n$). Надо определить указанные вероятности, если известно, что $Ex = a$, $Ex^2 = b$, и установить условия, которым должны подчиняться a и b , чтобы задача была возможна. Проверить, приемлемы ли значения $a = 4$, $b = 25$.

6205. Величина x получает целые неотрицательные значения $n \geq 0$ с вероятностями $a_n = A \frac{k^n}{n!}$. Определить A и k , если известно, что $Ex = a$, и найти наиболее вероятное значение μ числа n .

6206. Найти необходимые и достаточные условия, которым надо подчинить $a = Ex$, $b = Ex^2$, $c = Ex^3$, для того чтобы величина x получала только целые неотрицательные значения $n \geq 0$

с вероятностями $a_n = \frac{Ak^n + Bl^n}{n!}$, где $A \geq 0$, $B \geq 0$, $k \geq 0$, $l \geq 0$. Рассмотреть численный пример: $a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{13}{2}$, $c = \frac{13}{4}$; определить наиболее вероятное значение n .

6207. Решить предыдущую задачу при условии, что k может быть отрицательным.

Пример. $a = 1,85$; $b = 5,7$; $c = 20,95$.

6208. Доказать, что $(Ex^p)^q \geq (Ex^q)^p$, если $x \geq 0$ и $p > q > 0$.

6209. Доказать, что какова бы ни была величина x , моменты, т. е. м. о. последовательных ее степеней $a_i = Ex^i$, удовлетворяют неравенствам

$$\Delta_{2i} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_i \\ a_1 & a_2 & & \dots & a_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i & \dots & \dots & \dots & a_{2i} \end{vmatrix} \geq 0.$$

6210. Величина x может получить три значения, из которых одно есть нуль. Зная моменты его первых четырех степеней, определить значения x и их вероятности; указать условия, необходимые и достаточные, чтобы эти значения были:

а) действительны,

б) неотрицательны.

Пример. $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$, $a_4 = \frac{21}{2}$.

6211. Число $x \geq 0$ может получить любые целые значения с вероятностью

$$a_h = \frac{M}{(a+h)(a+1+h)(a+2+h)}.$$

Вычислить a_h , если известно, что $Ex = A$; показать, что Ex^2 не имеет смысла. Полагая $A = 3$, вычислить вероятность P_{10} того, что $x < 10$.

6212. Известно, что

$$a = \frac{M}{(a+h)(a+h+1)(a+h+2)(a+h+3)}$$

представляет вероятность числу $x \geq 0$ получить целое значение h . Определить a_h по условию, чтобы среднеквадратическое

отклонение σ числа x , так же как и его м. о. A , были целыми числами.

6213. Даны 2 ящика с шарами; в первом N шаров, из них M белых, во втором N_1 шаров, из них M_1 белых. Одновременно один шар из одного ящика заменяется шаром из другого, и обратно. Эта операция смешения производится последовательно l раз. Требуется определить м. о. числа белых шаров после этого в каждом из ящиков. Рассмотреть случай, когда $l \rightarrow \infty$.

6214. Решить предыдущую задачу в предположении, что $N_1 = \infty$, т. е. при условии, что вынутый из первого ящика шар всегда заменяется черным. Рассмотреть случай, когда $l \rightarrow \infty$, причем $\frac{l}{N} = a$ остается конечным.

6215. Вычислить дисперсию B_l числа белых шаров после l выниманий при условиях предыдущей задачи.

6216. Вероятность появления события изменяется от испытания к испытанию. Построить производящую функцию вероятностей $P'_{m,n}$ появления события m или менее раз при n независимых испытаниях.

6217. При некоторой игре игрок имеет одинаковую вероятность $p = \frac{1}{5}$ ничего не выиграть или же выиграть или проиграть по 20 или 40 копеек. Требуется определить вероятность того, что после 12 партий он проиграет не менее 3 руб., и дисперсию B его выигрыша.

6218. При бросании игральной кости игрок уплачивает 1 руб. в случае появления нечетного числа очков и получает 3 руб. при появлении 6 очков, остальные (2 и 4) четные числа очков считаются безразличными. Определить вероятность $R_{15,12}$, что после 12 партий он выиграет не менее 15 руб., и дисперсию B выигрыша.

6219. Предполагая, что при составлении 7-значной таблицы (мантисс) логарифмов все цифры равновероятны, какова вероятность R_s , что сумма S цифр мантиссы окажется меньше 20? Каковы ES и ES^2 ?

6220. Число x может получать любые целые значения m с вероятностью $(1-q)q^m$; складывая h значений этого числа, определить вероятность P_a , что полученная сумма y равна a . Найти наиболее вероятное значение S этой суммы; рассмотреть предельный случай, когда $h \rightarrow \infty$, причем $hq = t$ остается конечным.

6221. Число x_n с увеличением n на 1 получает приращение $+1$ или -1 , причем оба значения равно возможны, если $x_n = 0$; если $x_n \geq 0$, то вероятность уменьшения $|x_n|$ равна $A \geq \frac{1}{2}$ (вероятность увеличения $|x_n|$ равна $B = 1 - A \leq \frac{1}{2}$). Полагая $x_0 = 0$, найти вероятность $P_{n,h}$ равенства $|x_n| = h$ при любых n и h ; рассмотреть случай $n \rightarrow \infty$. Вычислить $E|x_n|$. Рассмотреть случай $A = B = \frac{1}{2}$.

§ 17.3

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ. НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Применяя лемму Чебышева–Маркова, решить следующие задачи:

6222. Указать нижнюю границу вероятности P неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}, \quad (*)$$

при n независимых опытах, если в каждом опыте вероятность равна $\frac{1}{2}$, полагая $n = 10\,000$; $n = 100\,000$.

6223. Как велико должно быть n , чтобы вероятность P неравенства $(*)$ была больше, чем $0,99$?

6224. При $n = 10\,000$, какую верхнюю границу для $\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \right|$ можно указать с вероятностью не меньшей, чем $0,99$?

6225. Если игрок при бросании игральной кости выигрывает 4 руб. в случае появления 6 очков и выплачивает 1 руб. в прочих случаях, какова вероятность, что при 10 000 бросаниях он проиграет не менее 200 руб.?

6226. Предполагая, что в n последовательных и независимых опытах вероятности появления события A соответственно

$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, определить нижнюю границу вероятности того, что число его появлений $m \leq 1$.

6227. Показать, что каковы бы ни были случайная величина x и данное положительное число ε , вероятность неравенства

$$\varepsilon x > t^2 + \lg I \quad (A)$$

меньше, чем e^{-t^2} , где $I = Ee^{\varepsilon x}$.

6228. Полагая, что m есть число появлений события A в серии независимых опытов с соответственными вероятностями p_i , вывести из (A), что вероятность неравенства

$$m - \sum_{i=1}^n p_i \geq \frac{t^2}{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^n p_i q_i \geq 2t \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i q_i} \quad (B)$$

меньше, чем e^{-t^2} (если $\varepsilon \leq 1$, $t^2 \leq \sum_{i=1}^n p_i q_i$).

6229. Показать тем же способом, что вероятность неравенства

$$\sum_{i=1}^n p_i - m \geq 2t \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i q_i} \quad (C)$$

меньше, чем e^{-t^2} ($t^2 \leq \sum_{i=1}^n p_i q_i$).

6230. Пользуясь неравенствами (B) и (C), решить задачи 6223 и 6225.

6231. Показать, что если $p = \frac{1}{2}$, то вероятность неравенства

$$\frac{m}{n} \geq \frac{t}{\sqrt{2n}}$$

меньше, чем e^{-t^2} . Применить к решению задачи 6224.

6232. Производится n независимых опытов, где вероятность p_i в i -м опыте появления события A равна $\left(\frac{3}{4}\right)^i$; требуется определить верхнюю границу вероятности p , что число m появлений A будет более 10.

6233. Величина x_k принимает три значения: $+k^\beta$, $-k^\beta$ и 0 с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{2k^\alpha}$, $\frac{1}{2k^\alpha}$ и $1 - \frac{1}{k^\alpha}$. Доказать, что к сумме независимых величин $\sum_{k=1}^n x_k$ приложим закон больших чисел, если $\alpha > 1$.

6234. Обобщить результат предыдущей задачи, показав применимость закона больших чисел к сумме $\sum_{k=1}^n x_k$ независимых случайных переменных x_k , определяемых следующим образом. Случайная переменная x_k принимает серию значений с вероятностями, указанными в таблице справа вверху.

Ряд $p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots$ сходящийся.

x_k	a_k	0	$-a_k$
p_k	p_k	$1 - 2p_k$	p_k

§ 17.4

ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА И ЛЯПУНОВА–МАРКОВА

6235. Пользуясь формулой Лапласа, указать, сколько раз n надо бросить игральную кость, чтобы вероятность неравенства

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{100}$$

была не менее, чем вероятность противоположного неравенства, где m — число появлений 6 очков.

6236. Игрок выигрывает 7 руб. при появлении 6 очков и уплачивает 1 руб. в других случаях. Требуется с вероятностью $2\Phi(4) \approx 0,999936$ указать, между какими пределами будет его выигрыш R после 8000 бросаний кости.

6237. Вероятность появления события в каждом из серии независимых испытаний одна и та же и равна $\frac{3}{4}$. С какой вероятностью можно ожидать, что при 10 000 испытаний отношение числа m появления события к числу n произведенных испытаний отличается от вероятности $\frac{3}{4}$ меньше чем на 0,0001, меньше чем на 0,001 и меньше чем на 0,01 соответственно?

6238. Бюффон, производя опыт для проверки закона больших чисел, бросил монету 4040 раз. Герб появился 2048 раз. Вычислить вероятность, с которой можно ожидать, что при повторении опыта Бюффона отклонение частоты появлений герба от вероятности не превзойдет величины уклонения, имевшей место в опыте Бюффона.

6239. Для события, имеющего вероятность появления $p = 0,2$, будет произведена серия независимых испытаний. Указать, какое отклонение частоты появления события от вероятности можно ожидать с вероятностью $P = 0,9128$ при 5000 испытаний.

6240. Производились опыты по выяснению устойчивости различных железных сплавов против коррозии.

Произведенные для определенного сплава опыты обнаружили, что этот сплав не поддается коррозии в среднем в течение 875 дней. Это определение сопровождается стандартным отклонением, равным 85 дням.

Пользуясь интегралом вероятностей, указать, какое количество листов, изготовленных из данного сплава, должно быть подвергнуто испытанию, чтобы с вероятностью 0,90 ожидать величину отклонения от средней не больше, чем на 5%.

6241. Из урны, содержащей черные и белые шары в отношении 1 : 3, производят n извлечений шара. При каждом извлечении регистрируется цвет шара, после чего он возвращается в урну. Каким следует выбрать число n , чтобы ожидать отклонение частоты появления белого шара от его вероятности не больше, чем на 0,001, с вероятностью 0,9966?

6242. Сколько раз следует бросать монету, чтобы с вероятностью 0,6 ожидать, что отклонение частоты появления герба от вероятности 0,5 оказалась меньше 0,01?

6243. Определить уравнение огибающей всех нормальных кривых $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$.

6244. При подсчете числа простых чисел, которые в восьмом, девятом и десятом миллионах приходится на каждую из 2000 групп по 500 последовательных чисел, обнаружили следующие данные: ни в одной группе не оказалось менее 17 простых чисел и более 46. В верхней строке прилагаемой таблицы поставлены все числа x ($17 \leq x \leq 46$), фактически наблюдавшиеся; в дальнейших трех строках в каждом столбце под соответствующим значением x указано число групп $N_1(x)$, $N_2(x)$,

$N_3(x)$, содержащих x простых чисел соответственно в восьмом, девятом и десятом миллионах.

x	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$N_1(x)$	—	1	4	5	6	11	18	48	63	70	102	141	149	165	188
$N_2(x)$	1	—	—	2	7	9	15	40	68	61	106	174	202	168	202
$N_3(x)$	—	1	1	7	9	13	20	46	73	105	130	135	171	177	210

x	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
$N_1(x)$	203	181	160	141	115	78	63	38	16	15	14	4	1	—	—
$N_2(x)$	187	187	135	140	82	82	48	41	20	11	5	1	4	1	1
$N_3(x)$	194	171	143	111	89	72	54	27	20	11	4	4	2	—	—

Вычислить средние числа M_1 , M_2 , M_3 простых чисел на каждую группу и их дисперсии σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 для каждого миллиона. Показать, что если бы в каждом миллионе простые числа были расположены случайно, то дисперсии были бы значительно больше.

6245. Показать, что если бы указанные в предыдущем примере средние значения M_1 , M_2 , M_3 и соответствующие им средние квадратичные отклонения σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 получены были бы в результате механических выборок, то разница между M_1 и M_3 не могла бы быть признана случайной; напротив, разница между M_1 и M_2 могла бы быть и случайной.

6246. Построить по схеме Пуассона совокупности групп из 500 опытов в каждой, где вероятность p_i появления простого числа была бы равна 0 или p в i -м опыте так, чтобы средняя вероятность была равна $P = \frac{1}{16} = 0,0625$ при заданной дисперсии $\sigma^2 = 18\frac{11}{48} = \frac{875}{48}$. Показать, пользуясь элементарными соображениями о делимости чисел, что в натуральной последовательности 500 чисел не может быть более 119 простых чисел.

6247. В двух местностях распределение рабочих по возрасту характеризуется таблицей справа.

Местность	Число рабочих	Число рабочих старше 35 лет
A	35 311	11 721
B	21 812	4 032

Выяснить, представляется ли разность отношения числа рабочих старше 35 лет к общему числу рабочих

в данной местности больше той, которую можно ожидать при случайной выборке.

Указание. Решить задачу, вычисляя уклонение отношения, составленного для отдельных местностей, от отношения, вычисленного на основании всех данных. Одновременно рассмотреть вопрос и иначе, вычислив разность отношений для данных местностей.

6248. Стальная проволока, идущая на изготовление канатов, выдерживает в среднем растягивающее усилие в 6720 кг/см^2 . Стандартное уклонение отдельных образцов от этого среднего имеет величину 220 кг/см^2 . Серия последовательно проведенных наблюдений показала, что в отношении растягивающих усилий, выдерживаемых отдельными образцами проволоки, имеет место нормальный закон распределения.

Из каждой партии проволоки, поступившей на завод, было подвергнуто испытанию 20 экземпляров. Результаты испытаний даются в приведенной ниже таблице.

**Величина растягивающего усилия,
выдерживаемого проволокой на 1 см^2**

1-я партия		2-я партия	
6300	6900	7150	7280
6870	7130	6950	7120
6720	6690	7230	6690
6980	6750	7240	7070
6780	6560	7090	6950
6780	6700	6800	6590
6780	6930	7000	6890
6720	6720	7070	6910
6630	6950	6700	6630
6660	6960	7140	7220

Возможно ли на основании этих испытаний утверждать, что обе партии проволоки требуемого качества и результаты испытаний следует объяснить случайностью выборки?

6249. Пользуясь данными предыдущей задачи, что можно было бы сказать относительно качества проволоки, поступившей на завод, если бы в журнале испытаний не была указана принадлежность образцов к отдельным партиям?

6250. Приемка партий проволоки (см. задачу 6249) происходит при условиях, когда оказывается, что как среднее значение

растягивающего усилия, так и его стандартное уклонение для проволоки, поступающей на завод, раньше не определялись. Можно ли сказать в этом случае, что качество поступивших партий проволоки различно, или результат испытаний следует отнести за счет случайности выборки?

6251. Испытания на растяжение, произведенные для одного и того же сплава, приготовленного на пяти различных заводах, показали следующий результат:

Завод	I	II	III	IV	V
Средняя величина растягивающего усилия	7 328	6 165	7 052	7 997	8 583
Стандартное уклонение	299	609	132	311	251

Растягивающее усилие и его стандартное уклонение выражаются в килограммах на квадратный сантиметр.

Следует ли объяснить различие средних случайным отбором образцов, или же различием качества сплавов, т. е. уклонением в производстве одного из заводов от стандартной марки.

6252. Для того чтобы вал радиуса r мог вращаться в круговом отверстии опоры радиуса R , необходимо, чтобы между валом и отверстием опоры оставалось свободное пространство. Величина разности между R и r должна, однако, оставаться в известных пределах

$$a < R - r < b.$$

При серийном изготовлении валов и опор обе части готовятся отдельно, причем при сборке может оказаться, что части не подходят одна к другой. Полагая, что в налаженном производстве уклонения величин r и R от средних значений r_0 и R_0 следуют нормальному закону распределения, вычислить, какой процент изделий придется отбросить при сборке на конвейере.

6253. Распределение значений величины x имеет стандартное уклонение σ . Отдельное измерение значений x сопровождается средней квадратичной ошибкой σ' . Для измерения x приходится пользоваться образцами, изготовление которых обходится в a руб. за штуку. Стоимость производства

одного измерения — a' руб. Сколько следует изготовить отдельных образцов и сколько измерений произвести над каждым, чтобы среднее значение величины x , установленное в результате этой серии наблюдений, сопровождалось средней квадратичной ошибкой, не превосходящей α , и стоимость производства опыта была бы возможно малой?

6254. Доказать, что если x_k может получать с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, два значения $\pm k^\lambda$, где $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, то к сумме $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ теорема Ляпунова—Маркова применима.

6255. Рассматривается серия из весьма большого числа n опытов, разбивающихся на группы по 3 в каждой так, что в первых двух опытах каждой группы вероятность появления события A равна $\frac{1}{2}$, а исход третьего опыта предопределен результатами предыдущих двух опытов тем, что число появлений A в каждой группе должно быть четным (0 или 2). Показать, что число m появлений события A во всей серии n подчиняется тому же предельному закону Лапласа—Гаусса, как если бы все опыты (как в схеме Бернулли) были независимы.

6256. Величина x_k может получать значения $\pm k^\lambda$ с вероятностями $\frac{1}{2k^\lambda}$, либо значение 0 с вероятностью $1 - \frac{1}{k^\lambda}$, где $0 < \lambda < 1$. Требуется доказать, что к сумме $\sum_{k=1}^n x_k$ независимых величин x_k применима теорема Ляпунова—Маркова.

§ 17.5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6257. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Какова вероятность того, что точка L окажется ближе к точке A , нежели точка M ? Все положения точек L и M на отрезке AB одинаково возможны.

6258. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Какова вероятность, что точка L ближе к точке M , чем к точке A ? Все положения точек L и M одинаково возможны.

6259. На отрезке AB длины l поставлена наудачу точка L . Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до середины отрезка меньше, чем расстояние от этой точки до одного из краев, и какова вероятность того, что расстояние до середины меньше, чем расстояние до определенного края? Все положения точки L на отрезке AB одинаково возможны.

6260. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Вычислить м.о. длины отрезка LM и величину стандартного уклонения при условии, что все положения точек L и M на отрезке AB одинаково возможны.

6261. На отрезке AB длины l поставлены наудачу две точки L и M . Предполагая, что все положения точек L и M одинаково возможны, построить интегральную и дифференциальную кривые распределения длины отрезка LM .

6262. Какова вероятность, что из трех взятых наудачу отрезков можно составить треугольник? Длина каждого из отрезков не превышает a , и все значения ее одинаково возможны.

6263. Прут длины l разламывается на две части, после чего бо́льшая часть опять разламывается надвое. Вычислить вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

6264. Предполагая, что все значения $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$ равновероятны и единственно возможны, определить вероятности того, что корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

а) действительны;

б) оба положительны.

6265. Предполагая, что оба корня уравнения

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q = 0$$

имеют одинаковую вероятность иметь любое значение в промежутках $-1 \leq \alpha \leq 1$; $-1 \leq \beta \leq 1$, определить плотности $f(p)$ и $\varphi(q)$ распределения вероятностей коэффициентов p , q .

6266. Какова вероятность того, что все корни кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0,$$

написанного наудачу, окажутся вещественными? При этом предполагается, что все значения коэффициентов p и q одинаково возможны и не превосходят по абсолютному значению величины M .

Указание. Принять во внимание условие вещественности корней кубического уравнения.

6267. Двое условились встретиться в определенном месте. Относительно времени уговорились, что каждый из них будет на месте встречи между 1 ч. и 2 ч. и ранее пришедший подождет другого в течение четверти часа. Вычислить вероятность того, что встреча произойдет.

6268. Два лица, встречающихся в назначенном месте, имеют одинаковую вероятность прийти в любой момент промежутка времени T . Определить вероятность $P(t_0)$, что одному из двух придется ждать другого, времени $t \leq t_0$, $E t$ и $E t^2$.

6269. Необработанный алмаз разбился на K частей. Предполагая, что ценность неограненного алмаза пропорциональна квадрату его веса, определить, во сколько раз уменьшилась его ценность, вычислив м.о. стоимости осколков. При решении задачи считать все возможные деления объема на K частей одинаково вероятными.

6270. На окружности круга наудачу поставлены две точки A и B . Считая все положения точек на окружности одинаково возможными, вычислить плотность вероятности того, что отношение расстояния между ними к диаметру окружности равно данной величине x . Составить кривую распределения вероятностей.

6271. Материальная точка описывает под действием центральной силы эллиптическую траекторию. В некоторый момент времени производится измерение расстояния движущейся частицы от притягивающего центра. Вычислить

м.о. расстояния движущейся точки от центра. Вероятность всех моментов измерения одинакова. Большая ось орбиты a и эксцентриситет e .

6272. Доказать, что при любом законе вероятностей м.о. квадрата расстояния между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ данной области не больше удвоенного м.о. квадрата расстояния от любой точки области до начала координат, которому оно равно, если $Ex_1 = Ey_1 = 0$.

6273. Две точки x и y находятся на двух противоположных сторонах прямоугольника, стороны которого равны a и b ; полагая распределение вероятностей для каждой точки равномерным, определить вероятность $P(z_1)$, что расстояние между ними $z < z_1$, а также Ez и Ez^2 .

6274. Решить задачу, отличающуюся от предыдущей тем, что точки x и y находятся на смежных сторонах прямоугольника.

6275. Определить м.о. квадрата расстояния между двумя точками, находящимися на любой из четырех сторон прямоугольника, если все положения точек равновозможны. Проверить, что оно зависит только от периметра $2p$.

6276. Вычислить м.о. квадрата расстояния между внутренними точками: а) прямоугольника (a, b — стороны прямоугольника), б) эллипса; определить, каковы должны быть полуоси эллипса $A = \lambda a, B = \lambda b$, чтобы оба м.о. были равны.

6277. На отрезке AB длины l поставлены наудачу k отрезков одинаковой длины a . Какова вероятность того, что точка M , находящаяся на расстоянии b от одного из концов, окажется не покрытой ни одним из отрезков? Все положения каждого из отрезков считаются одинаково возможными.

6278. На отрезке AB длины l поставлены наудачу 2 отрезка одинаковой длины a . Вычислить м.о. длины, перекрытой этими отрезками.

6279. На отрезке (a, b) разбросано наудачу n точек x_i (так что закон вероятностей x_i на (a, b) равномерен).

Требуется определить закон распределения вероятностей $p_m(x_m)$ точки x_m , занимающей m -е место от конца b .

6280. Сохраняя условия предыдущей задачи, вычислить м.о. x_m и ее дисперсию $\sigma^2(x_m)$.

6281. Показать, сохранив условия задачи 6279, что если a и b — данные постоянные величины, а числа m и n бесконечно возрастают так, что $Ex_m = 0$, то вероятность неравенства $\frac{\beta}{\sqrt{n}} < x_m < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi ab}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-z^2/2ab} dz$, где α и β — произвольные конечные числа.

6282. Найти в условиях задачи 6279 уравнение поверхности корреляции между x_k и x_m и показать, что обе линии регрессии прямые.

6283. Найти в условиях задачи 6279 плотность распределения вероятностей $p(z)$ расстояния $z = x_m - x_k$, полагая $k - m = h$.

6284. Найти в условиях задачи 6279 предельный закон вероятностей $n(x_m - x_n)$ при $x \rightarrow \infty$, если $h = k - m$ остается конечным.

6285. Вычислить в условиях задачи 6279 вероятность $u(\delta)$ того, что наименьшее из расстояний $x_i - x_{i+1}$ ($x_0 = a$, $x_{n+1} = b$) больше данной величины $\delta \leq \frac{b-a}{n+1}$. Рассмотреть случай $n \rightarrow \infty$.

6286. Вычислить вероятности $u_1(\delta)$ и $u_2(\delta)$ того, что ровно одно и ровно два из расстояний $x_i - x_{i+1}$ менее δ .

6287. Величина a , которая при $t = 0$ равна нулю, имеет вероятность $p\Delta t$ увеличиться на одну единицу и вероятность $1 - p\Delta t$ остаться неизменной. Требуется определить предел вероятности того, что $a = k$ по истечении времени t , полагая, что $\Delta t \rightarrow 0$.

6288. Событие A происходит m раз в течение периода времени T_0 , причем вероятность его появления в любой момент одна и та же. Определить вероятность, что оно произошло k раз в продолжение данного промежутка T , полагая, что $T_0 \rightarrow \infty$ и $\frac{m}{T_0} \rightarrow p$.

6289. Появление события A при n наблюдениях сопровождалось появлением события B . Определить вероятность P_m того, что при m дальнейших наблюдениях появление события

A будет сопровождаться появлением события B . Все предположения относительно первоначального значения величины вероятности появления события A одинаково возможны.

6290. Призовой стрелок при n выстрелах попал в центральное поле мишени. Каким количеством наблюдений надо располагать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, ожидать попадания в центр при новом выстреле? До поступления сведений о результатах стрельбы все предположения о вероятности стрелку попасть в центр мишени представлялись одинаково возможными.

6291. Появление события A при n наблюдениях сопровождалось появлением события B . Каким количеством наблюдений необходимо располагать, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,999, ожидать появления события B при следующих десяти появлениях события A ? Первоначальные предположения о величине вероятности появления события A одинаково возможны.

6292. Отрезок AB состоит из двух неоднородных частей. Ряд проб, взятых в различных точках этого отрезка наудачу, дал m проб относящихся к одной части, и n проб, относящихся к другой. Какое соотношение между частями представляется наиболее вероятным?

6293. На диске имеются отверстия, размеры и расположение которых трудно измерить. На диск брошено N дробинок, из которых M провалилось в отверстия. Принимая дробинку за точку и допуская, что до опыта все предположения о соотношении между площадью диска и площадями отверстий одинаково возможны, установить наиболее вероятное соотношение между площадями отверстий и площадью диска.

Вычислить характеристические функции $\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$

для непрерывных кривых распределения вероятностей $f(x)$:

6294. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$

6295. $f(x) = 0$ при $|x| > 2$; $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{|x|}{2})$ при $|x| \leq 2$.

Вычислить характеристические функции для распределения вероятностей $\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, соответствующих интегральному закону $F(x)$ распределения вероятностей:

6296. $F(x) = 0$ при $x < a$; $F(x) = p$ при $a \leq x < b$; $F(x) = 1$ при $x > b$.

6297. $F(x) = 0$ при $x < a$, $F(x) = 1 - e^{-2k(x-a)}$ при $x \geq a$.

6298. $F(x) = 0$ при $x < -a$, $F(x) = \frac{x+a}{2a}$ при $-a \leq x < a$, $F(x) = 1$ при $x \geq a$.

6299. Вычислить характеристическую функцию и моменты распределения задачи 6270.

6300. Для данной линии трамвая от пункта O до L известна функция $F(a, b)$, определяющая вероятность того, что пассажир, едущий по этой линии, сел в точке $x < a$ и едет до точки $y \leq b$. Требуется определить:

- а) относительную плотность движения, а именно функцию вероятности $\varphi(z)$ того, что пассажир, едущий по данной линии, проезжает через точку z ;
- б) вероятность $\varphi_1(z)$, что он сел до пункта z ;
- в) вероятность $\varphi_2(z)$, что он сошел не позже z .

6301. Предполагая все функции, введенные в предыдущей задаче, непрерывными и дифференцируемыми, установить зависимости между ними и функцией $p(x, b)$, выражающей плотность вероятности для пассажира, севшего в точке x , сойти в точке $b > x$.

6302. Определить функцию $\varphi(x)$ плотности движения, если дано, что вероятность $\varphi'_1(x)$ сесть в трамвай в точке x пропорциональна $x(L-x)^2$, а вероятность $p(x, y)$ пропорциональна $(y-x)^h$, где $h \geq 0$. Рассмотреть случаи $h = 1$ и $h = 0$.

6303. Определить $p(x, y)$ и $\varphi(z)$, если вероятность маршрута от x к y , представляющая $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, пропорциональна $(y-x)^h$, где $h \geq 0$. Определить при каждом значении h отношение P_h максимальной плотности движения к средней плотности; исследовать изменение P_h в зависимости от h .

6304. Определить $\varphi(z)$, если $p(x, y)$ пропорционально $\sin \frac{\pi y}{L}$, а $\varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{2L}$ (т.е. вероятность посадки $\varphi'(z) = \frac{\pi}{2L} \cos \frac{\pi z}{2L}$).

6305. Определить вероятность $\varphi'_1(z)$ посадки в точке z и плотность движения $\varphi(z)$, если вероятность маршрута (x, y) равна 0 при $y - x < a$ и пропорциональна $x(L - y)$ при $y - x \geq a$ (рассмотреть случай $a = \frac{L}{2}$).

6306. Найти предельный закон распределения вероятностей y_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + \frac{p}{n}\right) + \frac{kx_i}{\sqrt{n}},$$

где x_i — независимые между собой случайные величины, у которых $Ex_i = 0$, $Ex_i^2 = 1$, $Ex_i^3 < c^3$, причем p, k, c — определенные числа (предполагается известной предельная теорема Ляпунова—Маркова).

6307. Найти м.о. x_i^2 и предельный закон вероятностей для $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$ при $n \rightarrow \infty$, если $x_{i+1} = \left(1 - \frac{1}{A}\right)x_i + \alpha_{i+1}$, где α_i — независимые случайные величины, причем $E\alpha_i = 0$, $E\alpha_i^2 = b^2$, полагая, что отношение $\frac{E|\alpha_i|^3}{b^3} < \delta$ ограничено, $A > 1$, $x_0 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = 0$.

6308. Сохраняя условия предыдущей задачи, найти предел коэффициента R_λ корреляции между S_n и S_{n_1} , где $n_1 = \lambda^2 n$; $\lambda^2 < 1$.

6309. Решить две предшествующие задачи при условии, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = a$ отличен от 0. Рассмотреть случай, когда $a \rightarrow \infty$, причем $b^2 = \frac{K}{nA^2}$, где K — конечное число.

6310. Найти предельную плотность $p(y)$ распределения вероятностей для y_n при $n \rightarrow \infty$, если

$$y_{i+1} - y_i = -y_i \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right),$$

полагая, что α_i — независимые случайные величины, которые принимают лишь значения $+1, -1$ с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$.

6311. Найти предельный закон $P(y)$ вероятностей для y_n , если

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + \frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}\right), y_0 = 1,$$

где α_i принимает значения qa и $-pa$ ($a > 0$) с соответственными вероятностями p и q .

6312. Вычислить коэффициент корреляции R_{n+1} между $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ и $\Delta y_{n+1} = y_{n+2} - y_{n+1}$, если величины y_n независимы и $E y_n = a$, полагая $E y_n^2 = \sigma_n^2$; проверить, что $R_i < 0$; показать, что при $n \rightarrow \infty$ $R_n \rightarrow -\frac{1}{2}$, если $\lim \sigma_n = \sigma$ для всех i .

6313. Для совершения некоторого производственного процесса необходимо участие k независимых факторов $A_1, A_2, \dots, A_k$, которые заканчивают свою работу в течение времени $x_1, x_2, \dots, x_k$, так что весь процесс заканчивается по истечении времени X , равного наибольшему из значений $x_i, i = 1, 2, \dots, k$. Требуется определить м.о. суммарной потери времени $\sum_k$ всех факторов, если известны интегральные законы вероятностей $P_i(x_i)$ каждого фактора. Рассмотреть случай, когда $P_i(x) = P(x)$ не зависит от i .

6314. Решить предыдущую задачу в случае, когда $P(x) = 0$ при $x < a$; $P(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2b}(x - a)$ при $a < x < a + b$; $P(x) = 1$ при $x > a + b$.

Таблица значений $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ Таблица 17.1

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,17	0,0675	0,34	0,1331	0,51	0,1950
0,01	0,0040	0,18	0,0714	0,35	0,1368	0,52	0,1985
0,02	0,0080	0,19	0,0753	0,36	0,1406	0,53	0,2019
0,03	0,0120	0,20	0,0793	0,37	0,1443	0,54	0,2054
0,04	0,0160	0,21	0,0832	0,38	0,1480	0,55	0,2088
0,05	0,0199	0,22	0,0871	0,39	0,1517	0,56	0,2123
0,06	0,0239	0,23	0,0910	0,40	0,1554	0,57	0,2157
0,07	0,0279	0,24	0,0948	0,41	0,1591	0,58	0,2190
0,08	0,0319	0,25	0,0987	0,42	0,1628	0,59	0,2224
0,09	0,0359	0,26	0,1026	0,43	0,1664	0,60	0,2257
0,10	0,0398	0,27	0,1064	0,44	0,1700	0,61	0,2291
0,11	0,0438	0,28	0,1103	0,45	0,1736	0,62	0,2324
0,12	0,0478	0,29	0,1141	0,46	0,1772	0,63	0,2357
0,13	0,0517	0,30	0,1179	0,47	0,1808	0,64	0,2389
0,14	0,0557	0,31	0,1217	0,48	0,1844	0,65	0,2422
0,15	0,0596	0,32	0,1255	0,49	0,1879	0,66	0,2454
0,16	0,0636	0,33	0,1293	0,50	0,1915	0,67	0,2486

Таблица 17.1 (Продолжение)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,68	0,2517	1,06	0,3554	1,44	0,4251	1,82	0,4656
0,69	0,2549	1,07	0,3577	1,45	0,4265	1,83	0,4664
0,70	0,2580	1,08	0,3599	1,46	0,4279	1,84	0,4671
0,71	0,2611	1,09	0,3621	1,47	0,4292	1,85	0,4678
0,72	0,2642	1,10	0,3643	1,48	0,4306	1,86	0,4686
0,73	0,2673	1,11	0,3665	1,49	0,4319	1,87	0,4693
0,74	0,2703	1,12	0,3686	1,50	0,4332	1,88	0,4699
0,75	0,2734	1,13	0,3708	1,51	0,4345	1,89	0,4706
0,76	0,2764	1,14	0,3729	1,52	0,4357	1,90	0,4713
0,77	0,2794	1,15	0,3749	1,53	0,4370	1,91	0,4719
0,78	0,2823	1,16	0,3770	1,54	0,4382	1,92	0,4726
0,79	0,2852	1,17	0,3790	1,55	0,4394	1,93	0,4732
0,80	0,2881	1,18	0,3810	1,56	0,4406	1,94	0,4738
0,81	0,2910	1,19	0,3830	1,57	0,4418	1,95	0,4744
0,82	0,2939	1,20	0,3849	1,58	0,4429	1,96	0,4750
0,83	0,2967	1,21	0,3869	1,59	0,4441	1,97	0,4756
0,84	0,2995	1,22	0,3883	1,60	0,4452	1,98	0,4761
0,85	0,3023	1,23	0,3907	1,61	0,4463	1,99	0,4767
0,86	0,3051	1,24	0,3925	1,62	0,4474	2,00	0,4772
0,87	0,3078	1,25	0,3944	1,63	0,4484	2,02	0,4783
0,88	0,3106	1,26	0,3962	1,64	0,4495	2,04	0,4793
0,89	0,3133	1,27	0,3980	1,65	0,4505	2,06	0,4803
0,90	0,3159	1,28	0,3997	1,66	0,4515	2,08	0,4812
0,91	0,3186	1,29	0,4015	1,67	0,4525	2,10	0,4821
0,92	0,3212	1,30	0,4032	1,68	0,4535	2,12	0,4830
0,93	0,3238	1,31	0,4049	1,69	0,4545	2,14	0,4838
0,94	0,3264	1,32	0,4066	1,70	0,4554	2,16	0,4846
0,95	0,3289	1,33	0,4082	1,71	0,4564	2,18	0,4854
0,96	0,3315	1,34	0,4099	1,72	0,4573	2,20	0,4861
0,97	0,3340	1,35	0,4115	1,73	0,4582	2,22	0,4868
0,98	0,3365	1,36	0,4131	1,74	0,4591	2,24	0,4875
0,99	0,3389	1,37	0,4147	1,75	0,4599	2,26	0,4881
1,00	0,3413	1,38	0,4162	1,76	0,4608	2,28	0,4887
1,01	0,3438	1,39	0,4177	1,77	0,4616	2,30	0,4893
1,02	0,3461	1,40	0,4192	1,78	0,4625	2,32	0,4898
1,03	0,3485	1,41	0,4207	1,79	0,4633	2,34	0,4904
1,04	0,3508	1,42	0,4222	1,80	0,4641	2,36	0,4909
1,05	0,3531	1,43	0,4236	1,81	0,4649	2,38	0,4913

Таблица 17.1 (Продолжение)

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
2,40	0,4918	2,62	0,4956	2,84	0,4977	3,60	0,499841
2,42	0,4922	2,64	0,4959	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,44	0,4927	2,66	0,4961	2,88	0,4980	4,00	0,499968
2,46	0,4931	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,50	0,499997
2,48	0,4934	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,50	0,4938	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,52	0,4941	2,74	0,4969	2,96	0,4985		
2,54	0,4945	2,76	0,4971	2,98	0,4986		
2,56	0,4948	2,78	0,4973	3,00	0,49865		
2,58	0,4951	2,80	0,4974	3,20	0,49931		
2,60	0,4953	2,82	0,4976	3,40	0,49966		

ОТВЕТЫ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
НА ПЛОСКОСТИ

1. $\{-5, -3\}$. 2. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$; $AB = 5$. 3. $\cos \theta = 0$. 4. $-\frac{33}{13}$.
5. $-2\sqrt{2}$. 6. $5\sqrt{2}$, $\alpha = -45^\circ$. 7. $(7, 3)$. 8. $(12, -7)$. 9. $A(-1, 0)$, $B(5, 6)$.
10. $(2, -2)$. 11. $(8, 1)$, $(0, -3)$, $(-4, 5)$. 12. $(3, 10)$ и $(-1, 7)$ или $(9, 2)$ и $(5, -1)$. 13. $(6, \pm 2\sqrt{3})$. 14. $(5, 1)$. 19. Координаты одной из вершин: $\xi = x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2n-2} + x_{2n-1}$; $\eta = y_1 - y_2 + y_3 - \dots - y_{2n-2} + y_{2n-1}$.
20. $(0, 0)$, $(10, 0)$. 21. $\frac{1}{2}\sqrt{130}$, $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$. 22. 9,5. 23. 11,5. 24. 12 ± 20 .
25. 49. 26. -35. 27. 29,5. 28. $(5, 4)$. 29. $x\sqrt{2} = -x_1 - y_1$, $y\sqrt{2} = x_1 - y_1$.
30. $(-7, 1)$. 31. $(x-1)\sqrt{2} = x_1 + y_1$, $(y-1)\sqrt{2} = -x_1 + y_1$. 32. $(-\frac{3}{2}, -2)$.
33. $(4n+3) \cdot 45^\circ$. 35. $(2+5\sqrt{3}, 8)$. 36. 7. 37. $6\sqrt{2}$; 225° ; 4; 330° . 39. $y = \pm h$.
40. $x = \pm h$. 41. $y = x$, $x+y-1=0$. 42. $(5, 7)$. 43. M_1 выше, M_2 и M_4 ниже, M_3 — на прямой. 44. $y = x-1$. 45. $x+3y-5=0$. 46. $x-3=0$ — на прямой.
47. $3x-y-4=0$, $3x+2y-1=0$, $3x+5y-34=0$. 48. $2x+3y-1=0$.
49. $x+2y+4=0$. 50. $5x+y-20=0$, $x-5y+22=0$. 51. 135° ; 30° ; 15° . 52. $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$. 53. $(-1, -1)$, $(-2, -2)$, $(8, -7)$.
54. 10. 55. $11y-8x-14 = \pm 5\sqrt{3}(x-1)$. 56. $3x+y-4=0$, $3x+y-8=0$, $x-3y-4=0$, $x-3y-8=0$. 57. $(2, 4)$, $1/2$. 58. $3x+2y-7=0$, $4x+y-6=0$. 59. $x+2y-11=0$, $2x+y-5=0$. 60. $3x-4y+11=0$, $4x+3y-2=0$. 61. $7x-24y-62=0$, $x=2$. 62. $y=3x+20$, $y=3x-10$.
63. $4x-3y+25=0$. 64. $4x+3y+1 \pm 15=0$. 65. $3/\sqrt{52}$. 66. $2x+4y-3=0$.
67. $12x+8y-7=0$. 68. $2x+3y \pm 6=0$. 69. $(0, 3)$, $(2, -1)$. 70. $x-y+1=0$, $3x+2y-7=0$, $2x+3y+7=0$. 71. $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y=7$. 72. $3x+y=25$, $x-3y=15$, $y=2x$. 73. $\operatorname{tg} \omega = \frac{48}{71}$. 74. $2y=3x$, $13x-4y=14$. 75. $9x-y-39=0$, $x-4y+16=0$, $12x-13y-18=0$.
76. $y=x+3$. 77. $3x-2y+3=0$, $2x+3y+2=0$, $x-5y+1=0$.
78. $2x+7y=5$. 79. $31x+48y=0$. 80. $3x+4y=25$. 81. $2x+7y=5$.
82. $x=0$, $y=0$. 83. $x-7y+19=0$, $7x+y-17=0$. 84. $7x+y+4=0$, $x-7y+6=0$. 85. $4x+2y+1=0$. 86. $x=y$. 87. 5. 88. $(\frac{1}{3}, 1)$. 89. $x+4y=4$.
90. $2x+11y-24=0$. 91. $(4\frac{24}{25}, 4\frac{174}{175})$. 92. $y = \pm(x-4)$. 93. $5x-4y+2=0$, $4x-5y+1=0$. 94. $(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5})$. 95. $3x-46y+28=0$, $9x+2y-28=0$, $46x-3y-77=0$. 96. $x=1$, $3x-4y+1=0$, $x-8y+27=0$. 97. $2x-y+4=0$.
100. $x_1\sqrt{5} = -x-2y+1$, $y_1\sqrt{5} = 2x-y+1$. 101. $(x_1+y_1)\sqrt{2}+3=0$, $(x_1-y_1)\sqrt{2}+1=0$. 107. $x^2+y^2=ay$. 108. $r = a \sin \varphi$. 109. $(3, -4)$.
110. Четыре решения. Один из ответов: $x^2+y^2-4x-6y+9=0$. 111. $\frac{1}{2}\sqrt{26}$.
112. $x^2+y^2-10x-5y=0$. 113. $(0, 1)$, $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. 114. $x^2+y^2=25$.

115. $x + 2y = 5$. 116. $-2x + y = 5$, $x + 2y = 5$. 117. $ax = by$. 118. $x + y = 3 \pm 3\sqrt{2}$. 119. $l^2 = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$. 121. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$, $(x - 20)^2 + (y - 20)^2 = 400$. 122. $x^2 + y^2 = 15x$. 123. $(-3, 0)$. 124. $(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$, $x^2 + (y - a)^2 = \frac{1}{2}a^2$. 130. $x^2 + y^2 = ax$. 131. $n = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm m \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$. 132. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 134. $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}$. 135. $(2a - x)y^2 = x^3$. 136. $(x^2 + a^2)y = a^3$. 137. $((x + a)^2 + y^2) \cdot ((x - a)^2 + y^2) = b^4$ или $r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\varphi + a^4 - b^4 = 0$. 138. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ или $r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$. 139. Если данные точки: $(0, 0)$ и $(c, 0)$, то полярное уравнение: $(1 - a^2)r^2 - 2(ab + c \cos \varphi)r + c^2 - b^2 = 0$. 140. $y^2((a + y)^2 + x^2) = h^2(a + y)^2$. 141. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. 142. $x = a(t + \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$. 143. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. 144. $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$. 145. $x = a((n + 1) \cos t - \cos(n + 1)t)$, $y = a((n + 1) \sin t - \sin(n + 1)t)$. 146. $x = a((n - 1) \cos t + \cos(n - 1)t)$, $y = a((n - 1) \sin t - \sin(n - 1)t)$. 151. Отрезок прямой $bx = \pm ay$. 152. Прямая, соединяющая середину высоты с серединой основания. 153. Прямая, соединяющая середины диагоналей. 154. $3x^2 - y^2 + 2ax = a^2$. 155. $x^2 - y^2 + 2xy \operatorname{ctg} \varphi = a^2$. 156. $x + y = 1$. 157. Прямая. 160. Прямая. 161. $x^2 + y^2 = cx$. 164. $4y = x^2$. 165. $y^2 = 2x$. 166. ≈ 1 см. 167. Фокусное расстояние 2,5 см. 169. 16. 171. $x = \frac{2}{3}p$, $x = \frac{8}{5}p$. 172. $y^2 = 16x + 64$. 173. $y^2 = \frac{b^2}{a}(a - x)$, $b = 2a$. 174. $y = 2x$; $(\frac{1}{2}, 1)$. 175. $(-1, -6)$, $(-1, -\frac{11}{2})$, $y = -\frac{13}{2}$. 179. $y = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$, $x^2 + y^2 + x - 9y + 8 = 0$, $\operatorname{tg} \omega = \frac{4}{3}$; 0; $\frac{9}{13}$. 181. $y = x - 1$. 182. $\pm 2x + y + 4 = 0$. 183. $x - 2y + 2 = 0$, $x + 4y + 8 = 0$. 185. $\operatorname{tg} \omega = 2\sqrt{3}$. 186. $p/(2 \sin \alpha)$. 187. Касательная к вершине. 188. $y = 2x + 4$. 189. $x \pm y + 2 = 0$. 191. Директриса. 192. $x^2 + 4y^2 = 36$. 193. $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$. 194. $x^2 + 4y^2 = 65$. 196. $\approx 0,08$. 197. $\approx 5,1 \cdot 10^6$. 198. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x_1 = 4\frac{27}{34}$, $x_2 = -\frac{37}{34}$. 199. 0,5. 200. $\sqrt{2}$. 201. $\sqrt{3}$. 202. $1 : \sqrt{3}$. 203. $2x_1y_1 = a^2$. 204. $\sqrt{5}$, 2. 205. 120° . 206. $1 : \sqrt{2}$. 207. $3x^2 + 4y^2 = 192$. 208. $2x^2 - 2y^2 = a^2 - b^2$. 209. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. 210. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. 211. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 212. $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$, $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$. 213. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. 214. $(8; 2, \pm 1, 35)$. 215. b . 216. $16x^2 + 25y^2 = 400$. 217. $9x^2 - 16y^2 = 144$. 221. $x \pm 2y = 0$. 225. 60° . 226. $a_1 = b_1 = \sqrt[4]{2}$. 227. $a_1 = \sqrt{10/3}$. 228. $e^2 = \frac{5\sqrt{13}-13}{6}$. 229. $y = \frac{\sqrt{3}}{5}x$, $y = -\frac{x}{3\sqrt{3}}$. 230. $y = \pm \frac{x}{\sqrt{17}}$, $y = \mp \frac{8x}{\sqrt{17}}$. 231. $a = \frac{15}{11}$, $b = \frac{12}{11}$. 232. $a_1 = b_1 = 2$. 233. $\sin \varphi = (m - \frac{1}{m}) \frac{\sqrt{e^2-1}}{2-e}$. 234. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{6\sqrt{2}}{5}$. 235. $2a_1 = 17,9$, $2b_1 = 17,1$. 237. $y = -2x \pm 4$; $\frac{8}{\sqrt{5}}$. 238. $y = -1$, $4x - 5y = 13$. 239. $x - 3 = 0$, $10x + 9y + 24 = 0$. 240. $x - 1 = 0$, $5x + 4y + 3 = 0$. 241. $2x - 3y \pm 5 = 0$. 242. $10x + 3y \pm 8 = 0$. 243. $x - y \pm 2 = 0$, $2\sqrt{2}$. 245. $y = \pm 3(x \pm 4)$. 246. $y \pm 6 = \pm \sqrt{3,8x}$. 247. 90° . 254. а), б) — пары пересекающихся прямых; в) двойная прямая; г) параллельные прямые; д) точка; е) мнимость. 255. а) мнимость; б) гипербола; в) парабола. 256. $k = 1$. 257. $k = \frac{1}{2}$. 258. $\lambda = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sigma x \sqrt{3} - 2y = 0$, $x - 2\sigma y \sqrt{3} + 2 = 0$, $\sigma = \pm 1$. 259. $\lambda = 4\sigma$, $\mu = -7\sigma$, $x + \sigma y - 3 = 0$, $2x + 2\sigma y - 1 = 0$, $\sigma = \pm 1$. 260. $x + 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$. 262. $xy = x + y$. 265. $xy - y^2 - x - x - 2y + 3 = 0$. 266. $xy + 2y - x - 2 = 0$. 267. $(x - y)^2 = 2x + 2y + 3$.

268. $x^2 + xy + 6y^2 + 2x + 7y - 17 = 0$. 275. $C(-1, 0)$, $x_1^2 + x_1y_1 - 3 = 0$.
 276. $C(2, 1)$, $x_1^2 + 3x_1y_1 - 2y_1^2 + 8 = 0$. 277. $C(1, -1)$, $x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - 7 = 0$.
 279. $y - x + 2 = 0$, $x + y = 0$. 280. $F_1(1, 1)$, $F_2(-2, -2)$. 281. $e = \sqrt{5/3}$.
 282. $C(3, 1)$, $\alpha = 45^\circ$, $x_1^2 + 3y_1^2 = 18$. 283. $C(-4, 0)$, $\alpha = 45^\circ$, $4x_1^2 - 2y_1^2 +$
 $+ 23 = 0$. 284. $\alpha = 45^\circ$, $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + x_2$, $y_2^2 = x_2\sqrt{2}$. 287. $y_1\sqrt{2} = x + y - 2$,
 $x_1\sqrt{2} = x - y$, $y_1^2 = 2x_1\sqrt{2}$. 288. $5y_1 = 4x + 3y + 5$, $5x_1 = 3x - 4y + 7$,
 $y_1^2 = 14x_1$. 289. $y_1\sqrt{34} = 3x + 5y - 1$, $2x_1\sqrt{34} = -10x + 6y - 7$, $y_1^2 =$
 $= \frac{2}{\sqrt{34}}x_1$. 294. $4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$. 295. $x_1^2 + 9y_1^2 = 9$. 296. $x_1^2 + 4y_1^2 = 16$.
 297. $9x_1^2 + 4y_1^2 = 324$. 298. $9x_1^2 - y_1^2 = 9$. 299. $9x_1^2 - 25y_1^2 = 225$. 300. $9x_1^2 -$
 $- 16y_1^2 = 144$. 301. $x_1^2 - 9y_1^2 = 9$. 302. $y_1^2 = 2x_1$. 303. $x_1^2 - 2y_1^2 = 3$. 304. $(x + y -$
 $- 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0$. 305. $(x - y + 1)(x + y - 4) + 2 = 0$. 306. $(A(x - a) +$
 $+ B(y - b)) \cdot (B(x - a) - A(y - b)) + K = 0$. 307. $(x + y)^2 + 5x - y = 0$.
 308. $(x - y)^2 + x - 1 = 0$. 309. $(x - y)^2 = 8x$. 310. $4x^2 - 7xy + 4y^2 - 7x + 8y =$
 $= 0$. 313. $(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 = 9$. 314. $(x + y - 1)^2 + x + 2y - 1 = 0$.
 315. $(x - y - 1)^2 \pm 4(x + y + 1) = 8$. 316. $(x + y - 1)^2 + 4(x - y + 1)^2 = 8$,
 $4(x + y - 1)^2 + (x - y + 1)^2 = 8$. 317. $3(x + 2y - 4)^2 + 2(x - 3y + 2)^2 = 10$,
 $8(x + 2y - 4)^2 + 3(x - 3y + 2)^2 = 20$. 319. $x + y = 1$, $F(2, 1)$. 320. $F_1(-1, 2)$,
 $F_2(3, 0)$, $y = 2x$, $y = 2x - 2$. 321. $F_1(-2, 4)$, $F_2(0, 0)$, $x - 2y + 14 = 0$,
 $x - 2y - 4 = 0$. 322. $x^2 - 2xy + y^2 + 8x = 0$. 323. $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x +$
 $+ 6y = 0$. 324. $100((x - 2)^2 + (y - 1)^2) = (x - y - 50)^2$. 325. $2xy = 1$.
 326. Фокусы в точках $\left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{2}{4}\right)$. 327. $(5x - 1)^2 + (5y + 3)^2 = 5(x + 2y + 1)^2$,
 $(4x + 1)^2 + (4y + 6)^2 = 5(x + 2y + 1)^2$. 328. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (2 - x -$
 $- y \pm \sqrt{2}(x + y - 1))^2$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (2 - 3x - y \pm \sqrt{2}(x + y - 1))^2$.
 329. $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha^2(x + y + 1)^2$, $6\alpha = -1 \pm \sqrt{7}$. 330. $9((x - 1)^2 +$
 $+ (y - 1)^2) = 25(x - y + 4)^2$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$. 331. $(x - y)^2 = 8(x + y)$.
 332. $2x^2 - 2y^2 + 4y - 1 = 0$. 333. $2(x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 1$. 334. Если ди-
 ректриса ось Oy , данная точка $(a, 0)$, то искомое уравнение: $4x^2 + y^2 = 4ax$.
 335. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. 336. Гипербола. 337. $x = 2y$. 338. $x + y - 2 = 0$,
 $5x + 5y - 6 = 0$. 339. $y \pm 2 = 0$, $x \pm 2 = 0$. 340. $9x + 10y - 28 = 0$. 341. $x +$
 $+ y - 2 = 0$, $7x + 10y - 8 = 0$. 347. Концентрическая окружность радиуса $\frac{2}{R}$.
 348. В теореме Паскаля сторона, обратившаяся в нуль, заменяется касатель-
 ной в вершине пятиугольника. В теореме Бриансона получается пятиугольник,
 когда одна вершина становится точкой касания. 353. $4x^2 - 5y^2 - 12x + 4 = 0$.
 354. $(x + y)^2 + 6x - 26y - 55 = 0$, $(x - y)^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.
 355. $xy - x - y - 1 = 0$.
 356. $ax = a^2 - b^2$.
 357. $x^2 + y^2 = a^2$.
 358. Фокус. 360. Если направление задано прямой $y = mx$, то искомое уравне-
 ние $(x + my)(mx - y) = m(a^2 - b^2)$. 361. $x + y - 1 = 0$. 362. $x^2 + y^2 =$
 $= y$. 363. Две параболы. 364. Парабола. 367. Окружность. 370. Парабола.
 372. $(A - B)xy - Abx + Bay = 0$. 373. Прямая. 376. Если данный круг $x^2 +$
 $+ y^2 = a^2$ и точка $A(c, 0)$, то искомое уравнение $(a^2 - c^2)(x^2 + y^2) + 2a^2cx -$
 $- 2a^4 = 0$. 377. Гипербола. 378. Эллипс.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

384. $|r| = 9$, $\cos \alpha = \frac{1}{9}$, $\cos \beta = -\frac{4}{9}$, $\cos \gamma = \frac{8}{9}$. 385. $a + b + c = 2i - 6j + 9k$; $|a + b + c| = 11$. 386. -3 . 387. $-13i + 18j - 7k$. 391. 45° . 392. 60° . 393. $|\overline{AB}| = 15$, $\angle BAC = 90^\circ$. 394. 45. 395. $-\frac{4}{7}$. 396. $\pm(6i - 9j - 2k)$. 397. -14 . 398. $a \times (b \times c) = -30i + j - 27k$; $(a \times b) \times c = -16i - 20j + 4k$. 399. 3. 400. $h = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|} = \sqrt{\frac{27}{14}}$. 401. $\frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \sqrt{10}$. 404. $m = \frac{1}{3}$. 405. $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3}$, $a = i + j + \frac{1}{3}k$. 407. $15a^* = i - 5j + 8k$, $15b^* = -2i - 5j - k$, $15c^* = 5i + 5j - 5k$, $x_1i + x_2j + x_3k = ma^* + nb^* + pc^*$. 410. $x = (ma + a \times b) : |a|^2$. 411. $x = 3i + 2j$. 415. $12\sqrt{\sqrt{3}} - 1$. 416. Первый орт имеет направление a , третий орт перпендикулярен к a и лежит в плоскости a и b . 417. $e_1 \cos \theta + e'_1 \sin \theta$, где $e'_1 = e_1 \times (e_2 \times e_1) : |e_1 \times (e_2 \times e_1)|$. 418. $\left(\left(6 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)i + (2 + 3\sqrt{5})j + \left(3 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)k\right) : 7\sqrt{2}$. 419. $r_1 = (r \cdot e)e + (e \times r) \sin \omega + (e \times r) \times e \cos \omega$. 420. $\frac{1}{4}((7 + 2\sqrt{6})i + (5 - 2\sqrt{6})j + (4 - \sqrt{6})k)$. 423. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. 424. $-6, -3, 2$. 425. $x + 2y + 2z = 2$. 426. $5x - 3y - 7z = 0$. 427. $x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, $x + y + z = 1$. 428. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$. 429. $\cos(p, xOy) = \frac{1}{3}$. 430. $\sin(p, Ox) = \frac{6}{7}$. 431. $\cos \theta = \frac{16}{21}$. 432. $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 433. $2x - y - 3z = 0$. 434. $2x - y + 1 = 0$. 435. $x - y = 0$. 436. По разные стороны. 437. 6. 438. $z = 1 \pm 20$. 439. $\sqrt{3}$. 440. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. 441. $x + y - 2z + 1 = 0$. 442. $7z_1 = -2$, $5z_2 = -28$. 443. $17x - 14z + 39 = 0$, $35x - 38z - 117 = 0$. 444. $(3, -1, 0)$. 445. $x + 2y = 0$. 446. $x + y - z - 3 = 0$. 447. $x - 2y + z - 3 = 0$. 448. $(1, 2, 3)$. 450. $x + y + 2z - 4 = 0$. 451. $3x_1 = -x + 2y - 2z + 7$, $3y_1 = 2x - y - 2z + 1$, $3z_1 = -2x - 2y - z + 2$. 452. $x + y \pm z = a$. 453. $\lambda = \pm\sqrt{2}$. 454. $\lambda = 3$. 457. $2x - y - 2z + 4 = 0$, $4x - y - 2z + 2 = 0$. 459. $5x - 3y + 5 = 0$, $x - 3z - 2 = 0$, $y - 5z - 5 = 0$. 460. $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{61}}$, $\cos \beta = \frac{6}{\sqrt{61}}$, $\cos \gamma = -\frac{3}{\sqrt{61}}$. 461. 60° . 462. 90° . 463. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{12}{13}}$. 464. $\frac{2(1 + \sin 2\alpha)}{\sqrt{5 \sin^2 2\alpha + 12 \sin 2\alpha + 8}}$. 465. 0° . 466. $x = t + 1$, $y = -t + 2$, $z = 2t + 1$. 467. $x = 1$, $y = 2$. 468. $\frac{6}{13}, \frac{17}{13}, \frac{-1}{13}$. 469. $A'(5, 2, 5)$, $B'(2, 4, 4)$, $|A'B'| = \frac{3}{2}\sqrt{6}$. 470. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-9}$. 471. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$. 472. $x = 2$, $y = 1$. 473. $x + y - 2z + 1 = 0$, $x + 2y - z - 2 = 0$. 474. $x - y + z - 2 = 0$, $x + y + 2z - 5 = 0$. 475. $x + y + 3z - 7 = 0$. 476. $x - z + 1 = 0$. 477. $x - y + z = 0$. 478. $x - 5y + 5z - 2 = 0$. 479. $x - 2y + z - 1 = 0$. 480. $\begin{cases} x + 7y - 5z + 20 = 0, \\ x + 2y + 3z - 2 = 0, \end{cases} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{42}}$. 481. $3x - y = 0$, $x + 3y = 0$. 482. $x - (2 \pm \sqrt{3})y + (1 \pm \sqrt{3})z = 0$. 483. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$. 484. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. 485. $7x - 26y + 18z = 0$. 486. $x + 2y + 1 = 0$. 487. $x + 3y = 0$, $3x - y + 4z - 12 = 0$. 488. $(-7, -5, -11)$. 489. $(1, 0, -2)$. 490. $(-5, 2, 4)$. 491. $3x - y + z - 1 = 0$, $x + 2y - z = 0$. 492. $(-7/3, -2/3, 4/3)$. 493. $\lambda = 1, 25$. 494. $x + y + z + 1 = 0$, $2x - y - z + m = 0$. 495. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$. 496. $y + 1 = 0$, $2x - z + 1 = 0$, $h = \sqrt{5}$. 497. $\operatorname{tg} \varphi = 49/3$. 498. $x_1 = 2lt - x_0$, $y_1 = 2mt - y_0$, $z_1 = 2nt - z_0$, где $t = \frac{lx_0 + my_0 + nz_0}{l^2 + m^2 + n^2}$. 499. $x + y + z = 0$. 500. $y + z - 2 = 0$, $2x + 5y + 4z + 8 = 0$.

501. $\cos(I, II) = 0$, $\cos(I, III) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(II, III) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 502. $5x + 3y - z - 1 = 0$.
 503. $x + 2y + 2z - 1 = 0$. 504. $x - z - 2 = 0$. 507. $d\sqrt{2} = 3$. 510. $d = 1$.
 511. $d\sqrt{2} = 1$. 514. $2 : \sqrt{3}$. 516. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{-8}$, $\frac{x-3}{47} = \frac{y+2}{-20} = \frac{z-1}{11}$.
 517. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{15} = \frac{z-3}{4}$. 518. Тангенсы последовательных углов $\frac{55}{37}$, $\frac{22}{19}$, $\frac{22}{31}$, $\frac{55}{67}$. 519. $x = 0$, $x + y + z = a$. 520. $a(x - 1) + z = 0$, $(a + 1)(y - 1) + z + 1 = 0$. 525. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}$. 526. $x \pm y = 0$. 527. $y + z = 2$. 528. $(x - 1)^2 + y^2 = z^2$. 529. $x^2 + xy + xz = x + y$.
 530. $2x^2 + z^2 - 3xy + 3xz - 3yz - 5x + 3y - 14z + 9 = 0$. 531. $xy + xz - yz = x$. 532. $4x^2 - 10xy + 4xz + 7y^2 - 5yz + 8x - 10y + 2z = 0$. 533. $y = z$.
 534. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 12xy + 4xz - 4yz + 5x + 23y + 9z + 4 = 0$. 535. $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$. 536. $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$. 537. $y = x \operatorname{tg} \alpha z$. 538. $b^2 y^2 + (x(x + y + z) - b(x + y))^2 = a^2 x^2$. 539. $x^2 + y^2 - xz - yz - z - 1 = 0$.
 540. $x^2 + y^2 = xz$. 542. $(2x - y - z)^2 + (x - 2y + z)^2 = (x + y + z - 3)^2$. 543. $y^2 = 6x - 9$. 544. Если лампочка в точке $(5, 0, 0)$, центр абажура в точке $(5, 0, -1)$, стена — плоскость yOz . 1 ед. = 1 дм. Уравнение тени $9z^2 - 4y^2 = 100$; $x = 0$.
 545. $(0, 0, 2)$. 546. $(0, 0, 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$. 547. $(0, 0, 4)$. 548. $x^2 + y^2 = 2(z \pm a)^2$, $3x^2 + 3y^2 - 6z^2 = a^2$. 551. $x = 0$, $y^2 + a^2 = 4az$. 552. $r^2 = r_1^2$, где $r^2(l^2 + m^2 + n^2) = \left| \frac{x-a}{l} \frac{y-b}{m} \right|^2 + \left| \frac{y-b}{m} \frac{z-c}{n} \right|^2 + \left| \frac{z-c}{n} \frac{x-a}{l} \right|^2$, $r_1^2(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) = \left| \frac{x-a_1}{l_1} \frac{y-b_1}{m_1} \right|^2 + \left| \frac{y-b_1}{m_1} \frac{z-c_1}{n_1} \right|^2 + \left| \frac{z-c_1}{n_1} \frac{x-a_1}{l_1} \right|^2$. 553. $(5x - 5y - 3)^2 + (5x - 5z + 5)^2 + (5y - 5y + 8)^2 = 98$. 554. $y^2 - x^2 = 4az$. 555. $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta + cz^2 + Ezx + Fyz + Jz = 0$. 556. $x^2 + y^2 = 2z + 1$. 557. $x = 24t$, $y = -52t$, $z = 5t$ и $x = 2t$, $y = -2t$, $z = t$. 560. $A(x - 2)^2 + B(y - 1)^2 + C(z - 1)^2 + D(x - 2)(y - 1) + E(x - 2)(z - 1) + F(y - 1)(z - 1) = 0$ при выполнении условий $A > 0$, $\left| \frac{2A}{D} \frac{D}{2B} \right| > 0$, $\left| \frac{2A}{E} \frac{D}{2B} \frac{E}{2C} \right| > 0$. 561. $(\lambda(2x - 3y + 2) + \mu(3y - 2z))^2 + (\lambda_1(2x - 3y + 2) + \mu_1(3y - 2z))^2 = 0$, причем $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu \neq 0$. 562. $(x + 2y - z + 1)(x - y + z + 1) = 0$. 563. $x + y + 2z + 5 = 0$, $y - 3x - 1 = \pm 2(x + 1)\sqrt{2}$. 564. $x = 1$, $y = z$ и $y = 1$, $x = z$. 565. $x - y + 2 = 0$, $x + y + z = 0$ и $x + y = 0$, $z = 0$. 566. $\frac{x-x'}{a\sqrt{b^2q-c^2p}} = \frac{y-y'}{bc\sqrt{p}} = \frac{z-z'}{bc\sqrt{q}}$. 567. $4x - 3y - 5z + 4 = 0$. 568. $4x + 2y + 4 + \lambda(y + z) = 0$ при $\lambda < -5$. 569. $C(1, 1, -1)$, $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1 - 2y_1z_1 + 6x_1z_1 = 1$. 570. $2x_1^2 + 6y_1^2 + 2z_1^2 + 8x_1z_1 + 1 = 0$. 571. $4x_1y_1 + 4x_1z_1 = 1$. 572. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y + z = 0$. 573. Образующие конуса $5(x + 2)^2 + 20(y - 1)^2 = 8(5z + 1)^2$. 574. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$. 583. $2x - 3y + 2z - 2 = 0$. 584. $x + y + z = 6$. 585. $x - y - z = 0$. 586. $z = 0$, $P(0, m, n)$. 587. $2x + y - z = 0$. 588. $3x + 1 = 0$, $3z - 2 = 0$. 589. $P(0, 1, 0)$. 590. $x = c$. 591. $z = 1$, $2x = 3y$. 592. $x = 2z - 2$, $y = z - 1$. 593. $y = C$. 597. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm \sqrt{3}$. 598. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm 1$. 599. (a^2t, b^2t, c^2t) , где $t = 1/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 600. $(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \pm \frac{c}{\sqrt{3}})$. 604. (σ, σ, σ) , где $\sigma = \pm 1$. 605. $(\sigma, \sigma, -3\sigma)$, где $\sigma = \pm 1$. 606. $x^2 + y^2 = 1$, $xy = z$. 609. 90° . 610. 90° . 611. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm \frac{z-c\sqrt{3}}{c}$. 624. Куб с ребром $a\sqrt{3}$. 625. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$. 626. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$. 627. $x^2 - 2xy + y^2 - 2(x + y) + 1 = 0$. 629. Его

образующие параллельны вектору $P(\sqrt{a^2 - b^2}, 0, \pm\sqrt{b^2 - c^2})$. **632.** $\frac{\partial\Phi}{\partial x}x_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial t}t_1 = 0$, где после дифференцирования положено $t = 1$.

633. $F(x, y, z) = 0$, $l\frac{\partial F}{\partial x} + m\frac{\partial F}{\partial y} + n\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. **634.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$. **636.** $x - y + z - 1 = 0$. **637.** $l(x+2) + m(y-1) + n(2z+9) = 0$. **638.** $x + y + z = 0$, $lx + my - (l+m)z = 0$. **642.** $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 49$, $O_1(3, -4, -5)$.

643. $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 6$; формулы перехода $\begin{cases} 3(x-1) = 2x_1 + 2y_1 - z_1, \\ 3y = 2x_1 - y_1 + 2z_1, \\ 3(z+1) = -x_1 + 2y_1 + 2z_1. \end{cases}$

644. $2x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 2$; формулы перехода $\begin{cases} 3x = -x_1 + 2y_1 + 2z_1, \\ 3(y+1) = 2x_1 - y_1 + 2z_1, \\ 3(z-1) = 2x_1 + 2y_1 - z_1. \end{cases}$

645. $x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 6$; формулы перехода $\begin{cases} 3(x+1) = -x_1 + 2y_1 + 2z_1, \\ 3(y+1) = 2x_1 - y_1 + 2z_1, \\ 3z = 2x_1 + 2y_1 - z_1. \end{cases}$

646. $x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$; формулы перехода $\begin{cases} 3(x+1) = -2x_1 - 2y_1 + z_1, \\ 3(y+1) = -2x_1 + y_1 - 2z_1, \\ 3(z+1) = x_1 - 2y_1 - 2z_1. \end{cases}$

647. $x_1^2 + 2y_1^2 = 2z_1$; формулы перехода $\begin{cases} 3(x-1) = -2x_1 - 2y_1 + z_1, \\ 3y = -2x_1 + y_1 - 2z_1, \\ 3z = x_1 - 2y_1 - 2z_1. \end{cases}$

648. $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$; формулы перехода $\begin{cases} 3x = -2x_1 - 2y_1 + z_1, \\ 3(y+1) = -2x_1 + y_1 - 2z_1, \\ 3(z+1) = x_1 - 2y_1 - 2z_1. \end{cases}$

649. $x_1^2 + 2y_1^2 = 2$, $x+t+1 = \xi$, $y-2t+1 = \eta$, $z-2t = \zeta$; $3\xi = 2x_1 + 2y_1 + z_1$, $3\eta = 2x_1 - y_1 - 2z_1$, $3\zeta = -x_1 + 2y_1 - 2z_1$.

650. $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$, $x-m = \xi$, $y+2m = \eta$, $z+2m = \zeta$; дальше те же формулы, что в предыдущей задаче.

651. $y_1^2 = 2x_1$; формулы перехода, как в предыдущей задаче.

652. $x_1^2 - y_1^2 = 0$, $\begin{cases} 9(x+7m) = 4x_1 - 4y_1 + 7z_1, \\ 9(y+4m) = x_1 + 8y_1 + 4z_1, \\ 9(z+4m) = -8x_1 - y_1 + 4z_1. \end{cases}$

653. $x_1^2 + y_1^2 = 0$, $\begin{cases} 3(x-2m) = x_1 - 2y_1 - 2z_1, \\ 3(y-2m) = -2x_1 + y_1 - 2z_1, \\ 3(z-m) = 2x_1 + 2y_1 - z_1. \end{cases}$

654. $x_1^2 = 1$; $x-3m+2n = \xi$, $y+2m-6n = \eta$, $z+6m+3n = \zeta$. См. ответ к задаче 655.

655. $x_1^2 = 0$; $\begin{cases} 7\xi = 6x_1 - 3y_1 + 2z_1, \\ 7\eta = 3x_1 + 2y_1 - 6z_1, \\ 7\zeta = 2x_1 + 6y_1 + 3z_1. \end{cases}$ (Для обеих задач 654 и 655.)

656. $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2 = 0$, $x+2 = x_1$, $y-3 = y_1$, $z-2 = z_1$. **657.** $4y_1^2 - 2z_1^2 = x$.

658. $\lambda = \pm 1$, $\mu = \pm\sqrt{2}$. **659.** $ab + bc + ac = 0$. **660.** $y = 0$; $\lambda^2x + \lambda z + (1+\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 = 0$. **661.** $2c = 1 + \sigma\sqrt{5}$; $z = 0$; $2x = (\sigma\sqrt{5} - 1)y$; $\sigma = \pm 1$. **663.** $m < -1$ — эллипсоид; $m = -1$ — эллиптический цилиндр;

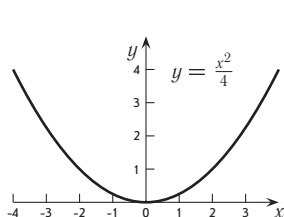
$-1 < m < -\frac{1}{2}$ — однополостный гиперболоид; $m = \frac{1}{2}$ — конус; $\frac{1}{2} < m < 1$ — двуполостный гиперболоид; $m = 1$ — цилиндр; $m > 1$ — эллипсоид.

664. $5(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = (\alpha + 2\beta + 1)^2$. **665.** $xy + xz + yz + a^2 = 0$. **666.** $A(z + a)x + B(z - a)y + C(z^2 - a^2) = 0$. Гиперболический параболоид. **668.** $4(x + y + z)^2 - 3(2x - y - z)^2 + (y - z + 1)^2 = 1$. **669.** $(x + 2y + z)^2 + 4(x - z)^2 = 16$. **670.** $x^2 + 4y^2 + (z - 2)^2 = 5$. **671.** $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$. **672.** $(x + y + z)^2 + 4(x - y) = 9$. **676.** $9(x - y)^2 + (x + 7y - 7z)^2 = 9(x + y + z)$ и $9(x - y)^2 + (x - 5y + 5z)^2 = 9(x + y + z)$. **677.** $x - y + (-2 \pm \sqrt{7})(2x - z) = 0$. **678.** $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$. **679.** $x + 16y - 30z \pm \sqrt{33}(x - 6z) = 0$. **680.** $x - y = 0$, $x + y - 2z = 1$. **681.** $x - 4y - 1 \pm \sqrt{3}(x - 2y) = 0$. **682.** $y + 2z = 0$, $x + y - 2z = 1$. **683.** $2x - y - 4z = 0$. **684.** $lz \pm kx = \text{const}$, $bcl = \sqrt{b^2 - c^2}$, $abk = \sqrt{a^2 - b^2}$. **685.** $y = 0$, $lc^2x = \pm ka^2z$. **686.** $c^2y^2(a^2 - b^2) = b^2(z - h)^2(a^2 + c^2)$. **687.** $x = c$, $x + y - z = c$. **688.** $z + 1 = 0$, $x + 2y = 2$; $z + 1 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$. **689.** $z = \alpha$ и $\lambda x + \mu y + z = \beta$. **690.** $z = \alpha$ и $az + bx + cy + f = z + \beta$. **691.** $\lambda = \mu = 1$. **692.** $x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1 \pm xz\sqrt{3} = 0$. **693.** Гипербола в плоскости xOz . **694.** $y = 0$, $z^2 + 2px = p^2$. **696.** $x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 4by - 2cz + 2z\frac{a^2+b^2}{c} = R^2$. **697.** $x - 2y + z = 0$; $x - (1 \pm \sqrt{3})y = 0$. **698.** $x = 0$. **699.** $2x = q - p$. **700.** $x + 1 = \lambda z$, $\lambda(y + 1) = -x$ и $x + 1 = \lambda x$, $\lambda(y + 1) = -z$. **701.** $x - y - z = \lambda(\sqrt{3} - y + z)$, $\lambda(x - y - z) = 2(\sqrt{3} + y - z)$. **702.** $2y + z = 0$, $x + 8y - 2 = 0$; $2y - z = 0$, $x - 24y - 2 = 0$. **703.** 135° ; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. **704.** $4x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. **705.** $y^2 - z^2 - x = 0$. **706.** $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 + Dz = a^2n^2$. **707.** $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{a^2+b^2}{ab}xz - 2bx - 2az = 0$. **708.** $px = -2a^2$, $y = 0$, $z = 2a$. **709.** $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0$. **710.** $y^2 = 2x - z$. **711.** $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 5x - 3z = 0$. **712.** Парабола. **713.** $2/\sqrt{3}$. **714.** Окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **715.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

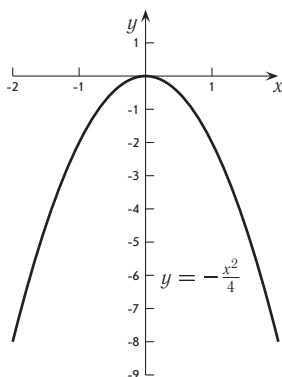
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

717. $\frac{3}{2}$. **718.** -8 . **719.** 6 . **720.** $\frac{2}{3}$. **721.** n . **722.** $\frac{m}{n}$. **723.** -1 . **724.** $\frac{a-b}{2}$. **725.** C_n^k . **726.** $\frac{ps}{qr}$. **727.** $\frac{1}{3}$. **728.** $\frac{5}{3}$. **729.** $\frac{1}{n}$. **730.** 1 . **731.** 0 . **732.** 0 . **733.** -1 . **734.** ± 1 при $x \rightarrow \pm\infty$. **735.** ± 1 при $x \rightarrow \pm\infty$. **736.** $-\frac{1}{2}$. **737.** -1 . **738.** $a^2 + a + \frac{1}{3}$. **739.** $\frac{1}{3}$. **740.** $\frac{1}{2}$. **741.** $\frac{4}{3}$. **742.** $\frac{1}{3}$. **743.** $\frac{1}{2}$. **744.** $\frac{1}{2}$. **745.** $\frac{1}{2}$. **746.** $\frac{15}{2}$. **747.** 1 . **748.** $\frac{1}{2}$. **749.** 2 . **750.** 0 , если $x \rightarrow +\infty$, и $+\infty$, если $x \rightarrow -\infty$. **751.** 0 . **752.** ± 1 . **753.** 0 . **754.** $\frac{1}{2}$. **755.** 0 . **756.** 0 . **757.** $-\frac{1}{4}$. **758.** $\frac{1}{8}\sqrt{2}$. **759.** $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$. **760.** $\frac{2}{3}$. **761.** $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **762.** $\lambda = \sum_{\nu=1}^n \sqrt{a_\nu}$, $\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \frac{b_\nu}{\sqrt{a_\nu}}$. **763.** $\frac{2}{n} \cdot a^{\frac{1}{n}-1}$. **764.** $\frac{313}{280}$. **765.** $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{6}}$. **766.** $2n$. **767.** 1 , если $a > 1$; 0 , если $a < 1$; $\frac{1}{2}$, если $a = 1$. **768.** 0 при $a \neq 1$; $\frac{1}{2}$ при $a = 1$. **769.** 1 , если $a > 1$; -1 , если $a < 1$; 0 , если $a = 1$. **770.** 0 . **771.** 4 . **772.** $\frac{2}{3}$. **773.** 5 . **774.** $\frac{m}{n}$. **775.** $(-1)^{n-m} \cdot \frac{m}{n}$. **776.** 1 . **777.** x . **778.** $\frac{1}{2}$. **779.** $\frac{1}{2}(n^2 - m^2)$. **780.** $\frac{2}{\pi}$. **781.** $\frac{1}{2}$. **782.** $2 \cos a$. **783.** $-\sin a$. **784.** $-2 \cos a$. **785.** 0 . **786.** $-\frac{1}{4}$. **787.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **788.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **789.** $\frac{1}{4}$. **790.** 1 . **791.** $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2m}$. **792.** $-\frac{1}{3}$. **793.** $\frac{3}{2}$. **794.** 4 . **795.** e^2 . **796.** e . **797.** 0 . **798.** e . **799.** e^3 . **800.** $e^{\frac{3}{2}}$. **801.** 1 .

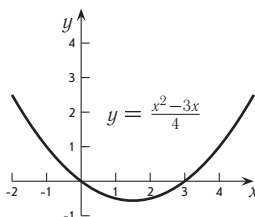
802. $e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 803. $e^{\lambda x}$. 804. $e^{\operatorname{ctg} x}$. 805. $e^{b \operatorname{ctg} a}$. 806. e^{-1} . 807. 1. 808. e . 809. 0.
 810. 0, если $x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$; ∞ , если $x \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0$. 811. 0. 812. e^{-1} . 813. $\frac{1}{10}M =$
 $= 0,043429 \dots$ 814. -1. 815. $-\frac{\pi^2}{2}$. 816. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 817. 2π . 818. 1. 819. 1. 820. $\frac{\alpha}{\beta}$.
 821. $\ln a$. 822. $\ln a$. 823. $(\ln a)^2$. 824. $\ln a - \ln b$. 825. $\alpha - \beta$. 826. 1. 827. $a^e \ln a$.
 828. a , если $a > 1$; 1, если $a < 1$. 829. $\sqrt{ab}$. 830. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_m}$. 831. 1.
 832. a . 845. $\frac{1}{4}$. 846. $\frac{1}{9}$. 849. $\sqrt{e}$. 861. $x_n = \frac{a}{3} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \right) + \frac{2b}{3} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right)$.
 864. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, если $a < b$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \cdot \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\varphi}$, если $a > b$.
 868. $1 - \sqrt{1 - x}$. 870. $y = 2x$, если $0 \leq x \leq 1$; $y = \frac{3x+1}{2}$, если $1 \leq x \leq 3$;
 $y = x+2$, если $3 \leq x \leq 4$. 871. u при $x > 1$ и при $x < -1$; v при $x > 1$; y при
 $-1 \leq x \leq 1$; z при $x < 1$ и при $x > 2$. 872. y при $x \geq 3$ и при $x \leq -3$; z при
 любом x . 873. y при $x > 0$; z при любом x . 874. Да. 875. При $a = 0$. 876. При
 $x = n^2$, где n — целое положительное. 877. При $x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = \infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0$. 878. $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0$. 879. Разрыв u при
 $x = \pm 2$; разрыв v при $x = \pm \sqrt{3}$; разрыв w при $x = 0, 1, -1$. 880. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,
 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi n$. 881. $x = \pi n$, кроме $n = 0$. 882. $x = 0$. 883. $x = 0$. 884. Нет.
 885–946. и 957–965. См. чертежи.



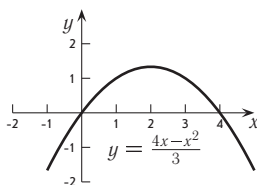
Чертеж к задаче 885



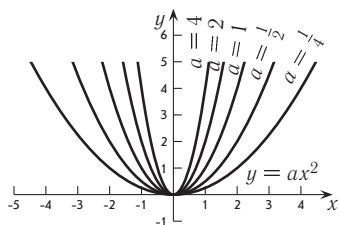
Чертеж к задаче 886



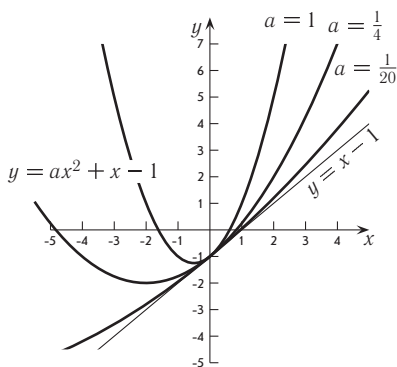
Чертеж к задаче 887



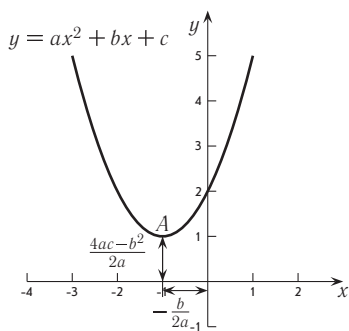
Чертеж к задаче 888



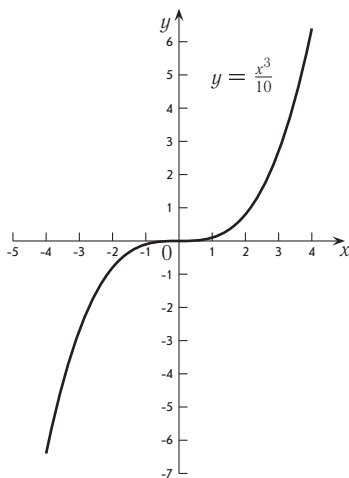
Чертеж к задаче 889



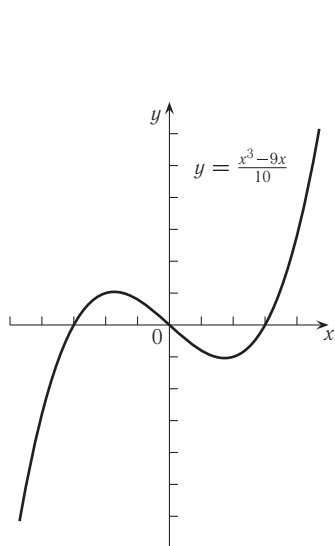
Чертеж к задаче 890



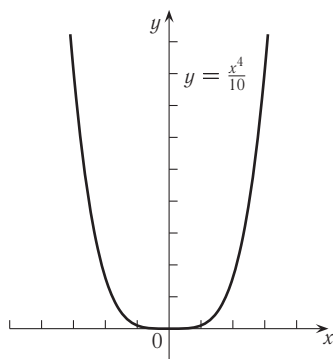
Чертеж к задаче 891



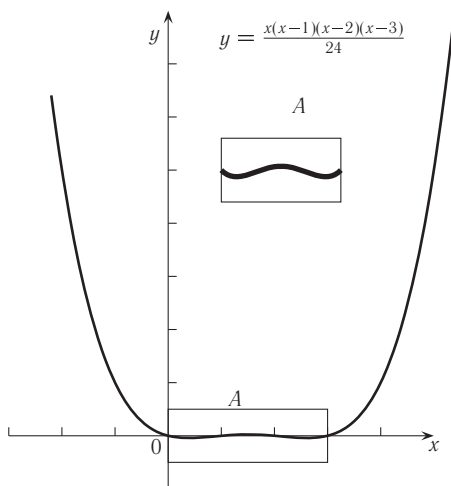
Чертеж к задаче 892



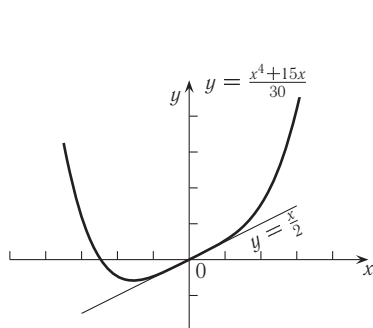
Чертеж к задаче 893



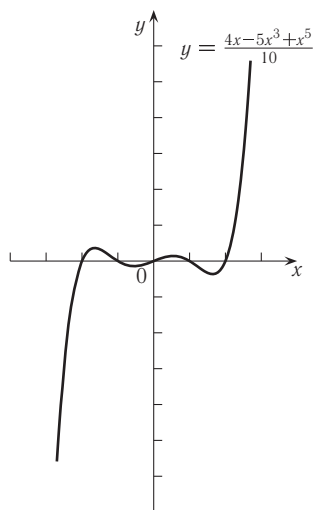
Чертеж к задаче 894



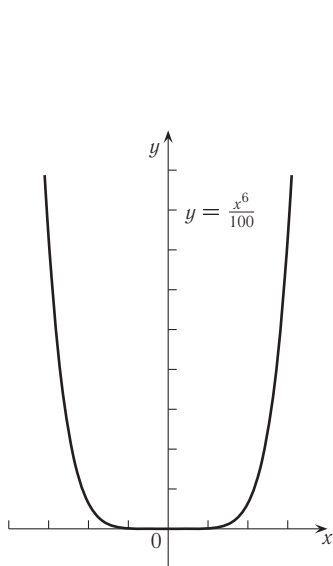
Чертеж к задаче 895



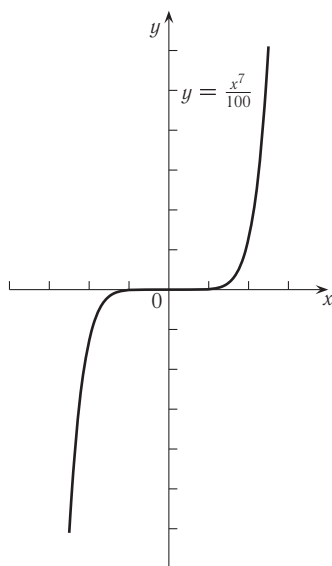
Чертеж к задаче 896



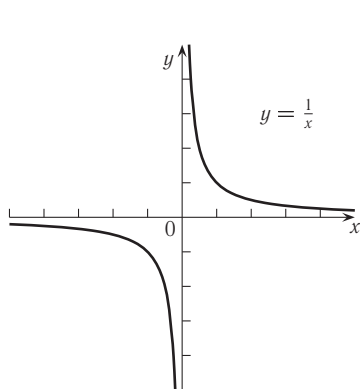
Чертеж к задаче 897



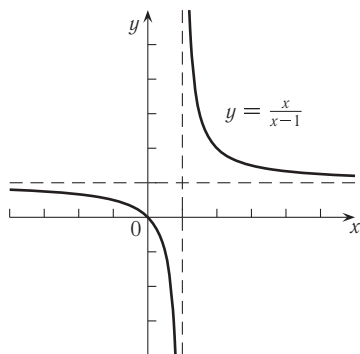
Чертеж к задаче 898



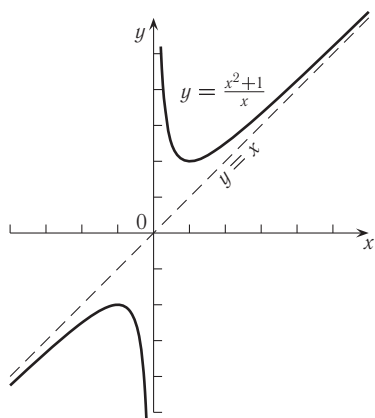
Чертеж к задаче 899



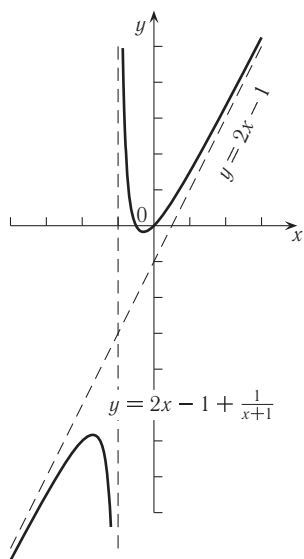
Чертеж к задаче 900



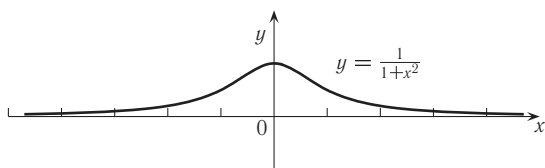
Чертеж к задаче 901



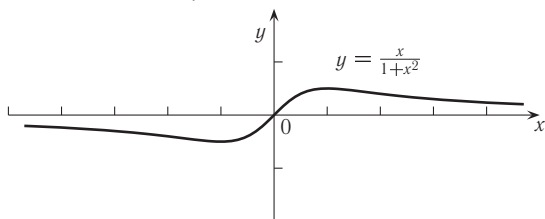
Чертеж к задаче 902



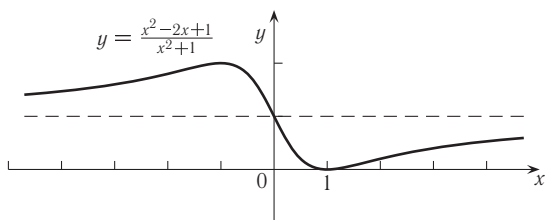
Чертеж к задаче 903



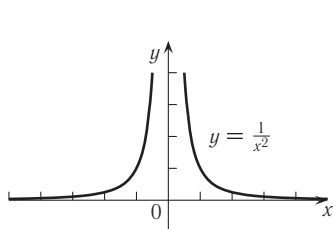
Чертеж к задаче 904



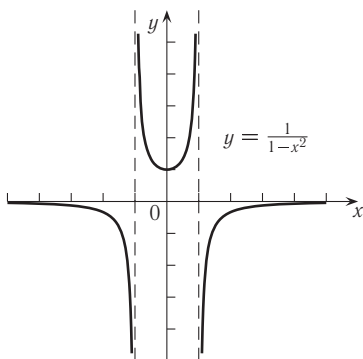
Чертеж к задаче 905



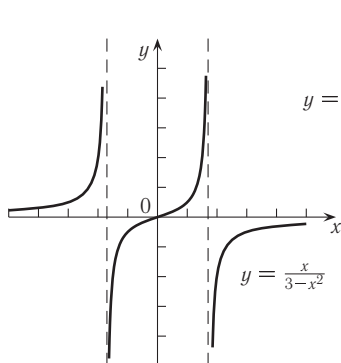
Чертеж к задаче 906



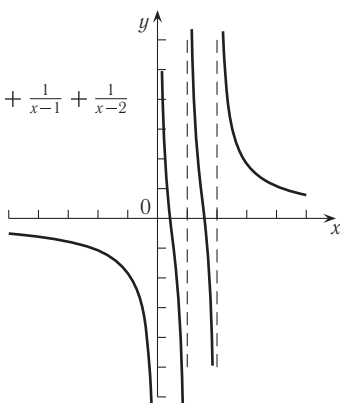
Чертеж к задаче 907



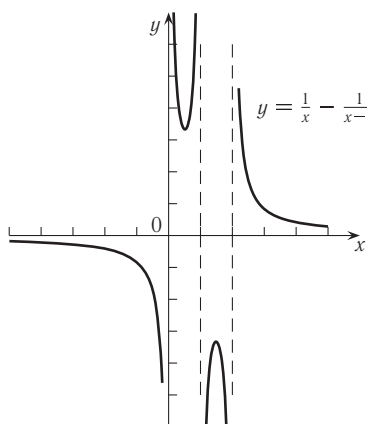
Чертеж к задаче 908



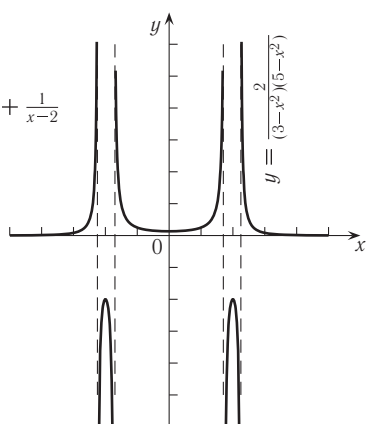
Чертеж к задаче 909



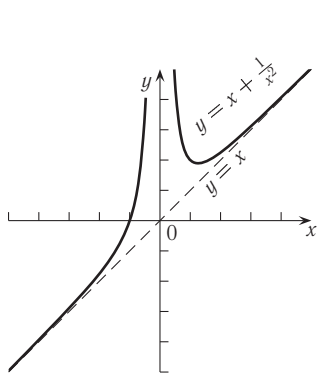
Чертеж к задаче 910



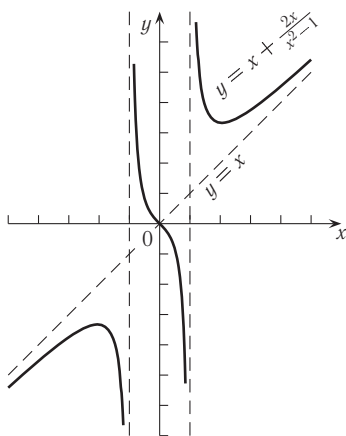
Чертеж к задаче 911



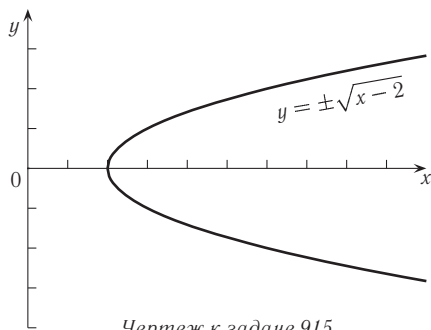
Чертеж к задаче 912



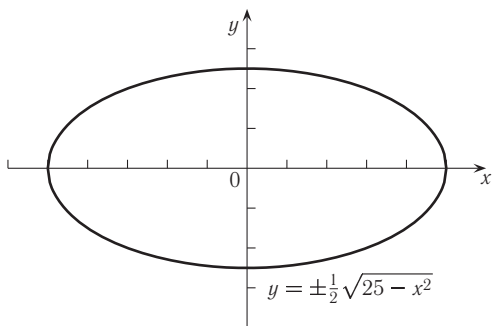
Чертеж к задаче 913



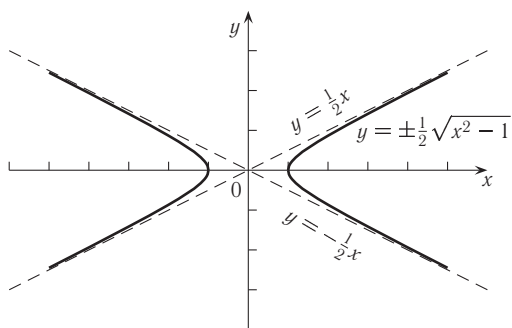
Чертеж к задаче 914



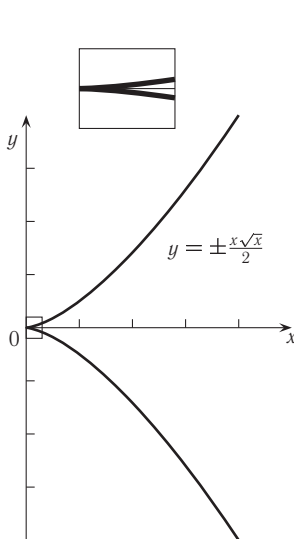
Чертеж к задаче 915



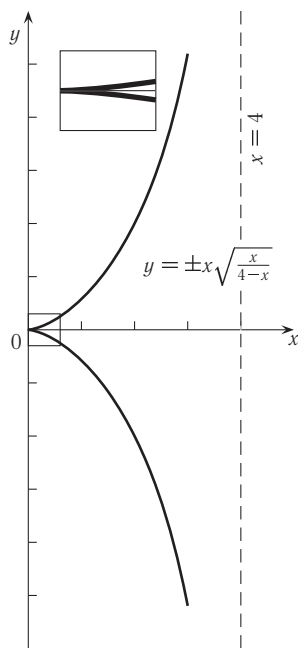
Чертеж к задаче 916



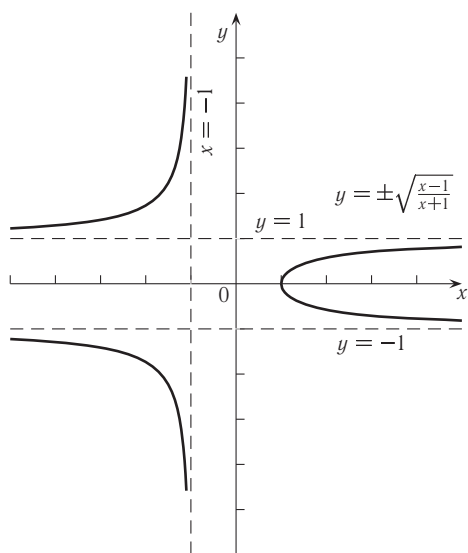
Чертеж к задаче 917



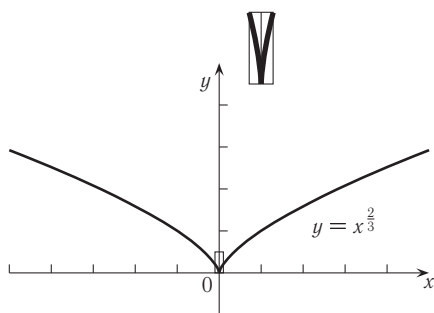
Чертеж к задаче 918



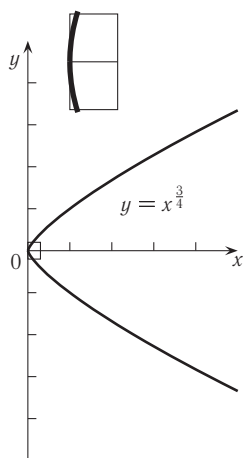
Чертеж к задаче 919



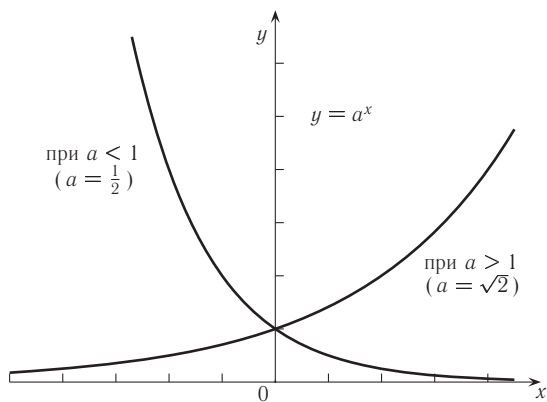
Чертеж к задаче 920



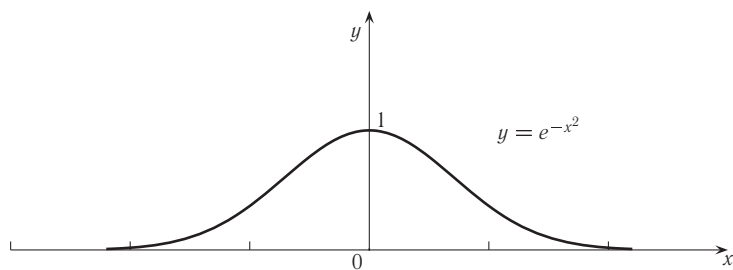
Чертеж к задаче 921



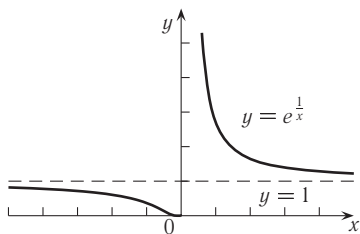
Чертеж к задаче 922



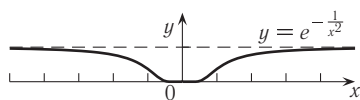
Чертеж к задаче 923



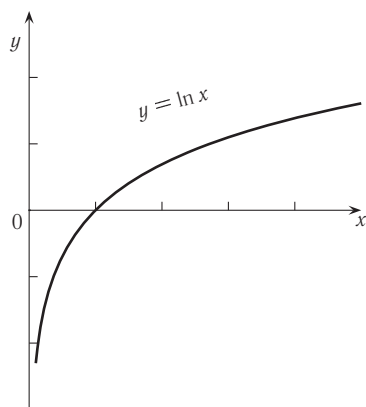
Чертеж к задаче 924



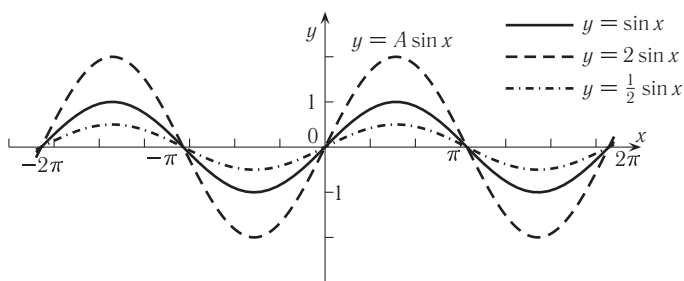
Чертеж к задаче 925



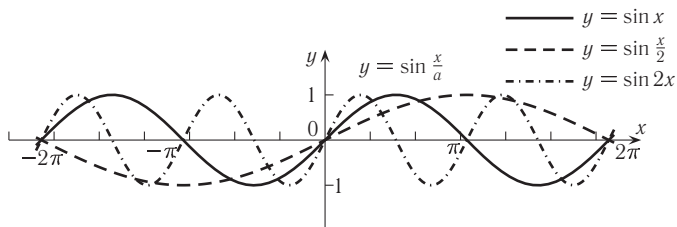
Чертеж к задаче 926



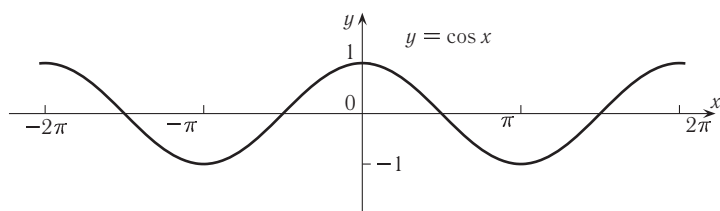
Чертеж к задаче 927



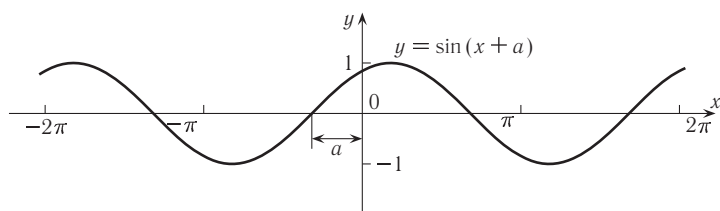
Чертеж к задаче 928



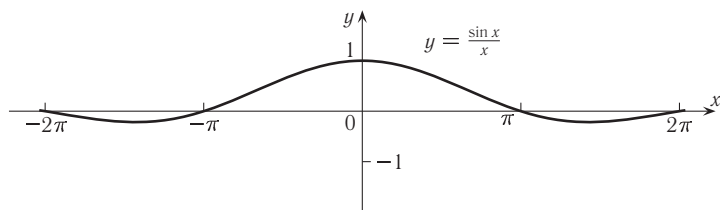
Чертеж к задаче 929



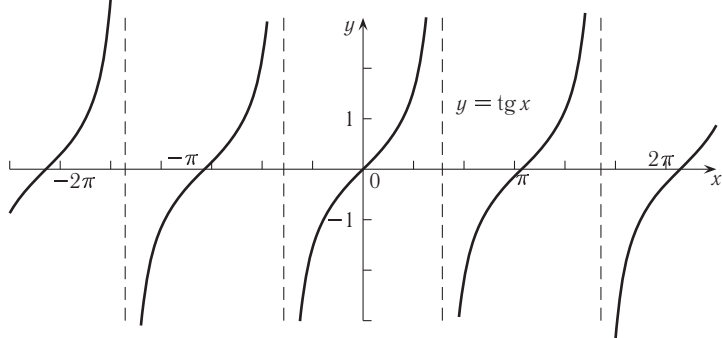
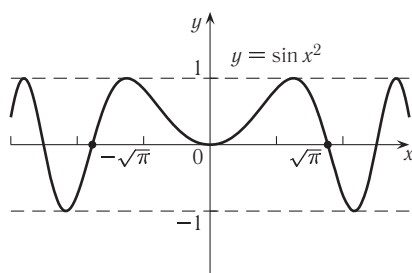
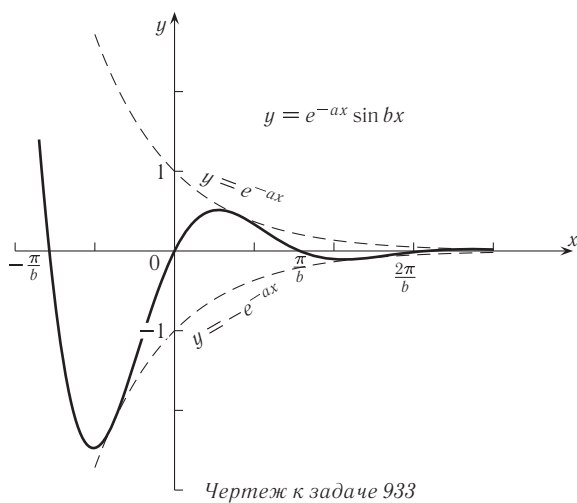
Чертеж к задаче 930

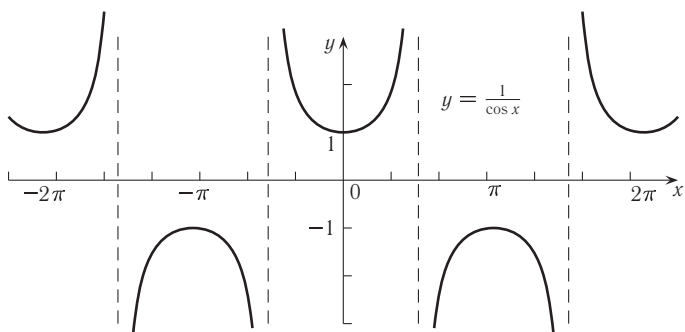


Чертеж к задаче 931

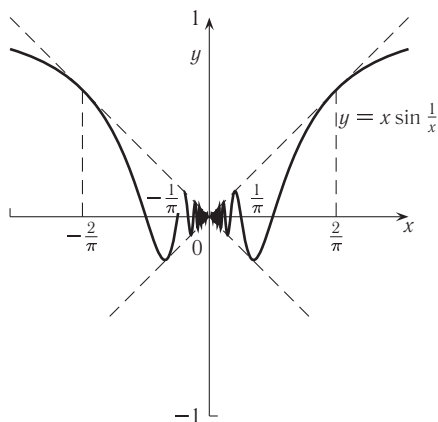


Чертеж к задаче 932

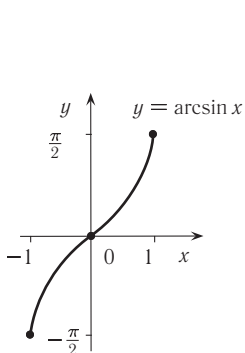




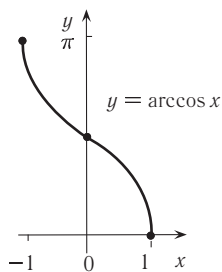
Чертеж к задаче 936



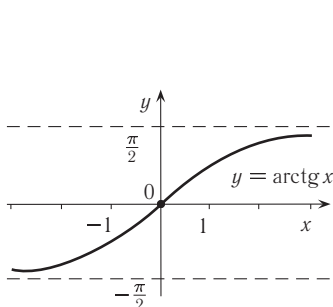
Чертеж к задаче 937



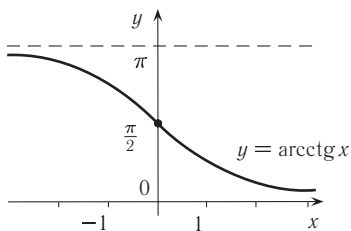
Чертеж к задаче 938



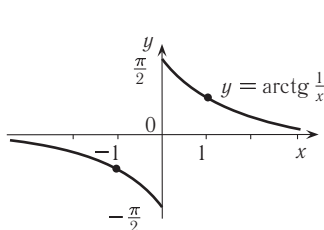
Чертеж к задаче 939



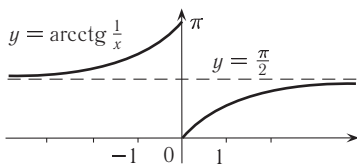
Чертеж к задаче 940



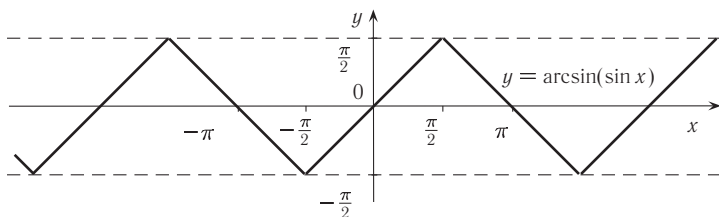
Чертеж к задаче 941



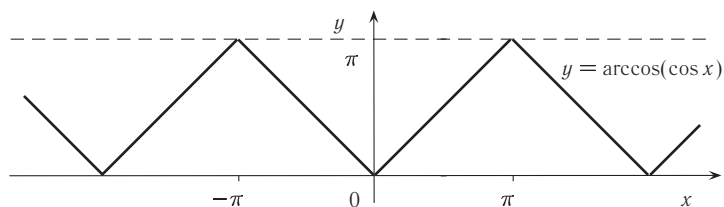
Чертеж к задаче 942



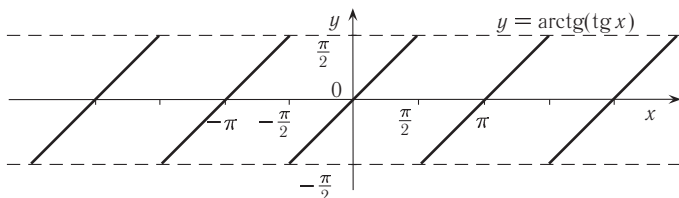
Чертеж к задаче 943



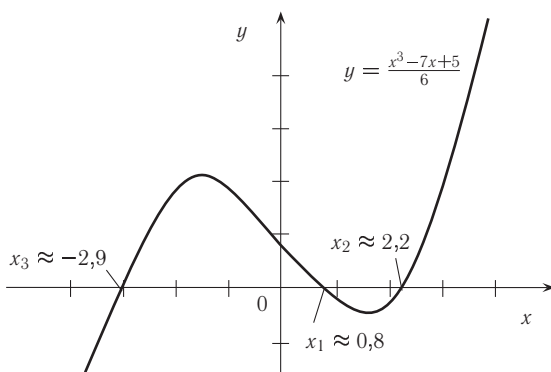
Чертеж к задаче 944



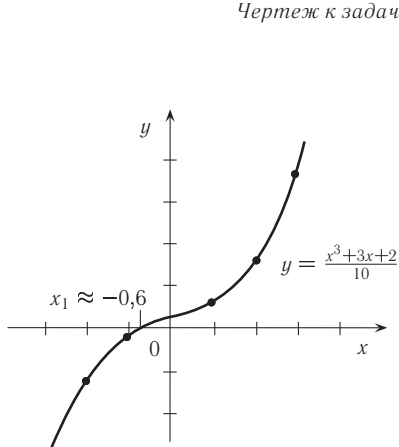
Чертеж к задаче 945



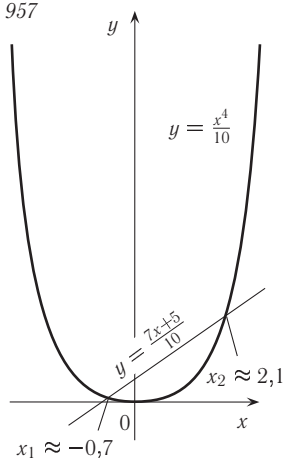
Чертеж к задаче 946



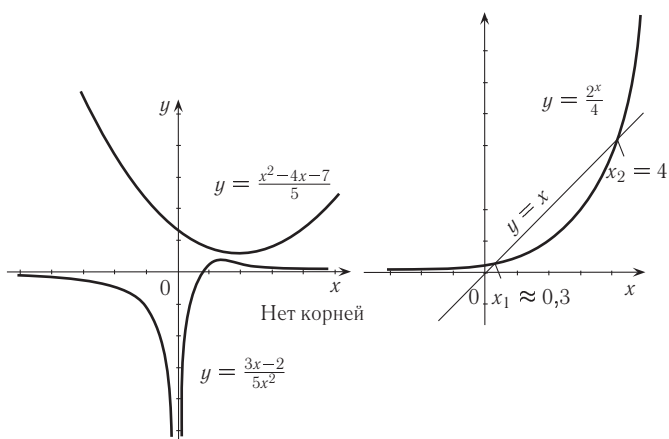
Чертеж к задаче 957



Чертеж к задаче 958

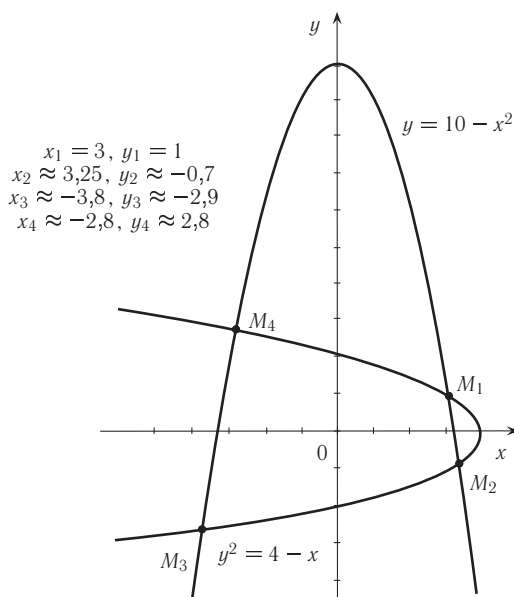


Чертеж к задаче 959

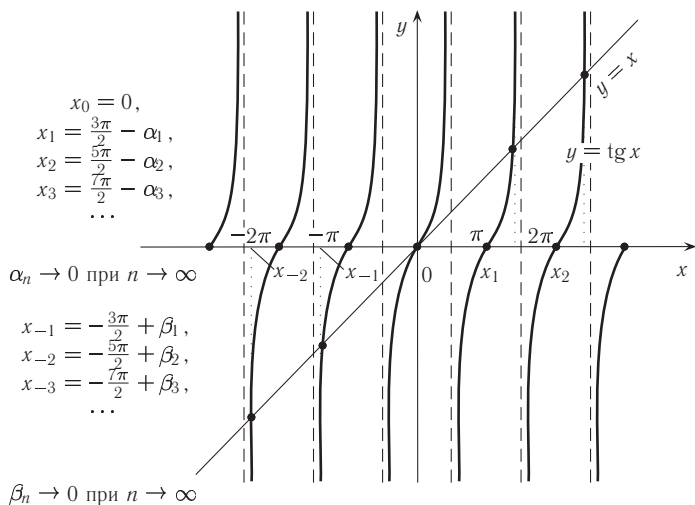


Чертеж к задаче 960

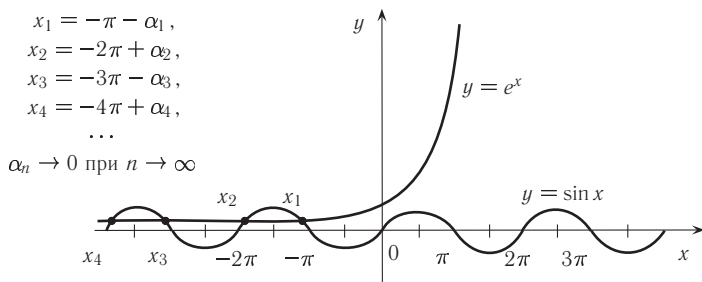
Чертеж к задаче 961



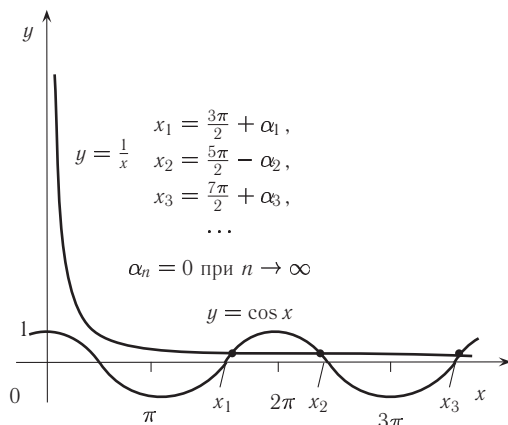
Чертеж к задаче 962



Чертеж к задаче 963



Чертеж к задаче 964



Чертеж к задаче 965

967. Если ω_1 тот корень уравнения $\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\omega - \beta = 0$, что $\left| \frac{\alpha - \gamma\omega_1}{\alpha - \gamma\omega_2} \right| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega_1$. 968. $6x^2 - 10x + 7$. 969. $4x^3 - 6x$. 970. $1 - x + x^2 - x^3$. 971. $7x^6 - 10x^4 - 3x^2$. 972. $\frac{2}{(x+1)^2}$. 973. $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. 974. $-12x^{-5} + 5x^{-6}$. 975. $\frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$. 976. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 977. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 978. $\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$. 979. $x^2 e^x$. 980. $x \cos x + \sin x$. 981. $x^2 \cos x$. 982. $\ln x$. 983. $x^2 \ln x$. 984. $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}$. 985. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. 986. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 987. $-\frac{1}{x \ln^2 x}$. 988. $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 989. $2e^x \sin x$. 990. $na(ax+b)^{n-1}$. 991. $3\sin^2 x \cos x$. 992. $10x(x^2-1)^4$. 993. $-5\cos^4 x \sin x$. 994. $\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$. 995. $5\cos 5x$. 996. $-\frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$. 997. $-e^{-x}$. 998. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 999. $\operatorname{ctg} x$. 1000. $-\frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}}$. 1001. $\frac{2}{\sin 2x}$. 1002. $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. 1003. $-2xe^{-x^2}$. 1004. $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}$. 1005. $\frac{3x+2}{x^2+x}$. 1006. $\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$. 1007. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 1008. $b \cos ax \cos bx - a \sin ax \sin bx$. 1009. $-\frac{1}{1-x^2}$. 1010. $e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)$. 1011. $-\frac{1}{\cos x}$. 1012. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 1013. $\frac{1}{\cos x}$. 1014. $x^3 \ln^2 x$. 1015. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$. 1016. $\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$. 1017. $-\frac{3\pi}{1-\sin^4 \pi x}$. 1018. $\frac{1}{3}e^{3\sqrt{x}}$. 1019. $2x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. 1020. $\frac{4\cos(2\ln x)}{x^3}$. 1021. $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$. 1022. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. 1023. $\frac{2x}{x^4-5x^2+6}$. 1024. $\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x+a)^2}$. 1025. $\frac{2x^3}{1-x^4}$. 1026. $\frac{1}{\cos^8 x}$. 1027. $\frac{1}{\sin^3 x}$. 1028. $\operatorname{tg}^3 x$. 1029. $\frac{1}{\cos^3 x}$. 1030. $\frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}$. 1031. $\sqrt{\frac{a}{a+be^x}}$. 1032. $\frac{2e^x}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$. 1033. $\frac{xe^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. 1034. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. 1035. $\frac{n\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos nx}$. 1036. $\frac{\ln x}{2\sqrt{1-x}}$. 1037. $\frac{2ax \ln x}{(a+bx^2)^2}$. 1038. $\frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}{2\sqrt{x}}$. 1039. $\frac{1}{a^2+x^2}$. 1040. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 1041. $-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. 1042. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 1043. $\operatorname{sign}(\cos x); \cos x \neq 0$; где $\operatorname{sign} a = \begin{cases} +1, & \text{когда } a > 0; \\ -1, & \text{когда } a < 0. \end{cases}$ 1044. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. 1045. $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. 1046. $\frac{2}{|x|\sqrt{x^2+4x-4}}$.

1047. $-\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \neq \pm 1$. 1048. $-\frac{1}{1+x^2}$. 1049. $\frac{1}{x^2+x+1}$. 1050. $\frac{3\sigma}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sigma = \text{sign}(4x^2-1)$; $x^2 \neq \frac{1}{4}$. 1051. $\frac{2\sigma}{1+x^2}$; $\sigma = \text{sign}(1-x^2)$; $x^2 \neq 1$. 1052. $-\frac{2\sigma}{1+x^2}$; $\sigma = \text{sign} x$; $x \neq 0$. 1053. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 1054. $\frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$. 1055. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 1056. $\frac{1}{1+x^4}$. 1057. $\frac{1}{a+b\cos x}$. 1058. $\frac{1}{5+4\sin x}$. 1059. $\frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 1060. $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$. 1061. $\frac{\ln(x^2-x+1)}{x^2}$. 1062. $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$. 1063. $\frac{1}{x^3\sqrt{x-1}}$. 1064. $\frac{3\arctg x}{x^4}$. 1065. $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$. 1066. $\sqrt{2\text{ctg} x}$. 1067. $2\sqrt{2\text{ctg} x}$. 1068. $\sqrt{2+\text{tg}^2 x}$. 1069. $\arctg(1+\sqrt{x})$. 1070. $\arctg \sqrt{x}$. 1071. $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$. 1072. $2x(\arctg x)^2$. 1073. $\frac{4}{\sqrt{1+x^4}}$. 1074. $x^x(1+\ln x)$. 1075. $x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right)$. 1076. $\text{sign} x$; $x \neq 0$. 1077. $2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$; $y' = 0$ при $x = 0$. 1078. $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}$. 1079. $\frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$. 1080. $\frac{(2n-1)\sin(2n+1)x - (2n+1)\sin(2n-1)x}{-4\sin^2 x}$. 1085. $45^\circ, 0^\circ, -45^\circ$. 1086. -45° . 1087. 45° . 1088. 45° при $x = 2n\pi$; -45° при $x = (2n+1)\pi$. 1089. $A = a$. 1090. $a = e^{\pm 1}$. 1091. $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. 1092. $a = 4$. 1099. $y = x + 1$. 1100. $y = x - 2$. 1103. $b^2 - 4ac = 0$. 1104. $4p^3 + 27q^2 = 0$. 1105. $a = e^{\frac{1}{e}}$, $x = e$. 1107. $\text{tg} \alpha = -\frac{b}{a} \text{ctg} t$. 1108. 45° . 1109. $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. 1111. $y = 2x - 3$. 1112. $(4, 3)$ и $(3, 7)$. 1113. $\text{tg} \alpha = 17 \pm 12\sqrt{2}$. 1118. При $x > 0$ выпуклостью вниз, при $x < 0$ — вверх. 1119. $\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. 1120. $\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$. 1121. 120. 1122. 0. 1123. 12 960. 1124. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$. 1125. $x^2(60 \ln x + 47)$. 1126. $27a^{3x} \ln^3 a$. 1127. $am(m+1)(m+2)(m+3)x^{-m-4}$. 1128. $-6(x-1)^{-4}$. 1129. $16e^{2x}(x^2 + 4x + 3)$. 1130. $27(3x^2 \cos 3x + 8x \sin 3x - 4 \cos 3x)$. 1131. $2^{49} \cdot e^{2x}(2x^2 + 100x + 1225)$. 1132. $x^2 \sin x - 80x \cos x - 1560 \sin x$. 1133. $-4e^x \sin x$. 1134. $\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. 1135. $-\frac{6x}{(x^2+1)^{5/2}}$. 1140. $2(n!)(1-x)^{-n-1}$. 1141. $(-1)^{n-1}n!ab^{n-1}(a+bx)^{-n-1}$. 1142. $(-1)^{n-1}n!(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot \gamma^{n-1}(\gamma x + \delta)^{-n-1}$. 1143. $(-1)^n n!((x^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}))$. 1144. $(-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-n+\frac{1}{2}}$. 1145. $2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$. 1146. $m^{n-3}e^{mx}(m^3x^3 + 3nm^2x^2 + 3n(n-1)mx + n(n-1)(n-2))$. 1147. $a^n x^2 \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) - 2na^{n-1}x \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) - n(n-1)a^{n-2}x \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$. 1148. $(-1)^n 6(n-4)!x^{3-n}$, если $n \geq 4$. 1149. $(-1)^{n-1}a^n(n-1)!(ax+b)^{-n}$. 1150. $(n-1)!((1-x)^{-n} - (-1)^n(1+x)^{-n})$. 1151. $\frac{3}{4}a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(3a)^n \sin\left(3ax + n\frac{\pi}{2}\right)$. 1152. $(-1)^n n!(1+x)^{-n-1} \left(\ln(1+x) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}\right)$. 1171. $\frac{(\alpha^2 + \beta^2)\beta e^{-\alpha t}}{(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t)^3}$. 1172. $\frac{\sin t(1+3\sin^2 t)}{a^2 \cos^7 t}$.

1173. $\frac{5 \cos^2 t - 4}{9a^2 \sin^3 t \cos^2 t}$.
 1174. $-\frac{a \sin^3 t}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}}$.
 1175. $-\frac{n+1}{a} \cdot \frac{\cos n\varphi}{\sin^3(n+1)\varphi \cdot \sqrt{\cos n\varphi}}$.
 1176. $\frac{3}{16a^2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{3t}{2}}{2} \right)^3 \left(\cos \frac{t}{2} \right)^5$.
 1177. $-\frac{b}{a^2} \cdot \frac{(1+2 \cos t)^3}{\sin^3 t}$.
 1178. $-\frac{3}{25a^2} \cdot \frac{8-7 \cos^2 t}{\sin t \cdot \cos^{13} t}$.
 1179. $\frac{(4a \cos \frac{t}{2} + b) \cos^3 \frac{t}{2}}{1}$.
 1180. $\frac{n+1}{4n+2} \cdot \frac{1}{\sin nt \cos^3(n+1)t}$.
 1181. $-\frac{3b}{a^4} \cdot \frac{5-4 \sin^2 t}{\sin^7 t}$.
 1182. $\frac{3b}{a^3} \cdot \frac{(5 \cos^2 t - 1) \sin t}{(3 \cos^2 t - 1)^3 \cos^5 t}$.
 1183. $\frac{1}{16a^3} \cdot \frac{7-6 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin^{10} \frac{t}{2}}$.
 1184. $\frac{1}{(at+b) \cos^3 t}$.
 1185. $\frac{3t \sin t - 2 \cos t}{a^2 t^3 \cos^5 t}$.
 1186. $\frac{3 \sin t - \cos t}{2a^2 e^{2t} \cos^5 t}$.
 1187. $\frac{ae^t \cos t}{(\sin t - \cos t) \sin t}$.
 1188. $\frac{3t \sin t - 2 \cos t}{t^5 \cos^5 t}$.
 1189. $-\frac{3 \cos^3 t}{4a \sin^4 t}$.
 1190. $-\frac{3b}{8a^3} \sin t \cos^3 t$.
 1191. $-\frac{12t(1+t^4)^4}{(1-t^2)^3(1+4t^2+t^4)^3}$.
 1192. $\frac{b}{8a^2} \cdot \frac{(6t^2-1)(t^2+1)^3}{t^3}$.
 1206. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.
 1207. $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 - 6xy^2, \frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2y + 9y^2$.
 1208. $\frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \frac{\partial u}{\partial z} = x + y$.
 1209. $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$.
 1210. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1, \frac{\partial u}{\partial y} = z^2 + 3x, \frac{\partial u}{\partial z} = 2yz + 1$.
 1211. $\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$.
 1212. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.
 1213. $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{3}{x^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{5}{y^2}$.
 1214. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + z, \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y + z, \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + 2z$.
 1215. $\frac{\partial u}{\partial x} = zy^z x^{z-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zx^z y^{z-1}, \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln(xy)$.
 1216. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy} \ln z, \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy} \ln z, \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$.
 1217. $2 \cos(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)$.
 1218. $\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$.
 1219. $\frac{y dx - x dy}{y^2} \cdot \frac{2}{\sin \frac{2x}{y}}$.
 1220. $\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
 1221. $\frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.
 1222. $x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right)$.
 1229. $2 + 14\sqrt{3}$. 1230. -18 . 1231. $-\frac{4}{5}, +\frac{4}{5}$.
 1232. $\pm \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}}, \pm \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}}$. 1233. 62. 1234. $2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$.
 1235. $\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. 1236. $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}, 0, \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$. 1237. $(2-y) \times \cos(x+y) - x \sin(x+y); (1-y) \cos(x+y) - (1+x) \sin(x+y); -(2+x) \times \sin(x+y) - y \cos(x+y)$. 1238. $x^{y-1}(1 + y \ln x)$. 1239. $\frac{2}{(x+y)^3}$.
 1240. $12 \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}$. 1241. $\frac{y^2 + z^2}{u^3}, \frac{x^2 + z^2}{u^3}, \frac{x^2 + y^2}{u^3}$. 1242. $(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)u$.
 1243. $2dx^2 - 2xdx dy + 4dy^2$. 1244. $2(ydx + xdy)^2 + 4xy dx dy$. 1245. $((ydx + xdy)^2 + 2dx dy) \cdot u$. 1246. $((ydx - xdy)^2 - (xdx + ydy)^2)(x^2 + y^2)^{-2}$.
 1247. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. 1248. $24(dx^4 + 4dx^3 dy + 2dx dy^2 dz + 3dx dy dz^2 + dz^4)$. 1249. $24(dx^4 - 3dx^2 dy^2 + dy^4)$. 1250. $24(dx^4 + 3dx^3 dy + dz^4)$. 1251. $6dx dy dz$. 1252. $-\frac{6(2dx+3dy-dz)^4}{(2x+3y-z)^4}$. 1253. $d^3u = -\cos(2x+y)(2dx+dy)^3; \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -8 \cos(2x+y); \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -2 \cos(x+y)$.

1254. $d^4u = \cos(x+y)(dx+dy)^4$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \cos(x+y)$. 1255. $d^4u = \frac{-6(ax+by+cz)^4}{(ax+by+cz)^4}$. 1256. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 6u$. 1257. $du = \varphi'(t)(x dy + y dx)$, $d^2u = \varphi''(t)(x dy + y dx)^2 + 2\varphi'(t)dx dy$. 1258. $du = \varphi'(t)(2x dx + 2y dy)$, $d^2u = 4\varphi''(t)(x dx + y dy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$. 1259. $du = \varphi'(t)(x dx + y dy + z dz)$, $d^2u = 4\varphi''(t)(x dx + y dy + z dz)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. 1260. $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(a dx + b dy + c dz)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(a dx + b dy + c dz)(a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)^2$.

1261. $d^2u = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} dx^2 + b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} dy^2 + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} dz^2 + 2ab \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} dx dy + 2ac \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \zeta} dx dz + 2bc \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \zeta} dy dz$.

1262. $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial \xi}(dx+dy) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(dx-dy)$,
 $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 =$
 $= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (dx+dy)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (dx+dy)(dx-dy) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (dx-dy)^2$.

1263. $d^2u = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d\eta^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d^2\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d^2\eta$.
 Здесь $d\xi = 2x dx + 2y dy$, $d\eta = x dy + y dx$; $d^2\xi = 2dx^2 + 2dy^2$, $d^2\eta = 2dx dy$. Поэтому, например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \cdot 4xy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} (2x^2 + 2y^2) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} xy + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot 1$.

1264. $\frac{\partial^n u}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu} = a^\lambda b^\mu c^\nu \varphi^{(n)}(t)$, $\lambda + \mu + \nu = n$. 1265. $a^n \frac{\partial^n \varphi}{\partial \xi^n}$. 1267. ρ .

1268. $\rho^2 \sin \varphi$. 1269. $\frac{r}{a\rho \sin \varphi}$. 1270. $\xi \eta^2$. 1277. 0. 1278. $r^2 j''(r)$. 1279. 0.

1301. $y' = -1$. 1302. $x = 0$, $x = a\sqrt[3]{2}$. 1303. $y' = \frac{y - \ln y}{x - \ln x}$. 1304. $y' =$

$= \frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}$. 1305. $y' = \frac{1}{1 - \alpha \cos y}$, $y'' = -\frac{\alpha \sin y}{(1 - \alpha \cos y)^3}$. 1306. $y''' = \frac{1}{3}$.

1307. $\frac{4(x+y)}{(1+x+y)^3}$. 1308. $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 1309. $(y-b)y^{IV} + 4y'y''' + 3y''^2 = 0$. 1310. $y =$

$= \pm 1$. 1311. $\pm \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$; $|b| \geq a > 0$. 1312. $y' = 0$, $y' = \infty$. 1313. $y' = 1$,

$z'' = -\frac{2}{3}$. 1314. $y' = \frac{x(z-x)}{y(y-z)}$, $z' = \frac{x(y-x)}{z(z-y)}$. 1315. $d^2y = -\frac{20y^2 + 16x^2}{25y^3} dx^2$,

$d^2z = \frac{5z^2 - x^2}{25z^3} dx^2$. 1316. $x' = 5$, $y'' = 12$. 1317. $y' = \frac{z-x}{y-z}$, $z' = \frac{x-y}{y-z}$.

1318. $y' = -1$, $z' = 0$, $5y'' = -4$, $5z'' = 4$. 1319. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + (z-1)^2}{(z-1)^3}$.

1320. $(z^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2zx^2 y^2$. 1321. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. 1322. $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$= \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}$. 1323. $(x+y)dz = -(y+z)dx - (x+z)dy$,
 $(x+y)^2 dz^2 = 2(y+z)dx^2 + 4z dx dy + 2(z+x)dy^2$.

$$1324. d^2z = -\frac{c^4}{z^3} \left(\frac{1}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx^2 + 2 \frac{xy}{a^2b^2} dx dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{b^2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dy^2 \right).$$

$$1325. d^2z = -\frac{2}{\sin^3 2z} ((\sin^2 2z \cos 2x + \sin^2 2x \cos 2z) dx^2 + \\ + 2 \cos 2z \sin 2x \sin 2y dx dy + (\sin^2 2z \cos 2y + \sin^2 2y \cos 2z) dy^2).$$

$$1326. d^2z_A = \frac{1}{a} (dx^2 - 2dy^2).$$

$$1327. (x\varphi' + \psi')^3 d^2z = (2(x\varphi' + \psi')\varphi\varphi' - (x\varphi'' + \psi'')\varphi^2) dx^2 + \\ + 2((x\varphi'' + \psi'')\varphi - (x\varphi' + \psi')\varphi') dx dy - (x\varphi'' + \psi'') dy^2.$$

$$1329. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{55}{32}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{25}{32}. 1330. \frac{dx}{dz} = \frac{\varphi'(t)}{2kt}, \frac{dy}{dz} = \frac{\psi'(t)}{2kt}. 1331. \frac{\partial z}{\partial x} = \\ = -\frac{c}{a} \sin v \operatorname{ctg} u, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b} \cos v \operatorname{ctg} u. 1333. а) 2; б) 1. 1340. \frac{d^2x}{dy^2} + x = e^y.$$

$$1341. \frac{d^3x}{dy^3} = 0. 1342. \frac{d^4x}{dy^4} = 0. 1343. \frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0. 1344. \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

$$1345. y_t'' - y_t' - y_t' + y = 0. 1346. y_t'' + by = 0. 1347. \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0. 1350. \frac{d^2y}{dt^2} + \\ + a(e^{2t} + 1)y = 0. 1351. \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}. 1352. \frac{r'}{r}. 1353. \frac{(r^2 + r')^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. 1354. \eta'' +$$

$$+ (b - 1)\eta = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \xi}. 1355. v'' + v = 0. 1356. u'' - u' = \frac{A}{(\beta - \alpha)^2} u. 1357. t \frac{d^2y}{dt^2} + \\ + y = 0. 1358. y \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} = 0. 1361. \frac{\partial z}{\partial u} = 0. 1362. u \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0. 1363. \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

$$1364. \frac{\partial u}{\partial \varphi}. 1365. r \frac{\partial u}{\partial r} \cos 2\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin 2\varphi. 1366. \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2. 1367. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. 1368. \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}. 1369. \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0. 1370. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2(u^2 + v^2)z =$$

$$= 0. 1371. \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2 v^2 z = 0. 1372. \alpha = \frac{1}{a}, \beta = \frac{1}{b}$$

$$\text{или } \alpha = \frac{1}{b}, \beta = \frac{1}{a}, a \neq b. 1373. \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0. 1374. \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0. 1375. \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \\ = \frac{1}{2}. 1376. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + u = 0. 1377. r^3 u^{IV} + 2r^2 u''' - ru'' + u' = 0.$$

$$1378. u\varphi'' + \varphi' + a\varphi = 0. 1379. u'' + \frac{2}{r}u' + u = 0.$$

$$1380. \Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2, \Delta_2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

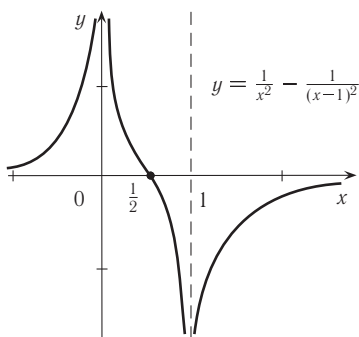
ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К АНАЛИЗУ

1391. $-1 < x < 1$. 1392. $x > \frac{3}{4}$. 1421. $y_{\max} = 9$. 1422. $y_{\min} = -16$.
1423. $y_{\max} = 16$ при $x = -2$, $y_{\min} = -16$ при $x = +2$. 1426. Экстремума
нет. 1427. $y_{\max} = 4$ при $x = 1$, $y_{\min} = -28$ при $x = 5$. 1428. $y_{\min} = a$ при
 $x = b$. 1429. Экстремума нет.

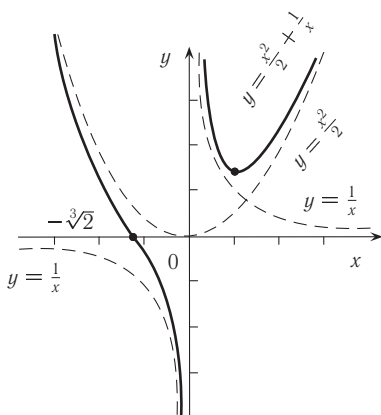
	$y_{\max}$	$y_{\min}$
1430.	$x = 2$	$x = 1, 3$
1431.	$x = 1$	$x = 3$
1432.	$x = 0$	$x = 4$
1433.	$x = 1$	$x = -1$
1434.	$x = -1$	$x = +1$
1435.	$x = \frac{a^2}{a-b}$	$x = \frac{a^2}{a+b}$
1436.	$x = 4$	$x = 16$
1437.		$x = \pm 1$
1438.	$x = \pm\sqrt{2}$	$x = 0$
1439.		$x = e^{-1}$
1440.		$x = e^{-1/2}$
1441.		$x = e^{-1}$
1442.	$x = e^{-2}$	$x = 1$
1443.	$x = n$	$x = 0$ (если n — четное)
1444.	$x = \pm 1$	$x = 0$
1445.		$x = 0$
1446.	$x = \ln 2$	
1447.	$x = 9/11; x = 2$	$x = -2; +1$
1448.	Функция только возрастает.	
1449.	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5}{4}\pi$
1450.	а) если $2a^2 < 1$	
	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{3}{2}\pi$
	б) если $2a^2 > 1$	
	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2},$
	$x = \alpha$	$x = \pi + \alpha$
	$x = \pi - \alpha$	$x = 2\pi - \alpha,$
	где $\sin \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	
1451.	$x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$	$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$
1452.	$x = \frac{\pi}{8}, \frac{7}{8}\pi$	$x = 0; \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi$
1453.	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$
1454.	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
1455.	$x = -\frac{1}{2}$	
1456.	$x = +\frac{1}{2}, (y = 2)$	
1457.	если $a < 0$ $x = +a,$	$x = a,$ если $a > 0$
1458.	$x = 1 (y = 1)$	
1459.	$x = 1 (y = 0)$	$x = \frac{1}{2} \left(y = -\frac{1}{2} \right)$
1460.	y всегда убывает	
1461.	$x = a^{\sqrt[3]{2}} (y = a^{\sqrt[3]{4}})$	
1462.	$x = \sqrt[8]{3} (y = \sqrt[3]{27})$	$x = -\sqrt[8]{3} (y = -\sqrt[3]{27})$
1463.	$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = 0$ для $y > 0$

	$y_{\max}$	$y_{\min}$	Примечания
1464.	$x = -a$ $x = a$	$x = 0$ — точка перегиба	асимптот нет.
1465.		$x = 0$	$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ — точка перегиба, асимптота $y = a$.
1466.	$x = -1$	$x = 1$	$x = 0$ — точка перегиба, асимптот нет.
1467.			$x \approx 1,331$ — точка перегиба, а асимптоты $x = -1$; $y = 0$ $x = 4$.
1468.	$x = 0$ ($y = a$)		$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ — точка перегиба, асимптота $y = 0$.
1469.	$x = 0$ ($y = A$)		$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ — точка перегиба, асимптота $y = 0$.
1470.	$x = na$	$x = 0$ (если n четное)	$y = 0$ — асимптота вправо, $x = n \pm \sqrt{n}$ — точка перегиба и $x = 0$ при n — нечетном.
1471.	$x = \pm a$	$x = 0$	$x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$ — точка перегиба, $y = 0$ асимптота.

1472 и 1473. См. чертежи.

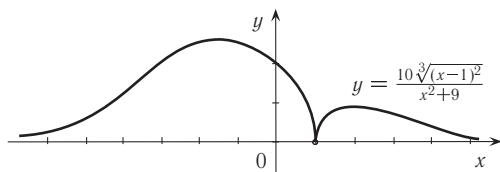


Чертеж к задаче 1472

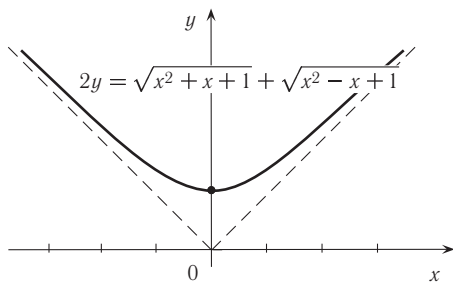


Чертеж к задаче 1473

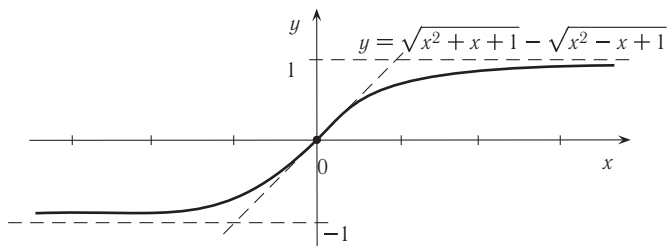
1474. Убывающая функция; асимптоты $x = 0$, $x = \pm 1$; $y = 0$. 1475. Асимптоты: $x = 1$; $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ — точка перегиба. 1476. Асимптоты: $x = 1$; $x = 3$; $y = 1$; $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25})$ — точка перегиба. 1477. Асимптоты: $x = -1$; $y = \pm 1$. Область существования $|x| \geq 1$. 1478–1494. См. чертежи.



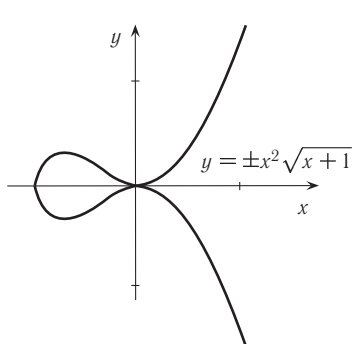
Чертеж к задаче 1478



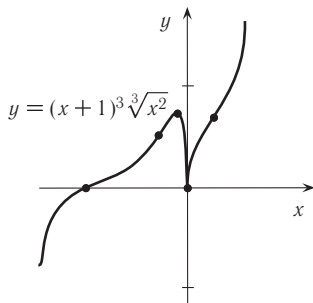
Чертеж к задаче 1479



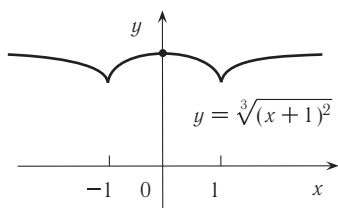
Чертеж к задаче 1480



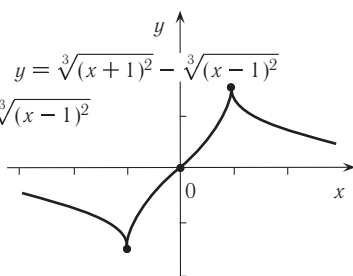
Чертеж к задаче 1481



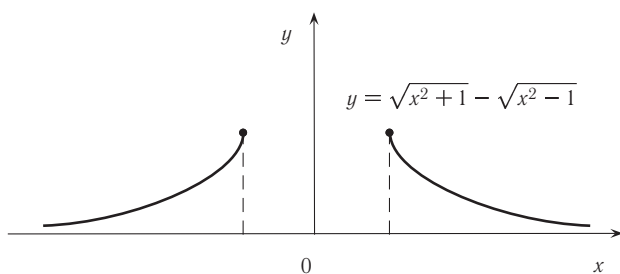
Чертеж к задаче 1482



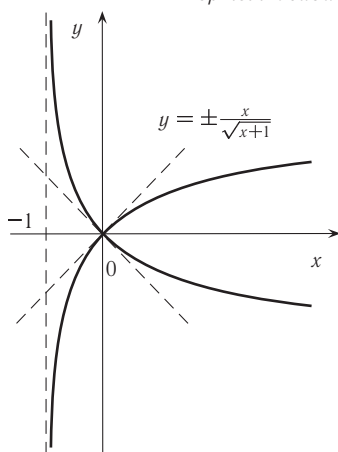
Чертеж к задаче 1483



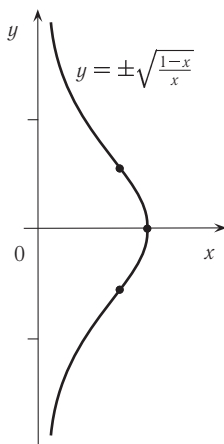
Чертеж к задаче 1484



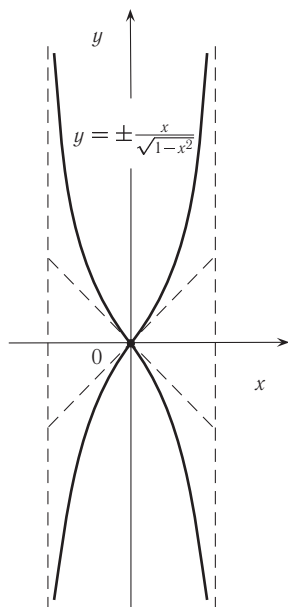
Чертеж к задаче 1485



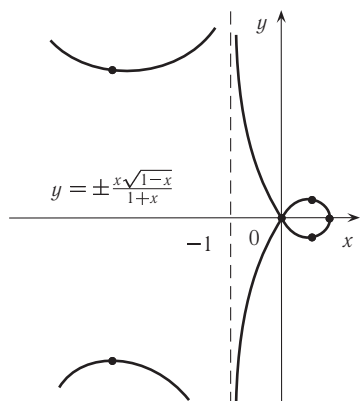
Чертеж к задаче 1486



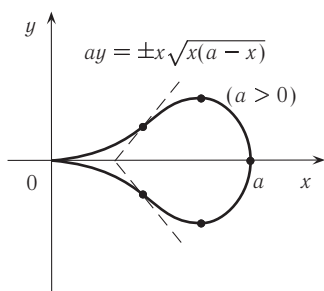
Чертеж к задаче 1487



Чертеж к задаче 1488



Чертеж к задаче 1489

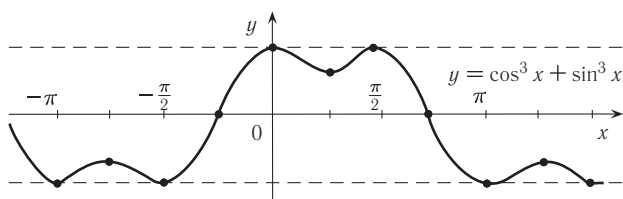


Чертеж к задаче 1490



Чертеж к задаче 1491

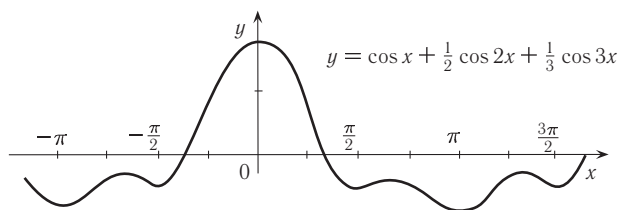
Чертеж к задаче 1492



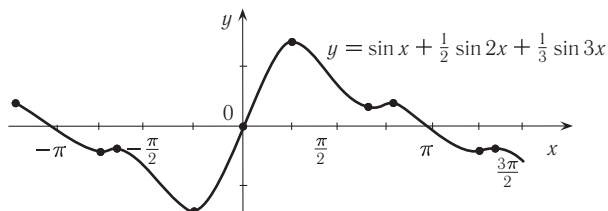
Чертеж к задаче 1493

1495. Сдвинутая синусоида с периодом $\frac{\pi}{2}$.

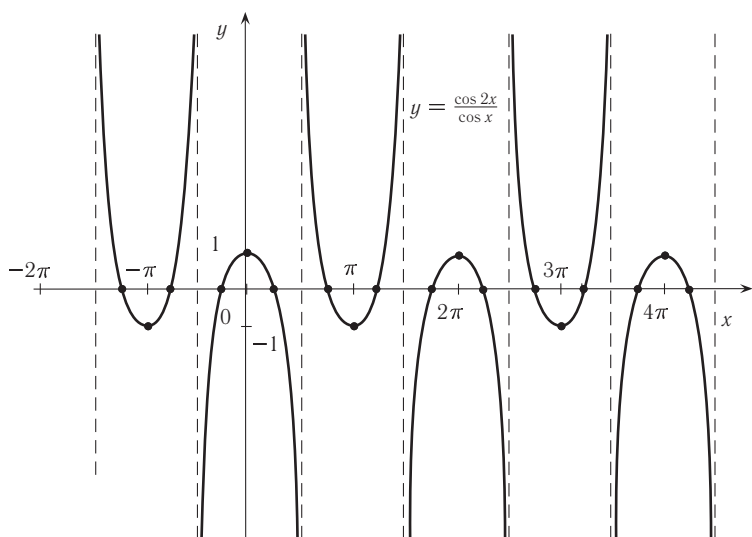
1496–1499. См. чертежи.



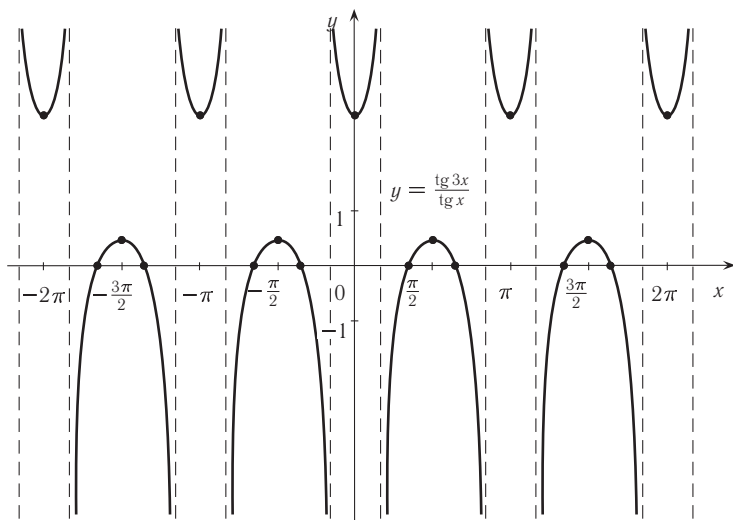
Чертеж к задаче 1496



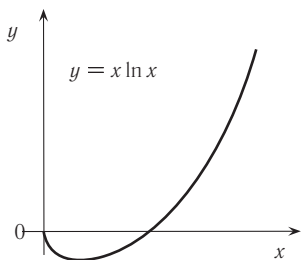
Чертеж к задаче 1497



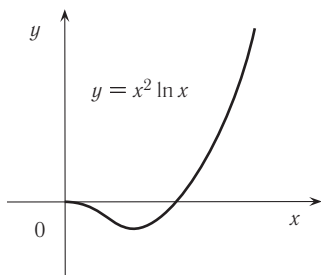
Чертеж к задаче 1498



Чертеж к задаче 1499

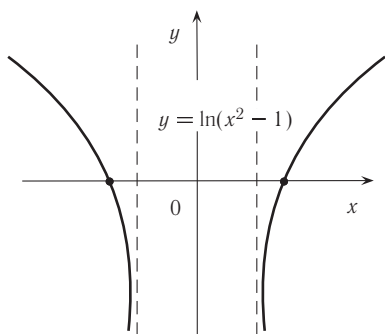


Чертеж к задаче 1502

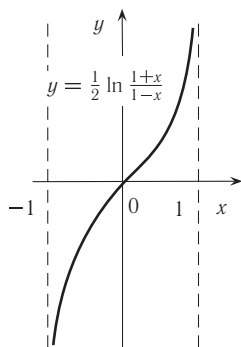


Чертеж к задаче 1503

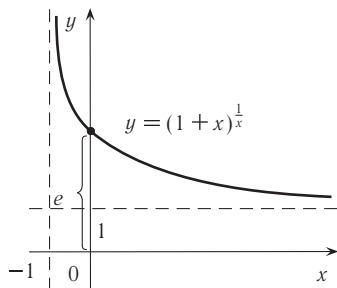
1500. Асимптота: $y = 0$. Экстремумы при x , равных корням уравнения $x = \operatorname{tg} x$. Затухающие волны. **1501.** Волны постоянной амплитуды с уменьшающейся длиной. **1502–1506.** См. чертежи.



Чертеж к задаче 1504



Чертеж к задаче 1505



Чертеж к задаче 1506

1507. Два. **1508.** Два. **1509.** Если $a < 1$ — один, если $a > 1$ — три. **1510.** Если $a > 0$ — один, если $-\frac{1}{e} < a < 0$ — два, если $a < -\frac{1}{e}$ — нет корней. **1511.** Если $a > \frac{1}{e}$ — нет корней, если $0 < a < \frac{1}{e}$ — два корня, если $a < 0$ — один корень. **1514.** $m < 11$. **1515.** $m > 175$, $27m < -188$. **1516.** $0 < 16m < 621$. **1517.** $m = 72$, $27m = -800$. **1518.** $m = -1$. **1519.** $m > 0$. **1520.** $2m = \pm(3\pi - 2)$. **1521.** $s = a^2$. **1522.** $s = 2a^2$. **1523.** Сторона, параллельная основанию сегмента, стягивает дугу 2φ , где $4 \cos \varphi = \cos \alpha + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha}$. **1524.** $\frac{2m^3}{3p\sqrt{3}}$. **1525.** $\frac{ah}{4}$. **1526.** x — сторона вырезанных квадратов, $6x = a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}$. **1527.** $y = x\sqrt{2}$, если x — ширина, y — высота. **1528.** $a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **1529.** $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$. **1530.** πm^3 . **1531.** $2\pi a^2$. **1532.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **1533.** $\frac{\pi ah^2}{4}$. **1534.** $\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{8}{27}$. **1535.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **1536.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **1537.** $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{3}}$. **1538.** $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. **1539.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **1540.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1541.** $3\sqrt{\pi\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3v^2}{2}}$. **1542.** Основание равно $\frac{p}{2}$. **1543.** $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{5\pi}}$. **1544.** $r^2(v_1^2 + v_2^2) = (av_2 - bv_1)^2$. **1545.** $d^2 = (lt + a - x_1)^2 + (mt + b - y_1)^2 + (nt + c - z_1)^2$, $t = (l(x_1 - a) + m(y_1 - b) + n(z_1 - c))/(l^2 + m^2 + n^2)$. **1547.** Если $x = av_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$ оказывается меньше b , то ломаная ACB , где $C(x, 0)$. Если $x > b$, то скорейший путь — прямая AB . **1548.** $l = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. **1549.** $mx^2 = 2ap$ при $p > \frac{ma}{2}$. **1550.** $t(v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha) = lv + l_1v_1 - (l_1v + lv_1) \cos \alpha$. **1551.** При $l > 4a$ равновесия нет. При $l < 4a$ угол наклона φ определяется равенством $16a \cos \varphi = l + \sqrt{l^2 + 128a^2}$. **1552.** Если φ — угол наклона стержня к горизонту, то $2 \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} \varphi = \sin(\alpha - \beta)$. **1553.** Когда квадраты расстояний точки до центров относятся как кубы радиусов. **1554.** $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **1555.** Отверстие должно быть на середине высоты. **1556.** $4b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + 8b^2} - a$. **1557.** $\frac{p^2}{2(\pi+4)}$. **1558.** Отношение должно быть равно $\frac{b}{a}$. **1559.** $r = h = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, если $a < \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$. **1560.** $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\cos \frac{\pi}{n}}$, $\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{n}}}$; $\max \sin(\psi - \varphi) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$. **1561.** $(\sqrt{Hh}, 0)$. **1562.** $OM = a + \sqrt{ab}$. **1563.** Отрезок прямой внутри угла должен данной точкой делиться пополам. **1564.** $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{2}$, если φ — угол наклона искомым плоскостей к основанию. **1565.** Плоскость делит ребра пополам. **1566.** Вершина в середине стороны. **1567.** $\frac{\sqrt{3}}{2}lr$, где l — образующая, r — радиус основания. **1568.** Третья касательная перпендикулярна к биссектрисе угла между первыми двумя. **1569.** Наклон прямой φ дается формулой $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. **1570.** Наклон определяется из уравнения: $a \cos \varphi - b \sin \varphi = a - b$. **1571.** $x = \frac{a}{2}$. **1572.** $x = a \cdot n^{\frac{3}{2(n+1)}}$, $y = \frac{x}{n\sqrt{n}}$. **1573.** $x = a \cdot n^{\frac{1}{2(n+1)}}$, $h = a \cdot n^{\frac{1}{2(n+1)}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. **1574.** $x = a - \frac{p}{2}$, если $a > \frac{p}{2}$; $x = 0$, если $a < \frac{p}{2}$. **1575.** $x = p$, $L_{\min} = 3p\sqrt{3}$. **1576.** Нормаль с осью параболы должна составлять 45° . **1577.** ab . **1578.** $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. **1579.** $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$. **1580.** $d = a - b$. **1581.** $d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, если $a > b\sqrt{2}$; $d = 2b$, если $a < b\sqrt{2}$. **1582.** $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{2}Ry = 0$, $S_{\max} = \frac{2\pi R^2}{3\sqrt{3}}$. **1583.** $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $x_1 - a = (x_0 - x_1)\sqrt{2}$; в $3 + 2\sqrt{2}$ раз. **1584.** Абсциссы

- вершин составляют арифметическую прогрессию. **1589.** $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$. **1592.** Сходится при $-1 \leq x < 1$. **1593.** Сходится при $-1 < x < 1$. **1594.** Сходится при $-1 < x \leq 1$. **1595.** Сходится при любом x . **1596.** Сходится при $-1 \leq x < 1$. **1597.** Сходится при любых x , кроме целых отрицательных и нуля. **1598.** Сходится при любом x , кроме 0. **1599.** Сходится при любом x . **1600.** Расходится при любом x , кроме 0. **1601.** Сходится при $-1 < x < 1$. **1602.** Сходится при $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$. **1603.** Сходится при $-e \leq x < e$. **1604.** Сходится при $-2 \leq x < 2$. **1605.** Сходится при $-1 \leq x < 3$. **1606.** Сходится при $x > \frac{1}{2}$ и при $x \leq -\frac{1}{2}$. **1607.** Сходится при $2 \leq x < 4$. **1608.** Сходится при $x \geq -1$. **1609.** Сходится при $|x| > 2$ и при $|x| < \frac{1}{2}$. **1610.** Сходится при $k\pi - \frac{\pi}{4} < x \leq k\pi + \frac{\pi}{4}$. **1611.** Сходится при $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}$. **1612.** Сходится при $-1 \leq x \leq 1$. **1613.** Сходится при $x > 0$. **1614.** Сходится. **1620.** Расходится. **1621.** Сходится. **1622.** Расходится. **1623.** Сходится. **1624.** а) Сходится, б) сходится при $\sigma > 0$. **1625.** Сходится. **1626.** Сходится. **1627.** Сходится. **1628.** Сходится при любом x . **1629.** Сходится при всех x , кроме $x = k\pi$. **1630.** Сходится. **1631.** Сходится. **1649.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} \right)$. **1651.** $-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$. **1652.** $(x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5$. **1657.** $\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$. **1658.** $\frac{\sin 2xn}{2\sin x}$. **1659.** $\frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. **1660.** $-\frac{\sin nx \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\cos \frac{x}{2}}$. **1661.** $\frac{(-1)^{n-1} \sin^2 2nx - (1+(-1)^{n-1}) \sin^2 x}{2 \cos 2x}$. **1662.** $\frac{x \sin a - x^n \sin na + x^{n+1} \sin(n+1)a}{1-2x \cos a + x^2}$. **1676.** $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$ при $-1 \leq x \leq 1$. **1677.** $2 \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{a} \right)^5 + \dots \right)$ при $|x| < a$. **1678.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{2} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$. **1679.** $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \frac{x^n}{n}$; $|x| < 1$. **1680.** $1 + \frac{3x}{2} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n^2-1)}$; $|x| < 1$. **1689.** $\frac{1}{(1-x)^2}$; $|x| < 1$. **1690.** $(1-x)^2 s = 1+x$; $|x| < 1$. **1691.** $(1-x)^3 s = 1+x$; $|x| < 1$. **1692.** $(1-x-x^2-x^3)s = 1$; $|x| < 1$. **1693.** $ss_1 = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots$; $|x| < 1$. **1699.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$. **1700.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$. **1701.** $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$. **1702.** $S'(x) = S(x)$. **1718.** $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$. **1719.** $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$. **1720.** $1 + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{6}x^4 + \dots$. **1721.** $-\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{30240}x^5 - \dots$. **1722.** а) $\frac{3}{2}$, б) $4\frac{9}{10}$, в) $9\frac{1}{6}$, г) $15\frac{1}{3}$, д) $15\frac{1}{2}$. **1723.** $3\frac{2}{405}$, $2\frac{1}{448}$, $2\frac{1}{768}$, $2\frac{2}{5120}$. **1725.** а) 3,1071, б) 4,12121, в) 7,937008, г) 3,017089, д) 7,74603, е) 9,16514. **1726.** $\sqrt[3]{2} = 1,2599210499$. **1727.** $\sqrt{2} = 1,4142135624$. **1728.** $\ln 2 = 0,6931471806$; $\ln 3 = 1,0986122886$; $\ln 5 = 1,6094379124$; $\ln 10 = 2,3025850930$. **1733.** $1,4'$. **1734.** ≈ 114 раз. **1735.** $\approx 41'$. **1736.** Около 3 мм и 11 м. **1737.** $\approx$ на 1,4 м. **1739.** 11,99.

1740. 0,01745. 1741. 0,99985. 1742. 0,1736. 1743. 3,1415926536. 1744. 506 и 148. 1746. $-\frac{1}{m}$. 1747. $-\frac{3}{5}$. 1748. $\frac{1}{2}$. 1749. $-\frac{1}{2}$. 1750. $\frac{a^2}{b^2}$. 1751. 2. 1752. 0. 1753. 0. 1754. $\frac{2}{\pi}$. 1755. 1. 1756. 1. 1757. 0. 1758. 0. 1759. 1. 1760. 0. 1761. $\frac{1}{2}$. 1762. $\frac{2}{3}$. 1763. 1. 1764. $-\frac{1}{3}$. 1765. $-e$. 1766. 4. 1767. $f''(x)$. 1768. $f'''(x)$. 1769. 1. 1770. 0. 1771. 1. 1772. e^{-1} . 1773. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. 1774. $e^{-a^2/2}$. 1775. 1. 1776. 1. 1777. 0. 1778. 0. 1779. $-\frac{e}{2}$. 1780. $-\frac{1}{2}$, если $x \rightarrow 0$, оставаясь > 0 ; $+\infty$, если $x \rightarrow 0$, оставаясь < 0 . 1781. $\frac{2}{3}$. 1782. $\frac{4}{3}$. 1783. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. 1784. $s = \frac{mgt}{a} - \frac{m^2g}{a^2}$ и $s = \frac{gt^2}{2}$. 1785. Минимум $z = -3(a^2 + b^2 - ab)$ при $x = 2a - b$, $y = 2b - a$. 1786. Максимум при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$. 1787. Минимум при $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; при $x = 0$, $y = 0$ нет экстремального значения. 1785. Минимум при $3x = -4$, $3y = 1$. 1786. Максимум при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{3}$. 1787. Минимум при $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; при $x = 0$, $y = 0$ нет экстремального значения. 1788. Минимум при $3x = -4$, $3y = 1$. 1789. Минимум при $x = y = a \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$. 1790. При $x = y = a$ минимум, если $a > 0$; максимум, если $a < 0$. 1791. Если кривая $z = 0$ — эллипс, а точка (x_c, y_c) — его центр, то при $x = x_c$, $y = y_c$ максимум, если $A < 0$, и минимум, если $A > 0$. Если кривая $z = 0$ — не эллипс, то экстремального значения z нет. 1792. Минимум z при $x = y = 3$. Максимум $z = a^3 + 27$, если $a \leq 9$, и $2a^3 - 9a^2 + 27$, если $a > 9$. 1793. Максимум при $x = a$, $y = a$ и равен $2a^4$, минимум при $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = 1$ и равен -1 . 1794. Если $a > b$, то максимум при $x \pm 1$, $y = 0$. Если $a < b$, то максимум при $x = 0$, $y = \pm 1$. Если $a = b$, то максимум при $x^2 + y^2 = 1$. Наименьшее значение — при $x = y = 0$. 1795. Максимум при $3x = 3y = 2a$. 1796. Максимум при $ax = b$, $ay = c$. 1797. Максимум при $3x = 3y = \pi$. 1798. Максимум при $6x = 6y = \pi$ и $6x = 6y = 5\pi$, минимум при $2x = 2y = 3\pi$. 1799. Минимум при $3x = 3y = \pi$ или 2π , максимум $z = 1$. 1800. $x - y = 2n\pi$ — максимум, $x - y = (2n + 1)\pi$ — минимум, если $ab > 0$. Если $ab < 0$, то наоборот. 1801. При $x = \alpha$, $y = \beta$ — максимум, при $x = \pi - \alpha$, $y = \pi + \beta$ — минимум. 1802. Максимум при $x = y = z = a$. При $x = y = z = 0$ нет экстремального значения. 1803. Минимум при $3x = -2$; $3y = -1$, $z = -1$. 1804. Минимум при $x = y = z$. 1805. Минимум при $x = y = z$. 1806. Максимум при $mx = a$, $my = b$, $mz = c$; минимум при $mx = -a$; $my = -b$, $mz = -c$; $m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. 1807. Числа $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ должны составлять геометрическую прогрессию. 1808. Минимум z при $x = -2$, $y = 0$. Максимум при $7x = 16$, $y = 0$. 1809. Минимум z при $3x = -1 - \sqrt{6}$, $3y = 2$, максимум при $3x = -1 + \sqrt{6}$, $3y = 2$. 1810. Максимум z при $3x = -1$, $3y = 2$, минимум при тех же значениях. 1811. Максимум при $x = y = 1$, минимум при $x = y = -1$. 1812. При $x = 1$, $y = 2$ нет экстремального значения. 1813. При $\pm x = a$; $\pm y = a$ максимум $z = a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$, минимум $z = -a\sqrt{1 + \sqrt{3}}$. При $x = 0$, $y = 0$ минимум $z = a\sqrt{2}$, максимум $z = -a\sqrt{2}$. 1814. Максимум при $x = y = -a\sqrt{2}$, минимум при $x = y = a\sqrt{2}$. 1815. Минимум при $x = y = a$. 1816. Минимум при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$. 1817. Максимум при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$. 1818. Максимум при $x\sqrt{2} = y\sqrt{2} = \pm 1$, минимум при

$x\sqrt{2} = -y\sqrt{2} = \pm 1$. **1819.** Максимум при $x = y = z = +1$, при $x = -y = -z = -1$, и т. д., минимум при $x = y = z = -1$, $x = -y = -z = -1$ и т. д. Максимум $u = 1$, минимум $u = -1$. **1820.** Минимум при $x = t\sqrt{a}$, $y = t\sqrt{b}$, $z = t\sqrt{c}$; $t = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. **1821.** Максимум u равен $\left(\frac{a}{9}\right)^9$. **1822.** Минимум равен $\frac{1}{7}(12 - \sqrt{18})$, максимум $\frac{1}{7}(12 + \sqrt{18})$. **1823.** Наибольшее значение $\frac{112}{27}$, наименьшее 4. **1824.** Экстремальные значения u являются корнями уравнения $\frac{l^2}{u-a^2} + \frac{m^2}{u-b^2} + \frac{n^2}{u-c^2} = 0$. **1825.** Наибольшее значение $\frac{1}{8}$, наименьшее 0. **1826.** Максимум при $3x = \pi$, $6y = \pi$, наименьшее значение 0. **1827.** Минимум равен $\frac{1}{p}(\sqrt{\alpha_1\beta_1} + \sqrt{\alpha_2\beta_2} + \dots + \sqrt{\alpha_n\beta_n})^2$. **1828.** Экстремальные значения в точках, где главные диаметры поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = M$ пересекают шар $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **1829.** Экстремальные значения там, где оси симметрии эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $lx + my + cz = 0$ пересекают шар $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **1833.** Равносторонний. **1834.** Равнобедренный. **1835.** Длина равна $\sqrt{2ab} \sin \frac{\varphi}{2}$, где a, b — стороны треугольника, φ — угол между ними. **1837.** Ортоцентрический треугольник, вершины которого в основаниях высот данного. **1838.** Прямоугольник. **1839.** Координаты искомой точки равны арифметическим средним координат вершин. **1840.** Координаты ее равны арифметическим средним координат данных точек. **1841.** Площадь четырехугольника, вписанного в круг. **1842.** Многоугольник, вписанный в круг. **1843.** Площадь $\frac{n}{2}a^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ правильного многоугольника. **1844.** Площадь $na^2 \tan \frac{\pi}{n}$ правильного многоугольника. **1845.** Равносторонний треугольник. **1846.** Площадь его $2R^2 \sin \alpha$, где R — радиус круга. **1847.** Если s — площадь треугольника, a, b, c — стороны, x, y, z — расстояния точки до сторон, то $\delta \cdot x = 2sa$; $\delta \cdot y = 2sb$; $\delta \cdot z = 2sc$; $\delta = a^2 + b^2 + c^2$. **1848.** Плоскость, перпендикулярная к радиус-вектору, проведенному из начала в данную точку. **1849.** Точка $(a, 0, 0)$, если $a > b > c$. **1850.** a^3 . **1851.** a^3 . **1852.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$. **1853.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. **1854.** $x = y = 2z = \sqrt[3]{2v}$. **1855.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. **1856.** Высота параллелепипеда равна $\frac{h}{3}$, где h — высота конуса. **1857.** Если R — радиус основания конуса, то $\pi R^2 \sqrt{3} = S$. **1858.** $R = l$. **1859.** Касательная в этой точке должна быть параллельна прямой, соединяющей данные точки. **1860.** $p\sqrt{5}$. **1861.** Высота сегмента должна составлять $\frac{3}{4}$ высоты треугольника. **1862.** Основание должно проходить через середину другой полуоси. **1863.** Абсцисса искомой точки x находится из равенства $(a^2 - b^2)x^2 = am^2$, если $|am| < a^2 - b^2$. При $|am| > a^2 - b^2$ должно быть $x = a \operatorname{sign} m$. **1864.** Равнобедренный треугольник с вершиной на другой оси. **1865.** Нормаль должна проходить через точки $\left(\pm\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}; \pm\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}\right)$. **1866.** Если $a^2 > 2b^2$, то нормаль проходит через точку $x = \pm a^2 \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^4 - b^4}}$, $y = \pm b^2 \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^4 - b^4}}$. Если же $a^2 < 2b^2$, то нормаль совпадает с малой осью эллипса. **1867.** $x\sqrt{a+b} = \pm\sqrt{a^3}$; $y\sqrt{a+b} = \pm\sqrt{b^3}$. Здесь x и y — координаты точки касания. **1868.** $S\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2} = \pi abc\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. **1869.** $\frac{x}{a^{2/3}} + \frac{y}{b^{2/3}} + \frac{z}{c^{2/3}} = \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}$. **1871.** $2V = abh^2$; $\left(\frac{a\sqrt{h}}{2}; \frac{b\sqrt{h}}{2}; \frac{h}{2}\right)$ — вершина параллелепипеда.

1872. $\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} + \frac{z}{\sqrt{c}} = \sqrt{a+b+c}$ — одна из восьми плоскостей.

1873. Точка касания плоскости $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}; \pm \frac{b}{\sqrt{3}}; \pm \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

1874. Уравнение контура эксцентрика в полярных координатах имеет вид:

$$r = a + b \cos(n\varphi + \alpha).$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1875. Контур диска должен состоять из двух спиралей Архимеда $r = \pm a\varphi$.

1876. Синусоидой. 1879. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. 1880. $(x^2 + y^2)^3 = l^2 x^2 y^2$.

1881. $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - y^2)$. (Точка O принята за начало координат, прямая OO_1 — за ось Ox).

1882. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-x}\right)^2 = 1$. 1883. $r^2(x^2 + y^2 - ax)^2 =$

$= a^2(x-a)^2(x^2 + y^2)$. 1884. $(x^2 - xy + y^2)^2 + y^4 = 4a^2 y^2$. 1885. $(x^2 + y^2)y^2 =$

$= a^2 x^2$. 1886. Две улитки Паскаля. 1887. Лемниската. 1888. То же.

1889. В полярных координатах $(r^2 - c^2) \sin \varphi = \pm a^2$. При этом полюс — в середине отрезка между данными точками, а полярной осью служит сам отрезок.

1890. $(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 (a^6 y^6 + b^6 x^2) = a^4 b^4 (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2$. 1891. Окружность

или лемниската (в зависимости от того, находятся ли вращающиеся стержни по одну или по разные стороны от оси Ox).

1894. Парабола. 1895. Часть прямой $x - y = 2$, где $x \geq 2$. 1896. Отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, заключенный

между осями. 1897. Часть параболы $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, заключенная между точками $(a, 0)$ и $(0, a)$. 1898. $(2, 2)$ — самая левая, $(6, -2)$ самая низкая точка.

1899. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. 1900. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$. 1901. $x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$y = \frac{2at}{1+t^2}$. 1908. $t_1 t_2 t_3 (t_1 + t_2 + t_3) + (t_1 + t_2 + t_3)^2 + 3 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3$.

1910. $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + 1 = 0$. 1911. $t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 + t_2 + t_3 +$

$+ t_4 = 0$. 1913. Пересечением лемнискаты с окружностью $x^2 + y^2 = at(x - y)$ получим при соответствующем t любую точку кривой. Ее координаты выразятся

формулами $x = a \frac{t(t^2+1)}{t^4+1}$, $y = a \frac{t(t^2-1)}{t^4+1}$. 1916. 45° . 1917. $\frac{a}{b}$. 1918. $a =$

$= 1$. 1919. $y = x$. 1920. $x = 0$ и $y = 0$. 1921. $y = \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a}$. 1925. $\mu =$

$= \frac{\varphi}{2} + 90^\circ$. 1926. $y = x$. 1927. $x - y - 3 = 0$. 1928. $6x - 5y + 21 = 0$.

1929. Одна из нормалей: $4x - 2y - 3a = 0$. 1930. $x = 2\pi a$. 1931. Нормали

в точках, где $\varphi = \pm 30^\circ$ и $\varphi = \pm 150^\circ$. 1932. $(a, \pm a\sqrt{2})$. 1933. $x - y = 4$.

1934. $d = \frac{3a^3 x_0}{\sqrt{x_0^6 + 4a^6}}$. 1935. $(x \pm y)\sqrt{2} = \pm a$. 1946. $l = a$. 1947. $l = 2a$.

1948. $d = at$. 1949. $d = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}} e^{k\varphi}$. 1950. $d_1 d_2 = b^2$. 1951. $(a^4 \sin^2 t_1 +$

$+ b^4 \cos^2 t_1) d = 2ab(b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1) \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1}$. 1952. 1.

1962. Подкасательная. $\frac{2r^3}{a^2}$, поднормаль $\frac{a^2}{2r}$. 1965. Центр одного из кругов

в точке, где $x = \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{\sqrt{41}}\right)a$, $y = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{\sqrt{41}}\right)a$. 1966. Центр одно-

го из кругов в точке (x, y) , где $x\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})a$, $y\sqrt{5} = (6 + \sqrt{5})a$.

1967. Центр круга в точке (x, y) ; $8x\sqrt{2} = (\pi - 4)a$; $8y\sqrt{2} = (\pi + 4)a$.

1979. Тангенс наибольшей разности равен $\frac{a^2-b^2}{2ab}$ сама она — около $11'$.
1981. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. **1982.** Циссоида, асимптотой которой служит директриса параболы. **1983.** $x = 0$ — касательная в вершине. **1984.** Лемниската. **1985.** $(ax)^{\frac{n}{n-1}} \pm (by)^{\frac{n}{n-1}} = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{n-1}}$. **1986.** Логарифмическая спираль. **1987.** Кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$. **1988.** $r^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{n}{n+1}} \cos \frac{n\varphi}{n+1}$. **1989.** Спираль Архимеда (см. ответ на задачу 1875). **1991.** Циссоида. **1992.** Окружность. **1993.** Окружность. **1994.** $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, $a^2 > b^2$; при $a^2 < b^2$ таких углов нет. **1995.** $2(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$. **1996.** Парабола. **1997.** $x = a\left(\frac{\pi}{2} + t - \frac{\pi}{2} \cos t\right)$, $y = a\left(2 + \frac{\pi}{2} \sin t\right)$, где t — тот же параметр, что и у циклоиды. **1998.** Удлиненная циклоида Деллагира:

$$\begin{cases} x = a\theta - \frac{a\alpha}{\sin \alpha} \sin \theta, \\ y = \left(2 + \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)a + \frac{a\alpha}{\sin \alpha} \cos \theta. \end{cases}$$

2000. Парабола. **2002.** $y^3 + x^2(y + \frac{1}{2a}) = 0$. **2004.** $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$.
2005. При $x < 0$. **2006.** Выпуклость обращена к оси x . **2007.** Вогнутость к оси Oy . **2008.** Выпуклость к полюсу. **2011.** 112 и 111 км.
2012. $\sqrt{\frac{(2a+3x)^3x}{3a^2}}$. **2013.** p . **2014.** $\frac{5}{3}\sqrt{10}$. **2015.** $\frac{13}{6}\sqrt{13}$. **2016.** a . **2017.** $\frac{a}{\cos \frac{x}{a}}$.
2018. $\frac{a\sqrt{2}}{n-1}$. **2019.** $2a$. **2020.** at . **2021.** $4a \sin \frac{t}{2}$. **2022.** $\frac{4a}{3} \cos \frac{\varphi}{2}$. **2023.** $\frac{a}{3}$.
2024. $R = 4a \cos \frac{t}{2} + b$. **2025.** $R = 2ae^{-t}$. **2026.** $8a \cos^3 t$. **2027.** $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. **2028.** На конце большой оси равна $\frac{a}{b^2}$; $a > b$. **2029.** В точке $(0, 0)$ равна $\frac{2}{a}$. **2030.** В точке $(0, a)$ равна $\frac{1}{a}$. **2032.** $(2a, 2a)$.

$$\mathbf{2033.} \quad x_c = -\frac{a(2a^3 - x^3)}{(2a+x)(a-x)^2}, \quad y_c = -\frac{2a(a+x)^{\frac{3}{2}}}{(2a+x)\sqrt{a-x}}.$$

$$\mathbf{2034.} \quad (e^{-1}, 0).$$

$$\mathbf{2035.} \quad x_c = \frac{a}{2} + \frac{a}{6}(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi), \quad y_c = \frac{a}{6}(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi).$$

$$\mathbf{2036.} \quad x_c = \frac{3a \cos^2 \varphi (1 + 8 \sin^4 \varphi)}{4(1 + 2 \sin^2 \varphi)}, \quad y_c = -\frac{6a \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{1 + 2 \sin^2 \varphi}.$$

$$\mathbf{2044.} \quad a - b.$$

$$\mathbf{2047.} \quad y = \sqrt{2b(a+b)} \left(\frac{x}{a+b} - 1 + \sqrt{1 - \frac{x}{a+b}} \right).$$

$$\mathbf{2048.} \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\mathbf{2049.} \quad y = \frac{h}{8} \left(3\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{3}} - 10\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{3}} + 15\frac{x}{a} \right).$$

2055. Окружность $x^2 + y^2 = ay$, где $2a$ — радиус кривизны в данной точке (касательная в данной точке принята за ось Ox , нормаль — за ось Oy). **2056.** $x = a \cos t \cos 2t$, $y = -b \sin t \cos 2t$. **2057.** $(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2)$. **2058.** $27py^2 = 8(x-p)^3$. **2059.** $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

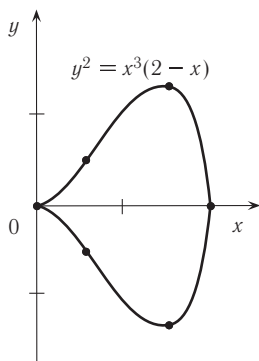
$$\mathbf{2060.} \quad (ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}. \mathbf{2061.} \quad \text{Астроида } (x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\mathbf{2062.} \quad \left(\frac{3y}{8}\right)^4 + 6a^2\left(\frac{3y}{8}\right)^2 + 3a^3x = 0.$$

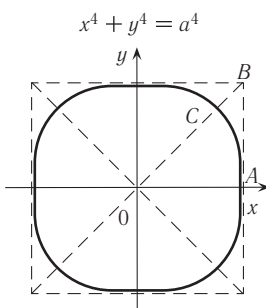
$$\mathbf{2063.} \quad (x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16a^2}.$$

$$\mathbf{2064.} \quad x = a \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} - \frac{y\sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a}.$$

2065. $x = \pi a + a(\tau - \sin \tau)$, $y = -2a + a(1 - \cos \tau)$ (циклоида). 2066. $x = 2a(t \cos t - \sin t)$, $y = 2a(t \sin t + \cos t)$. 2067. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. 2068. Кардиоиды. 2069. Гипоциклоида $x = 3a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 3a(2 \sin t + \sin 2t)$. 2070. Цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. 2071. $x = a(\arccos u - u^{-1} \sqrt{1 - u^2})$, $a \ln u = a + y$. 2072. $x^2 + y^2 = a^2$. 2073. При том же полюсе и соответствующем повороте полярной оси уравнение эволюты $r_1 = e^{\alpha \varphi_1}$. 2075. 8а. 2076. $\frac{3}{2}a$. 2077. 8а. 2078. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. 2079. $p(3\sqrt{3} - 1)$. 2080. $\sqrt{1 - a^{-2}}e^{\alpha \varphi}(e^{2\pi a} - 1)$. 2081. $y = \pm 1$. 2082. $y = \pm x$. 2083. Контур квадрата $|x| + |y| = 1$. 2084. $\pm x \pm y = 1$. 2085. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 2086. Гипербола, для которой стороны угла — асимптоты. 2087. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$. 2088. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$. 2089. $x \sin \alpha = 2\sqrt{hy} - (y + h) \cos \alpha$. 2090. $x^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{2}a^2$. 2091. Циклоида. 2092. Циклоида. 2093. $x^2 + 2y^2 = 2a^2$. 2094. $x^3 + xy^2 + py^2 = 0$. Если $y^2 = 2px$ — уравнение параболы. 2095. Если $y^2 = 2px + p^2$ — уравнение параболы, то огибающей будет: а) прямая $x + p = 0$ и б) окружность $2x^2 + 2y^2 = px + p^2$. 2096. $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, если $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ — уравнение данного эллипса. 2097. а) $y = 0$, б) $x = a \frac{\sigma^5 + 3\sigma}{\sigma^4 + 1}$, $y = a \frac{2\sigma^3}{\sigma^4 + 1}$, $\sigma = \pm 1$. 2099. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$. 2100. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$. 2101. Кардиоиды. 2102. Эпициклоида, у которой радиус катящегося круга равен половине радиуса неподвижного круга. 2103. $x = \frac{p}{2(1-2\lambda)} \frac{t^6 + 6(1-\lambda)t^4 + 6\lambda t^2 + 4\lambda^2}{3t^2 - \lambda}$, $y = 4p \frac{t^3}{3t^2 - \lambda}$, $\lambda = \frac{a}{p}$. 2104. $(\sigma, -2\sigma)$, $(2\sigma, -\sigma)$, $\sigma = \pm 1$. 2105. $(0; \pm 1)$; $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, $(\pm 1, 0)$, $\left(\pm \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 2106. $\left(\frac{\sigma^{\frac{4}{3}}}{4}, \frac{\sigma^{\frac{4}{3}\sqrt{27}}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sigma^{\frac{4}{3}\sqrt{27}}}{4}, \frac{\sigma^{\frac{4}{3}}}{4}\right)$; $\sigma = \pm 1$. 2107. Вершины с касательными, параллельными оси Ox , в точках $(\pm a; \pm a)$; с касательными, параллельными оси Oy , в точках $((\pm 1 \pm \sqrt{2})a; 0)$. 2108. $(2n+1)\pi x = 2$. 2109. $\pm x\sqrt{2} = \sqrt{(2n+1)\pi}$. 2110. $\frac{\pi}{b}$. 2111. $x = \pm 1$. 2112. $(0, a)$, $(a, 0)$. 2113. $(1, 0)$. 2114. $x\sqrt{3} = \pm a$. 2115. $x = 0$. 2116. $x = 2$ и $x = 6$. 2117. $2x = -1$. 2118. $x = e^{-\frac{3}{2}}$. 2119. $x = n\pi$. 2120. $8x = (2n+1)\pi$. 2121. $6\varphi = \pm \pi$. 2122. Точки перегиба находятся из уравнения $2 \operatorname{tg}^3 \varphi + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi + 3 = 0$. 2123. $(0, 0)$ — точка возврата. 2124. $(0, 0)$ — двойная точка при $a > 0$, изолированная точка при $a < 0$, точка возврата при $a = 0$ и $b \neq 0$. 2125. То же. 2126. $(0, 0)$ — двойная точка. 2127. $(0, 0)$ — изолированная точка. 2128. $(0, 0)$ — тройная точка с совпадающей касательной $y = 0$. 2129. То же, но с касательными $x = 0$, $y = x$. 2130. $(0, 0)$ — изолированная точка. 2131. $4a^3 + 27b^2 = 0$. 2133. $(0, 1)$ — точка прекращения. 2134. $(0, 0)$ — то же. 2135. $(0, 0)$ — то же. 2136. В начале координат разрыв. 2137. Разрыв в начале координат. 2138. Угловая точка в начале координат. 2139. Конечный разрыв при $x = 0$. 2140. Угловая точка при $x = 0$. 2141. В окрестности точки $x = 0$ бесконечное множество вершин. 2142. То же. 2143. То же. 2144. (e, e) — двойная точка. 2145. $x = 1$, $y = 1$. 2146. $y = 0$, $x = 3$. 2147. $x = -1$, $y = \pm 1$. 2148. $y = x$, $x = 0$. 2149. $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. 2150. $y = \pm(x + a)$, $x = a$. 2151. $2y = \pm(2x - b)$, $x = -b$. 2152. $3y = 3x + 2$. 2153. $x + y = 0$. 2154. $x + y + a = 0$. 2155. $x + y = 0$. 2156. $r \sin \varphi = 0$. 2157. Максимум $|y|$ при $2x = 3$. Острые в $(0, 0)$. При $2x = 3 - \sqrt{3}$ точка перегиба. В точке $(2, 0)$

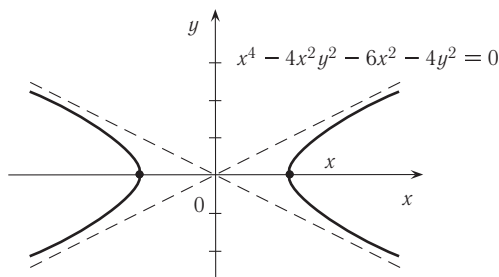


Чертеж к задаче 2157

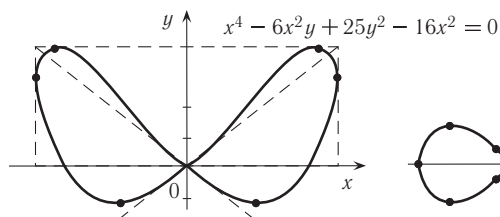


Чертеж к задаче 2158

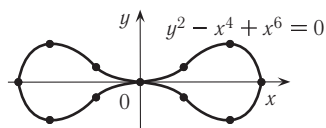
касательная параллельна оси Oy . См. чертеж. **2158.** Псевдоквадрат с четырьмя осями симметрии. $OA = a$, $BC = a(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})$. См. чертеж. **2159.** Еще большее приближение к квадрату. $BC = a\sqrt{2}(1 - 2^{-\frac{1}{2n}}) \approx a\sqrt{2}$. **2160.** Похожа на гиперболу. Асимптота $2y = \pm x$. Область существования $x^2 > 6$. См. чертеж. **2161.** Область существования $|x| < 5$. В начале координат двойная точка с касательными $5y = \pm 4x$. Максимум y при $x = \pm\sqrt{20}$. Минимум при $x = \pm\sqrt{5}$. См. чертеж. **2162.** Область существования $|x| < 1$. В начале двойная точка с касательной $y = 0$. Максимум $|y|$ при $3x = 2$. Точка перегиба при $x\sqrt{12} = \pm\sqrt{9 - \sqrt{33}}$. См. чертеж. **2163.** В начале точка с двойной касательной $y = 0$. Вершины в точках $(\pm 6, 12)$, $(\pm 6\sqrt{2}, 8)$. См. чертеж. **2164.** В начале точка самоприкосновения. Максимум $|y|$ при $x = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{8}$. Область существования: $-1 < x < 4$. См. чертеж. **2165.** В начале точка самоприкосновения. При $|x| < \sqrt{3}$ имеем $y = \pm\sqrt{x + \sqrt{4x^2 - x^4}}$. При $\sqrt{3} < x < 2$ имеем $y = \pm\sqrt{x \pm \sqrt{4x^2 - x^4}}$. Касательные, параллельные оси Ox , при $x = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{33}}{8}}$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm\sqrt{3}, 0)$ и $(2, \pm\sqrt{2})$. См. чертеж.



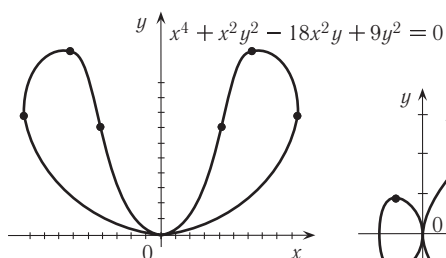
Чертеж к задаче 2160



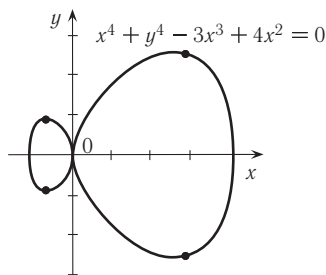
Чертеж к задаче 2161



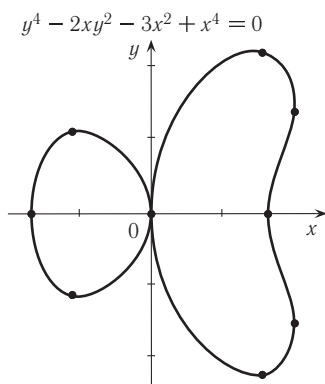
Чертеж к задаче 2162



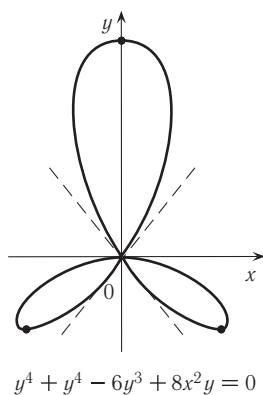
Чертеж к задаче 2163



Чертеж к задаче 2164

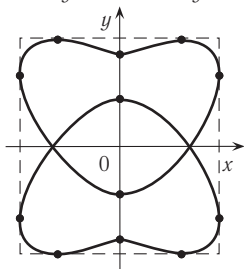


Чертеж к задаче 2165

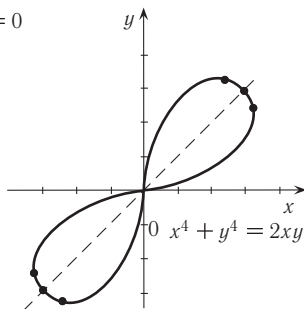


Чертеж к задаче 2166

$$x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$$



Чертеж к задаче 2167



Чертеж к задаче 2168

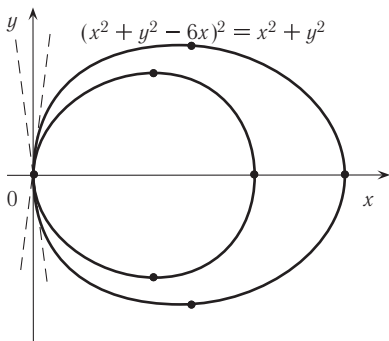
2166. При $0 < y < 6$ имеем $x = \pm\sqrt{-4y + \sqrt{16y^2 + 6y^3 - y^4}}$. При $-2 < y < 0$ имеем $x = \pm\sqrt{-4y \pm \sqrt{16y^2 + 6y^3 - y^4}}$. Касательная, параллельная оси Ox , в точках $(0, 6)$, $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$. В начале — тройная точка с касательными $y = 0$, $y\sqrt{3} = \pm 2x$. См. чертеж.

2167. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(0, \pm\sqrt{2})$, $(0, \pm 2\sqrt{2})$, $(\pm 2, \pm\sqrt{10})$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm 3, \pm\sqrt{5})$; точки $(\pm 2, 0)$ — двойные. См. чертеж.

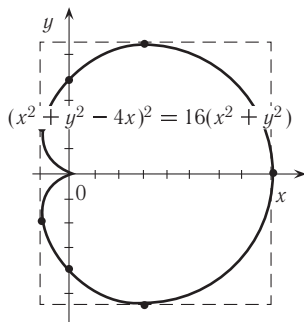
2168. В начале — двойная точка; оси координат касательные. Касательные, параллельные осям $x_1 = \sqrt[8]{\frac{3}{16}}$, $y_1 = \sqrt[8]{\frac{27}{16}}$ и т. д. См. чертеж.

2169. В начале — двойная точка с касательными $y = \pm x\sqrt{35}$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\frac{21}{8}, \pm\frac{7}{8}\sqrt{7})$, $(\frac{10}{3}, \pm\frac{5\sqrt{5}}{3})$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(5, 0)$, $(7, 0)$, $(-\frac{1}{24}, \pm\frac{\sqrt{143}}{24})$. См. чертеж.

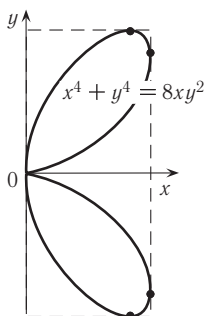
2170. Кардиоида — частный случай улитки Паскаля. В начале — точка возврата с касательной $y = 0$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(3, \pm\sqrt{27})$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(8, 0)$, $(-1, \pm\sqrt{3})$. См. чертеж.



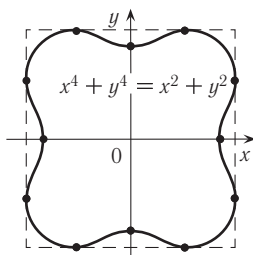
Чертеж к задаче 2169



Чертеж к задаче 2170



Чертеж к задаче 2171



Чертеж к задаче 2172

2171. Начало координат — тройная точка; оси координат — касательные в нем. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\sqrt{12}, \pm\sqrt{6\sqrt{12}})$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(4, \pm 4)$. См. чертеж.

2172. Бисквит. Начало — изолированная точка. Касательная, параллельная оси Ox , в точках $(0, \pm 1)$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{8}})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точках $(\pm 1, 0)$; $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{8}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$. См. чертеж.

2173. Четырехлепестник. Начало — четверная точка кривой, оси координат касательные в ней. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm 2, \pm\sqrt{2})$. Прямые $y = \pm x$ — оси симметрии. См. чертеж.

2174. Лемниската. Начало — двойная точка; оси координат — касательные в нем. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\sigma^4\sqrt{3}, \sigma^4\sqrt{27})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точках $(\sigma^4\sqrt{27}, \sigma^4\sqrt{3})$, где $4\sigma = \pm 1$. Прямая $y = x$ — ось симметрии. См. чертеж.

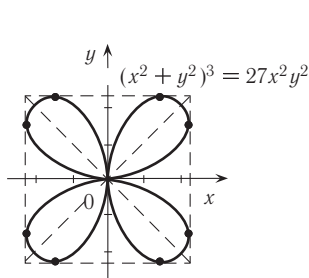
2175. Точка $(1, 0)$ двойная, с касательными $y = \pm(x - 1)$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3\sqrt{3}})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(0, 0)$. См. чертеж.

2176. Двойная точка в $(0, 0)$ с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Oy : $x + 1 = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $x = -\frac{24}{25}$. См. чертеж.

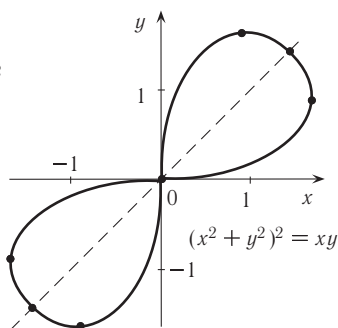
2177. Начало — двойная точка с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точках $(-4a, \pm 4a)$. Касательная, параллельная оси Oy , — в точке $(-5a, 0)$. См. чертеж. **2178.** Начало — тройная точка с касательными $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. Есть параболические ветви. Касательные, параллельные оси Ox , в точках

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}}\sigma, \sqrt{\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}}\sigma \right).$$

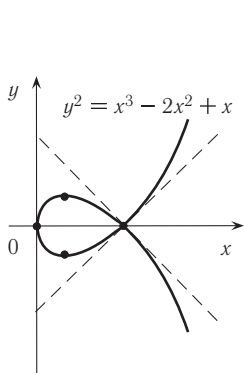
Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}}\sigma, \frac{1}{9}\sqrt{6\sqrt{3}})$, $\sigma = \pm 1$. См. чертеж.



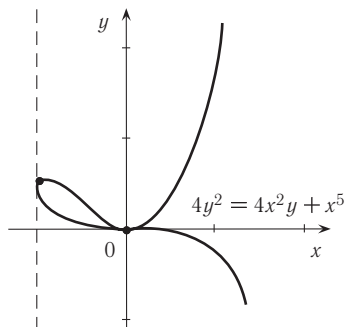
Чертеж к задаче 2173



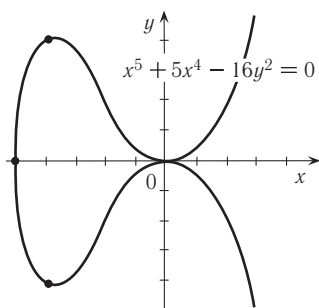
Чертеж к задаче 2174



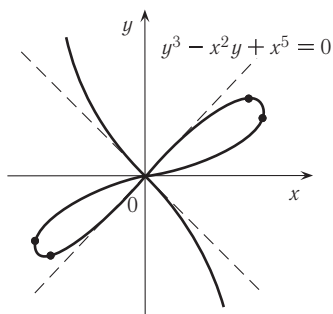
Чертеж к задаче 2175



Чертеж к задаче 2176

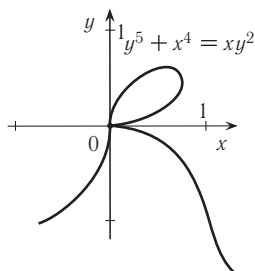


Чертеж к задаче 2177



Чертеж к задаче 2178

2179. Начало координат — тройная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. Имеется касательная, параллельная оси Ox , и касательная, параллельная оси Oy (не считая касательных в начале координат). См. чертеж.



2180. Начало координат — тройная точка с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $(1, -1)$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}, -\frac{8}{9})$. Криволинейная

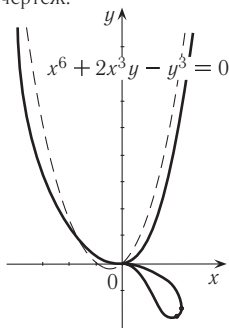
асимптота $y = x^2 + \frac{2}{3}x$. См. чертеж.

Чертеж к задаче 2179

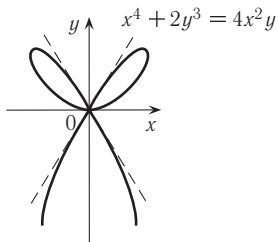
2181. Начало — тройная точка с касательными $y = 0$, $y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\pm 2, 2)$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{16}{9})$. Две параболические ветви, на которых $x^{\frac{4}{3}}/y \rightarrow \sqrt[3]{2}$, при удалении в бесконечность. См. чертеж.

2182. Асимптота $y = x$. В начале координат перегиб с касательной $y = 2x$. Вершин нет. См. чертеж.

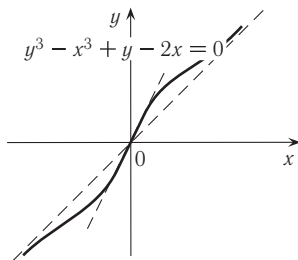
2183. Асимптоты $y = \pm x$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{2}, 0)$. См. чертеж.



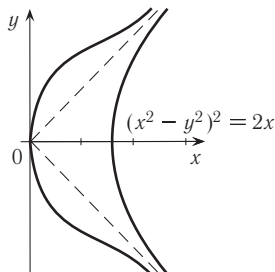
Чертеж к задаче 2180



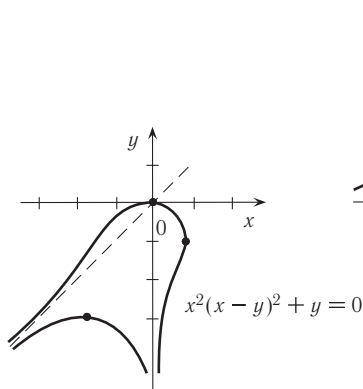
Чертеж к задаче 2181



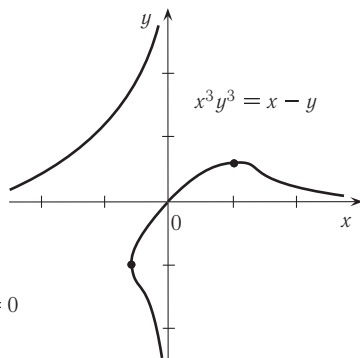
Чертеж к задаче 2182



Чертеж к задаче 2183



Чертеж к задаче 2184



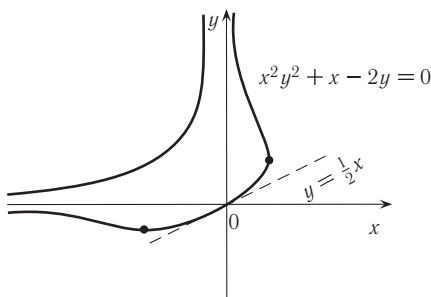
Чертеж к задаче 2185

2184. Асимптоты $x = 0$ и $y = x$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(0, 0)$, $(-\sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(\sigma, -\sigma)$, $\sigma\sqrt[3]{4} = 1$. См. чертеж.

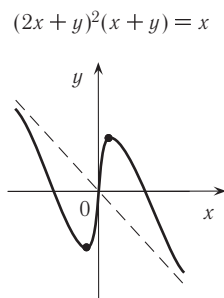
2185. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $(\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(-\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}, -\sqrt[5]{\frac{9}{8}})$. В начале касательная $y = x$. Параллельная ей касательная в точке $(-\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{2})$.

2186. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $(-2, -\frac{1}{2})$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(1, 1)$. В начале касательная $x - 2y = 0$. См. чертеж.

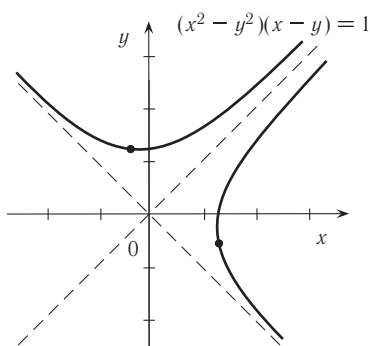
2187. Асимптота $x + y = 0$. В начале точка перегиба с касательной $x = 0$. Две вершины с касательными, параллельными оси Ox , в точках $(4 + \sqrt{5})\sqrt{2 + \sqrt{5}}x = \pm 1$, $y = \pm(\sqrt{5} + 1)x$. См. чертеж.



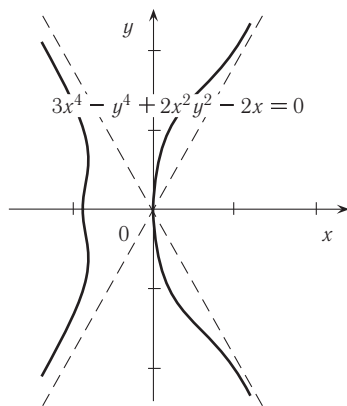
Чертеж к задаче 2186



Чертеж к задаче 2187



Чертеж к задаче 2188



Чертеж к задаче 2189

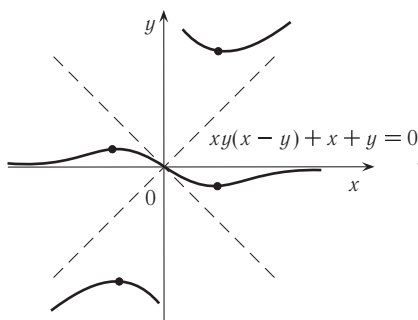
2188. Асимптоты $y = \pm x$. Касательные, параллельные осям, в точках $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{32}}, \frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right)$ и $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right)$. См. чертеж.

2189. Асимптоты $y = \pm x\sqrt{3}$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$. См. чертеж.

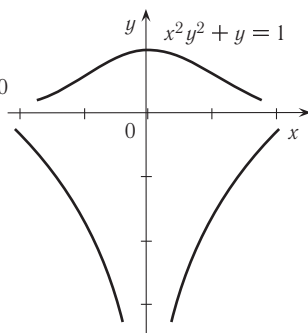
2190. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$, $y = x$. В $(0, 0)$ перегиб с касательной $y = -x$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\sigma, (\sqrt{2}+1)\sigma)$, $(-\sigma, (\sqrt{2}-1)\sigma)$; $\sigma = \pm 1$. См. чертеж.

2191. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $(0, 1)$. См. чертеж.

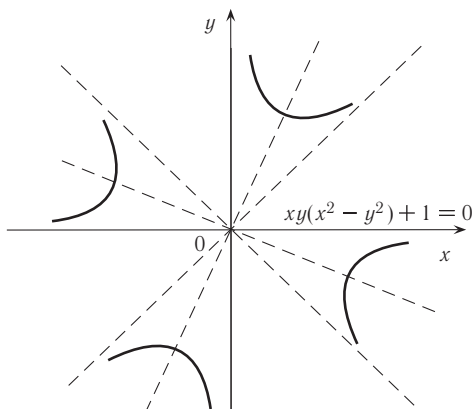
2192. Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$. Оси симметрии $y \pm (1 \pm \sqrt{2})x = 0$. См. чертеж.



Чертеж к задаче 2190



Чертеж к задаче 2191



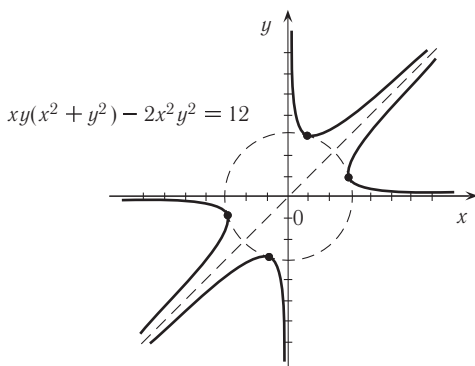
Чертеж к задаче 2192

2193. Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$. Уравнение кривой в полярных координатах $r^4 \sin 2\varphi(1 - \sin 2\varphi) = 24$, величина r минимальная при $\varphi = \frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$. См. чертеж.

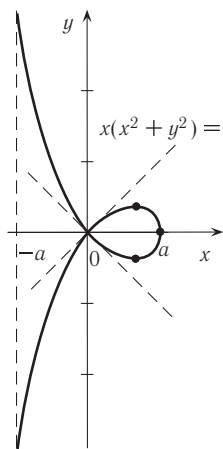
2194. Асимптота $x + a = 0$. В начале — двойная точка с касательными $y = \pm x$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(a, 0)$; касательные, параллельные оси Ox , в точках $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \pm\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}a\right)$. См. чертеж.

2195. Асимптоты $x - y \pm 1 = 0$. В $(0, 0)$ — двойная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. См. чертеж.

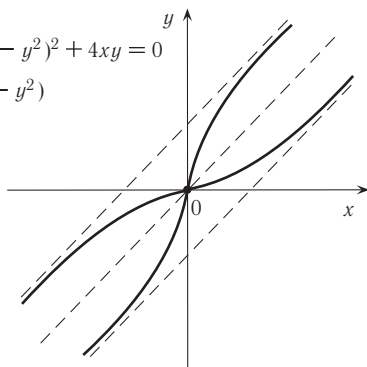
2196. Асимптоты $y = \pm 2$. Начало — двойная точка с касательной $x = 0$. См. чертеж.



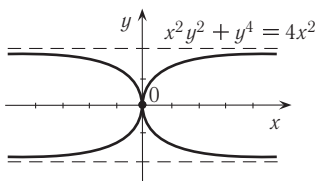
Чертеж к задаче 2193



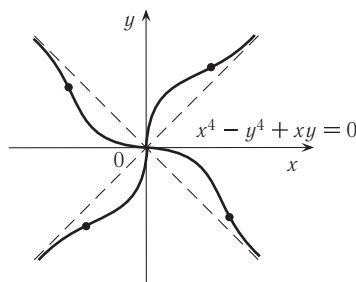
Чертеж к задаче 2194



Чертеж к задаче 2195



Чертеж к задаче 2196



Чертеж к задаче 2197

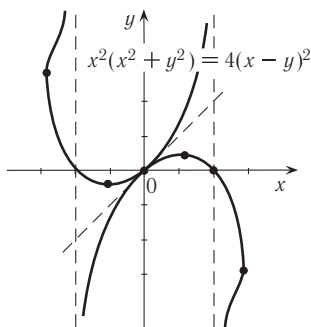
2197. Асимптоты $y = \pm x$. В начале — двойная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. Пять точек перегиба. См. чертеж.

2198. Асимптоты $x = \pm 2$. Начало — двойная точка с касательной $y = x$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(\pm 2\sqrt{t(1-t)})$, $(\pm 2t\sqrt{t(1-t)})$, где t — корень уравнения $t^3 + 2t - 1 = 0$ ($t \approx 0,45$). Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2})$. См. чертеж.

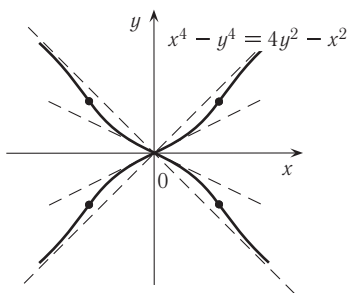
2199. Асимптоты $y = \pm x$. Пять точек перегиба. В начале — двойная точка с касательными $2y \pm x = 0$. Вершин нет. См. чертеж.

2200. Асимптота $y = 0$. Особая точка $(0, -1)$ — двойная с касательными $3y + 3 \pm x\sqrt{3} = 0$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(0, \pm 2)$ (конхоида Никомеда). См. чертеж.

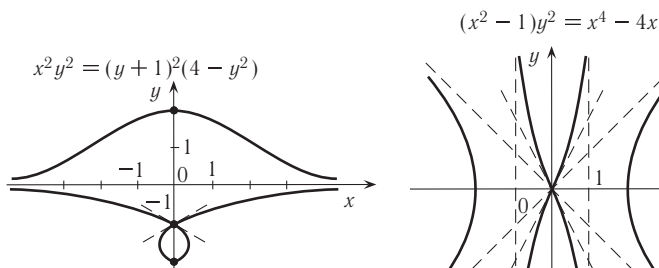
2201. Асимптоты $x = \pm 1$, $y = \pm x$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm 2, 0)$. Начало — двойная точка с касательными $y = \pm 2x$. См. чертеж.



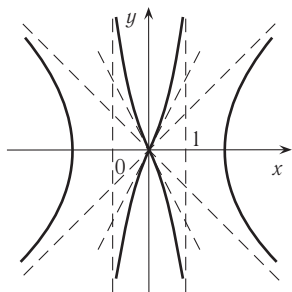
Чертеж к задаче 2198



Чертеж к задаче 2199

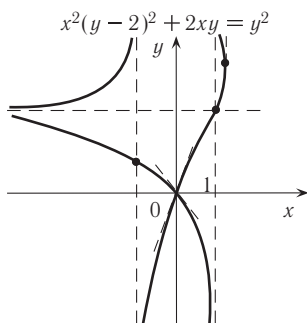


Чертеж к задаче 2200

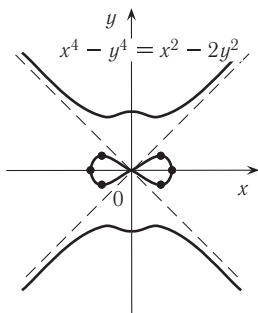


Чертеж к задаче 2201

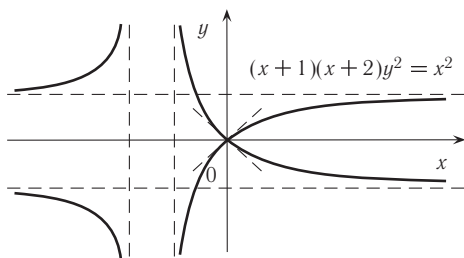
2202. Асимптоты $y = 2$, $x = \pm 1$. Начало — двойная точка с касательными $y = (1 \pm \sqrt{5})x$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(\frac{5}{4}, \frac{10}{3})$. См. чертеж. **2203.** Асимптоты $y = \pm x$. Начало — двойная точка с касательными $2y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(0, \pm\sqrt{2})$,



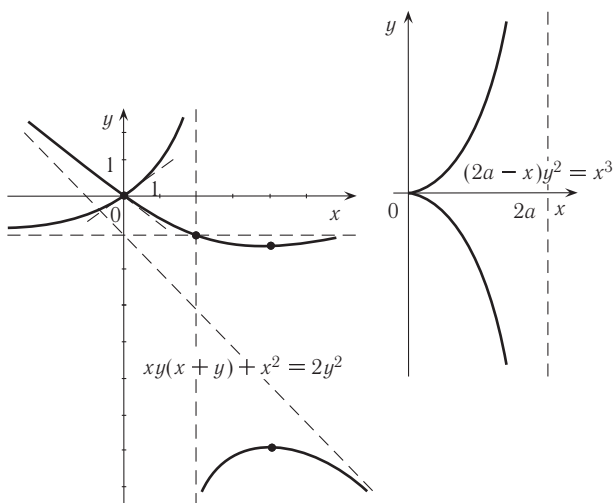
Чертеж к задаче 2202



Чертеж к задаче 2203



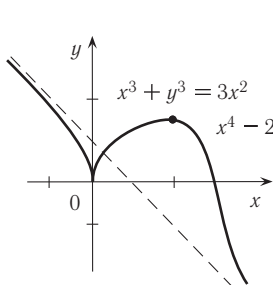
Чертеж к задаче 2204



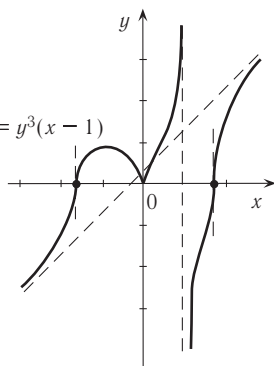
Чертеж к задаче 2205

Чертеж к задаче 2206

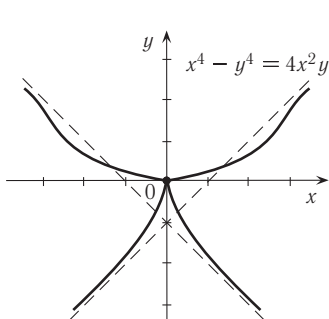
$(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}})$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $(\pm 1, 0)$.
 См. чертеж. **2204.** Асимптоты $y = \pm 1$, $x = -1$, $x = -2$. Начало — двойная точка с касательными $y\sqrt{2} = \pm x$. См. чертеж. **2205.** Асимптоты $x = 2$, $y = -1$, $x + y + 1 = 0$. Начало — двойная точка с касательными $2y = \pm x\sqrt{2}$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(4, -4 \pm 2\sqrt{2})$.
 См. чертеж. **2206.** Асимптота $x = 2a$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$ (цизоида Диоклеса). См. чертеж. **2207.** Асимптота $x + y = 1$. Начало — точка возврата с касательной $x = 0$. $(3, 0)$ — точка перегиба с касательной, параллельной оси Oy . В точке $(2, \sqrt[3]{4})$ касательная параллельна оси Ox . См. чертеж. **2208.** Начало координат — точка возврата с касательной $x = 0$. Асимптоты $x = 1$, $y = x + \frac{1}{3}$. Одна касательная параллельна оси Ox . См. чертеж. **2209.** Скифоид. Асимптоты $y + 1 = \pm x$. Начало — тройная точка с касательными $x = 0$ и $y = 0$. См. чертеж.



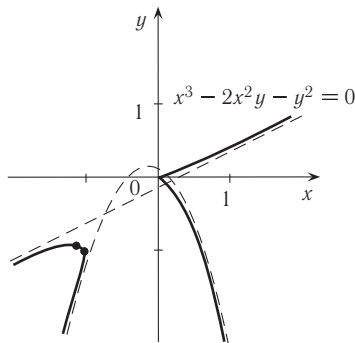
Чертеж к задаче 2207



Чертеж к задаче 2208



Чертеж к задаче 2209



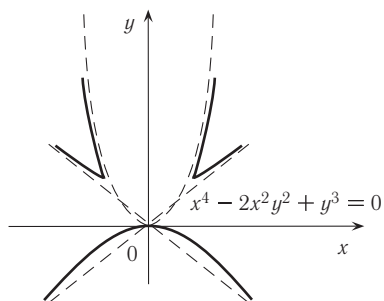
Чертеж к задаче 2210

2210. Асимптота $4x - 8y - 1 = 0$. Криволинейная асимптота $8y = -16x^2 - 4x + 1$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $\left(-\frac{9}{8}, -\frac{27}{32}\right)$. Касательная, параллельная оси Oy , в точке $(-1, -1)$. См. чертеж.

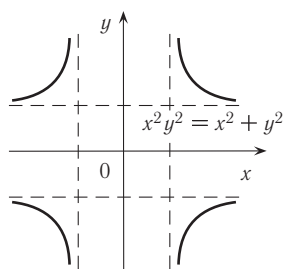
2211. Асимптоты $8y = 1 \pm 4x\sqrt{2}$. Криволинейная асимптота $y = 2x^2 - \frac{1}{4}$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $(0, 0)$ и $(\pm 1, 1)$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $\left(\pm\sqrt{\frac{27}{32}}, \frac{9}{8}\right)$. См. чертеж.

2212. Асимптоты $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. См. чертеж.

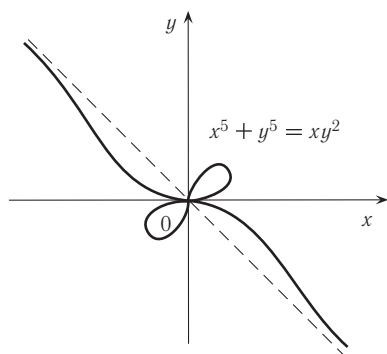
2213. Асимптота $x + y = 0$. Начало — тройная точка с касательными $x = 0$, $y = 0$. Касательные, параллельные оси Ox , в точках $\pm\left(\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{5}}\right)$. Касательные, параллельные оси Oy в точках $\pm\left(\frac{\sqrt[10]{108}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[10]{48}}{\sqrt{5}}\right)$. См. чертеж.



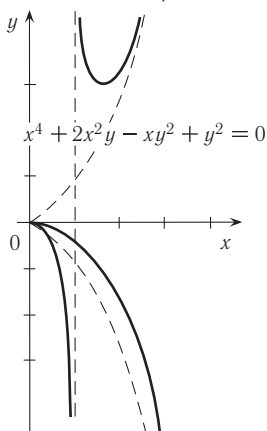
Чертеж к задаче 2211



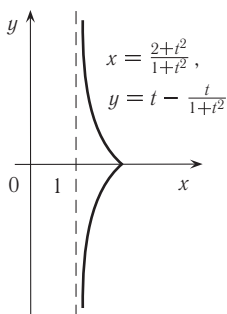
Чертеж к задаче 2212



Чертеж к задаче 2213



Чертеж к задаче 2214



Чертеж к задаче 2215

2214. Асимптота $x = 1$. Криволинейная асимптота $y = (x + 1)(\pm\sqrt{x} + 1)$. Начало — точка возврата с касательной $y = 0$. Касательная, параллельная оси Ox , в точке $\left(\frac{16}{9}, \frac{256}{27}\right)$.

2215. Асимптота $x = 1$. Точка возврата $(2, 0)$. См. чертеж.

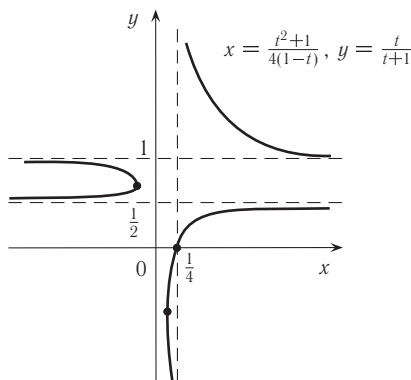
2216. Асимптоты $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$. Касательные, параллельные оси Oy , в точках $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}, \frac{\pm \sqrt{2}}{2}\right)$. См. чертеж.

2217. Асимптоты $2y = \pm 1$. Касательные, параллельные оси Ox , при $t\sqrt[4]{3} = \pm 1$. Касательные, параллельные оси Oy , при $t = 0$ и $t = \infty$. См. чертеж.

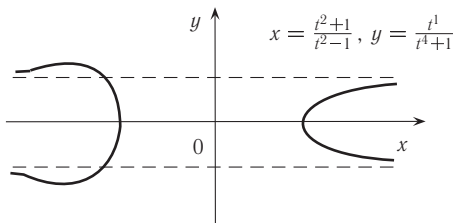
2218. Асимптоты $x + y \pm 2 = 0$ и $x = 0$. Касательные, параллельные оси Ox , при $2t = \pm\sqrt{5 + \sqrt{7}}$. См. чертеж.

2219. Асимптоты $x = 1$, $3x = 4$, $y = 2$, $3y = 2$. Касательные, параллельные оси Ox , при $t = -2 \pm \sqrt{5}$, и параллельная оси Oy , при $t = 0$. См. чертеж.

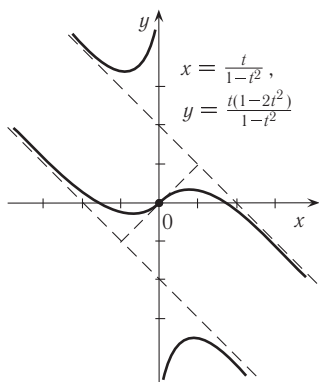
2220. Асимптота $x = 1$. Двойная точка в начале. Касательная, параллельная оси Oy , при $t = 0$. Две вершины с касательными, параллельными оси Ox .



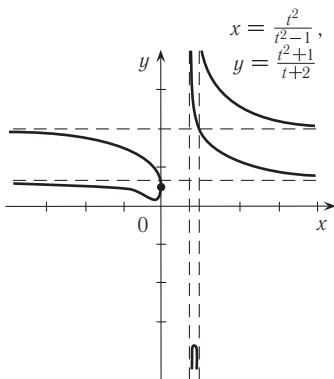
Чертеж к задаче 2216



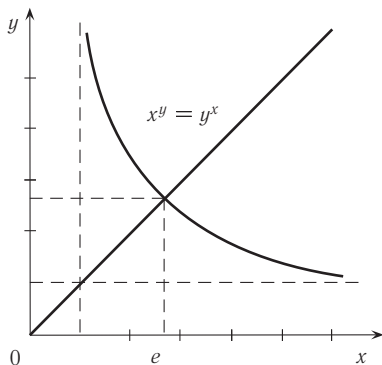
Чертеж к задаче 2217



Чертеж к задаче 2218



Чертеж к задаче 2219



Чертеж к задаче 2220

2221. Асимптота $x + 1 = 0$. Двойные точки при $t = 0$ и $t = 1$. Касательные, параллельные оси Oy , при $t = -1 \pm \sqrt{2}$. Касательная, параллельная оси Ox , при t , равном корню уравнения $t^3 + 3t - 2 = 0$, т. е. при $t \approx 0,596 \dots$

2222. Асимптоты: $4y = 2x - 3$, $2x + 1 = 0$, $y = 0$. Касательные, параллельные оси Oy , при $t = 0$ и $t = 2$. При $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ двойная точка.

2223. Асимптоты: $2x = 9$, $2y = -9$, $x - y = 6$. При $t = -2$ касательная, параллельная оси Ox , при $t = 2$ касательная, параллельная оси Oy . При $t = 0$ точка возврата.

2224. В начале двойная точка. Асимптота $y = x + 1$. Две параболические ветви.

2225. Начало — двойная точка. Асимптоты $y = 0$. Две точки, где касательная параллельна оси Ox .

2226. Асимптоты $y = \pm a$. Начало — двойная точка. 2227. Двойная точка (e, e) .

Асимптоты $x - 1 = 0$ и $y - 1 = 0$. См. чертеж. 2228. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$.

2229. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$. 2232. $x = a \sin^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = a \cos t$. 2234. $x^2 +$

$+ y^2 + x + y - 1 = 0$, $z = 0$. 2235. В соответствующих полярных координатах $r = e^\varphi$. 2238. $\frac{4x-t^4}{4t^2} = \frac{3y-t^3}{3t} = \frac{2z-t^2}{2}$.

2239. $\frac{4x-1}{4} = \frac{3y+1}{-3} = \frac{2z-1}{2}$, $\frac{x-4}{4} = \frac{3y+8}{-6} = z - 2$. 2240. $\cos \alpha = \sin^2 \frac{t}{2}$;

$\cos \beta = \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$; $\cos \gamma = \cos \frac{t}{2}$. 2241. При $t = n\pi$ касательная параллельна yOz , при $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ касательная параллельна xOz . 2242. $x + 3y = 10$,

$3y + 4z = 25$. 2243. $-4x + 3y + 6z = 47$, $-4x + 4y - z = 6$. 2244. $2m(x + y) =$

$= z + 2m^2$, $x = y$. 2245. $m \cos \alpha = \sqrt{a}$, $m \cos \beta = \sqrt{b}$, $m \cos \gamma = \sqrt{2z_1}$;

$m = \sqrt{a + b + 2z_1}$. 2246. $M \cos \alpha = z_1$, $M \cos \beta = mz_1$, $M \cos \gamma = -(my_1 +$

$+ x_1)$; $M^2 = (m^2 + 1)z_1^2 + (my_1 + x_1)^2$. 2247. $\frac{p+q}{\sqrt{2}}$. 2248. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+a^2t^2}}$.

2249. $x + y + 4x_0z = 2x_0 + 8x_0^3$. 2250. $(x \pm y)\sqrt{4a^2 - p^2} \pm pz = p\sqrt{4a^2 - p^2}$.

2253. $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. 2264. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ и $x =$

$= \frac{a}{\cos t}$, $z = b(t - \operatorname{tg} t)$. 2265. Окружность $rx = -a \sin t$, $ry = a \cos t$, $rz =$

$= b$; $r^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2266. $x = \sin^2 t$, $y = -\sin t \cos t$, $z = \cos t$ (кривая

Вивини) (см. задачу № 2232). 2268. $6x - 8y - z + 3 = 0$. 2269. $z = ay + b$.

2270. $x\sqrt{b} \pm y\sqrt{a} = 0$. 2271. $-e^{-t}x + e^t y + z\sqrt{2} - 2t = 0$. 2272. $bx \sin t -$

$-by \cos t + a(z - bt) = 0$. 2273. $(a_2b_1 - a_1b_2)(x - x_0) + (ab_2 - a_2b)(y - y_0) +$

$+ (a_1b - ab_1)(z - z_0) = 0$. 2275. $y_0x - x_0y = 0$, $z = z_0$ — главная нормаль,

$x_0x + y_0y = a^2$, $a^2(x - x_0) = by_0(z - z_0)$ — бинормаль. 2276. Бинормаль: $x =$

$= 6t + 1$, $y = -8t + 1$, $z = -t + 1$; главная нормаль: $x = -31t + 1$, $y = -26t + 1$,

$z = 22t + 1$. 2277. Вектор бинормали $\mathbf{B}(1, -2t, t^2)$, вектор главной нормали

$\mathbf{N}(2t + t^3, 1 - t^4, -t - 2t^3)$. 2278. $x = 2t + \frac{1}{2}$, $y = -2t + \frac{2}{3}$, $z = t + \frac{1}{2}$ — бн-

нормаль, $x = 2t + \frac{1}{2}$, $y = t + \frac{2}{3}$, $z = -2t + \frac{1}{2}$ — главная нормаль. 2279. $cx =$

$= -a \sin t$, $cy = a \cos t$, $cz = b$ — индикатриса касательной, $cx = b \sin t$,

$cy = -b \cos t$, $cz = a$ — индикатриса бинормали; $c^2 = a^2 + b^2$. 2282. $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} =$

$= \sin x \cos x$. 2283. Винтовая линия $x = (a - l) \cos t$, $y = (a - l) \sin t$, $z = bt$.

2284. $y = x \operatorname{tg} \frac{x}{b}$. 2285. Параметрическое представление точек поверхности

$x = a \cos u + bv \sin u$, $y = a \sin u - bv \cos u$, $z = av + bu$. 2286. $\rho \sqrt{1 + \sin^2 \frac{t}{2}} =$

$= 4$. 2287. $\rho \operatorname{sh} t = a\sqrt{2} \operatorname{ch}^2 t$. 2288. $\rho \sqrt{2} = (x + y)^2$. 2289. $\rho \sqrt{2} =$

$= 3e^t$. 2290. $2\rho = a \operatorname{ch} t$. 2291. $\rho \sqrt{a + b} = \sqrt{(a + b + 2z)^3}$. 2292. $\rho =$

$= \sqrt{6}$. 2293. $3(1 + t^2)^2$. 2294. $2a(1 + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}} / \sqrt{5 + \sin^2 t}$. 2295. $\frac{25}{6} a \sin 2t$.

2296. $(1 + z^2)^{\frac{3}{2}} / \sqrt{1 + z^2 + z^4}$. 2297. $(64y^6 + 36y^3 + 1)/12$. 2298. $\frac{1}{3(t^2+1)^2}$.

2299. $-\frac{z^2+2}{z^4+z^2+1}$. 2300. $\frac{3 \sin t}{5a}$. 2301. $a\rho = ar = (y+a)^2$. 2302. $2abtp\rho =$

$= (a^2 + 2b^2t^2)^2$; $r = -\rho$. 2306. Если шаг винта равен длине окружно-

сти цилиндра. 2308. Центр лежит на оси кривизны на расстоянии $-r \frac{dp}{ds}$ от

центра кривизны. **2309.** $\xi^2 = 2\rho\eta$ — на соприкасающейся плоскости, $6\rho r\zeta = -\xi^3$ — на спрямляющей плоскости, $9a^2\zeta^2 = 2\rho r\eta^3$ — на нормальной плоскости. **2315.** $(mx - ly)^2 + (lz - nx)^2 + (ny - mz)^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$. **2316.** $(x + 4y + 9z)^2 = 14(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1)$. **2317.** $(nx - lz)^2 + (ny - mz)^2 = an(ny - mz)$. **2318.** $(x + 1)^2 = 2y^2 + z^2$. **2319.** $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)$. **2320.** $c^2(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)(z + c)^2$. **2321.** $4(x^2 + y^2) = (z + 2)^2$. **2322.** $4xy + (z + 3c)^2 = 0$. **2323.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$. **2324.** $\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **2325.** $y^2 + z^2 = 2px$. **2326.** $(\sqrt{x^2 + z^2} - a)^2 + y^2 = R^2$. **2327.** $y^4 = 4p^2(x^2 + z^2)$. **2328.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$. **2329.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$. **2330.** Циклоида. **2331.** $x = a \sin \theta \cos \varphi$, $y = b \sin \theta \sin \varphi$, $z = c \cos \theta$. **2332.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$. **2333.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **2334.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **2335.** $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$. **2336.** $xx_1 + yy_1 = zz_1$. **2337.** $x + y + 3z = 9$. **2338.** $x_1^{n-1} \cdot x + y_1^{n-1} \cdot y + z_1^{n-1} \cdot z = a^n$. **2339.** $(2r^2 - a^2)x_1x + (2r^2 + a^2)y_1y + (2r^2 - a^2)z_1z = r^4$, где $r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$. **2341.** $d = 2\pi z_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} / \sqrt{h^2 + 4\pi^2(x_1^2 + y_1^2)}$. **2342.** $x + y + z - 3 = 0$. **2343.** а) $x = x_1$, $x_1y = az$; б) $y = y_1$, $y_1x = az$. **2344.** $x \sin v - y \cos v + \frac{u}{a}z = uv$. **2345.** $3x - 3y + z = 2$. **2352.** $x \cos u + y \sin u = a$, $aku = az - k\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$. **2353.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} \tan^2 \alpha$. **2367.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$. **2368.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$. **2370.** $y^2 + z^2 = 1$. **2371.** $y^2 + z^2 = (x - \sqrt{2})^2$. **2372.** $(ny - mz)^2 + (lz - nx)^2 + (mx - ly)^2 = a^2(l^2 + m^2 + n^2)$. **2373.** $4(x^2 + y^2) = 4z + 1$. **2374.** $x^2 + (y \pm \sqrt{(p - q)q})^2 = 2pz + pq$. **2375.** $a^2 - z^2 = (r \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2$. **2376.** $y^2 = 2(x + z)$. **2377.** $(\sigma x - l\tau)^2 + (\sigma y - m\tau)^2 + (\sigma z - n\tau)^2 = p^2\tau^2$, где $\sigma = l^2 + m^2 + n^2 - p^2$, $\tau = lx + my + nz$. **2378.** $|x| + |y| + |z| = 1$. **2379.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$. **2380.** $xyz = c^3$. **2381.** $x^\sigma + y^\sigma + z^\sigma = c^\sigma$, $(n + 1)\sigma = n$. **2383.** $\frac{a^2}{c}$ и $\frac{b^2}{c}$. **2384.** p и q . **2385.** $mR_1 = -mR_2 = u^2 + m^2$. **2386.** $aR_1 = (z + \sqrt{m^2 + z^2})m$, $aR_2 = (z - \sqrt{m^2 + z^2})m$, $m^2 = x^2 + y^2 + a^2$. **2387.** $R_1 = -R_2 = 1 - \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{\cos x \cos y}$. **2388.** $R_1 = -R_2 = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$. **2389.** $R_1 = -R_2 = a \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a}$. **2391.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми $y = 0$; $cx\sqrt{b^2 - c^2} \pm az\sqrt{a^2 - b^2} = 0$, если $a > b > c$. **2392.** Точки пересечения эллипсоида с прямыми

$$\begin{cases} z - 1 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z - 1 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0. \end{cases}$$

2393. $\frac{1}{R_1 R_2} = pq \left(1 + \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}\right)^2$. **2396.** $\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{f' \cdot f''}{\rho(1 + f'^2)^2}$; $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{f''}{2(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{f'}{2\rho\sqrt{1 + f'^2}}$. **2398.** $x^2 + y^2 + z^2 = px$. **2407.** $(1 + f'^2) \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2 \left(\frac{r^2}{c^2} - 1\right)$, где c — постоянная.

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

2408. $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$. 2409. $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$. 2410. $2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$. 2411. $2 \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\pi-\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi-\alpha}{2})$. 2412. $2 \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) \cdot (\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}))$.
2413. $\frac{1}{\cos \alpha}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. 2414. $a^2 - ab + b^2$. 2415. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. 2416. $(2a - b - c)(2b - a - c)(2c - a - b)$. 2417. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 2418. $\pm(2+i)$. 2419. $\pm(3+4i)$. 2420. $x_1 = -2+i$, $x_2 = -3+i$. 2421. $x_1 = 2i$, $x_2 = -1$. 2422. $-i$, $\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$. 2423. $\sqrt[6]{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$. 2424. $2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. 2425. $2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$; $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. 2426. $x_k = \operatorname{tg} \frac{\alpha+2k\pi}{n}$; $k = 0, 1, \dots, n-1$. 2427. $x_k = \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2n}\pi$; $k = 0, 1, \dots, n-1$. 2428. $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$. 2429. $3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$. 2430. $\cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$. 2431. $5 \sin \varphi \cos^4 \varphi - 10 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^5 \varphi$. 2432. $\frac{1}{4}(3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi)$. 2433. $\frac{1}{4}(3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi)$. 2434. $\frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2 \varphi + \cos 4 \varphi)$. 2435. $\frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2 \varphi + \cos 4 \varphi)$. 2436. $\frac{1}{16}(10 \cos \varphi + 5 \cos 3 \varphi + \cos 5 \varphi)$.
2437. $\frac{1}{16}(10 \sin \varphi - 5 \sin 3 \varphi + \sin 5 \varphi)$. 2442. $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$. 2443. $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$.
2444. $\frac{(1-a) \cos \varphi - a^{n+1} \cos(2n+3)\varphi + a^{n+2} \cos(2n+1)\varphi}{1-2a \cos 2\varphi + a^2}$.
2445. $\frac{1-a^2-2a^{n+1} \cos(n+1)\varphi + 2a^{n+2} \cos n\varphi}{1-2a \cos 2\varphi + a^2}$.
2446. $1 + (2n+1)\pi i$. 2447. $\ln 2 + (2n+1)\pi i$. 2448. $(4n+1)\frac{\pi i}{2}$. 2449. $(8n+1)\frac{\pi i}{4}$. 2450. $\ln \sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2n\pi i$. 2451. -1 . 2452. $e^{-(4n+1)\frac{\pi}{2}}$. 2453. $e^{-2n\pi + i \ln 2}$. 2454. $e^{2n\pi + \frac{\pi}{4}}$. 2455. $i \operatorname{th} \frac{\pi}{2}$. 2456. $\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. 2457. $\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. 2458. $\frac{1}{2i} \ln \frac{1-x}{1+x} + n\pi$. 2459. $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$. 2460. $a+bi + i \operatorname{Re} \frac{2k\pi i}{n}$; $k = 0, 1, \dots, n-1$. 2461. $1 + \sqrt{2}e^{\frac{(3\pm 4)\pi i}{12}}$. 2462. $z_1 + (z_1 - z_0)e^{\pm \frac{2\pi i}{n}}$. 2463. Вне многоугольника. 2464. $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$. 2465. $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. 2466. $\frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. 2467. Площадь, ограниченная многоугольником. 2471. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. 2475. Прямая. 2476. Окружность. 2477. Эллипс. 2478. Спираль Архимеда. 2479. Логарифмическая спираль. 2480. Увеличивается на 4π . 2481. Первые два возрастают на π , последний — на 2π . 2482. Умножится на $e^{2\pi i(\alpha+\beta)}$. 2483. u обратится в $ue^{2\pi i\alpha} + 2\pi i(z-a)^{\alpha}e^{2\pi i\alpha}$. 2484. $a = 0$, $b = -2$ или $2a\sqrt{2} = \pm 1$, $b = -3$. 2487. $1 - i$, $\frac{1}{6}(-1 \pm \sqrt{13})$.

$$2502. 2 \prod_{k=0}^{n-1} \left(x + i \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2n} \pi \right).$$

$$2503. 2^{2n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k+1}{4n} \pi \right).$$

$$2504. 2^{2n} x \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k+1}{4n+2} \pi \right).$$

$$2505. f(i)f(-i) = (a_n - a_{n-2} + a_{n-4} - \dots)^2 + (a_{n-1} - a_{n-3} + \dots + a_{n-5} - \dots)^2.$$

2509. Не делится.

$$2510. 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3 + 2a_2^3 = 0.$$

$$2511. rp^3 = q^3.$$

$$2512. \lambda = -22, \mu = 40, x_1 = -5, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 4.$$

$$2513. \alpha = 3, q = 0, p \neq 0.$$

$$2514. A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

$$2515. 5\varphi(x) = 4x^2 + 3x - 2.$$

$$2516. f(x) = -1 + \frac{1}{8}(x-1)^4 \left(1 + 2(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{5}{2}(x+1)^3 \right).$$

$$2517. f(x) = -1 + (-1)^n 2^{1-n} (x-1)^n \times \\ \times \left(1 + \frac{n\sigma}{2} + \frac{n(n+1)}{2!} \frac{\sigma^2}{4} + \dots + \frac{n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!2^{n-1}} \sigma^{n-1} \right),$$

где $\sigma = x + 1$.

$$2518. \varphi(x) \left(A + \frac{A_1}{\varphi'(a_1)(x-a_1)} + \dots + \frac{A_n}{\varphi'(a_n)(x-a_n)} \right); \quad \varphi(x) = (x-a_1)\dots$$

$$\dots(x-a_n). \quad 2524. -2 \leq \lambda \leq 2. \quad 2528. q_1^4 + p_1^5 \leq 0, 4q_1 = q, 5p_1 =$$

$= p$. 2531. Положить $x = e^t$ и применить теорему Ролля; придем к уравнению без a_n . Разделить на $e^{\lambda_{n-1}t}$ и еще раз применить теорему Ролля и т. д.

2532. Следствие предыдущей. 2534. Положить $x = e^t$ и применить теорему Ролля. 2535. Следствие предыдущей. 2536. Корни уравнения $a_0x^m + a_1x^{m-1} +$

$+ \dots + a_nx^{m-n} = 0$ вещественны при любом m . Новое уравнение получаем,

дифференцируя левую часть $m-s-k$ раз. Заменяем x на $\frac{1}{x}$ и умножаем

на x^{s+k} . Умножаем на x^{m-s-k} и дифференцируем $m-k$ раз. Опять заме-

няем x на $\frac{1}{x}$ и освобождаем от знаменателя x^{s+k} . Делим на $(m-s)!(m-k)!$

и умножаем на $k!$. Перейдя к пределу по $m \rightarrow \infty$, получаем нужное уравнение. Вещественность всех корней уравнения сохраняется. 2537. Следствие

предыдущей. 2538. Уравнение можно переписать в таком виде:

$$n \frac{f(x)f''(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} + \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 = 0.$$

Разлагая на простейшие дроби, получаем: $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x-x_k} \right)^2 = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-x_k)^2}$,

что при вещественных x и x_k противоречит неравенству Коши $(\sum a_k b_k)^2 <$

$< \sum a_k^2 \sum b_k^2$. 2539. График функции $\frac{f'(x)}{f(x)}$ имеет n вертикальных асимптот,

если корни $f(x)$ различны. Можно также применить теорему Ролля к функ-

ции $e^{\frac{x}{\lambda}} f(x)$. 2540. Следует из того, что уравнение имеет корень между дву-

мя корнями $f'(x)$, между которыми $f(x) + m \neq 0$. 2541. Применить теорему

Ролля к $x^\lambda f(x)$. 2542, 43. Следствие 2541 и того, что корни $f(ax)$ веществен-

ны, если корни $f(x)$ вещественны и a вещественно. 2544. Основано на соот-

ветственном обобщении 2541. Последнее получается из рассмотрения суммы

$\frac{\lambda}{x} + \sum \frac{1}{x-x_k}$. 2545. Следствие предыдущего и того, что начало можно перене-

сти в любую точку. 2546. Теорема Ролля для функции $e^{-\frac{x}{\alpha}} \Phi(x)$. 2547. Изучить

$\arg f(x)$ при движении по отрезку вещественной оси между точками $-N$ и $+N$

и по замыкающей полуокружности. **2549.** Следствие 2536 и бинома Ньютона. **2550, 51.** Теорема Ролля. **2553.** В каждом из интервалов $(a_\nu, a_{\nu+1})$ есть корень. **2554.** В одном из интервалов нет корня, но уравнение имеет степень $n - 2$. **2555.** Вещественность следует из теоремы Ролля для e^{-x^2} . Чтобы показать отсутствие корней у $P_n(x)$ при $|x| > \sqrt{2n+1}$, рассмотреть $y = e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ и, заметив, что $y'' + (2n+1-x^2)y = 0$, $y(\infty) = y'(\infty) = 0$, применить теорему Ролля. **2556.** При нечетном n один корень, при четном n ни одного, так как при четном n и при $y' = 0$, $y'' > 0$, $y_{\min} = \frac{x^n}{n!} > 0$. **2557.** При нечетном n один корень, при четном n ни одного. **2558.** Воспользоваться равенством: $(1-x^2)\varphi'_n(x) = n\varphi_{n+1}(x)$, из которого следует, что число вещественных корней $\varphi_{n+1}(x)$ не меньше, чем число корней $\varphi_n(x)$ плюс единица. **2559.** Число положительных корней не больше единицы, число отрицательных корней — тоже. Число мнимых корней не меньше восьми. **2560.** Следствие 2537. **2561.** Если $f(x) = 0$ — данное уравнение, то $(x^2 - 2x + 1)f(x) = 0$ имеет мнимые корни. **2562.** Умножить на $(x-1)^{n-1}$. **2563.** Умножить на $(x-a)(x-b)$. **2564.** $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$. **2565.** $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$. **2566.** $x^3 - 1 - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$. **2567.** $\frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$. **2568.** $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$. **2569.** $x^3 + 3x^2 + 6x + 10 + \frac{14}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$. **2570.** $\frac{1}{(x^2+x+1)} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$. **2571.** $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$. **2572.** $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{x}{1+x^2}$. **2573.** $\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}$. **2574.** $2 - \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$. **2575.** $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{x \cos \frac{2\pi \nu m}{n} - \cos \frac{2\pi \nu (m-1)}{n}}{x^2 - 2x \cos \frac{2\pi \nu}{n} + 1} \right)$. **2576.** $-1 + \frac{2-2x \cos \varphi}{x^2-2x \cos \varphi+1}$. **2577.** $\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1-x \cos \frac{2\nu+1}{2n} \pi}{x^2-2x \cos \frac{2\nu+1}{2n} \pi+1}$. **2578.** $\frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x+1} + 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{1+x \cos \frac{2\nu}{2n+1} \pi}{x^2+2x \cos \frac{2\nu}{2n+1} \pi+1} \right)$. **2579.** $\frac{-5x+4}{x^2+2} + \frac{8x+1}{x^2+x+1}$. **2580.** $\frac{x}{x^2+x\sqrt{3}+2} + \frac{x}{x^2-x\sqrt{3}+2}$. **2581.** $\frac{1}{x+2 \cos \frac{\pi}{9}} + \frac{1}{x+2 \cos \frac{7\pi}{9}} + \frac{1}{x+2 \cos \frac{13\pi}{9}}$. **2582.** $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu}{x^\nu}$, $s_\nu = \sum \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} x_k^{\nu-1}$. **2583.** $\frac{a^2 - (3a^2-1)x + x^2}{(1-x)(1-(4a^2-2)x+x^2)}$. **2584.** Коэффициенты ряда должны быть связаны соотношением: $a_0 u_s + a_1 u_{s+1} + \dots + a_m u_{s+m} = 0$, $a_0 \neq 0$. Беря последовательные числа среди коэффициентов $u_0, u_1, u_2, \dots$, можем получить не более чем 3^m различных последовательностей, так как $u_\nu = \pm 1$ или 0. Поэтому среди таких групп по m чисел u_τ найдутся одинаковые. Если числа $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{l+m}$ совпадают с числами $u_{l+p}, u_{l+p+1}, \dots, u_{l+p+m}$, то $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{\nu=0}^{l+p-1} u_\nu x^\nu \cdot (1+x^p+x^{2p}+\dots) = \frac{\omega(x)}{1-x^p}$, где $\omega(x)$ полином. **2585.** Искомая сумма равна $-\frac{f'(x)}{f(x)}$, где $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$. **2586.** Если y — корень производной в интервале $(x_{\nu-1}, x_{\nu+1})$, то $\sum_{k=1}^n \frac{1}{y-x_k} = 0$. **2587.** Следует из равенства $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f}{m}$ или $\sum \frac{1}{x-x_k} = \frac{f}{m}$. **2588. 27. 2589.** -375 . **2590. 143. 2591.** -7 . **2592.** -5 . **2593.** 0 . **2594.** ab . **2595.** $abcd + bcd + acd + abd + abc$. **2596.** $-2(x^3 + y^3)$. **2597.** $2abc(a+b+c)^3$. **2598.** $1 + a^2 + b^2 + c^2$. **2599.** $abcd + ab + ad + cd + 1$. **2600.** $(x-y)(y-z)(z-x)$.

2601. $\prod (x_\nu - x_\mu)$; $0 < \nu \leq n$, $0 < \mu \leq n$, $\nu > \mu$. **2602.** $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \prod (x_\nu - x_\mu)$; $\nu > \mu$, $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) \prod (x_\nu - x_\mu)$; $\nu > \mu$. **2603.** $\Delta_1 = -\prod_{\nu > 2} (x_\nu - x_2)^2 \cdot \prod_{\nu > \mu > 2} (x_\nu - x_\mu)$; $\Delta_2 = -\prod_{\nu > 3} (x_\nu - x_3)^3 \cdot \prod_{\nu > \mu > 3} (x_\nu - x_\mu)$. **2605.** $-2 \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a)$.

2606. $4 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c-a}{2} (\sin(a+b) + \sin(b+c) + \sin(c+a))$.

2607. $-64\alpha\beta\gamma(\beta^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)$; $\alpha = \sin a$, $\beta = \sin b$, $\gamma = \sin c$. **2608.** $\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \delta) \sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \delta) \sin(\beta - \delta)$.

2610. Полезно положить $a_1 = \lambda(1 + \sigma_1)$, $a_2 = \lambda(1 + \sigma_2)$, ..., $a_n = \lambda(1 + \sigma_n)$.

2611. Умножая строки на степени α и складывая, легко установить делимость на $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2)$, ..., $\varphi(\alpha_n)$. **2613.** Рассмотреть систему соответствующих линейных уравнений. Если $\Delta = 0$, то одно из них окажется невозможным.

2614. Умножить все элементы, не стоящие на главной диагонали, на θ , где $|\theta| < 1$, и заставить $\theta \rightarrow 0$. **2616.** $n = 4m$, $(m = 1, 2, \dots)$. **2617.** $n = 4m - 2$, $(m = 1, 2, \dots)$.

2620. $\Delta = +1$, если новые оси можно непрерывным движением совместить со старыми; $\Delta = -1$, если ориентировка новых осей отличается от ориентировки старых. **2622.** $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. **2623.** $x = a$, $y = 1$, $z = -1$. **2624.** $x = -t$, $y = 0$, $z = 0$. **2625.** $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$, $t = 1$. **2626.** $x = 1 + 2\sigma + 2\tau$, $y = 1 + \sigma$, $z = 1 + \sigma - \tau$, $t = 1 + \tau$. **2627.** $u = -t$. **2628.** $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. **2629.** $x_\nu = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - \nu$.

2632. Рассмотреть соответствующую систему линейных уравнений. **2633.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$. **2634.** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$. **2635.** $\begin{vmatrix} x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & z_4 - z_3 \end{vmatrix} = 0$.

2636. Если ранг прямоугольной матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix}$ равен 3, то — в плоскости, если ранг 2, то — на прямой. **2637.** Такое же условие, как в предыдущей задаче, для ранга матрицы из коэффициентов плоскостей. **2638.** Знак у всех x_ν в одном решении одинаковый. **2639.** $a_{\mu\nu} = l_\mu m_\nu$; $\mu = 1, 2, \dots, n$; $\nu = 1, 2, \dots, m$. **2640.** Билинейная форма ранга r может быть представлена как сумма r произведений пар линейных форм. **2642.** $(ae + bi + cj + dk) \pm (a_1 e + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = (a \pm a_1)e + (b \pm b_1)i + (c \pm c_1)j + (d \pm d_1)k$; $(ae + bi + cj + dk)(a_1 e + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = aa_1 - bb_1 + cc_1 - dd_1 + (ae_1 + b_1 b + cd_1 - c_1 d)i + (ac_1 + a_1 c + b_1 d - bd_1)j + (ad_1 + a_1 d + bc_1 - b_1 c)k$. **2643.** Диагональная матрица, т. е. матрица, у которой все элементы не на главной диагонали равны нулю. **2644.** A — ортогональная матрица. **2645.** При четном n корни мнимые, при n нечетном $x = 0$. **2646.** Следует из того, что у ортогональной матрицы обратная матрица получается транспонированием. **2648.** Рассмотреть систему уравнений

$$(a_{11} - s)z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n = 0$$

$$a_{21}z_1 + (a_{22} - s)z_2 + \dots + a_{2n}z_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + (a_{nn} - s)z_n = 0$$

положив $s = u + iv$, $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$. **2649.** Корни чисто мнимые. **2652.** Воспользоваться неравенством Коши:

$$\left(\sum_{\mu} \sqrt{a_{\mu\nu} a_{\nu\mu} x_{\mu} y_{\mu}} \right)^2 < \sum_{\mu} a_{\nu\mu} x_{\mu} \sum_{\mu} a_{\mu\nu} y_{\mu}.$$

$$2654. \begin{vmatrix} 1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ x & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & \dots & b_{n+1,n} \end{vmatrix}.$$

2655. $E_1(\lambda) = 1$, $E_2 = \lambda - 1$, $E_3 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$. 2656. 1, $\lambda + 1$, $(\lambda + 1)(\lambda + 4)$. 2657. У первой $E_1 = E_2 = 1$, $E_3 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$, у второй $E_1 = E_2 = 1$, $E_3 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$ эквивалентны. 2659. $E_1 = E_2 = E_3 = 1$, $E_4 = \lambda(\lambda - 1)$, $E_5 = \lambda^2(\lambda - 1)$. 2660. 0. 2661. $(x + y + 2z)^2 - (x - y)^2 - 4z^2$. 2662. Два положительных и один отрицательный знак перед квадратами. 2663. Три квадрата, взятых с плюсом, один с минусом. 2664. $x_\mu = C_{\mu 1}y_1 + C_{\mu 2}y_2 + \dots + C_{\mu n}y_n$, где $C_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\mu\nu}$ в соответствующем определителе. 2670. 38. 2671. 59. 2672. $a^2b - 2b^2 - ac + 4d$. 2673. -9. 2674. 74. 2675. -1. 2676. -12. 2677. $S_m = -(a^m + b^m)$. 2678. $S_1 = S_2 = \dots = S_n = -a$. 2680. $\frac{2a^2b - 4ac - 2b^2}{c - ab}$; $\frac{a^4 - 3a^2b + 5ac + b^2}{c - ab}$. 2681. $-\sqrt{-a^4 + 4a^2b - 8ac}$. 2682. $5x^2 + x - 6$. 2683. $-4y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7$. 2684. $y = 2x^2 - x - 2$. 2685. $\frac{a^2 - bcN}{a^3 + Nb^3 + N^2c^3 - 3Nabc} + \frac{(c^2N - ab)x + (b^2 - ac)x^2}{a^3 + Nb^3 + N^2c^3 - 3Nabc}$. 2686. Общий корень $x = 1$. 2687. Общих корней нет. 2688. То же. 2689. $\lambda = 10$; $\mu = -5$. 2690. Точки $(0, 0)$ — двойная, $(2, -1)$, $(1, 2)$, $(1, 68; 2, 52)$. 2691. Точки $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}, \frac{-3+i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{4}, \frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{4}, \frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)$. 2692. $\begin{vmatrix} 7 & 2y-26 & 15 \\ 2y-26 & 2y^2-49y+111 & 15y-99 \\ 15 & 15y-99 & 21y+162 \end{vmatrix} = 0$. 2693. $m^4 + 9m^2 + 54 = 0$. 2694. $28m^3 + 713m^2 - 100m = 0$. 2695. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n a^{n-1}$. 2696. $4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2$. 2697. $M = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n$. 2698. Рассмотреть уравнения $x^n + p_1(\nu)x^{n-1} + \dots + p_n^{(\nu)} = 0$ корни которых равны корням данного в степени ν . Числа $p_\mu^{(\nu)}$ ограничены и целые. Среди уравнений должны быть одинаковые. 2699. $4b^3 + 27c^2 + 4a^3c - a^2b^2 - 18abc \leq 0$. 2700. Подстановка $x = y - 1$; корни $x = -1 \pm i\sqrt{2}$, $-1 \pm i\sqrt{3}$. 2701. $y^4 - 9y^3 + 75y^2 - 300y + 2250 = 0$; $5x = y$. 2702. $y^4 - 25y^3 + 375y^2 - 11700 = 0$; $30x = y$. 2704. $y^5 + 2y^4 + 5y^3 + 3y^2 - 2y - 9 = 0$. 2705. $2x = -1 \pm \sqrt{5}$. 2706. Корни $m \pm \sqrt{m^2 - n}$, $2m \pm \sqrt{4m^2 - n}$. 2707. $x_1 = x_2 = 2$, $2x_3 = 2x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = -1$. 2708. $q = 0$. 2710. Левую часть можно разбить на множители:

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n.$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left(x - \frac{1}{x_1}\right) \left(x - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x - \frac{1}{x_n}\right) = \\ &= x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2} + \dots + \frac{1}{b_n}. \end{aligned}$$

При этом получается равенство: $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + 1 = a_nb_n$. Если $-2 < a_n < 2$, то при вещественных b_ν равенство невозможно. Поэтому среди b_ν , а значит и среди x_ν , должны быть мнимые. 2711. Рассмотреть разность $f(x) - 2^n T_n\left(\frac{x}{2}\right)$, где $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева.

2712. Сводится к предыдущему результату. 2714. $y^3 - 7y^2 + 11y - 5 = 0$. 2715. $y^3 - 15y^2 + 18y + 104 = 0$. 2716. $(y - 1)^2(y + 1)^2 = 0$. 2717. $y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + ab - c = 0$. 2718. $y^3 - 2y^2 - 1 = 0$. 2719. $25y^3 + 37y^2 + 18y + 3 = 0$. 2720. $y + p = 0$. 2721. $243y^3 + 288y^2 - 153y + 145 = 0$. 2722. $a^6y^3 + 9a^4(aa_2 - a_1^2)y^2 - 108(aa_2 - a_1^2)^3 - 27(2a_1^3 - 3a_1a_2a_3 - a_2^2a_3)^2 = 0$. 2723. $a, a - b, a + b$. 2724. $a + b, a - b, a - 3b$. 2725. $a - 1, a + 1, a^2 + 1$. 2726. $x_1 = 2, 2x_2 = 3 + \sqrt{21}, 2x_3 = 3 - \sqrt{21}$. 2727. $4a, 6a, a - b, a + b$. 2728. $a, 2a, a + 2, 2$. 2729. $x_1 = -1, x_2 = -2, 4x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{23}$. 2730. $x_1 = 3, 2x_{2,3} = -3 \pm i\sqrt{3}$. 2731. $x_1 = 1, 2x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{27}$. 2732. $x_1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} = u + v, x_2 = u\omega + v\omega^2, x_3 = u\omega^2 + v\omega, \omega^3 = 1$. 2733. $x_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1, 2, x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{15}$. 2734. $x_1\sqrt{3} = \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 10i} + \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 10i}$ и т. д. Корни $-1, 3, -2$. 2735. $2x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}, 2x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{11}$. 2736. $x_{1,2} = -1 \pm i, x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3}$. 2737. $x_1 = 1, x_2 = u + v, x_3 = u\omega + v\omega^2, x_4 = u\omega^2 + v\omega; 2\omega = -1 + i\sqrt{3}, u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, v = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$. 2738. $-2 \pm \sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{7}$. 2739. $x_1 = 2, 3x_2 = -2$. 2740. $2x_1 = 2x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = -2$. 2741. $x_1 = -5$. 2742. $x_1 = 2$. 2743. $2x_1 = -3, 3x_2 = 2$. 2744. $-2, 5, 3$. 2745. $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -2$. 2746. $x_1 = -2, 2x_2 = 1$. 2747. $x_1 = x_2 = 2$. 2748. $x_1 = x_2 = -2$. 2749. $x_1 = x_2 = 1, -x_3 = x_4 = -2$. 2750. $x_1 = x_2 = 2$. 2751. Левая часть делится на $(x^2 + x + 1)^2$. 2752. $x_1 = x_2 = x_3 = -2, x_4 = x_5 = 2$. 2753. $x_1 = x_2 = i, x_3 = x_4 = -i$. 2754. $x_1 = x_2 = -1$. 2755. Делитель $(x^2 - x + 1)^2$. 2756. $x_1 = x_2 = x_3 = i$. 2757. Корни в интервалах $(-4, -3), (0, 1), (3, 4)$. 2758. Корни в интервалах $(-5, -4), (-1, 0), (5, 6)$. 2759. $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 4)$. 2760. $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 4)$. 2761. $(-3, -2), (0, 1), (1, 2)$. 2762. $(-5, -4), (-3, -2), (0, 1)$. 2763. а) $p > 0$ — один вещественный корень x_1 , знак которого обратен знаку q ; б) $p < 0$ — один или три вещественных корня, смотря по знаку $(2n)^{2n}p^{2n+1} + (2n + 1)^{2n+1}q^{2n}$. 2764. $(-4, -3), (-1, 0), (3, 4)$. 2765. $(-6, -5), (0, 1), (4, 5)$. 2766. $(2, 3), (3, 4)$. 2767. $(-1, 0), (0, 1)$. 2768. $(-7, -6), (-1, 0)$. 2769. $(0, 1), (3, 4), (-\frac{1}{2}, 0), (-1, -\frac{1}{2}), (-4, -3)$. 2770. $(1, 2)$. 2771. $(1, 2)$. 2772. $(-5, -4), (0, 1), (4, 5)$. 2773. $(-1, 0), (5, 6)$. 2774. $(-2; -1, 5), (-1, 5, -1), (0, 1), (1, 2)$. 2775. $(-3, -2), (-2, -1), (1, 2), (15, 16)$. 2776. $(-2, -1); (0, 0, 5), (0, 5, 1)$. 2777. $(-2, -1)$. 2778. а) $x^2 + px + q, 2x + p, p^2 - 4q$; б) $x^3 + px + q, 3x^2 + p, -2px - 3q, -(4p^3 + 27q^2)$. 2779. 80. Корни вещественны при $p^5 \geq q^2$. При $p^5 \leq q^2$ уравнение имеет лишь один вещественный корень. 2782. Корни в интервалах $(-a^2, -b^2), (-b^2, -c^2), (-c^2, \infty)$. 2783. Если a вне интервала $(-n, 0)$, уравнение имеет один вещественный корень при n нечетном и ни одного при n четном. Если n в интервале $(-n, 0)$ и k — целая часть $-a$, то при четном n два вещественных корня, а при n нечетном — один, если k нечетное, и три — если k четное. 2784. $x_1 = -2,33006, x_2 = 0,20164$. 2785. $0,83399, 5,94883$. 2786. $-3,94883, -0,21718, 1,16602$. 2787. $-4,14510, 0,66908$. 2788. $-0,88677$. 2789. $0,38687, 1,24025$. 2790. $-0,19994$. 2791. $-0,435, 0,381$. 2792. $1,088$. 2793. $0,091$. 2794. $0,567$. 2795. $0,776; 2,223$. 2796. $652,7$ мм.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

(Произвольные постоянные в неопределенных интегралах опущены)

2797. $\frac{1}{4}x^4$. 2798. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$. 2799. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$. 2800. $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}$. 2801. $2\sqrt{x}$. 2802. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.
 2803. $-\frac{1}{2}x^{-2}$. 2804. $-\frac{2}{\sqrt{x}}$. 2805. $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$. 2806. $\frac{1}{5}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x^2$.
 2807. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$. 2808. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x$. 2809. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \ln x$. 2810. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 3 \ln x$. 2811. $\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right)\sqrt{x}$. 2812. $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2\right)\sqrt{x}$. 2813. $-e^{-x}$.
 2814. $-\frac{1}{3}e^{-3x}$. 2815. $-\frac{1}{2}\cos 2x$. 2816. $\frac{1}{3}\sin(3x - 5)$. 2817. $\ln(x - 2)$.
 2818. $\frac{1}{3}\ln(3x + 2)$. 2819. $\frac{1}{2}x^2 + x + 3 \ln(x - 2)$. 2820. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$. 2821. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \times$
 $\times \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$. 2822. $\frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{2}{7}}$. 2823. $\arcsin \frac{x}{\sqrt{5}}$. 2824. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 +$
 $+ x + \ln(x - 1)$. 2825. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 6})$. 2826. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 7})$. 2827. $-\frac{1}{2(x-2)^2}$.
 2828. $\frac{1}{4}\ln(2x - 1) - \frac{1}{4(2x-1)}$. 2829. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$. 2830. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 2831. $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}(5x - 2)$.
 2832. $-\frac{2}{3}\sqrt{2 - 3x}$. 2833. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x\sqrt{\frac{3}{2}}$. 2834. $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. 2835. $2^x : \ln 2$.
 2836. $\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$. 2837. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}$. 2838. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2}$.
 2839. $\ln \frac{x+2}{x+3}$. 2840. $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$. 2841. $\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. 2842. $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$
 $\times \ln\left(x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x}\right)$. 2843. $\arcsin \frac{x-a}{a}$. 2844. $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x$.
 2845. $-\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x$. 2846. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x$. 2847. $\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x +$
 $+ \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{36}\sin 9x$. 2848. $-\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x$. 2849. $-\frac{6}{5}\cos \frac{5}{12}x -$
 $-\frac{6}{7}\cos \frac{7}{12}x$. 2850. $\frac{1}{8}(2x - \sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 8x)$. 2851. $\frac{1}{8}(3x -$
 $- 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x)$. 2852. $\frac{1}{8}\left(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$. 2853. $\frac{1}{128}(3x - \sin 4x +$
 $+ \frac{1}{8}\sin 8x)$. 2854. $2\sqrt{e^x + 1}$. 2855. $\operatorname{arctg} e^x$. 2856. $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. 2857. $\ln \ln x$.
 2858. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$. 2859. $\frac{1}{4}\sin^4 x$. 2860. $-\frac{1}{3}\cos^3 x$. 2861. $\frac{1}{2}e^{x^2}$. 2862. $-\frac{1}{2(x^2+1)}$.
 2863. $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. 2864. $\frac{2}{9}(x^3 + 1)\sqrt{x^3 + 1}$. 2865. $3\sqrt[3]{\sin x}$. 2866. $\ln \arcsin x$.
 2867. $-2\sqrt{2 + \cos x}$. 2868. $\ln(\sin^2 x + 3)$. 2869. $\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sqrt{\operatorname{tg} x}$. 2870. $-\frac{1}{3\sin^3 x} +$
 $+ \frac{1}{\sin x}$. 2871. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}$. 2872. $-\ln \cos x$. 2873. $\operatorname{tg} x - x$. 2874. $\ln(x^2 + 6x +$
 $+ 13) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2}$. 2875. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 2876. $\frac{2}{3}\ln(3x^2 +$
 $+ 2x + 5) + \frac{10\sqrt{14}}{21} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{14}}$. 2877. $-5\sqrt{5 - 4x - x^2} - 3 \arcsin \frac{x+2}{3}$.
 2878. $3\sqrt{3 + x + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{3 + x + x^2}\right)$.
 2879. $\sqrt{x^2 - ax} + \frac{a}{2}\ln\left(x - \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 - ax}\right)$.
 2880. $\sqrt{x^2 + x - 1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x - 1}\right)$.
 2881. $-\sqrt{1 + x - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. 2882. $-\sqrt{ax - x^2} + \frac{3a}{2}\arcsin \frac{2x-a}{a}$.
 2883. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 2884. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 2885. $2\arcsin \sqrt{\frac{x}{a}}$. 2886. $\frac{1}{2}(a^2 \arcsin \frac{x}{a} -$
 $- x\sqrt{a^2 - x^2})$. 2887. $\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$. 2888. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3$. 2889. $x \sin x +$
 $+ \cos x$. 2890. $x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$. 2891. $-x \cos x + \sin x$. 2892. $\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x$.

2893. $\frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 1)\ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{6}x$. 2894. $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$. 2895. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$. 2896. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2$. 2897. $x \ln x - x$. 2898. $\frac{1}{2}x^2 \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right)$. 2899. $2 \ln(x-2) - \ln(x-1)$. 2900. $9 \ln(x-3) - 7 \ln(x-2)$. 2901. $\frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$. 2902. $\frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 2903. $3 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x$. 2904. $\frac{1}{x} + \ln(x-1) - \ln x$. 2905. $\frac{1}{a^2+b^2} \left(\ln(x+a) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + b^2) + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)$. 2906. $\frac{2}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{1}{3} \ln(x-2) - \frac{2}{3} \ln(x+2)$. 2907. $\frac{1}{2} \ln(x-1) - 4 \ln(x-2) + \frac{9}{2} \ln(x-3)$. 2908. $\frac{1}{2} \ln(x-1) - 2 \ln(x-2) + \frac{3}{2} \ln(x-3)$. 2909. $\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 2910. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x$. 2911. $\frac{x+3}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^8}{(x+1)^5(x-1)^3}$. 2912. $\frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)}$. 2913. $\frac{1}{4} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$. 2914. $-\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 2915. $\ln((x+1)^4 \cdot (x-2)^3(x-1)^2)$. 2916. $\frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$. 2917. $\frac{1}{10} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+3} - \frac{3}{5\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$. 2918. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 2919. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. 2920. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{5}}{2-x^2}$. 2921. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. 2922. $-\ln x + 3 \ln(x-1) - 3 \ln(x-2) + \ln(x-3)$. 2923. $\ln(x^2 - 4) - 4 \ln(x^2 - 1) + 6 \ln x$. 2924. $-\frac{1}{2n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \cos \beta_\nu \ln(x^2 - 2x \cos \beta_\nu + 1) + \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{n-1} \sin \beta_\nu \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \beta_\nu}{\sin \beta_\nu}$; где $\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2n} \pi$. 2925. $\frac{x^3}{3} - 3x + 3\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$. 2926. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$. 2927. $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 2928. $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln(x-1) + 8 \ln(x-2)$. 2929. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$. 2930. $\frac{1}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{2} \ln(x-1) - 16 \ln(x-2) + \frac{81}{2} \ln(x-3)$. 2931. $x + \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. 2932. $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x$. 2933. $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{5}{4} \ln \frac{x-1}{x+1}$. 2934. $\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x$. 2935. $\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. 2936. $\frac{x}{24(x^2+4)^3} + \frac{5x}{384(x^2+4)^2} + \frac{5x}{1024(x^2+4)} + \frac{5}{2048} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. 2937. $\frac{2x-3}{3(x^2-3x+3)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{3}}$. 2940. $\frac{-x^3}{4(x^2+3)^2} - \frac{3x}{8(x^2+3)} + \frac{\sqrt{3}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$. 2941. $-\frac{x^5}{6(x^2-5)^3} - \frac{5x^3}{24(x^2-5)^2} - \frac{5x}{16(x^2-5)} + \frac{\sqrt{5}}{32} \ln \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}$. 2942. $\frac{-x^5}{6(x^2+4)^3} - \frac{5x^3}{24(x^2+4)^2} - \frac{5x}{16(x^2+4)} + \frac{5}{32} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. 2943. $-\frac{x^3}{4(x^2-3)^2} - \frac{3x}{8(x^2-3)} + \frac{\sqrt{3}}{16} \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$. 2944. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2$. 2945. $\frac{x^4}{32(x^8+4)} + \frac{1}{64} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{2}$. 2946. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4$. 2947. $\frac{x^6}{12(x^{12}+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^6$. 2948. $\frac{1}{12} \ln \frac{x^3}{x^3+4}$.

2949. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2 + 2) - \frac{2}{x^2 + 2}$. 2950. $\frac{3}{8}\ln(x^3 - 8) - \frac{1}{8}\ln x$. 2951. $\frac{1}{4}\ln(x^8 + 1) - \ln x$. 2952. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1} + \frac{1}{6(x^6+1)}$. 2953. $\frac{1}{12}\ln\frac{x^6-1}{x^6+1}$. 2954. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+2)^2}{x+1} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$. 2955. $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. 2956. $\ln(x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 5) + \arctg\frac{x-1}{2}$. 2957. $\ln(x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 27x + 15) + 4\arctg(x-2)$. 2958. $\frac{x^2+1}{3(x^3+1)} + \frac{1}{3}\int\frac{x^2+3}{x(x^3+1)}dx$. 2959. $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$. 2960. $-\frac{9x^2+10x+7}{(x+1)(x^2+x+1)} - \int\frac{9x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$. 2961. $-\frac{x}{x^5+x+1}$. 2962. $\frac{1}{162}\left(-t^2 + 6t - \frac{2}{t} - 6\ln t\right); t = \frac{x+1}{x-2}$. 2963. $-\frac{1}{2t^2} + \frac{4}{t} + 6\ln t - 4t + \frac{1}{2}t^2; t = \frac{x-1}{x}$. 2964. $\frac{1}{128}\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t^2} - \frac{15}{t} - 20\ln t + 15t - 3t^2 + \frac{1}{3}t^3\right); t = \frac{x-1}{x+1}$. 2965. $\frac{1}{128}\left(-\frac{1}{4t^4} + \frac{t^3}{2} - \frac{15}{2t^2} + \frac{20}{t} + 15\ln t - 6t + \frac{t^2}{2}\right); t = \frac{x-1}{x+1}$. 2966. $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \arctg\frac{2x^2+3x+2}{x\sqrt{3}}$. 2967. $\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$. 2968. $\frac{1}{2}\arctg\frac{x^2+x-1}{2x}$. 2969. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 2970. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. 2971. $\arctg x + \frac{1}{3}\arctg x^3$. 2972. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \times \ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. 2973. $\frac{1}{2}\arctg x + \frac{1}{6}\arctg x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$. 2974. $C+D = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\arctg\frac{x^2-1}{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right);$
 $C-D = \frac{1}{8}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1}{x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}{x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}\right).$ 2975. $u^3 + \frac{3}{2}u^2 + 3u + 3\ln(u-1); u^6 = 2x-1$. 2976. $\frac{2}{9}\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}$. 2977. $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$. 2978. $6\left(\frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{8}u^8 + \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right); u^6 = x+1$. 2979. $\frac{6}{7}u^7 - \frac{3}{2}u^4 + 6u + \ln\frac{u^2-u+1}{u^2+2u+1} - 2\sqrt{3}\arctg\frac{2u-1}{\sqrt{3}}; u^6 = x$. 2980. $\frac{6}{5}u^5 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 6u + \frac{3}{2}\ln\frac{u^2+1}{(u+1)^6} + 3\arctg u; u^6 = x$. 2981. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. 2982. $\frac{1}{2}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1} - \sqrt{3}\arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}; u^3 = \frac{x+1}{x-1}$. 2983. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. 2984. $\frac{3}{16}\frac{3x-5}{x-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 2985. $\frac{3}{7}(4u^2 + u - 3)\sqrt[3]{u+1}; u^4 = x$. 2986. $\frac{16t^5-10t^2}{3(t^3-1)^2} + \frac{10}{9}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1} - \frac{20}{3\sqrt{3}}\arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}; t^3 = \frac{x+1}{x-1}$. 2987. $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1} - 2\sqrt{2}\arctg\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}}$. 2988. $-\frac{3u}{u^2+1} + 3\arctg u; u^6 = x$. 2989. $-\frac{3}{2(\sqrt[3]{x+1})^2}$. 2990. $6\left(\frac{1}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - u\right); u^2 = \sqrt[3]{x} + 1$. 2991. $\frac{1}{7}u^7 + \frac{3}{5}u^5 + u^3 + u; u = \sqrt{x^2-1}$. 2992. $\frac{3}{14}u^7 + \frac{3}{4}u^4 + \frac{3}{2}u; u = \sqrt[3]{x^2-1}$. 2993. $\frac{1}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + u; u = \sqrt{1-x^2}$. 2994. $\frac{1}{10}\ln\frac{u^2-2u+1}{u^2+u+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}; u^3 = 1+x^5$. 2995. $\frac{1}{9}u^9 - \frac{3}{7}u^7 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3; u^2 = 1+x^2$. 2996. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}; u^3 = 1+x^{-3}$. 2997. $\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1} - \frac{1}{2}\arctg u; u^4 = 1+x^{-4}$. 2998. $\frac{u}{2(u^3+1)} - \frac{1}{12}\ln\frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctg\frac{2u-1}{\sqrt{3}}; u^3 = x^{-2} - 1$. 2999. $\frac{1}{3}\ln(x^3 + \sqrt{x^6-1})$.

$$3000. -\frac{1}{18} \ln \frac{u^2-u+1}{u^2+2u+1} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u-1}{\sqrt{3}}; u^3 = 3x^{-3} + 4. \quad 3001. \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u; u^4 = 2 + x^{-4}. \quad 3002. \left(\frac{1}{6}x^5 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{5}{15}x \right) \sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16} \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

$$3003. \left(\frac{1}{8}x^7 + \frac{7}{48}x^5 + \frac{35}{192}x^3 + \frac{35}{128}x \right) \sqrt{x^2-1} + \frac{35}{128} \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

$$3004. \left(-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^2} \right) \sqrt{x^4+1}. \quad 3005. \frac{x}{5u^5} + \frac{4x}{15u^3} + \frac{8x^3}{u}; u = \sqrt{x^2+1}.$$

$$3006. \frac{xu^5}{6} - \frac{5xu^3}{24} + \frac{15xu}{16} - \frac{5}{16} \ln(x+u); u = \sqrt{x^2-1}.$$

$$3007. \left(\frac{1}{9}x^7 - \frac{7}{54}x^4 + \frac{14}{81}x \right) u^2 - \frac{14}{81} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{u^2+xu+x^2}{u^2-2xu+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2u+x}{x\sqrt{3}} \right); u = \sqrt[3]{x^3+1}.$$

$$3008. -\frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{27}{8} \arcsin(2x-3).$$

$$3009. -\frac{1}{4}(2x+7)\sqrt{-x^2+x+4} + \frac{31}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{17}}.$$

$$3010. \frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1} - 2 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}).$$

$$3011. \frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2} \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}). \quad 3012. -\frac{1}{8}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8} \arcsin x. \quad 3013. \frac{1}{4}x(x^2+1)\sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+2}).$$

$$3014. -\arcsin \frac{1}{x}. \quad 3015. -\ln \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} \right).$$

$$3016. \frac{3x-1}{2x^2} \sqrt{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}.$$

$$3017. \frac{x-2}{3(x-1)} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$3018. \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2+2x-1} + 3 \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2+2x-1}}{x-1}.$$

$$3019. \frac{7x-8}{7x-7} \sqrt{x^2+2x+4} - \frac{19}{7\sqrt{7}} \ln \frac{2x+5+\sqrt{7(x^2+2x+4)}}{x-1} + \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})}{x-1}.$$

$$3020. -\frac{1}{x-1} \sqrt{x^2+2x+4} - \frac{2}{\sqrt{7}} \ln \frac{2x+5+\sqrt{7(x^2+2x+4)}}{x-1} + \frac{\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4})}{x-1}.$$

$$3021. -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x-1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x+1+\sqrt{2x^2+2}}{x-1}.$$

$$3022. -\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{3(1+x+x^2)} - (x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}.$$

$$3023. 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x} + \sqrt{2} \ln \frac{x+1+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3024. $2 \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(x^2 + 2x + 4)}}{x + 1}.$
3025. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{35}} \ln \frac{\sqrt{7(4x^2 + 4x + 3)} - (2x + 1)\sqrt{5}}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$
3026. $\frac{5}{6\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{8(x^2 + 6x - 1)}}{(2 - x)\sqrt{7}} - \frac{1}{3\sqrt{7}} \ln \frac{(x + 1)\sqrt{7} + \sqrt{x^2 + 6x - 1}}{\sqrt{4 + 4x + 3x^2}}.$
3027. $\frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \frac{2\sqrt{4 - 2x + 4x^2} - \sqrt{7}(1 - x)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 3}} + \frac{1}{2\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{4 - 2x + 4x^2}}{(1 + x)\sqrt{14}}.$
3028. $\sqrt{(a - x)(x - b)} + \frac{a - b}{2} \arcsin \frac{2x - a - b}{a - b}.$ 3029. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times$
 $\times \ln \frac{\sqrt{2x^2 + 2} - x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$ 3030. $(\sqrt{x} - 2)\sqrt{1 - x} - \arcsin \sqrt{x}.$ 3031. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} -$
 $-\frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$ 3032. $\ln(x - 1) + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{1}{x - 1} - 2\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}.$
3033. $x + 2 \ln(x - 1) + u + \frac{1}{2} \ln\left(x - \frac{1}{2} + u\right) - \ln(x + 1 + 2u);$
 $u = \sqrt{x^2 - x + 1}.$
3034. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$
3035. $\frac{1}{288}(48x^3 + 8x^2 + 14x - 37)\sqrt{x^2 + x + 1} +$
 $+\frac{1}{64} \ln(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}) - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^3.$
3036. $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}).$ 3037. $u - \ln(x + 1 + u) -$
 $-\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{u + \sqrt{3}}{x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{2x + 5 + u\sqrt{7}}{x - 1}; u = \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$
3038. $\frac{1}{2} \ln \frac{x + 8 + 4u}{x} - \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{\ln(x + 3 + \sqrt{6} \cdot u)}{x - 1} - \frac{1}{4} \ln \frac{7 - x + 4u}{x + 1};$
 $u = \sqrt{x^2 + x + 4}.$
3039. $-\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{2x + 5 + u\sqrt{7}}{x - 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{u + \sqrt{3}}{x + 1};$
 $u = \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$
3040. $\frac{1}{3\sqrt{3}} \ln \frac{1 - x + u\sqrt{3}}{x + 2} - \frac{1}{3\sqrt{6}} \ln \frac{(x + 2)\sqrt{6} + 3u}{x - 1};$
 $u = \sqrt{x^2 + 2x + 3}.$
3041. $\ln(x - 1 + u) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{u - x\sqrt{2}}{x + 1}; u = \sqrt{x^2 - 2x - 1}.$
3042. $\frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}}.$ 3043. $\frac{1}{27}(12u - u^3); u\sqrt{x^2 + x + 1} = 2x + 1.$ 3044. $-u^{-3} -$
 $-\frac{4}{9}(x + 2)u^{-1} + \frac{4}{27}(x + 2)^3u^{-3}; u = \sqrt{x^2 + 4x + 1}.$ 3045. $u - \frac{3}{2} \ln(2x + 1 +$
 $+ 2u) + \frac{4}{3} \frac{2x + 1}{u}; u = \sqrt{x^2 + x + 1}.$ 3046. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{x\sqrt{2}}{x^2 + 1}.$
3047. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$

3048. $\ln \frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}$.
3049. $\ln \left(u + \frac{3}{2} + \sqrt{u^2+3u} \right); u = x - \frac{1}{x}$.
3050. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4+x\sqrt{2}}}{\sqrt{1+x^4-x\sqrt{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x^4}{2x^2}}$.
3051. $\arcsin \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$.
3052. $(x^2+x+1)\sqrt[3]{x^3+3x+1}$.
3053. $x^3\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2}$.
3054. $x^4\sqrt[4]{x^4+4x+1}$.
3055. $x \ln x - x$.
3056. $\frac{1}{20(2x+5)} + \frac{1}{100} \ln x - \frac{1}{100} \ln(2x+5) - \frac{\ln x}{4(2x+5)^2}$.
3057. $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x$.
3058. $\frac{1}{4(x+1)} - \frac{\ln(x-1)}{2(x+1)^2} + \frac{1}{8} \ln \frac{x-1}{x+1}$.
3059. $\ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
3060. $-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} - \arcsin \frac{1}{x}$.
3061. $x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x)$.
3062. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.
3063. $\sqrt{1-x^2} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.
3064. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$.
3065. $\frac{1}{7}x^7 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right)$.
3066. $\frac{1}{8}x^8 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x \right)$.
3067. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. 3068. $\frac{1}{2}x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$.
3069. $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$. 3070. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$. 3074. $-(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)e^{-x}$. 3075. $(x^5-20x^3+120x)\sin x + (5x^4-60x^2+120)\cos x$.
3076. $\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x\right)\cos(2x+3) + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right)\sin(2x+3)$. 3077. $(-x^4 + 12x^2 - 24)\cos x + (4x^3 - 24x)\sin x$. 3078. $\frac{1}{9}(3x^3 - 9x^2 + 6x + 13)e^{3x}$.
3079. $\frac{1}{4}((2x^2+6x+9)\sin 2x + (2x+3)\cos 2x)$. 3080. $\frac{1}{625}(125x^3 - 75x^2 + 30x - 6)e^{5x}$. 3081. $(-x^3+x^2+5x-2)\cos x + (3x^2-2x-5)\sin x$.
3082. $\ln(e^x + e^{-x})$. 3083. $-2\ln(e^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{1+e^{-x}})$. 3084. $-\ln(e^{-x} + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}})$. 3085. $-\frac{1}{2}(x^4+2x^2+2)e^{-x^2}$. 3086. $-\frac{1}{2}(x^2+2)e^{-x^2}$.
3087. $\frac{e^x}{1+x}$. 3088. $-\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-x}$. 3089. $\frac{x+2}{x^2+x}e^x$. 3090. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$.
3091. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$. 3092. $\frac{1}{2}e^x((x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x)$.
3093. $\frac{1}{2}e^x((x^2-1)\cos x + (x-1)^2\sin x)$. 3094. $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$. 3095. $-\frac{1}{5} \times \cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x$. 3096. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}$. 3097. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.
3098. $\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$. 3099. $\frac{3}{8}\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x}$. 3100. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x$. 3101. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln \sin x$. 3102. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. 3103. $-\frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{3}u^9 - \frac{3}{11}u^{11} + \frac{1}{13}u^{13}; u = \cos x$. 3104. $-\frac{1}{2u^2} - 2\ln u + \frac{1}{2}u^2; u = \sin x$. 3105. $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$. 3106. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln \operatorname{tg} x$. 3107. $-8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$.
3108. $\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{1}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{1}{16}\sin x \cos x + \frac{1}{16}x$.

3109. $\frac{1}{10} \sin^7 x \cos^3 x + \frac{3}{80} \sin^7 x \cos x - \frac{1}{160} \sin^5 x \cos x -$
 $- \frac{1}{128} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{256} \sin x \cos x + \frac{3}{256} x.$
3110. $-\frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{1}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{192} \sin x \cos^3 x +$
 $+ \frac{5}{128} \sin x \cos x + \frac{5}{128} x.$
3111. $-\frac{1}{10} \sin^3 x \cos^7 x - \frac{3}{80} \sin x \cos^7 x + \frac{1}{160} \sin x \cos^5 x +$
 $+ \frac{1}{128} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{256} \sin x \cos x + \frac{3x}{256}.$
3112. $-\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{16} \sin x \cos x + \frac{5}{16} x.$
3113. $-\frac{1}{8} \sin^7 x \cos x - \frac{7}{48} \sin^5 x \cos x - \frac{35}{192} \sin^3 x \cos x -$
 $- \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x.$
3114. $-\frac{\cos^7 x}{\sin x} - \frac{7}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{35}{24} \sin x \cos^3 x - \frac{35}{16} \sin x \cos x - \frac{35}{16} x.$
3115. $\frac{\sin^9 x}{3 \cos^3 x} - \frac{3 \sin^7 x}{\cos x} - \frac{7}{2} \sin^5 x \cos x -$
 $- \frac{35}{8} \sin^3 x \cos x - \frac{105}{16} \sin x \cos x + \frac{105}{16} x.$
3116. $-\ln(\sin x + \cos x)$ 3117. $x - \ln(5 \cos x + 2 \sin x).$ 3118. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right).$
3119. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x+\varphi}{2}, \text{ где } b = a \operatorname{tg} \varphi; a = \sqrt{a^2+b^2} \cos \varphi.$
3120. $\left| 2 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} \right|.$ 3121. $4 \sqrt{\operatorname{tg} x}.$ 3122. $\frac{2}{5} \operatorname{tg}^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}.$ 3123. $\frac{1}{4} \ln \frac{u^2+2u+1}{u^2-u+1} +$
 $+ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2u-1}{\sqrt{3}}; u^3 = \operatorname{tg}^2 x.$ 3124. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x - \sin x}.$ 3125. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x).$ 3126. $\frac{4}{25} x + \frac{3}{25} \ln(4 \cos x +$
 $+ 3 \sin x).$ 3127. $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} x}{a}.$ 3128. $-\frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{16} \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{32} \ln(4 + \operatorname{tg}^2 x).$
3129. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x.$ 3130. $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{10}}.$ 3131. $-\frac{1}{3(\operatorname{tg}^3 x + 1)}.$ 3132. $\frac{1}{a \sqrt{a^2-b^2}} \times$
 $\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2} \operatorname{tg} x}{a}, \text{ если } |a| > |b|; \frac{1}{2a \sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{a + \sqrt{b^2-a^2} \operatorname{tg} x}{a - \sqrt{b^2-a^2} \operatorname{tg} x}, \text{ если } |b| > |a|.$
3133. $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1} - \ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}).$ 3134. $\frac{1}{6} \ln \frac{1 - \sin 2x}{2 + \sin 2x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}}.$
3135. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$ 3136. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x}.$ 3137. $\frac{2}{\cos x}.$ 3138. $-\cos 2x + \ln \cos x.$
3139. $-\frac{1}{2} \ln(4 - \operatorname{cosec}^2 x).$ 3140. $\frac{1}{8} \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{8} \ln \operatorname{tg} x.$ 3141. $\frac{1}{6} \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{96} \times$
 $\times \ln(\operatorname{tg}^2 x - 3) - \frac{3}{32} \ln(3 \operatorname{tg}^2 x - 1).$ 3142. $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x.$ 3143. $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x.$
3144. $\frac{5}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \frac{3 \sin x}{2 \cos^2 x}.$ 3145. $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x}.$ 3146. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} \cos x +$
 $+ \sqrt{\cos 2x}).$ 3147. $\frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}) - \frac{1}{2} \arcsin(\cos x - \sin x).$
3148. $\arccos\left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right).$

3149. $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{если } a > b > 0;$
 $\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x}, \quad \text{если } b > a > 0.$
3150. $(x-1)e^x + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x$. 3151. $-\frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(e^{-2x}\sqrt{3})$.
3152. $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \frac{1}{2} \arcsin e^{-2x}$. 3153. $\sqrt{\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1})$. 3154. $4\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$. 3155. $\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{cth}^3 \frac{x}{2}$. 3156. $\frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2 - \operatorname{th}^2 x)}$. 3157. $\operatorname{sh} x + \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5}(\operatorname{sh}^5 x + \operatorname{ch}^5 x)$. 3158. $\frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}$.
3159. $-\frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x}$. 3160. $-2\sqrt{\operatorname{ch} x} + \frac{2}{5} \operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{ch} x}$. 3161. $\ln \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x$.
3162. $\frac{1}{48}(2 \operatorname{sh} 6x + 3 \operatorname{sh} 4x + 6 \operatorname{sh} 2x + 12x)$. 3163. $-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x+1)$. 3164. $-\frac{2(x-1)}{x-2} + 4 \frac{x-2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} - 5 \ln \frac{x-2}{x-1}$.
3165. $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{9}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{31}{8} \ln(x-1) + \frac{1}{8} \ln(x+1)$.
3166. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \ln(x-a) + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \ln(x-b) + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \ln(x-c)$.
3167. $-\frac{1}{3x} - \frac{2}{9} \ln x + \frac{1}{5} \ln(x+1) + \frac{1}{90} \ln(x^2 - x + 3) - \frac{13}{45\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{11}}$.
3168. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{3} + 1}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}$. 3169. $-\frac{x^3}{2(x^2+1)^2} - \frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x$. 3170. $\frac{\sqrt{2}}{3} \times \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$. 3171. $-\frac{x+2}{2(x^2+2x+2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1)$. 3172. $\frac{1}{4}y^2 + 2y + 3 \ln y - \frac{2}{y} - \frac{1}{4y^2}; y = x^2 - 1$. 3173. $\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$. 3174. $\frac{1}{2}(x-2a) \times \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}a^2 \arcsin \frac{x}{a}$. 3175. $\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{x-1} - x - 4 \ln(1 + \sqrt{x-1})$.
3176. $2\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} - 2(\operatorname{arctg} \sqrt{2x+1} + \operatorname{arctg} \sqrt{x})$. 3177. $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + 2 \ln(\sqrt{x+1} + 1)$. 3178. $-\frac{1}{3}(x^2 + 5ax + 15a^2)\sqrt{2ax - x^2} - 5a^3 \arcsin \frac{a-x}{a}$.
3179. $\frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}}$. 3180. $-\frac{(a+2bx^2)}{a^2x\sqrt{a+bx^2}}$. 3181. $\frac{1}{4x^2}(2+3x)\sqrt{x-1} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$.
3182. $\frac{3}{2} \ln \frac{u^2 - u\sqrt{2} + 1}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} + 3\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{u^2 - 1}{u\sqrt{2}}; u = \sqrt[12]{x}$. 3183. $-\frac{2}{3ax} \sqrt{\frac{a+bx^3}{x}}$.
3184. $-\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2} \arcsin x$.
3185. $\frac{3x^2 - 2 - 2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3x^3}$. 3186. $-2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$. 3187. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{2-x-\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}{2x-1}$.
3188. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4(1+x^2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. 3189. $-\ln \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$. 3190. $\frac{2bx^2-3a}{15a^2x^5} \times \sqrt{(a+bx^2)^3}$. 3191. $\frac{2}{3} \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$. 3192. $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x-1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x+1+\sqrt{2(x^2+1)}}{x-1}$.

$$3193. \frac{2x^2-1}{3x^3} \sqrt{1+x^2}.$$

$$3194. \frac{2x}{\sqrt{1+x^3}}.$$

$$3195. \frac{1}{3} \ln \frac{(x+1)^2-3\sqrt{1+x^3}}{(x+1)^2+3\sqrt{1+x^3}}.$$

Замечание. $(x+1)^3 - (x-2)^3 = 9(x^2 - x + 1)$.

$$3196. \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{2-x^2+2\sqrt{1-x^2-x^4}}. \quad 3197. \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} - \frac{1}{2} \arccos x^2.$$

$$3198. \ln \frac{x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}}{x}. \quad 3199. -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{x}. \quad 3200. \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-4}{2(x-1)}.$$

$$3201. x^3 \sqrt{1+x^4}. \quad 3202. \frac{1}{k-1} \ln \frac{x^k}{x+\sqrt{x^2-a^{2k}-2x^{2k}}}. \quad 3203. -\frac{x}{\sqrt{x^4+a^4}}. \quad 3204. \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \frac{\alpha}{2}}{1-x^2}. \quad 3205. \operatorname{tg}(x - \operatorname{arctg} x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x}. \quad 3206. -\operatorname{ctg}(x - \operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}. \quad 3207. \frac{\operatorname{tg} x}{a(a+(ax+b)\operatorname{tg} x)}. \quad 3208. \ln(x + a \ln x). \quad 3209. -\frac{x}{a(x+a \ln x)}.$$

$$3210. e^x \ln x. \quad 3211. \frac{e^x}{1+x^2}. \quad 3212. \frac{x-1}{x+1} e^x. \quad 3213. (1+x^2)e^{\operatorname{arctg} x}. \quad 3214. 2(x\sqrt{x} -$$

$$-3x+6\sqrt{x}-6)e^{\sqrt{x}}. \quad 3215. -\frac{x}{2(e^x-1)^2} - \frac{1}{2(e^x-1)} - \frac{1}{2} \ln(1-e^{-x}). \quad 3216. -\frac{1}{2\sqrt{2}} \times$$

$$\times \ln \frac{\sqrt{2}-1-\sin x}{\sqrt{2}+1+\sin x}. \quad 3217. -\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}. \quad 3218. -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}.$$

$$3219. \frac{1}{\cos x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad 3220. \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x\right) \ln \operatorname{tg} x - \frac{1}{9} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x. \quad 3221. \frac{1}{a(1+a^2)} \times$$

$$\times (\operatorname{arctg}(a \cos x) + a \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}). \quad 3222. 3x + \cos x - 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

$$3223. \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$3224. \operatorname{arctg} \sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x}.$$

$$3225. \sqrt{2} \ln(u + \sqrt{3+u^2}), u = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$3226. \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x - \cos^2 x}{2 \cos x \sqrt{\sin x}} + \frac{1}{8} \ln \frac{2 \sin x + \cos^2 x - 2 \cos x \sqrt{\sin x}}{2 \sin x + \cos^2 x + 2 \cos x \sqrt{\sin x}}.$$

$$3227. (a^2 + b^2)^{3/2} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b} \right) -$$

$$- \frac{a}{2} (2a^2 + 3b^2) \arcsin \left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} x \right) -$$

$$- \frac{a^2}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \sqrt{b^2 \cos^2 x - a^2 \sin^2 x}.$$

$$3228. \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \sin x - 1}{(1 - \sin x)\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \sin x + 1}{(1 + \sin x)\sqrt{2}}.$$

$$3229. (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

$$3230. \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$3231. \frac{ax-1}{(1+a^2)\sqrt{1+x^2}} e^{a \operatorname{arctg} x}.$$

$$3232. 2(\sin x - 1)e^{\sin x}.$$

$$3233. \frac{1}{10} (5 - 2 \sin 2x - \cos 2x) e^x.$$

$$3234. x \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$3235. (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{2}) \ln(x+1) +$$

$$+ \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) - \sqrt{x^2 + 2x + 3}.$$

3236. $(x - \frac{a+b}{2}) \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}) - \frac{1}{2} \sqrt{(x-a)(x-b)}.$
3237. $-\frac{\ln(1+2^{-x})}{\ln 2}.$
3238. $-\frac{(x+1) \ln 2 + 1}{(\ln 2)^2} 2^{-x}.$
3239. $\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$
3240. $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}.$
3241. $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} - \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{\cos 2x} + \cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x} - \cos x}.$
3242. $\frac{1}{n} \sin^n x \cos nx.$
3243. $\frac{1}{n} \sin^n x \sin nx.$
3244. $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}},$ если $a^2 > b^2 + c^2$, или
 $\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \ln \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}},$ если $a^2 < b^2 + c^2.$
3245. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2}.$
3246. $\frac{1}{2\sqrt{2}} (\sin \ln x - (\sqrt{2} - 1) \cos \ln x) x^{\sqrt{2}+1}.$
3247. $-\varphi - (1 + \ln(\cos \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi})) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin \varphi}.$
3248. $e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$
3249. $\frac{e^x}{\sin x}.$
3250. $x \cos \alpha + \sin \alpha \ln \sin(x - \alpha).$
3251. $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} -$
 $-\frac{a-ab}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \sin x \cos x} \right).$
3252. $\frac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha).$
3253. $\sqrt{\frac{2}{a-2b}} \ln \frac{\sqrt{a-2b} \sin \frac{x}{2} + \sqrt{a+2b} \cos x}{\cos \frac{x}{2}},$ если $a > 2b.$
3254. $\frac{\sqrt{2}}{3} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg}(\cos x - \sin x).$
3255. $-\frac{2\sqrt{2}}{5} \ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \cos y}{\sqrt{\sqrt{5}-2}} -$
 $-\frac{1}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}} \ln \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{2} \cos y}{\sqrt{\sqrt{5}+2} - \sqrt{2} \cos y},$ где $y = x - \frac{\pi}{4}.$
3256. $\frac{1}{12} x^2 (\cos 3x - 9 \cos x) - \frac{1}{18} x (\sin 3x - 27 \sin x) - \frac{1}{54} (\cos 3x - 81 \cos x).$

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3257. $\frac{m}{n+m}$. 3258. $\frac{m}{m-n}$. 3259. $\frac{\pi}{4}$. 3260. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. 3261. $-\ln 2$. 3262. $\ln 2$. 3263. a . 3264. $\frac{\pi}{2}$. 3265. $\frac{\pi}{2a}$. 3266. Не существует. 3267. Не существует. 3270. $-\frac{5}{216}$. 3271. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \ln 2 - \frac{1}{6}$. 3272. $-\frac{\pi}{8}$. 3273. $\frac{1}{4} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right)$. 3274. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. 3275. 0, если $|a| < 1$; $\frac{\pi}{a}$, если $|a| = 1$; $\frac{2\pi}{a}$, если $|a| > 1$. 3276. $\frac{\pi}{1+\pi^2}(1+e^{-1})$. 3277. $-\frac{\pi^2}{n}$, если n четное; $\frac{\pi^2}{n} - \frac{4}{n^3}$, если n нечетное. 3278. $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pi - 2 \ln(\sqrt{2} + 1))$. 3279. $\frac{2}{1+k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}$. 3280. $\frac{2}{a} \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$. 3281. $\frac{7}{9}$. 3289. $2\pi^2 n^2 l^2 \sigma$. 3290. $\frac{\delta l^2}{2E}$. 3291. 0,08 кГм. 3292. $\frac{1}{6} ah^2$. 3293. $\frac{2}{3} a^3$. 3294. 240 π кГм. 3295. На одной четверти высоты, считая от основания. 3296. На расстоянии $\frac{3}{8} R$ от центра. 3297. 135 $\pi \ln 2$ кГм. 3298. $x = e^{10}$. 3299. $\frac{e_l}{R}$. 3300. mgR . 3301. $\frac{R}{2} ca^2 \left(t + \frac{1}{2b} \sin 2bt \right)$. 3302. $\frac{s}{\sigma} \sqrt{\frac{2h}{g}}$. 3303. $\frac{s}{5\sigma} \sqrt{\frac{2h}{g}}$. 3304. $\pi^3 n^2 \delta hr^4$. 3305. $\frac{18a}{\pi} \ln \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right)$. 3311. $\frac{1}{3}$. 3312. $3\pi a^2$. 3313. $\frac{3}{2} \pi a^2$. 3314. π . 3315. $\frac{3}{8} \pi a^2$. 3316. $\pi \sqrt{2}$. 3317. $\frac{3}{2} a^2$. 3318. a^2 . 3319. $\frac{\pi}{2} (a^2 + b^2)$. 3320. $\frac{1}{4} \pi a^2$. 3321. $\left(2\pi + \frac{16}{3} \right) p^2$. 3322. $\frac{88\sqrt{2}}{15} p^2$. 3323. $\frac{16p^2}{3|\sin^3 2\omega|}$, где ω — угол нормали с Ox . 3324. В точке, где $\omega = 45$. 3325. $\frac{1}{6}(40 - 3\pi)a^2 = 5,09587a^2$. 3326. $12a^2$. 3327. $\frac{1}{2} \pi b^2$. 3328. $a^2((2k-3)t' + (3-k)\sin t')$ и $a^2((3-2k)(\pi-t') + (3-k)\sin t')$, где $t' = \arccos(1-k)$. 3329. $a^2(1 + k \cos t' - 2k^2)t'$, где t' — корень уравнения $\sin t = kt$. При $k = \frac{2}{\pi}$, $S = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 0,2976a^2$. При $k = \frac{3}{5\pi}$, $S = \frac{5}{6} \pi a^2 \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} - \frac{18}{25\pi^2} \right) = 1,9940a^2$. 3330. $\frac{1}{2} a^2(4 - \pi)$. 3331. $4 \operatorname{arctg} 2 - 2 \ln 2$. 3332. 0,1. 3333. $\frac{5}{3} \sqrt{2}$. 3334. $\frac{1}{6} ab$. 3335. $\left(5 \arcsin \frac{3}{5} - 4 \ln 2 \right) a^2$. 3336. $(8 \ln 2 - 3) a^2$. 3337. $\frac{\pi a^2}{4} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \right)$. 3338. $ab \arcsin \frac{a-b}{a+b}$ (одна луночка). 3339. $4ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. 3341. $\frac{1}{4} \pi a^2$. 3342. $\frac{1}{8} \pi a^2$ (одна петля). 3343. Площадь одной петли $\frac{1}{12} \pi a^2$. 3344. Площадь одной петли $\frac{1}{16} \pi a^2$. 3345. $\frac{a^2}{12}(2\pi + 3\sqrt{3})$. 3346. $\frac{p^2}{1-e^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) - \frac{e \sin \varphi_0}{1+e \cos \varphi_0} \right)$. 3347. $\frac{p^2}{e^2-1} \left(\frac{e \sin \varphi_0}{2(1+e \cos \varphi_0)} - \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \frac{\sqrt{e+1} \cos \frac{\varphi_0}{2} + \sqrt{e-1} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1+e \cos \varphi_0}} \right)$. 3348. $\frac{a^2}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi_0 \right)$. 3349. $\frac{1}{6} a^2 \omega^3$. 3350. $\frac{a^2}{4} \left(\operatorname{arctg} \omega - \frac{\omega}{1+\omega^2} \right)$. 3351. $a\sqrt{b^2-a^2} + 2ab \frac{a}{b+\sqrt{b^2-a^2}} + b^2 \arccos \frac{a}{b}$. 3352. $\frac{9}{8} a^2 \sqrt{3}$. 3354. $(2a^2 + b^2) \arcsin \frac{a}{b} + 3a\sqrt{b^2-a^2}$. 3355. $(\pi+1)a^2$. 3356. $\frac{a^2}{12}(3\sqrt{3}-\pi)$. 3357. $\frac{a^2}{4} \times (5\sqrt{3}-\pi)$; $\frac{a^2}{4}(7\pi-5\sqrt{3})$. 3358. $\frac{1}{4} \pi a^2$. 3359. $\frac{1}{2} \pi a^2$. 3360. 2 : 1.

3361. $5 : 4$. 3362. $2ab \left(\pi - \arctg \frac{2ab}{(a^2 - b^2) \sin \alpha} \right)$. 3363. $a \operatorname{arctg} \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab} \sin \alpha \right)$.
 3364. $\frac{a^2}{14}$. 3365. $\pi a^2 \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right)$. 3366. $\frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \sqrt{5}$. 3367. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
 3368. $a \operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2a} \right)$. 3369. $a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a}$. 3370. $\left(a + \frac{1}{3} x_0 \right) \sqrt{\frac{x_0}{a}}$. 3371. $2a \ln \frac{a}{a - x_0} -$
 $- x_0$. 3372. $a \ln \frac{a}{b}$. 3373. $\frac{8p}{27} \left(\left(1 + \frac{9y_0}{4p} \right)^{3/2} - 1 \right)$. 3374. $\left(2(u - 2) + \sqrt{3} \ln \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} + \right.$
 $\left. + 2\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}) \right) a$, где $u^2(2a - x_0) = 8a - 3x_0$. 3375. $6a$. 3376. $\frac{5}{2} \left(2 + \right.$
 $\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right) a$. 3377. $8a$. 3378. $8a$. 3379. $\frac{a}{2} (2\pi \sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(2\pi +$
 $\left. + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right)$. 3380. $a \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}$. 3383. $\frac{a}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) + a$. 3384. $4(a + b) - \frac{4ab}{a + b}$.
 3385. $48a$. 3388. $t_0 \sqrt{a^2 + b^2}$. 3389. $\sqrt{3}$. 3390. $x_0 + z_0$. 3391. $x_0 + \frac{2}{27} x_0^2$.
 3392. $x_0 + z_0$. 3393. $a \ln \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{2a} - \sqrt{x_0}}$. 3394. $z_0 \sqrt{2}$. 3395. $z_0 \sqrt{2}$. 3396. $\sqrt{a} z +$
 $\left. + \frac{2}{3} z \sqrt{\frac{z}{a}} \right)$. 3397. $a \sqrt{2} \arccos \frac{z}{a}$. 3398. πa^3 . 3399. $\frac{1}{2} \pi^2$. 3400. $-8\pi a^3 \ln \left(1 - \frac{b}{2a} \right) -$
 $-\pi \left(\frac{1}{3} b^3 + ab(4a + b) \right)$. 3401. $\frac{\pi a^3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{3} \right)$. 3402. $\frac{8}{3} \pi a^3$. 3403. $5\pi^2 \times$
 $\times a^3$. 3404. $\pi a^2 p$. 3405. $\frac{4}{3} \pi a b^2$. 3406. $\frac{\pi b^2}{3a^2} (m - a)^2 (m + 2a)$. 3407. $\pi a^2 h \times$
 $\times \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \right)$. 3408. $\frac{1}{6} \pi a^3 (9\pi^2 - 16)$.

$$3409. \pi a^3 \left((2k^2 - 6k + 5)t_0 - \frac{1}{3}(2k^2 - 13k + 15)\sqrt{2k - k^2} \right);$$

$$\pi a^3 \left((2k^2 - 6k + 5)(\pi - t_0) + \frac{1}{3}(2k^2 - 13k + 15)\sqrt{2k - k^2} \right),$$

где $t_0 = \arccos(1 - k)$.

3410. $\frac{1}{8} \pi^2 a^3$. 3411. $\pi^2 a^3$. 3412. $\frac{3}{8} \pi a^3$. 3414. $2\pi a^3 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha)$.
 3415. а) $\frac{4}{3} \pi a(a^2 + b^2)$; б) $\frac{\pi}{6} \frac{(a+b)^4}{b}$; в) $\frac{4}{3} \pi a(a^2 + b^2)$. 3416. $\frac{2\pi}{75} a^3 \sqrt{5}$.
 3417. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} a^3$. 3418. $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} a^3$. 3419. $\frac{1}{4} \pi^2 a^3 \sqrt{2}$. 3420. $\frac{2}{3} \pi a^3$. 3421. $\frac{16}{3}$. 3422. $\frac{1}{4} \pi a^3$.
 3423. $\frac{\pi}{32}$. 3424. $\frac{4}{15} a^2 \sqrt{2ap}$. 3425. $\frac{4}{15} a^3$. 3426. $\frac{16}{15} a^2 \sqrt{ab}$. 3427. $\frac{1}{2} a^2 b$.
 3428. $\frac{\pi a^3}{4} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} + 4 \frac{b}{a} \right)$. 3429. $\frac{1}{3} r^3 \operatorname{ctg} \alpha ((2 + \cos^2 \varphi) \sin \varphi - 3\varphi \cos \varphi)$.
 3430. $\frac{1}{6} r^2 h \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$. 3431. Одна из верхних частей имеет объем $\frac{1}{3} r^2 h (1 -$
 $- \cos \varphi)$. Одна из нижних $-\frac{1}{3} r^2 h \left(\frac{3}{2} \varphi + \cos \varphi - 1 \right)$. 3432. $\frac{\pi}{2} abl$. 3433. $8(2 -$
 $- \sqrt{2})^3$. 3434. $\frac{16}{3 \sin \alpha} r^3$. 3435. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$. 3436. $\pi(\sqrt{u} - \sqrt{2}) +$
 $\left. + \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{u} - 1}{\sqrt{u} + 1} + 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \right)$, где $u = 1 + \sec^4 a$. 3437. $4\pi^2 a^2$. 3438. $4\pi^2 br$.
 3439. $\frac{2}{3} \pi \left((2a + p) \sqrt{2ap + p^2} - p^2 \right)$. 3440. $\frac{\pi}{15} \left(\frac{8}{9} p \right)^2 \left(\left(1 + \frac{9a}{4p} \right)^{3/2} \left(\frac{27a}{4p} - 2 \right) + 2 \right)$.
 3441. $2\pi \left(b^2 + ab \frac{\operatorname{arcsine}}{e} \right)$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 3442. $2\pi \left(a^2 + \frac{b^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right)$, где
 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 3443. $2\pi ah \left(\sqrt{1 + u^2} + \frac{\ln(u + \sqrt{1 + u^2})}{u} \right)$, где $u = \frac{h\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}$.
 3444. $\pi ab \left(\lambda \sqrt{\lambda^2 e^2 - 1} - \frac{b}{a} - \frac{1}{e} \ln \frac{e + \sqrt{\lambda^2 e^2 - 1}}{e + \sqrt{e^2 - 1}} \right)$, где $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. 3445. $\frac{64}{3} \pi a^2$.

3446. $8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right)a^2$. 3447. $\frac{12}{5}\pi a^2$. 3448. $4\pi a^2$. 3449. $\frac{32}{5}\pi a^2$. 3450. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. 3451. $2\pi a^2\sqrt{2}$. 3452. $4\pi a^2$. 3453. $\frac{16}{3}\pi(3k - 4 + (4 - 2k)^{3/2})a^2$. При $k = \frac{3}{2}$ поверхность $S_{\min} = 8\pi a^2$. 3454. $\frac{1}{8}\pi p^2(3\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$. 3455. $\frac{\pi p^2}{4\sqrt{5}}\left(\frac{7\sqrt{2}-8}{3} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$. 3456. а) $4\pi a^2\left(1 + \frac{2}{3}\cos^2\alpha - \frac{1}{15}\cos^4\alpha\right)$, где $b = a\cos\alpha$; б) $\frac{4\pi b^2}{15}\left(24 - 16\sin^2\beta - \frac{\sin^4\beta}{1+\sin\beta}\right)$, где $a = b\cos\beta$. 3457. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{10}a^2$. 3458. $2\pi a^2(2\sin\beta - \sin\alpha - (2\beta - \alpha)\cos\beta)$. При $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, $S_{\min} = 16\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}$. 3459. $\frac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2} - 1)$. 3460. $24(2 - \sqrt{2})r^2$. 3461. $\frac{16}{\sin\alpha}r^2$. 3462. $\frac{\pi a^2}{12}(4\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ЛИНИЯМ И ПОВЕРХНОСТЯМ

$$3463. \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f dx.$$

$$3464. \int_0^a dy \int_0^{a-y} f dx.$$

$$3465. \int_0^1 \int_y^{2-y} f dx dy = \int_0^1 \int_0^x f dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f dy dx.$$

$$3466. \int_0^a \int_y^{2a+y} f dx dy = \int_0^a \int_0^x f dy dx + \int_a^{2a} \int_0^a f dy dx + \int_{2a}^{3a} \int_{x-2a}^a f dy dx.$$

$$3467. \int_h^{2h} \int_{\frac{ay}{h}}^{4a-\frac{ay}{h}} f dx dy.$$

$$3468. \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f dy dx = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} f dx dy.$$

$$3469. \int_0^a \int_x^{2x} f dy dx + \int_a^{2a} \int_{2x-a}^{x+a} f dy dx = \left(\int_0^a \int_{\frac{y}{2}}^y f dy dx + \int_a^{2a} \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+a}{2}} f dy dx + \int_{2a}^{3a} \int_{y-a}^{\frac{y+a}{2}} f dy dx \right) f dx dy.$$

$$3470. \left(\int_{-a\sqrt{3}}^{-a} \int_{-\sqrt{3a^2-y^2}}^{\sqrt{3a^2-y^2}} f dx dy + \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2+y^2}}^{\sqrt{a^2+y^2}} f dx dy + \int_a^{a\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3a^2-y^2}}^{\sqrt{3a^2-y^2}} f dx dy \right)$$

$$3471. \int_0^1 dy \int_y^1 f dx.$$

$$3472. \int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f dx dy.$$

$$3473. \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f dy dx.$$

$$3474. \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f dx dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f dx dy.$$

$$3475. \left(\int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f dx dy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f dx dy + \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f dx dy \right)$$

$$3476. \int_0^2 \int_y^{\sqrt{10y-y^2}} f dx dy.$$

$$3477. \int_0^a \int_{2(a-x)}^{\frac{a^2-x^2}{a}} f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{2\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{a}{1+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

$$3478. \int_0^a \int_{2a-x}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2a}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{2a\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

$$3479. \int_0^2 \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^y f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx = \\ = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

$$3480. \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

$$3481. \int_0^a \int_y^{2a-y} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2a}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

$$3482. \int_{\frac{\rho(1-\sqrt{2})}{2\rho}}^{\frac{\rho(1+\sqrt{2})}{2\rho}} \int_{\frac{a^2-\rho^2}{2\rho}}^y f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{\frac{\rho}{1-\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

$$3483. \int_{-a}^a \int_{\sqrt{2a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{a\sqrt{2}}^{2a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

$$3484. \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_0^{\frac{a}{1-v}} f(u - uv, uv) u du.$$

$$3485. \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^{\frac{b}{a\alpha+b}} \int_0^{\frac{a\alpha}{1-v}} + \int_{\frac{b}{a\alpha+b}}^1 \int_0^{\frac{b}{v}} \right) f\left(\frac{u(1-v)}{\alpha}; uv\right) u du dv.$$

$$3486. 3 \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r \cos^3 \varphi, r \sin^3 \varphi) r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi dr. \quad 3487. y = uv; x = v.$$

$$3488. \text{Перейти к полярным координатам.} \quad 3489. x^2 = u; y^2 = v. \quad 3490. \frac{8}{3}.$$

$$3491. \frac{1}{3}. \quad 3492. \frac{3}{20}. \quad 3493. \frac{1}{3}. \quad 3494. \frac{2}{3}. \quad 3495. 0. \quad 3496. e^{-1}; \frac{1}{2}(e^{a^2} - 1). \quad 3497. \frac{1}{3}.$$

$$3498. \frac{1}{3}. \quad 3499. \frac{2}{3}. \quad 3500. \frac{8}{3}. \quad 3501. (\pi - 1)a^2. \quad 3502. \frac{3}{4}a^2(\pi - \sqrt{3}). \quad 3503. a^2.$$

$$3504. \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2). \quad 3505. \frac{3}{4}\pi a^2. \quad 3506. ab + (a^2 - b^2) \arctg \frac{a}{b}. \quad 3507. \frac{1}{6}a^2.$$

$$3508. \frac{5\pi}{16}a^2. \quad 3509. \frac{1}{2}\pi a^2. \quad 3512. \frac{\pi}{\sqrt{2}}ab \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \quad 3513. \frac{ab}{12}. \quad 3514. \frac{1}{10} \frac{a^5 b}{h^4}.$$

$$3515. \frac{a^3 b^3}{60c^4}. \quad 3516. \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \quad 3517. \frac{a^4 b k (ak + 2bh)}{6h^2 (ak + bh)^2}. \quad 3518. \frac{21\pi}{256} ab \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).$$

$$3519. \frac{ab}{42} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \quad 3520. \frac{ab\sqrt{ab}}{30c}. \quad 3521. \frac{(a^2 - b^2)(\alpha - \beta)}{2(1 + \alpha)(1 + \beta)}. \quad 3522. \frac{2}{3}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times$$

$$\times (m\sqrt{m} - n\sqrt{n}). \quad 3523. \frac{55}{64}ab. \quad 3524. (a^2 - b^2) \ln \frac{m}{n}. \quad 3525. \frac{1}{6}(m^2 - n^2)(\alpha^3 - \beta^3).$$

$$3526. \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \ln \frac{\alpha}{\beta}. \quad 3527. \frac{1}{3}(a - b)(m - n). \quad 3528. \frac{1}{3}(a^2 - b^2) \ln \frac{m}{n}.$$

$$3529. \frac{1}{3}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{m} - \sqrt{n})(a + \sqrt{ab} + b + m + \sqrt{mn} + n).$$

$$3530. \frac{c^2}{4}((v_1 - v_0)(\operatorname{sh} 2u_1 - \operatorname{sh} 2u_0) - (u_1 - u_0)(\sin 2v_1 - \sin 2v_0)).$$

$$3531. \frac{\pi h^2}{|ab_1 - a_1 b|}. \quad 3532. \frac{2h^2}{|ab_1 - a_1 b|}. \quad 3533. \frac{64}{3}. \quad 3534. \frac{16}{3}. \quad 3535. \frac{27}{2}. \quad 3536. 2\pi a^3.$$

$$3537. \frac{4}{9}ab\sqrt{ab}. \quad 3538. \frac{1}{18}a^3. \quad 3539. \pi ab^2. \quad 3540. \frac{1}{3}abc. \quad 3541. \frac{1}{2}\pi ac^2.$$

3542. $\frac{\pi}{32}$. 3543. $\frac{88}{105}$. 3544. π . 3545. 2π . 3546. $\frac{3\pi}{32} \frac{a^4}{c}$. 3547. $\pi a^3(\beta - \alpha)$.
 3548. $\frac{4}{9} \frac{a^3}{\sqrt{\alpha}}$. 3549. $\frac{81}{32} \pi a^3$. 3550. $\frac{a^4}{24c}$. 3551. $\frac{\pi}{8}$.
 3554. $\frac{1}{3} R^2 H \left(\alpha - \sin 2\alpha + \cos^3 \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right)$.
 3555. $\frac{1}{8} v = \frac{1}{4} a^2 H (\sqrt{2} + 1) \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right)$;

$$v : v_0 = \frac{1}{15,344 \dots}$$

 3556. $\frac{3}{4} a^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \frac{a^3}{177,3 \dots}$. 3557. $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \frac{a^4}{c}$. 3558. $\frac{1}{12} \pi a^3$.
 3559. $\left(\frac{2}{3} \pi + \frac{40}{9} - \frac{32}{9} \sqrt{2} \right) a^3$. 3560. $\frac{16}{9} a^3$. 3561. $\frac{\pi}{192}$. 3562. $\frac{3}{8} \pi (a + b)$.
 3565. $\frac{2\pi A}{\sqrt{4ac - b^2}}$. 3566. $\frac{1}{8} \pi ab \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right)$. 3567. $\frac{a^2 b^2}{8c}$. 3568. $\frac{\pi^2}{2} abc$. 3569. $\frac{\pi k}{k+1} abc$.
 3570. $\frac{4}{9} \frac{a^4 bc}{h^3}$. 3571. $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} abc$. 3572. $\frac{\pi}{12} \left(\frac{ab}{c} \right)^3$. 3573. $\frac{81}{32} \pi abc$. 3574. $\frac{1}{3} abc$.
 3575. $\frac{\pi}{8} abc$. 3576. $\frac{8}{35}$. 3577. $\frac{\pi}{24}$. 3578. $\frac{1}{560} \frac{a^2 b^2}{c}$. 3579. $\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) abc$. 3580. $\frac{\pi}{2} abc$.
 3581. $\frac{\pi}{24} abc$. 3582. $\frac{1}{9} abc$. 3583. $\frac{e-1}{e^2} (m-n) a^2$. 3584. $\frac{\alpha^6 - \beta^6}{24} \cdot \frac{m^4 - n^4}{c}$. 3585. $\frac{7}{3} a^3 \times$
 $\times \ln \frac{3}{2}$. 3586. $\frac{5}{4c}$. 3587. $\frac{14}{9} \ln 3$. 3588. $\frac{1}{192} am(a + m)(3a^2 - 5am + 3m^2)$.
 3589. $\frac{2}{3} (a + b) \sqrt{2ab}$. 3590. $\frac{\alpha - \beta}{3p} \left((a^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right)$. 3591. $\frac{4}{3} \sqrt{q} \left((p + 2a)^{\frac{3}{2}} - \right.$
 $\left. - p^{\frac{3}{2}} \right)$. 3592. $4c \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \right)$. 3593. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$. 3594. $8a^2$.
 3595. $8a^2$. 3596. $2\pi a^2$. 3597. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$. 3598. $\frac{1}{6} (u^3 - 3u + 2) + \pi \ln(u + 2\pi)$;
 $u = \sqrt{4\pi^2 + 1}$. 3599. $\frac{\pi}{3c \sin \alpha} ((c^2 \sin^2 \alpha + a^2)^{\frac{3}{2}} - c^3 \sin^3 \alpha)$. 3600. $\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$.
 3601. $\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)$. 3602. $a^2 (2\pi + 8 - 8\sqrt{2})$. 3603. $2\sqrt{2}$. 3604. $\frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$.
 3605. $\frac{13}{12}$. 3606. $2a^2$. 3607. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(3 - \sqrt{\frac{3}{2}} + \ln \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) \right)$. 3608. $\frac{2}{3} \pi ab (2\sqrt{2} -$
 $- 1)$. 3609. $\frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) ab \arctg \sqrt{\frac{a}{b}}$. 3610. $\frac{ab}{9} (20 - 3\pi)$. 3611. $\frac{\pi a^2}{2} (\sqrt{2} - 1)$.
 3612. $\frac{a+b}{6} \sqrt{2ab}$. 3613. $\pi \ln(e + e^{-1})$. 3614. $\pi \left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h} \right)$.
 3615. $\pi^2 a^2$. 3616. $\arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}$. 3617. $\frac{8}{3}$. 3618. 2. 3619. $\frac{1}{2} \pi a^3$.
 3620. $\frac{1}{2} \pi a^2$. 3621. 0. 3623. πab . 3624. $\frac{1}{2} ab \ln \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right)$. 3625. $\frac{3a^2}{16} (t_2 - t_1 -$
 $- \frac{1}{4} (\sin 4t_2 - \sin 4t_1))$. 3626. $2\pi a^2$. 3627. $2\pi n$, где n — число обходов контура C
 вокруг начала координат. 3628. $\sum \operatorname{sign} \frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$, причем сумма взята по всем точ-
 кам пересечения, лежащим внутри контура C . 3629. На биссектрисе, на рассто-
 янии $a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ от центра. 3630. $\frac{4}{5} a$. 3631. $\left(\pi a; \frac{4}{3} a \right)$. 3632. $\left(a \frac{\sin m}{m}; a \frac{1 - \cos m}{m}, \frac{hm}{2} \right)$.
 3633. $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{2} \right)$. 3634. $\left(\frac{1}{3} a; \frac{1}{3} a \right)$. 3635. $\left(\frac{3}{5} x_0; \frac{3}{8} y_0 \right)$. 3636. $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$.
 3637. $x_c = y_c = \frac{4a}{3\pi}$. 3638. $x_c = \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. 3639. $\left(\frac{\pi a \sqrt{2}}{8}; 0 \right)$. 3640. $x_c =$
 $= \frac{5}{6} a$. 3641. $x_c = y_c = \frac{4\pi a}{9\sqrt{3}}$. 3642. $\left(\pi a; \frac{5}{6} a \right)$. 3643. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}, \frac{1}{4} \right)$. 3644. $\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5} \right)$.
 3645. $\left(\frac{3\pi a}{64}, \frac{3\pi b}{64} \right)$. 3648. $\frac{1}{8} a^4 (2\varphi - \sin 2\varphi)$; $\frac{a^4}{8} \left(2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{32}{9} \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} \right)$.

3649. $\frac{1}{8}a^4(2\varphi - \sin 2\varphi) - \frac{1}{6}a^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$. **3650.** При $\varphi = \pi$ и когда $8 \operatorname{tg} \varphi = 9\varphi$. **3651.** У равностороннего треугольника. **3652.** $\frac{\pi ab^3}{4}$; $\frac{\pi a^3 b}{4}$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{\pi a^3 b^3}$. **3653.** В 12,52 раза. **3654.** $\frac{4h_1 h_2 (a_1^2 h_2^2 + a_2^2 h_1^2)}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|^3}$. **3655.** $-\frac{4h_1 h_2 (a_1 b_1 h_2^2 + a_2 b_2 h_1^2)}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|^3}$. **3656.** $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$; $\frac{4}{3}$. **3657.** $\frac{\mu \pi a^4}{2}$. **3658.** $\mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$. **3659.** $\frac{\mu h^4}{15\sqrt{3}}$. **3661.** $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$. **3662.** $\left(0; 0; \frac{a+h}{2}\right)$. **3663.** $x_c = 0$; $y_c = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{u^3 - h^3}{au + h^2 \ln \frac{a+u}{h}}$; $z_c = \frac{\pi}{2}h$; $u^2 = a^2 + h^2$. **3664.** $x_c = y_c = \frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}$; $z_c = \frac{61\sqrt{2} - 15 \ln(1 + \sqrt{2})}{96(\sqrt{2} + 1)}$. **3665.** $x_c = \frac{2}{k} y_c = \frac{3(5\sqrt{6} - \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))}{8(3\sqrt{3} - 1)} c = 0,99209c$; $z_c = \frac{6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3} - 1)} = 0,37330c$. **3666.** $\left(\frac{2a}{3(\pi - 2)}; 0; \frac{\pi a}{4(\pi - 2)}\right)$. **3667.** $\left(0; 0; \frac{a}{\pi(\sqrt{2} - 1)}\right)$. **3668.** $\frac{1}{2}\pi a^3 \sqrt{a^2 + h^2}$. **3669.** $\frac{8}{3}\pi a^4$. **3670.** $\frac{4}{15}\pi(1 + 6\sqrt{3})a^4$. **3671.** $\frac{2}{3}\pi a(a - h)^2(2a + h)$. **3672.** $\frac{4}{3}\pi abc \times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$. **3673.** $\frac{2\pi a}{c(n-2)}((c - a)^{2-n} - (c + a)^{2+n})$; $n \neq 2$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3675.} \quad & \int_0^h \int_0^a \int_0^{a-y} f(x, y, z) dx dy dz = \\
 & = \int_0^h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}} f \cdot r dr d\varphi dz = \\
 & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\omega} \int_0^{\frac{h}{\cos \theta}} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi + \\
 & \quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_1} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi,
 \end{aligned}$$

где $\omega = \operatorname{arctg} \frac{a}{h(\cos \varphi + \sin \varphi)}$; $R_1 = \frac{a}{\sin \theta(\cos \varphi + \sin \varphi)}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3676.} \quad & \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} f \cdot dz dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{r_1} \int_0^{a-r(\cos \varphi + \sin \varphi)} f \cdot r dz dr d\varphi = \\
 & = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R_1} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi,
 \end{aligned}$$

где $r_1 = \frac{a}{\cos \varphi + \sin \varphi}$; $R_1 = \frac{a}{\cos \theta + \sin \theta(\cos \varphi + \sin \varphi)}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3677.} \quad & \int_{-a}^a \int_{-y_1}^{y_1} \int_{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} \alpha}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f \cdot dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{r \operatorname{ctg} \alpha}^{\sqrt{a^2-r^2}} f \cdot r dz dr d\varphi = \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^a f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi;
 \end{aligned}$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - x^2}.$$

$$3678. \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}} f \cdot dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_r^{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}} f \cdot r dz dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a \cos \theta} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi.$$

$$3679. \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2}} \int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f \cdot dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-r^2}}^r f \cdot r dz dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi.$$

$$3680. \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x} f \cdot dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{a-r \cos \varphi} f \cdot r dz dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\omega} \int_0^{R_1} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_2} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi,$$

где R_1 определяется из уравнения плоскости, R_2 — из уравнения цилиндра, $\omega = \arctg \frac{1}{1-\cos \varphi}$.

$$3681. \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{a^2-2x^2}}^{\sqrt{a^2-2x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f \cdot dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \int_r^{\sqrt{a^2-r^2} \cos^2 \varphi} f \cdot r dz dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{R_1} f \cdot R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi,$$

где $\rho = \frac{a}{\sqrt{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$; $R_1 = \frac{a}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}}$. 3682. $\frac{1}{3} \pi a^3$. 3683. $\frac{a^3}{360}$.

$$3684. \frac{\pi a^3}{60}. 3685. \frac{\pi^2 a^3}{4}. 3686. \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. 3687. \frac{32}{315} a^3. 3688. \frac{1}{6} a^3. 3689. \frac{\pi a^3}{8}.$$

$$3690. \frac{4}{9} \pi (a^3 + b^3 + c^3). 3691. \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e}\right) a^3. 3692. \frac{2}{3} \pi a^3. 3693. \frac{\pi^2 a^3}{6}.$$

$$3694. \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}. 3695. \frac{4}{3} \pi a^3. 3696. \frac{2}{3} \pi^2 a^3. 3697. \frac{\pi a^2 bc}{3h}. 3698. \frac{a^4 b^4 c^4}{360 h^9}.$$

$$3699. \frac{4\pi abc^7}{21h^6}. 3700. \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{h^3}. 3701. 2\pi^2 (1 - a^2) abc. 3702. \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{abc^2}{h}.$$

$$3703. \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{abc^2}{h}. 3704. \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{h^3}. 3705. \frac{abc^4}{60l^3}. 3706. \frac{abc}{60} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

$$3707. \frac{abc}{60} \frac{hk}{ak+bh} \left(\frac{a}{h}\right)^4. 3708. \frac{abc}{60} \cdot \frac{h(5c+4h)}{(c+h)^2}. 3709. \frac{a^2 b^2 c^2}{360 h^3}. 3710. \frac{\pi abc}{64} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

$$3711. \frac{\pi abc}{64} \cdot \frac{hk}{ak+bh} \left(\frac{a}{h}\right)^4. 3712. \frac{abc}{12}. 3713. \frac{abc}{3\pi}. 3714. \frac{4\pi}{35} abc.$$

3715. $\frac{abc}{90}$. 3716. $\frac{abc}{1680}$. 3717. $\frac{49}{864}a^3$. 3718. $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.
3719. $\frac{4\pi}{3|\Delta|}$. 3720. $\frac{2\pi h}{|\Delta|}$. 3721. $\frac{4}{3|\Delta|}$. 3722. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. 3723. $\left(\frac{3}{5}a; \frac{3}{5}b; \frac{9}{32}\sqrt{ab}\right)$.
3724. $\left(\frac{1}{3}a; \frac{1}{3}b; \frac{2}{9}c\right)$. 3725. $\left(0; 0; \frac{3}{4}h\right)$. 3726. $\left(\frac{3}{8}a; \frac{3}{8}a; \frac{3}{8}a\right)$.
3727. $\left(0; 0; \frac{3}{4}\frac{(a+h)^2}{2a+h}\right)$. 3728. $\left(\frac{12a}{5(3\pi-4)}; 0; 0\right)$. 3729. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.
3730. $\left(0; 0; \frac{a}{2}\right)$. 3731. $x_c = y_c = a - z_c = \frac{16\sqrt{2}-6-3\pi}{4(3\pi-4\sqrt{2})}a = 0,47789a$. 3732. $x_c = y_c = z_c = \frac{9\pi a}{448}$. 3733. $\left(0; 0; \frac{9}{20}a\right)$. 3734. $\left(0; 0; \frac{3(2+\sqrt{2})}{16}c\right)$. 3735. $\left(0; 0; \frac{7}{30}c\right)$.
3736. $\left(\frac{3}{28}a; \frac{3}{28}b; \frac{3}{28}c\right)$. 3737. $\left(\frac{21}{128}a; \frac{21}{128}b; \frac{21}{128}c\right)$. 3738. $\frac{abc}{3}(a^2 + b^2)$.
3739. $\frac{32\sqrt{2}}{135}a^5$. 3740. $\frac{\pi a^4 h}{10}$. 3741. $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. 3742. $\frac{9\pi}{140}a^5$. 3743. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2 + b^2)$.
3744. $\frac{abc}{60}(a^2 + b^2)$. 3745. $\frac{4\pi}{715}abc(a^2 + b^2)$. 3746. $\frac{\pi^2 a r^2}{2}(4a^2 + 3r^2)$. 3747. $\frac{\pi^2 a r^2}{4} \times$
- $\times (4a^2 + 5r^2)$. 3748. $\frac{\pi abh}{20}(b^2 + 4h^2)$. 3749. $\frac{\pi R^2 H}{12}(4H^2 + \sqrt{3}R^2)$. 3750. $\frac{\pi R^2 H}{60}(3R^2 + 2H^2)$. 3752. $h = a\sqrt{3}$. 3753. $h = 2a$. 3754. $h = a$. 3765. $2\omega k$. 3766. $2\pi a^2 \omega$.
3767. $4\pi \omega$. 3769. $3v$, где v объем тела. 3770. $\frac{12}{5}\pi a^5$. 3771. 0. 3793. $2P = (a-x)^2 + (b-x)^2$, если $a \leq x \leq b$; $2P = |(a-x)^2 - (b-x)^2|$, если $x < a$ или $x > b$. 3794. $P'' = 2\mu(x)$, если $a < x < b$; $P'' = 0$, если $x < a$ или $x > b$. 3795. $P = \mu\pi R^2 \ln a$, если $a > R$, где a — расстояние от центра до точки M ; $P = \mu\pi R^2 \ln R - \frac{1}{2}\mu\pi(R^2 - a^2)$, если $a < R$.
3796. $\ln(u^2 - 4x^2) + x \ln \frac{u+2x}{u-2x} + 2y \arctg \frac{y}{u} = 4 \ln 2$, где $u^2 = x^2 + y^2 + 1$.
3797. $P = 2\pi \int_0^a \mu(\rho) \max(\ln r, \ln \rho) \rho d\rho$. 3798. $P = 4\pi\mu \min\left(a, \frac{a^2}{\rho}\right)$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 3799. $P = \frac{4\pi a^3}{3R}\mu$, если $R > a$; $P = 2\pi\mu\left(a^2 - \frac{1}{3}R^2\right)$, если $R < a$. 3800. $P = 4\pi \int_0^a \mu(\rho) \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right) d\rho$. 3801. $P = \frac{2\pi\mu}{3z}((a^2 + z^2)^{3/2} - z^3 - \frac{3}{2}a^2z + a^3)$; $z > a$; $P = \frac{2\pi\mu}{3z}((a^2 + z^2)^{3/2} - a^3 + \frac{3}{2}a^2z - 2z^3)$; $z < a$.
3802. $\frac{4\pi}{3R}(b^3 - a^3)$ вне; $\frac{2\pi}{3R}(3b^2R - R^3 - 2a^3)$ в слое; $2\pi(b^2 - a^2)$ в полости.
3803. $\mu\pi h(\sqrt{h^2 + r^2} - h)$. 3804. $F_z = k\mu\frac{4\pi a}{5}$; $F_{0z} = k\mu\frac{4}{3}\pi\rho$; $\rho = \frac{a}{\sqrt[3]{5}}$; $F_z : F_{0z} = 3 : \sqrt[3]{25} = 1,02598 \dots$.
3805. $P = \frac{1}{a}(\sqrt{u-2ax} - \sqrt{u+2ax}) + \frac{x}{a} \ln \frac{\sqrt{u-2ax} + a - x}{\sqrt{u+2ax} - a - x}$;
 $u = x^2 + y^2 + a^2$.
3806. $P = 2\pi\mu(\sqrt{a^2 + z^2} - z)$.
3810. $\iint_S \frac{dx dy}{r} = \int_S \ln r \cos(r, n) ds$.
3812. $\frac{4\pi}{3} \int \mu a$. 3816. $\frac{1}{n!}$. 3817. $\frac{1}{(n+1)!}$. 3818. $\frac{2^n a^n}{n!}$. 3819. $\frac{n}{3}$. 3820. $\frac{n(n-1)}{8}$.
3826. $\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \int_0^a u^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1} F(u) du$. 3827. $\frac{8\pi^2 a^5}{15}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3828. $y = xy'$; касательная и радиус-вектор совпадают. 3829. $x + yy' = 0$; касательная перпендикулярна радиус-вектору. 3830. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$. 3831. $xy' = 2y$. 3832. $y = xy' + y'^2$. 3833. $2 \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{x-yy'}{x^2-y^2}$. 3834. $y^2(1+y'^2) = 1$. Длина нормали равна единице. 3835. $xy' = y \ln y'$. 3836. $(x + yy')(xy' - y) = (a^2 - b^2)y'$. 3837. $y((y'^2 + 1) \operatorname{arctg} y' - y') = x$. 3838. $y(y'^2 + 1) = 2a$. 3839. $y^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2$. Длина касательной постоянна. 3840. $y'' = 0$. Кривизна равна нулю. 3841. $y''' = 0$. 3842. $(y'')^2 = (1 + y'^2)^3$. Кривизна равна единице. 3843. $\left(\frac{(1+y'^2)^3}{y'^2}\right)' = 0$. Кривизна постоянна. 3844. $y'' + y = 0$. 3845. $y'' - 2y' + y = 0$. 3848. $y = xy'$; $z = xz'$. 3849. $x dx + y dy + z dz = 0$; $dx + dy + dz = 0$. 3850. $y' + z = 0$; $z' - y = 0$. 3851. $\frac{dx}{dt} = -y$; $\frac{dy}{dt} = x$; $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$. 3852. $xy' = y$; $1 + y'^2 = z'^2$. 3853. $xy' = y$; $1 + y'^2 = 2(z - xz' + 1)z'^2$. 3854. $z = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + C$. 3855. $z = xy + \frac{y}{x} + C$. 3856. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + xy + C$. 3857. $z = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + C$. 3858. $z = \ln(x + y) - \frac{y}{x + y} + C$. 3859. $u = \frac{x - 3y}{z} + C$. 3860. $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C$. 3861. $P = x^2 + (y + z)^2 + C$. 3862. $P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. 3863. $a = b = 1$; $c = -3$; $\alpha = \beta = -3\gamma = +3$; $P = C - \frac{x + y - z}{(x + y + z)^2}$. 3864. $a = b = -1$; $z = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C$. 3865. $u = \frac{\partial^n \ln r}{\partial x^{n-1} \partial y}$. 3867. $x^2 - y^2 + 2xy = C$. 3868. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$. 3869. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$. 3870. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$. 3871. $x^2 + y^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$. 3872. $y = x$. 3873. $x + ye^{\frac{x}{y}} = 1 + e$. 3874. $x^2(1 + y^2) = C$. 3875. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$. 3876. $y = \operatorname{tg} \ln Cx$. 3877. а) $y = x$; $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x + 3y = 0$. б) $3(x^2 - y^2) + 2(x^3 - y^3) + 5 = 0$. 3878. $y = 1$; $\ln y = A \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 3879. $y^2 - 1 = 2 \ln \frac{e^x + 1}{e + 1}$. 3880. $y = 1$; $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1$. 3881. $y = (x + 1)^2$. 3882. $y = 1$. 3883. $x = a$; $y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a - x}{x}}$. 3884. а) $y = 1$; б) $y = 1 + (a - 1)e^{-\frac{1}{3}x^3}$. 3885. $y(C\sqrt{1 - x^2} - a) = 1$. 3886. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$. 3887. $y = 0$; $y = (\sqrt{x + 1} + C)^2$. 3888. $xy = C$; $x^2 + y^2 = C$. 3889. $y - y_0 = \sqrt{x - x^2} - \operatorname{arcsin} \sqrt{x}$. 3890. $x^{2/3} + (y - y_0)^{2/3} = a^{2/3}$. 3891. $x^2 + (y - y_0)^2 = a^2$. 3892. $x - x_0 = \cos \varphi + \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; $y = \sin \varphi$. 3893. $y = Cx^{\frac{1-k}{k}}$. 3894. $y = Cx^2$. 3895. $y = x - \frac{1}{x + C}$. 3896. $x + C = \operatorname{ctg} \left(\frac{y - x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$. 3897. $(ax + by + c)b + a = Ce^{bx}$. 3898. $2bu - 2a \ln(a + bu) = b^2(x + C)$; $u^2 = ax + by + c$. 3899. $ax + by + c = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}(C + x\sqrt{ab})$. 3900. $x + y = a \operatorname{tg} \left(\frac{y}{a} + C \right)$. 3901. $v + C = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u - v}{2} \right)$. 3902. $y = Ce^{\frac{x}{a}}$. 3903. $y^2 = 2p(x + C)$. 3904. $xy = C$. 3905. $x^m y^n = C$. 3906. $r = Ce^{\frac{\varphi}{a}}$. 3907. $r = C \sin \varphi$. 3908. $r^2 = C \sin 2\varphi$. 3909. $4x = C \pm am^2(t - \sin t)$; $4y = am^2(1 + \cos t)$; $z = am \cos \frac{t}{2}$, где $m = \operatorname{tg} \gamma$. 3910. $x = m(\cos(t + \alpha) + t \sin(t + \alpha))$; $y = m(\sin(t + \alpha) - t \cos(t + \alpha))$; $2az = m^2(1 + t^2)$; $m = a \operatorname{ctg} \gamma$. 3911. $x = a \operatorname{ch} t \cos(C + t)$; $y = a \operatorname{ch} t \sin(C + t)$; $z = at$. 3912. $r = Ce^{\pm \frac{\varphi}{\sqrt{2}}}$; $z = r$. 3913. $y = \varphi(x)$;

$z - C = \pm \operatorname{ctg} \alpha \int \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$. **3914.** $\varphi + C = \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. **3915.** $\alpha = 75$. **3916.** $y = m \operatorname{ch} \frac{x-a}{m}$. **3921.** $r = \sqrt{\frac{A}{a} \sin 2(\varphi - \varphi_0)}$; особый интеграл $r = \sqrt{\frac{A}{a}}$. **3922.** $\frac{S}{g\sigma} \left(\frac{v}{\sigma} \ln \frac{v}{v - \sigma \sqrt{2gH}} - \sqrt{2gH} \right)$. Возможно, если $v > \sigma \sqrt{2gH}$. **3923.** а) $v = \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$, $S = \frac{gm}{k} t - \frac{gm^2}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$; б) $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th} \left(t \sqrt{\frac{gk}{m}} \right)$; $S = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(t \sqrt{\frac{gk}{m}} \right)$. **3924.** $p = Ce^{\frac{\rho_0 \omega^2}{2\rho_0}} r^2$. **3925.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$. **3926.** $x + y = 0$. **3927.** $y \ln y + x = Cy$. **3928.** $y = x \ln Cy$. **3929.** $y = x \operatorname{tg}(\ln Cx)$. **3930.** $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$. **3931.** $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$. **3932.** $Cy^3 = x^2 - y^2$. **3933.** $y = x\sqrt{C + \ln(x^2)}$; $C = 0$. **3934.** $2Cy = C^2x^2 + 1$. **3935.** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C$. **3936.** $y = xe^{1+Cx}$. **3937.** а) $y = 1 - x + Ce^{-x}$; $y = 1 - x - e^{-x}$; б) $y = \frac{x^2}{2} + C$; $y = \frac{x^2}{2}$. **3938.** $y(C - x) = C^2$; $y = 4x$. **3939.** $y = Cx$; $y = Cx^2$. **3940.** $x + 2y + 3 \ln(x + y - 2) = C$. **3941.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. **3944.** а) $x^2 + y^2 = Cx$; б) $x^2 = C^2 - 2Cy$; в) $xy = C$. **3945.** $x = Cye^{\frac{1}{y}}$. **3946.** $x^2 e^{x^2 y^2} = Cy^2$. **3947.** $x^2 = Cy^2 - y^4$. **3948.** $xy^2 \sin(\ln Cx) = 1$. **3949.** $x^2 = y^4 + Cy^6$. **3950.** $y^2 = x \ln(Cy^2)$. **3951.** $x^2 y^2 + 1 = Cy$. **3952.** $x^6 + y^4 = Cy^2$. **3953.** $(C - \ln x)(1 - xy) = 2$. **3954.** $xy(1 - Cx^{a-1}) = 1 - Cax^{a-1}$, если $a \neq 1$. При $a = 1$ $(xy - 1) \ln(Cx) = 1$. **3955.** $2x^3 y^3 = 3a^2 x^2 + C$. **3956.** $y = x$. **3957.** $y = \frac{1}{5} x^5 + \frac{C}{x^3}$. **3958.** $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$, если $m \neq -a$; если $m = -a$, то $y = Ce^{mx} + xe^{mx}$. **3959.** $y = x(1 + x^2) + C(1 + x^2)$. **3960.** $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$. **3961.** $y = (x + C) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. **3962.** $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$. **3963.** $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. **3964.** $y^2 - 2x = Cy^3$. **3965.** $x = y^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{y}} \right)$. **3966.** $(1 + Cx + \ln x)y = 1$. **3967.** $y^2 + 2x^2 y^2 + Cy^2 e^{2x^2} = 2$. **3968.** $a^2 y^3 = Ce^{ax} - a(x + 1) - 1$. **3969.** $ny^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$. **3970.** $x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2$. **3971.** $\left(2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} \right) x = 1$. **3972.** $y^4 + 2x^2 y^2 + 2y^2 = C$. **3973.** $x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}$. **3974.** $3e^{-2y} = Ce^{-2x} - 2e^x$. **3975.** $e^y(1 + Cx) = 1$. **3976.** $\sin y = x + Ce^{-x}$. **3977.** $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = Ce^{-x} - x + 1$. **3978.** $\varphi(x) = Cx^{-\frac{n-1}{n}}$. **3979.** $y = 2 - (2 + a^2)e^{\frac{x^2 - a^2}{2}}$. **3980.** $x^3 y = Ce^{-\frac{1}{x}}$. **3981.** $3y = (x - 3)\sqrt{x}$. **3982.** $y^2 = 1 - e^x$. **3984.** $x + 2y + ax(x + y) = C(x + y)^2$. **3985.** $\frac{x}{x+y} = Ce^{\frac{x(a-y)}{a(x+y)}}$. **3986.** $3x(x^2 + y^2)^2 - 2y(3x^2 + y^2) = Cx^3$. **3987.** $I = \frac{V}{R} + \left(I_0 - \frac{V}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$. **3988.** $I = \frac{V_0}{R^2 + (2\pi nL)^2} \left(R \sin 2\pi nt + 2\pi nL \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos 2\pi nt \right) \right) + I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$. **3989.** $3axy = x^3 + 2a^3$. **3990.** $y = \frac{1}{Cx - x \ln x} - \frac{1}{x}$. **3991.** $y = \frac{2x^3 - C}{x(C + x^3)}$. **3992.** $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{x \ln x + Cx}$. **3993.** $y(x^4 + Cx) = 4x^3 + C$. **3994.** $y = -3 + \frac{x^2}{x \operatorname{th}(x + C) - 1}$. **3995.** $y = \frac{x^2}{u-3}$; $u = \frac{x^2}{1+v}$; $v = x \operatorname{ctg}(C - x)$. **3996.** $y = \frac{t}{u-7}$; $u = t^{\frac{3}{2}}$; $u = \frac{t}{v+5}$; $v = \frac{t}{w-3}$; $w = \frac{t}{z+1}$; $z = \sqrt{t} \operatorname{ctg}(C - \sqrt{t})$. **3997.** $y = \frac{u}{x}$; $x = t^{-\frac{5}{2}}$;

$u = 5 + \frac{t}{v}$; $u = 3 + \frac{t}{w}$; $w = 1 + \frac{t}{z}$; $z = \sqrt{t} \operatorname{th}(C - \sqrt{t})$. **3998.** $xy = u$; $x^2 t = 1$; $vu = v + t$; $v = \sqrt{t} \operatorname{cth}(C - \sqrt{t})$. **3999.** $xy = u$; $x^2 t = 1$; $vu = v + t$; $v = \sqrt{t} \operatorname{ctg}(C - \sqrt{t})$. **4000.** $xy = u$; $x^2 t^3 = 1$; $u = -1 + \frac{t}{v}$; $v = \frac{1}{3} + \frac{t}{w}$; $w = \sqrt{t} \operatorname{ctg}(C + 3\sqrt{t})$. **4001.** $xy = u$; $x^2 = t^3$; $u = \frac{3t}{3v+1}$; $v = -\sqrt{t} \operatorname{th}(C + 3\sqrt{t})$. **4002.** $x - 1 = C(y - 1)$. **4003.** $x + y + x^2 + xy = C(1 + x + y)^2$. **4004.** $y(x + y) = 1 + x + y + C(x + y)^2$. **4005.** $y + 2 = C(x - 1)$. **4006.** $(2x - 3y + 1)(x + y + 1) = C(x + y - 1)^2$. **4007.** $(x + y + 1)^2 = C(x^2 + y^2 + 1)$. **4008.** $(y - 1)^2 + x^2 = Cy^2 e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y-1}}$. **4009.** $x^2 - y = Cx$. **4010.** $6x^2 y + 2y^3 - 6ax^4 - 3x^5 = Cx^3$. **4011.** $x^2 y + 2x = Cy$. **4012.** $x^2 y - x + y^2 + y \ln y = Cy$. **4013.** $xy^2 - 2x^2 y - 2 = Cx$. **4014.** $x^2 + y^2 = Ce^{-x}$. **4015.** $x \sin y + y \cos y - \sin y = Ce^{-x}$. **4016.** $xy + x + y = C(x + y)(x + y + 2)$. **4017.** $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy$. **4018.** $xy - \ln y = C$. **4019.** $x^2 y^2 + 2 \ln \frac{x}{y} = C$. **4020.** $x^2 - y^2 - 1 = Cx$. **4021.** $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$. **4022.** $\mu = \frac{1}{\omega - \omega_1}$. **4023.** $y = x \operatorname{tg}(x + C)$. **4024.** $y^2 - 1 + Cxy = 0$. **4025.** $x^2 + y^2 = Cy^2 e^{2x}$. **4026.** $Cx = (x + y)e^{\frac{x(a-y)}{a(x+y)}}$. **4027.** $xy^2 \ln(Cxy) = 1$. **4028.** $xy^2 = \ln \frac{Cx^2}{y}$. **4031.** $2b + c(x + y) = C(cxy - a)$. **4032.** $a + b(x + y) + cxy = C(x - y)$. **4033.** $C^2(x - y)^2 - 2C(2cxy + b(x + y) + 2a) + b^2 - 4ac = 0$. **4034.** $y\sqrt{a + bx + cx^2} + x\sqrt{a + by + cy^2} = C(y - x)$. **4045.** $(x^2 + C - 2y)(x + y - 1 + Ce^{-x}) = 0$. **4046.** $y + C \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0$. **4047.** $(xy - C)(x^2 y - C) = 0$. **4048.** $x^2(3y^2 - x^2)^2 - 2Cy(y^2 - 3x^2) + C^2 = 0$. **4049.** $15y + C = 6u^5 - 10u^3$; $u^2 = 1 - x$. **4050.** $(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$. **4051.** $y = x \operatorname{ch}(x + C)$. **4052.** $x = Ce^{\varphi + \frac{1}{2}e^{-2\varphi}}$; $y = 2C \operatorname{ch} \varphi e^{\varphi + \frac{1}{2}e^{-2\varphi}}$. **4053.** $y = ax + C$; $a^3 - 3a + 1 = 0$. **4054.** $y = ax + C$; $a = e^a \sin a$. **4055.** $x = ap + bp^2$; $6y = C + 3ap^2 + 4bp^3$. **4056.** $x = 2p + 3p^2 + C$; $y = p^2 + 2p^3$. Особенное решение $y = 0$. **4057.** $y = (\sqrt{C + 2x - 1})e^{\sqrt{C + 2x - 1}}$. **4058.** $2u + C = x^2 \pm (x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$. **4059.** $x = v^u$; $y + C = \int v^{2u} \left(v \ln v - \frac{1}{u} \right) du$; $v = 1 + \frac{1}{u}$. **4060.** $x = \frac{at}{1+t^3}$; $y + C = \frac{a^2}{6} \cdot \frac{4t^3+1}{(1+t^3)^2}$. **4061.** $y = Cx + C^2$; $4y = -x^2$. **4062.** $y = Cx + C - C^2$; $4y = (x + 1)^2$. **4063.** $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$. **4064.** $y = Cx \pm \sqrt{1 - C^2}$; $y^2 - x^2 = 1$. **4065.** $x = Cy + C^2$; $4x = -y^2$. **4066.** $2x = C + 3p^2 + 6p$; $y = x + p^3 - 3p$; $y = x - 2$. **4067.** $Cy = (x - C)^2$; $y = 0$; $y = -4x$. **4068.** $y = (C + \sqrt{x + 1})^2$; $y = 0$. **4069.** $x = 2(1 - t) + Ce^{-t}$; $y = x(1 + t) + t^2$. **4070.** $3t^2 x = C + 2t^3$; $3ty = 2C + t^3$. **4071.** $t^2 x = C + \ln t$; $ty = 2xt^2 + 1$. **4072.** $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. **4073.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **4074.** Эллипсы и гиперболы. **4075.** $xy = a^2$. **4076.** $3x\sqrt{p} = 1 - p\sqrt{p}$; $6y = -2\sqrt{p} - p^2$. **4077.** $4y = -(x + 1)^2$. **4078.** $4y + x^3 = 0$. **4079.** $4y + x^5 = 0$. **4080.** $y = x$. **4081.** $xy = 1$. **4082.** $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 4\frac{x}{a}\frac{y}{b}$. **4083.** $y = \pm 2e^{\frac{x}{2}}$. **4084.** $y^2 - x^2 = 1$. **4085.** $16y = x^4$; $y = 0$. **4086.** $y^2 \pm 2ax = 0$. **4087.** $x^2 + 2y^2 = C^2$. **4088.** $x^2 + \sigma y^2 = C$. **4089.** $b^2 \ln y = a^2 \ln(Cx)$. **4090.** $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln(Cx)$. **4091.** $y^{2-\sigma} = x^{2-\sigma} + C$, если $\sigma \neq 2$; $y = Cx$, если $\sigma = 2$. **4092.** Софокусные гиперболы. **4093.** $x + C = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$; $y = a \sin t$. **4094.** $9p(y + C)^2 = 8x^3$. **4095.** $y^2 = Ce^{-\frac{x}{p}} - 2px + 2p^2$. **4096.** $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$. **4097.** $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

4098. $(x^2 + y^2)^3 = Cy(y^2 + 3x^2)$. **4099.** $(x^2 - y^3)^3 = (C + x^3 + 3xy^2)^2$. **4100.** $x = C(\cos t \pm \frac{1}{\sin \theta})(\operatorname{tg} \frac{t}{2})^{\pm \sin \theta}$; $y = \pm C \sin t (\operatorname{tg} \frac{t}{2})^{\pm \sin \theta}$; $\operatorname{tg} \theta = a$. **4101.** $r = C(1 - \cos \varphi)$. **4102.** $r = Ce^{-\varphi^2 + \frac{2\varphi^3}{3\pi}}$. **4103.** $2y^2 - 1 = C(2x^2 + 1)$. **4104.** $r^{-n} = a^{-n} \cos n\varphi + b^{-n} \sin n\varphi$. **4105.** $x = -C \sin \varphi - \frac{P}{2} \sin \varphi \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$; $y = C \cos \varphi - \frac{P}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{P}{2} \cos \varphi \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$. **4106.** $x \operatorname{ch} t = C + a(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)$; $y \operatorname{ch} t = C \operatorname{sh} t + a$. **4107.** $x = 2a(t \sin t - \cos t) + (at^2 + C) \cos t$; $y = 2a(\sin t + t \cos t) - (at^2 + C) \sin t$. **4108.** $r = C(1 + \cos(\varphi \pm 2\alpha))$. **4109.** $r^2 \cos(2\varphi \pm \alpha) = C$. **4110.** $r = C \cos(\varphi \pm \alpha)$. **4111.** $r = a \cos^m \frac{\varphi - \varphi_0}{m}$. **4112.** $x = Ce^\varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) - a\sqrt{2} \sin \varphi$; $y = Ce^\varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) + a\sqrt{2} \cos \varphi$. **4113.** $y = z\varphi \left(\frac{x}{z} \right)$; $\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \operatorname{ctg} \int \frac{\pm \sqrt{AC - B^2}}{A} dt$, где $tz = x$, $A = t^2 + \varphi^2(t) + 1$, $B = t + \varphi\varphi'$, $C = 1 + \varphi^2$. **4114.** Если уравнение параболоида $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$; $2az = r^2$, то $\varphi + C = \frac{m}{a} \sqrt{r^2 + a^2} - m \ln \frac{a + \sqrt{r^2 + a^2}}{r}$; $m = \operatorname{tg} \alpha$. **4115.** Если a радиус поперечного сечения тора, $l > a$ — расстояние от центра этого сечения до оси вращения, то в полярных координатах $r(l + a \cos(\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a} \operatorname{ctg} \alpha(\varphi - \varphi_0))) = l^2 - a^2$; $z^2 = a^2 - (l - r)^2$. **4116.** Циклоида, получаемая качением круга по прямой, параллельной оси вращения. **4117.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $y = Ax \frac{a^2}{b^2}$. **4118.** Их проекции на xOy — трактрисы; $y - y_0 = \sqrt{a^2 - x^2} + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. **4119.** $x = a \sin t$; $y = y_0 + a \cos \alpha \left(\cos t + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right)$; $z = \left(y_0 + a \cos \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \right) \operatorname{ctg} \alpha - a \sin \alpha \cos t$. **4120.** Проекция — логарифмика $x - x_0 = -p \ln |y|$. **4121.** $xy + y^2 = 1 + Ce^{\frac{x}{y}}$. **4122.** $x + a \ln(x + y) - a \ln x = C$. **4123.** $x^2 = C(y + \sqrt{x^2 + y^2})$. **4124.** $(x^2 + y^2)e^y = C$. **4125.** $x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y = C$. **4126.** $(x + C)y = x - C$. **4127.** $y = x\sqrt{C + 2 \ln y}$. **4128.** $y = Cx + C^2$; $4y + x^2 = 0$. **4129.** $4x^2y = (x + C)^2$; $y = \frac{1}{4}$; $y = 0$. **4130.** $(C - x)y = x$. **4131.** $x^3 + 3x^2y + xy - y = C$. **4132.** $xy = (x + C)(x - 1)$. **4133.** $x = y^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{y}} \right)$. **4134.** $x(C - y) = C^2$; $x^2 = 4y$. **4135.** $2y = xt - \sqrt{1 + t^2}$; $x = t \ln(1 + \sqrt{1 + t^2}) - t \ln t + Ct$; $2y + 1 = 0$. **4136.** $y = (Cx - C^3)^2$; $27y = 4x^3$. **4137.** $(x - C)^2 + y^2 = aC$; $y^2 - \frac{a^2}{4} = ax$. **4138.** $x = 2Ce^{-\frac{\varphi}{2}} \cos \varphi$; $y = C^2 e^{-\varphi} (2 + \sin 2\varphi)$. **4139.** $x = 2Ce^{-\varphi} \cos \varphi$; $y = C^2 e^{-2\varphi} (1 + \sin 2\varphi)$. **4140.** $x = 2C\varphi e^\varphi$; $y = C^2 e^{2\varphi} (1 + 2\varphi + 2\varphi^2)$; $2y = x^2$. **4141.** $2y = C^2 + 2Cx - x^2$; $y = -x^2$. **4142.** $y^2 + Cx^2 = C^2$. **4143.** $x\sqrt{C - t} = a \cos^2 t$; $y\sqrt{C - t} = a(2C - 2t + \sin t \cos t)$. **4144.** $y = xt - x^{-m} e^t$; $x = e^{\frac{t}{m}} \left(C + (m + 1)e^{\frac{t}{m}} \right)^{-\frac{1}{m+1}}$. **4145.** $C^2x - Cxy + a^3 = 0$; $xy^2 = 4a^3$. **4146.** $\frac{2}{y-x} = \ln \frac{x-1}{x+1} + C$. **4147.** $\ln(u - v)^3 \left(u^2 + uv + \frac{v^2}{3} \right)^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{2u+v}{v} = C$; $u = y^{1/3}$; $v = x^{1/2}$. **4148.** $(y^2 - Cx^2)^2 - 2(y^2 + Cx^2) + 4Cy^2 + 1 = 0$. **4149.** $y + 2y^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 = C$. **4150.** $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$;

- $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2} = C$. **4151.** $(\sqrt{y+x^2} - \alpha x)^\alpha (\sqrt{y+x^2} - \beta x)^{-\beta} = C$, где α и β корни уравнения $2\mu^2 - \mu - 2 = 0$. **4152.** $x = a \operatorname{sh} t$; $ye^t = at + C$. **4153.** $x = axy - a + Cy$. **4154.** $x \sin(x+y) = C$. **4155.** $\operatorname{tg} y = \frac{x^2+1}{3} + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$. **4156.** $(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = C$. **4157.** $x^2 y^2 - 2xy \ln y = Cxy + 1$; $a(x^2 y^2 - 2xy \ln y) = (a^2 - 1)xy + a$. **4158.** $y = Ce^x + \frac{1}{C}$. **4159.** $\frac{1}{2}x^2 - a^2 \ln x + y^2 = C$; $x^2 - 2a^2 \ln \frac{x}{2a} + 2y^2 = 22a^2$. **4160.** $\ln x = \int \frac{du}{au^n + \frac{1}{n-1}u + b} + C$; $u = yx^{\frac{1}{n-1}}$. **4161.** $x^2 + y^2 = Cx$; $x^2 + y^2 = 10ax$. **4162.** $x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2 = Ce^{-y}$. **4163.** $y = \frac{C}{x^4} - \frac{1}{4C}$. **4164.** $\ln y = \frac{y}{x} + C$; $x \ln y = y - x$. **4165.** $x = y^3 + Cy$. **4166.** $xe^{\frac{y}{x}} = (x+y) \ln Cx$. **4167.** $y = C(x+5) + C^3$; $27y^2 = -4(x+5)^3$. **4168.** $q(x^\beta y^\alpha)^p - p(x^\beta y^\alpha)^q = C$, где $p = \frac{\beta n - \alpha m}{\alpha \beta - \beta \alpha}$; $q = \frac{\beta n - \alpha m}{\alpha \beta - \beta \alpha}$. **4169.** $y^2 = Cx + \frac{x^n}{n-1}$; $(n-1)y^2 = x(x^{n-1} - a^{n-1})$. **4170.** Поперечное сечение — парабола $y^2 = 2Cx + C^2$. **4171.** $x^2 + y^2 = C^2$; $x^2 - y^2 = C$; $y = x$. **4172.** В полярных координатах $r = Ce^{k\varphi}$. **4173.** $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C-a^2} = 1$. **4174.** Окружность с центром на прямой, соединяющей точки. **4175.** $u^2 - xu - x^2 = C \left(\frac{2u+x(\sqrt{5}-1)}{2u-x(\sqrt{5}+1)} \right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$; $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. **4176.** $x + C = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. **4177.** $r = 2a \cos \omega$; $\varphi + C = \operatorname{tg} \omega - \omega$. **4178.** Парабола. **4179.** $4(y-a)^3 = 9a^2(x+C)^2$. **4181.** $y = l \operatorname{ch} \frac{x-x_0}{l}$, цепная линия. **4182.** $x = Ce^{-\frac{y}{x}}$. **4183.** $x = C \frac{\sin^2 t - (k-1) \cos^2 t}{\sin^k t}$; $y = -Ck \frac{\sin t \cos t}{\sin^k t}$. **4184.** Окружность с центром в полюсе и ее касательные. **4185.** Парабола $y^2 = -16px$ и ее касательные. **4186.** $x = Cy \pm \frac{Q}{y}$. **4187.** $x = a \sin t \cos t$; $y = y_0 + a(-\cos^2 t + \ln \cos t)$. **4188.** $x = \frac{y^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{6x_0^3} - \frac{x_0}{2}$; где x_0 — абсцисса начала дуг. **4189.** $2ay = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$. **4190.** $x + C = \int \sqrt{(f'(y))^2 - 1} dy$. **4191.** Циклоида. **4192.** Цепная линия. **4193.** $x - C = \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. **4194.** $y = \int_0^x \sqrt{1 - Cx^m} dx$; $m = \frac{2(2-n)}{n-1}$. **4196.** а) $x = -1$; б) $x^2 - y^2 + 6x + 1 = 0$. **4197.** $r = Ce^{a\varphi}$, логарифмическая спираль. **4198.** «Параболы» и «гиперболы» $y = Cx^n$; $n \neq 1$; $k = \lambda^{n-1}$. **4199.** $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; $x^2 = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$. **4200.** $x^2 + y^2 - 2Axy - a^2(A^2 - 1) = 0$; $az = xy$. **4201.** Проекция на плоскость xOy : $(A+BC)(x^2 - y^2) = C(a^2 - b^2)$, где $Aa^2 = a^2 - c^2$; $Bb^2 = b^2 - c^2$. **4202.** $y = \frac{x^3}{6} + Ax + B - \sin x$. **4203.** $y = \ln \sin x + C_1 + C_2x + C_3x^2$. **4204.** $y = \frac{x^5}{120} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. **4205.** $y = Bx^3 + Cx^2 + Dx + E + \frac{1}{6} \int_0^m t(x-t)^3 dt$; $m = \min(x; 1)$ при $x > 0$. **4206.** $y = \frac{1}{6} \int_0^m |t|(x-t)^3 dt$; $m = x$ при $|x| < 1$; $m = \operatorname{sign} x$ при $|x| > 1$. **4207.** $y = (1 + C_1^2) \ln(x + C_1) - C_1x + C_2$. **4208.** $y = (C_1x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C^2$. **4209.** $12y = (x - C_1)^3 + C_2$. **4210.** $y = C_1e^{\frac{x}{a}} + C_2x + C_3$. **4211.** $y = (x + C) \ln(x + C) + C_1x + C_2$.

- 4212.** $y = C_1 x(x - C_1) + C_2$; $y = \frac{1}{3}x^3 + C$. **4213.** $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$. **4214.** $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$. **4215.** $x = a \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$; $y = C_1 - a \cos \varphi + C_2 \sin \varphi - C_2 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$. **4216.** $x - C_1 = a \ln \sin \frac{y - C_2}{a}$.
4217. $3y = (C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3$. **4218.** $x^2 + y^2 + Cx + C_1 y + C_2 = 0$; $y = C_1 x + C_2$. **4219.** $3x = 2(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$. **4220.** $x + C_2 = \frac{1}{C_1} \ln \frac{\sqrt{C_1^2 + ae^y} - C_1}{\sqrt{C_1^2 + ae^y} + C_1}$. **4221.** $C_2^2(x - C_1) = (C_2 y^{\frac{2}{3}} + 2) \sqrt{C_2 y^{\frac{2}{3}} - 1}$. **4222.** $y = 2a - C_1 \sin^2 t$; $2x = C_2 + C_1(2t - \sin 2t)$. **4223.** $(x - C_1)^2 = 4C(y - C)$.
4224. $2C_2 y^2 = 2C_1 C_2 + C_2^2 e^{2x} + (C_1^2 - 1)e^{-2x}$. **4225.** $y(C_2 + x) = C_1 + x$. **4226.** $x = C_2 + C_2 \ln(y + u) + \ln(y - C_1 u)$; $u^2 = y^2 + 1 - C_1^2$. **4227.** $y = C_1 e^{Cx}$.
4228. $2(C_1 y - 1)^{\frac{3}{2}} = 3C_1 x + C_2$. **4229.** $y \cos^2(x + C_1) = C_2$. **4230.** $y + x = 1$. **4231.** $y = 1 - e^x$; $y = -1 + e^{-x}$. **4232.** $x^2 + y^2 = 2x$. **4233.** $2y\sqrt{y} = 3x - 1$.
4234. $y \cos^2 x = 1$. **4235.** $y = a(\cos nx \sqrt{1 - k})^{\frac{1}{1-k}}$. **4236.** $y^2 = C_1 + C_2(xu + \ln u)$; $u = x + \sqrt{1 + x^2}$. **4237.** $(y - C_1 e^x - C_2 e^{-x} + x)(y - C_1 \cos x - C_2 \sin x - x) = 0$. **4238.** $y = x \left(C_1 - \arcsin \frac{C_2}{x} \right)$. **4239.** $y = x \ln \frac{C_2 x}{1 + C_1 x}$.
4240. $y(C_2 + x^2) = C_1 x$. **4241.** $y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}$. **4242.** $2 \ln C_1 y = \frac{C_2}{x} + \frac{x}{C_2}$.
4243. $y = C_1 \sqrt{x^2 + C_2}$. **4244.** $y = x^2(1 + C_1 \operatorname{tg}(C_2 + \ln x))$. **4245.** $x = e^t$; $\frac{xy'}{y} = z$. **4249.** $y^2 = C_1 + C_2 x^{1-a} - 2 \int x^{-a} \left(\int x^{a-1} f(x) dx \right) dx$.
4250. $x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 e^{-2ay} + \frac{2b}{4a^2+1}(\cos y - 2a \sin y)}}$.
4251. $\int e^f f(y) dy = C_1 \int e^{-\int \varphi(x) dx} dx + C_2$. **4252.** $x = \frac{2}{5}t^3 + \frac{C_1}{t^2}$; $y = \frac{2}{75}t^9 - \frac{7}{10}C_1 t^4 - \frac{4C_1^2}{t} + C_2$. **4253.** $\pm \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R}} x = \frac{R}{2} \arccos \frac{2y-R}{R} + \sqrt{Ry - y^2}$.
4254. $x - 1 = \frac{1}{2}y^2 - y + 2 \ln(y + 1)$. **4255.** $y = \sqrt{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2a}} + \ln \left(1 + \frac{x^2}{2a} \right)$.
4256. $u = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2$. **4257.** $u = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C_2$. **4258.** $u = (C_1 r^2 + C_2) \ln r + C_3 r^2 + C_4$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **4259.** $z = C_1 \ln(r + r^2 - C_1^2) + C_2$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **4260.** Цепная линия, окружность, парабола, циклоида. **4261.** $Cy^2 = C^2(x + C_1)^2 + m$. **4262.** $r = \frac{C}{\cos \omega - m}$; $\varphi = C_1 + \omega + m \int \frac{d\omega}{\cos \omega - m}$. **4263.** $r \cos^2 t = C$; $\varphi = C_1 - 2t + \operatorname{tg} t$. **4264.** Парабола. **4265.** $y + C = a \operatorname{ch}(x + C_1)$. **4266.** $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$. **4267.** $(y - C_1)^2 = a(C - (a + 2x))$. **4268.** Цепная линия. **4269.** Логарифмическая спираль. **4270.** Развертка круга. **4271.** Циклоида. **4272.** Эпициклоида. **4273.** Эллипс. **4274.** Окружность. **4275.** Цепная линия. **4276.** Логарифмическая спираль. **4277.** Развертка круга. **4278.** Циклоида. **4279.** Эпициклоида при $|m| < 1$. **4280.** Цепная линия. **4281.** Логарифмическая спираль. **4282.** Циклоида. **4283.** Развертка круга. **4284.** Циклоида. **4285.** Развертка развертки круга.
4286. Эпициклоида при $b < a$. **4287.** $\begin{cases} r\sqrt{1 - \sin \omega \cos \omega} - C_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \omega - 1}{\sqrt{3}}} \\ \varphi = C_1 + \omega - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \omega - 1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$4288. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad 4289. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \quad 4290. y = C e^{-x} + C_1 e^{-2x}.$$

$$4291. y = e^{-x}(Cx + C_1). \quad 4292. y = e^{2x}(Cx + C_1).$$

$$4293. y = e^{-x}(C \cos 2x + C_1 \sin 2x).$$

$$4294. y = e^{-2x}(C \cos 3x + C_1 \sin 3x).$$

$$4295. y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_1 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$4296. y = C \cos x + C_1 \sin x.$$

$$4297. y = C e^{2x} + e^{-x} (C_1 \cos x\sqrt{3} + C_2 \sin x\sqrt{3}).$$

$$4298. y = C e^{2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

$$4299. y = e^x (C \cos x + C_1 \sin x) + e^{-x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

$$4300. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

$$4301. y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$$

$$4302. y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

$$4303. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x.$$

$$4304. y = e^{2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

$$4305. y = e^{-\frac{x}{2}} (A + Bx) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + e^{-\frac{x}{2}} (C + Dx) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$4306. y = e^{-x} (C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3).$$

$$4307. y = e^{\frac{3}{2}x} \left(C \cos \frac{x\sqrt{7}}{2} + C_1 \sin \frac{x\sqrt{7}}{2} \right) + e^{-x} (C_2 \cos x\sqrt{2} + C_3 x\sqrt{2}).$$

$$4308. y = C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + e^{-x} (C_4 + C_5 x + C_6 x^2).$$

$$4309. y = \frac{1}{a^3 \sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{ax}{\sqrt{2}} \sin \frac{ax}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh} \frac{ax}{\sqrt{2}} \cos \frac{ax}{\sqrt{2}} \right).$$

$$4310. y = -a \frac{\operatorname{sh} x \sin x}{\operatorname{sh} \pi}.$$

$$4311. y = e^{-x} \sin x.$$

$$4312. y = b \frac{(\operatorname{ch} al + \cos al)(\operatorname{sh} ax - \sin ax) - (\operatorname{sh} al + \sin al)(\operatorname{ch} ax - \cos ax)}{2a^3(1 + \operatorname{ch} al \cos al)}.$$

$$4313. \text{Если } a = \frac{\xi}{l}, \text{ где } \xi \text{ есть один из корней уравнения } \operatorname{ch} \xi \cos \xi = -1.$$

$$4314. y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{a^2 + 1}.$$

$$4315. y = \frac{1}{3} e^{2x} + C_1 e^{-x} + \left(\frac{x^2 - x}{4} + C_2 \right) e^x.$$

$$4316. y = \frac{1}{2} e^{3x} (x^2 - 2x + 2) + C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

$$4317. y = \frac{1}{32} e^{2x} (2x^2 - 3x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{x^3}{12} - \frac{x}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

$$4318. y = -e^{-x} \cos x + \frac{x^3}{6} e^{-x} + e^{-x} (C_1 + C_2 x).$$

$$4319. y = \frac{x}{2} e^{-x} \sin x + e^{-x} x + e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$$4320. y = \frac{1}{74} (5 \sin x + 7 \cos x) + C_1 e^x + C_3 e^{6x}.$$

$$4321. y = \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x + e^x (C_1 + C_2 x).$$

$$4322. y = \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$4323. y = C_1 e^{-ax} + C_2 e^{ax} + \frac{1}{b^2 - a^2} e^{bx}, \text{ если } b \neq a; y = C_1 e^{-ax} + C_2 e^{ax} + \frac{x}{2a} e^{ax}, \text{ если } b = a.$$

$$4324. y = A \cos ax + B \sin ax - \frac{x}{2a} \cos ax, \text{ если } b = a.$$

$$4325. y = \frac{1}{6} \sin x + 2e^x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (C_3 x + C_4) e^{-x}.$$

$$4326. y = C_1 e^{-2x} \cos 4x + C_2 e^{-2x} \sin 4x + \frac{a}{68} (\sin 4x - 4 \cos 4x).$$

$$4327. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x + \\ + \frac{1}{8} e^{-x} \cos x - \frac{1}{20} e^x x (3 \cos x + \sin x).$$

$$4328. y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x + \frac{1}{221} (10 \cos 2x + 11 \sin 2x).$$

$$4329. y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx - \frac{\cos 3nx}{32n^2} + \frac{3}{8n} x \sin nx.$$

$$4330. y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + \frac{a}{n^2 - m^2} x \sin mx + \\ + \left(\frac{b}{n^2 - m^2} - \frac{2ma}{(n^2 - m^2)^2} \right) \cos mx.$$

$$4331. y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx - \frac{a}{4n} x^2 \cos nx + \frac{2nb + a}{4n^2} x \sin nx.$$

$$4332. y = \cos x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$4333. y = -1 - x e^{-x} + (e^x - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

$$4334. y = x \sin x + \cos x \ln \cos x + A \cos x + B \sin x.$$

$$4335. y = A \cos x + B \sin x - \sqrt{\cos 2x}.$$

$$4336. y = e^{3x} (A + Bx) + \frac{1}{x}.$$

$$4337. y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 4\sqrt{x}.$$

$$4338. y = A \cos \ln x + B \sin \ln x.$$

$$4339. y = Ax + Bx^{-1}.$$

$$4340. y = A + B \ln x + Cx^3.$$

$$4341. y = x(A + B \ln x + C \ln^2 x).$$

$$4342. y = x(A + B \ln x) + Cx^{-1}.$$

$$4343. 2y = x + A \cos \ln x + B \sin \ln x.$$

$$4344. y = (A + B \ln x + \ln^2 x)x.$$

$$4345. y = x \ln x + x^3 + Cx + C_1 x^2.$$

$$4346. y = x(A + B \ln x) + Cx^2 + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2} x \ln^2 x.$$

$$4347. y = C_1 - 3x + C_2(3x + 2)^{-\frac{4}{3}} + 5 \ln(3x + 2).$$

$$4348. y = Ax^2 + Bx^3 + ax + bx^{-1}.$$

$$4349. y = Ax + Bx^{-1} + Cx \ln x + Dx^{-1} \ln x + \frac{1}{9} x^2.$$

$$4350. y = (x + 1)^{-1} (A + B \ln(x + 1) + \ln^3(x + 1)).$$

$$4351. y = x^{-1} (2 \ln^2 x + \ln x + A + Bx^4).$$

$$4352. y = \frac{1}{5} t^2 - t + 1 + (A - \ln t) \cos \ln t + B \sin \ln t; t = x + 1.$$

$$4353. y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \ln(x + 1).$$

$$4354. y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2x} - \ln x.$$

$$4355. y = \left(\frac{b - a\beta}{\alpha - \beta} - \frac{A}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} \right) e^{\alpha x} + \\ + \left(\frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta} - \frac{A}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} \right) e^{\beta x} - \frac{A}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} e^{\gamma x}.$$

$$4356. y = \left(\frac{b - a\beta}{\alpha - \beta} - \frac{A}{(\alpha - \beta)^2} \right) e^{\alpha x} + \left(\frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta} + \frac{A}{(\alpha - \beta)^2} \right) e^{\beta x} + \frac{Ax}{\alpha - \beta} e^{\alpha x}.$$

$$4357. y = e^{\alpha x} \left(a + (b - a)x + \frac{Ax^2}{2} \right).$$

$$4358. y = \frac{5}{2}e^x - 2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

$$4359. y = \frac{h}{2n^2} + \frac{h}{6n^2} \cos 2nx - \frac{2h}{3n^2} \cos nx.$$

$$4360. y = \frac{h}{8n^2} + \left(a - \frac{h}{8n^2} \right) \cos 2nx - \frac{hx \sin 2nx}{8n}.$$

$$4361. y = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$4362. y = 1 - e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

$$4363. y = \pi \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + x \cos x.$$

$$4364. y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ при } 0 \leq x \leq 1; 8y = 3(e^{2x-1} - e^{1-2x}) - e^{2x-3} + e^{3-2x}, \text{ при } 1 \leq x \leq 2.$$

$$4365. y = h - \frac{gt}{k_1} + \frac{g}{k_1^2}(1 - e^{-k_1 t}); k_1 = \frac{k}{m}.$$

$$4366. y = h - \frac{g_1 t}{k_1} - \frac{g_1}{k}(1 - e^{-kt}), g_1 = g(\sin \alpha - l \cos \alpha).$$

4367. Расстояние x от тела до положения равновесия через t секунд выражается формулой $x = Ae^{-qt} \cos(pt + \alpha)$, где $\frac{k}{m} - \left(\frac{n}{2m}\right)^2 = p^2$; $\frac{n}{2m} = q$; $p \operatorname{tg} \alpha = -q$; $A((p^2 - q^2) \cos \alpha - 2pq \sin \alpha) = kh$.

4368. Положив $\frac{k}{2m} = p$; $\frac{a^2}{n^2} = q$, имеем три случая:

а) $q = p^2 + \nu^2 > p^2$, $x = Ae^{-pt} \cos(\nu t + \mu)$;

б) $q = p^2 - \nu^2 < p^2$, $x = Ae^{-(p+\nu)t} + Be^{-(p-\nu)t}$;

в) $q = p^2$, $x = e^{-pt}(A + Bt)$.

$$4369. y = A \sin(qt + \alpha) + \frac{r}{q^2 - n^2} \sin nt, n \neq q, q^2 = \frac{a^2}{m}, x = A \sin(qt + \alpha) - \frac{rt \cos nt}{2n}, n = q.$$

4370. $x = -\frac{kt^2}{2} + v_0 t$; $v = x' = -kt + v_0$. Движение прекращается при $v = 0$, т. е. при $t = \frac{v_0}{k}$; при этом $x = \frac{v_0^2}{2k}$.

4371. Движение совершается по разным формулам в различные промежутки времени:

а) при $0 < t < \frac{\pi}{k}$ $x = f(n-1) \cos kt + f$;

б) при $\frac{\pi}{k} < t < \frac{2\pi}{k}$ $x = f(n-3) \cos kt - f$;

в) при $\frac{2\pi}{k} < t < \frac{3\pi}{k}$ $x = f(n-5) \cos kt + f, \dots$

4372. $y = A \sin \frac{bx}{a} \sin bt$, где $bl = an\pi$.

4373. $u(\ln r_2 - \ln r_1) = (t_2 - t_1) \ln r + t_1 \ln r_2 - t_2 \ln r_1$, где r_1 и r_2 радиусы внешней и внутренней цилиндрической поверхности, r — расстояние от точки в веществе стенки до оси трубы.

$$4374. u \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = (t_2 - t_1) \frac{1}{r} + \frac{t_1}{r_2} - \frac{t_2}{r_1}.$$

$$4375. y = \frac{a}{24} x^2 (l - x)^2.$$

$$4376. al = n\pi.$$

$$4377. \frac{P}{64D} (a^2 - r^2)^2.$$

4378. $\frac{Pa^4}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} - 2\frac{r^2}{a^2} \frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{r^4}{a^4} \right)$.
4379. $xy = A \cos x + B \sin x$.
4380. $y = Ce^x + C_1 x^2$.
4381. $y = A \ln x + Bx$.
4382. $y = A(1+x) + Be^x$.
4383. $y = A \sin x + B \sin^2 x$.
4384. $y = A \sin^4 x + B \frac{\cos x}{\sin^3 x} \left(\sin^4 x + \frac{3}{5} \sin^2 x \cos^4 x + \frac{1}{7} \cos^6 x \right)$.
4385. $y(1-x) = Ax + B(1-x^2 + 2x \ln x)$.
4386. $y = A(x + \sqrt{x^2 + 1})^n + B(x - \sqrt{x^2 + 1})^n$.
4387. $y = Ae^{-2x} + B(4x^2 + 1)$.
4388. $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2(2x - 1)$.
4389. $y = Ae^x(x^2 - 8x + 20) + B(x^3 + 9x^2 + 36x + 60)$.
4390. $y = A(x^3 - x) + B \left(6x^2 - 4 - 3(x^3 - x) \ln \frac{x+1}{x-1} \right)$.
4391. $y = C_1(2x^2 - 1) + C_2 \left((2x^2 - 1) \int e^{x^2} dx - xe^{x^2} \right)$.
4392. $y = C_1(x + 2) + C_2 e^x(x - 2)$.
4394. $\mu = 12$; $y = 3x - 5x^3$.
4396. $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2(2x - 3)$.
4397. $(x - 1)y = A + Bx^2$.
4398. $(x^2 - x)y = Ax + B(x - 1)$.
4399. $(x + 1)y = Ax + Bx^2(x + 1)$.
4400. $(x^2 + 1)^2 y = A(x^2 - 1) + Bx$.
4401. $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$.
4402. $y = A \cos \frac{n}{x} + B \sin \frac{n}{x}$.
4403. $y\sqrt{1+x^2} = Ax + B$.
4404. $y = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$; $\sin \varphi = x$.
4405. $y = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi$; $\operatorname{tg} 2\varphi = e^{2x}$.
4406. $y = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi$; $\varphi = \ln \cos x$.
4407. $y = C_1 e^{\frac{2}{x}} + C_2 e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{4x}$.
4408. $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{1}{2} e^x$.
4409. $y = C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \frac{e^{-ax}}{x} - \frac{2}{a^2}$.
4410. $y = C_1 x \cos \frac{c}{x} + C_2 x \sin \frac{c}{x}$.
4411. $y = C_1 x e^{\frac{c}{x}} + C_2 x e^{-\frac{c}{x}}$.
4412. $y = C_1 \operatorname{ctg} x + C_2 \operatorname{cosec} x$.
4413. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ частный интеграл уравнения $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \Phi(x) \int \frac{x^2 Q(x)}{\Phi(x)} dx + C_0 \Phi(x)$, $\Phi(x) = e^{\int x^2 P(x) dx}$.
4414. $y = Ae^x(x^2 - 3x + 3) + Be^{-x}(x^2 + 3x + 3)$.
4415. $y = \sqrt{x(1-x)}(Au^k + Bu^{-k})$; $u = \frac{x}{1-x}$; $k = \sqrt{\frac{1}{4} - \beta}$; или $y = \sqrt{x(1-x)}(A \cos(n \ln u) + B \sin(n \ln u))$; $n = \sqrt{\beta - \frac{1}{4}}$; при $\beta = \frac{1}{4}$, $y = \sqrt{x(1-x)}(A + B \ln u)$.
4416. $W_0 y = \beta(y_2(x) \int_0^x y_1(\xi) d\xi - y_1(x) \int_0^x y_2(\xi) d\xi)$, где y_1 и y_2 линейно независимые интегралы однородного уравнения и $W_0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ при $x = 0$.

4417. $y = C_1x$; $z = C_2x$.
4418. $y = C_1x$, $z = C_2 + x + y$.
4419. $x^2 + y^2 = C_1$; $p^2 + q^2 = C_2$; $px + qy = C_3$.
4420. $\ln r - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_1$; $z = C_2r$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4421. $(z - y)^2 + 2x = C_1$; $z^2 - y^2 = C_2$.
4422. $z = C_1y$; $(x^2 + y^2)y = Cx^2$.
4423. $(y - x)z = C_1$; $(y - x)e^{\frac{z}{2(y-x)}} = C_2$.
4424. $x + y + z = C_1$; $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.
4425. $y = C_1x$; $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2$.
4426. $x - y = C_1$; $z - t(x - y + 1) = C_2$; $y - \ln(z - t) = C_3$.
4427. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$; $z = C_2y$.
4428. $x^2 + y^2 = C_1$; $(x + y)(x + y + z) = C_2$.
4429. $z = x - y$; $y(y - 2x)^3 = (x - y)^2$.
4430. $x = s \sin \alpha + \frac{ds}{d\alpha} \cos \alpha$; $y = -s \cos \alpha + \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha$; $\frac{d^2s}{d\alpha^2} - \frac{ds}{d\alpha} + s = 0$.
4431. $b(x + C_1) = +a^2 \sin \varphi$; $b(y + C_2) = -a^2 \cos \varphi$; $a\varphi = bt + C_3$.
4432. $y = (A - B + Bx)e^{-2x}$; $z = (-A - Bx)e^{-2x}$; $A = -1$; $B = -2$.
4433. $x = (A \cos t + B \sin t)e^{-6t}$; $y = ((A + B) \cos t - (A - B) \sin t)e^{-6t}$; $A = 1$; $B = 0$.
4434. $x = Ae^{-t} + Be^{2t} + Ce^{-2t}$; $y = Ae^{-t} + Be^{2t} - Ce^{-2t}$; $z = -Ae^{-t} + 2Be^{2t}$; $3A = 6B = 2C = 1$.
4435. $x = -e^{-t}$; $y = e^{-t}$; $z = 0$.
4436. $y = Au + Bv$; $7z = (B\sqrt{3} - 2A)u - (A\sqrt{3} + 2B)v$; $u = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $v = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$.
4437. $x = A \cos t + B \sin t$; $2y = (A - B) \cos t + (A + B) \sin t + Ce^t$; $2z = Ce^t + (A + B) \cos t - (A - B) \sin t$.
4438. $x = Ae^t + \alpha_2 Be^{\alpha_1 t} + \alpha_1 Ce^{\alpha_2 t}$; $y = Ae^t + \alpha_1 Be^{\alpha_2 t} + \alpha_2 Ce^{\alpha_1 t}$; $z = Ae^t + \alpha_1 Be^{\alpha_1 t} + \alpha_2 Ce^{\alpha_2 t}$; $\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1 = 0$, $\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1 = 0$, $\alpha_2 \neq \alpha_1$.
4439. $x = A + Bu + Cv$; $2y = 4A - (B - C\sqrt{5})u - (C + B\sqrt{5})v$; $2z = 4A - (B + C\sqrt{5})u + (B\sqrt{5} - C)v$; $u = \cos t\sqrt{5}$; $v = \sin t\sqrt{5}$.
4440. $x = e^{mt}(A \cos mt + B \sin mt) + e^{-mt}(C \cos mt + D \sin mt)$; $y = e^{mt}(A \sin mt - B \cos mt) + e^{-mt}(D \cos mt - C \sin mt)$.
4441. $z = A \cos t + B \sin t$; $x + 3y - 3z = Ct + D$; $x - y + z = E \cos 2t + F \sin 2t$.
4442. $x + y + z = Ae^t$; $x - y = Be^{-2t}$; $y - z = Ce^{-2t}$.
4443. $x + y + z = Ae^t + Be^{-t}$; $x - y = C \cos t\sqrt{2} + D \sin t\sqrt{2}$; $y - z = E \cos t\sqrt{2} + F \sin t\sqrt{2}$.
4444. $y = 17 - 2(A + B + Bx)e^x - 2(C - D + Dx)e^{-x}$; $z = -12 + (A + Bx)e^x + (C + Dx)e^{-x}$.
4445. $2x = (t + A)e^t + (-t + B)e^{-t}$; $2y = (t + A + 1)e^t + (t - B - 1)e^{-t}$.
4446. $x = 2Ae^{-4t} + Be^{-7t} + \frac{7}{40}e^t + \frac{1}{27}e^{2t}$; $y = Ae^{-4t} - Be^{-7t} + \frac{1}{40}e^t + \frac{7}{54}e^{2t}$.
4447. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \frac{3}{a^2 - 4}e^{ax}$; $z = Ae^{2x} - \frac{1}{3}Be^{-2x} + \frac{a+1}{a^2 - 4}e^{ax}$.
4448. $x = A(1 + 2t) - 2B - 2 \cos t - 3 \sin t$; $y = -At + B + 2 \sin t$.
4449. $8y = e^x + (8 - 2A + 3B - 2Bx)e^{-x}$; $8z = (3x + C)e^x + (A + Bx)e^{-x}$.
4450. $y = -x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$; $z = 2x^2 + 2x - C_1e^{2x} + 4C_2e^{-3x}$.
4451. $y = C + Dx^2 - x + (6B + A - 1) \ln \sqrt{x} + B \ln^2 x$; $y + z = A + C \ln x$.

$$4452. x = Ae^{n^2 t} + Be^{-n^2 t} + \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nt; y = -Ae^{n^2 t} + Be^{-n^2 t} + \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nt.$$

$$4453. y = x - \alpha_1 C_1 e^{-\alpha_2} - \alpha_2 C_2 x^{-\alpha_1}; z = C_1 x^{\alpha_2} + C_2 x^{\alpha_1}; \alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \alpha_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$4454. y = -\frac{1}{6}x^2 \ln^2 x + \frac{1}{9}x^2 \ln x + Ax^{-1} + Bx^2; z = 1 - y'.$$

$$4455. tx = A \cos t + B \sin t; t^2 y = C + (At + 2B) \cos t + (Bt - 2A) \sin t.$$

$$4456. x + y = C_1 e^t; 3xt^2 = t^3 + C_2.$$

$$4457. x = u \cos t + v \sin t; y = u \sin t - v \cos t;$$

$$u = (At + B) \cos \frac{t\sqrt{5}}{3} + (Ct + D) \sin \frac{t\sqrt{5}}{3};$$

$$v = -(Ct\sqrt{5} + D\sqrt{5} - 2A) \cos \frac{t\sqrt{5}}{3} + (At\sqrt{5} + B\sqrt{5} + 2C) \sin \frac{t\sqrt{5}}{3}.$$

$$4459. ux = Ae^t + Be^{-t}; uy = Ae^t - Be^{-t}; uz = Ae^t - Be^{-t} + C; u = -Ae^t - Be^{-t} - Ct + D.$$

$$4460. ux = Ae^t; uy = Be^t + Ce^{-t}; uz = Be^t - Ce^{-t}; u = -(A + B)e^t + Ce^{-t} + D.$$

$$4461. x = (At + B)e^t + 8t + 30; y = -\left(At + \frac{A}{4} + B\right)e^t - 4t - 21.$$

$$4462. u = A + Bt + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3; x = (D^2 - D + 2)u; y = -(D^2 - D + 6)u \text{ (см. стр. 383)}.$$

$$4463. x = (A + Bt + Ct^2)e^t; y = (D + Et + Ft^2)e^t; z = (F - (2C + E)t - Ct^2)e^t.$$

$$4464. x = A \sin(t + \alpha) + C \sin(2t + \gamma); y = B \sin(t + \beta) + C \sin(2t + \gamma); 3z = -A \sin(t + \alpha) - 3C \sin(2t + \gamma) - 3B \sin(t + \beta).$$

$$4465. x = A \sin(at + \alpha); y = B \sin(at + \beta); z = Ct + D.$$

$$4468. \text{Если } v \text{ — скорость и } \alpha \text{ — угол вектора скорости с } OX, \text{ то } v^{-n} = \frac{\cos^n \alpha}{v_0^n \cos^n \alpha_0} - nk \cos^n \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos^{n+1} \alpha}; gt = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v d\alpha}{\cos \alpha}; gx = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 d\alpha; gy = \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tg} \alpha d\alpha.$$

$$4469. x = \frac{b}{\omega} + \frac{p}{\omega^2} + A \sin(\omega t + \alpha); y = \frac{a}{\omega} - \frac{pt}{\omega} + A \cos(\omega t + \alpha); z = \frac{1}{2}rt^2 + ct, \text{ где } mp = e \frac{\partial V}{\partial x}; mr = e \frac{\partial V}{\partial z}; m\omega = -eH = -\frac{\partial V}{\partial z}; \frac{\partial V}{\partial y} = 0; a, b, c \text{ — проекции начальной скорости.}$$

$$4470. \text{Траектория — геодезическая линия конуса } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = Ax + By + Cz.$$

$$4471. z = \sin y + F(\sin x - \sin y).$$

$$4472. 4xyz = -x^4 - 2x^2 + F(xy).$$

$$4473. z^2 = 2x + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$4474. 3xyz = y^3 + F(xy).$$

$$4475. \sqrt{R^2 - z^2} = y + xF(z).$$

$$4476. z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$4477. \ln z = \frac{a}{y} + F(x^2 + y^2).$$

$$4478. z = a \sin\left(xy + F\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

$$4479. z = yF(x^2 - y^2).$$

$$4480. z(y - xF(y)) = y^2 F(y) + xy.$$

$$4481. 4z^5 = 5x^2 y^2 + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$4482. z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^{a+1} F\left(\frac{y}{x}\right).$$

4483. $z + x^2 + y^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right)$.
4484. $x^2 + y^2 + z^2 = yF\left(\frac{z}{y}\right)$.
4485. $z = x^3 y^3 F\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right)$.
4486. $z = yF\left(\frac{y^3}{x^2} + y\right)$.
4487. $z = e^{-y} F\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.
4488. $z = rF(\ln r + \varphi)$; $x \operatorname{tg} \varphi = y$; $r^2 = x^2 + y^2$.
4489. $z + u \ln u = uF(z + y)$; $u = x + y + z$.
4490. $(x - y)(x + y + z) = F\left(\frac{z - y}{x - y}\right)$.
4491. $\ln y + \frac{z}{x} = F\left(\ln x + \frac{z}{y}\right)$.
4492. $y + z e^{-x} = F(x + z e^{-y})$.
4493. $y + z + u = x^2 F(x(y - z), x(y - u))$.
4494. $12u = x^4 - 2x^3(y + z) + 6x^2 yz + F(y - x, z - x)$.
4495. $u = \frac{xy}{z} \ln x + xF\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.
4496. $u = x^2 \ln x + x^2 F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.
4497. $u = F(2yz + ax(y + \sqrt{1 - y^2}), x e^{\arcsin y})$.
4498. $\Phi((x - y)\sqrt[3]{S}, (y - u)\sqrt[3]{S}, (z - u)\sqrt[3]{S}) = 0$.
4499. $z^2 = xy + F\left(\frac{y}{x}\right)$.
4500. $z = e^{mx} \cos(py + \alpha) + F(y + ax)$; $m \operatorname{tg} \alpha = ap$.
4501. $12u = 6x^2 yz - 2x^3(bz + cy) + bcx^4 + F(y - bx, z - cx)$.
4502. $z^a = \sin y F(y - a \sin x)$.
4503. $4z = (u + y)x - 2x(u - y) \ln x + F\left(\frac{y + u}{x}\right)$; $u^2 = 1 + y^2$.
4504. $z = a \sin\left(xy + F\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.
4505. $x^2 + y^2 + z^2 = F(ax + by + z)$.
4506. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
4507. $l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
4508. $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ уравнение поверхности; $axz = x^2 + y^2$ уравнение конуса, проходящего через заданную линию.
4509. $nx - lz = F(ny - mz)$; $(nx - lz + l)^2 + (ny - mz + m)^2 = n^2 a^2$.
4511. $z^2 + xy = a^2 + h^2$.
4512. $2xyz - x^2 = 2$.
4513. $z^2 = x^2 - y^2$.
4514. $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^4$.
4515. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2(x^2 + y^2 + xy)$.
4516. $(x^2 + y^2)(a^2 z^2 - h^2 y^2) = a^2 h x^2 z$.
4517. $z^2 + 2x^2 = F(x^2 - y^2)$.
4518. $z^2 - x^2 = F(x^2 - y^2)$.
4519. $z(x^2 + y^2 + z^2) = h(z^2 + 2y^2)$.
4520. $x^2 + y^2 + 2z^2 = a^2 + 2h^2$.

$$4521. z = x^2 y.$$

$$4522. \text{ а) } x = C; z = x^2 y; \text{ б) } xy^2 = C; z = x^2 y.$$

$$4523. z^2 = xy.$$

$$4524. (z^{2\sigma} - 1)(2^\sigma - 1) = 2^\sigma y^{2\sigma} - x^{2\sigma}, \text{ где } \sigma = \frac{1-n}{2}; n \neq 1. \text{ При } n = 1 \text{ поверхности нет. При } n = -1, z^2 = 1 - x^2 + 2y^2.$$

$$4525. \text{ Меридианы и параллели.}$$

$$4526. z(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x - 2a)^2; \text{ окружности } x^2 + y^2 + z^2 = 2aC^2 z, 2a - x - Cz = 0.$$

$$4527. a^2 x^2 = 4z(z - x)(x^2 + y^2). \text{ Ортогональные траектории получаются при пересечении с поверхностями } (2x^2 + y^2)z^2 = C^2 x^2.$$

$$4528. x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2).$$

$$4529. \operatorname{ch} x = z^2 F\left(\frac{z^2}{y}\right).$$

$$4530. \text{ а) } y^2 \operatorname{ch} \frac{z^2}{y} = z^2 \operatorname{ch} x; \text{ б) } 2my = z^2 + 2am \operatorname{ch} x; \text{ в) } y = F\left(\frac{z^2}{y}\right) \operatorname{ch} x, \text{ причем } F(0) = \alpha. \text{ Данная линия — характеристика.}$$

$$4531. z^2 = 2x^3 y; \text{ ортогональные траектории } x^2 + (3 \pm 2\sqrt{3})y^2 = C.$$

$$4532. (x - z)^2 + (y + \sqrt{a^2 - z^2})^2 = a^2.$$

$$4533. \text{ Уравнение линий стока } 4a^2(x dx + y dy)^2 = (x^2 + y^2)^2(dx^2 + dy^2). \text{ Интегрируется в полярных координатах.}$$

$$4534. z = axy(x^2 - y^2).$$

$$4535. x^2 + y^2 + 4z^2 = F(x^4 + y^4 - 6x^2 y^2).$$

$$4536. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2.$$

$$4537. z = C \pm a\varphi; x \operatorname{tg} \varphi = y.$$

$$4538. x^2 + y^2 + z^2 = xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$4539. y = xF(zx^{n-1}).$$

$$4540. \text{ Нет решения.}$$

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$4541. 2. 4542. 64. 4543. \frac{1 - \cos \frac{\pi a}{a}}{a}. 4544. \ln 2. 4545. \frac{\pi}{4}. 4546. \frac{\pi}{3}. 4547. 4e^{-1}.$$

$$4573. \text{ Сходится абсолютно. } 4574. \text{ Расходится. } 4575. \text{ Расходится. } 4576. \text{ Сходится при } n > 1. 4577. \text{ Сходится при } n > -1. 4578. \text{ Сходится при } -1 < \sigma <$$

$$< 1. 4579. \text{ Расходится. } 4580. \text{ Сходится при } \left| \frac{m+1}{n} \right| < 1. \text{ Сходится абсолютно}$$

$$\text{при } -1 < \frac{m+1}{n} < 0. \text{ Иначе: при } 0 \leq \frac{m+1}{n} < 1 \text{ сходится не абсолютно;}$$

$$\text{при } -1 < \frac{m+1}{n} < 0 \text{ сходится абсолютно. } 4581. \text{ Сходится, если } m > -1;$$

$$n > -1. 4582. \text{ Сходится при } a > 0; n > -1. 4583. \text{ Расходится, но име-}$$

$$\text{ет главное значение. } 4584. \text{ Расходится. } 4585. \text{ Сходится. } 4586. \text{ Сходится лишь}$$

$$\text{при } n > 1. 4587. \text{ Сходится при любом } n. 4588. \text{ Сходится. } 4622. (n-1)!$$

$$4623. \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}. 4624. \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}. 4625. 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$4626. \frac{\pi}{2a^{2n-1}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}. 4627. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi A^{n-1}}{(AC - B^2)^{n-\frac{1}{2}}}. 4628. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

4629. $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$. 4630. $\frac{1}{2} \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$. 4631. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 4633. $(-1)^n \times$
 $\times \frac{n!}{(m+1)^n \Gamma}$. 4634. $\frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin \frac{\pi(n+1)}{4}$. 4635. $\frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos \frac{\pi(n+1)}{4}$. 4636. $(-1)^n u_{2n+2} =$
 $= \operatorname{Intg} \frac{3\pi}{8} - \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n+1} \right); (-1)^{n-1} u_{2n+1} = -\frac{\pi}{4} +$
 $+ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{n - \cos^2 \frac{n\pi}{2}} \right)$. 4637. $(-1)^{m-1} \cdot \frac{\pi}{2}$. 4638. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2) \dots (a^2+4n^2)}$.
4639. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(a^2+1)(a^2+3^2) \dots (a^2+(2n+1)^2)}$. 4640. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(m^2+1^2)(m^2+3^2) \dots (m^2+(2n+1)^2)} 2 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}$.
4641. $(-1)^{n-1} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{a}} + e^{-\frac{4}{a}} - \dots + (-1)^n e^{-\frac{n^2}{a}} \right)$. 4643. $(-1)^{m-1} \frac{\pi}{4m}$.
4644. 0,74682. 4645. 0,94608. 4646. 0,20003. 4647. 0,20000. 4648. 0,20281.
4649. 1,00426. 4650. 1,03065.
4651. $2\pi a \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right)$.
4653. $-\frac{\pi^2}{8}$. 4654. $\frac{\pi^2}{4}$. 4655. $\frac{\pi^2}{12}$. 4656. $-\frac{\pi^2}{6}$. 4657. $\frac{\pi^2}{6}$. 4658. $\frac{\pi^2}{12}$. 4659. $\frac{\pi^2}{8a^2}$.
4660. $4 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^3} = \frac{\pi^3}{8}$. 4667. $\frac{\pi a^m}{1-a^2}$. 4668. $\frac{\pi}{2} a^{m-1}$. 4669. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \times$
 $\times \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^m$. 4670. $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^m$. 4671. $\frac{\pi}{a} \ln(1+a)$. 4672. 0 при
 $a^2 < 1$; $\pi \ln a^2$ при $a^2 > 1$. 4673. 0. 4674. $-\frac{\pi}{m} a^m$ при $a^2 \leq 1$; $-\frac{\pi}{ma^m}$ при $a^2 \geq$
 1 . 4675. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 4676. $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 4677. $-\frac{\pi}{4m}$. 4678. Если $\frac{n}{m} = \frac{\lambda}{\mu}$ несократимая
дробь, то $\pi \frac{1+a^{\lambda} b^{\mu}}{1-a^{\lambda} b^{\mu}}$. 4679. $\frac{\pi}{2(1-ab)}$. 4680. $\frac{\pi}{2} (\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{12})$. 4681. $\frac{\pi}{2(1-a^2)} \frac{1-ae^{-|m|}}{1+ae^{-|m|}}$.
4682. $\frac{\pi \operatorname{sign} a}{2(a+e^{|m|})}$. 4683. $\pi \ln(1 - \frac{a}{e})$, если $|a| < 1$. 4688. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. 4689. $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$.
 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}$. 4690. $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. 4691. $\frac{\pi}{2}(b-a)$, если $a > b > 0$.
4692. $A \ln \frac{\delta}{\alpha} + B \ln \frac{\delta}{\beta} + C \ln \frac{\delta}{\gamma}$. 4693. $2\alpha \ln 2\alpha + 2\beta \ln 2\beta - 2(\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta)$.
4694. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$. 4695. $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{a}}$. 4696. $\sqrt{\pi}(b-a)$. 4697. $\frac{1}{4} \times$
 $\times \ln \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \right)$. 4698. $b \operatorname{arctg} \frac{2b}{a} - \frac{a}{4} \ln \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \right)$. 4699. $\frac{b\sqrt{\pi}}{2a^3} e^{-\frac{b^2}{a^2}}$. 4700. $(-1)^n \times$
 $\times \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}} e^{-\beta^2}$. 4701. $\frac{\pi b}{2} - \sqrt{\pi a}$. 4702. $\frac{\pi}{b} \ln(a+b)$, если $a > 0$,
 $b > 0$. 4703. $\pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$. 4704. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \cdot \ln(1+\alpha^2)$, если $\alpha >$
 > 0 . 4705. $\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{2}$. 4706. $-(\arcsin \alpha)^2$. 4707. $\pi \ln \frac{m+1}{2}$, считая $m >$
 > 0 . 4708. $\pi \arcsin a$. 4709. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos a)^2}{2}$. 4710. $\frac{\pi}{2} \ln(1+a)$, если $a > 0$.
4711. $\frac{\pi}{2} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right)$, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 4712. $\frac{\pi}{2} ((\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) -$
 $- \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta)$, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 4713. $\frac{\pi}{2} ((\alpha^2 - \beta^2) \ln(\alpha + \beta) -$
 $- \alpha^2 \ln \alpha + \beta^2 \ln \beta + \alpha \beta)$, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 4714. $2\pi((a+b) \ln(a+b) -$
 $- a \ln a - b \ln b)$, если $a > 0$, $b > 0$. 4715. $-\frac{\pi}{2}(a+b)$, если $a > 0$,
 $b > 0$. 4725. $\frac{\pi}{2}$. 4726. $\frac{\pi}{4}$. 4727. $\frac{\pi}{4}$. 4728. $\frac{3}{4} \ln 3$. 4729. $\ln 2$. 4730. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.
4731. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. 4732. $\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \dots 3n} \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 4733. $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$. 4734. $\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2}\pi}$. 4735. $\frac{\pi}{2 \sin \alpha \pi}$.
4736. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 4737. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$. 4738. $\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{n}) \Gamma(p-\frac{m+1}{n})}{na^p \Gamma(p)}$. 4739. $\frac{\pi}{2 \sin \pi a}$.

4740. $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. 4741. $\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{m+n}{2})}$. 4742. $\frac{2^{n-1}\Gamma^2(\frac{n}{2})}{(1-k^2)\Gamma(n)}$. 4743. $\pi \operatorname{ctg} \pi a$ (можно рассмотреть как $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{(1-x)^{1-\alpha}} dx$). 4744. $\frac{1}{a\beta(1+a)^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.
4745. $\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{a\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{b\pi}{2}}$. 4746. $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$. 4747. $\frac{\pi(1-a)}{\sin a\pi}$. 4748. $\frac{\pi^2 \sin \frac{a\pi}{2}}{4 \cos^2 \frac{a\pi}{2}}$. 4749. $\frac{\pi^2}{8} \frac{1+\sin^2 \frac{a\pi}{2}}{\cos^3 \frac{a\pi}{2}}$.
4750. $\frac{\pi}{2\nu} \operatorname{tg} \frac{\pi\mu}{2\nu}$. 4751. $\frac{\pi}{2\nu \cos \frac{\mu\pi}{2\nu}}$. 4752. $\ln \sqrt{2\pi}$. 4753. $a \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi}$.
4759. $\frac{a^2}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. 4760. $\frac{a^3}{3n^2} \frac{\Gamma^3(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{3}{n})}$. 4761. Справедливо, только если a и b одного знака. 4762. Когда $a < 0$ и $b > 0$.
4763. Указание. $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (\sin^2 x)^k x^\alpha dx < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (\sin^2 x)^{(k\pi)^3} (k\pi + \pi)^\alpha dx$.
4787. Неравенство, противоположное неравенству задачи 4786. 4798. $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.
4799. $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$. 4800. $\frac{\pi}{2}$. 4801. $\frac{a\pi}{2}$. 4802. a . 4803. $\frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2})$. 4804. $\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2}$.
4805. $\frac{\pi}{b} e^{-b\alpha} \cos a\alpha$, если $b > 0$, $\alpha > 0$. 4806. $\frac{\pi}{b} e^{-b\alpha} \sin a\alpha$, если $b > 0$, $\alpha > 0$. 4807. $\frac{\pi}{2} e^{-\alpha} \operatorname{ch} \beta$, если $\alpha > \beta > 0$. 4808. $\frac{\sqrt{\pi}}{4} a e^{-\frac{a^2}{4}}$. 4809. $\frac{\pi-\alpha}{2 \sin \alpha}$; $0 \leq \alpha \leq \pi$. 4810. $-\frac{1}{2}$. 4811. $\frac{\pi}{2b}$; $b > 0$. 4812. $\frac{\pi}{(\lambda-1) \sin(\lambda-1)\pi}$, если $1 < \lambda < 2$. 4813. $\sqrt{(n-1)\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$, если $n > 1$. 4814. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\Gamma^3(\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{\alpha(1-\alpha)}}$.
4815. $\ln \frac{1+a}{1+b}$, если $a > -1$, $b > -1$. 4816. $\ln \frac{b}{a}$. 4817. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$. 4818. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$.
4819. $-a \ln a$. 4820. $a \ln a - a$. 4821. $\frac{\pi}{2} |a|$. 4822. $\frac{\pi(|a|+1)}{4} e^{-|a|}$. 4823. $\frac{\pi}{4} \frac{1-e^{-2a}}{a}$; $a > 0$. 4824. $\frac{\pi}{3} |a|^3$. 4825. $\frac{\pi b}{2}$. 4826. $\frac{\pi}{4} (2-a)$ при $a < 2$; 0 при $a > 2$. 4827. $\frac{\pi}{4}$ при $0 < a < 1$; $-\frac{\pi}{8}$ при $1 < a < 3$; 0 при $a > 3$.
4828. $\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8}$ при $0 \leq a < 2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a \geq 2$. 4829. $\frac{\pi}{4}$. 4830. $\frac{\pi}{4}$.
4831. $\frac{\pi}{2\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}$. 4832. $\frac{e-1}{2e} \sqrt{\pi}$. 4833. $\frac{\ln a}{2a^n} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})^2}{\Gamma(n)}$; $a > 0$. 4834. $\frac{\pi a}{4} e^{-a}$; $a > 0$.
4835. $\pi \left(e^{-a} - \frac{1}{2} \right)$; $a > 0$. 4836. $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 4837. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 4838. $\frac{\pi^2}{4}$.
4839. $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}$. 4840. 0. 4841. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 4842. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{4})}{\Gamma(\frac{\alpha+3}{4})}$, если $\alpha > -1$.
4843. $\frac{\pi \cos \alpha}{\sqrt{2 \cos^3 2\alpha}}$. 4844. $\ln \sqrt{1+a^2}$. 4845. $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$.
4857. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.
4858. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.
4859. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.
4860. $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$.

$$4861. \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(4n-3)(4n-1)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}.$$

$$4862. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$4863. \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

$$4864. \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

$$4865. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

$$4866. \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right).$$

$$4867. \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2}.$$

$$4868. \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right).$$

$$4869. \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}.$$

$$4870. \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)2\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$$4871. \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi x}{3}}{n^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\pi x}{m^2}.$$

$$4872. \frac{1}{h} \operatorname{sh} h + 2h \operatorname{sh} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{h^2 + n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{h} - \\ - 2\pi \operatorname{sh} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{h^2 + n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{h}.$$

$$4873. \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a^2 + n^2} \right).$$

$$4874. \frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}.$$

$$4875. \frac{\pi^3}{4} + 6\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}.$$

$$4876. 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx.$$

$$4877. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

$$4878. \frac{a^3}{12} - \frac{a^3}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi x}{a}}{n^2} - \frac{3a^3}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi x}{a}}{n^3}.$$

$$4879. \frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} - \frac{12a^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^4}.$$

$$4880. \frac{4a^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^3} - \frac{3a^3}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\frac{\pi x}{a}}{n^3}.$$

$$4881. \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\frac{\pi x}{a}}{n}.$$

$$4882. \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi x}{a}}{(2n-1)^2}.$$

$$4883. \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

$$4884. \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\frac{\pi x}{2a}.$$

$$4891. f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x \, dx.$$

$$4932. x^3 = \frac{3}{4} T_1(x) + T_3(x).$$

$$4933. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m+1}}{2m+1} T_{2m+1}(x).$$

$$4934. \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{4n^2 - 1} T_{2n}(x).$$

$$4935. T_{2n}(x) + \frac{C_{2n}^1}{2^2} T_{2n-2}(x) + \frac{C_{2n}^2}{2^4} T_{2n-4}(x) + \dots + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} T_0(x).$$

$$4936. \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4n-1)(2n-2)!}{2^{2n} n! (n-1)!} P_{2n-1}(x).$$

$$4937. \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n} (n-1)! (n+1)!} P_{2n}(x).$$

$$4938. \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^n L_n(x).$$

$$4939. \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (n!)^2}{(n-k)! k!} L_k(x).$$

$$4940. \sum_{n=0}^{\infty} B_n L_n(x), \quad B_n = \frac{1}{2i} \left(\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}} - \frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}} \right).$$

$$4941. \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(x), \quad A_n = \frac{1}{2} \left(\frac{(ai)^n}{(1+ai)^{n+1}} + \frac{(-ai)^n}{(1-ai)^{n+1}} \right).$$

$$4942. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n!}{\sqrt{2}\pi 2^{n-1} n!} H_{2n+1}(x).$$

$$4943. \frac{2}{\sqrt{2}\pi} H_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n!}{\sqrt{2}\pi 2^{n-1} n!} H_{2n+2}(x).$$

$$4944. e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a^n H_n(x).$$

$$4945. e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^{2k} H_{2k}(x).$$

$$4946. e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} a^{2k+1} H_{2k+1}(x).$$

$$4947. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{m^2 + u^2} \cos ux \, du.$$

$$4948. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u}{m^2 + u^2} \sin ux \, du.$$

$$4949. \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2 + u^2}} \sin(ux + \varphi_u) \, du, \quad \text{где } \varphi_u = \arctg \frac{m}{u}.$$

$$4950. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau u}{u} \cos xu \, du.$$

$$4951. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u} \sin xu \, du.$$

$$4952. \frac{2A}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos au}{u} \cos u(x - x_0) \, du.$$

$$4953. \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(k^2 + \omega^2 - u^2) \cos ux + 2ku \sin ux}{(k^2 - \omega^2 + u^2)^2 + 4k^2 \omega^2} \, du.$$

$$4954. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi u}{2} \sin \left(x - \frac{n\pi}{2}\right) u}{u^2 - 1} \, du, \quad \text{если } n \text{ четное};$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi u}{2} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2}\right) u}{u^2 - 1} \, du, \quad \text{если } n \text{ нечетное}.$$

РЯДЫ

4965. При $x \leq 1$ расходится; при $x > 1$ сходится. **4966.** Сходится при $|x| \neq 1$. **4967.** То же. **4968.** Сходится при $|x| < 1$. **4969.** Сходится при $|x| < 4$. **4970.** Сходится при $|x| < e$. **4971.** Сходится при $|x| < \frac{1}{e}$. **4972.** Сходится при $|x| \leq 1$. **4973.** Сходится при всяком x . **4974.** Сходится при $x > 1$. Расходится при $0 < x \leq 1$. **4975.** Сходится при $b - a > 2$. Расходится при $b - a \leq 2$. **4976.** Сходится при $b > a$. Расходится при $b \leq a$. **4977.** Сходится при $\beta < \alpha$. Расходится при $\beta \geq \alpha$. **4978.** Расходится. **4979.** Сходится при $x \neq \frac{\pi k}{2}$. **4980.** Расходится. **4981.** Расходится. **4982.** Сходится. **4983.** Сходится. **4984.** Расходится. **4985.** Сходится при $a > 2$. Расходится при $a \leq 2$. **4986.** Сходится при $|x| < 1$. Расходится при $|x| > 1$. При $x = 1$ ряд сходится, когда $\gamma > \alpha + \beta$; при $x = -1$ ряд сходится, когда $\gamma > \alpha + \beta - 1$. **4987.** Сходится. **4988.** Расходится. **4989.** Сходится. **4990.** Сходится при $a > 0$. **4991.** То же. **4992.** Сходится при любом вещественном x . **4993.** То же.

4995. Сходится при $a > 2$, расходится при $a \leq 2$. **5000.** $\frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n-1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

5001. $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$. **5002.** $\frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$. **5003.** $\frac{-\sin nx \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{\cos \frac{x}{2}}$.

5004. $\frac{(-1)^{n-1} \sin^2 2nx - (1 + (-1)^{n-1}) \sin^2 x}{2 \cos 2x}$. **5015.** $\frac{x \sin a - x^n \sin na + x^{n+1} \sin (n-1)a}{1 - 2x \cos a + x^2}$.

5117. $\frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$. **5118.** $-\ln(2 \sin \frac{x}{2})$; $0 < x < 2\pi$. **5119.** $\frac{\pi}{4}$.

5120. $\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. **5121.** $\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2} \sin x$. **5122.** $\sin x \left(\frac{1}{4} - \ln(2 \sin \frac{x}{2}) \right)$.

5123. $\frac{1}{2a^2} (\pi - x - \pi \operatorname{ch} ax + \pi \operatorname{cth} a\pi \operatorname{sh} ax)$. **5124.** $\frac{1}{a^2} \left(\frac{\pi \operatorname{sh} ax}{2 \operatorname{sh} a\pi} - \frac{x}{2} \right)$. **5125.** $\frac{1}{8} \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\cos x \sqrt{2}}{\sin \pi \sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{2}}{\operatorname{sh} \pi \sqrt{2}} \right)$.

5150. $\frac{\pi a - 1}{2a^2} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a} - 1)}$.

5151. $\frac{\pi a - 2}{4a^4} + \frac{\pi((2\pi a + 1)e^{2\pi a} - 1)}{2a^3(e^{2\pi a} - 1)^2}$.

5152. $\frac{\pi}{x^3 \sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi x \sqrt{2}) + \sin(\pi x \sqrt{2})}{\operatorname{ch}(\pi x \sqrt{2}) - \cos(\pi x \sqrt{2})}$.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

5190. 0,05 м. **5191.** g определяется с точностью до 1 см/сек^2 ; ошибка в измерении времени больше влияет на результаты, чем ошибка при измерении длины.

5192. С точностью до 20 см приблизительно. **5193.** При 45° . **5194.** $125 \pm 1 \text{ м}$.

5195. Около 0,005. **5196.** Погрешности угла при нахождении по синусу — около $2''$, по тангенсу — около $1''$. **5197.** Точность вычисления подкоренных величин такова: под первым корнем $6 \cdot 10^{-5}$, под вторым $2 \cdot 10^{-6}$, под третьим 10^{-7} ,

под четвертым $4 \cdot 10^{-5}$. **5198.** Приблизительно 37 м. **5199.** $2x - 1$. **5200.** $2x - 1 - \frac{29}{13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 5}(x-2)(x-4)(x-5)(x-10)$. **5201.** $2 - \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 28 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. **5202.** $f(x) = \frac{4x-x^3}{3}$; значения разности: $-0,08$; $+0,18$; -320 . **5203.** $f(x) = \frac{640-196x^2+9x^4}{640}$; значения разности: $0,001$; $0,090$; 111 . **5204.** $\Delta y_0 = 0,471$; $\Delta^2 y_0 = -0,054$; $\Delta^3 y_0 = +0,006$. **5205.** $\Delta y_0 = 0,0292$; $\Delta^2 y_0 = 0,0568$; $\Delta^3 y_0 = 0,0012$; $\Delta^4 y_0 = 0,0048$. **5206.** $y = \frac{118x+3}{161}$. **5207.** $y = \frac{29x^2-9x+40}{84}$. **5208.** 3,002268462. **5209.** Найдя после первого приближения $x = 1005,237$ и вычислив $\Delta \ln 1005,237$ при $h = 0,001$, после второго приближения получаем $x = 1005,237437$. **5210.** 0,52375. **5211.** $u = 0,50206$. **5212.** 0,66043863; до $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$. **5213.** 0,3751467; до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$. **5214.** $\varphi = 28^\circ 4' 58''$, 89. **5215.** $\varphi(0,715) = 0,220378903$; до $\frac{1}{10^9}$. **5216.** $x = 0,834350$. **5217.** Погрешности формул Грегори, Гаусса и Бесселя равны 50, 47 и 8 единицам 8-го знака после запятой. **5218.** Погрешности равны 72, 35 и 2 единицам 8-го знака. **5219.** 508 и 443. **5220.** Около 8026. **5221.** Около 84 640. **5222.** 196 121. **5223.** 0,6970. **5224.** 0,6970. **5225.** 0,783. **5226.** 1,3655. **5227.** 0,26965. **5228.** 0,82318. **5229.** 0,69325; 0,69326; 0,78539; 1,37079; 0,27233; 0,82249. **5230.** 0,69318; 0,69318; 0,78553; 1,37076; 0,272222; 0,82247. **5231.** 0,69313; 0,69313; 0,78530; 1,37076; 0,27218; 0,822464. **5232.** 0,693147; 0,693146; 0,785403; 1,370762; 0,272203; 0,822467. (Значения последних интегралов, взятые до 7-го знака, таковы: 0,6931472; 0,7853982; 1,3707622; 0,2721982; 0,8224670.) **5233.** $\frac{\pi}{4}$; 1,3108. **5234.** 0,7870; 1,3104. **5235.** 0,8671. **5244.** 0,479256. **5245.** 2,6208. **5248.** Применяя разности до четвертого порядка, получим 0,7853987. **5249.** Пользуясь формулой с пятью разностями, получим 0,7853982. **5250.** Применяя формулу Грегори с двумя разностями, получаем результат 0,095310181, верный до 10^{-9} . **5255.** При $p = 9$ получаем $c = 0,57721566$ с точностью до 10^{-8} . **5256.** 7,4854701. **5258.** 1,2020569; 0,9375483. **5280.** 0,69315. **5281.** 0,78540. **5282.** 0,91596. **5283.** 0,90154. **5284.** 0,13629. **5285.** 0,22184. **5305.** 0,74682. **5306.** 1,10474. **5307.** 1,37076. **5308.** 1,21770. **5309.** 0,11769. **5310.** 0,49577. **5311.** 0,83446. **5312.** 0,91596. **5313.** 1,83193. **5314.** 0,83565. **5315.** 0,86697. **5330.** 3,0489; $-1,6920$; $-1,3569$. **5331.** $-3,5042$; $1,7521 \pm i \cdot 1,1003$. **5332.** $-2,2340$; $0,3276$; $0,9532 \pm i \cdot 0,06765$. **5333.** 1,2963; $-1,4305$; $-0,1103 \pm i \cdot 1,2669$; $0,1774 \pm i \cdot 0,5495$. **5334.** 29,53660. **5335.** 0,739085. **5336.** 2,75295. **5337.** 0,61906 (один из двух корней). **5338.** 4,49341. **5339.** 4,73004. **5340.** 1,20241.

$$5342. \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+1)} + a_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{2 \cdot 4 \cdots 2\nu} = y_0 e^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$5343. y = C \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} x^\nu = C(1+x)^n.$$

$$5344. C_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{(2\nu)!} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$5345. a_0 \sum \frac{x^{3\nu}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3\nu - 1)3\nu} + a_1 \sum \frac{x^{3\nu+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3\nu(3\nu + 1)}.$$

$$5354. y_{n+1} = Ce^x \left(1 + \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2 x^4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{a^n x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right) \rightarrow Ce^{x + \frac{ax^2}{2}}.$$

$$5355. y = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \sigma^n.$$

$$\text{Здесь } \varphi_0(x) = \sin ax \cdot \varphi_n(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sin a(x-t) \cdot t \varphi_{n-1}(t) dt.$$

$$5358. y = \cos x + \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{6} \cos 2x \right) + \\ + \sigma^2 \left(-\frac{2}{3} + \frac{61}{72} \cos x + \frac{1}{6} x \sin x - \frac{2}{9} \cos 2x + \frac{1}{24} \cos 3x \right) + O(\sigma^3).$$

5360. При $n = 2m$ имеем:

$$H_{2m}(x) = \frac{(-1)^m e^{\frac{x^2}{4}}}{2^m \cdot m!} \times \\ \times \left(\cos \frac{x}{a} + \frac{a}{24} x^3 \sin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{16} x^2 \cos \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^4}{72} \right) + O(a^3) \right). \\ a = \frac{1}{\sqrt{2m + \frac{1}{2}}}.$$

При $n = 2m - 1$:

$$H_{2m-1} = \frac{(-1)^m e^{\frac{x^2}{4}} \cdot 2ma}{2^m \cdot m!} \times \\ \times \left(\sin \frac{x}{a} - \frac{ax^3 \cos \frac{x}{a}}{24} + \frac{a^2}{16} x^2 \sin \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^4}{72} \right) + O(a^3) \right). \\ a = \frac{1}{\sqrt{2m - \frac{1}{2}}}.$$

$$5361. y = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3(2n+5)(2n-3)}.$$

$$5362. \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos nx}{n^2(n^4+1)}; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

5363. См. таблицу 18.1.

5364. См. таблицу 18.2. 5365. Значения y таковы: 0,03090; 0,09368; 0,18020; 0,28738; 0,41337; 0,55706; 0,71738; 0,89359; 1,08519; 1,29158. При решении следует вычислить разложением в ряд значения y при $x = 0,100$; 0,1125; 0,1250; 0,1375; 0,1500, положив $h = 0,0125$. 5366. $u = \sin x$; $\cos x = v$;

Таблица 18.1

x	y	$u = -0,1xy$	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	Δy
-0,10	0,990050	9 900,5	-4 913,0	-74,5	74,5	
-0,05	0,997503	4 987,5	-4 987,5	0	74,5	
0	1,000000	0	-4 987,5	74,5	72,7	
0,05	997 503	-4 987,5	-4 913,0	147,2	69,1	
0,10	990 050	-9 900,5	-4 765,8	216,3	63,6	-12 298
0,15	977 752	-14 666,3	-4 549,5	279,9		-16 961
0,20	960 791	-19 215,8	-4 269,6			-21 375
0,25	939 416	-23 485,4				-25 480
0,30	913 936					

Таблица 18.2

x	y	Δy	$hy' = \frac{x+y}{10}$	$\Delta hy'$	$\Delta^2 hy'$	$\Delta^3 hy'$	$\Delta^4 hy'$
1	1		0,2	31 551	3 319	347	41
1,1	1,21551		0,231551	34 870	3 666	388	37
1,2	1,46421		0,266421	38 536	4 054	425	46
1,3	1,74957		0,304957	42 590	4 479	471	50
1,4	2,07547	0,37069	0,347547	47 069	4 950	521	54
1,5	2,44616	0,42019	0,394616	52 019	5 471	575	61
1,6	2,86635	0,47490	0,446635	57 490	6 046	636	
1,7	3,34125	0,53536	0,504125	63 536	6 682		
1,8	3,87661	0,60218	0,567661	70 218			
1,9	4,47879	0,67603	0,637879				
2,0	5,15482						

$u' = v$; $v' = -u$. См. таблицу 18.3. **5367.** См. таблицу 18.4. **5368.** См. таблицу 18.5. **5369.** 1; 0,99750; 0,99002; 0,97763; 0,96040; 0,93847; 0,91200; 0,88120; 0,84629; 0,80752; 0,76520. **5370.** 0,07074; -0,02920; -0,12884; -0,22720; -0,32329; -0,41615.

Таблица 18.3

x	u	hu'	Δ	Δ^2	Δ^3	v	hv'	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0	0,1	-0,00050	-99	0	1	0	-998	9	12
0,1	0,0998	0,09950	-0,00149	-99	4	0,9950	-0,00998	-989	21	8
0,2	0,1987	0,09801	-0,00248	-95	3	0,9801	-0,01987	-968	29	10
0,3	0,2955	0,09553	-0,00343	-92	5	0,9553	-0,02955	-939	39	9
0,4	0,3894	0,09210	-0,00435	-87	4	0,9210	-0,03894	-900	48	8
0,5	0,4794	0,08775	-0,00522	-83	7	0,8775	-0,04794	-852	56	9
0,6	0,5646	0,08253	-0,00605	-76	6	0,8253	-0,05646	-796	65	6
0,7	0,6442	0,07648	0,00681	-70		0,7648	-0,06442	-731	71	
0,8	0,7173	0,06967	-0,00751			0,6967	-0,07173	-660		
0,9	0,7833	0,06216				0,6216	-0,07833			
1,0	0,8414					0,5103				

Таблица 18.4

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$J_0(x)$	1	0,998	0,990	0,978	0,960	0,938	0,912	0,881	0,846	0,808	0,765
$J_1(x)$	0	0,050	0,100	0,148	0,196	0,242	0,287	0,329	0,369	0,406	0,440

Таблица 18.5

x	y	y'	hy''	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	1	0	0,1	500	1 007	13	13
0,1	1,00500	0,10017	0,100500	1 507	1 020	26	10
0,2	1,02007	0,20134	0,102007	2 527	1 046	36	11
0,3	1,04534	0,30452	0,104534	3 573	1 082	47	10
0,4	1,08107	0,41075	0,108107	4 655	1 129	57	14
0,5	1,12762	0,52109	0,112762	5 784	1 186	71	10
0,6	1,18546	0,63665	0,118546	6 970	1 257	81	
0,7	1,25516	0,75858	0,125516	8 227	1 338		
0,8	1,33743	0,88810	0,133743	9 565			
0,9	1,43308	1,02651	0,143308				
1,0	1,54307	1,17519					

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5371. $w(z) = \frac{z^2}{2}(2-i)$. **5372.** $w = z^3(1-2i)$. **5373.** $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}$. **5374.** $w = ze^z$. **5375.** $w = \operatorname{ctg} z$. **5376.** $w = \alpha i \ln z + \beta i + \gamma$; α, β, γ — вещественные. **5377.** $w = \alpha\sqrt{z} + \beta + i\gamma$; α, β, γ — вещественные. **5378.** $w = \alpha i \ln z + \beta i + \gamma$. **5381.** $w = \alpha \ln z + \beta i + \gamma$. **5382.** $e^{\frac{\alpha}{z} + \beta + i\gamma}$. **5383.** $\ln w = \frac{i\alpha}{z} + \beta + i\gamma$. **5384.** $cz^{i\alpha}$. **5387.** $z = \pm i$ — простые полюсы. **5388.** $z = 0$; ± 1 — простые полюсы. **5389.** $z = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — простые полюсы; $z = \infty$ — (не изолированная) существенно особая точка. **5390.** $z = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$ — простые полюсы. **5391.** $z = 0$ — существенно особая точка. **5392.** $z = \pm 1$ — точки ветвления 1-го порядка. **5393.** $z = 1, e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}, \infty$ — точки ветвления 1-го порядка. **5394.** а) $|w| = c$; $x^2 + y^2 = ax$; б) $\arg w = c$; $x^2 + y^2 = by$. **5397.** $\Delta \arg \sqrt[n]{z-a} = \frac{2\pi}{n}$ при одном обходе. **5398.** $\Delta \arg w$ равна соответственно: а) π ; б) 2π ; в) 0 . **5399.** В первом случае $w = e^{-e(1+\pi i)}$, во втором $w = e^{-e(1-\pi i)}$. **5400.** $\sqrt{2 \sin \varphi} \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}}$, если $\sin \varphi > 0$ и $\sqrt{-2 \sin \varphi} e^{\frac{\pi i}{4}}$, если $\sin \varphi < 0$. **5401.** $\ln 8 + \pi i$. **5402.** $\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi i}{2}$; $-\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi i}{2}$. **5408.** $w_1 = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{24} - \frac{19z^4}{720} - \frac{49z^5}{480} - \dots$; $w_2 = 1 + \frac{z}{3} - \frac{4z^4}{45} + \frac{44}{945}z^6 - \frac{428}{14175}z^8 + \frac{10196}{467775}z^{10} + \dots$. **5409.** $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}iz^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 + \dots \right)$. **5410.** Обе функции разлагаются в ряд на всей плоскости. **5411.** $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{4^\nu}$. **5412.** $\frac{1}{9} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{2n}$, где $a_n = 1$ для $n < 0$ и $a_n = \frac{3n+7}{4n+2}$ для $n > 0$. **5413.** $\frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(3n-7)4^{n-2}}{z^{2n}}$. **5414.** а) При $|z| < \pi$ имеем: $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{2\nu-1}$; $a_\nu = \frac{1}{\pi^{2\nu}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}}$. б) При $\pi < |z| < 2\pi$ имеем: $\operatorname{ctg} z = \frac{3}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi^{2\nu}}{z^{2\nu+1}} - 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu z^{2\mu-1}$; $a_\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{2\mu}}$. **5415.** и **5416.** При $1 < |z| < 2$: $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{2}\right)^n$. При $|z| > 2$: $\sum_{n=2}^{\infty} C_n \left(\frac{2}{z}\right)^n$. Здесь $C_{2\nu} = C_{2\nu+1} = -i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)2^{2\nu-1}}\right)$;

$a = -\frac{1}{2} \ln \frac{2-i}{2+i}$; $b_n = a + C_n$. 5417. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+5}}{n!}$. 5418. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n + z^{-n})$; $a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu!)^2}$; $a_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!(n+\nu)}$. 5423. При $z = 0$ вычет 1, при $z = \pm 1$ он равен $-\frac{1}{2}$. 5424. Вычет $\mp \frac{i}{4}$. 5425. $(-1)^{n+1} C_{2n}^{n+1}$; $(-1)^n C_{2n}^{n+1}$. 5426. $e^\alpha - e^\beta$. 5427. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 5428. $-\frac{\pi i}{2}$. 5429. $\frac{3\pi i}{64}$. 5430. 0. 5431. 0. 5432. 0. 5433. $2n + 1$. 5434. $\frac{\pi i}{2} \sqrt{1 + \sqrt{2}}$. 5435. При $b = 0$. 5436. $\pi\sqrt{2}$. 5437. $\frac{4}{3}\pi$. 5438. $\frac{\pi}{2a}$. 5439. $\frac{\pi(2a+b)}{2a^3(a+b)^2b}$. 5440. $\frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{2m+1}{2n} \pi$. 5441. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 5442. $\pi \frac{1+p^4}{1-p^2}$. 5443. $\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}$. 5444. $\pi i \cdot \operatorname{sign} \operatorname{Im} a$. 5446. $I_1 = 2\pi i e^{-az}$; $I_2 = 0$. 5447. πe^{-ar} ; $a > 0, r > 0$. 5448. $\frac{\pi}{2r} \cdot e^{-ar}$; $a > 0, r > 0$. 5449. $\frac{\pi}{2}$. 5450. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \pi e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}} + \sin \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$. 5451. $\frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab})$. 5489. 1. 5490. 0. 5491. 5. 5492. 1. 5493. По корню в квадранте. 5494. То же.

$$5542. z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} \left(\frac{w}{2} \right)^n; \quad |w| < 1.$$

$$5543. z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n; \quad |w| < e^{-1}.$$

$$5544. z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (2n+2)} \cdot w^{2n+1}.$$

$$5545. z = bw + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b^{nm+1} w^{(m+1)n+1} \frac{(nm+2)(nm+3) \cdots (nm+n)}{n!}.$$

Здесь $|w^{m+1} b^m| < \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$.

$$5546. e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!}; \quad a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} C_{2n}^\nu \frac{(n-1)!}{(n-1-\nu)!}; \quad |w| < \frac{1}{4}.$$

$$5547. e^{-z} = e^{-a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-a} a^n)^{(n-1)}}{n!} w^n.$$

$$5548. E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n M)}{dM^{n-1}}.$$

5549. $x = 1$; $x = -1$. 5550. $x = 0, x^6 = 4$. 5551. $x = \pm 1$; $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$; $x = \pm \sqrt{1 - \sqrt{2}}$. 5552. $x = 1, \rho, \rho^2$; $x = \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$; $\rho \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$; $\rho^2 \sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$; $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. 5553. $y_1 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{81}x^5 + \dots$, $y_{2,3} = \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{72}x^{\frac{3}{2}} \dots$. 5554. $y_1 = -\frac{x}{4} + \frac{x^4}{1024} \dots$, $y_{2,3,4} = \sqrt[3]{4} + \frac{x}{12} + \dots$. 5555. $y_{1,2,3} = (b^2x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a \left(\frac{x}{b} \right)^{\frac{8}{3}} + \dots$; $y_{4,5} = a^{\frac{1}{2}} b^{-1} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} a^2 b^{-6} x^5 + \dots$. 5556. $y_1 = x + \frac{4}{3}x^2 + \dots$; $y_{2,3} = \sqrt{\frac{x}{2}} - 2 \left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right)^3 + \dots$; $y_{4,5} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x - \frac{(\sqrt{3}-1)^4}{24}x^2 + \dots$. 5566. $|z| \neq 1$. 5567. Вся плоскость, кроме точек $z = -1, -2, -3, \dots$. 5568. $|z| < 1$. 5569. Всюду, кроме точек $z = \pm ia^{-n}$. 5589. Логарифмическая спираль при $a \neq 0$ и окружность при $a = 0$.

5590. При $a \neq 0$ циклоида, удлиненная или укороченная циклоида, соответственно $a = b$, $a < b$, $a > b$. **5591.** Эллипс. **5592.** Парабола. **5593.** Развертка круга. **5594.** Полуплоскость $x > 1$. **5595.** Замкнутый круг. **5596.** Внутренность лемнискаты. **5597.** Окружность. **5598.** При соответствующем определении значений аргументов область вне круга $(x+1)^2 + y^2 = 2$ при условии $x < 0$. **5599.** Общая, а также внешняя часть окружностей: $x^2 + (y-1)^2 = 2$; $x^2 + (y+1)^2 = 2$. **5607.** Линии $|z| = C$ переходят в эллипсы с фокусами в точках ± 1 ; линии $\arg z = C$ — в софокусные гиперболы. Область $|z| > C > 1$; $a < \arg z < \pi - a$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$, переходит в часть внешней области эллипса, ограниченную двумя гиперболами. **5608.** На верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами между точками $n\pi$ и $n\pi + ai$. **5609.** $\frac{\pi}{2}$. **5610.** На внутренность эписпиралоиды с площадью $\pi a^2 n(n+1)$. **5611.** S_n — область внутри правого острого угла величиной $\frac{\pi}{n}$ с вершиной в точке $z = -n$ и со стороны на оси OX ; $\lim S_n$ — полосы шириной π . **5612.** На внутренность окружности $\left| z - \frac{a}{4} \right| < \frac{a}{4}$. **5616.** $a\bar{d} - \bar{b}c = 0$, $\operatorname{Im} \left(\frac{b}{d} \right) > 0$. **5617.** $w = \frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)(z+3i+1)}$. **5618.** $w = \frac{2z+1}{z+2}$. **5619.** $w = c \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha$. **5620.** $w = \frac{2z}{1+z^2}$. **5621.** $w = \frac{2+iz^2}{2-iz^2}$. **5622.** $w = -\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^2$ — один из ответов. **5623.** $w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. **5624.** $w = \sqrt{\frac{a-z}{z-b}}$. **5625.** $w = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$. **5626.** $\pi zi = a \ln w$. **5627.** $(b-a)zw = \pi a(2bi-z)$. **5628.** $w = \ln z$. **5629.** $w = \frac{z+24}{3z}$; $\rho = \frac{2}{3}$. **5630.** $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$; $A = 2 + \sqrt{5}$. **5631.** $z = w^2 + 2iw$. **5632.** $z = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \ln w + i\alpha \right)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. **5633.** $w = \frac{1}{a}(z^2 - a^2)$. **5638.** В многоугольную звезду с равными сторонами. Внутренние углы поочередно равны $\pi - \frac{2\pi}{n} - \lambda\pi$ и $\pi + \lambda\pi$.

$$5639. w = \int_0^z \frac{(1+z^5)^{\frac{2}{5}}}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} dz.$$

$$5640. w = c \int_1^z \frac{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}{z^2} dz + c_1.$$

$$5641. w = \sqrt{z^2 - 1}. \quad 5642. w = i \ln \sin z. \quad 5643. w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \zeta = \frac{4}{9} \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{9}. \quad 5644. z = \frac{4w}{(1+w)^2}. \quad 5647. y = (a + (b-a)x)e^x + \int_0^x (x-t)e^{(x-t)} f(t) dt. \quad 5675. 6x = 3(a-c) + 2(b+c)e^{-t} + (3a-2b+c)e^{2t}, \\ 6y = 3(a-c) + 4(b+c)e^{-t} - (3a-2b+c)e^{2t}, \quad 6z = 3(c-a) + 2(b+c)e^{-t} + (3a-2b+c)e^{2t}. \quad 5676. 9x = (14+24t)e^{-2t} + 4e^t - 9e^{-t}; \quad 9y = (-10+24t)e^{-2t} + e^t. \quad 5677. x = e^{2t} - 2e^t; \quad y = (1-t)e^t; \quad z = 2e^t - e^{2t} + te^t. \quad 5678. 2x = (3t-1)e^t + (3+t)e^{-t}; \quad 4y = (4-3t)e^t - (4+t)e^{-t}. \quad 5679. y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) + a_2 \left(x^2 + \frac{x^5}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right). \quad 5680. y = a_0 \left(1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right) + a_2 \left(x^2 + \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{10}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right). \quad 5682. y = a_0 \left(1 - \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^{12}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^7}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} - \dots \right) + a_2 \left(x^2 - \frac{x^8}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^{14}}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14} - \dots \right).$$

$$5683. y = \frac{a_0 + a_1 x}{1 - x^2}. \quad 5684. y = 2c_1 \left(x - \frac{3x^2}{(2!)^3} + \frac{11x^3}{(3!)^3} - \frac{50x^4}{(4!)^3} + \dots \right) + (c_1 \ln x + c_2) \left(1 - \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} - \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots \right). \quad 5685. xy = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$5689. y = A \left(1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n+1)(n(n+1)-2 \cdot 3)}{4!} x^4 - \dots \right) + B \left(x - \frac{n(n+1)-1 \cdot 2}{3!} x^3 + \frac{(n(n+1)-1 \cdot 2)(n(n+1)-3 \cdot 4)}{5!} x^5 - \dots \right).$$

$$5690. y = A \left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right) + B \left(x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots \right).$$

$$5691. \varphi(a, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2a+1)(2a+3) \cdots (2a+2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot (2a+2)(2a+4) \cdots (2a+2n)} x^n, \\ (a \neq 0);$$

если $a = 0$, то общее решение имеет вид

$$y = C_1 \varphi(0, x) + C_2 \left(\varphi(0, x) \ln x + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} \right) x^n \right),$$

$$\text{где } \varphi(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 x^n.$$

$$5692. y_1 = \varphi(0, 1-x); \quad y_2 = y_1 \cdot \ln(1-x) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} \right) x^n. \quad 5693. y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x); \quad I_n(x) =$$

$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2\nu}}{\nu! \Gamma(n+\nu+1)}.$ **5695.** $y = \int_C e^{tx} (t^2 + 1)^{n-\frac{1}{2}} dt.$ За контур C можно взять кривые, идущие из ∞ в направлении $\operatorname{Re} xt < 0$ и уходящие в том же направлении после обхода точек i и $-i$. Можно также выбрать контур, обходящий точки i и $-i$ в противоположных направлениях так, чтобы изменение функции под интегралом при обходе контура равнялось нулю. **5696.** $y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$ Каждая из функций y_1 и y_2 представляется интегралом $\int_{\gamma} e^{tx} (t-a)^{-\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}-1} (t-\beta)^{-\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}-1} dt.$ Контур γ выбирается так, чтобы точки α и β лежали внутри него, а приращение подынтегральной функции вдоль него равнялось нулю. Если $\alpha < 0$; $0 < \beta < -\alpha$, то за один контур можно взять отрезок от α до β , а за другой — отрезок от одной из точек α или β и уходящий в ∞ в направлении $\operatorname{Re} xt < 0$. **5697.** При $\operatorname{Re} x > 0$ имеем $y = c_1 \int_{-q}^q (t^2 - q^2)^{a-1} e^{tx} dt + c_2 \int_{-\infty}^{-q} (t^2 - q^2)^{a-1} e^{xt} dt.$ При $\operatorname{Re} x < 0$ пределы второго интеграла меняют знак. **5699.** $y_1 = \int_0^{\infty} \sin \frac{x}{t} e^{-\frac{t}{2}} dt;$

$y_2 = \int_0^\infty \cos \frac{x}{l} e^{-\frac{t}{2}} t dt$. **5700.** $y_1 + iz_1 = \int_0^\infty e^{-t-xti} \frac{dt}{\sqrt{t}}$; $y_2 + iz_2 = i \int_0^\infty e^{-t-xti} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, где y_1, z_1, y_2, z_2 — вещественные. **5720.** Линии потенциала — вертикали, линии тока — горизонталы, скорость равна a и направлена в положительную сторону оси OX . **5721.** Линии тока и потенциала — вертикали и горизонталы. Скорость равна a и направлена в отрицательную сторону оси OY . **5722.** Линии тока $xy = C$, линии потенциала $x^2 - y^2 = C$. Скорость по величине равна $2|z|$, $v_x = 2x$, $v_y = -2y$. **5723.** Линии тока: $x^2 + y^2 = Cy$, линии потенциала: $x^2 + y^2 = Cx$, $v_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $v_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $v = \frac{1}{x^2 + y^2}$. **5724.** Линии тока и потенциала лемнискаты: $r^2 = C \sin 2\varphi$, $r^2 = C \cos 2\varphi$; $v = \frac{2}{|z|^3}$. **5725.** Линии тока и потенциала: $y = Cx$ и $x^2 + y^2 = C^2$. $v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $v_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $v = \frac{1}{|z|}$. **5726.** $\arg(z - a) + \arg(z + a) - \arg(z - ai) - \arg(z + ai) = C$. **5727.** $w = 2i \ln(z^2 - a^2) + c$; $\varphi = -2 \operatorname{arctg} \frac{r^2 \sin 2\theta}{r^2 \cos 2\theta - a^2}$. **5728.** $w = \ln \operatorname{sh} \frac{\pi z}{a} + c$. **5729.** $\frac{1}{2}$. **5730.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **5731.** Линии тока и потенциала: $A(x - a) + By = 0$; $(x - a)^2 + y^2 = c^2$. **5734.** Поток по любому замкнутому контуру равен нулю. Циркуляция по замкнутому контуру равна нулю, если точка a вне контура, и равна Γ , если точка a внутри контура. **5736.** Поток равен 6π , циркуляция равна нулю. **5737.** Обе циркуляции равны -4π . **5738.** Источники в точках: $e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$, 0 . Их обильности 2π , 2π , 2π , 2π , -4π . **5743.** $w = \frac{E}{2\pi} \ln \left(z + z^{-1} - a - \frac{1}{a} \right)$; $|z| = 1$ — одна из линий тока. **5744.** $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-\frac{1}{a}}$; $|z| = 1$ — одна из линий тока. **5745.** $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z-ai)(z+\frac{1}{a})}{(z+ai)(z-\frac{1}{a})}$. **5746.** $w = \frac{Q}{\pi} \ln(z^2 - 1)$. **5747.** $w = \frac{E}{2\pi} \ln(z^6 + a^6)$. **5748.** $w = \frac{Q}{\pi} \ln \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$. **5749.** $w = -\frac{E}{\pi} \frac{1}{z}$. **5760.** $w = -v \left(z + \frac{1}{z} \right)$. **5765.** $w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\Gamma(-\frac{z}{l} - \frac{1}{4} - \frac{hi}{2l})}{\Gamma(-\frac{z}{l} + \frac{1}{4} + \frac{hi}{2l})}$. **5766.** $v = \frac{\Gamma}{4d} \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{d}$, параллельно стенкам. **5767.** $w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sin z$. **5768.** $w(z) = \frac{Q}{4\pi} \ln \sin(z - hi)$. **5769.** $w = -v \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$. **5770.** $w = v\sqrt{z^2 + 1}$. **5771.** Скорость равна нулю в точках $z_1 = R e^{i\beta}$, $z_2 = -R e^{-i\beta}$, где $\sin \beta = \frac{\Gamma}{4\pi a R}$ (при $\Gamma < 4\pi a R$). Циркуляция по кругу $|z| = R$ равна Γ ; $v_\infty = a$. **5772.** $w(z) = c \operatorname{arsh} z$. **5773.** $w = \frac{v}{a-b} (az - b\sqrt{z^2 - c^2})$, $c^2 = a^2 - b^2$. **5775.** $w = -v \left(z + \frac{4}{3} + \frac{4}{3(3z+4)} \right)$. **5777.** Силовые и потенциальные линии — прямые и окружности $\varphi = C$; $r = C$, где $z = re^{i\varphi}$. **5778.** Потенциал $v = \frac{1}{\ln(2-\sqrt{3})} \cdot \ln \left| \frac{z+7+\sqrt{48}}{z+7-\sqrt{48}} \right| + 2$. **5779.** $v = 2\sigma \ln \left| \frac{z+i\sqrt{3}}{z-i\sqrt{3}} \right|$; плотность σ_1 в точке $z = 2i + e^{i\varphi}$ выражается формулой $\sigma_1 = \frac{\sigma\sqrt{3}}{2\pi(2+\sin \varphi)}$. **5780.** $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{24 \ln 2} \leq |\sigma| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{3}{8 \ln 2}$. **5781.** $V = 2\delta \ln 3$. **5783.** $2z = (a+b)e^{i\omega} + (a-b)e^{-i\omega}$. Софокусные линии $\lambda x^2 + (c^2 + \lambda)y^2 = \lambda(c^2 + \lambda)$ — линии

потенциала при $\lambda > 0$, силовые линии при $0 > \lambda > -c^2$. **5784.** $\omega = \frac{\nu_0}{h} z$. **5785.** $v = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\ln(2+\sqrt{3})}$. **5786.** $\sigma_{\max} = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})}$, $\sigma_{\min} = \frac{1}{8\pi\ln(2+\sqrt{3})}$. **5787.** $\omega = \frac{2\nu_0}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) - i\nu_0$. **5788.** $\frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\mathbf{5789.} \quad z = \int_0^w \sqrt{e^w + 1} dw + 2 \left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) \right).$$

5790. $\omega = -2iq \ln(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}) + i \cdot c$, где c — вещественная постоянная.

$$\mathbf{5791.} \quad q(z-1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \tau} d\tau = i \int_0^w \sqrt{\cos \frac{w}{q}} dw.$$

$$\mathbf{5792.} \quad t = \frac{1}{\ln 2} \ln \left| \frac{4z+1}{z+4} \right| \cdot 100^\circ. \quad \mathbf{5793.} \quad t = \frac{\ln 17/5}{\ln 4} \cdot 100^\circ. \quad \mathbf{5794.} \quad t = \frac{2}{\pi} \arg \frac{z+a}{z-a}.$$

$$\mathbf{5795.} \quad t = \frac{2}{\pi} \arg \left| \frac{1+z}{1-z} \right|. \quad \mathbf{5796.} \quad t = \frac{2}{\pi} \arg \frac{\frac{\pi}{z} \frac{\alpha}{\alpha} + a}{\frac{\pi}{z} \frac{\alpha}{\alpha} - a}.$$

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$$\mathbf{5817.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \quad \xi = x - y, \quad \eta = x + y. \quad \mathbf{5818.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0; \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

$$\mathbf{5819.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = y^2; \quad \eta = x^2. \quad \mathbf{5820.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \xi = xy; \quad \eta = \frac{y}{x}. \quad \mathbf{5821.} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{W}{(\xi - \eta)^2}; \quad \xi = \frac{y}{2} + \sqrt{l - x},$$

$$\eta = \frac{y}{2} - \sqrt{l - x}, \quad u = \frac{W}{\sqrt{2} \sqrt{l - x}}. \quad \mathbf{5822.} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{W}{\sin^2(\xi - \eta)}; \quad \xi = \frac{y + \omega}{2}, \quad \eta = \frac{y - \omega}{2}, \quad u = \frac{W}{\sqrt{\sin \omega}} \quad (x = l \cos \omega). \quad \mathbf{5823.} \quad \xi = \operatorname{tg} x; \quad \eta = \operatorname{tg} y; \quad v =$$

$$= u \frac{\sin^{\beta'}(x-y)}{(\xi-\eta)^m} \cos^{n-m} x = u \frac{\sin^{\beta}(x-y)}{(\xi-\eta)^n} \cos^{m-n} y; \quad \beta' - \beta = m - n; \quad p = \beta(1 - \beta') - n(1 - m). \quad \mathbf{5827.} \quad u|_{l=\frac{l}{2\alpha}} = 0, \quad u|_{l=\frac{l}{a}} = -\frac{4hx(l-x)}{l^2}, \text{ где } h = u_{\max}$$

при $t = 0$. **5829.** $u = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(z)}{\sqrt{\rho - z}} dz$, где $\alpha = x - y\sqrt{\rho - x} - \frac{1}{4}y^2$; $\beta = x + y\sqrt{\rho - x} - \frac{1}{4}y^2$. **5830.** $u = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(z)}{\sqrt{\rho^2 - z^2}} dz$,

где $\alpha = x \cos y - \sqrt{\rho^2 - x^2} \sin y$, $\beta = x \cos y + \sqrt{\rho^2 - x^2} \sin y$. **5839.** При $t \in (0, \frac{r-R}{a}) \cup (\frac{r+R}{a}, \infty)$, конденсация равна нулю; при $\frac{r-R}{a} < t < \frac{r+R}{a}$ конденсация $S = \frac{S_0(r-at)}{2r}$.

5845. Искомое решение имеет вид:

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{\sin \omega - y} f(l \cos(\omega - y)) + \sqrt{\sin(\omega + y)} f(l \cos(\omega + y))}{2\sqrt{\sin \omega}} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\sin \omega}} \int_{\omega-y}^{\omega+y} \Phi(\omega, y, z) dz,$$

где

$$\Phi(\omega, y, z) = \varphi(l \cos z) \sqrt{\sin z} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos y}{2 \sin \omega \sin z}\right) + \\ + \frac{1}{2} f(l \cos z) \frac{\sin y}{\sin \omega \sqrt{\sin z}} F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos y}{2 \sin \omega \sin z}\right), \\ \omega = \arccos \frac{x}{l}.$$

Указание. Надо привести заданное уравнение к простейшему каноническому виду (см. задачу 5822). Область интегрирования та же, что и в предыдущей задаче.

$$5846. u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$5847. u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x,$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \quad b_n = \frac{4}{(2n+1)a\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$$

$$5848. u = \frac{1}{l} \int_0^l (f(x) + tF(x)) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$$5849. \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

$$a_n = \frac{4}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \int_0^l f'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{4l}{a\mu_n(2\mu_n + \sin 2\mu_n)} \int_0^l F'(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = \gamma \left(\gamma = l \frac{k}{k_1} \right)$.

$$5850. \theta = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k at}{l} \right) \left(\sin \frac{\mu_k}{l} x - \frac{p}{\mu_k} \cos \frac{\mu_k}{l} x \right);$$

$$a_k = \frac{2\mu_k}{\mu_k^2 + p(p+2)} \int_0^l f'(x) \left(\cos \frac{\mu_k}{l} x + \frac{p}{\mu_k} \sin \frac{\mu_k}{l} x \right) dx;$$

$$b_k = \frac{2l}{a(\mu_k^2 + p(p+2))} \int_0^l F'(x) \left(\cos \frac{\mu_k}{l} x + \frac{p}{\mu_k} \sin \frac{\mu_k}{l} x \right) dx,$$

где μ_k — положительные корни уравнения

$$2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}; \quad p = l \frac{k}{k_1}.$$

5851. $u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{\mu_k x}{l}$, где

$$T_k(t) = \frac{2}{a\mu_k^2} \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(p+1) + \mu_k^2} \int_0^l d\tau \int_0^l \frac{\partial Y(\xi, \tau)}{\partial \xi} \sin \frac{a\mu_k}{l}(t-\tau) \cos \frac{\mu_k \xi}{l} d\xi,$$

а $\mu_1, \mu_2, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu = p$, причем $p = \frac{gl\rho}{p}$.

$$5852. u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}.$$

$$5853. u(x, t) = \frac{2K}{a\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l},$$

где число K , определяемое равенством $\frac{K}{\rho} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} F(x) dx$, есть импульс силы удара молоточка о струну.

$$5854. p = e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin(\omega_n t + \varphi_n),$$

$$i = e^{-\frac{1}{2} \frac{R}{L} t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \omega_n t,$$

где $a_n = \frac{4p_0}{\pi(2n+1)} \frac{1}{\sin \varphi_n}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = 2\omega_n \frac{l}{R}$ и $b_n = -\frac{2p_0}{lL\omega_n}$, $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{LC}} \times$
 $\times \sqrt{1 - \frac{CR^2 l^2}{L\pi^2(2n+1)^2}}.$

$$5855. u_1 = \frac{A}{a\omega} \frac{\sin p(l-c)}{\sin pl} \sin px \sin \omega t, \quad u_2 = \frac{A}{a\omega} \frac{\sin pc}{\sin pl} \sin p(l-x) \cdot \sin \omega t, \quad \text{где}$$

$$p = \frac{\omega}{a}.$$

$$5856. u_2(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \int_0^t d\tau \int_0^l Y(\xi, \tau) \sin p_n(t-\tau) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где}$$

$$p_n = \frac{an\pi}{l}.$$

$$5857. u = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

$$5858. u = \frac{2}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t F(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l}(t-\tau) d\tau,$$

где $F(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} Y(x, t) dx$. Если внешняя возмущающая сила гармоническая, т. е. $F(t) = F_0 \sin \omega t$, то $u = -\frac{2\omega F_0}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{na\pi t}{l} +$
 $+ \frac{2F_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \omega t$, причем предполагается, что ни одна из частот $\omega_n = \frac{na\pi}{l}$ в точности не равна частоте ω .

5859. Период T определяется из уравнения $a_1 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{Ta_1} + a_2 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_2}{Ta_2} = 0$.

$$5862. u = \frac{-gx^2}{2a^2} + \frac{glx}{a^2} - \frac{16gl^2}{a^2\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

$$5869. u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi.$$

$$5870. u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\mu_n \xi}{l} d\xi,$$

$p = \frac{hl}{k}$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \mu = -\gamma \mu$, $\gamma = \frac{k}{lh}$.

$$5871. u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n}{l} x + p \sin \frac{\mu_n}{l} x}{p(p+2) + \mu_n^2} \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{l^2} t} \int_0^l f(\xi) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n \xi}{l} + p \sin \frac{\mu_n \xi}{l} \right) d\xi \right), \\ p = \frac{hl}{\xi},$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}$.

$$5872. u(x, t) = e^{-bt} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) e^{-n^2 a^2 t} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

$$5873. u(x, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2}{R^2} t} \sin \frac{n\pi r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{n\pi \rho}{R} d\rho.$$

$$5874. u(x, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} \sin \frac{\mu_n r}{R} \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} d\rho, \\ p = HR - 1,$$

где через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначены положительные корни уравнения $\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0$.

$$5875. u(r, t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 (f(\rho) + tF(\rho)) d\rho + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a\mu_n t}{R} \right) \frac{\sin \frac{\mu_n t}{R}}{r}, \\ a_n = \frac{2}{R} \left(1 + \frac{1}{\mu_n^2} \right) \int_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} d\rho, \\ b_n = \frac{2}{a\mu_n} \left(1 + \frac{1}{\mu_n^2} \right) \int_0^R \rho F(\rho) \sin \frac{\mu_n \rho}{R} d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

$$5876. u(x, t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}} \right)}{J_1^2(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n a t}{2\sqrt{l}} \int_0^l f(\xi) J_0 \left(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}} \right) d\xi,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни трансцендентного уравнения $J_0(x) = 0$ ($J_0(x)$ и $J_1(x)$ — бesselовы функции нулевого и первого порядка).

$$5877. u(r, t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R (f(\rho) + tF(\rho)) \rho d\rho + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a\mu_n t}{R} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right), \\ a_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho, \\ b_n = \frac{2}{a R \mu_n J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_1(x) = 0$.

$$5878. u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{a\mu_n t}{R} + b_n \sin \frac{a\mu_n t}{R} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right), \\ a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho, \\ b_n = \frac{2}{R a \mu_n J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_n \rho}{R} \right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$5879. u(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} t} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$5880. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$5881. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $J_1(x) = 0$.

$$5882. u(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_n h}{R}} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\left(1 + \frac{h^2 R^2}{\mu_n^2}\right) J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho,$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ обозначают положительные корни уравнения $x J_1(x) - h_1 R J_0(x) = 0$.

$$5883. u(r) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{h} \frac{J_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)}{J_0\left(\frac{n\pi R}{h}\right)} \int_0^h f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{h} d\xi.$$

$$5884. u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-a^2 \pi^2 \left(\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2} \right) t} \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} \times \right. \\ \left. \times \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy \right).$$

$$5885. u(x, y, z, t) = \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m}}{\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi n \right)} \times \right. \\ \times \left(\operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi (n - z) \right) \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy + \right. \\ \left. \left. + \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi z \right) \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy \right) \right).$$

$$5886. u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{j\pi}{l} x \cdot \sin \frac{k\pi}{m} y \times \right. \\ \times \left(\cos \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi a t \right) \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy + \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin \left(\sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}} \pi a t \right)}{a\pi \sqrt{\frac{j^2}{l^2} + \frac{k^2}{m^2}}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{j\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{m} dx dy \right) \right).$$

$$5887. u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}} d\xi.$$

$$5888. u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left(e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2}{a^2 t}} - e^{-\frac{1}{4} \frac{(x+\xi)^2}{a^2 t}} \right) d\xi + \\ + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\eta) \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2}{a^2(t-\eta)}}}{(t-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\eta.$$

$$5889. u(x, y, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} d\xi d\eta.$$

$$5890. u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \times \\ \times \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \left(e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} - e^{-\frac{1}{4} \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{a^2 t}} \right) d\eta d\xi + \\ + \frac{x}{4\pi a^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta, \xi) \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{x^2 + (y+\eta)^2}{a^2(t-\xi)}}}{(t-\xi)^2} d\eta d\xi.$$

$$5891. u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\xi d\eta d\zeta.$$

$$5892. u(x, t) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \sqrt{2n(2n-1)} at + b_n \sin \sqrt{2n(2n-1)} at \right) P_{2n-1} \left(\frac{x}{l} \right),$$

где

$$a_n = \frac{4n-1}{l} \int_0^l f(\xi) P_{2n-1} \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi,$$

$$b_n = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)}al} \int_0^l F(\xi) P_{2n-1} \left(\frac{\xi}{l} \right) d\xi$$

($P_k(x)$ — многочлен Лежандра с индексом k).

5894. $u(r, \theta) = A_0 P_0(\cos \theta) + A_1 r P_1(\cos \theta) + \dots + A_n r^n P_n(\cos \theta) + \dots$ при $r < R$,

$u(r, \theta) = \frac{B_1}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{B_2}{r^2} P_1(\cos \theta) + \dots + \frac{B_{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \dots$ при $r > R$.

5895. $v(r, \theta) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) - \dots \right)$ при

$r < R$, $v(r, \theta) = \frac{E}{R} \left(\frac{R}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{r} \right)^5 P_4(\cos \theta) - \dots \right)$ при $r > R$.

$$\mathbf{5896.} \quad u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{r}{R} \right)^m P_m(\cos \theta)$$

при $r < R$,

$$u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} P_m(\cos \theta)$$

при $r > R$.

$$\begin{aligned} \mathbf{5897.} \quad v(r, \theta) = & \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \right. \\ & \left. + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^k \left(\frac{r}{R} \right)^{2k+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} (4k+3) P_{2k+1}(\cos \theta) + \dots \right) \end{aligned}$$

при $r < R$,

$$\begin{aligned} v(r, \theta) = & \frac{v_1 + v_2}{2} \frac{R}{r} + \frac{v_1 - v_2}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_1(\cos \theta) - \right. \\ & \left. - \frac{7}{8} \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{R}{r} \right)^6 P_5(\cos \theta) - \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^k \left(\frac{R}{r} \right)^{2k+2} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} (4k+3) P_{2k+1}(\cos \theta) + \dots \right) \end{aligned}$$

при $r > R$.

$$5898. u(r, \theta) = MHR \left(\frac{1}{4HR} + \frac{1}{HR+1} \frac{1}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{HR+2} \frac{5}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{HR+2k} \frac{(-1)^{k-1} 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)(4k+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k+2)} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} P_{2k}(\cos \theta) + \dots \right)$$

при $0 \leq \theta \leq \pi$ и $r \leq R$.

$$5899. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a \lambda_n^2 t + b_n \sin a \lambda_n^2 t) X_n(x), \\ a_n = \frac{4\lambda_n^4 \int_0^l f(x) X_n(x) dx}{l (X_n''(l))^2}, \quad b_n = \frac{4\lambda_n^2 \int_0^l F(x) X_n(x) dx}{al (X_n''(l))^2},$$

где $u|_{t=0} = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x)$.

5906. $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \dots, \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра.

5907. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1), \dots$. Вообще $\sqrt{\frac{2^{2n-1}}{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \sqrt{\frac{2^{2n-1}}{\pi}} T_n(x)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева.

5908. $1, -x+1, \frac{1}{2}(x^2-2x+1), \dots$ Вообще $\frac{1}{n!}L_n(x)$, где $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ — многочлен Лагерра. Проверить последнее указание.

5909. $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}, \dots$ Вообще $\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} n!^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\pi}} H_n(x)$, где $H_n(x) = (-1)^n \times$
 $\times e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ — многочлен Эрмита.

5910. $y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 + 1$, $u(x) = -1 + \int_0^x (t-2x)u(t) dt$. 5911. $u(x) =$

$= \frac{1}{2} \sin 2x$. 5912. $y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 - x$, $u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t) dt$.

5913. $y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2 + x$, $u(x) = 5 - 6x + \int_0^x (6t - 6x + 5) dt$.

5914. $y = \int_0^x \int_0^x u(x) dx^2$, $u(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)u(t) dt$. 5915. $\varphi(x) =$

$= x$. 5916. $\varphi(x) = -2 + cx$. 5917. $\varphi(x) = -\frac{5}{2}x$. 5918. $\varphi(x) = \frac{9}{7}x - 2$.

5919. $D(\lambda) = 1 - \lambda \|g\|^2$, $R\left(\frac{x}{y} \middle| \lambda\right) = \frac{g(x)g(y)}{1 - \lambda \|g\|^2}$, $\lambda_1 = \|g\|^{-2}$, $\varphi_1(x) =$

$= \frac{g(x)}{\|g\|}$, $\varphi(x) = F(x) + \frac{\lambda g(x)}{1 - \lambda \|g\|^2} \int_a^b g(y) F(y) dy$, где $\|g\| = \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$.

5920. $D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b g(x) dx$, $R\left(\frac{x}{y} \middle| \lambda\right) = \frac{g(y)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx}$,

$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, $\varphi(x) = F(x) + \frac{\lambda}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx} \cdot \int_a^b g(y) F(y) dy$. 5921. $D(\lambda) = 1 -$

$-\lambda \int_a^b g(x) dx$, $R\left(\frac{x}{y} \middle| \lambda\right) = \frac{g(x)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx}$, $\varphi_1(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}}$,

$\varphi(x) = F(x) + \frac{\lambda g(x)}{1 - \lambda \int_a^b g(x) dx} \int_a^b F(y) dy$. 5922. $\varphi(x) = Ce^x$. 5923. $\varphi(x) = x^2 -$

$-\frac{1}{4}x - \frac{5}{12}$. 5924. $\varphi(x) = F(x) + \frac{2\lambda}{2-\lambda} \int_0^1 y F(y) dy$, если $\lambda \neq 2$, $\varphi(x) = F(x) +$

$+ C$, если $y = 2$ и $\int_0^1 y F(y) dy = 0$. 5925. $\frac{\cos(\sqrt{\lambda}(1-y)) \sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}$, $x < y$,

$\frac{\cos(\sqrt{\lambda}(1-x)) \sin(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}$, $x > y$, $D(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda}$. 5926. $D(\lambda) = 1 - c(b-a)\lambda$,

$D\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda\right) = c$, $\lambda_1 = \frac{1}{\alpha(b-a)}$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. **5927.** Определитель Фредгольма
 $D(\lambda) = 1 - \lambda - \frac{1}{12}\lambda^2$, $\lambda = -6 \pm 4\sqrt{3}$, $\varphi(x) = \pm x\sqrt{3} + 1$. **5928.** $\varphi(x) =$
 $= 18x^2 + 12x + 9$. **5929.** $D(\lambda) = (1 - \lambda\pi)^2$, $D\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda\right) = (1 - \lambda\pi)(\sin x \sin y +$
 $+ \sin 2x \sin 2y)$, $D\left(\frac{x_1, x_2}{y_1, y_2}\middle|\lambda\right) = (\sin x_1 \sin 2x_2 - \sin x_2 \sin 2x_1)(\sin y_1 \sin 2y_2 -$
 $- \sin y_2 \sin 2y_1)\lambda$. Фундаментальные функции, отвечающие числу $\lambda = \frac{1}{\pi}$:
 $\sin x$ и $\sin 2x$. **5930.** $D(\lambda) = 1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2$, $D\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda\right) = \cos(x+y) + \frac{\lambda\pi \cos(x-y)}{2}$.
 Фундаментальные функции — $\sin x$ и $\cos x$.
 $\varphi(x) = F(x) - \frac{\lambda \sin x}{\lambda + \frac{\pi}{2}} \int_0^\pi F(x) \sin x dx - \frac{\lambda \cos x}{\lambda - \frac{\pi}{2}} \int_0^\pi F(x) \cos x dx$. **5931.** $\varphi(x) =$
 $= 1 - \frac{2 \sin x}{1 + \frac{\pi}{2}}$. **5932.** $\frac{xy - \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{\lambda}{12}}$; фундаментальные функции: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 =$
 $= \left(x - \frac{1}{2}\right) \sqrt{12}$, $\lambda_1 = 12$. **5933.** $\varphi(x) = 2x$.
5934. $\frac{x^2 + y^2 + \left(x^2 y^2 - \frac{x^2 + y^2}{3} + \frac{1}{5}\right)\lambda}{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{4}{45}\lambda^2}$. **5936.** $\frac{1 + x + y + \left(\frac{1}{3} - \frac{x+y}{2} + xy\right)\lambda}{1 - 2\lambda - \frac{1}{12}\lambda^2}$.
5935. $\frac{x^2 y + y^2 x + xy\left(\frac{xy}{3} - \frac{x+y}{4} + \frac{1}{5}\right)\lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{240}\lambda^2}$. **5937.** $\frac{x - y - \lambda\left(\frac{1}{3} - \frac{x+y}{2} + xy\right)}{1 + \frac{\lambda^2}{12}}$.
5938. $\varphi(x) = e^{xi\sqrt{2\lambda-1}}$. **5939.** $\lambda = \sqrt{12}$, $\varphi_1 = 1$, $\psi_1 = \sqrt{12}\left(\frac{1}{2} - x\right)$;
 $\varphi_2 = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $\psi_2 = 1$. **5940.** $\varphi(x) = A_1 \cos \pi x + A_2 \sin \pi x$, $\psi(x) =$
 $= A_2 \cos \pi x - A_1 \sin \pi x$. **5941.** $G = -\ln \xi$, $x \leq \xi$, $G = -\ln x$,
 $x \geq \xi$, $y(x) = +\lambda_n \int_0^1 \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi$, $y(x) = J_0(x\sqrt{\lambda_n})$, где λ_n — корень
 уравнения $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$. **5942.** $G = \frac{1}{2n} \left(-x\xi\right)^n + \left(\frac{x}{\xi}\right)^n$, $x \leq \xi$, $G =$
 $= \frac{1}{2n} \left(-x\xi\right)^n + \left(\frac{\xi}{x}\right)^n$, $x \geq \xi$; $y(x) = +\lambda_n \int_0^1 \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi = J_n(x\sqrt{\lambda_n})$,
 где λ_n — корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$. **5943.** $G = \frac{1}{2m} \left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{m}{2}}$,
 $x \leq \xi$; $G = \frac{1}{2m} \left(\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\frac{m}{2}}$, $x \geq \xi$, $y(x) = +n(n+1) \int_{-1}^{+1} G(x, \xi) y(\xi) d\xi =$
 $= \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра. **5944.** $G =$
 $= -\frac{1}{2} \ln((1-x)(1+\xi)) + \ln 2 - \frac{1}{2}$; $x \leq \xi$; $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $y(x)n =$
 $= (n+1) \int_{-1}^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi = P_n(x)$. **5945.** $G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2 + \xi^2}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \times$
 $\times \int_{\xi}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, $x \leq \xi$; $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $y(x) = +\mu \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi) y(\xi) d\xi$,
 $\mu = 2n + 2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). **5946.** $G = e^{x+\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, $G(x, \xi) =$
 $= G(\xi, x)$, $y(x) = +\mu \int_0^{\infty} \xi G(x, \xi) y(\xi) d\xi$, $\mu = n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).
5947. $G(\xi, x) = \xi(1-x)$, если $\xi < x$, $G(\xi, x) = x(1-\xi)$, если $\xi > x$. $y(x) =$
 $= k^2 \int_0^1 G(\xi, x) y(\xi) d\xi - \int_0^1 f(\xi) G(\xi, x) d\xi$. **5948.** $G(x, \xi) = \frac{(1+hx)(1+H(1-\xi))}{h+H+Hh}$;
 $x < \xi$, $G(x, \xi) = G(\xi, x)$; $y(x) = k^2 \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi - \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi$.
5949. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$, $\varphi_n = C_n \left(\operatorname{tg} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2} \sin \sqrt{\lambda_n} x + \cos \sqrt{\lambda_n} x\right)$, $\varphi'(0) +$
 $+ \varphi'(1) = 0$, $\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi'(0) = 0$. **5950.** $G(\xi, x) = \xi \left(1 - \frac{h}{1+h} x\right)$, если

$\xi < x$, $G(\xi, x) = x \left(1 - \frac{h}{1+h} \xi\right)$, если $\xi > x$, $y(x) = k^2 \int_0^1 G(\xi, x) y(\xi) d\xi - \int_0^1 f(\xi) G(\xi, x) d\xi$. **5951.** $y(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k_n^2 - k^2} \cdot \frac{2h(\cos k_n - 1)}{k_n(h + \cos^2 k_n)} \sin k_n x$.

5955. $\lambda_n = \frac{a_n^2}{R^2}$, $\varphi_n(l) = J_0\left(\frac{\sigma_n l}{R}\right)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а a_n — ее корни.

$$\mathbf{5956.} \quad V(a) = \lambda \times \int_0^R \rho^2 G(\rho, a) V(\rho) d\rho, \quad G(\rho, a) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}, & a < \rho; \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{R}, & a > \rho; \end{cases}$$

$$V_k(a) = \sqrt{\frac{2}{R}} \cdot \frac{\sin\left(k\pi \frac{a}{R}\right)}{a}, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^2.$$

$$\mathbf{5957.} \quad V(a) = F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - 1} \cdot \int_0^R \rho^2 F(\rho) V_n(\rho) d\rho V_n(a),$$

где λ_n и $V_n(a)$ — характеристические числа и фундаментальные функции задачи **5956**.

$$\mathbf{5958.} \quad V(a) = \lambda \int_0^R \rho^2 G(\rho, a) V(\rho) d\rho, \quad G(\rho, a) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & a < \rho; \\ \frac{1}{a}, & a > \rho. \end{cases}$$

$$V_n(a) = \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} \frac{a}{R}\right)}{a}, \quad \lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2R}\right)^2.$$

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5961. $f_y = 0$, $f_{yy} > 0$. 1) $y = x^2$; 2) $y = -\frac{x}{2}$; 3) верхняя полуокружность $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$; 4) дуга параболы $y = -\sqrt{2ax}$. **5962.** Интеграл не зависит от пути интегрирования и равен $I = x_2 y_2^2 - x_1 y_1^2$. **5963.** Минимум $I = 0$ при $y = -\frac{x}{2}$, если $x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 = 0$; в противном случае экстремума не существует. **5964.** Минимум интеграла для прямой $y = 0$, если $y_1 = y_2 = 0$; в противном случае экстремума нет. **5965.** Окружность с центром на оси OX , проходящая через заданные точки. Через любые две точки, лежащие в верхней полуплоскости, проходит одна и только одна экстремаль. Если назвать эти экстремали прямыми линиями, а значение интеграла $I = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, взятого по этой экстремали, назвать расстоянием между точками A и B , то получится модель геометрии Лобачевского в полуплоскости $y > 0$. **5966.** Экстремали параболы $y = \frac{(x-\beta)^2}{4\alpha} + \alpha = \alpha \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2\right)$, получающиеся одна из другой преобразованиями подобия и переноса параллельно оси OX . Через данные две точки могут проходить две экстремали, одна или ни одной. **5967.** $x = \alpha \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2n} - \alpha^2}} + \beta$. **5968.** $r^{n+1} \cos((n+1)(\theta - \alpha)) = \beta$. Две точки $M_1(r_1, \theta_1)$ и $M_2(r_2, \theta_2)$ можно соединить непрерывной экстремалью только в том случае, если $\theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{n+1}$.

5969. Линия действия силы проходит через начало координат, орбитой точки является логарифмическая спираль. **5971.** Дуга окружности. **5972.** Дуга окружности, проходящей через точки O , A и B . **5973.** Сфера. **5974.** $F(x, y, y') = \int_0^{y'} (y' - t)\Phi(t, y - xt) dt + y' \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}$, где Φ и μ — произвольные функции своих аргументов. **5975.** $F(x, y, y') = \int_0^u (u - \alpha)\Phi\left(\alpha, \frac{y}{x} - \alpha x\right) d\alpha + y' \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}$, где $u = \frac{xy' - y}{x^2}$, а Φ и ψ — произвольные функции своих аргументов. **5976.** $y = 7 - \frac{4}{x}$ дает сильный минимум, ибо полное приращение интеграла ΔI положительно. **5978.** $y = \frac{3}{2} \frac{\ln x}{\ln 2} - \frac{x-1}{2}$ дает сильный минимум, ибо полное приращение интеграла ΔI положительно. **5979.** $y = x - 1$, слабый минимум. **5981.** Если $|y_1| \geq \pi$, то нет экстремали, соединяющей заданные точки, и минимума интеграла не существует. Если $|y_1| < \pi$, то среди экстремалей $e^{(x-C_1)} \cos(y - C_2) = 1$ есть одна, проходящая через заданные точки; эта экстремаль дает сильный минимум. **5982.** Касательная прямая к характеристической кривой $U = y'^2 - yy'^3$ в точке $(y' = 0, U = 0)$ пересекает характеристическую кривую U в точке с абсциссой $\frac{1}{y}$. В любом соседстве экстремали функция Вейерштрасса E может менять знак, условие Вейерштрасса не выполнено. **5983.** Экстремали $y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x-\beta}{\alpha}$; уравнение Якоби $\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2}{\alpha} \operatorname{th} \frac{x-\beta}{\alpha} \frac{du}{dx} + \frac{1}{\alpha^2} u = 0$; его решения $u_1 = \operatorname{sh} v$, $u_2 = \operatorname{ch} v - v \operatorname{sh} v$, где $v = \frac{x-\beta}{\alpha}$. Если x и x_0 ($v_0 = \frac{x_0-\beta}{\alpha}$) — сопряженные критические точки, то $\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v_0 - \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v_0 + (v - v_0) \operatorname{sh} v \operatorname{sh} v_0 = 0$. **5984.** $y = \alpha \sin(3x + \beta)$, где постоянные α и β определяются из условия, чтобы кривая проходила через заданные точки, дает сильный минимум, если $|x_2 - x_1| < \frac{\pi}{3}$; если $|x_2 - x_1| > \frac{\pi}{3}$, то минимума нет. **5985.** $y = \operatorname{sh} ax + b$; через две заданные точки проходит всегда одна и только одна экстремаль. Условия Лежандра и Якоби выполняются, условие Вейерштрасса не выполняется, слабый минимум. **5986.** Экстремали — параболы $y = c(x + a)^2$; через две точки, лежащие с одной стороны от оси OX , проходят две экстремали; через две точки, лежащие с разных сторон от оси OX , — ни одной; если обе точки лежат в верхней полуплоскости OXY ($y > 0$), то дуга одной из экстремалей, соединяющих две заданные точки, не содержит точки оси OX ; на этой дуге условия Лежандра и Якоби выполняются, условие Вейерштрасса не выполняется; эта дуга дает поэтому слабый минимум. **5987.** Уравнение экстремалей имеет вид $y = \alpha \varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)$. Если рассматривать пучок экстремалей, проходящий через точку $A(x_0, y_0)$, то β будет функцией от α , определенной уравнением $y_0 = \alpha \varphi\left(\frac{x_0-\beta}{\alpha}\right)$. В сопряженной критической точке B : $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{y - (x-\beta-\alpha\beta')y'}{\alpha} = 0$, откуда $\beta + \alpha\beta' = x - \frac{y}{y_0}$, т. е. $\beta + \alpha\beta'$ есть абсцисса точки пересечения касательной к экстремали в точке B с осью OX . С другой стороны, в точке A : $\frac{\partial y_0}{\partial \alpha} = 0$, откуда $\beta + \alpha\beta' = x_0 - \frac{y_0}{y_0}$, т. е. $\beta + \alpha\beta'$ есть в то же время абсцисса точки пересечения касательной к экстремали в точке A с осью OX . **5988.** 1) $y = c \operatorname{ch} \frac{x-\xi}{c}$. 2) Через заданные точки проходят две экстремали $y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c}$, если $b > a \operatorname{tg} \alpha$,

где α — решение уравнения $\sin \alpha = \operatorname{th} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, а c есть решение уравнения $\frac{b}{c} = \operatorname{ch} \frac{a}{c}$. Если $b = a \operatorname{tg} \alpha$, то через заданные точки проходит только одна экстремаль и ни одной, если $b < a \operatorname{tg} \alpha$. 3) Для нахождения сопряженной с M_1 точки на экстремали $M_1 M_2$ имеем уравнение $\frac{x}{c} - \operatorname{cth} \frac{x}{c} = -\frac{a}{c} + \operatorname{cth} \frac{a}{c}$. При этом $x > a$, если $\frac{a}{c} < \operatorname{cth} \frac{a}{c}$, и $x < a$, если $\frac{a}{c} > \operatorname{cth} \frac{a}{c}$. 4) Минимум, и притом сильный, при $b > a \operatorname{tg} \alpha$ дает та экстремаль, у которой $\frac{a}{c} < \operatorname{cth} \frac{a}{c}$, т. е. та из цепных линий, которая выше. **5989.** Дуга циклоиды $x = c(2\psi - \sin 2\psi)$, $y = c(1 - \cos 2\psi)$, не содержащая между O и M точки возврата. Она дает сильный минимум. **5990.** Экстремали-циклоиды: $x = c_2 + c_1(2\psi - \sin 2\psi)$, $y + h = c_1(1 - \cos 2\psi)$. Существует только одна экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям и не содержащая между точками O и M точек возврата. Она дает сильный минимум. **5991.** а) Экстремаль $y = \alpha \frac{(1+q^2)^2}{q}$; $x = \alpha \left(q^2 + \frac{3}{4}q^4 - \ln q \right) + \beta$. Она состоит из двух ветвей, уходящих в бесконечность. Условие Лежандра выполняется только на одной ветви, вогнутой в сторону отрицательной оси OY (при $q \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$). б) На той же ветви кривой выполняется и условие Якоби, ибо абсцисса точки пересечения касательной к экстремали с осью OX убывает, если двигаться по ветви в сторону возрастающих q (см. задачу 5987). в) Условие Вейерштрасса на рассматриваемой ветви не выполнено. Поэтому минимум — слабый. **5992.** $y = x^3$ дает сильный минимум, ибо полное приращение интеграла $\Delta I = \int_{-1}^{+1} (x^2 \eta'^2 + 12\eta^2) dx$ всегда положительно. **5993.** Общее решение уравнения Эйлера $y = C_1 \ln x + C_2$; непрерывной экстремали, соединяющей заданные точки, не существует. **5994.** Не выполнено условие Вейерштрасса, что сразу видно из рассмотрения характеристической кривой. **5995.** Интегральная кривая уравнения Эйлера $y = \frac{1}{x}$ решением служить не может, так как является разрывной линией. Точная нижняя граница интеграла есть нуль. **5996.** Точная нижняя граница интеграла равна нулю. Непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, дающей минимум интеграла, не существует. **5997.** $y = \sqrt[3]{x}$ дает сильный минимум. **5998.** Если расстояние между заданными точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) меньше $2R$, то меньшая из двух дуг окружности, проходящей через заданные точки, дает сильный максимум. **5999.** Уравнение геодезических линий $\theta = \alpha + \frac{1}{2}a \int \sqrt{\frac{2f+f'^2}{2f-a^2}} \frac{dz}{f}$, $r^2 = 2f(z)$. Для двух сопряженных критических точек $M_1(r_1, \theta_1, z_1)$ и $M'_1(r'_1, \theta'_1, z'_1)$ на геодезической линии $M_1 M_2$ имеет место равенство $\int_{z_1}^{z'_1} \frac{\sqrt{2f+f'^2}}{\sqrt{(2f-a^2)^3}} dz = 0$ (корень берется на разных промежутках с надлежащим знаком). Дуга $M_1 M_2$ дает сильный минимум, если точка M_2 лежит ближе ближайшей сопряженной с M_1 в направлении $M_1 M_2$ точкой. **6000.** Винтовые линии $\theta = \alpha + \frac{z}{R} \operatorname{ctg} \beta$ дают сильный минимум между любыми двумя своими точками (R, θ_1, z_1) и (R, θ_2, z_2) , равный $\left| \frac{z_2 - z_1}{\sin \beta} \right|$. Между двумя точками можно провести бесчисленное множество геодезических линий, а именно: $\operatorname{ctg} \beta = \frac{R}{z_2 - z_1} (\theta_2 - \theta_1 + 2p\pi)$, где p — любое целое число. **6001.** $r \sin((\theta - \beta) \sin \alpha) = C$; если $C \neq 0$, то сопряженных точек нет, и геодезическая линия дает сильный минимум интеграла между двумя

своими точками. **6002.** Дуги больших кругов. Сопряженными точками являются диаметрально противоположные точки. Дуга большого круга, меньшая полуокружности, дает сильный минимум. **6003.** $\theta = \alpha - \arctg(au) + \frac{a}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}$, где $u = \sqrt{\frac{r^2+1}{r^2-a^2}}$, в частности при $a = 0$ дуги меридианов. Геодезическая линия дает кратчайшее расстояние между двумя точками меридиана всегда, если обе точки лежат по одну сторону от начала координат; если же точки лежат по разные стороны от начала координат, то должно быть выполнено условие

$$\ln(\sqrt{r_1^2+1}+r_1) + \ln(\sqrt{r_2^2+1}+r_2) - \frac{\sqrt{r_1^2+1}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2+1}}{r_2} < 0.$$

6005. $\ln \frac{1+\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{a-r \cos \psi}{(b-r \sin \psi) \cos \psi}$, где ψ — угол, составляемый касательными в концах кривой с осью OX . Эти касательные проходят через центры окружностей. **6006.** $2R \cos(\theta - \bar{\theta}) = x \sin \bar{\theta} - y \cos \bar{\theta}$, где θ и $\bar{\theta}$ — соответственно углы с осью OX касательных к экстремали и к трансверсали в точке (x, y) . **6007.** $F(x, y, y') = G(x, y)\sqrt{1+y'^2}$. **6008.** $F(x, y, y') = G(x, y)\sqrt{1+y'^2} e^{\pm \arctg y'}$. **6009.** $y = \frac{y_1 \sin x}{\sin x_1}$, где x_1 определяется из уравнения $3(x_1 - 2) - \sin 2x_1 = 0$, $y_1 = \sqrt[3]{2-x_1}$; $x_1 = 1,83\dots$ Условие Якоби выполнено. Интеграл имеет сильный минимум. **6010.** Дуга циклоиды $x = \frac{c}{2(\pi-\beta)}(2\psi - \sin 2\psi)$, $y = \frac{c}{2(\pi-\beta)}(1 - \cos 2\psi)$ дает сильный минимум.

6011. Экстремали суть полуокружности $y = \sqrt{a^2 - (x - \beta)^2}$ с центрами на оси OX . Пучок экстремалей через начало координат есть $y = \sqrt{x(2a - x)}$.

Поле есть верхняя полуплоскость; $p(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$. **6014.** Уравнение Гамильтона–Якоби $(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = \frac{1}{y^2}$; экстремали — окружности с центром на

оси OX $y = \sqrt{\beta^2 - (x - \alpha)^2}$. Экстремали, трансверсально (в данном случае ортогонально) пересекающие полюсь OY , суть концентрические полуокружности $y = \sqrt{\beta^2 - x^2}$, заполняющие полуплоскость $y > 0$. Условие Лежандра выполнено — всюду $F_{y'y'} > 0$. Эквидистантные кривые $\frac{x}{y} = \text{const}$. Дуга окружности с центром в начале координат, проходящей через точку B , дает сильный минимум. **6015.** Параболы $y^2 = Cx$. Уравнение Гамильтона–Якоби есть $4\frac{\partial W}{\partial x} +$

$+(\frac{\partial W}{\partial y})^2 = 0$. **6016.** $xG(\frac{y}{x}) = \text{const}$. **6017.** Эллипсы $3x^2 - 8xy + 6y^2 = \text{const}$.

6018. $W = \frac{1}{3}\sqrt{y-x}(x+2y) = \text{const}$. **6019.** Уравнение Гамильтона–Якоби $(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = G(y)^2$. Его решение: $W = \alpha x + \int_{y_0}^y \sqrt{G(y)^2 - \alpha^2} dy + \beta$.

Экстремали $x - \alpha \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{G(y)^2 - \alpha^2}} = \gamma$. **6020.** Гиперболы $x^2 - \frac{1-\beta^2}{\beta}xy - y^2 =$
 $= \alpha \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta} \right)^2$. **6021.** Уравнение Гамильтона–Якоби $(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + (\frac{\partial W}{\partial y})^2 = \frac{1}{2gy}$; его решение:

$$W\sqrt{2g} = \alpha x + \sqrt{y(1 - \alpha^2 y)} + \frac{1}{\alpha} \arcsin \alpha \sqrt{y} + \gamma.$$

Для кривых, проходящих через начало, $\gamma = 0$. Лучи — циклоиды: $x + \frac{1}{\alpha}\sqrt{y(1 - \alpha^2 y)} - \frac{1}{\alpha^2} \arcsin \alpha \sqrt{y} = 0$. Определяя отсюда α и подставляя в $W = \text{const}$, получим уравнение волн и вместе с тем уравнение синхрон: $W\sqrt{2g} = 2\alpha x + 2\sqrt{y(1 - \alpha^2 y)} = \text{const}$. **6022.** Уравнение Гамильтона–Якоби

$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + 2(gy - h) = 0$. Пусть $h = ag$; тогда $\frac{W}{\sqrt{2g}} = \beta x + \int \sqrt{a - \beta^2 - y} dy = \beta x - \frac{2}{3}(a - \beta^2 - y)^{\frac{3}{2}} + \gamma$. Экстремали — параболы $y = a - \beta^2 - \frac{(x-a)^2}{4\beta^2}$. Экстремали, проходящие через начало: $y = -\frac{x^2}{4\beta^2} + \frac{\sqrt{a-\beta^2}}{\beta}x$. Если точка брошена из O под углом α к оси Ox со скоростью $v_0 = \sqrt{2h}$, то $a = \frac{v_0^2}{2g}$; $\frac{\sqrt{a-\beta^2}}{\beta} = \operatorname{tg} \alpha$, $\beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{2g}}$, и получаются параболы $y = -\frac{g^2}{2v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha$. Огибающая этих парабол, граница поля, — тоже парабола. Если конечная точка B лежит внутри этой параболы, то дуга экстремальной параболы OB , не касающаяся границы поля, дает сильный минимум «действию». Хорда, соединяющая точку O с сопряженной критической точкой на экстремали OB , проходит через фокус этой экстремали. **6023.** Цепная линия. **6025.** Уравнение Гамильтона—Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = h - \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

$$W = \int \sqrt{\alpha - \frac{kx^2}{2}} dx + \int \sqrt{h - \alpha - \frac{ky^2}{2}} dy + \gamma.$$

Экстремали $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{2k}}$ будут эллипсы:

$$\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}x = \sin(\theta + \beta), \quad \sqrt{\frac{k}{2(h-\alpha)}}y = \sin \theta$$

или

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{h-\alpha} - \frac{2xy}{\sqrt{\alpha(h-\alpha)}} \cos \beta = \frac{2}{k} \sin^2 \beta.$$

6026. $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)+\alpha}} - \int \frac{dy}{\sqrt{g(y)-\alpha}} = \beta$. **6028.** Экстремали, пересекающие параболу трансверсально, являются нормальными к параболе. Поле экстремалей имеет границей эволюту параболы. Если отрезок нормали AB (где B — точка на параболе) таков, что центр кривизны параболы в точке B лежит на AB , то AB не является минимальным расстоянием до параболы (если только точка A не совпадает с точкой возврата эволюты параболы). Если же центр вне отрезка AB , то AB дает сильный минимум интеграла $\int ds$. Если вдобавок AB не пересекает ось параболы, то AB дает кратчайшее расстояние от A до любой точки параболы. **6029.** $y = \frac{x^2-3x+1}{2}$ дает сильный минимум. **6030.** Отрезок AB прямой, проходящей через центры данных окружностей, дает сильный минимум интеграла, если между точками A и B не лежат центры заданных окружностей. **6031.** Заданное уравнение Гамильтона—Якоби соответствует задаче о минимуме интеграла $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx$. **6032.** $f(x, y, y') = \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{1+y'^2}$. **6033.** $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0$, $f_{y''}(M_1) = f_{y''}(M_2) = 0$. **6035.** а) $y = x(x-1)((a+b)x-a)$ и б) $y = 0$. **6036.** $y = \frac{(n-1)^2}{n(2n-1)\alpha^2}(\alpha x + \beta)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \delta$;

при $n = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{\alpha^2} \ln(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$, при $n = 1$ полный дифференциал.
6037. $\varphi(x, y, y') = 0$,

$$\frac{f - y' \left(f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) - y'' f_{y''}}{\varphi_x} = \frac{f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''}}{\varphi_y} = \frac{f_{y''}}{\varphi_{y'}}.$$

6038. $y'(x_2)$, $h(x, y) = 0$, $\frac{f - y' \left(f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right)}{h_x} = \frac{f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''}}{h_y}$. **6039.** Циклонда:

$$\begin{aligned} x &= h + a(2\psi + \sin 2\psi) - b \cos 2\psi, \\ y &= k + b(2\psi - \sin 2\psi) - a \cos 2\psi. \end{aligned}$$

При этом постоянные определяются из начальных условий. Для примера: $x = \frac{1}{2} - \frac{2\psi + \sin 2\psi}{\pi + 2}$; $y = \frac{\cos 2\psi}{\pi + 2}$. **6040.** Полная арка циклоиды, основанием которой служит отрезок $M_1 M_2$:

$$\begin{aligned} x &= \pi + 2\psi + \sin 2\psi & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ y &= -1 - \cos 2\psi \end{aligned}$$

6041. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0$. **6042.** $u = x^2 y'' - x y' + x y^2 + x^2 + C$. **6043.** $\theta = 0$ дает сильный минимум, пока $l < \pi \sqrt{\frac{JE}{P}}$; $P_0 = \frac{\pi^2 JE}{l^2}$. При $P > P_0$ экстремали — упругие линии $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \psi$, где

$$s = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}}; \quad l = \sqrt{\frac{JE}{P}} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \psi}}.$$

6044. $\theta = 0$ дает сильный минимум, пока $l < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{JE}{P}}$; $P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{JE}{l^2}$. **6045.** $P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$. **6046.** $P_0 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$. **6047.** $P_0 = \frac{\mu^2 EJ}{l^2}$, где $\mu = 4,49 \dots$ — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$. **6048.** P_0 равно наименьшему из двух чисел $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ и kl ; в последнем случае балка при потере устойчивости остается прямолинейной, прогибается только опора. **6052.** $S(x, y, z) = 0$, $\frac{f - y' f_{y'} - z' f_{z'}}{S_x} = \frac{f_{y'}}{S_y} = \frac{f_{z'}}{S_z}$. **6053.** $f - y' f_{y'} - z' f_{z'} + F'(x) f_y + G'(x) f_{z'} = 0$. **6057.** $\sum_{i=1}^n g_{ih} \frac{d^2 x}{ds^2} + \sum_{i,h=1}^n \left[\frac{ik}{h} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_h}{ds} = 0$, ($h = 1, 2, \dots, n$), где $\left[\frac{ik}{h} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_h} \right)$ — символы Кристоффеля первого рода. **6058.** Экстремали

$$y = c \cos \alpha \operatorname{ch} \frac{x + \beta}{c}, \quad z = c \sin \alpha \operatorname{ch} \frac{x + \gamma}{c}.$$

Условие Лежандра выполняется; условие Якоби требует, чтобы при $x_1 < x_2$ было $x_2 \leq x$, где x есть наименьшее из удовлетворяющих неравенству $x > x_1$ решение уравнения.

$$\frac{x - x_1}{c} \left(\cos^2 \alpha \operatorname{sh} \frac{x_1 + \beta}{c} \operatorname{sh} \frac{x + \beta}{c} + \sin^2 \alpha \operatorname{sh} \frac{x_1 + \gamma}{c} \operatorname{sh} \frac{x + \gamma}{c} \right) + \operatorname{sh} \frac{x - x_1}{c} = 0.$$

6059. Экстремали — эллипсы

$$x = c_1 \sin t, \quad y = c_2 \sin(t + \beta), \quad z = \sqrt{h - c_1^2 - c_2^2} \sin t + \gamma$$

в сопряженных точках касательные к эллипсу взаимно перпендикулярны.

6060. $\sqrt{c^2 + \frac{a^2}{2}}$. **6061.** Ломаная линия, составленная из отрезков прямых $y = x$ и $y = 1$ или из отрезков прямых $y = 0$ и $y = x - 1$, дает абсолютный минимум. Прямая $y = \frac{1}{2}x$ дает слабый максимум. **6062.** Ломаная линия, составленная из прямых $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}(x - 2)$, дает сильный минимум интеграла. **6063.** Экстремали — прямые линии. Если $\left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| < 1$, то существуют два разрывных решения — ломаные линии, составленные двумя отрезками прямых линий, параллельных биссектрисам координатных углов. **6064.** Прямая $y = x \operatorname{tg} \varphi$, соединяющая заданные точки, дает слабый максимум, если $0 < \operatorname{tg} \varphi < \pi$, слабый минимум, если $\pi < \operatorname{tg} \varphi < 2\pi$, и т. д. Ломаная линия, составленная из отрезков прямых, тангенсы углов наклона которых равны $\frac{(4n-1)\pi}{2}$ (n — целое), дает сильный минимум. **6065.** Экстремали — равнобоочные гиперболы с центром в начале координат и прямые, проходящие через начало координат. Если точки A и B расположены так, что угол AOB прямой или тупой, то есть только разрывное решение — пара прямых, соединяющих данные точки A и B с вершиной конуса. Если угол AOB острый, то равнобоочная гипербола, проходящая через точки A и B , дает сильный и притом абсолютный минимум. В этом случае разрывного решения нет. **6066.** Если $\theta_2 = \theta_1$, то единственное решение — прямая M_1M_2 ; если $0 < |\theta_2 - \theta_1| < \frac{\pi}{3}$, то единственное решение есть кривая $r^3 \cos(3\theta + \alpha) = \beta$, соединяющая заданные точки; если $|\theta_2 - \theta_1| \geq \frac{\pi}{3}$, то существует только разрывное решение в виде ломаной M_1OM_2 . **6067.** Искомое разрывное решение состоит из отрезков AC и BD перпендикуляров, опущенных из точек A и B на ось OX , и отрезка CD оси OX . Это разрывное решение является единственным, если через данные точки нельзя провести цепной линии, директрисой которой является ось OX . **6068.** Всегда существует разрывное решение $M_1N_1N_2M_2$, где M_1N_1 и N_2M_2 — дуги цепных линий $y = k \operatorname{ch} \frac{x \pm \beta}{k}$, отвечающие интервалам $-a \leq x \leq -\beta$ и $\beta \leq x \leq a$, где $\beta = a - k \ln \left(\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} \right)$, а N_1N_2 — отрезок прямой $y = k$. Кроме того, через заданные точки могут проходить одна или две непрерывные экстремали. **6069.** Ломаная линия $ACDB$, составленная из отрезка пограничной прямой CD и перпендикуляров, опущенных из точек A и B на пограничную прямую CD , дает сильный минимум. Для соответствующей задачи механики о движении точки под действием силы тяжести полученное решение значения не имеет. **6070.** Искомая минимальная линия составлена из отрезков прямых линий

и дуги параболы $y = x^2$. Согласно условию Эрдмана прямые касательны к параболе; уравнения этих прямых $y = -2x - 1$ и $y = 2x - 1$. **6071.** Уравнение Эйлера приводит к решениям $y = 0$ и $y^2 + (x - \alpha)^2 = a^2$. Поэтому решением являются линии, составленные из полуокружности радиуса a с центром на оси OX в одной из точек $a \leq x \leq b - a$ и двух отрезков пограничной линии $y = 0$, а также прямая $y = 0$. **6073.** Линия $M_1M_0M_2$, которой прямолинейные отрезки M_1M_0 и M_0M_2 образуют с касательной к границе в точке M_0 одинаковые углы. **6074.** Экстремали — параболы $y = \beta - \frac{(x-\alpha)^2}{4\beta}$. Пучок экстремалей, проходящих через начало координат, есть $y = x - \frac{x^2}{a}$. Поле есть область, образованная осью OX и прямой $y = x$. Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$, то имеем сильный максимум, если точка (x_1, y_1) лежит внутри поля. Ломаная линия, составленная из отрезков прямых $y = 0$ и $y - y_1 = x - x_1$, дает абсолютный минимум, так же как ломаная, составленная из отрезков прямых $y = x$ и $y - y_1 = -(x - x_1)$. **6075.** Экстремали — эллипсы $\frac{(x-\beta)^2}{\alpha^2} + y^2 = \alpha^2$ с центрами на оси OX . Пограничные линии: прямая $y = 0$ и параболы $y^2 = \pm 2(x - \gamma)$ (решение уравнения $1 - y^2 y^2 = 0$). Дуги эллипсов дают максимальное значение интеграла. Дуги пограничных парабол и отрезок прямой $y = 0$ дают интегралу его наименьшее значение нуль, образуя разрывное решение, угловые точки которого лежат на прямой $y = 0$. **6076.** Решение состоит из геодезических линий, поскольку они удовлетворяют условию, и из кривых постоянного подъема $\frac{dz}{ds} = k$. В точках перехода геодезические линии также должны иметь подъем k . **6077.** Кратчайшим путем является линия, составленная из дуги пограничного круга радиуса R и отрезка прямой, касательной к этому кругу. **6078.** Если ψ_- и ψ_+ — углы, образованные лучом падения и лучом преломления с нормалью к линии преломления, то $\frac{\sin \psi_-}{\sin \psi_+} = \frac{n_2}{n_1}$. **6079.** $2z(r+t) = 1 - p^2 - q^2$. **6081.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. **6082.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = r + t = 0$. **6083.** $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, $\varphi(x, y) = f(x, y) + g(x - y)$. **6084.** $(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0$; это уравнение выражает, что в каждой точке минимальной поверхности средняя кривизна поверхности равна нулю, т. е. главные радиусы кривизны равны по величине и имеют прямо противоположное направление. Единственным решением уравнения, имеющим форму $z = \varphi(x) + \psi(y)$, является кроме плоскости $z = Ax + By + C$ лишь $e^{\alpha(z-z_0)} = \frac{\cos a(y-y_0)}{\cos a(x-x_0)}$, где a — постоянная. **6087.** $\Delta u = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right)$. **6088.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. **6089.** $(1 + u_y^2 + u_z^2)u_{xx} + (1 + u_z^2 + u_x^2)u_{yy} + (1 + u_x^2 + u_y^2)u_{zz} - 2(u_x u_y u_{xy} + u_y u_z u_{yz} + u_z u_x u_{zx}) = 0$. **6090.** $\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right)$. **6092.** $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \omega F$; на свободном конце должно выполняться условие: $\sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + E \omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, или же движение конца может быть задано: $u = \varphi(t)$. **6093.** $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \omega \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\rho l \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \rho \omega F$. Если конец стержня заделан наглухо и совершает заданное движение, то на этом конце $v = \varphi_1(t)$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_2(t)$; если конец оперт,

то $v = \varphi(t)$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$; если конец свободен, то $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho I \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$.

6094. $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = P \Delta \zeta + \rho F$; на свободном контуре C должно выполняться условие $P \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \Phi$. **6095.** $\Delta \zeta = 0$; на контуре C должно быть задано смещение $\zeta(s)$ или же должно выполняться естественное граничное условие $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{k}{p} \zeta = 0$.

$$\mathbf{6096.} P \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\zeta_x}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\zeta_y}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + \zeta_y^2}} \right) + g \rho_0 (\lambda + \zeta) = 0$$

или, если обозначить $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = t$, а главные радиусы кривизны через R_1 и R_2 , то $P \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} + g \rho_0 (\lambda + \zeta) = 0$ или $P \left(\frac{1}{R_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} \right) + g \rho_0 (\lambda + \zeta) = 0$. **6097.** $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{E h^2}{3 \rho (1 - \sigma^2)} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = 0$. Граничные условия на контуре C имеют следующий вид:

$$\zeta = \varphi_1(c, t), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \varphi_2(c, t),$$

если контур заделан наглухо;

$$\begin{aligned} \zeta &= \varphi(c, t), \\ \Delta \zeta &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \\ &= (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right), \end{aligned}$$

где θ — угол нормали к контуру C с осью OX , если контур оперт;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial n} &= \varphi_2(c, t), \\ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} &= (1 - \sigma) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right), \end{aligned}$$

если на контуре задано только $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$;

$$\Delta \zeta = (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta \right)$$

и

$$\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} = (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right),$$

если контур свободен. **6098.** $\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0$, $X_x = 2\mu u_x + \lambda \Delta$, $Y_z = Z_y = \mu(\omega_y + v_z)$, $\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0$, $Y_y = 2\mu v_y + \lambda \Delta$, $Z_x = X_z = \mu(u_z + \omega_x)$, $\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0$, $Z_z = 2\mu \omega_z + \lambda \Delta$, $X_y = Y_x = \mu(v_x + u_y)$, $\Delta = u_x + v_y + \omega_z$. **6099.** $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X$, $\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y$, $\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z$, где буквы имеют то же значение, что и в задаче 6098. **6100.** Если ось OX взять за ось полярной системы координат, то $r = a\sqrt{\cos \theta}$, где $a = \sqrt[3]{\frac{15V}{4\pi}}$. **6101.** $2x^2 + y^2 + z^2 =$

$= \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$. **6102.** $\frac{1}{r} = -\frac{\rho(x,y)}{4\lambda}$, где λ — постоянная, r — радиус кривизны экстремали. **6103.** Дуга окружности, радиус которой R определяется из уравнения $R \sin \frac{1}{2R} = a$, причем $R > \frac{1}{2\pi}$. **6104.** Полуокружность. **6105.** Окружность радиуса $\frac{1}{2\pi}$. **6106.** MN — полуокружность радиуса $\frac{b-a}{2}$, обращенная вогнутостью к оси OX и построенная на диаметре, параллельном оси OX . **6107.** Прямая $y = \frac{S}{x_1 - x_0}$. **6108.** Прямая линия: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $ab = 2S$. **6109.** Окружность $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, где $R = \frac{1}{\omega}$, а ω есть решение уравнения $\sin l\omega = h\omega$, лежащее в пределах $0 < \omega < \frac{\pi}{l}$. **6110.** Дуга окружности, пересекающая под прямым углом сторону AB , проходящую через точку M_2 . **6111.** Цепная линия: $y - \lambda = \alpha \operatorname{ch} \frac{x-\beta}{\alpha}$ дает сильный минимум. **6112.** $y + \lambda = \alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}$ — цепная линия. **6113.** Дуга окружности, проходящей через точки O и M .

6114. $x = c_1 + c_2 \sin \theta - \lambda(2\theta + \sin 2\theta) + \mu \cos 2\theta$,

$y = c_3 - c_2 \cos \theta + \lambda \cos 2\theta - \mu(2\theta - \sin 2\theta)$,

где постоянные определяются из условий

$$x(\theta_1) = x_1, \quad y(\theta_1) = y_1, \quad x(\theta_2) = x_2, \quad y(\theta_2) = y_2,$$

$$l = c_2(\theta_2 - \theta_1) - 4\lambda(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 4\mu(\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

6115. Упругая линия. **6116.** $\frac{(x-x_0)^2}{u^2-v^2} + \frac{(y-y_0)^2}{u^2} = \lambda^2$, где $\lambda = \frac{T\sqrt{u^2-v^2}}{2\pi u}$, $S = \frac{T^2(u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}}{4\pi u}$. **6117.** $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ дает минимум 1, условие Якоби выполняется; на других экстремальных $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ (n — целое), проходящих через заданные точки, условие Якоби не выполняется. **6118.** Минимум равен 1 при $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$. **6119.** Минимум I равен 1 при $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$.

6120. Единственная кривая, удовлетворяющая условию $I_1 = \frac{1}{12}$, есть $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$, так что кривых для сравнения не имеется. **6121.** $y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$, $z = x$; если точка A не задана, то $y = -x^2 + 2$, $z = 1$.

6122. а) $\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \lambda$; б) экстремальные поверхности суть поверхности постоянной средней кривизны. **6123.** а) и б) $\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{z+\lambda}{\mu}$. в) Поверхность должна пересекать плоскость xy ортогонально.

6124. а) $(z+\lambda)((1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t) = 1+p^2+q^2$. б) $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{N}$, где ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны поверхности, а N — длина

отрезка нормали между поверхностью и горизонтальной плоскостью $z + \lambda = 0$. **6125.** а) $\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}} = \frac{1}{\lambda}$; б) средняя кривизна поверхности постоянна. **6128.** $y = ae^x + be^{-x}$, $z = a^2e^{2x} - b^2e^{-2x}$. **6129.** Прямая линия. **6130.** $p(v)$ определяется из квадратного уравнения $g + (p\alpha - \beta)kv^{n+1} = gv\alpha\sqrt{1+p^2}$, и тогда $x = \int \frac{v dv}{gp - kv^n\sqrt{1+p^2}}$, $y = \int \frac{pv dv}{gp - kv^n\sqrt{1+p^2}}$, причем, кроме заданных, имеет место еще граничное условие $(\alpha p(v_2) - \beta)v_2 = 0$.

6131. $v = \sqrt{\frac{\alpha g \sqrt{1+p^2}}{k(p\alpha - \beta)}}$. $x = \frac{1}{ng} \int \frac{v^2 dp}{1+p^2}$, $y = \frac{1}{ng} \int \frac{v^2 p dp}{1+p^2}$. Так как радиус кривизны $r = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds(1+p^2)}{dp} = \frac{v^2 \sqrt{1+p^2}}{ng}$, то легко показать, что $N = \frac{n-1}{n} \frac{v^2}{r}$. При $n = 1$ $N = 0$. **6132.** Дуга окружности радиуса ρ , соединяющая заданные точки. **6133.** Обозначив через φ угол, составляемый продольной осью, или, что то же, направлением относительной скорости самолета с осью OX , имеем прежде всего очевидные равенства

$$\frac{dx}{dt} = u + V \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v + V \sin \varphi,$$

откуда выводим равенство

$$(V^2 - \omega^2)dt^2 + 2(udx + vdy)dt - (dx^2 + dy^2) = 0.$$

Вводя в качестве независимой переменной τ и обозначая дифференцирование по τ штрихом, будем иметь уравнение $t' - L(x, y, t, x', y') = 0$, где L есть решение уравнения

$$(V^2 - \omega^2)L^2 + 2(ux' + vy')L - (x'^2 + y'^2) = 0. \quad (*)$$

При этом известны значения функций $x(\tau)$, $y(\tau)$, $t(\tau)$ при $\tau = \tau_0$ и функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$ при $\tau = \tau_1$ и требуется определить эти функции при всех τ так, чтобы $t(\tau_1)$ было минимумом. Получилась задача Майера, для которой уравнениями Эйлера являются $\frac{d}{d\tau}(\lambda \frac{\partial L}{\partial x'}) - \lambda \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{d}{d\tau}(\lambda \frac{\partial L}{\partial y'}) - \lambda \frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, где λ — функция от τ . На основании последнего уравнения два первых дают

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial x'}, \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial y'}. \quad (**)$$

Продифференцировав уравнение (*) по x' , получим

$$((V^2 - \omega^2)L + (ux' + vy')) \frac{\partial L}{\partial x'} + Lu - x' = 0$$

и точно так же найдем другие производные от L по y' , x , y , t . Выгодно теперь взять за параметр τ время t , т. е. положить $\tau = t$; тогда, очевидно, будет $L = 1$, $x' = \dot{x}$, $y' = \dot{y}$ (точка означает дифференцирование по t), и предыдущее уравнение даст ($W = u \cos \varphi + v \sin \varphi$): $\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\dot{x} - u}{V^2 - \omega^2 + (u\dot{x} + v\dot{y})} = \frac{\cos \varphi}{V + W}$; точно так же найдем $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{u_x \cos \varphi + v_x \sin \varphi}{V + W}$, $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{u_t \cos \varphi + v_t \sin \varphi}{V + W}$, где $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, и т. д. Поэтому первое из уравнений (**) даст

$$\frac{d}{dt} \frac{\cos \varphi}{V + W} + \frac{u_x \cos \varphi + v_x \sin \varphi}{V + W} = -\frac{(u_t \cos \varphi + v_t \sin \varphi) \cos \varphi}{(V + W)^2};$$

точно так же второе из уравнений (**) дает

$$\frac{d}{dt} \frac{\sin \varphi}{V+W} + \frac{u_y \cos \varphi + v_y \sin \varphi}{V+W} = -\frac{(u_l \cos \varphi + v_l \sin \varphi) \sin \varphi}{(V+W)^2}.$$

Умножая последнее уравнение на $\cos \varphi$ и вычитая из него предыдущее уравнение, умноженное на $\sin \varphi$, получаем уравнение $\frac{d\varphi}{dt} = -u_y \cos^2 \varphi - (v_y - u_x) \times \sin \varphi \cos \varphi + v_x \sin^2 \varphi$, которое вместе с двумя уравнениями, приведенными в самом начале ответа, дает полную систему уравнений для определения трех функций $x(t)$, $y(t)$ и $\varphi(t)$. Если в некоторый момент направить оси так, чтобы $\varphi = 0$, то получим, что $\frac{d\varphi}{dt} = -u_y$, т. е. самолет надо рулить так, чтобы он поворачивался в ту сторону, где составляющая скорости ветра в направлении продольной оси самолета меньше.

$$6134. \int_{-l/2}^{l/2} \frac{f'(x)}{\xi - x} dx = \lambda, \text{ т. е. } \omega(\xi) = \text{const}.$$

Решением уравнения

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{f'(x)}{x - \xi} dx = -4\pi\rho v_0 \omega$$

является

$$f'(x) = -\frac{4\rho v_0 \omega x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}},$$

откуда $f(x) = 4\rho v_0 \omega \sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}$, $A = \frac{1}{2} \pi \rho v_0 \omega l^2$, $W = A \frac{\omega}{v_0} = \frac{A^2}{\pi(\frac{\rho}{2} v_0^2) l^2}$. Можно

также воспользоваться тем обстоятельством, что движение жидкости, вызываемое перемещением прямолинейного отрезка длиной l в направлении, перпендикулярном к этому отрезку, со скоростью ω , можно считать происходящим в силу наличия вихрей интенсивности

$$d\Gamma = -\frac{2x\omega dx}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}},$$

перпендикулярных как к направлению отрезка, так и к направлению скорости ω . В нашем случае вихри простираются от отрезка только в одну сторону, поэтому их интенсивность надо удвоить, так что $d\Gamma = -\frac{4x\omega dx}{\sqrt{l^2/4 - x^2}}$, с другой стороны,

$d\Gamma = \frac{1}{\rho v_0} f'(x) dx$, откуда $f'(x) = -\frac{4\rho v_0 \omega x}{\sqrt{l^2/4 - x^2}}$. **6135.** $\lambda' + \lambda f_u + \mu g_u = 0$; $\mu' + \lambda f_z + \mu g_z = 0$; $\mu(x_1) = 0$; $\lambda f_y + \mu g_y - \frac{d}{dx}(\lambda f_{y'} + \mu g_{y'}) = 0$. **6136.** Экстремали являются в то же время экстремалими задачи $\delta \int (\lambda F + \mu G) dt = 0$, значения постоянных λ и μ связаны со значениями u и v формулами $f_u(u, v) = \lambda$; $f_v(u, v) = \mu$. **6137.** Окружности.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- 6138.** $P = \frac{7+5+8+9+4+2}{360} = \frac{35}{360} = \frac{7}{72}$; вероятность Q того, что начальная буква согласная, $Q = 1 - P = \frac{65}{72}$. **6139.** $x_0 = 8$. Действительно, $P = 1 - \left(1 - \frac{2}{22}\right)^m$; поэтому нужно, чтобы $\left(\frac{10}{11}\right)^m < \frac{1}{2}$, откуда $m > \frac{3010}{414} > 7$. **6140.** $x_1 = 7$. Действительно, $P = 1 - \frac{C_{20}^m}{C_{22}^m}$. Поэтому нужно, чтобы $\frac{C_{20}^m}{C_{22}^m} < \frac{1}{2}$; следовательно, x_1 есть наименьшее целое число m , удовлетворяющее неравенству $\frac{(22-m)!20!}{(20-m)!22!} = \frac{(22-m)(21-m)}{22 \cdot 21} < \frac{1}{2}$, откуда $m^2 - 43m + 231 < 0$. Поэтому $x_1 > \frac{43}{2} - \sqrt{\frac{925}{4}}$.
- 6141.** $m_1 > \frac{1-\ln 3}{\ln 1,2}$; $m_2 > \frac{1-\ln 2}{\ln 1,2}$; $m_3 > \frac{1}{\ln 1,2}$, откуда $m_1 = 7$; $m_2 = 9$; $m_3 = 13$. **6142.** $P = \frac{C_{48}^{24} \cdot C_4^2}{C_{52}^{26}} = \frac{325}{833}$. **6143.** $P_1 = \frac{(C_{26}^{13})^2}{C_{52}^{26}} = \frac{(26!)^4}{52!(13!)^4}$. Применяя формулу Стирлинга, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, получим приближенное значение $P_1 \sim \frac{26^{104} e^{-104}}{52^{52} \cdot 13^{52} e^{-104}} \sqrt{\frac{2}{13\pi}} = \sqrt{\frac{2}{13\pi}} \neq 0,221$. **6144.** $C_4^1(C_{13}^1)^3 C_{13}^3 + C_4^2(C_{13}^1)^2 (C_{13}^2)^2$.
- 6145.** $P_2 = 1 - \frac{48}{51} = \frac{1}{17}$; $P_3 = 1 - \frac{48 \cdot 44}{51 \cdot 50} = \frac{23}{375}$; $P_4 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{1349}{4165}$; $P_5 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{2053}{4165}$; $P_6 = 1 - \frac{48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36 \cdot 32}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} = \frac{128171}{195755}$. Поэтому $x_0 = 6$. **6146.** $P = \frac{2^{10}(10!)^2}{20!} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots 20}{1 \cdot 3 \cdots 19} = \frac{256}{46189}$. **6147.** $P = \frac{3^5 \cdot 5! \cdot 10!}{15!} = \frac{81}{1001}$.
- 6148.** $P = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0,3024$. **6149.** $P = 0,25 + 0,2 + 0,3 = 0,75$. **6150.** $P = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot 0,6 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot 0,5 + \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \cdot 0,4 = 0,52$. **6151.** Первоначально имевшееся в урне. Вероятность 0,480. **6152.** 0,336. **6153.** 0,336; 0,096. **6154.** Событие $[A \text{ или } B]$ равновероятно событию A или $[B \text{ и } \bar{A}]$, вероятность которого равна $(A) + (B \text{ и } \bar{A}) = (A) + (B) - (A \text{ и } B)$. **6156.** В силу предыдущего, $(A \text{ или } [B \text{ или } C]) = (A) + (B \text{ или } C) - (A \text{ и } [B \text{ или } C]) = (A) + (B) + (C) - (B \text{ и } C) - (A \text{ и } [B \text{ или } C])$; но $(A \text{ и } [B \text{ или } C])$ равносильно $[A \text{ и } B]$ или $[A \text{ и } C]$, откуда $(A \text{ и } [B \text{ или } C]) = (A \text{ и } B) + (A \text{ и } C) - (A \text{ и } B \text{ и } C)$. **6157.** Действительно, полагая формулу доказанной для $n-1$, имеем $(A_2 \text{ или } A_3 \text{ или } \dots A_n) = \sum_{i=2}^{n-1} p_i - \sum_{i=2}^n \sum_{k=3}^{n-1} p_{ik} + \dots + (-1)^{n-2} p_{23\dots n}$, $([A_1 \text{ и } A_2] \text{ или } [A_1 \text{ и } A_3] \dots \text{ или } [A_1 \text{ и } A_n]) = \sum_{k=2}^n p_{1k} - \sum_{k=2}^n \sum_{l=3}^{n-1} p_{1kl} + \dots + (-1)^{n-2} p_{12\dots n}$, откуда $(A_1 \text{ или } [A_2 \text{ или } \dots \text{ или } A_n]) = p_1 + (A_2 \text{ или } A_3 \dots \text{ или } A_n) - ([A_1 \text{ и } A_2] \text{ или } \dots \text{ или } [A_1 \text{ и } A_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i - \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n-1} p_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=3}^{n-1} p_{ikl} + \dots + (-1)^{n-1} p_{12\dots n}$. **6158.** $\frac{1}{n!}$. **6159.** $\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$. **6160.** $P = \frac{\binom{M-1}{m-1} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$.
- 6161.** $n \binom{n-1}{m-1} \left(\frac{M}{N}\right)^{m-1} \left(\frac{N-M+1}{N}\right)^{n-m} \frac{1}{N} = n \binom{n-1}{m-1} \frac{M^{m-1} (N-M+1)^{n-m}}{N^n}$. **6162.** Дифференциальный закон распределения $n \binom{n-1}{m-1} x^{m-1} (1-x)^{n-m}$. **6163.** $P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{91}{144}$, так как в данном случае $p_i = \frac{1}{6}$, $p_{ik} = \frac{1}{6 \cdot 5}$, $p_{ikl} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}$ и т. д. при любых i, k, l . Если число билетов увеличивать, то мы получим для P сумму возрастающего числа последовательных членов разложения в ряд e^{-1} , и при бесконечном возрастании числа билетов $\lim P = e^{-1}$. **6164.** $P = \frac{n}{N} - \frac{n(n-1)}{2!N(N-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!N(N-1)(N-2)} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{N(N-1) \dots (N-n+1)}$. Если $n = 5$, $N = 10$, то $P = \frac{12151}{30240}$. **6165.** $P_k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)m}{(m+n)(m+n-1) \cdots (m+n-k)}$.

6166. $(1-a)a^k$. **6167.** $\left(\frac{n}{m+n}\right)^k \frac{m}{m+n}$. **6168.** $(1-a)a^k$. **6169.** Для первого
вероятность $P_1 = \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right)$, $P_2 = \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right)$. **6170.** $P_1 = \frac{1}{3} +$
 $+ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$, $P_2 = \frac{2}{5}$. **6171.** $P_1 : P_2 \approx 2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{6172.} \quad & \frac{\binom{N}{k}}{\binom{N}{n}^m} \left(\binom{n}{N-k}^m - \frac{N-k}{1} \binom{n}{N-k-1}^m + \right. \\ & \left. + \frac{(N-k)(N-k-1)}{1 \cdot 2} \binom{n}{N-k-2}^m - \dots \right), \\ & 1 - \frac{N}{1} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^m + \binom{N}{2} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^m \left(1 - \frac{n}{N-1}\right)^n - \dots \end{aligned}$$

6173. Вероятность выхода m различных билетов

$$P_m = \frac{\binom{N-m}{n}}{\binom{N}{n}^k} \left(\binom{n}{m}^k - \binom{m}{1} \binom{n}{m-1}^k + \binom{m}{2} \binom{n}{m-2}^k + \dots \right).$$

$$\mathbf{6174.} \text{ а) } x_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{3}{4}} = \frac{56}{241}, \text{ б) } y_1 = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{1}{4}} = \frac{84}{179}; x = \frac{4}{59}, y = \frac{6}{41}.$$

$$\mathbf{6175.} \text{ а) } x_1 = \frac{\frac{8}{125}}{\frac{8}{125} + \frac{64}{343} + \frac{27}{64}} = \frac{175616}{1845241}; x_2 = \frac{\frac{27}{125}}{\frac{27}{125} + \frac{27}{343} + \frac{1}{64}} = \frac{592704}{851579}. \mathbf{6176.} x =$$

$$= \frac{\frac{20}{25} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{2}{25}}{\frac{20}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{2}{25} \cdot \frac{3}{25}} = \frac{300}{306} = \frac{50}{51}. \mathbf{6177.} p = \frac{P(T-t)}{T-Pt}. \mathbf{6178.} p = \frac{0,51 - \frac{1}{6}}{0,51} \approx 0,673.$$

$$\mathbf{6179.} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{900}{1000} + \frac{900 \cdot 899}{1000 \cdot 999} + \dots + \frac{900 \cdot 899 \cdot 898 \cdot 897 \cdot 896}{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996}} \approx 0,214. \mathbf{6180.} \frac{n+2}{2n+2}. \mathbf{6181.} \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{6182.} \frac{2n+1}{3n}. \mathbf{6183.} \binom{M}{m} \binom{N-M}{n} : \binom{N+1}{m+n+1}. \mathbf{6184.} \frac{n-k}{n+n'-k}. \mathbf{6185.} a =$$

$= \left[\frac{mN}{m+n} \right]$ белых шаров и $b = N - \left[\frac{mN}{m+n} \right]$ черных шаров, если $(a+1)^m(N - a - 1)^n < a^m(N - a)^n$, и $a = \left[\frac{mN}{m+n} \right] + 1$ белых шаров и $b = N - \left[\frac{mN}{m+n} \right] - 1$ черных шаров, если $(a+1)^m(N - a - 1)^n > a^m(N - a)^n$. **6186.** Применим метод математической индукции. При $n = 2$ неравенства проверяются непосредственно. Полагая неравенства верными для некоторого n , введем новый $(n+1)$ -й независимый опыт, в котором $p_{n+1} = p$ имеет произвольное значение. Тогда $P_{m,n+1} = P_{m-1,n}p + P_{m,n}q$, где $q = 1 - p$, поэтому достаточно заметить, что $(P_{m,n}p + P_{m+1,n}q)^2 - (P_{m+1,n}p + P_{m+1,n}q)(P_{m-1,n}p + P_{m,n}q) > 0$, так как по раскрытии скобок коэффициенты при p^2 , pq и q^2 положительны благодаря тому, что $\frac{P_{m,n}}{P_{m-1,n}} > \frac{P_{m+1,n}}{P_{m,n}} > \frac{P_{m+2,n}}{P_{m+1,n}}$. **6187.** $x \leq \frac{1}{2}$. **6188.** $\frac{1}{1000} 2500 +$
 $+ \frac{1}{1000} 500 = 3$ руб. **6189.** $7\frac{14}{42}$ в первом ящике и $12\frac{1}{42}$ во втором, так как после первого извлечения $Ex_1 = 4 - \frac{5}{6}$ и $Ex_2 = 16 + \frac{5}{6}$, а поэтому вероятность после

того вынуть белый шар из второго ящика равна $\frac{16 + \frac{5}{6}}{21} = \frac{101}{126}$, откуда следует, что матожидание числа белых шаров, вынутых при извлечении 6 шаров из второго ящика, равно $\frac{101}{126} \cdot 6 = \frac{101}{21}$. **6190.** $\frac{125}{108}$ руб. Игра выгодна при стоимости билета 1 руб. 15 коп. и невыгодна при стоимости билета 1 руб. 16 коп. **6191.** $Ex = \frac{7}{2}n$,

$$\begin{aligned} E\left(x - \frac{7}{2}n\right)^2 &= E\left(x^2 - \frac{49}{4}n^2\right) = \frac{35}{12}n. \quad \mathbf{6192.} \quad E x = \frac{p}{1-p}; \quad B = E\left(x - \frac{1}{1-p}\right)^2 = \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}. \quad \mathbf{6193.} \quad E \text{ выигрыша равно } M = -(1-p) + p(1-p)y + p^2(1-p)y^2 + \\ &+ \dots = (1-p)\left(\frac{2py-1}{1-py}\right). \text{ Поэтому } M = 0, \text{ если } y = \frac{1}{2p}. \text{ При } p = \frac{1}{13}, y = \frac{13}{2}; \\ &\text{в этом случае игра была бы выгодна при } y = 7 \text{ руб. и невыгодна при } y = 6 \\ &\text{руб.} \quad \mathbf{6194.} \quad n \binom{n-1}{m-1} \cdot \frac{1}{N^n} \sum_{M=1}^N M^m (N-M+1)^{n-m}. \quad \mathbf{6195.} \quad 1 \cdot \frac{m}{m+n-1} \frac{n}{m+n} + 2 \cdot \\ &\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{m}{m+n-2} + \dots + n \cdot \frac{n(n-1) \dots 1}{(m+n) \dots (m+1)} \cdot \frac{m}{n}. \quad \mathbf{6196.} \quad E k = \sum_{k=0}^n \frac{m^k \cdot n^k}{(m+n)^{k+1}} = \\ &= \frac{m}{m+n} \sum_{s=1}^n \frac{\left(\frac{n}{m+n}\right)^s - \left(\frac{n}{m+n}\right)^{s+1}}{1 - \frac{n}{m+n}} = \frac{\frac{n}{m+n} - \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1}}{1 - \frac{n}{m+n}} - n \cdot \left(\frac{n}{m+n}\right)^{n+1}; \quad D k = \\ &= \frac{m}{m+n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 n^k}{(m+n)^k} - (E k)^2. \quad \mathbf{6197.} \quad \frac{\left(\frac{b+c+\dots+k}{a+b+c+\dots+k}\right) + \left(\frac{a+c+\dots+k}{a+b+c+\dots+k}\right) + \dots}{\left(\frac{a+b+c+\dots+k}{a+b+c+\dots+k}\right)}. \quad \mathbf{6198.} \quad 1. \end{aligned}$$

6199. Вытекает из неравенства $E x^2 \cdot E x^4 \geq E x^3$. **6200.** $-A t^2 P + A(1-P) > 0$, откуда $P < \frac{1}{1+t^2}$. **6201.** $E m = \frac{A-a+1}{a+1}$, так как число черных шаров $A - a + 1$ и они разбиваются на $a + 1$ группу. С другой стороны, $E m = \frac{(A-a+1)a}{(A+1)A} + \frac{2(A-a+1)(A-a)}{(A+1)A(A-1)} + \dots$ **6202.** Вытекает из неравенства $\sigma^2 \leq \sum p_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \sum p_i \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, где $a > b$ — край-

ние значения x . Равенство осуществляется, если $E x = \frac{a+b}{2}$ и, кроме того, x_i получает лишь значения: a, b ; следовательно, соответствующие вероятности равны $\frac{1}{2}$. **6203.** $q = 0,9$; $P_{10} = 1 - q^{10} = 1 - (0,9)^{10} \approx 0,652$; $P_{100} = 1 - (0,9)^{100} \approx 0,9999737$. (Применяя лемму Чебышева–Маркова, можно à priori утверждать, что $P_{100} > 0,9$ каков бы ни был закон распределения вероятностей, лишь бы было известно, что $E x = 10$.) **6204.** $p_n = \frac{4a^3}{b^2-a^2} \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n$, $a_0 = 1 - \frac{2a^2}{b+a}$. Чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно осуществление условий $b \geq a$, $b+a \geq 2a^2$; первое из неравенств необходимо, чтобы $p_n \geq 0$, второе неравенство выражает, что $a_0 \geq 0$. Значения $a = 4$, $b = 25$ недопустимы, так как $4 + 25 < 2 \cdot 4^2$: наименьшее приемлемое значение b (при $a = 4$) равно 28, тогда $p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $a_0 = 0$. **6205.** $k = a$, $A = e^{-k}$. Замечая, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k}{n+1}$, заключаем, что $\mu = |a|$, если a не целое число; если же a — целое число, то наиболее вероятны будут оба значения a , $a - 1$. **6206.** Необходимо и достаточно, чтобы $b \geq a^2 + a$, $c + a \geq \frac{b^2}{a} + b$. Полагая $a^2 + E x(x-1) = b - a$, $a_3 = E x(x-1)(x-2) = c - 3b + 2a$, $A e^k = u$, $B e^l = u_1$, имеем $u + u_1 = 1$, $u k + u_1 l = a$, $u k^2 + u_1 l^2 = a_2$, $u k^3 + u_1 l^3 = a_3$. Из этих уравнений видно, что для положительности k, l, u, u_1 необходимо, чтобы $a_2 \geq a^2$, $a a_3 \geq a_2^2$, откуда вытекает также $a_3 \geq a a_2$, которые равноценны $b \geq a^2 + a$ и $a(c+a) \geq b^2 + ab$. Достаточность этих условий обнаруживается фактическим решением этих уравнений, из которых следует, что k и l являются корнями уравнения.

$$P(z) = (a_2 - a^2)z^2 - (a_3 - a a_2)z + (a a_3 - a_2^2) = 0.$$

Достаточно проверить, что при сделанных условиях корни последнего уравнения положительны так же, как значения $u = \frac{l-a}{l-k}$, $u_1 = \frac{a-k}{l-k}$, для чего надо заметить, что $P(a) = -(a_2 - a^2) < 0$, так что величина a заключена между l

и k . В численном примере $k = 1$, $l = 4$, $u = \frac{3}{4}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $A = \frac{3}{4}e^{-1}$, $B = \frac{1}{4}e^{-4}$; наиболее вероятное значение n равно 1. **6207.** Как и раньше, нужно, чтобы $\delta = a_2 - a^2 \geq 0$ и $\delta_1 = a_3 - aa_2 \geq 0$, т. е. $b \geq a^2 + a$ и $c \geq b(a + 3) - a(a + 2)$, так как в этом случае корни $P(z) = 0$ действительны, $k + l \geq 0$ и значения $u \geq 0$, $u_1 \geq 0$. Но, кроме того, надо, чтобы $a_1 = Ak + Bl = uke^{-k} + u_1le^{-l} \geq 0$. В численном примере $l = 2$, $k = -1$, $u = \frac{1}{20}$, $u_1 = \frac{19}{20}$, $a_1 = \frac{e}{20}(19e^{-3} - 1) > 0$ представляет относительный минимум, причем вообще $a_n = \frac{e}{20} \left(\frac{19e^{-3}2^n + (-1)^n}{n!} \right) > 0$, абсолютный максимум соответствует $n = 2$. **6208.** Полагая $x^q = z$, можно ограничиться случаем $q = 1$. Предполагая затем все вероятности рациональными, приводим рассматриваемое неравенство к $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^p}{n} \geq \frac{1}{n^p} (\sum_{i=1}^n x_i^p)^p$; после этого достаточно проверить, что если $x_1 + x_2 = s$ дано, то $x_1^p + x_2^p$ достигает минимума при $x_1 = x_2$ ($p > 1$). Поэтому минимум отношения $\frac{\sum x_i^p}{(\sum x_i)^p}$ осуществляется, когда все x_i равны. Случай, когда вероятности иррациональны, разрешается переходом к пределу. **6209.** Если величина получает не более i значений, то $\Delta_{2i} = 0$, так как Δ_{2i} представляется в виде суммы определителей, в которых по крайней мере 2 столбца пропорциональны. В общем же случае каждой совокупности $i + 1$ значений x соответствует определитель, являющийся квадратом определителя Вандермонда, умноженным на произведение вероятностей всех этих значений. **6210.** Из уравнений $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, $p_1x_1 + p_2x_2 = a_1$, $p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = a_2$, $p_1x_1^3 + p_2x_2^3 = a_3$, $p_1x_1^4 + p_2x_2^4 = a_4$, заключаем, что коэффициенты уравнения $x^2 + A_1x + A_2 = 0$, корнями которого служат x_1, x_2 , удовлетворяют равенствам $A_2p_0 = A_2 + A_1a_1 + a_2$, $0 = A_2a_1 + A_1a_2 + a_3$, $0 = A_2a_2 + A_1a_3 + a_4$. Выразим A_1 и A_2 из последних двух уравнений. Тогда $p_0 = \Delta_2 / \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$. По рассуждениям предыдущей задачи числитель и знаменатель положительны. Значения x_1 и x_2 вещественны, если $A_1^2 - 4A_2 \geq 0$, положительны — если дополнительно к этому $A_2 > 0$, $A_1 < 0$. **Пример:** $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{8}{45}$. **6211.** Из условия, что $\sum_{h=0}^{\infty} a_h = 1$, следует, что $M = 2a(a + 1)$; $\sum_{h=0}^{\infty} ha_h = \frac{M}{2(a+1)} = a$, поэтому $a = A$ и $\sum_{h=0}^{\infty} h^2a_h = \infty$. Полагая $A = 3$, имеем $P_{10} = \sum_{h=0}^g \frac{24}{(3+h)(4+h)(5+h)} = 12 \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{13 \cdot 14} \right) = \frac{85}{91}$. **6212.** $M = 3a(a + 1)(a + 2)$; $A = \frac{a}{2}$; $\sigma^2 = 3A(A + 1)$; поэтому $A = 3$, $\sigma^2 = 36$, $a = 6$, $a_h = \frac{1008}{(6+h)(7+h)(8+h)(9+h)}$. **6213.** Обозначив через X_i и Y_i соответственные м.о. числа белых шаров в каждом ящике после i перекладываний, имеем, очевидно, $X_i + Y_i = M + M_1$. С другой стороны, после i перекладываний $p_{i+1} = \frac{X_i}{N}$, $P_{i+1} = \frac{Y_i}{N_1}$ представляет собой соответственные вероятности появления белого шара из каждого ящика при $(i + 1)$ -м вынимании. Поэтому

$$\begin{aligned} X_k &= M - \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=1}^k P_i = M + \sum_{i=1}^k \left(\frac{Y_{i-1}}{N_1} - \frac{X_{i-1}}{N} \right) = \\ &= M + \sum_{i=1}^k \left(\frac{M + M_1 - X_{i-1}}{N_1} - \frac{X_{i-1}}{N} \right), \end{aligned}$$

откуда получаем уравнение: $X_{k+1} - X_k = \frac{M+M_1-X_k}{N_1} - \frac{X_k}{N}$, решением которого, при начальном условии $X_0 = M$, будет

$$X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N + \frac{MN_1 - NM_1}{N+N_1} \left(1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{N_1}\right)^k.$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N$, $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N_1$. **6214.** $X_l = M \times \left(1 - \frac{1}{N}\right)^l \rightarrow$

Me^{-a} . **6215.** B_l определяется из уравнения в конечных разностях $B_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)B_n + \frac{M}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - \frac{M}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$, решением которого при $B_l = 0$ является

$B_l = M\left(1 - \frac{1}{N}\right)^l + (M^2 - M)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^l - M^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2l}$. **6216.** $\frac{\prod_{i=1}^n (p_i x + q_i)}{1-x}$.

6217. Обозначая через $P_{m,n} = P_{-m,n}$ вероятность выиграть $\frac{m}{5}$ рублей при n партиях, имеем $F(x) = \sum_{m=-2n}^{2n} P_{m,n} x^m = \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n = \left(\frac{1}{5x^2}\right)^n \left(\frac{1-x^5}{2-x}\right)^n$, откуда $P_{m,n} = \frac{1}{5^n} (C_{3n-m-1}^{n-1} - nC_{3n-m-6}^{n-1} + \dots)$; вероятность $P_{m,n}$ проиграть не менее $\frac{m}{5}$ рублей равна $R_{m,n} = \sum_{k=m}^{2n} P_{k,n} = \frac{1}{5^n} (C_{3n-m}^n - nC_{3n-m-5}^n + \dots)$; $R_{15,12} = \frac{9}{5^{12}} (C_{21}^{12} - 12C_{16}^{12}) = \frac{27 \cdot 209 \cdot 2^{12}}{10^{11}} =$

$= 0,0011448064$, $B = \frac{1}{25} \sum_{m=-2n}^{2n} m^2 P_{m,n} = \frac{1}{25} (F''(1) - F'(1)) = \frac{2n}{25} = 0,96$ рубля. **6218.** Вероятности $P_{m,n}$ выиграть m рублей при n партиях являются коэффициентами производящей функции $F(x) = \left(\frac{x^4+2x+3}{6x}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 + \frac{3+x^4}{2x}\right)^n$, откуда $P_{m,n} = \sum \frac{3^{k-n}}{2^k} C_n^h C_n^k$, где $3h - 4k = m$, $h \leq n$; $R_{m,n} = \sum_{l=m}^{3n} P_{l,n} \cdot P_{15,12} = \frac{1}{3^{12} \cdot 2^5} (C_{12}^5 + \frac{1}{2} C_{12}^6 + \frac{11}{2} C_{12}^7 + \frac{277}{8} C_{12}^8 + \frac{665}{4} C_{12}^9 + \frac{1838}{16} C_{12}^{10} + \frac{15857}{32} C_{12}^{11} + \frac{119561}{64}) = \frac{4747049}{3^{12} 2^{11}} = 0,004362$; $B = 2n = 24$ руб. **6219.** $F(x) = \sum P_m x^m = \frac{1}{10^7} \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^7$; $R_s = \frac{1}{10^7} (C_{s+6}^7 - 7C_{s-4}^7 + \dots)$. $R_{20} = \frac{1}{10^7} (C_{26}^7 - 7C_{16}^7) = 0,057772$. $ES = F'(1) = \frac{7}{10^7} \cdot \frac{9}{2} \cdot 10^7 = 31,5$. $ES^2 = F''(1) + F'(1) = 168 + 850,5 + 31,5 = 1050$. **6220.** $F(x) = \sum P_a x^a = \left(\frac{1-q}{1-qx}\right)^h$,

$P_a = \frac{(h+a-1)!}{a!(h-1)!} (1-q)^h q^a$; $Ey = h \frac{q}{1-q} = b$. Если b — не целое число, то $S = (b+1)$; если же b — целое число, то наиболее вероятными будут значения b и $b+1$. При $h \rightarrow \infty$, $P_a \rightarrow \frac{e^{-1} 1^a}{a!}$. **6221.** Из уравнений $P_{n+1,h+1} = AP_{n,h+2} + BP_{n,h}$ для $h > 0$ и $P_{n+1,0} = AP_{n,1}$; $P_{n+1,1} = AP_{n,2} + P_{n,0}$ следует, что производящая функция $F(x, y) = \sum P_{n,h} x^n y^h = f(x) \left(1 + \frac{2xy}{1-2Bxy + \sqrt{1-4ABx^2}}\right)$, где $f(x) = \sum P_{n,0} x^n = \frac{A-B+\sqrt{1-4ABx^2}}{2A(1-x^2)}$. $P_{n,h} = 0$, если $n-h$ нечетное число; $E|x_n| = M_n$, где производящей функцией для M_n служит $\frac{\partial F}{\partial y}(x, 1) = \frac{x(A-B+\sqrt{1-4ABx^2})(1+\sqrt{1-4ABx^2})}{A(1-x^2)(1-2Bx+\sqrt{1-4ABx^2})^2}$. Если $A = B$, $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 + 2\frac{xy}{1-xy+\sqrt{1-x^2}}\right)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, 1) = \frac{x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$; поэтому $M_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}$ при n четном и $M_n = M_{n-1}$ при n нечетном. Возвращаясь к общему случаю $A > \frac{1}{2}$, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,h} = \frac{A-B}{A^2} \left(\frac{B}{A}\right)^{h-1}$ (при условии, что $n-h$ нечетное), так

как при малых значениях y ближайшими особыми точками $F(x, y)$ будут полюсы $x = \pm 1$, и поэтому коэффициенты при x^n асимптотически равны соответствующим коэффициентам функции $A > \frac{1}{2}$, $F_0(x, y) = \frac{A-B}{A(1-x^2)} \left(1 + \frac{xy}{A-Bxy}\right)$.

6222. $P > \frac{3}{4}$ в первом случае; $P > \frac{39}{40}$ во втором случае. **6223.** $n \geq 250\,000$.

6224. $\frac{1}{20}$. С требуемой вероятностью можно утверждать, что $4500 < m < 5500$.

6225. $P > 0,99$. **6226.** $M = Em = 1 - \frac{1}{2n}$; $E(m - M)^2 < \frac{2}{3}$. Поэтому иско-
мая вероятность больше, чем $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ (при всяком n). **6227.** Неравенство (А)

равноценно неравенству $e^{\varepsilon x} > e^{t^2} I$, вероятность которого по лемме Чебышева–Маркова меньше, чем e^{-t^2} . **6228.** Для доказательства первого неравенства надо лишь заметить, что

$$\ln I = \sum_1^n \ln(p_i e^{\varepsilon} + q_i) \leq \sum_1^n \varepsilon p_i (1 + \varepsilon q_i);$$

для второго неравенства следует заметить, что среднее геометрическое двух чисел не больше среднего арифметического. **6229.** $\sum p_i - m = n - m - \sum q_i$.

6230. 5703) $n \geq 50\,000$, 5705) $P > 1 - e^{-169} > 1 - \frac{3}{10^{65}}$. **6231.** Применяя

способ рассуждения задач 5708 и 6228 достаточно заметить, что $\ln \frac{1}{2}(e^{\varepsilon} + 1) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Для решения задачи надо определить $z = t \sqrt{\frac{1}{20\,000}}$, где $2e^{-t^2} =$

$= 0,01$, так что $z^2 = \frac{\ln 200}{20\,000}$, откуда $z < \frac{1}{50}$. **6232.** Вероятность неравенства

$m - 3 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \geq 2t \sqrt{\frac{12}{7}}$ меньше e^{-t^2} ; поэтому $P < \frac{1}{e^7}$. **6233.** Фиксировать

вспомогательное число N так, чтобы $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} < \eta$. При достаточно большом n выполняется, очевидно, неравенство $\sum_{k=1}^N k^{\beta} < \frac{1}{2} \varepsilon n$. Числа ε и η — положительные наперед заданные числа. Легко видеть, что

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^n x_k\right| > \varepsilon n\right) \leq P\left(\left|\sum_{k=N+1}^n x_k\right| > \frac{1}{2} \varepsilon n\right) \leq \sum_{k=N+1}^n P(|x_n| > 0) < \eta,$$

откуда следует закон больших чисел. **6234.** Доказательство можно провести тем же приемом, что и в предыдущей задаче. **6235.** $n > 625$. **6236.** $1600 < R <$

< 3733 . **6237.** $P_1 = 0,0184$; $P_2 = 0,1824$, $P_3 = 0,9790$. **6238.** $P = 0,6218$.

6239. 0,00967. **6240.** $n = 10$. **6241.** $n \geq 1\,609\,700$. **6242.** $n = 1764$. **6243.** $y =$

$= \pm \frac{1}{x\sqrt{2e\pi}}$. **6244.** $M_1 = 31,5645$; $M_2 = 31,476$; $M_3 = 30,995$; $\sigma_1^2 = 17,1888$;

$\sigma_2^2 = 16,071$; $\sigma_3^2 = 16,592975$. При случайном распределении в каждом мил-

лионе вероятности встретить простое число равны соответственно: $p_1 = \frac{M_1}{500} =$

$= 0,063129$; $p_2 = 0,062952$; $p_3 = 0,06199$. Таким образом, например, для

10-го миллиона дисперсия, соответствующая схеме Бернулли, была бы $np_3q_3 =$

$= 500p_3q_3 = 29,073$ вместо наблюдаемой $\sigma_3^2 = 16,592975$. (Схема с невоз-

вращаемыми шарами дает 29,015). **6245.** $M_1 - M_3 = 0,5695$ превышает свое

среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2000}}$ несколько больше, чем в 4,4 раза;

напротив, $M_2 - M_1 = 0,0885$ немного меньше своего среднеквадратического

отклонения.. **6246.** $\sigma^2 = 500P - mp^2$, где m — число опытов, в которых веро-

ятность простого числа отлична от нуля, откуда $m = \frac{(500P)^2}{500P - \sigma^2}$, так как $p = \frac{500P}{m}$.

В данном численном примере $m = 75$, $p = \frac{5}{12}$. В натуральной последовательности 6 чисел не более 2 простых; среди 30 чисел не более 8; среди 210 не более 48; поэтому из 500 последовательных чисел:

420	соответствует не более	$2 \cdot 48 = 96$
60	—»—	$2 \cdot 8 = 16$
18	—»—	$3 \cdot 2 = 6$
2	—»—	$1 = 1$,

т. е. всего не более 119. Поэтому во всяком случае $\frac{(500P)^2}{500P - \sigma^2} < 120$, т. е. $\sigma^2 < 500P \left(1 - \frac{25}{6}P\right)$. **6247.** Расхождение такое, которое может иметь место и при

случайной выборке, ибо величина разности $\frac{4032}{21\,812} - \frac{11\,721}{35\,311} \approx 0,147$ больше, нежели утроенная величина дисперсии этой разности. **6248.** Средняя величина растягивающего усилия, выдерживаемого проволокой первой партии, заключа-

ется в пределах $6\,720 \pm 3 \frac{220}{\sqrt{20}} = \begin{cases} 6572,4, \\ 6867,6. \end{cases}$ Первая партия проволоки стан-

дартного качества. Средняя величина растягивающего усилия, выдерживаемого проволокой второй партии, больше 6867 кг/см^2 . Качество проволоки второй партии выше стандартного. Результаты испытаний нельзя объяснять случайностью выборки. **6249.** Рассматривая результаты испытаний как случайную вы-

борку, нетрудно убедиться, что средняя величина растягивающего усилия, получаемая на основании результатов испытаний, превышает 6867 кг/см^2 . Качество поступающей проволоки уклоняется от стандартных условий. **6250.** Средняя

величина растягивающего усилия для первой партии отличается от средней величины для второй на $210,5 \text{ кг/см}^2$. Разность превосходит $3 \cdot \frac{221}{\sqrt{40}} \text{ кг/см}^2$, где 221 есть величина стандартного отклонения, определенная на основании ре-

зультатов всех испытаний. Результат испытаний нужно объяснять не случайностью выборки, а различным качеством проволоки обеих партий. **6251.** Сплав, приготовляемый на II заводе, иной марки, чем сплавы четырех остальных.

Результат получается путем применения правила 3σ . **6252.** $100 \cdot p$, $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, где $t_1 = \frac{a - (R_0 - r_0)}{\sigma}$; $t_2 = \frac{b - (R_0 - r_0)}{\sigma}$; $\sigma = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_r^2}$.

$$\mathbf{6253.} \quad n' = \max \left(\left[\frac{\sigma'}{\sigma} \sqrt{\frac{a}{a'}} \right], \left[\frac{\sigma'}{\sigma} \sqrt{\frac{a}{a'}} \right] + 1 \right) \text{ и } n = \left\lceil \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{a^2} \right\rceil + 1.$$

Указание. Стоимость производства опыта равна $A = an + a'n + n'$.

Точность определения средней по этой серии опытов характеризуется величиной средней квадратичной ошибки $\sqrt{\frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{n}}$. Исходя из того, что

при данном n' величина n определяется равенством $n = \left\lceil \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma'^2}{n'}}{a^2} \right\rceil + 1$, легко получить указанный результат, изучив изменение A при изменении n' .

$$\mathbf{6254.} \quad E x_k^2 = k^{2\lambda}; E |x_k|^3 = k^{3\lambda}; \text{ поэтому при } \lambda > -\frac{1}{3}: \varepsilon_n = \frac{\sum_1^n k^{3\lambda}}{(\sum_1^n k^{2\lambda})^{3/2}} \approx \frac{n^{3\lambda+1}}{3\lambda+1} \cdot \left(\frac{2\lambda+1}{n^{2\lambda+1}} \right)^{3/2} = \frac{(2\lambda+1)^{3/2}}{3\lambda+1} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0.$$

При $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\varepsilon_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{2/3}\right)^{3/2}} \approx \ln n \left(\frac{1}{3n^{1/2}}\right)^{3/2} \rightarrow 0$. При $-\frac{1}{2} < \lambda <$

$< -\frac{1}{3}$ $\varepsilon_n < \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{3}{2}(2\lambda+1)} \rightarrow 0$. При $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\varepsilon_n < (A \ln n)^{-1} \rightarrow 0$, где A — конечная постоянная. **6255.** Вероятность числа «нуль» появлений A равна $\frac{1}{4}$, вероятность двух появлений в группе равна $\frac{3}{4}$. Поэтому число $m = 2m_1$, где m_1 есть число появлений некоторого факта A_1 , имеющего вероятность $p = \frac{3}{4}$ при $n_1 = \frac{n}{3}$ независимых опытах. По теореме Лапласа вероятность неравенства $\frac{t_0}{4} \sqrt{3n_1} < m_1 - \frac{3}{4}n_1 < \frac{t_1}{4} \sqrt{3n_1}$, которое тождественно с неравенством

$\frac{t_0}{2} \sqrt{n} < m - \frac{n}{2} < t_1 \sqrt{n}$, имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. **6256.** $Ex_k^2 = k^\lambda$, $E|x_k|^3 = k^{2\lambda}$, $\frac{\sum_{k=1}^n k^{2\lambda}}{\left(\sum_{k=1}^n k^\lambda\right)^{3/2}} \sim \frac{(\lambda+1)^{3/2}}{2\lambda+1} \frac{n^{2\lambda+1}}{n^{\frac{3}{2}(\lambda+1)}} = \frac{(\lambda+1)^{3/2}}{2\lambda+1} n^{\frac{\lambda-1}{2}} \rightarrow 0$. **6257.** $\frac{1}{2}$.

6258. $\frac{3}{4}$. **6259.** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. **6260.** $\frac{1}{3}l$ и $\frac{l}{3\sqrt{2}}$. **6261.** Интегральная кривая характеризуется уравнением $P = \frac{2ax-x^2}{a^2}$ ($0 \leq x \leq a$). Дифференциальная кривая

распределения $y = \frac{2(a-x)}{a^2}$. **6262.** $\frac{1}{2}$. **6263.** $\frac{1}{3}$. **6264.** $P_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx =$

$= \frac{13}{24}$, $P_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{48}$. **6265.** 1) $|p| \leq 2$; $f(p) = \frac{2-p}{4}$. 2) $|q| \leq 1$;

$\varphi(q) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{q}$. **6266.** $P = \frac{2\sqrt{3M}}{45}$, если $M \leq \frac{27}{4}$; $P = \frac{1}{2} - \frac{9}{20} \sqrt{\frac{2}{M}}$, если

$M \leq \frac{27}{4}$. **6267.** $\frac{7}{16}$. **6268.** $P(t_0) = \frac{2t_0}{T} - \frac{t_0^2}{T^2}$, $Et = \frac{T}{3}$, $Et^2 = \frac{T^2}{6}$. **6269.** $\frac{2}{k+1}$.

6270. Плотность распределения $\varphi(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $0 \leq x \leq 1$; $\varphi(x) = 0$, $x < 0$;

$\varphi(x) = 0$, $x > 1$. Функция распределения $\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1$.

$\Phi(x) = 0$, $x < 0$, $\Phi(x) = 1$, $x > 1$. **6271.** $a \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)$. **6272.** $E((x_1 - x_2)^2 +$

$+(y_1 - y_2)^2) = 2E(x_1^2 + y_1^2) - 2(Ex_1)^2 - 2(Ey_1)^2$. **6273.** $P(z_1) = 0$ при

$z_1 < b$; $P(z_1) = \frac{2a\sqrt{z_1^2 - b^2} - (z_1^2 - b^2)}{a^2}$ при $b \leq z_1 \leq \sqrt{a^2 + b^2}$; $P(z_1) =$

$= 1$ при $z_1 > \sqrt{a^2 + b^2}$. (Полагаем, что точки находятся на стороне a).

$Ez = \frac{b^2}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2b^2}{3(b + \sqrt{a^2 + b^2})}$; $Ez^2 = b^2 + \frac{a^2}{6}$.

6274. $P(z_1) =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } z_1 < 0; \\ \frac{\pi z_1^2}{4ab} & \text{при } 0 \leq z_1 < a; \\ \frac{\sqrt{z_1^2 - a^2}}{2b} + \frac{z_1^2 \arcsin \frac{a}{z_1}}{2ab} & \text{при } a \leq z_1 < b; \\ \frac{\sqrt{z_1^2 - a^2}}{2b} + \frac{\sqrt{z_1^2 - b^2}}{2a} + \frac{z_1^2}{2ab} \left(\arcsin \frac{a}{z_1} - \arccos \frac{b}{z_1} \right) & \text{при } b \leq z_1 < \sqrt{a^2 + b^2}; \\ 1 & \text{при } z_1 > \sqrt{a^2 + b^2}; \end{cases}$$

$Ez = \frac{a^2}{6b} \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + \frac{b^2}{6a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} + \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2}$; $Ez^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2)$.

6275. $Ez^2 = \frac{(a+b)^2}{6} = \frac{p^2}{6}$. **6276.** а) $\frac{a^2 + b^2}{6}$, б) $\frac{A^2 + B^2}{2}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **6277.** а) $\left(\frac{l-2a}{l-a}\right)^k =$

$= \left(1 - \frac{a}{l-a}\right)^k$, $b \geq a$, $b+a < l$; б) $\left(\frac{l-a-b}{l-a}\right)^k = \left(1 - \frac{b}{l-a}\right)^k$; $b < a$; $b+a < l$; в) 0;

$b < a$, $a+b \geq l$; г) $\left(\frac{b-a}{l-a}\right)^k$; $b > a$, $a+b < l$. **6278.** $\frac{1}{3}(4a-l)$ при $l \leq 2a$,

$\frac{a^2}{3(l-a)^2}(3l-4a)$ при $l \geq 2a$. **6279.** $p_m(x_m) = \frac{mC_m^m}{b-a} \left(\frac{x_m-a}{b-a}\right)^{n-m} \left(\frac{b-x_m}{b-a}\right)^{m-1}$.

6280. $E x_m = \frac{ma+(n+1-m)b}{n+1}$, $\sigma^2(x_m) = \frac{(b-a)^2 m(n-m+1)}{(n+1)^2(n+2)}$. **6281.** $\ln p_m(x) = \lambda - (n-m)\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{2a^2} + \dots\right) - (m-1)\left(\frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} + \dots\right)$, где λ — постоянная, не зависящая от x ; поэтому, принимая во внимание, что x порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$, и замечая, что $-\frac{n-m}{a} - \frac{m-1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, заключаем, что $\ln p_m(x) = \lambda - \left(\frac{n-m}{a^2} + \frac{m-1}{b^2}\right) \frac{x^2}{2} + \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$, как $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому $p_m(x) \approx e^{\lambda - \frac{nx^2}{2ab}}$. **6282.** При заданном x_m плотность вероятностей для x_k равна $(k-m)C_{n-m}^{k-m} \left(\frac{x_k-a}{x_m-a}\right)^{n-k} \left(\frac{x_m-x_k}{x_m-a}\right)^{k-m-1}$; поэтому поверхность корреляции $P_{m,k}(x_m, x_k) = A_{m,k}(x_k-a)^{n-k}(x_m-y_k)^{k-m-1} \times (b-x_m)^{m-1}$, где постоянная $A_{m,k} = \frac{1}{(b-a)^n} \cdot \frac{n!}{(m-1)!(k-m-1)!(n-k)!}$. Линия регрессии x_k по x_m задается уравнением $Y = \frac{(n-k+1)x_m + (k-m)a}{n-m+1}$, другая линия регрессии $Y = \frac{mx_k + (k-m)b}{k}$. Коэффициент корреляции $R_{m,k} = \sqrt{\frac{m(n-k+1)}{k(n-m+1)}}$. **6283.** $p(z) = A_{m,k} z^{k-m-1} \int_a^{b-z} (x-a)^{n-k} (b-z-x)^{m-1} dx = \frac{C_h}{b-a} \left(\frac{z}{b-a}\right)^{h-1} \times \times \left(1 - \frac{z}{b-a}\right)^{n-h}$. **6284.** $\frac{1}{n} p\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{n-h}{b-a} C_h \left(\frac{z}{b-a}\right)^{h-1} \left(1 - \frac{z}{n(b-a)}\right)^{n-h} \rightarrow \frac{1}{(h-1)!(b-a)} \times \times \left(\frac{z}{b-a}\right)^{h-1} e^{-\frac{z}{b-a}}$. **6285.** $u(\delta) = \left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n$. При $n \rightarrow \infty$ полагаем $\delta = \frac{t}{n^2}$, тогда $u\left(\frac{t}{n^2}\right) \rightarrow e^{-\frac{t}{b-a}}$. **6286.** $u_1(\delta) = (n+1) \left(\left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n - \left(\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a}\right)^n \right)$, $u_2(\delta) = \frac{(n+1)n}{2} \left(2 \left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n - \left(\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a}\right)^n - \left(\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a}\right)^n \right)$. Первая из формул получается, если заметить, что вероятность того, что все расстояния, кроме, быть может, одного определенного расстояния, больше δ , равна $\left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n$; поэтому вероятность того, что только расстояние между двумя определенными смежными точками меньше δ , равна $\left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n - - \left(\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a}\right)$. Точно так же вероятность того, что все расстояния, кроме, быть может, двух данных расстояний, больше δ , равна $\left(\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a}\right)^n$. Поэтому вероятность того, что они оба и только они меньше δ , равна $\left(2 \left(\frac{b-a-n\delta}{b-a}\right)^n - \left(\frac{b-a-(n-1)\delta}{b-a}\right)^n - \left(\frac{b-a-(n+1)\delta}{b-a}\right)^n\right)$. Остается умножить последнее значение на $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)n}{2}$. **6287.** При любом данном Δt вероятность $P_{\Delta t, t}(k)$ того, что $a = k$ в момент t , равна $P_{\Delta t, t}(k) = C_n^k (p\Delta t)^k (1-p\Delta t)^{n-k}$, где $n\Delta t = t$, $P_{0, t}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k! n^k} (pt)^k \left(1 - \frac{pt}{n}\right)^{n-k} = e^{-pt} \cdot \frac{(pt)^k}{k!}$. **6288.** Решение приводится к предыдущей задаче. **6289.** $P_m = \frac{n+1}{m+n+1}$. **6290.** $n \geq 9980$. **6291.** 9989. **6292.** Длины частей относятся друг к другу, как m к n . **6293.** $\frac{M}{N}$. **6294.** $\theta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. **6295.** $\theta(t) = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos tx dx = \frac{\sin^2 t}{t^2}$. **6296.** $\theta(t) = pe^{iat} + qe^{ibt}$, где $q = 1 - p$. **6297.** $\theta(t) = k^2 \int_a^\infty e^{itx - k^2(x-a)} dx = \frac{k^2 e^{iat}}{k^2 - it}$. **6298.** $\theta(t) = = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{itx} dx = \frac{\sin at}{at}$. **6299.** $\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{itx}}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Моменты: $M_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \frac{1}{2}$. $M_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$. **6300.** $\varphi_1(z) = F(z, L)$, $\varphi_2(z) = F(z, z)$; $\varphi(z) = \varphi_1(z) - - \varphi_2(z)$. **6301.** $p(x, y) = \frac{F''_{xy}(x, y)}{\varphi'_1(x)}$; $F(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} \int_x^{y_0} \varphi'_1(x) p(x, y) dx dy$.

6302. $\varphi_1(x) = \frac{\int_0^x x(L-x)^2 dx}{\int_0^L x(L-x)^2 dx} = \frac{6x^2L^2 - 8x^3L + 3x^4}{L^4}$; $p(x, y) = \frac{(x+1)(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}}$;
 $F(x', y') = \int_0^{x'} \int_x^{y'} \frac{12(h+1)x(L-x)^2(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}L^4} dx dy = \int_0^{x'} \frac{12(y'-x)^{h+1}x}{(L-x)^{h+1}L^4} dx$. При $h =$
 $= 1$ $F(x, y) = \int_0^x \frac{12}{L^4} (y-x)^2 x dx = \frac{6xy^2 - 8x^2y + 3x^3}{L^4}$, поэтому $\varphi(x) = \varphi_1(x) -$
 $- F(x, x) = \frac{x^2}{L^2} \left(6(1 - \frac{x}{L}) - 8\frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L}) \right) = \frac{2x^2}{L^2} (1 - \frac{x}{L})(3 - \frac{x}{L})$. При $h =$
 $= 0$ $F(x, y) = \frac{12}{L^4} \int_0^x (y-x)(L-x)x dx = \frac{6Lyx^2 - 4(L+1)x^3 + 3x^4}{L^4}$. $\varphi(x) =$
 $= \frac{2x^2}{L^2} (1 - \frac{x}{L})(3 - \frac{2x}{L})$. **6303.** $p(x, y) = \frac{(h+1)(y-x)^h}{(L-x)^{h+1}}$; $F(x, y) = (\frac{y}{L})^{h+2} -$
 $- (\frac{y-x}{L})^{h+2}$, $\varphi'_1(z) = \frac{(h+2)(L-z)^{h+1}}{L^{h+2}}$; $\varphi'_2(z) = \frac{h+2}{L} (\frac{z}{L})^{h+1}$, $\varphi(z) = 1 -$
 $- (\frac{z}{L})^{h+2} - (1 - \frac{z}{L})^{h+2}$; $P_h = (\frac{h+3}{h+1})(1 - \frac{1}{2^{h+1}})$ достигает максимума (ко-
 торый менее чем 2) при $h < 1$ и с возрастанием h убывает до 1 при $h =$
 $= \infty$. **6304.** $F(z, y) = \frac{1}{2} \int_0^z \int_x^y \frac{\cos \frac{\pi x}{2L} \sin \frac{\pi y}{L}}{1 + \cos \frac{\pi x}{L}} dx dy = \frac{L}{4\pi} \int_0^z \frac{\cos \frac{\pi x}{L} - \cos \frac{\pi y}{L}}{\cos \frac{\pi x}{2L}} dx =$
 $= \sin \frac{\pi z}{2L} - \cos^2 \frac{\pi y}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L} \right)$; $\varphi_2(z) = \sin \frac{\pi z}{2L} - \cos^2 \frac{\pi z}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L} \right)$;
 $\varphi(z) = \cos^2 \frac{\pi z}{2L} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{z}{L} \right)$. **6305.** $\varphi_1(z) = \frac{12z(L-a-z)^2}{(L-a)^4}$, если $z \leq L-a$;
 $\varphi'_1(z) = 0$, если $z > L-a$; $p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y-x < a; \\ \frac{2(L-y)}{(L-a-x)^2}, & \text{при } y-x \geq a. \end{cases}$ $F(x, y) =$
 $= (\frac{x}{L-a})^2 \left(6(1 - (\frac{L-y}{L-a})^2) - 8\frac{x}{L-a} + 3(\frac{x}{L-a})^2 \right)$ при $y-x \geq a$; $F(x, y) = F(y -$
 $- a, y) = (\frac{y-a}{L-a})^3 (4 - 3\frac{y-a}{L-a})$ при $y-x < a$; $\varphi(z) = 1 - (\frac{z-a}{L-a})^3 (4 - 3\frac{z-a}{L-a})$
 при $z > L-a$; $\varphi(z) = (\frac{z}{L-a})^2 \left(6 - 8\frac{z}{L-a} + 3(\frac{z}{L-a})^2 \right) - (\frac{z-a}{L-a})^3 (4 -$
 $- 3\frac{z-a}{L-a})$ при $z \leq L-a$. **6306.** $y_n = z_n(1 + \frac{\rho}{n})^n$, где $z_{i+1} = z_i +$
 $+ \frac{kx_i}{(1 + \frac{\rho}{n})^{i+1} \sqrt{n}}$. Поэтому $z_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{kx_i}{(1 + \frac{\rho}{n})^{i+1} \sqrt{n}}$, $y_n = y_0(1 + \frac{\rho}{n})^n +$
 $+ Y_n$, где $Y_n = \frac{k}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} x_i(1 + \frac{\rho}{n})^{n-i-1}$. Следовательно, $EY_n = 0$, $EY_n^2 =$
 $= \frac{k^2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \frac{\rho}{n})^{2i} = \frac{k^2}{n} \frac{(1 + \frac{\rho}{n})^{2n} - 1}{(1 + \frac{\rho}{n})^2 - 1} \rightarrow \frac{k^2}{2\rho} (e^{2\rho} - 1)$; применяя теорему
 Ляпунова и замечая, что $\lim (y_n - Y_n) = y_0^{e\rho}$, находим, что вероятность нера-
 венства $t_0 k \sqrt{\frac{e^{2\rho} - 1}{2\rho}} < y_n - y_0^{e\rho} < t_1 k \sqrt{\frac{e^{2\rho} - 1}{2\rho}}$ имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
6307. $x_i = \sum_{h=1}^i \alpha_h (1 - \frac{1}{A})^{i-h}$; $S_n = A \sum_{h=1}^n \alpha_h \left(1 - (1 - \frac{1}{A})^{n-h+1} \right)$;
 $ES_n^2 = A^2 b^2 \left(n - 2A(1 - \frac{1}{A}) \left(1 - (1 - \frac{1}{A})^n \right) + \frac{A(A-1)}{2A-1} \left(1 - (1 - \frac{1}{A})^{2n} \right) \right) \approx$
 $\approx A^2 b^2 n$. $Ex_i^2 = b^2 \frac{1 - (1 - \frac{1}{A})^{2i}}{2 - \frac{1}{A}} A \approx \frac{b^2 A}{2}$. Теорема Ляпунова применима, так
 как $\frac{\sum_{i=1}^n (1 - (1 - \frac{1}{A}))^3}{n^{3/2}} \rightarrow 0$ и предельная плотность вероятности равна $\frac{e^{-\frac{s^2}{2A^2 b^2}}}{Ab\sqrt{2\pi n}}$.

$$6308. R_n \approx \frac{ES_n S_{n1}}{A^2 b^2 \lambda n} = \frac{1}{\lambda n} \sum_{h=1}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{A} \right)^{n_1 - h + 1} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{A} \right)^{n - h + 1} \right) = \\ = \frac{1}{\lambda n} \left\{ n_1 - A \left(1 - \left(1 - \frac{1}{A} \right)^{n_1} \right) \left(\left(1 - \frac{1}{A} \right) + \left(1 - \frac{1}{A} \right)^{n - n_1 + 1} \right) + \frac{A}{2 - \frac{1}{A}} \left(1 - \frac{1}{A} \right)^{n - n_1} \left(\left(1 - \frac{1}{A} \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{A} \right)^n \right) \right\} \approx \frac{n_1}{\lambda n} = \lambda.$$

$$6309. Ex_{h1}^2 = \frac{b^2 A}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\lambda^2}{a}} \right);$$

$$ES_n^2 \approx A^2 b^2 \left(n - 2A \left(1 - e^{-\frac{1}{a}} \right) + \frac{A}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{a}} \right) \right) = \\ = A^2 b^2 n \left(1 - a \left(\frac{3}{2} - 2e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{a}} \right) \right);$$

$$R_\lambda \approx \frac{\lambda - a \left(1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2 - 1}{a}} - e^{-\frac{\lambda^2}{a}} - e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2 + 1}{a}} \right)}{1 - a \left(\frac{3}{2} - 2e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{a}} \right)}.$$

$$\text{При } a \rightarrow \infty \quad Ex_{n1}^2 \approx \frac{b^2 A \lambda^2}{a} = \frac{k \lambda^2}{A^2} = n b^2 \lambda^2; \quad ES_n^2 \approx 2k; \quad R_\lambda \approx \frac{\lambda - \lambda^2}{2}.$$

$$6310. y_n = y_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i \sqrt{n}}{n-1} \right). \text{ Полагаем}$$

$$z_n = \ln \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i \sqrt{n}}{n-1} \right) = -\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 - \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} \right)^3 \sum_{i=1}^n a_i^3 = \frac{-1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i - \frac{1}{2} + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому предельная плотность вероятностей z_n рав-

$$\text{на } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+\frac{1}{2})^2}{2}}. \text{ Но } \lim y_n = y_0 \lim e^{z_n - 1}, \text{ откуда } p(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\ln \frac{y}{y_0} + \frac{3}{2} \right)^2} = \\ = \sqrt{\frac{y_0^3}{2\pi y^5}} e^{-\frac{9}{8} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{y}{y_0} \right)^2}, \text{ если } \frac{y}{y_0} > 0, \text{ и } p(y) = 0, \text{ если } \frac{y}{y_0} \leq 0. \quad 6311. y_n = \\ = \left(1 + \frac{aq}{\sqrt{n}} \right)^m \left(1 - \frac{ap}{\sqrt{n}} \right)^{n-m} \text{ с вероятностью } C_n^m p^m p^{n-m}. \text{ Применяя теорему}$$

Лапласа и полагая $m = np + t\sqrt{npq}$, находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e^{-\frac{pqa^2}{2} + tA}$, где $A = a\sqrt{pq}$, причем t подчиняется нормальному закону Гаусса $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$; поэтому

$$P(y) = \frac{1}{Ay\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y + \frac{1}{2} nqa^2)^2}{2A^2}} = \frac{C}{y^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2A^2}},$$

$$\text{где } C = \frac{e^{-\frac{pqa^2}{2}}}{A\sqrt{2\pi}}. \quad 6312. R_i = -\frac{\sigma_i^2}{\sqrt{(\sigma_{i+1}^2 + \sigma_i^2)(\sigma_i^2 + \sigma_{i-1}^2)}}.$$

$$6313. E \Sigma_k = \sum_{i=1}^k \int_0^\infty x(k \prod_{j \neq i} P_j(x) - 1) dP_i(x). \text{ Если } P_i(x) = P(x), \text{ то } E \Sigma_k = \\ = k \int_0^\infty x(kP^{k-1}(x) - 1) dP(x). \quad 6314. E \Sigma_k = \frac{bk}{2} \left(1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k-2)} \right).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
<i>Из предисловий к десятому изданию I и II томов</i>	4
<i>Предисловие к третьему изданию III тома</i>	6
 Глава 1. Аналитическая геометрия на плоскости	 7
§ 1.1. Векторы, проекции и координаты на плоскости. Простейшие приложения	7
§ 1.2. Прямая и окружность	10
§ 1.3. Геометрические места	17
§ 1.4. Кривые второго порядка в простейшем виде	21
§ 1.5. Кривые второго порядка, заданные уравнением в общем виде	28
§ 1.6. Центр, диаметры. Упрощение уравнений кривых второго порядка	30
§ 1.7. Сопряженные диаметры. Оси симметрии. Асимптоты	34
§ 1.8. Фокусы и директрисы	36
§ 1.9. Касательные к кривым второго порядка. Полюсы и поляры	37
§ 1.10. Разные задачи	38
 Глава 2. Аналитическая геометрия в пространстве	 42
§ 2.1. Векторы и координаты в пространстве	42
§ 2.2. Плоскость	46
§ 2.3. Прямая в пространстве	49
§ 2.4. Образование поверхностей	58
§ 2.5. Поверхности второго порядка. Центр и диаметральные плоскости	62
§ 2.6. Касательные плоскости и прямые к поверхностям второго порядка	68
§ 2.7. Упрощение уравнений поверхностей второго порядка	73
§ 2.8. Круговые сечения, прямолинейные образующие и другие задачи	79

Глава 3. Дифференциальное исчисление	84
§ 3.1. Теория пределов	84
§ 3.2. Разные задачи	91
§ 3.3. Понятие о функции. Непрерывность. Графическое представление функций	95
§ 3.4. Нахождение производных	101
§ 3.5. Геометрическое значение производной	106
§ 3.6. Производные высших порядков	109
§ 3.7. Функции нескольких переменных. Их производные и дифференциалы	116
§ 3.8. Дифференцирование неявных функций	123
§ 3.9. Замена переменных	126
 Глава 4. Приложения дифференциального исчисления к анализу	132
§ 4.1. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Возрастание и убывание функций. Неравенства.	132
§ 4.2. Нахождение наибольших и наименьших значений функций одной переменной	136
§ 4.3. Построение графиков функций	138
§ 4.4. Разные задачи на наибольшие и наименьшие значения	140
§ 4.5. Ряды, их сходимость	147
§ 4.6. Разложение в ряды	154
§ 4.7. Ряды и действия с ними	161
§ 4.8. Раскрытие неопределенностей	169
§ 4.9. Экстремальные значения функций нескольких переменных	171
 Глава 5. Геометрические приложения дифференциального исчисления	179
§ 5.1. Уравнения кривых и их виды	179
§ 5.2. Касательная и нормаль	183
§ 5.3. Выпуклость, кривизна и радиус кривизны	190
§ 5.4. Эволюты кривых	194
§ 5.5. Огибающие кривые	196
§ 5.6. Построение кривых	198
§ 5.7. Кривые двойкой кривизны: касательная прямая и нормальная плоскость	206
§ 5.8. Кривые двойкой кривизны: соприкасающаяся плоскость, нормаль и бинормаль	211
§ 5.9. Поверхности. Их уравнения	214
§ 5.10. Касательные плоскости и нормали. Огибающие	217
§ 5.11. Линии на поверхностях и кривизна поверхностей	222

Глава 6. Высшая алгебра	225
§ 6.1. Комплексные числа	225
§ 6.2. Разложение полинома на множители, связь между коэффициентами и корнями	228
§ 6.3. Полином с вещественными коэффициентами. Теорема Ролля	232
§ 6.4. Рациональные дроби. Разложение на простейшие	236
§ 6.5. Определители. Системы линейных уравнений	238
§ 6.6. Матрицы. Характеристическое уравнение. Квадратичные формы	245
§ 6.7. Симметрические функции	249
§ 6.8. Преобразование и решение уравнений	252
§ 6.9. Отделение и вычисление корней	255
 Глава 7. Интегрирование функций	259
§ 7.1. Основные формулы и приемы интегрирования	259
§ 7.2. Интегрирование рациональных функций	262
§ 7.3. Интегрирование иррациональных функций	266
§ 7.4. Интегрирование трансцендентных функций	271
§ 7.5. Разные задачи	275
 Глава 8. Приложения интегрального исчисления	277
§ 8.1. Определенный интеграл	277
§ 8.2. Вычисление площадей (квадратура кривых)	280
§ 8.3. Вычисление длин дуг кривых	285
§ 8.4. Вычисление объемов	287
§ 8.5. Вычисление площадей поверхностей вращения	290
 Глава 9. Кратные интегралы и интегралы по линиям и поверхностям	293
§ 9.1. Введение	293
§ 9.2. Вычисление площадей	296
§ 9.3. Вычисление объемов	299
§ 9.4. Вычисление поверхностей	302
§ 9.5. Криволинейные интегралы	304
§ 9.6. Некоторые приложения двойных интегралов в механике и сопротивлении материалов	307
§ 9.7. Интегралы по поверхности, координаты центров тяжести и моменты инерции поверхностей	310
§ 9.8. Тройной интеграл	312
§ 9.9. Вычисление объемов	313
§ 9.10. Координаты центров тяжести и моменты инерции тел	316
§ 9.11. Интегралы теории поля и теории потенциала	319
§ 9.12. Многократные интегралы	330

Глава 10. Дифференциальные уравнения	333
§ 10.1. Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралам	333
§ 10.2. Нахождение функций по их полному дифференциалу	335
§ 10.3. Интегрирование полных дифференциалов	337
§ 10.4. Уравнения с разделяющимися переменными	337
§ 10.5. Уравнения однородные и приводящиеся к ним	341
§ 10.6. Уравнения линейные и приводящиеся к ним	343
§ 10.7. Уравнение Риккати	345
§ 10.8. Уравнение Якоби	346
§ 10.9. Интегрирующий множитель	347
§ 10.10. Уравнения Эйлера	349
§ 10.11. Уравнения, не решенные относительно y'	352
§ 10.12. Особенные решения уравнений	354
§ 10.13. Задачи на траектории	355
§ 10.14. Разные задачи	357
§ 10.15. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	361
§ 10.16. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения, приводящиеся к ним	366
§ 10.17. Линейные уравнения. Разные задачи	375
§ 10.18. Системы дифференциальных уравнений	378
§ 10.19. Линейные уравнения в частных производных первого порядка	385
Глава 11. Определенные интегралы	391
§ 11.1. Определенный интеграл как предел суммы	391
§ 11.2. Теоремы о среднем значении. Несобственные интегралы	394
§ 11.3. Вычисление определенных интегралов интегрированием и подстановками	400
§ 11.4. Нахождение интегралов с помощью формул приведения	406
§ 11.5. Интегрирование с помощью рядов	408
§ 11.6. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла	416
§ 11.7. Эйлеровы интегралы	423
§ 11.8. Разные задачи	427
§ 11.9. Ряды Фурье и близкие вопросы	435
Глава 12. Ряды	446
§ 12.1. Исследование сходимости рядов	446
§ 12.2. Непосредственное суммирование конечных сумм и бесконечных рядов	451
§ 12.3. Нахождение сумм рядов дифференцированием; некоторые разложения в ряды	457
§ 12.4. Разные задачи	462

Глава 13. Приближенные вычисления	470
§ 13.1. Интерполирование. Теория погрешностей	470
§ 13.2. Приближенное вычисление интегралов	476
§ 13.3. Формула Эйлера—Маклорена и подобные методы	479
§ 13.4. Усиление сходимости рядов	482
13.4.1. Преобразование Эйлера	482
13.4.2. Преобразование Куммера	485
§ 13.5. Вычисление интегралов с помощью рядов	487
§ 13.6. Решение численных уравнений	490
§ 13.7. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений	491
 Глава 14. Функции комплексной переменной	496
§ 14.1. Уравнения Коши—Римана	496
§ 14.2. Особые точки функции. Ряд Тейлора и Маклорена	497
§ 14.3. Вычеты и их применения	500
§ 14.4. Распределение нулей функции	506
§ 14.5. Разложение функций на простейшие дроби	509
§ 14.6. Другие разложения в ряды	513
§ 14.7. Производящие функции и специальные многочлены	518
§ 14.8. Конформные преобразования	522
§ 14.9. Принцип максимума модуля	526
§ 14.10. Дифференциальные уравнения при комплексной переменной	531
§ 14.11. Приложения к задачам математической физики	538
 Глава 15. Уравнения математической физики	547
§ 15.1. Составление дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка	547
§ 15.2. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме	554
§ 15.3. Метод характеристик	555
§ 15.4. Метод Римана	561
§ 15.5. Метод Фурье	563
§ 15.6. Интегральные уравнения	577
 Глава 16. Вариационное исчисление	590
§ 16.1. Уравнения Эйлера—Лагранжа	591
§ 16.2. Необходимые и достаточные условия для простейшей задачи вариационного исчисления	594
§ 16.3. Параметрическая форма интегралов, трансверсальность	598
§ 16.4. Уравнение Гамильтона—Якоби	600
§ 16.5. Интегралы, зависящие от производных высших порядков или от нескольких функций	604
§ 16.6. Разрывные решения. Односторонняя вариация	609
§ 16.7. Кратные интегралы	612
§ 16.8. Изопериметрические задачи	620
§ 16.9. Разные задачи	625

Глава 17. Теория вероятностей	629
§ 17.1. Применение основных теорем. Формула Байеса	630
§ 17.2. Математические ожидания. Способ конечных разностей и производящих функций	637
§ 17.3. Теорема Бернулли. Неравенства Чебышева	642
§ 17.4. Теоремы Лапласа и Ляпунова—Маркова	644
§ 17.5. Геометрические вероятности и законы распределения вероятностей	649
 Глава 18. Ответы	 660
Аналитическая геометрия на плоскости	660
Аналитическая геометрия в пространстве	663
Дифференциальное исчисление	666
Приложения дифференциального исчисления к анализу	690
Геометрические приложения дифференциального исчисления	703
Высшая алгебра	724
Интегрирование функций	730
Приложения интегрального исчисления	740
Кратные интегралы и интегралы по линиям и поверхностям	742
Дифференциальные уравнения	749
Определенные интегралы	762
Ряды	768
Приближенные вычисления	768
Функции комплексной переменной	772
Уравнения математической физики	777
Вариационное исчисление	787
Теория вероятностей	799

Николай Максимович Гонтер, Родион Осиевич Кузьмин
Сборник задач по высшей математике

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Редактор *К. П. Кохась*
Корректор *А. К. Райхчин*
Подготовка иллюстраций
В. В. Воскресенская, Л. В. Буракова, А. С. Сигов
Верстка в $\text{\LaTeX}$ *А. С. Сигов*
Выпускающие *О. В. Шилкова, Н. К. Белякова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат
78.01.07.953.П.001665.03.02 от 18.03.2002, выдан ЦГСЭН в СПб

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЛАНЬ»

lan@lpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru

193012, Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, 277.

Издательство: тел./факс: (812) 262-24-95, 262-11-78

pbl@lpbl.spb.ru
print@lpbl.spb.ru

Торговый отдел: 193029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13.
факс: (812) 567-54-93, тел.: 567-85-78, 567-14-45, 567-85-82, 567-85-91
trade@lanpbl.spb.ru

Филиал в Москве:

109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 5,
тел.: (095) 787-59-47, 787-59-48
lanmsk@gpress.ru

Филиал в Краснодаре:

350072, Краснодар, ул. Жлобы, 1/1, тел.: (8612) 74-10-35.

Сдано в набор 30.04.99. Подписано в печать 22.10.03.

Бумага типографская. Формат 84 × 108/32.

Гарнитура Литературная. Печать высокая.

Усл. п. л. 42,84. Уч.-изд. л. . Тираж 3000 экз.

Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП Владимирская книжная типография.

600000, г. Владимир, Октябрьский пр., д. 7