

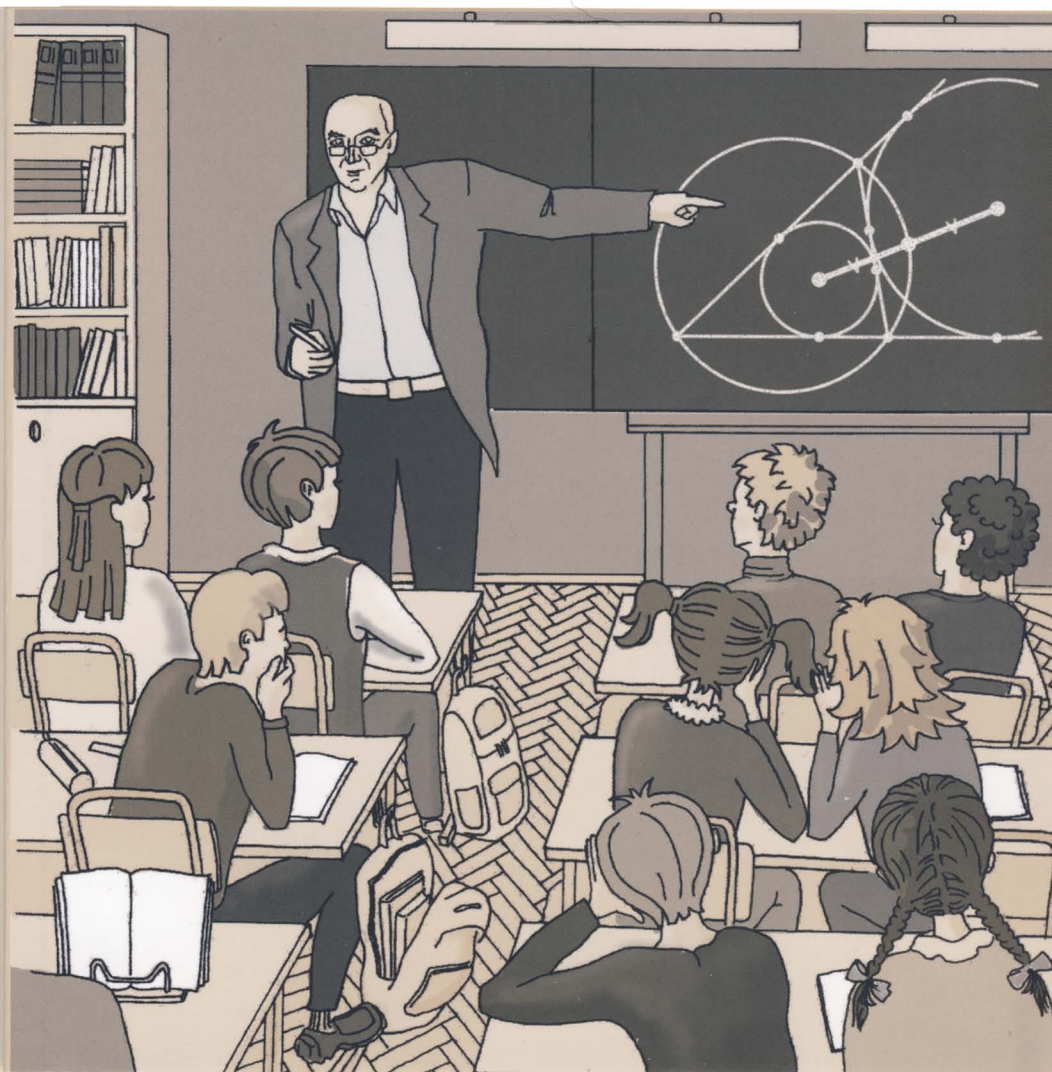
Р. К. Гордин

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Базовый и профильный уровни



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва



Рафаил
Калманович
ГОРДИН

Теоремы и задачи школьной геометрии

Базовый и профильный уровни

Чертежи **М.Ю.Панова** при участии **П.Г.Барон**,
М.В.Некрасевича и **Я.М.Финкельберга**

3–е издание, стереотипное



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

Москва

2018

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Г68



Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»



Москва, Большой Власьевский пер., 11 (проезд до ст. м. «Смоленская») или «Нропотнинская»



<http://biblio.mccme.ru/>
biblio@mccme.ru



(499) 241-72-85
(495) 745-80-31

Гордин Р. К.

**Г68 Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровни / Р. К. Гордин ; чертежи М. Ю. Панова и др. — 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2018. — 96 с. : ил.
ISBN 978-5-4439-2681-0**

В этой книге в форме серии задач излагается практически вся элементарная геометрия. Книга состоит из двух частей: первую можно считать базовым курсом геометрии, содержащим наиболее известные и часто используемые теоремы; во второй приводятся малоизвестные, но красивые факты. Близкие по тематике задачи располагаются рядом, чтобы было удобно их решать.

Книга будет полезна как школьникам математических классов, так и преподавателям. Кроме того, она доставит немало приятных минут всем любителям геометрии.

Предыдущее издание книги вышло в 2016 г.

**ББК 22.151.0
УДК 514.112**

Учебно-методическое издание

Рафаил Калманович Гордин

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Базовый и профильный уровни

3-е издание, стереотипное



Редактор *М. Г. Быкова*. Тех. редактор *П. М. Юрьев*. Художник *Д. А. Курынина*.

Подписано в печать 30/1 2018 года. Формат 60 × 90/16. Офсетная бумага №1. Офсетная печать. Школьная гарнитура. 6,00 печ. л. 6,40 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп», тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru 105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6.

ISBN 978-5-4439-2681-0

© Гордин Р. К., 2003, 2015.

© МЦНМО, 2018.

Оглавление

Предисловие	6	
часть I		
Основные сведения из школьной геометрии	8	
Планиметрия	8	
1. Признаки равенства треугольников. 2. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника. 3. Теорема о серединном перпендикуляре. 4. Признаки и свойства параллельных прямых. 5. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё. 6. Признаки равенства прямоугольных треугольников. 7. Теорема о биссектрисе угла. 8. Прямоугольный треугольник с углом 30° . 9. Геометрические неравенства. 10. Параллелограмм. 11. Прямоугольник. 12. Ромб. 13. Квадрат. 14. Теорема Фалеса. 15. Средняя линия треугольника. 16. Свойство середин сторон четырёхугольника. 17. Теорема о медианах треугольника. 18. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла. 19—20. Трапеция. 21. Окружность. 22. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. 23. Теорема о высотах треугольника. 24. Касательная к окружности. 25. Касающиеся окружности. 26. Углы, связанные с окружностью. 27. Вписанный четырёхугольник. 28. Описанная трапеция. 29. Теорема о пропорциональных отрезках. 30. Подобие. 31. Признаки подобия треугольников. 32. Свойство биссектрисы треугольника. 33. Пропорциональные отрезки в окружности. 34. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. 35. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. 36. Метрические соотношения в треугольнике. 37. Формулы площади треугольника. 38. Элементы равностороннего треугольника. 39. Формулы площади параллелограмма, трапеции, выпуклого четырёхугольника. 40. Отношение площадей. 41. Длина окружности, дуги окружности. 42. Площадь круга. 43—45. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки.		
Стереометрия	21	
46. Факты, непосредственно связанные с аксиомами. 47. Прямая, параллельная плоскости. 48. Параллельные прямые в пространстве. 49. Параллельные плоскости. 50. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. 51. Скрещивающиеся прямые. 52. Свойства параллельного проектирования. 53. Перпендикуляр к плоскости. 54. Двугранный угол. 55. Трёхгранный угол. Многогранный угол. 56—58. Сфера. Касательная плоскость. Касательная прямая. Касающиеся сферы. 59—61. Правильная пирамида. 62. Боковая поверхность призмы и пирамиды. 63. Объёмы многогранников. 64. Объёмы тел вращения. 65. Поверхности тел вращения. 66—70. Координаты и векторы в пространстве. 71. Свойства скалярного произведения векторов.		

Избранные теоремы и задачи элементарной геометрии	31
Планиметрия	31
I. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум	31
105—119. Основные факты. 106. Неравенство треугольника. 120—136. Задачи на построение и доказательство. 121. Задача Герона. 124. Задача Фаньяно. 125. Задача Ферма. 135. Неравенство Эрдёша.	
II. Сумма углов треугольника. Средняя линия треугольника. Параллелограммы, трапеции. Биссектриса. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла	35
137—149. Основные факты. 137. Угол между биссектрисами треугольника. 144. Теорема Вариньона. 150—160. Задачи на построение. 161—170. Задачи на доказательство. 171—176. Задачи на вычисление.	
III. Окружность. Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность	40
177—201. Основные факты. 177. Углы, связанные с окружностью. 178. Критерии принадлежности четырёх точек одной окружности. 185. Теорема Помпею. 186. Точка Торичелли. 187. Теорема о трилистнике. 188. Формула Эйлера. 190. Прямая Эйлера. 192. Теорема Нагеля. 193. Теоремы об ортотреугольнике. 195. Теорема Мансиона. 196. Задача Архимеда. 197. Теорема Штейнера—Лемуса. 198. Окружность девяти точек. 199. Прямая Симсона. 200. Точка Микеля. 202—210. Задачи на построение. 211—216. Задачи на доказательство. 217—222. Задачи на вычисление.	
IV. Касательная к окружности. Касающиеся окружности	48
223—230. Основные факты. 229. Теорема Коперника. 230. Лемма Архимеда. 231—233. Задачи на GMT и построение. 234—242. Задачи на доказательство и вычисление.	
V. Подобие. Отношение отрезков. Пропорциональные отрезки в окружности	51
243—255. Основные факты. 243. Теорема о пропорциональных отрезках на параллельных прямых. 244. Замечательное свойство трапеции. 246. Обобщённая теорема Пифагора. 248. Теорема Менелая. 249. Теорема Чевы. 250. Прямая Гаусса. 251. Точка Жергона. Точка Нагеля. 253. Окружность Аполлония. 255. Задача о бабочке. 256—259. Задачи на построение. 260—270. Задачи на доказательство. 271—278. Задачи на вычисление.	
VI. Площадь. Отношение площадей. Метод площадей	57
280—288. Основные факты. 280. Некоторые формулы площади треугольника. 281. Задача Люиле. 287. Формула для биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними. 289—290. Задачи на построение и GMT. 291—295. Задачи на доказательство. 296—298. Задачи на вычисление.	
VII. Вписанные и описанные четырёхугольники	60
299—307. Основные факты. 299. Признак описанного четырёхугольника. 300. Свойства вписанного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями. 301. Теорема Монжа. 302. Формула Брахмагупты. 304. Теорема Ньютона. 306. Теорема Птолемея. 308—309. Задачи на доказательство. 310—312. Задачи на вычисление.	

VIII. Геометрические преобразования	62
313—320. Основные факты. 317. Теорема о композиции поворотов. 318. Теорема о центрах трёх гомотетий. 320. Теорема Шаля. 321—336. Задачи на построение. 337—345. Задачи на доказательство и вычисление. 341. Треугольники Наполеона.	
Стереометрия	67
I. Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность в пространстве. Построения на проекционном чертеже. Вычисление отношений отрезков	67
346—351. Основные факты. 352—359. Задачи на построение. 360—370. Задачи на вычисление.	
II. Перпендикулярность в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах. Углы в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми	70
371—384. Основные факты. 382. Формула Лейбница. 383. Теорема косинусов для тетраэдра. 384. Уравнение плоскости «в отрезках». Параметрические уравнения прямой. Расстояние от точки до плоскости, заданной уравнением. 385—390. Задачи на доказательство. 391—410. Задачи на вычисление.	
III. Сфера, описанная около многогранника. Сфера, вписанная в многогранник	76
411—413. Основные факты. 414—421. Задачи на вычисление.	
IV. Виды тетраэдров	78
422—427. Основные факты. 422. Равногранный тетраэдр. 423—424. Ортоцентральный тетраэдр. 424. Прямая Эйлера ортоцентрального тетраэдра. 425—426. Прямоугольный тетраэдр. 425. Обобщённая теорема Пифагора. 427. Каркасный тетраэдр. 428—433. Задачи на доказательство. 434—440. Задачи на вычисление.	
V. Объём многогранника. Отношение объёмов. Метод объёмов	82
441—446. Основные факты. 447—448. Задачи на доказательство. 449—462. Задачи на вычисление.	
VI. Круглые тела. Комбинации круглых тел и многогранников. Объём и площадь поверхности	85
463—464. Основные факты. 463. Принцип Кавальери. 464. Поверхность шарового слоя. 465—466. Задачи на построение и доказательство. 467—483. Задачи на вычисление.	
VII. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум	89
484—487. Основные факты. 484. Теорема об угле прямой с плоскостью. 487. Теорема косинусов для трёхгранного угла. 488—494. Задачи на доказательство. 495—500. Задачи на вычисление.	
Ответы и указания	92
ПРИЛОЖЕНИЕ	
Соответствие номеров задач в книге и системе «Задачи по геометрии» http://zadachi.mccme.ru/	96

В первой части этой книги перечислены основные теоремы школьного курса геометрии и некоторые ключевые факты, которые будут полезны тем школьникам, которые добросовестно учатся в школе и хотели бы научиться решать более-менее содержательные геометрические задачи. Все эти факты не выходят за пределы школьной программы и содержатся практически в любом школьном учебнике (иногда в виде задач). Первая часть может служить памяткой по геометрии при подготовке к ГИА и ЕГЭ.

Вторая часть состоит из задач повышенной трудности. Это а) известные классические задачи и теоремы элементарной геометрии, не вошедшие в школьные учебники;

б) красивые задачи математических олимпиад разных уровней;

в) задачи, содержащие ключевые идеи;

г) некоторые ставшие довольно популярными задачи, в разные годы предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике (МГУ, МФТИ, МИФИ и т. д.);

д) просто интересные и красивые геометрические задачи, которые традиционно предлагаются на занятиях различных математических кружков.

Задачи второй части могут быть рекомендованы тем школьникам, которые проявляют повышенный интерес к геометрии, любят решать геометрические задачи. При необходимости подробные решения большинства из них можно найти в известных книгах:

1) *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. I: Планиметрия. — М.: ОГИЗ, 1948.

2) *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.

3) *Делоне Б. Н., Житомирский О. К.* Задачник по геометрии. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.

4) *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962.

5) *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. — (Библиотека математического кружка; вып. 14).

6) *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2008.

7) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2007.

8) *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. — (Библиотека математического кружка; вып. 19).

9) *Пржевальский Е.* Собрание геометрических теорем и задач. — М., 1909.

10) *Ткачук В. В.* Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2011.

11) Методическое пособие по математике для учащихся старших классов и абитуриентов / Под ред. М. И. Шабунина. — М.: Физматкнига, 2013.

12) *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 9—11: От учебной задачи к творческой. — М.: Дрофа, 1996.

13) *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2: Геометрия (планиметрия); Ч. 3: Геометрия (стереометрия). — М.: ГИТТЛ, 1954. — (Библиотека математического кружка; вып. 2 и 3).

14) Сборник методических материалов письменных испытаний по математике и физике абитуриентов Московского Физтеха (1947—2006 гг.). Математика / Под ред. И. Г. Шомполова. — М.: МФТИ, 2007.

15) Журнал «Квант».

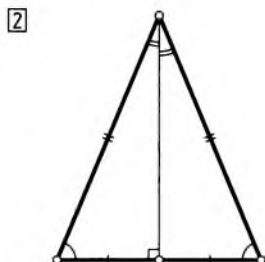
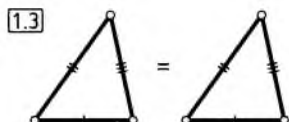
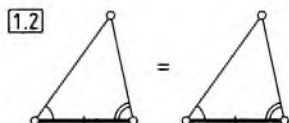
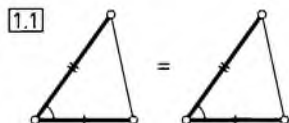
При подборе задач использована Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» (<http://zadachi.mccme.ru/>), созданная Московским математическим центром под руководством И. Ф. Шарыгина, а также сотрудниками и учениками московской школы № 57. Система также содержит решения большинства из предложенных задач (соответствие номеров задач в книге и задач в системе приведено в приложении на с. 96).

Выражаю искреннюю благодарность М. Ю. Панову, М. Г. Быковой и С. Е. Посицельскому, чьи советы и замечания оказали мне большую помощь при подготовке этого издания.

Р. К. Гордин

Основные сведения из школьной геометрии

ПЛАНИМЕТРИЯ



1. Признаки равенства треугольников.

1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

2. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.

1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2) Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.

3) Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

4) Если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

5) Если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

6) Если медиана треугольника является его биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

3. **Теорема о серединном перпендикуляре.** Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к отрезку).

4. **Признаки и свойства параллельных прямых.**

1) **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2) Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны.

3) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

4) Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

5) Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

5. **Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё.**

1) Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .

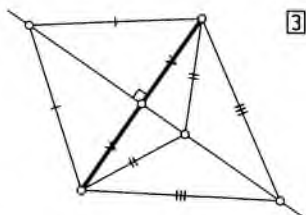
2) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3) Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.

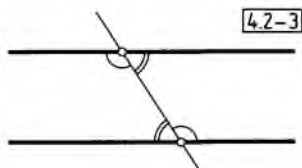
4) Сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному, равна 360° .

5) Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

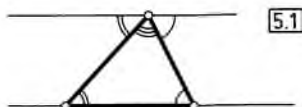
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .



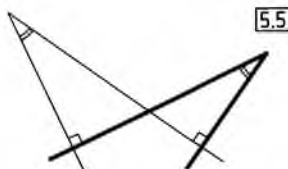
3



4.2-3



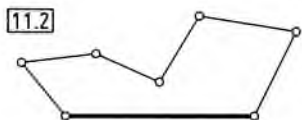
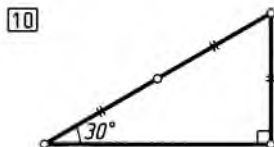
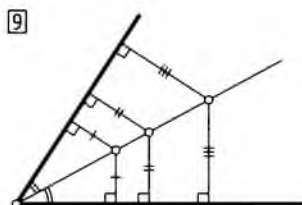
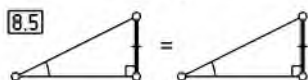
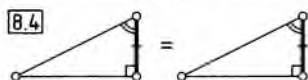
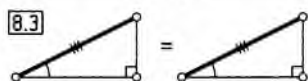
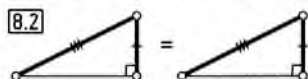
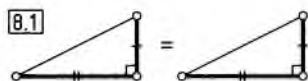
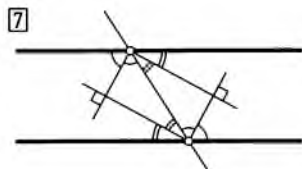
5.1



5.5



6



7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

8. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

- 1) По двум катетам.
- 2) По катету и гипотенузе.
- 3) По гипотенузе и острому углу.
- 4) По катету и прилежащему острому углу.

5) По катету и противолежащему острому углу.

9. Теорема о биссектрисе угла. Геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от его сторон, есть биссектриса угла.

10. Прямоугольный треугольник с углом 30° . 1) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

2) Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

11. Геометрические неравенства.

1) Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны (*неравенство треугольника*).

2) Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3) Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

4) Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

5) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6) Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то:

- а) перпендикуляр короче наклонных;
- б) большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.

12. Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

1) Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

2) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

3) Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

4) Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6) Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7) Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

13. Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

1) Диагонали прямоугольника равны.

2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

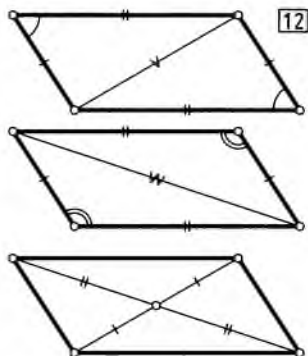
14. Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

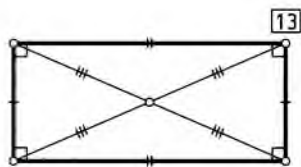
1) Диагонали ромба перпендикулярны.

2) Диагонали ромба делят его углы пополам.

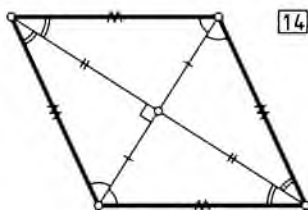
3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.



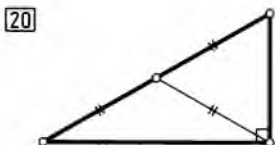
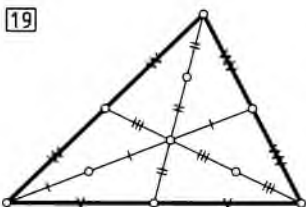
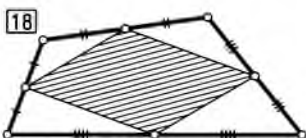
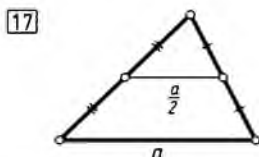
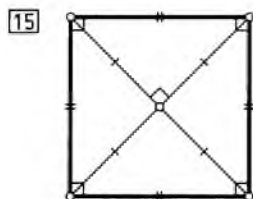
12



13



14



4) Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

15. Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

16. Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

17. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

18. Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

19. Теорема о медианах треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

20. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла.

1) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

2) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

21—22. Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединя-

ющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

21. Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

22. Трапеция называется равнобедренной (равнобокой), если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1) Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

3) Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

4) Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

5) Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

23. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же (положительное) расстояние, называемое радиусом.

Свойства окружности.

1) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

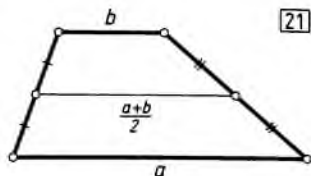
2) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

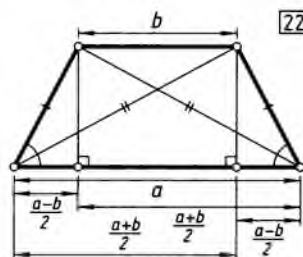
4) Равные хорды одинаково удалены от центра окружности.

5) Хорды, равноудалённые от центра окружности, равны.

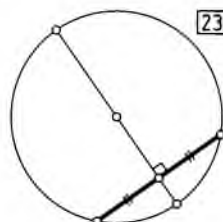
6) Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.



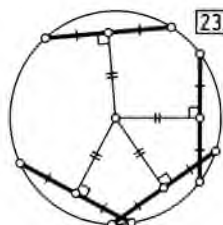
21



22

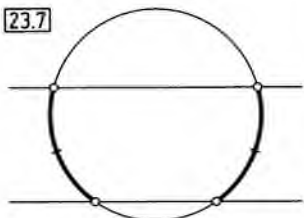


23.1-3

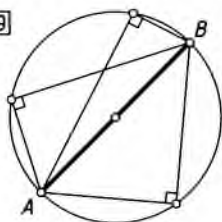


23.4-5

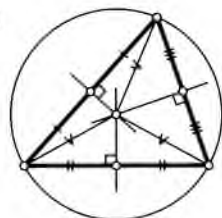
23.7



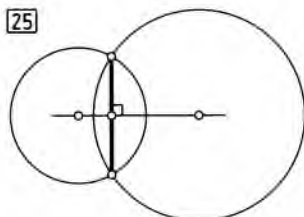
23.9



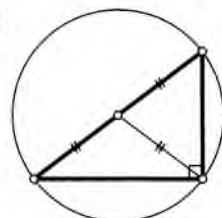
24



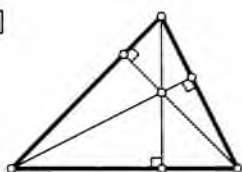
25



26



27



7) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

8) Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

9) *Замечательное свойство окружности.* Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .

24. *Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.* Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

25. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

26. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

27. *Теорема о высотах треугольника.* Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

28. *Касательная к окружности.* Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку (точку касания), называется касательной к окружности.

1) Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2) Если прямая, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая — касательная к окружности.

3) Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности в точках A и B , то $MA = MB$.

4) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

5) Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности с центром O в точках A и B , то OM —

серединный перпендикуляр к отрезку AB .

6) *Теорема о биссектрисах треугольника.* Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — в центре окружности, вписанной в треугольник.

29. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c , равен $\frac{a+b-c}{2}$.

30. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

31. *Касающиеся окружности.* Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1) Точка касания двух окружностей лежит на прямой, проходящей через центры окружностей, т. е. на линии центров. (Если точка касания лежит между центрами окружностей, то говорят, что окружности касаются внешним образом, а если нет — внутренним.)

2) Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R+r=O_1O_2$.

3) Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R-r=O_1O_2$.

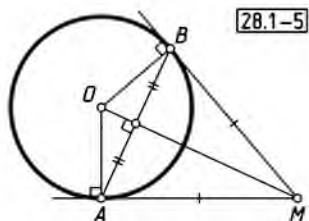
32. Углы, связанные с окружностью.

1) Угловая величина дуги окружности равна угловой величине центрального угла.

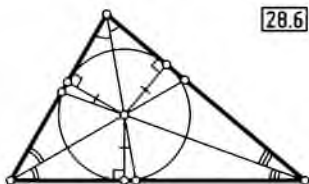
2) Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

3) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

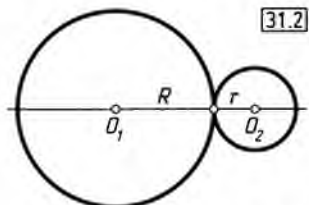
4) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным



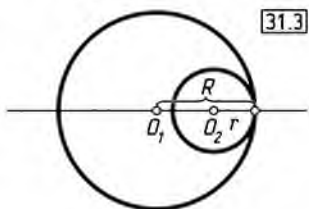
28.1-5



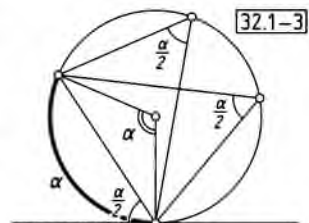
28.6



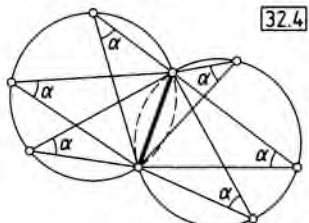
31.2



31.3

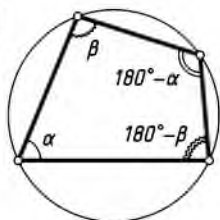


32.1-3

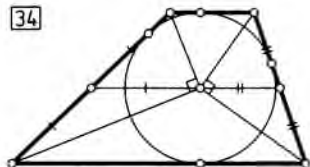


32.4

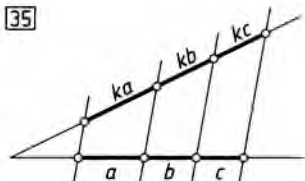
33



34



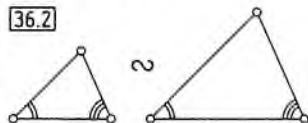
35



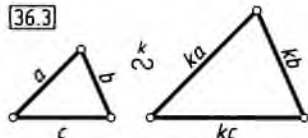
36.1



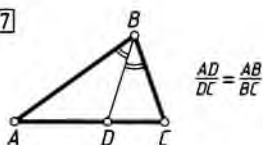
36.2



36.3



37



углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

33. Вписанный четырёхугольник.

1) Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .

2) Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.

34. Описанная трапеция. Если в трапецию можно вписать окружность, то:

1) её средняя линия равна полусумме боковых сторон;

2) боковая сторона видна из центра окружности под прямым углом.

35. Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

36. Подобие. Признаки подобия треугольников.

1) Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

2) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

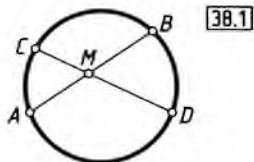
3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

37. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

38. Пропорциональные отрезки в окружности.

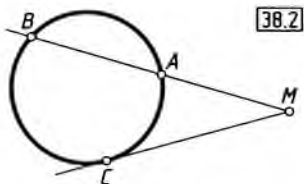
1) Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке M , равны, т. е. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

2) **Теорема о касательной и секущей.** Если из точки M к окружности проведены касательная MC и секущая $MAВ$, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной, т. е. $MA \cdot MB = MC^2$.



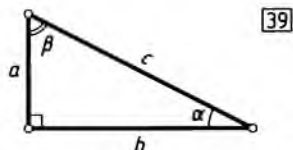
39. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

1) Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.



2) Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

40. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

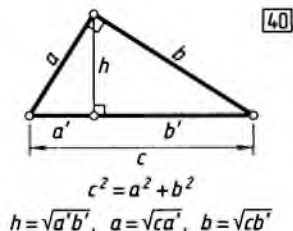


1) **Теорема Пифагора.** Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha = c \cos \beta = \\ &= b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta \\ b &= c \sin \beta = c \cos \alpha = \\ &= a \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned}$$

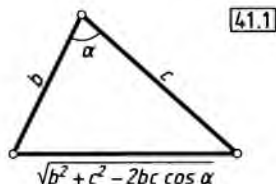
2) **Теорема, обратная теореме Пифагора.** Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный.

3) **Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.** Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.



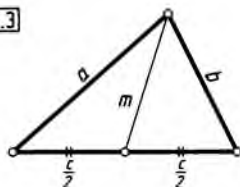
41. Метрические соотношения в треугольнике.

1) **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

41.3



2) *Следствие из теоремы косинусов.* Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3) *Формула для медианы треугольника.* Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c , то

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

где a и b — остальные стороны треугольника.

4) *Теорема синусов.* Если стороны треугольника равны a , b и c , а противолежащие им углы — α , β и γ соответственно, то

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

42. Формулы площади треугольника.

1) Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3) Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4) Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

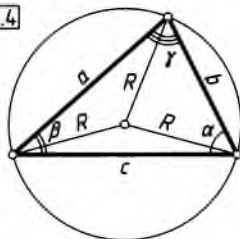
5) *Формула Герона:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

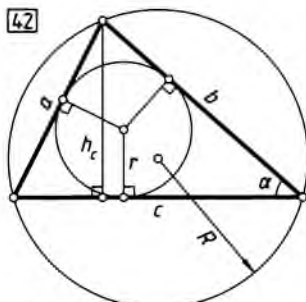
где a , b , c — стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

43. Элементы равностороннего треугольника. Пусть h , S , r , R — высота, площадь, радиусы описанной и вписанной

41.4

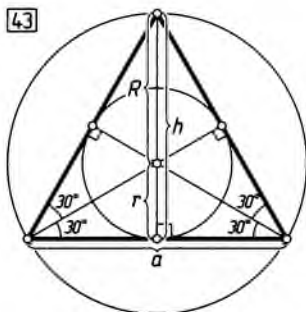


42



$$S = \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

43



ной окружности равностороннего треугольника со стороной a . Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

44. Формулы площади параллелограмма, трапеции, выпуклого четырёхугольника.

1) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2) Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3) Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5) Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6) Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

45. Отношение площадей.

1) Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

2) Если M — точка на стороне BC треугольника ABC , то

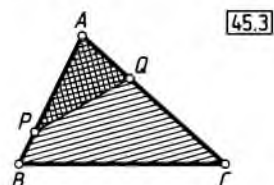
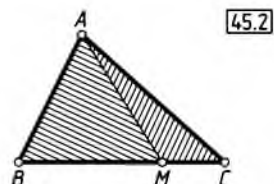
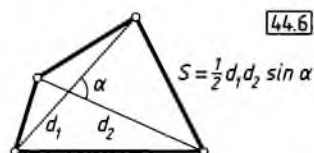
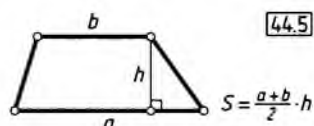
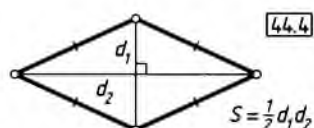
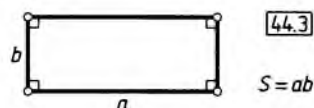
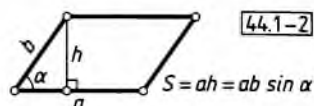
$$\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{BM}{CM}.$$

3) Если P и Q — точки на сторонах AB и AC треугольника ABC (или на их продолжениях), то

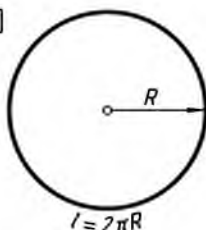
$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}.$$

46. Длина окружности, дуги окружности. Площадь круга.

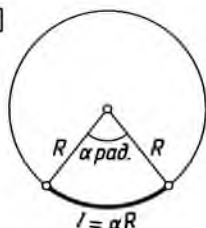
1) Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.



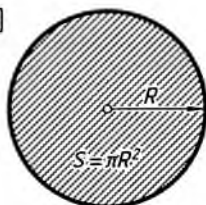
46.1



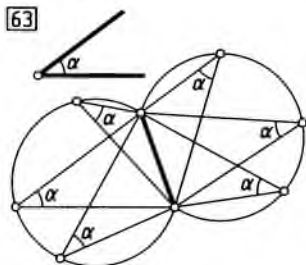
46.2



46.3



63



2) Если радианная мера дуги окружности радиуса R равна α , то длина дуги равна αR .

3) Площадь круга радиуса R равна πR^2 .

47—65. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

47. Постройте треугольник по трём сторонам.

48. Постройте угол, равный данному.

49. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

50. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

51. Разделите отрезок пополам.

52. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной.

53. Через данную точку проведите прямую, параллельную данной.

54. Постройте биссектрису данного угла.

55. Постройте сумму (разность) двух данных отрезков.

56. Разделите отрезок на n равных частей.

57. Постройте окружность, описанную около данного треугольника.

58. Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x:a=b:c$.

59. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

60. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

61. Даны отрезки a и b . Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{ab}$.

62. Постройте треугольник по серединам трёх его сторон.

63. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

64. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

65. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

66. Факты, непосредственно связанные с аксиомами.

1) Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

2) Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

3) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

67. Прямая, параллельная плоскости. Прямая и плоскость называются параллельными, если у них нет ни одной общей точки.

1) *Признак параллельности прямой и плоскости.* Если прямая a , не лежащая в плоскости α , параллельна некоторой прямой b этой плоскости, то прямая a параллельна плоскости α .

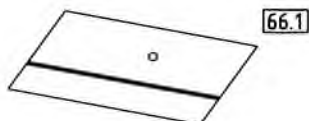
2) Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.

68. Параллельные прямые в пространстве. Прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки.

1) Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a , и плоскость, проходящая через прямую b , пересекаются, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b .

2) Если различные прямые a и b параллельны прямой c , то прямые a и b параллельны.

69. Параллельные плоскости. Плоскости называются параллельными, если у них нет ни одной общей точки.



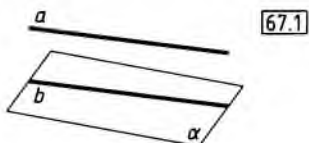
66.1



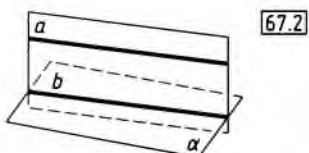
66.2



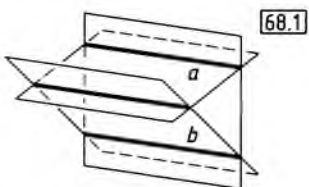
66.3



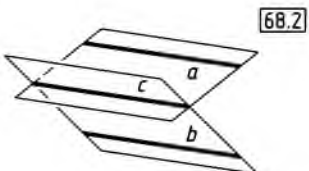
67.1



67.2

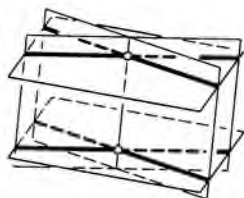


68.1

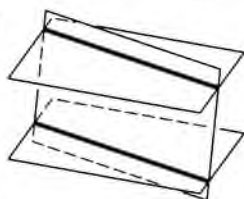


68.2

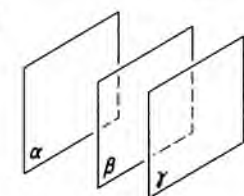
69.1



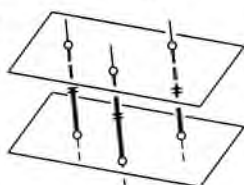
69.2



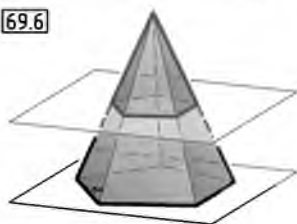
69.3



69.4



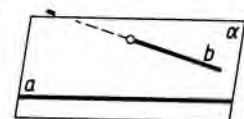
69.6



70



71.1



1) **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

2) Прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

3) Если различные плоскости α и β параллельны плоскости γ , то плоскости α и β параллельны.

4) Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

5) Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

6) Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

70. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

71. Скрещивающиеся прямые. Прямые называются скрещивающимися, если через них нельзя провести плоскость.

1) **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a , то a и b — скрещивающиеся прямые.

2) Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3) **Теорема об общем перпендикуляре скрещивающихся прямых.** Для любых двух скрещивающихся прямых существу-

ет единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

4) *Угол между скрещивающимися прямыми a и b .* Рассмотрим произвольную точку M в пространстве. Если M не лежит ни на одной из прямых a и b , то за угол между a и b принимается угол между прямыми a' и b' , проходящими через точку M и соответственно параллельными a и b . Если M лежит на одной из прямых, например a , то за угол между a и b принимается угол между прямой a и прямой b' , проходящей через точку M параллельно b .

Теорема. Угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M .

72. Свойства параллельного проектирования.

1) Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.

2) Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

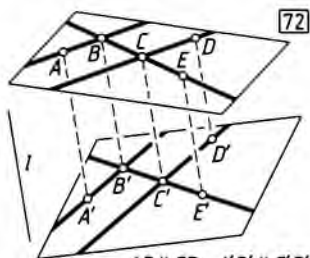
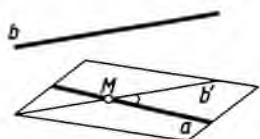
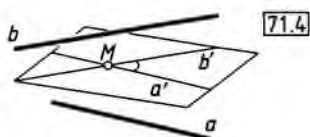
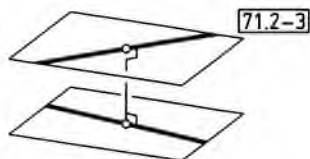
3) При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

73. Перпендикуляр к плоскости. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

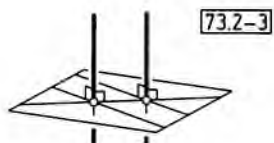
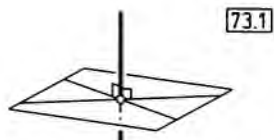
1) *Признак перпендикулярности прямой и плоскости.* Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2) Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

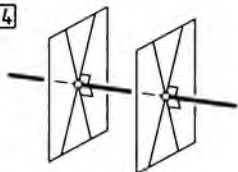
3) Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то



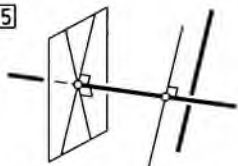
$$AB \parallel CD, A'B' \parallel C'D' \\ \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}, \frac{BC}{CE} = \frac{B'C'}{C'E'}$$



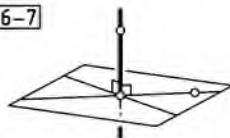
73.4



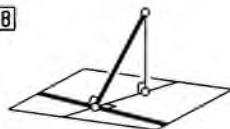
73.5



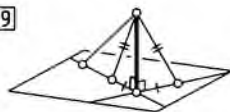
73.6–7



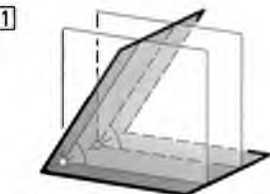
73.8



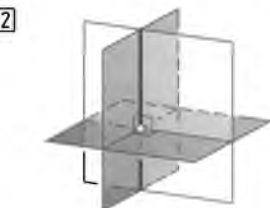
73.9



74.1



74.2



вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4) Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

5) Если прямая и не содержащая её плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6) Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7) Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8) *Теорема о трёх перпендикулярах.* Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9) Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

74. Двугранный угол. Двугранным углом называется пересечение двух полупространств, образованных двумя пересекающимися плоскостями. Линейным углом двугранного угла называется пересечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

1) Линейный угол двугранного угла не зависит от выбора точки на его ребре.

2) *Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.* Две плоскости перпендикулярны (обра-

зуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой.

3) Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

75. Трёхгранный угол. Многогранный угол.

1) Сумма двух плоских углов трёхгранного угла больше третьего.

2) Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

76. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

1) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

2) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

77—84. Сфера. Касательная плоскость. Касательная прямая. Касающиеся сферы.

77. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

78. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

79. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.



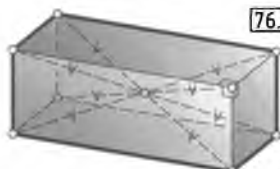
74.3



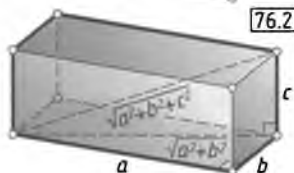
75.1



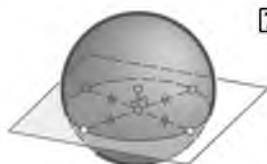
75.2



76.1



76.2

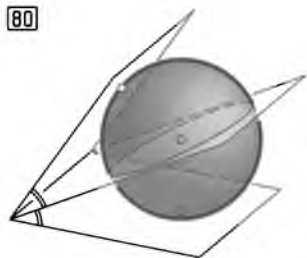


77



78—79

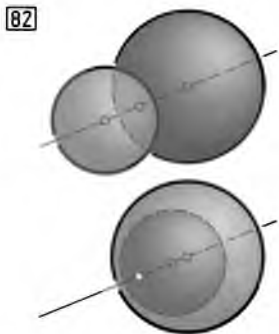
80



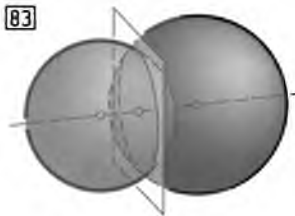
81



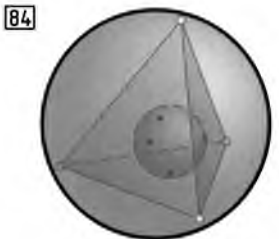
82



83



84



80. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

81. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны.

82. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

83. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

84. 1) Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу, и притом только одну.

2) В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу, и притом только одну.

85—87. Правильная пирамида.

85. Если $DABC$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D , высотой DM и стороной основания a , а A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон основания BC , AC и AB соответственно, то

1) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

2) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

3) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол двугранного угла между боковыми гранями пирамиды;

4) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

5) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

$$6) A_1M=B_1M=C_1M=\frac{1}{3}AA_1=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6} —$$

ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

7) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD ;

8) противоположные рёбра попарно перпендикулярны: $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, $AC \perp BD$.

86. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

87. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P , высотой PM и стороной основания a , а A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон основания AB , BC , CD и AD соответственно, то

1) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

2) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

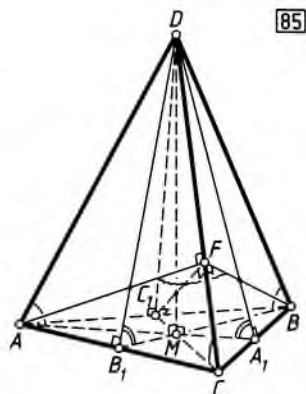
3) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол двугранного угла между соседними боковыми гранями пирамиды;

4) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

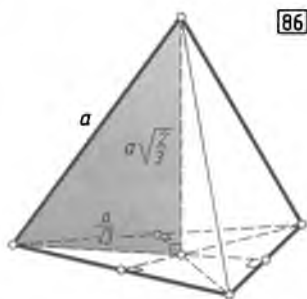
5) $AM=BM=CM=DM=\frac{1}{2}DB=\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

6) $A_1M=B_1M=C_1M=D_1M=\frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

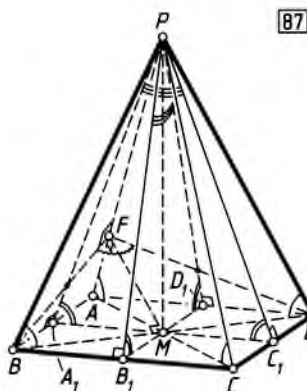
7) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающейся с ней бокового ребра AP ;



85



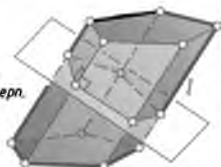
86



87

[88.1]

$$S_{\text{бок.}} = l P_{\text{перп.}}$$



[88.2]

$$S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \beta}$$



[89.1]

$$V = abc$$



[89.2]

$$V = h S_{\text{осн.}}$$



[89.3]

$$V = \frac{1}{3} h S_{\text{осн.}}$$



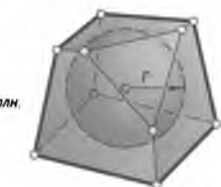
[89.5]

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$$



[89.8]

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{полн.}}$$



8) каждое боковое ребро перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания: $AP \perp BD$, $BP \perp AC$, $CP \perp BD$, $DP \perp AC$.

88. Боковая поверхность призмы и пирамиды.

1) Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

2) Боковая поверхность правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

89. Объёмы многогранников.

1) Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

2) Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

3) Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

4) Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

5) Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

6) Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

7) Если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади граней тетраэдра, а h_1, h_2, h_3, h_4 — опущенные на них высоты, то $S_1 h_1 = S_2 h_2 = S_3 h_3 = S_4 h_4$.

8) Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус сферы.

90. Объёмы тел вращения.

1) Объём цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

2) Объём конуса равен трети произведения площади его основания на высоту.

3) Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

4) Объём шарового сегмента высотой h шара радиуса R равен $\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

91. Поверхности тел вращения.

1) Боковая поверхность цилиндра с высотой h и радиусом основания r равна $2\pi rh$.

2) Боковая поверхность конуса с образующей l и радиусом основания r равна πrl .

3) Поверхность сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

4) Сферическая поверхность шарового сегмента высотой h шара радиуса R равна $2\pi Rh$.

92—104. Координаты и векторы в пространстве.

92. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

93. Для того чтобы ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где $k \neq 0$ — некоторое число.

94. Для того чтобы три ненулевых вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

95. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.

96. Если M — середина AB , то $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

90.1, 91.1



$$V = hS_{\text{осн.}} = \pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$$

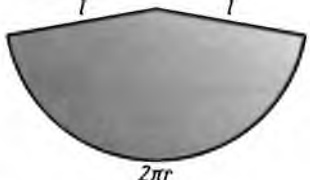


90.2, 91.2



$$V = \frac{1}{3}hS_{\text{осн.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi rl$$



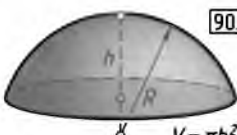
90.3, 91.3



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

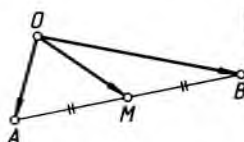
90.4, 91.4



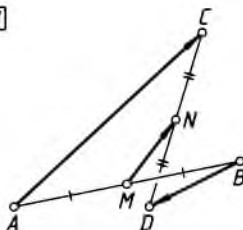
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$

$$S_{\text{сф. поф.}} = 2\pi Rh$$

96



97



97. Если M — середина AB , а N — середина CD , то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

98. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

99. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

100. Свойства скалярного произведения векторов.

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$3) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$4) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}};$$

$$5) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2;$$

6) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

101. Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

102. Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

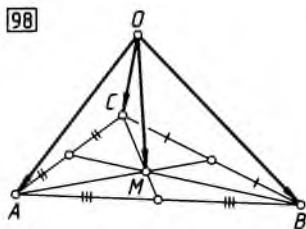
103. Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектору нормали), описывается уравнением

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

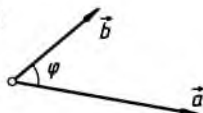
104. Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

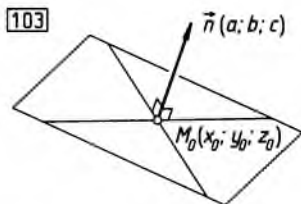
98



102

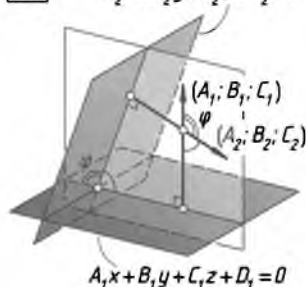


103



104

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$



$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

Избранные теоремы и задачи элементарной геометрии

ПЛАНИМЕТРИЯ

I. Геометрические неравенства.

Задачи на максимум и минимум

105. Против большей стороны треугольника лежит больший угол. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

106. *Неравенство треугольника.* Сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности.

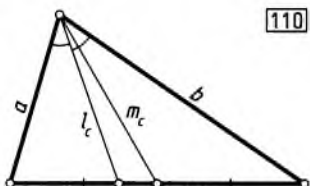
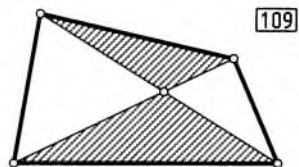
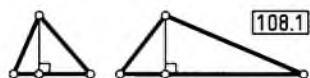
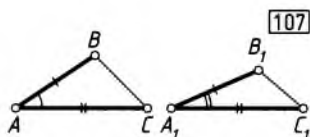
107. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Тогда $BC>B_1C_1$ тогда и только тогда, когда $\angle A>\angle A_1$.

108. 1) Основание высоты, проведённой из вершины наибольшего угла треугольника, лежит на стороне треугольника.

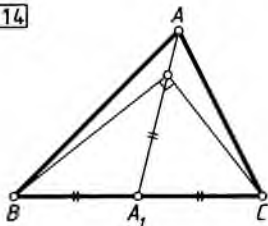
2) Основание высоты, проведённой из вершины острого угла тупоугольного треугольника, лежит на продолжении стороны.

109. Сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы двух его противоположных сторон.

110. Если a и b — стороны треугольника, а m_c и l_c — соответственно медиана и биссектриса, проведённые к третьей стороне, то $\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$ и $l_c < \frac{2ab}{a+b}$.



114



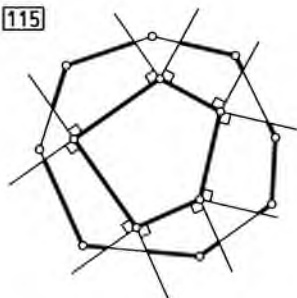
111. Сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше трёх четвертей периметра.

112. Расстояние между любыми двумя точками треугольника не превосходит его наибольшей стороны.

113. Сумма расстояний от любой внутренней точки треугольника до его вершин больше полупериметра, но меньше периметра.

114. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.

115



115. Если внутри выпуклого многоугольника расположен другой выпуклый многоугольник, то периметр внешнего многоугольника не меньше, чем периметр внутреннего.

116. Для любого треугольника верно неравенство $R \geq 2r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, причём равенство имеет место только для правильного треугольника.

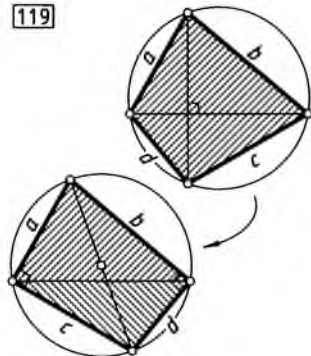
117. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный.

118. 1) Из всех треугольников данной площади равносторонний имеет наименьший периметр.

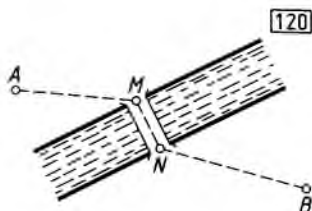
2) Из всех треугольников данного периметра равносторонний имеет наибольшую площадь.

119. Пусть a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника, S — его площадь. Тогда $S \leq \frac{ac+bd}{2}$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда четырехугольник вписанный и его диагонали взаимно перпендикулярны.

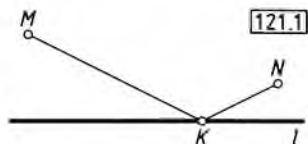
119



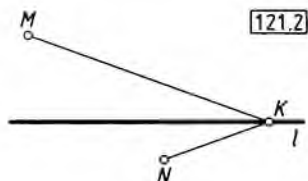
120. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B , чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке.)



121. 1) *Задача Герона*. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , для которой сумма $MK + NK$ была бы наименьшей.



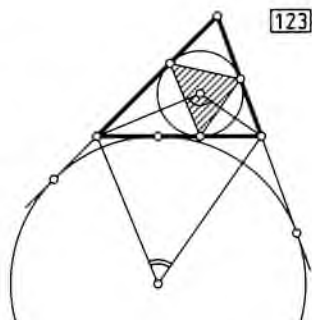
2) Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , для которой модуль разности отрезков MK и NK был бы наибольшим.



122. Какие значения может принимать:

- 1) наибольший угол треугольника;
- 2) наименьший угол треугольника;
- 3) средний по величине угол треугольника?

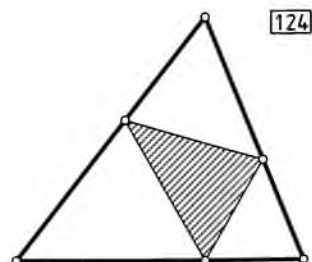
123. 1) Докажите, что сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом, а из центра внеписанной — под острым.



2) Докажите, что треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности и сторон треугольника — остроугольный.

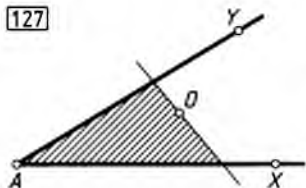
124. *Задача Фаньяно*. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра.

125. *Задача Ферма*. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

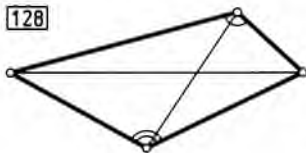


126. Докажите, что точка, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, есть точка пересечения медиан.

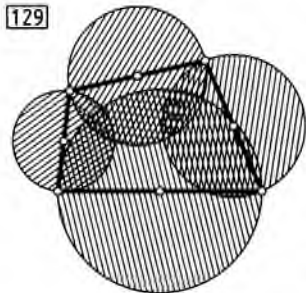
127



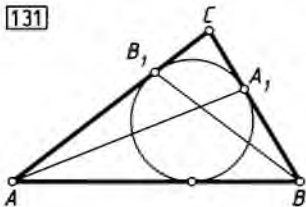
128



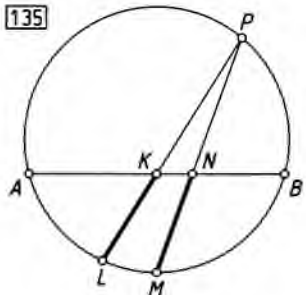
129



131



135



127. Дан угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник: 1) наименьшей площади; 2) наименьшего периметра.

128. В четырёхугольнике два противоположных угла тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

129. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах, покрывают весь четырёхугольник.

130. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?

131. Если вписанная окружность касается сторон $AC > BC$ треугольника ABC в точках B_1 и A_1 соответственно, то $AA_1 > BB_1$.

132. Среди всех четырёхугольников с данными диагоналями и данным углом между ними найдите четырёхугольник наименьшего периметра.

133. Докажите, что в любом неравобедренном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины.

134. Если на плоскости отмечены n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то можно провести n отрезков, не имеющих общих точек, с концами разных цветов.

135. *Неравенство Эрдёша.* Точка P , лежащая на большей из двух дуг AB окружности, соединена с серединой M меньшей дуги AB . Хорды PL и PM пересекают хорду AB соответственно в её середине K и в некоторой точке N . Докажите, что $KL \leq MN$.

136. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята

такая точка D , что $AD=10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

II. Сумма углов треугольника.

Средняя линия треугольника.

Параллелограммы, трапеции. Биссектриса.

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла

137. 1) Если биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M , то

$$\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

2) Если биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке N , то

$$\angle BNC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

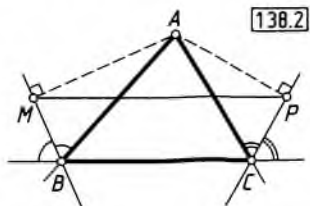
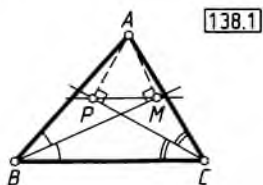
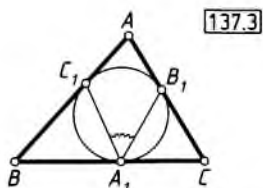
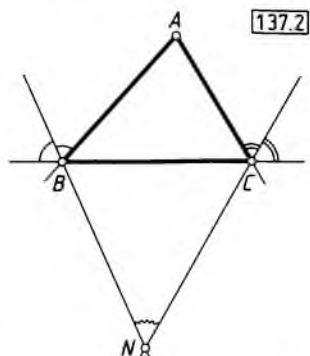
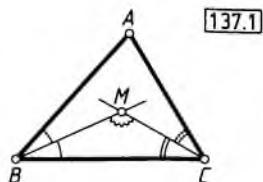
3) Если окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно, то

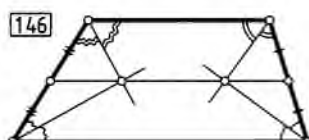
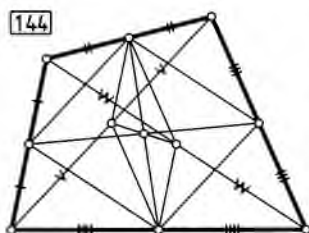
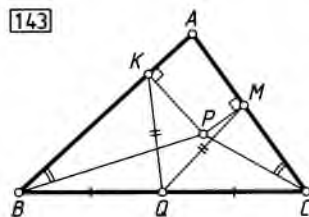
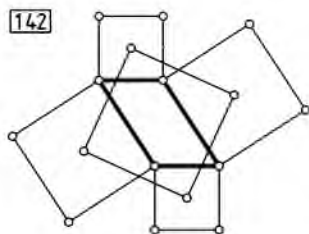
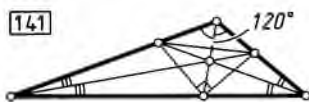
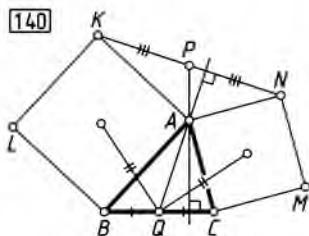
$$\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

138. 1) Если M и P — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C , то $PM \parallel BC$.

2) Если M и P — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы внешних углов при вершинах B и C , то отрезок PM равен полупериметру треугольника ABC .

139. Если вершины одного параллелограмма лежат по одной на сторонах другого, то центры параллелограммов совпадают.





140. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $AKLB$ и $ACMN$. Тогда

1) медиана AP треугольника AKN в два раза меньше стороны BC ;

2) середина Q стороны BC равноудалена от центров квадратов;

3) $AP \perp BC$, $AQ \perp KN$.

141. Если один из углов треугольника равен 120° , то треугольник, образованный основаниями биссектрис данного, — прямоугольный.

142. Центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его, также образуют квадрат.

143. Если точка P расположена внутри треугольника ABC и при этом $\angle ABP = \angle ACP$, а M и K — проекции точки P на стороны AB и AC , то середина стороны BC равноудалена от точек M и K .

144. 1) Теорема Вариньона. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Площадь этого параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

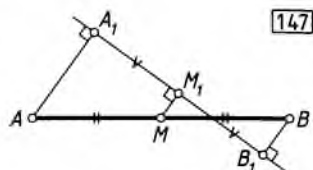
2) Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо лежат на одной прямой, либо являются вершинами параллелограмма.

3) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

145. Если $ABCD$ — прямоугольник, а M — произвольная точка плоскости, то $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

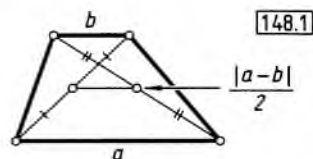
146. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на средней линии.

147. Если M — середина отрезка AB , а A_1 , M_1 и B_1 — проекции точек A , M и B на некоторую прямую, то M_1 — середина отрезка A_1B_1 .

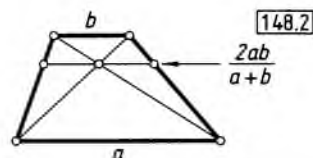


148. Основания трапеции равны a и b . Тогда

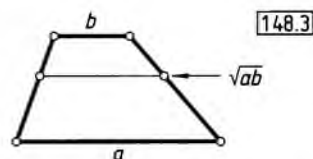
1) отрезок, соединяющий середины диагоналей равен $\frac{|a-b|}{2}$;



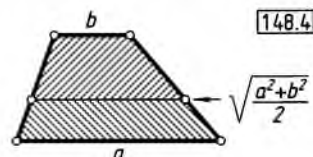
2) заключённый внутри трапеции отрезок прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$ (среднее гармоническое чисел a и b);



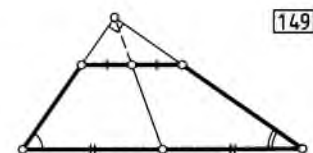
3) заключённый внутри трапеции отрезок прямой, параллельной основаниям и разбивающей трапецию на две подобные, равен $\sqrt{ab}$ (среднее геометрическое чисел a и b);



4) заключённый внутри трапеции отрезок прямой, параллельной основаниям и разбивающей трапецию на две равновеликие части, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратичное чисел a и b).



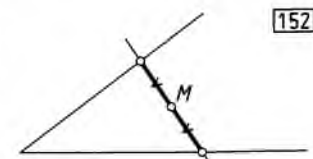
149. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен полуразности оснований.



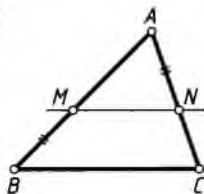
150. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

151. Постройте трапецию: 1) по основаниям и боковым сторонам; 2) по основаниям и диагоналям.

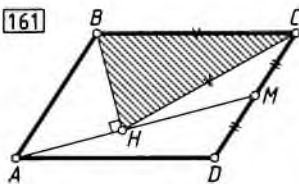
152. Внутри произвольного угла взята точка M . Проведите через точку M прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между сторонами угла, делился точкой M пополам.



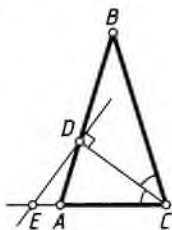
156



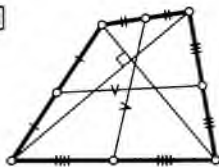
161



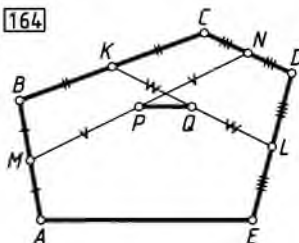
162



163



164



153. 1) Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей.

2) Постройте треугольник по трём медианам.

154. Постройте параллелограмм по вершине и серединам сторон, не содержащих эту вершину.

155. Постройте выпуклый четырёхугольник по четырём сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

156. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте точки M и N соответственно так, что $BM=AN$ и $MN\parallel BC$.

157. С помощью одной линейки постройте прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную прямой, содержащей данный диаметр данной окружности, если:

1) точка не лежит ни на окружности, ни на данной прямой;

2) точка лежит на окружности или на данной прямой.

158. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр на данную прямую из центра данной окружности.

159. Постройте квадрат по четырём точкам, лежащим на четырёх его сторонах.

160. Постройте пятиугольник по серединам его сторон.

161. Пусть M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а H — проекция вершины B на прямую AM . Докажите, что треугольник CBH равнобедренный.

162. CD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием AC . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC , пересекает AC в точке E . Докажите, что $EC=2AD$.

163. Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника:

1) равны, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны;

2) перпендикулярны, то диагонали четырёхугольника равны.

164. Пусть M , K , N и L — середины сторон соответственно AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а P и Q — середины отрезков соответственно MN и KL . Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

165. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle A_1B_1O = \angle A_1C_1O = 30^\circ$.

166. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, и при этом $\angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$. Докажите, что CPD — равнобедренный треугольник.

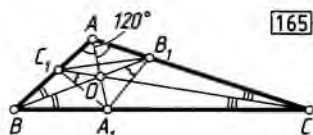
167. 1) Прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, образует равные углы с диагоналями. Докажите, что диагонали равны.

2) Две противоположные стороны выпуклого четырёхугольника равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей, образует с этими сторонами равные углы.

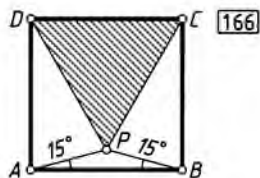
168. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.

169. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции точек A и B на эту прямую, P — середина стороны AB . Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.

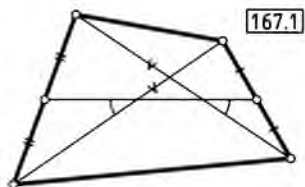
170. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого



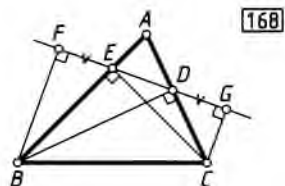
165



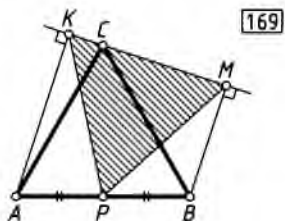
166



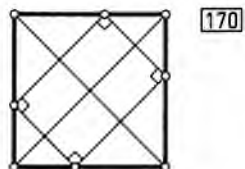
167.1



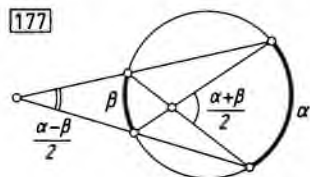
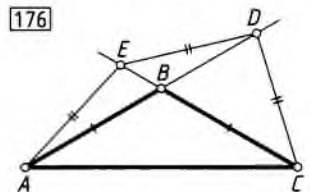
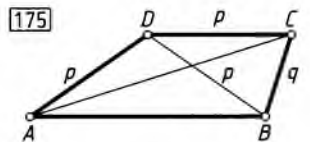
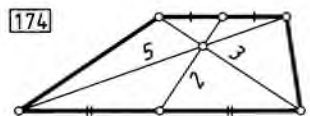
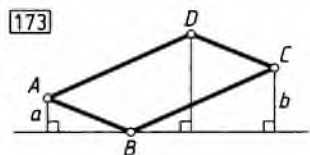
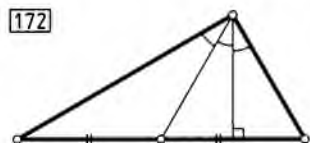
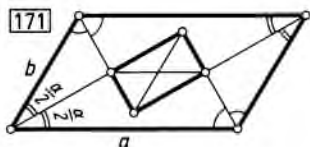
168



169



170



квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

171. Стороны параллелограмма равны a и b ($a \neq b$), а угол между ними равен α . Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

172. Найдите углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из вершины одного из его углов, делят этот угол на три равные части.

173. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B . Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b . На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D ?

174. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

175. Основание CD , диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p . Боковая сторона BC равна q . Найдите диагональ AC .

176. В равнобедренном треугольнике ABC равные стороны AB и CB продолжены за точку B и на этих продолжениях взяты соответственно точки D и E . При этом $AE = ED = DC$, а $\angle BED \neq \angle BDE$. Найдите угол ABE .

III. Окружность.

Углы, связанные с окружностью.

Вспомогательная окружность

177. 1) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, отсекаемых хордами.

2) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, содержащихся внутри этого угла.

178. Четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) из точек C и D отрезок AB виден под прямым углом;

2) из точек C и D , лежащих по одну сторону от прямой AB , отрезок AB виден под одним и тем же углом;

3) из точек C и D , лежащих по разные стороны от прямой AB , отрезок AB виден под углами, сумма которых равна 180° ;

4) отрезки AB и CD пересекаются в точке O , причём

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD;$$

5) продолжения отрезков AB и CD пересекаются в точке O , причём

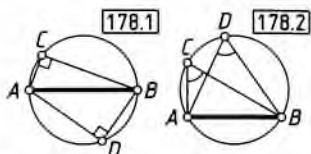
$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

179. 1) Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$) есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .

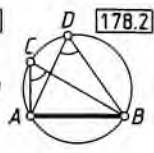
2) Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .

180. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Точки M, N, K и L — середины дуг AB, BC, CD и DA , последовательно расположенных на окружности. Докажите, что хорды MK и NL перпендикулярны.

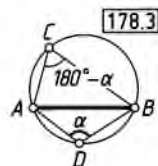
181. Если две окружности пересекаются в точках A и B , а продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E



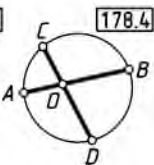
178.1



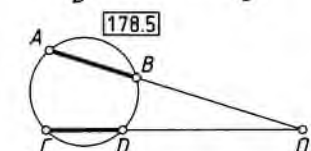
178.2



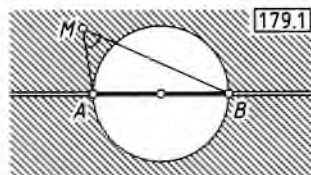
178.3



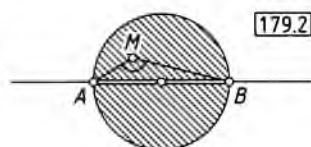
178.4



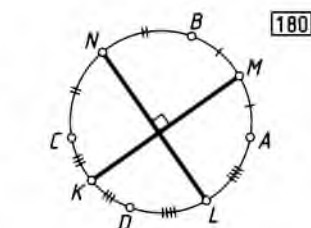
178.5



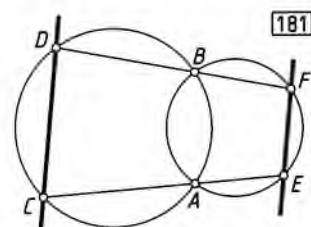
179.1



179.2

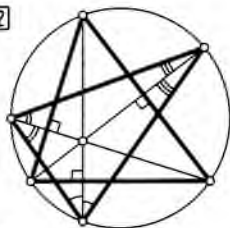


180

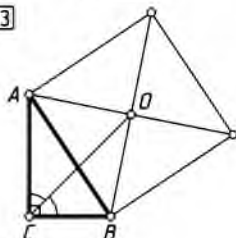


181

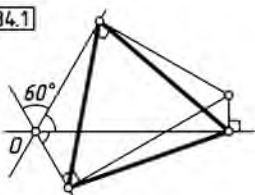
182



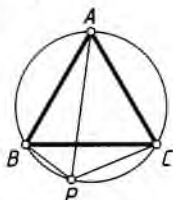
183



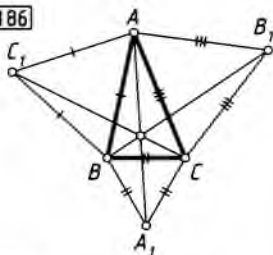
184.1



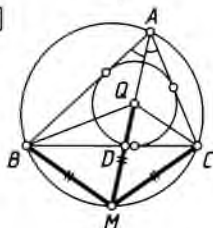
185



186



187



и F соответственно, то прямые CD и EF параллельны.

182. 1) Если продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно, то высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 .

2) Если продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно, то биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

183. Если на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O , то CO — биссектриса прямого угла этого треугольника.

184. 1) Если три прямые проходят через точку O и образуют попарно углы в 60° , то проекции произвольной точки, отличной от O , на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

2) Проекция произвольной точки, отличной от ортоцентра треугольника, на его высоты являются вершинами треугольника, подобного данному.

185. Теорема Помпею. Если P — произвольная точка на меньшей дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , то $AP = BP + CP$.

186. Точка Торричелли. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 и проведены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 . Тогда:

1) эти отрезки равны и пересекаются в одной точке;

2) если точка пересечения расположена внутри треугольника ABC , то сумма расстояний от неё до трёх вершин

треугольника равна длине каждого из отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 .

187. Теорема о трилистнике. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M . Пусть Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Тогда треугольники MBQ и MCQ — равнобедренные.

188. Формула Эйлера. Если I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника, а r , R — их радиусы, то

$$IO^2 = R^2 - 2rR.$$

189. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Тогда:

1) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AH_1B , BH_1C и AH_1C , равны;

2) расстояние от вершины A до точки H вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны BC ;

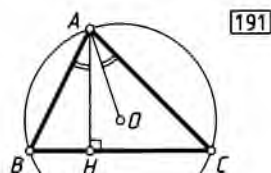
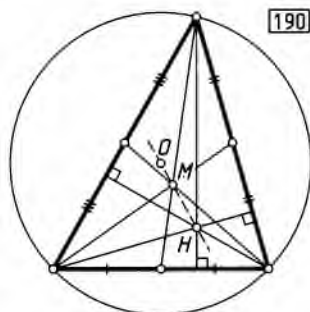
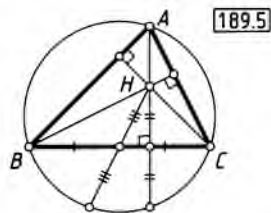
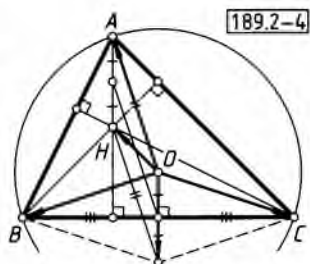
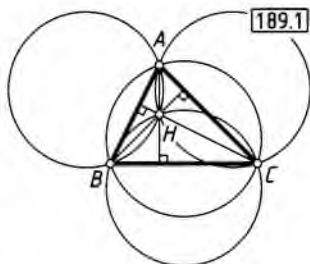
3) расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу описанной окружности треугольника ABC ;

4) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

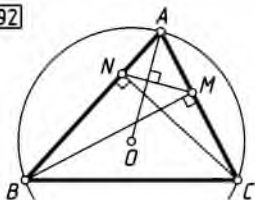
5) точки, симметричные точке H относительно прямой BC и относительно середины стороны BC , лежат на описанной окружности треугольника ABC .

190. Прямая Эйлера. В любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H и $MH = 2MO$.

191. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — высота. Тогда $\angle BAH = \angle OAC$.

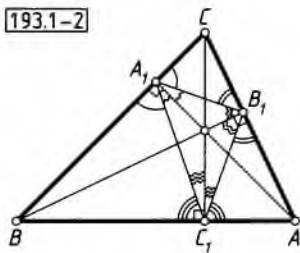


192



192. Теорема Нагеля. Если BM и CN — высоты треугольника ABC , а O — центр описанной около него окружности, то $OA \perp MN$.

193.1-2



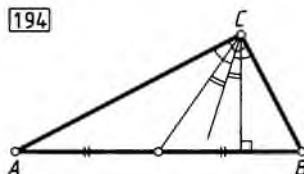
193. Теоремы об ортотреугольнике.

1) На сторонах AB , BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$. Тогда точки A_1 , B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC .

2) Высоты остроугольного треугольника лежат на биссектрисах его ортотреугольника. Высоты тупоугольного треугольника лежат на биссектрисах двух внешних и третьего внутреннего углов ортотреугольника.

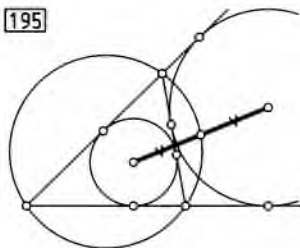
3) Если R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей остроугольного треугольника, а p и q — полупериметры треугольника и его ортотреугольника соответственно, то $R:r = p:q$.

194



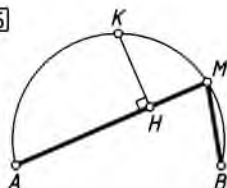
194. В треугольнике ABC ($AC \neq BC$) биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

195



195. Теорема Мансиона. Отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.

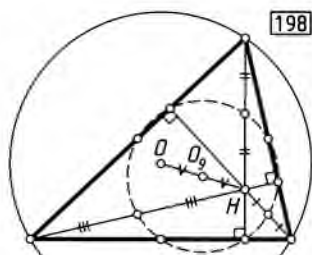
196



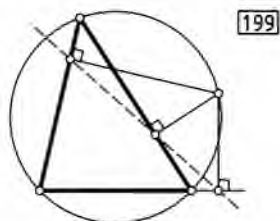
196. Задача Архимеда. В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Тогда основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам, т. е. $AH = HM + MB$.

197. Теорема Штейнера — Лемуса. Если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

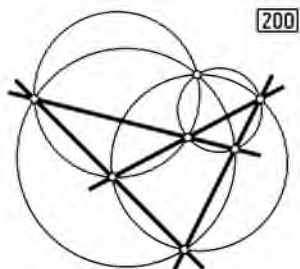
198. Окружность девяти точек. Основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра H до вершин треугольника лежат на одной окружности, причём её центр — середина отрезка OH , где O — центр описанной окружности треугольника.



199. Прямая Симсона. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.



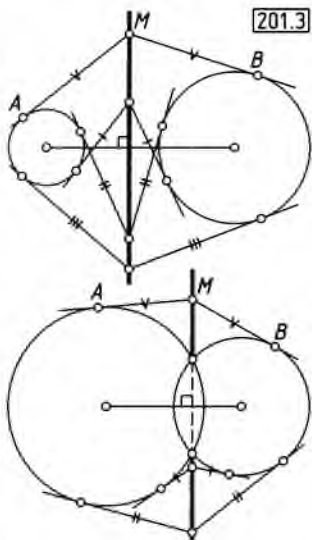
200. Точка Микеля. Четыре окружности, описанные около четырёх треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости, имеют общую точку.



201. 1) Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которой до данных точек A и B постоянна, есть прямая, перпендикулярная AB .

2) Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

3) Прямые, проходящие через точку M , касаются двух данных окружностей в точках A и B , причём $MA=MB$. Тогда геометрическое место точек M есть прямая, перпендикулярная линии центров окружностей, или часть этой прямой.

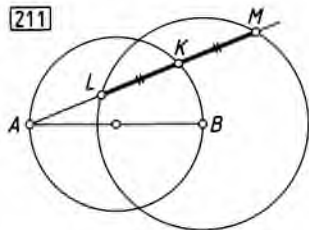


202. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой из вершины этого угла.

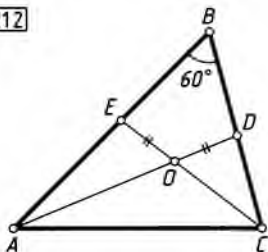
203. Через данную внутри окружности точку проведите хорду, которая делилась бы данной хордой пополам.

204. В данную окружность впишите прямоугольный треугольник, катеты которого проходили бы через две данные точки внутри окружности.

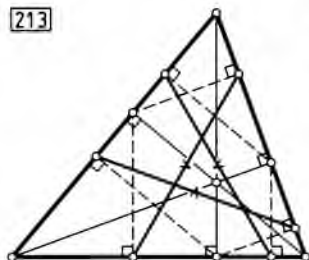
211



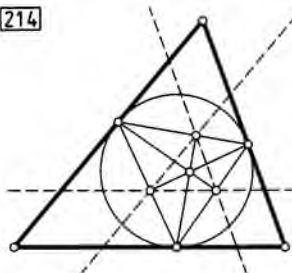
212



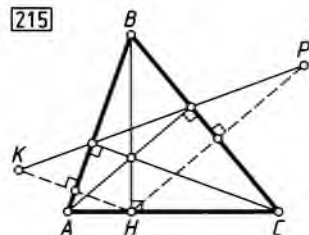
213



214



215



205. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью его высоты, медианы и биссектрисы, проведённых из одной вершины.

206. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения: 1) биссектрис; 2) высот треугольников ABC .

207. Постройте треугольник ABC по центрам его внеписанных окружностей.

208. Постройте треугольник по центрам описанной, вписанной и одной из внеписанных окружностей.

209. 1) Опишите около данного треугольника треугольник, равный другому данному треугольнику, т. е. через вершины данного треугольника проведите прямые, которые пересекаются в вершинах треугольника, равного другому данному треугольнику.

2) В данный треугольник впишите треугольник, равный другому данному треугольнику.

210. Постройте треугольник по основаниям его высот.

211. Луч с началом в точке A пересекает окружность с диаметром AB в точке K , а окружность с центром B — в точках L и M . Докажите, что $KM = KL$.

212. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.

213. Каждое из оснований высот проектируется на две соседние стороны треугольника. Докажите, что длина отрезка, соединяющего эти проекции, не зависит от выбора высоты.

214. Точки касания вписанной в треугольник окружности соединены отрезками, и в полученном треугольнике

проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

215. Точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC . Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) — основания высот треугольника ABC .

216. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N , а P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B . Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.

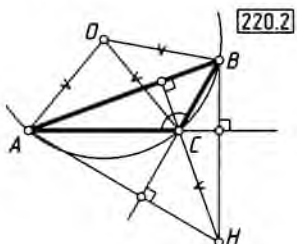
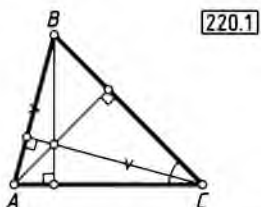
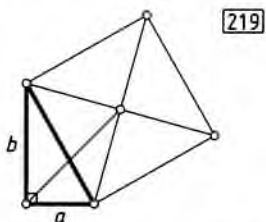
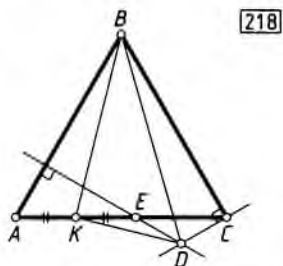
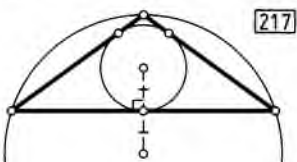
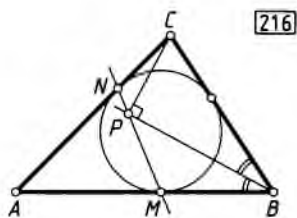
217. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

218. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC ; точка K — середина отрезка AE . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB , и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC , пересекаются в точке D . Найдите углы треугольника BKD .

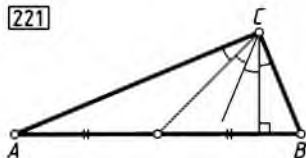
219. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если катеты треугольника равны a и b .

220. 1) Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно стороне AB . Найдите угол ACB .

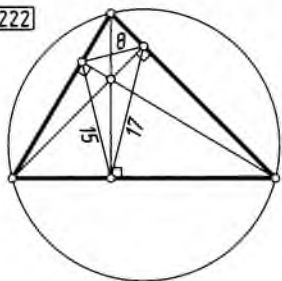
2) Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно радиусу описанной окружности. Найдите угол ACB .



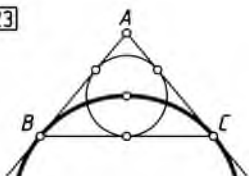
221



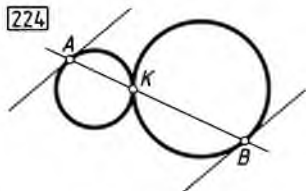
222



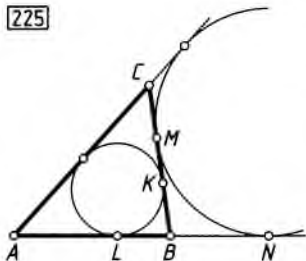
223



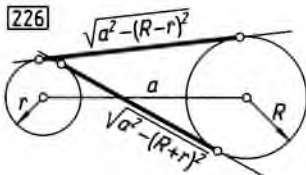
224



225



226



221. В треугольнике ABC медиана, биссектриса и высота, проведённые из вершины C , делят угол на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

222. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите:

- 1) радиус описанной около треугольника окружности;
- 2) площадь треугольника.

IV. Касательная к окружности. Касающиеся окружности

223. Дана окружность и точка A вне её; AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Тогда центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

224. Если две окружности касаются в точке K , а прямая, проходящая через точку K , вторично пересекает эти окружности в точках A и B , то касательные к окружностям, проведённые через точки A и B , параллельны.

225. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжения стороны AB — в точке N ; вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K , а стороны AB — в точке L ; p — полупериметр треугольника ABC . Тогда:

- 1) $AN = p$; 3) $BK = CM$;
- 2) $AL = p - BC$; 4) $NL = BC$.

226. Если расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a ($a > R + r$), то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания, равны $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$ соответственно.

227. Окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов r и R касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда

1) $\angle AKB = \angle O_1CO_2 = 90^\circ$;

2) $AB = 2KC = 2\sqrt{rR}$.

228. Точка M находится на продолжении хорды AB . Если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

229. Теорема Коперника. По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Тогда фиксированная точка K подвижной окружности движется по диаметру неподвижной окружности.

230. Лемма Архимеда. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Тогда MT — биссектриса угла AMB .

* * *

231. Даны прямая и на ней точки A и B . Найдите геометрическое место точек касания окружностей, одна из которых касается данной прямой в точке A , другая — в точке B .

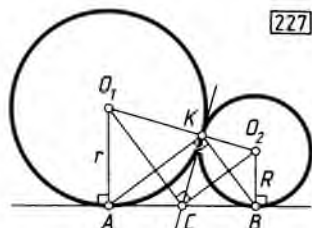
232. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

233. Постройте окружность, касающуюся:

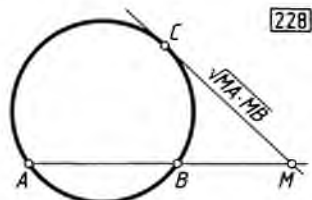
1) данной прямой и данной окружности в данной на ней точке;

2) данной окружности и данной прямой в данной на ней точке;

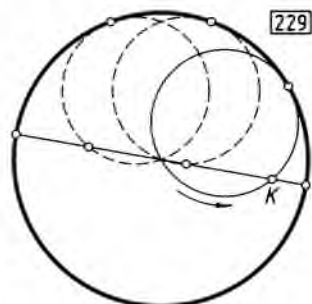
3) данной прямой и проходящую через две данные точки;



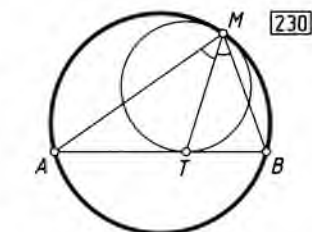
227



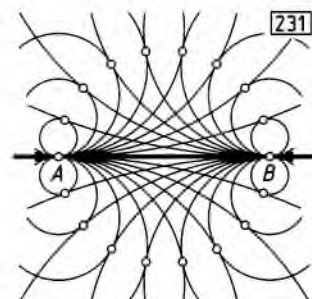
228



229

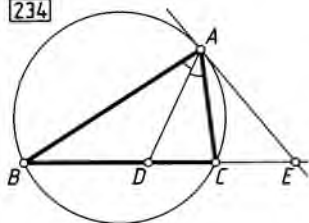


230

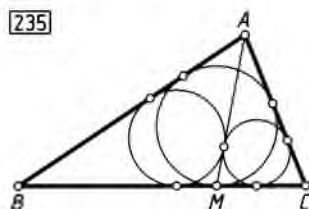


231

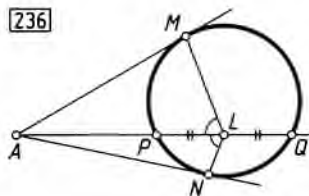
234



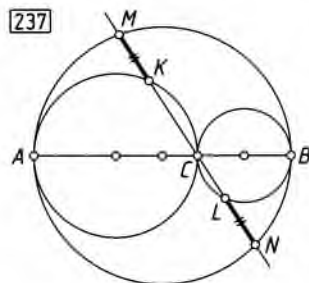
235



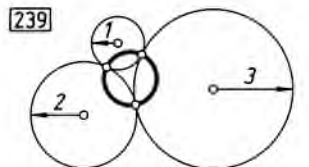
236



237



239



4) данной окружности и проходящую через две данные точки;

5) данной прямой и окружности и проходящую через данную точку.

234. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E , а AD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE = ED$.

235. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M . Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM , касаются отрезка AM в одной точке.

236. Из точки A , расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q , точка L — середина PQ . Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

237. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB — в точках M и N (см. рис.). Докажите, что $KM = LN$.

238. Две окружности касаются в точке A . Прямая, проходящая через A , вторично пересекает окружности в точках B и C . Найдите геометрическое место середин отрезков BC .

239. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

240. На отрезке AC взята точка B , и на отрезках AB , BC и CA построены полуокружности S_1 , S_2 и S_3 по одну сторону от AC ; D — точка на S_3 , проекция которой на AC совпадает с точкой B . Общая касательная к S_1 и S_2 касается

этих полуокружностей в точках E и F соответственно. Докажите, что:

1) прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведённой через точку D ;

2) $BEDF$ — прямоугольник.

3) Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a .

4) Докажите, что окружность, касающаяся отрезка BD и полуокружностей S_1 и S_3 , и окружность, касающаяся отрезка BD и полуокружностей S_2 и S_3 , равны.

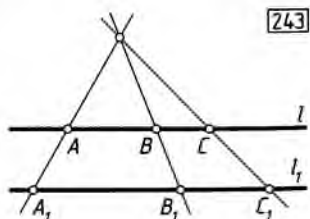
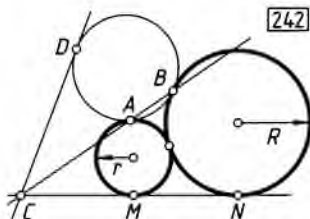
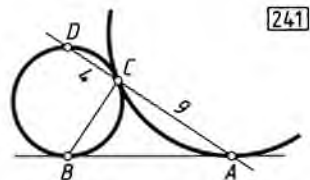
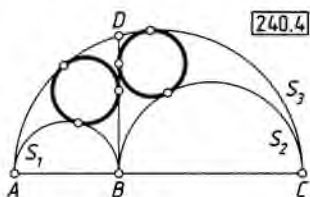
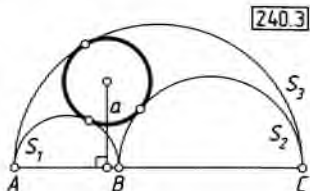
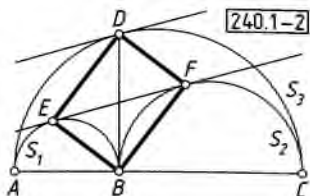
241. Две окружности касаются внешним образом в точке C . Прямая касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D , отличной от C . Найдите BC , если $AC=9$, $CD=4$.

242. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) касаются друг друга внешним образом. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD .

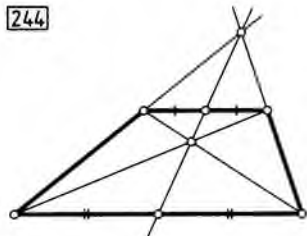
V. Подобие. Отношение отрезков.

Пропорциональные отрезки в окружности

243. Теорема о пропорциональных отрезках на параллельных прямых. Если через точку, не лежащую ни на одной из двух данных параллельных прямых l и l_1 , проведены прямые, пересекающие l в точках A , B и C , а l_1 — в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно, то отрезки AB и BC пропорциональны отрезкам A_1B_1 и B_1C_1 , т. е. $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.



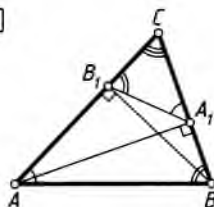
244



244. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

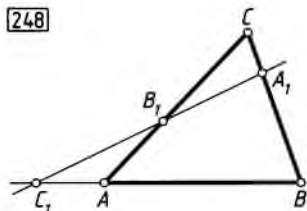
245. Если AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC ($\angle C \neq 90^\circ$), то треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC , причём коэффициент подобия равен $|\cos C|$.

245



246. Обобщённая теорема Пифагора. Прямоугольный треугольник ABC разделён высотой CD , проведённой к гипотенузе, на два треугольника ACD и CBD , подобных треугольнику ABC . Если l , m и n — соответствующие линейные элементы этих треугольников, то $l^2 + m^2 = n^2$.

248



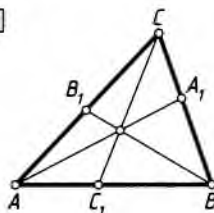
247. Если AD — биссектриса треугольника ABC , то $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

248. Теорема Менелая. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC (или на их продолжениях). Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1$$

(все отрезки считаются направленными).

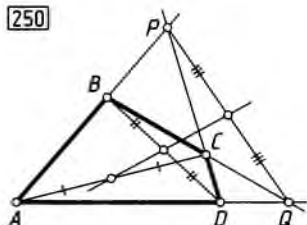
249



249. Теорема Чебы. Точки A_1 , B_1 и C_1 принадлежат сторонам (или их продолжениям) соответственно BC , AC и AB треугольника ABC . Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

250



250. Прямая Гаусса. Пусть продолжения противоположных сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон BC и AD — в точке Q . Тогда середины диагоналей AC и BD , а также середина отрезка PQ лежат на одной прямой.

251. 1) *Точка Жергона*. В треугольник вписана окружность. Точки касания соединены с противоположными вершинами треугольника. Тогда полученные отрезки пересекаются в одной точке.

2) *Точка Нагеля*. Точки касания внеписанных окружностей со сторонами треугольника соединены с противоположными вершинами. Тогда полученные отрезки пересекаются в одной точке.

252. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок их общей касательной, заключённый между точками касания.

253. *Окружность Аполлония*. Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m:n$ ($m \neq n$), есть окружность.

254. Общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей или их продолжения либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

255. *Задача о бабочке*. Через середину S произвольной хорды AB окружности проведены хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P . Отрезок LM пересекает AB в точке Q . Тогда $PC=QC$.

256. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки:

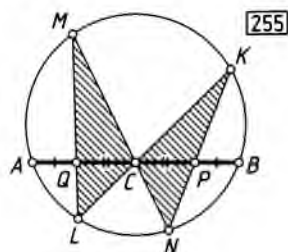
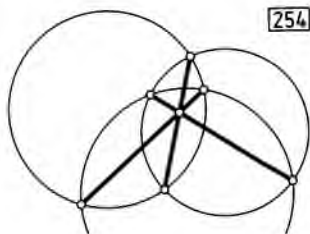
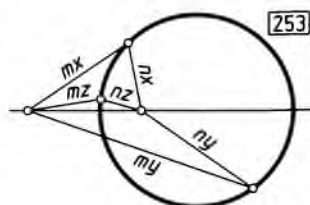
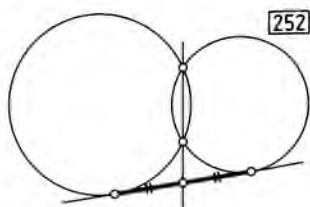
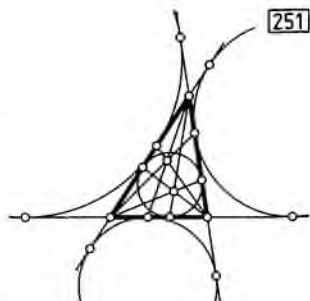
1) разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них;

2) через данную точку проведите прямую, параллельную данным;

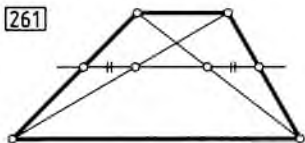
3) удвойте отрезок, расположенный на одной из данных прямых;

4) разделите на n равных частей отрезок, расположенный на одной из них.

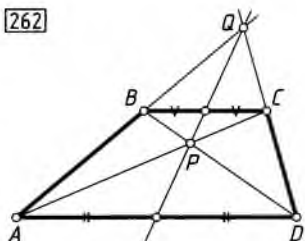
257. С помощью одного циркуля разделите отрезок: 1) пополам; 2) на n равных частей.



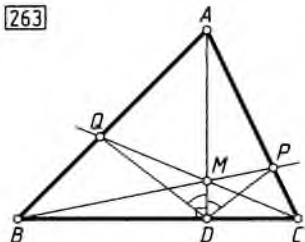
261



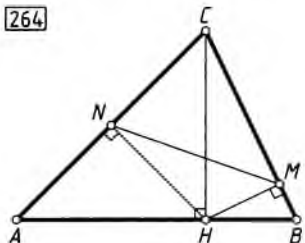
262



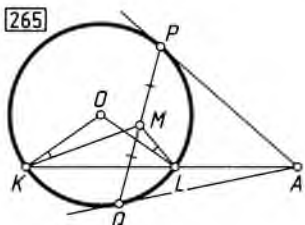
263



264



265



258. Постройте треугольник по трём высотам.

259. 1) По данным отрезкам a , b , c , d и e постройте отрезок $x = \frac{abc}{de}$.

2) По данным отрезкам a и b постройте отрезок $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

260. Верно ли утверждение: «Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны»?

261. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Докажите, что отрезки, прилежащие к боковым сторонам, равны между собой.

262. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC .

263. Через точку M , лежащую на высоте AD треугольника ABC , проведены прямые BM и CM , которые пересекают стороны AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что луч DA — биссектриса угла PDQ .

264. Из вершины C треугольника ABC опущен перпендикуляр CH на прямую AB , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на BC и AC соответственно. Докажите, что треугольник MNC подобен треугольнику ABC .

265. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A , и из неё проведены касательные AP и AQ (P и Q — точки касания), M —

середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

266. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B . Из точки A параллельно OB проведён луч, пересекающий окружность в точке C . Прямая OC пересекает окружность в точке E . Прямые AE и OB пересекаются в точке K . Докажите, что $OK = KB$.

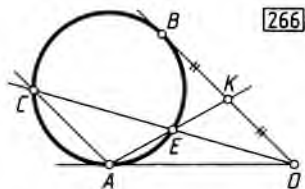
267. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

268. В треугольник вписана окружность радиуса r . Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

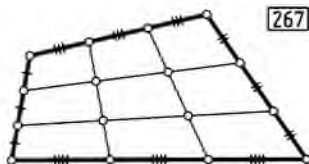
269. В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB . Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и CA в точках M и N соответственно, а прямая, соединяющая точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON в точках P и Q . Докажите, что $MN = 2PQ$.

270. На высотах BB_1 и CC_1 треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

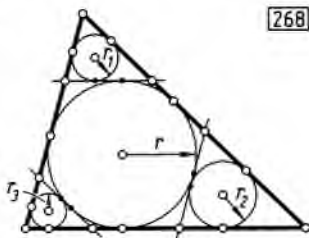
271. В треугольнике ABC провели две высоты AL и BM , причём точки L и M оказались лежащими на сторонах BC и AC соответственно. Затем провели прямую LM до пересечения с продолжением стороны AB . Какое наибольшее число



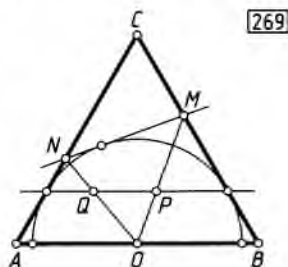
266



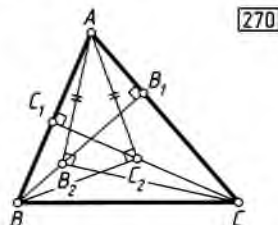
267



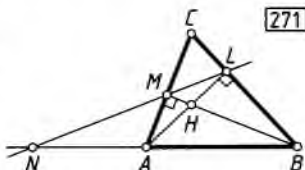
268



269

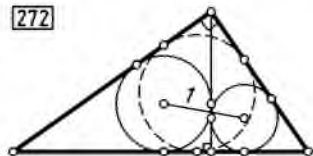


270

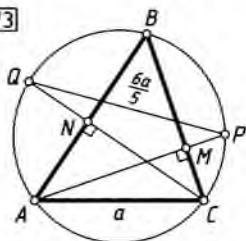


271

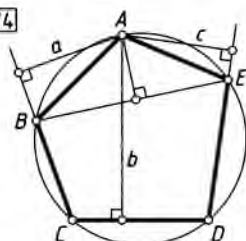
272



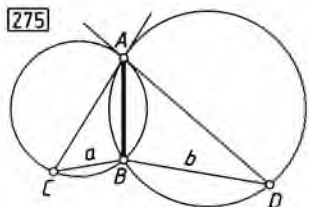
273



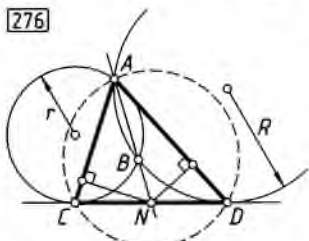
274



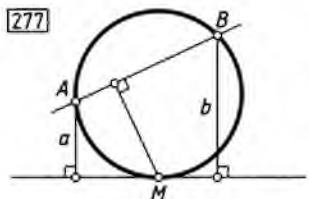
275



276



277



пар подобных треугольников можно считать на этом чертеже, если на нём не образовалось ни одной пары равных треугольников?

272. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разбивает этот треугольник на два треугольника. Расстояние между центрами вписанных окружностей этих треугольников равно 1. Найдите радиус вписанной окружности исходного треугольника.

273. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = \frac{6a}{5}$.

274. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a , b и c . Найдите расстояние от вершины A до прямой BE .

275. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD , причём хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB , если $CB = a$, $DB = b$.

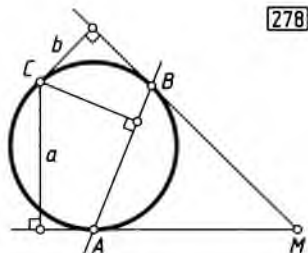
276. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D ; N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD ;

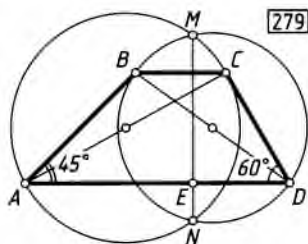
2) отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .

277. Окружность и прямая касаются в точке M . Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

278. Из точки M , лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C , лежащей на окружности, до касательных равны a и b . Найдите расстояние от точки C до прямой AB , где A и B — точки касания.

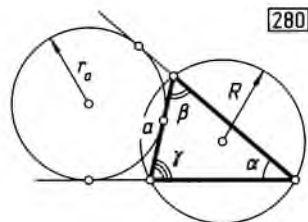


279. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол A равен 45° , угол D равен 60° . На диагоналях AC и BD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N . Хорда MN пересекает основание AD в точке E . Найдите отношение $AE : ED$.



VI. Площадь. Отношение площадей. **Метод площадей**

280. Если S — площадь треугольника, α, β, γ — его углы, p — полупериметр, R — радиус описанной окружности, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a , лежащей против угла, равного α , то:



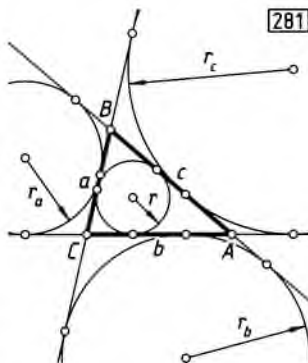
$$1) S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)};$$

$$2) S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$3) S = (p - a)r_a.$$

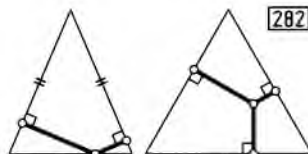
281. Задача Люиле. Пусть r — радиус вписанной окружности, а r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон $BC = a, AC = b, AB = c$ соответственно; S — площадь треугольника ABC . Тогда:

$$1) \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \quad 2) S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

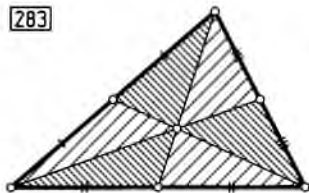


282. 1) Сумма расстояний от произвольной точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до боковых сторон постоянна.

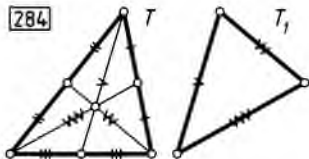
2) Сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон постоянна.



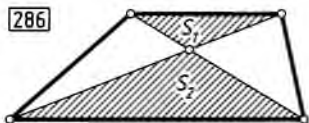
283



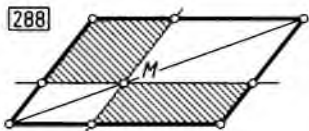
284



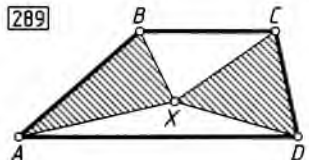
286



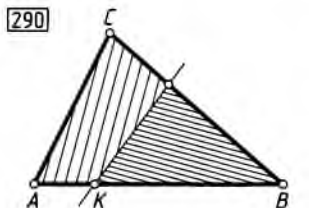
288



289



290



283. Медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих частей.

284. Из медиан любого треугольника T можно построить треугольник T_1 . Если площадь треугольника T равна S , то площадь треугольника T_1 равна $\frac{3}{4}S$.

285. Диагонали разбивают четырёхугольник на четыре треугольника. Произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению двух других.

286. Если площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны S_1 и S_2 , то площадь трапеции равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

287. Формула для биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними. Если AD — биссектриса треугольника ABC , то

$$AD = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} \cos \frac{A}{2}.$$

288. Прямые, проходящие через внутреннюю точку M параллелограмма параллельно его сторонам, разбивают параллелограмм на четыре меньших параллелограмма. Точка M лежит на диагонали исходного параллелограмма тогда и только тогда, когда два меньших противоположных параллелограмма равновелики.

289. Найдите геометрическое место таких точек X , лежащих внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) или на её сторонах, что $S_{\triangle XAB} = S_{\triangle XCD}$.

290. Через точку K , данную на стороне AB треугольника ABC , проведите прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника пополам.

291. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окруж-

ность, вторично пересекающая прямые AB и AC в различных точках M и N . Докажите, что $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$.

292. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет пятую часть площади данного параллелограмма.

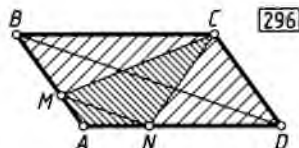
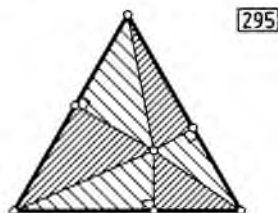
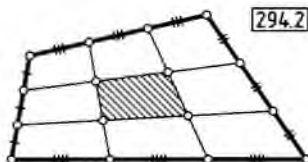
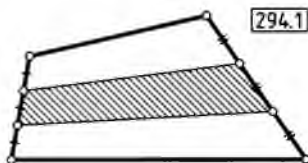
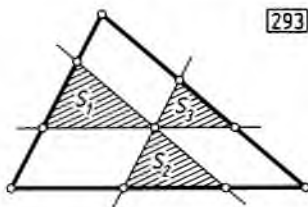
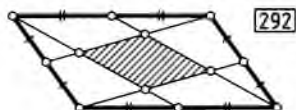
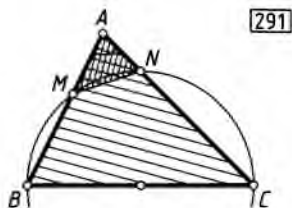
293. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольнички с площадями S_1 , S_2 , S_3 . Докажите, что площадь данного треугольника равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

294. 1) Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырёхугольника.

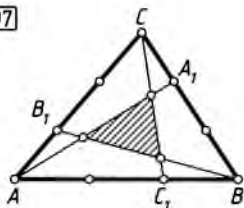
2) Проведём два аналогичных отрезка для других противоположных сторон (см. рис.). Получим ещё одну «полоску». Докажите, что площадь пересечения двух «полосок» в девять раз меньше площади исходного четырёхугольника.

295. Перпендикуляры, опущенные из внутренней точки равностороннего треугольника на его стороны, и отрезки, соединяющие эту точку с вершинами, разбивают треугольник на шесть прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма площадей трёх из них, взятых через один, равна сумме площадей трёх других.

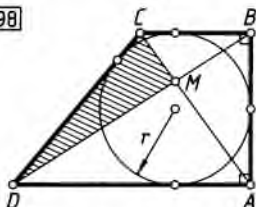
296. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N , причём прямые MC и NC разбивают параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN , если $BD = d$.



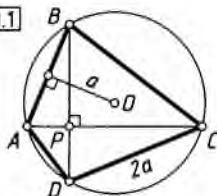
[297]



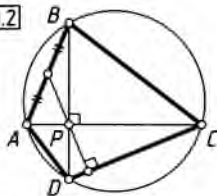
[298]



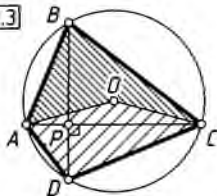
[300.1]



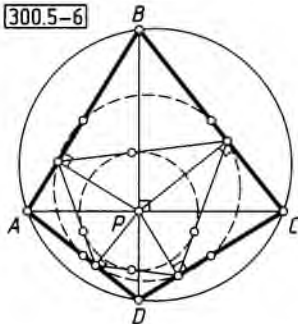
[300.2]



[300.3]



[300.5-6]



297. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 и B_1 , причём $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. Найдите площадь треугольника, вершины которого — попарные пересечения отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 , если площадь треугольника ABC равна 1.

298. Дана трапеция $ABCD$, M — точка пересечения её диагоналей. Известно, что боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC и что в трапецию можно вписать окружность. Найдите площадь треугольника DCM , если радиус этой окружности равен r .

VII. Вписанные и описанные четырёхугольники

299. Признак описанного четырёхугольника. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

300. Свойства вписанного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями. Если четырёхугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке P , вписан в окружность радиуса R с центром O , то

1) расстояние от центра окружности до стороны AB вдвое меньше стороны CD ;

2) медиана треугольника APB перпендикулярна стороне CD ;

3) ломаная AOC разбивает четырёхугольник на две равновеликие части;

4) $AB^2 + CD^2 = 4R^2$, $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$;

5) четырёхугольник, вершины которого — проекции точки P на стороны четырёхугольника $ABCD$, — и вписанный, и описанный;

6) середины сторон и основания пер-

пендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на одной окружности;

7) четырёхугольник, образованный касательными к описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, проведёнными в его вершинах, — вписанный.

301. Теорема Монжа. Прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

302. Формула Брахмагупты. Если стороны вписанного четырёхугольника равны a, b, c и d , то его площадь равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр четырёхугольника.

303. Если четырёхугольник со сторонами a, b, c и d можно вписать в окружность и около него можно описать окружность, то его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

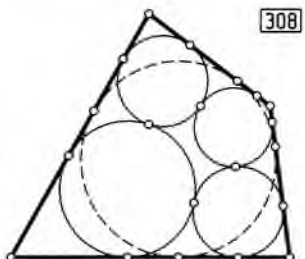
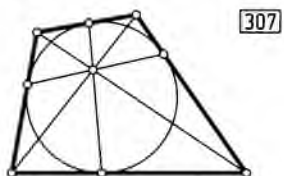
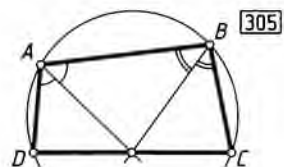
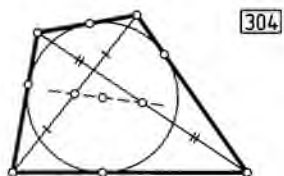
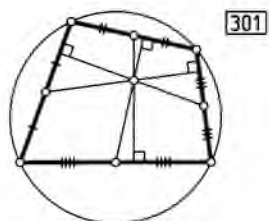
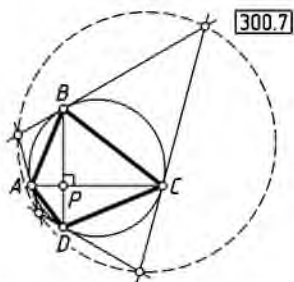
304. Теорема Ньютона. Во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой.

305. Биссектрисы углов A и B вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне CD тогда и только тогда, когда $CD = AD + BC$.

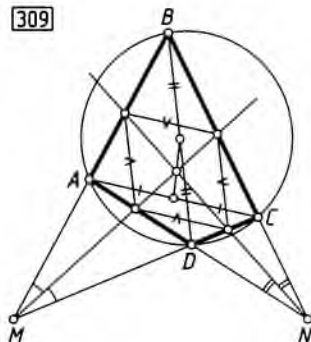
306. Теорема Птолемея. Если $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, то $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

307. Диагонали описанного четырёхугольника и отрезки, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке.

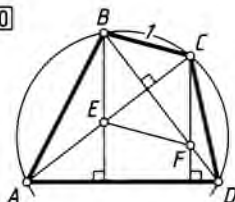
308. Внутри выпуклого четырёхугольника расположены четыре окружности, каждая из которых касается двух соседних сторон четырёхугольника и двух окружностей (внешним образом). Известно,



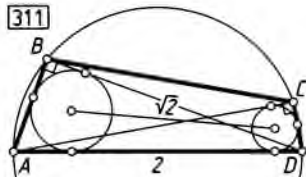
309



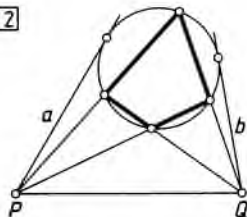
310



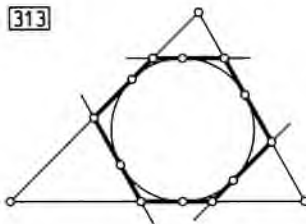
311



312



313



что в четырёхугольник можно вписать окружность. Докажите, что по крайней мере две из данных окружностей равны.

309. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а сторон BC и AD — в точке N . Докажите, что:

1) биссектрисы углов AMD и DNC перпендикулярны;

2) эти биссектрисы пересекают стороны четырёхугольника в вершинах ромба;

3) точка пересечения этих биссектрис лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей четырёхугольника.

310. Четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C , пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Найдите EF , если $BC = 1$.

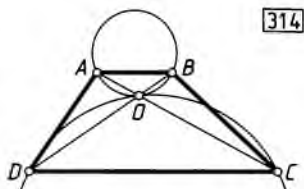
311. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , равно $\sqrt{2}$. Найдите BC .

312. Продолжения противоположных сторон четырёхугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q . Найдите PQ , если касательные к окружности, проведённые из точек P и Q , равны a и b .

VIII. Геометрические преобразования

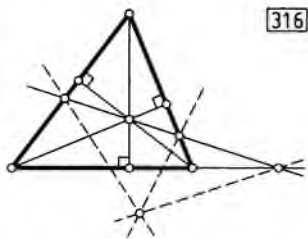
313. Противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, параллельными сторонам, попарно равны.

314. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O . Тогда описанные окружности треугольников AOB и COD касаются.



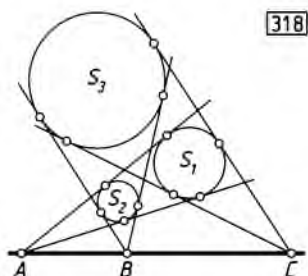
315. Композиция симметрий относительно сторон угла, равного α , есть поворот вокруг его вершины на угол 2α .

316. Три прямые, симметричные относительно сторон треугольника прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, пересекаются в одной точке.

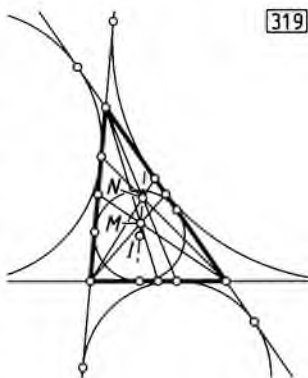


317. Теорема о композиции поворотов. Композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360° , является поворотом.

318. Теорема о центрах трёх гомотетий. Если общие внешние касательные к окружностям S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_1 и S_3 пересекаются в точках A , B и C соответственно, то точки A , B и C лежат на одной прямой.



319. Три прямые, каждая из которых проходит через вершину треугольника и точку касания вневписанной окружности с противоположной стороной, пересекаются в одной точке (точка Нагеля). Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, M — точка пересечения медиан, N — точка Нагеля. Тогда точки I , M и N лежат на одной прямой, причём $MN:MI=2:1$.



320. Теорема Шаля. Всякое движение плоскости есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и параллельного переноса в направлении, параллельном оси симметрии).

321. Даны две пересекающиеся окружности. Через точку их пересечения



322



проведите прямую, отрезок которой, заключённый между окружностями, делился бы этой точкой пополам.

322. Даны две окружности и точка. Через эту точку проведите прямую, отрезок которой с концами на окружностях, делился бы этой точкой пополам.

323. Постройте треугольник по вершине и двум прямым, на которых лежат биссектрисы углов, проведённых из двух других вершин.

324. Постройте треугольник по центру описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

325. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного острого угла, вершина — на другой стороне того же угла, а боковые стороны проходили бы через две данные точки внутри этого угла.

326. Постройте отрезок с концами на двух данных окружностях, равный и параллельный данному отрезку.

327. Даны две окружности и прямая. Параллельно этой прямой проведите такую прямую, чтобы:

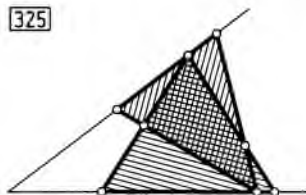
1) данные окружности высекали на ней равные хорды;

2) сумма хорд, высекаемых на окружностях, была равна данному отрезку.

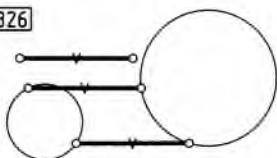
328. Даны непересекающиеся хорды AB и CD некоторой окружности и отрезок. Постройте на этой окружности такую точку X , чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF , равный данному.

329. Даны прямая, отрезок и окружность, на которой отмечены точки P и Q . Постройте на окружности такую точку M , чтобы прямые MP и MQ отсекали на данной прямой отрезок AB равный данному.

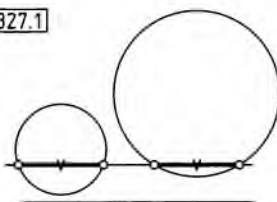
325



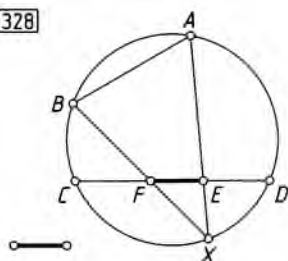
326



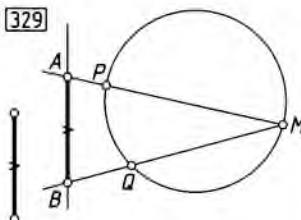
327.1



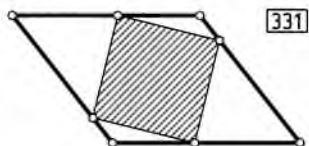
328



329

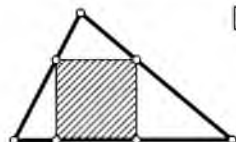


330. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы на данной прямой, на данной окружности и в данной точке.



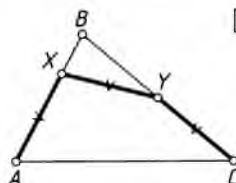
331

331. В данный параллелограмм впишите квадрат (вершины квадрата лежат по одной на сторонах параллелограмма).



332

332. Впишите квадрат в данный треугольник (одна сторона квадрата лежит на стороне треугольника, а противоположные ей вершины — на двух других сторонах треугольника).



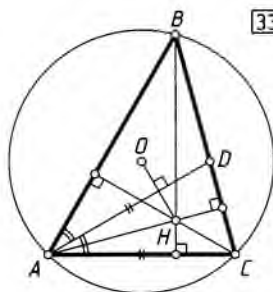
333

333. Дан остроугольный треугольник ABC . С помощью циркуля и линейки постройте сторонах AB и BC соответственно такие точки X и Y , для которых $AX = XY = YC$.

334. Впишите в угол окружность:

1) проходящую через данную внутри угла точку;

2) касающуюся данной окружности.

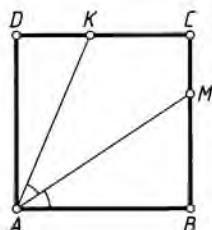


335

335. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC .

336. Постройте $(2n - 1)$ -угольник по серединам его сторон.

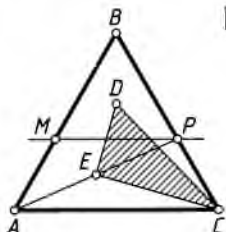
337. Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .



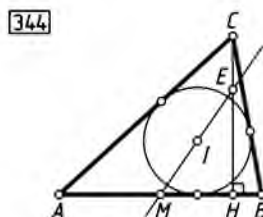
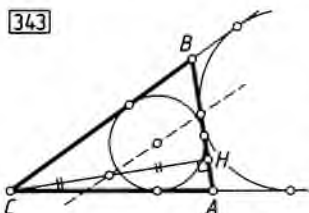
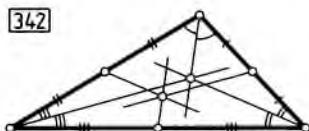
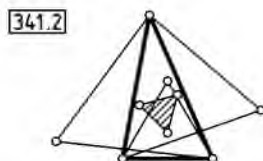
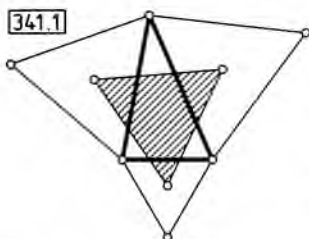
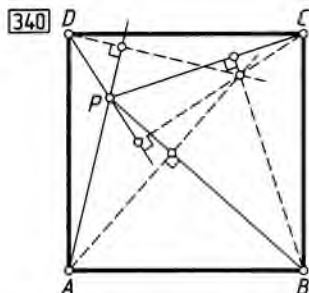
338

338. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

339. Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно.



339



Точка D — центр правильного треугольника PMB , точка E — середина отрезка AP . Найдите углы треугольника DEC .

340. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P . Из вершины A опущен перпендикуляр на BP , из B — перпендикуляр на CP , из C — на DP , из D — на AP . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

341. 1) *Внешний треугольник Наполеона*. Докажите, что центры равнобедренных треугольников, построенных внешним образом на сторонах произвольного треугольника, образуют равнобедренный треугольник

2) *Внутренний треугольник Наполеона*. Докажите, что центры равнобедренных треугольников, построенных внутренним образом на сторонах произвольного треугольника, образуют равнобедренный треугольник.

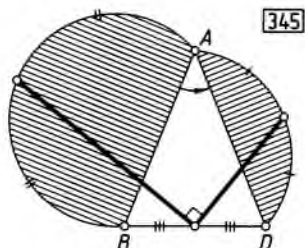
3) Докажите, что разность площадей внешнего и внутреннего треугольников Наполеона равна площади исходного треугольника.

342. Докажите, что три прямые, проведенные через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

343. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина высоты CH , центр вписанной окружности и точка касания внеписанной окружности со стороной AB лежат на одной прямой.

344. В треугольнике ABC через середину M стороны AB и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI , которая пересекает высоту CH в точке E . Докажите, что отрезок CE равен радиусу вписанной окружности.

345. Круг разделили хордой AB на два сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки A . Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D (см. рис.). Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD , перпендикулярны друг другу.



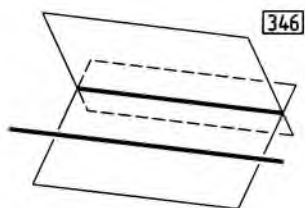
СТЕРЕОМЕТРИЯ

I. Прямые и плоскости в пространстве.

Параллельность в пространстве.

Построения на проекционном чертёже.

Вычисление отношений отрезков

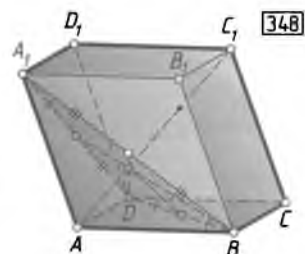


346. Если две пересекающиеся плоскости параллельны некоторой прямой, то прямая пересечения плоскостей также параллельна этой прямой.

347. Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противоположных граней) пересекаются в одной точке. В этой же точке пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра.

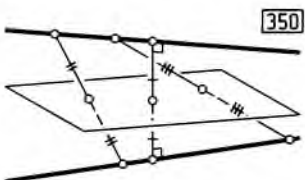


348. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $BA_1 D$ и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A .

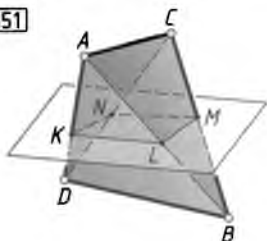


349. Если несколько прямых в пространстве попарно пересекаются, то они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку.

350. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину их общего перпендикуляра.



351



351. Если плоскость пересекает рёбра AD , AB , BC и CD тетраэдра $ABCD$ в точках K , L , M и N соответственно, то

$$\frac{DK}{KA} \cdot \frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} = 1.$$

* * *

352. Постройте прямую пересечения плоскостей двух противоположных боковых граней четырёхугольной пирамиды.

356



353. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на попарно скрещивающихся рёбрах.

354. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться правильный пятиугольник?

357



355. Через данную точку в пространстве проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

356. Докажите, что выпуклый четырёхгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

358



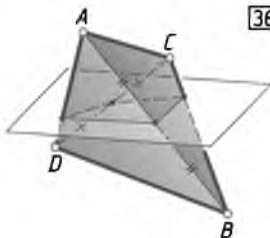
357. Через каждое ребро трёхгранного угла и биссектрису противолежащего плоского угла проведена плоскость. Докажите, что эти плоскости пересекаются по одной прямой.

358. Основание четырёхугольной пирамиды — параллелограмм. Докажите, что из боковых граней пирамиды можно составить тетраэдр.

359



359. Из вершин основания треугольной пирамиды в боковых гранях проведены высоты, и в каждой из боковых граней через основания двух лежащих в ней высот проведена прямая. Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости. (Можно считать, что плоские углы при вершине пирамиды отличны от 90° .)



360. Плоскость, проходящая через середины рёбер AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ делит ребро AD в отношении $3:1$, считая от вершины A . В каком отношении эта плоскость делит ребро BC ?

361. Точка M — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$. Точка N лежит на продолжении ребра AB за точку B , точка K — на продолжении ребра AC за точку C , причём $BN = AB$ и $CK = 2AC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит рёбра DB и DC ?

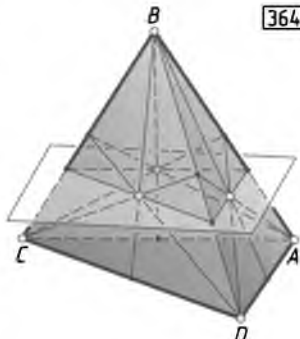
362. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M , N и K лежат на рёбрах AD , BC и DC соответственно, причём $AM:MD = 1:3$, $BN:NC = 1:1$ и $CK:KD = 1:2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

363. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Точки M , N , K — середины рёбер AB , BC и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1 ?

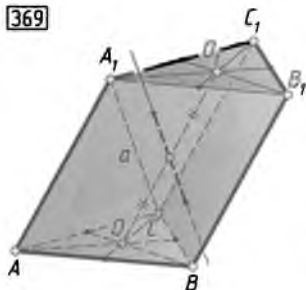
364. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан граней ABC , ABD и BCD тетраэдра $ABCD$, делит ребро BD ?

365. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — трапеция $ABCD$. Отношение оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середины рёбер SA и SB . В каком отношении эта плоскость делит ребро SC ?

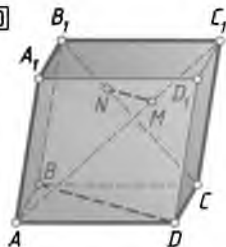
366. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — паралле-



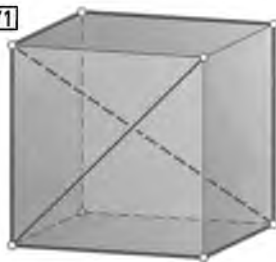
369



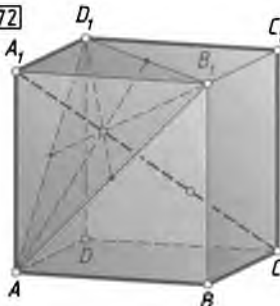
370



371



372



лограмм $ABCD$. Точки M , N и K лежат на рёбрах AS , BS и CS соответственно, причём $AM:MS=1:2$, $BN:NS=1:3$, $CK:KS=1:1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро SD ?

367. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым AC и SD . В каком отношении эта плоскость делит ребро SB ?

368. Через середины M и N рёбер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

369. В призме $ABCA_1 B_1 C_1$ медианы оснований ABC и $A_1 B_1 C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1 . Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1 . Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $CA_1 = a$.

370. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M , а на прямой $B_1 C$ — точка N , причём $MN \parallel BD$. Найдите отношение $MN:BD$.

II. Перпендикулярность в пространстве.

Теорема о трёх перпендикулярах.

Углы в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми

371. Диагональ куба перпендикулярна скрещивающейся с ней диагонали грани куба.

372. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ CA_1 перпендикулярна плоскости $AB_1 D_1$, проходит через центр треугольника

AB_1D_1 и делится его плоскостью в отношении 2:1, считая от вершины C .

373. Если боковые рёбра пирамиды равны, то её высота проходит через центр окружности, описанной около основания.

374. Если двугранные углы при основании треугольной пирамиды равны, то её высота проходит либо через центр вписанной, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

375. Для любых четырёх точек A, B, C, D пространства верно равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

376. Если ребро AB тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно ребру CD , а ребро BC — ребру AD , то ребро AC перпендикулярно ребру BD .

377. Высота тетраэдра проходит через точку пересечения высот противоположащей грани тогда и только тогда, когда противоположные рёбра попарно перпендикулярны.

378. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость этого угла.

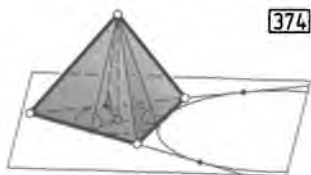
379. Геометрическое место точек пространства, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

380. Геометрическое место точек пространства, равноудалённых от вершин вписанного многоугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости этого многоугольника и проходящая через центр его описанной окружности.

381. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны одной и той же плоскости, то прямая их пересечения также перпендикулярна этой плоскости.



373



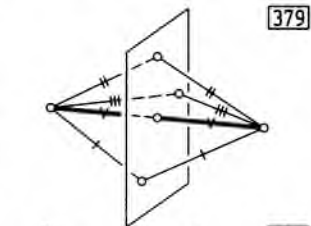
374



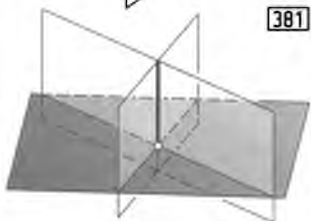
378



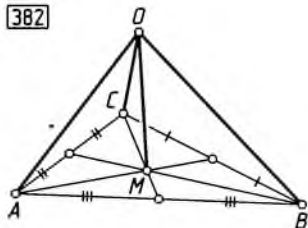
379



381



382



382. Формула Лейбница. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка пространства. Тогда

$$OM^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

383. Теорема косинусов для тетраэдра. Квадрат площади грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трёх остальных граней без удвоенных попарных произведений площадей этих граней на косинусы двугранных углов между ними, т. е.

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha_{12} - 2S_1S_3 \cos \alpha_{13} - 2S_2S_3 \cos \alpha_{23}.$$

384. 1) Уравнение плоскости «в отрезках». Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(p; 0; 0)$, $B(0; q; 0)$ и $C(0; 0; r)$ ($p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$), то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

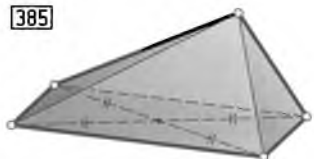
2) Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющему вектору), имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

3) Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

* * *

385



385. Основание пирамиды — прямоугольник. Докажите, что суммы квадратов противоположных боковых рёбер равны.

386. 1) Докажите, что сумма квадратов проекций всех рёбер куба с ребром a на любую плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна $8a^2$.

2) Докажите, что сумма квадратов проекций всех рёбер правильного тетраэдра с ребром a на любую плоскость не зависит от взаимного расположения тетраэдра и плоскости и равна $4a^2$.

387. Точка M равноудалена от двух пересекающихся прямых m и n . Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость прямых m и n лежит на биссектрисе одного из углов, образованных прямыми m и n .

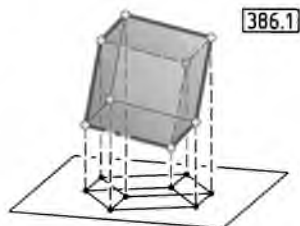
388. Даны скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α , перпендикулярная прямой a и пересекающая её в точке A . Докажите, что расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от точки A до ортогональной проекции b' прямой b на плоскость α , а угол между прямыми b и b' дополняет до 90° угол между прямыми a и b .

389. Рёбра BC и AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что высоты тетраэдра, проведённые из вершин B и C пересекаются, причём точка их пересечения лежит на общем перпендикуляре прямых AD и BC .

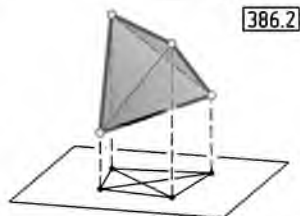
390. Диагональные сечения четырёхугольной пирамиды перпендикулярны. Докажите, что суммы квадратов площадей противоположных боковых граней равны.

391. Из точки в пространстве выходят четыре луча, образующие друг с другом равные углы. Найдите эти углы.

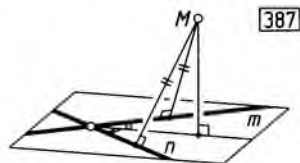
392. Двугранный угол при основании правильной n -угольной пирамиды



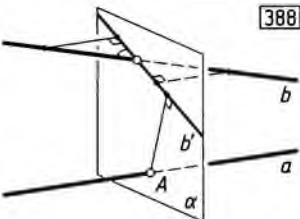
386.1



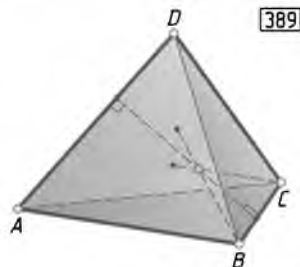
386.2



387



388

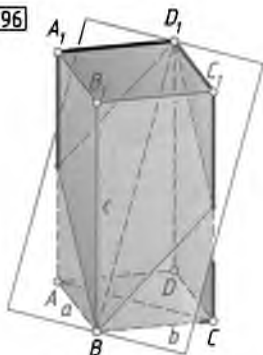


389



390

396



равен β . Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.

393. В правильной n -угольной пирамиде ($n=3, 4, 6$) найдите угол между соседними гранями и угол между апофемой и соседней боковой гранью, если угол бокового ребра с основанием равен 60° .

394. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром a . Найдите углы и расстояния между прямыми: 1) AA_1 и BD_1 ; 2) BD_1 и DC_1 ; 3) A_1D и D_1C . В каждом случае постройте общий перпендикуляр к указанным прямым.

395. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

396. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость, параллельная прямой AC . Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

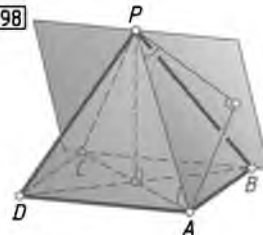
397. Каждая из боковых граней треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол в 60° . Стороны основания равны 10, 10, 12. Найдите объем пирамиды.

398. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDP$ угол между боковым ребром PA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром PA и плоскостью PBC . Найдите этот угол.

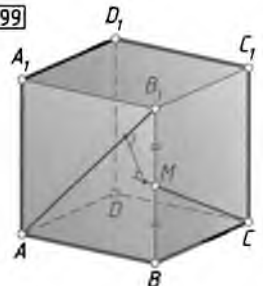
399. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, M — середина BB_1 . Найдите угол и расстояние между прямыми AB_1 и CM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

400. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника расположены соот-

398



399



400



ветственно в гранях P и Q острого двугранного угла и образуют с ребром этого двугранного угла острые углы, равные α и β соответственно. Найдите величину двугранного угла.

401. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Известно, что $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите отношение площади грани ADB к площади грани ADC .

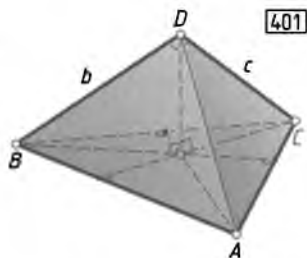
402. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 6. Найдите расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания, а также боковую поверхность пирамиды.

403. Основание пирамиды $ABCS$ — равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

404. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися медианами грани правильного тетраэдра с ребром a .

405. Основание четырёхугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 1, а один из двугранных углов при вершине равен 120° .

406. Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Плоскости граней



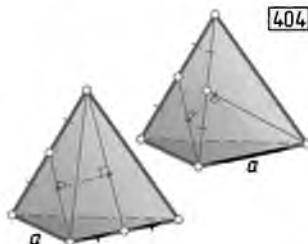
401



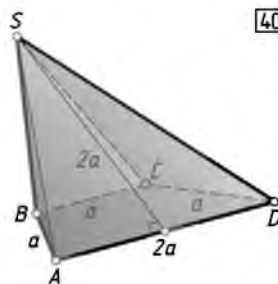
402

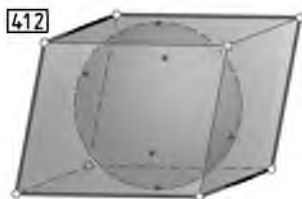
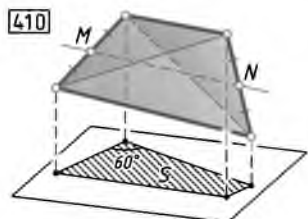
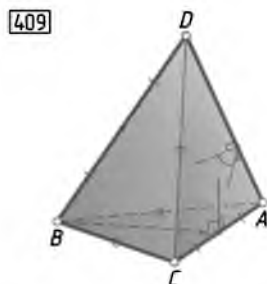
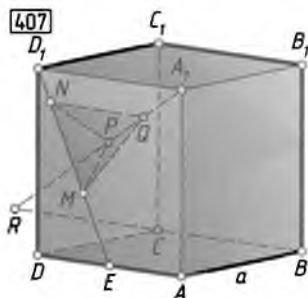


403



404





SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найдите высоту пирамиды, если высота грани SAD , проведённая из вершины S , равна $2a$.

407. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Точка E — середина ребра AD . Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1 , а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R . Найдите

1) отношение $BR:BC$;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

408. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C , причём $AB=10$ и $BC=22$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

409. В тетраэдре $ABCD$ двугранный угол при ребре AC равен 90° , $AB=BC=CD$, $BD=AC$. Найдите двугранный угол при ребре AD .

410. В правильном тетраэдре точки M и N — середины противоположных рёбер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, параллельную прямой MN , является четырёхугольник с площадью S , один из углов которого равен 60° . Найдите площадь поверхности тетраэдра.

III. Сфера, описанная около многогранника.

Сфера, вписанная в многогранник

411. Около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность.

412. В параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда все его грани равновелики.

413. Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу, причём центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что в основание пирамиды можно вписать окружность.

414. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине равен α . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

415. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер правильной n -угольной пирамиды ($n=3, 4, 6$), если сторона основания равна a , а угол боковой грани с плоскостью основания равен 60° .

416. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Точки M и K — середины рёбер AB и CD соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M, K, A_1 и C_1 .

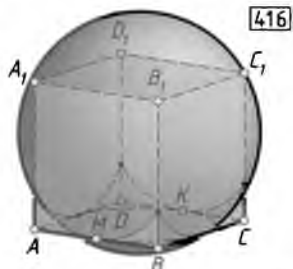
417. В пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A, B, C и середины боковых рёбер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре AB , и найдите высоту пирамиды.

418. Две грани тетраэдра — равнобедренные треугольники со стороной a . Две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр.

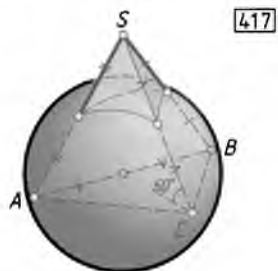
419. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC , $PB=6$, $AB=BC= \sqrt{15}$, $AC=2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP , касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние от центра O сферы до ребра AC .



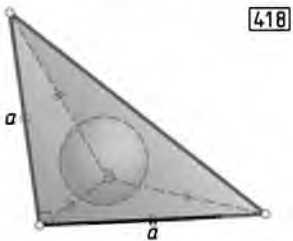
413



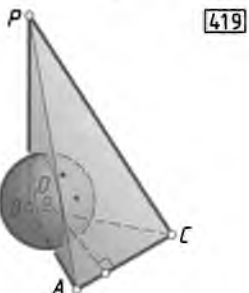
416



417

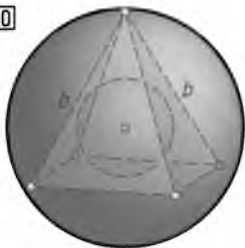


418



419

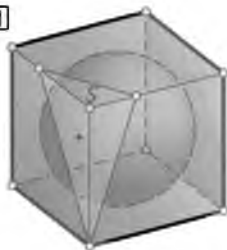
420



420. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b . Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если центры вписанной и описанной сфер совпадают.

421. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсекает от верхнего основания треугольник площади S . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

421



IV. Виды тетраэдров

Под тетраэдром понимается произвольная треугольная пирамида.

Каждая пара противоположных рёбер тетраэдра задаёт единственную пару параллельных плоскостей, содержащих эти рёбра. Шесть таких плоскостей задают параллелепипед. Будем говорить, что этот параллелепипед получен из тетраэдра построением стандартным образом.

422. **Равногранный тетраэдр.** Тетраэдр, все грани которого равны, называется *равногранным*. Тетраэдр равногранный тогда и только тогда, когда:

1) противоположные рёбра попарно равны;

2) параллелепипед, полученный из тетраэдра построением стандартным образом, прямоугольный;

3) все грани тетраэдра — равные остроугольные треугольники;

4) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, попарно перпендикулярны;

5) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны этим рёбрам;

6) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

422



7) развёртка тетраэдра на плоскость грани — треугольник;

8) точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с центром вписанной сферы;

9) точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с центром описанной сферы;

10) все грани равновелики;

11) все высоты тетраэдра равны;

12) сумма плоских углов при каждой из двух вершин равна 180° , а соединяющее эти вершины ребро равно противоположному ребру.

423—424. Ортоцентрический тетраэдр. Тетраэдр называется *ортоцентрическим*, если прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке.

423. Тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда:

1) противоположные рёбра попарно перпендикулярны;

2) все рёбра параллелепипеда, полученного из тетраэдра достроением стандартным образом, равны;

3) отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, равны;

4) суммы квадратов противоположных рёбер равны.

424. Прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра. Центр O описанной сферы, точка M пересечения медиан и точка H пересечения высот ортоцентрического тетраэдра лежат на одной прямой, причём M — середина отрезка OH .

425—426. Прямоугольный тетраэдр. Тетраэдр называется *прямоугольным*, если три его ребра с общей вершиной попарно перпендикулярны.

425. Обобщённая теорема Пифагора. Если боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, то сумма квадратов площадей боковых граней равна квадрату площади основания.



423



424



425

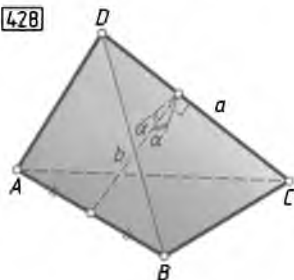
426



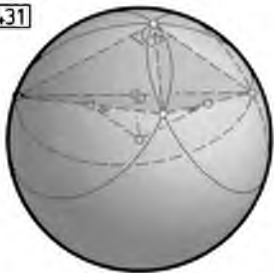
427, 433



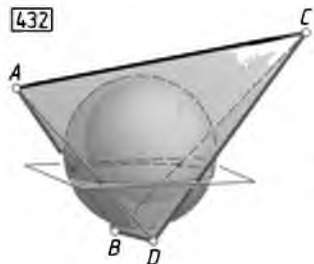
428



431



432



426. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Тогда вершина пирамиды, точка пересечения медиан и центр описанной около пирамиды сферы лежат на одной прямой.

427. Каркасный тетраэдр. Тетраэдр называется *каркасным*, если все его рёбра касаются некоторой сферы. Тетраэдр каркасный тогда и только тогда, когда суммы его противоположных рёбер равны.

* * *

428. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $CD=a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD , равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD . Найдите объём тетраэдра.

429. Противоположные рёбра тетраэдра попарно перпендикулярны. Докажите, что общие перпендикуляры каждой пары противоположных рёбер пересекаются в одной точке.

430. Высота равногранного тетраэдра равна h , а высота грани делится точкой пересечения высот этой грани на отрезки, равные h_1 и h_2 . Докажите, что $h^2 = 4h_1h_2$.

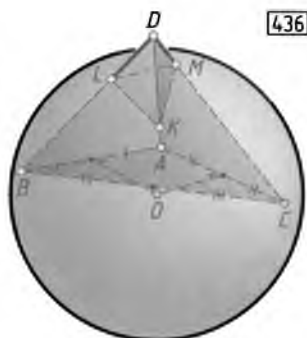
431. Докажите, что квадрат диаметра сферы, описанной около прямоугольного тетраэдра, равен:

- 1) сумме квадратов его боковых рёбер;
- 2) сумме квадратов двух любых скрещивающихся рёбер.

432. Сфера касается рёбер AD , AB , CD и CB тетраэдра $ABCD$. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

433. Сфера касается всех рёбер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных рёбер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

434. В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $AD=BC$. Найдите объём тетраэдра, если площадь грани BCD равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости ABC равно 3.



436

435. Все рёбра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер AB и CD , AC и BD , AD и BC , равны между собой, $\angle ABC=100^\circ$. Найдите отношение высот, опущенных из вершин A и B .

436. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A , B и C тетраэдра $ABCD$ и пересекает прямые AD , BD и CD в точках K , L и M соответственно. Известно, что $AD=10$, $BC:BD=3:2$ и $AB:CD=4\sqrt{3}:11$. Проекциями точки O на плоскости ABD , BCD и CAD являются середины рёбер AB , BC и AC соответственно. Расстояние между серединами рёбер AB и CD равно 13. Найдите периметр треугольника KLM .



437

437. Найдите радиус сферы, касающейся всех рёбер правильного тетраэдра с ребром a .

438. Сфера радиуса r касается всех рёбер треугольной пирамиды. Центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что пирамида правильная и найдите её высоту, если известно, что центр сферы удалён от вершины пирамиды на расстояние $r\sqrt{3}$.



438

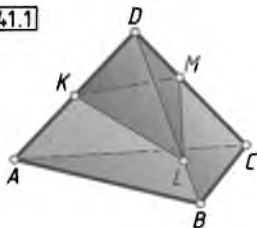
439. Сфера касается рёбер AS , BS , BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L , M и N соответственно. Найдите отрезок KL , если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.

440



440. В трёхгранный угол, все плоские углы которого равны α , помещена сфера так, что она касается всех рёбер трёхгранного угла. Грани трёхгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса r . Найдите радиус сферы.

441.1



V. Объём многогранника.

Отношение объёмов. Метод объёмов

441. 1) Если точки K , L и M лежат на рёбрах соответственно DA , DB и DC тетраэдра $ABCD$ или на их продолжениях, то

$$\frac{V_{KLMD}}{V_{ABCD}} = \frac{DK}{DA} \cdot \frac{DL}{DB} \cdot \frac{DM}{DC}.$$

2) Если отрезок MN лежит на прямой AB , а отрезок PQ — на прямой CD , то

$$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN}{AB} \cdot \frac{PQ}{CD}.$$

442. Плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер любой треугольной пирамиды, делит её объём пополам.

443. Если противоположные рёбра тетраэдра объёма V равны a и b , расстояние между содержащими их прямыми равно c , а угол между прямыми равен α , то

$$V = \frac{1}{6} abc \sin \alpha.$$

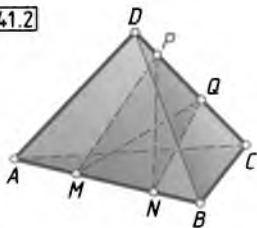
444. Если площади двух граней тетраэдра объёма V равны P и Q , их общее ребро равно a , а угол между ними равен φ , то

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{PQ \sin \varphi}{a}.$$

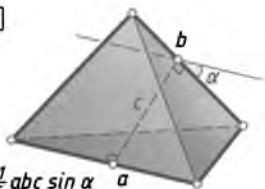
445. Объём призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

446. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади

441.2



443



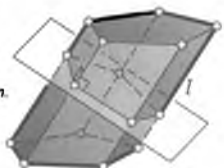
$$V = \frac{1}{6} abc \sin \alpha$$

444



$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{PQ \sin \varphi}{a}$$

445



$$V = l S_{\text{перп.}}$$

боковой грани на расстояние от неё до противоположного бокового ребра.

447. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре тетраэдра делит противоположащее ребро на отрезки, пропорциональные площадям граней, образующих этот угол.

448. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Все боковые рёбра равны. Плоскость пересекает боковые рёбра пирамиды, отсекая на них отрезки a , b , c и d (в порядке обхода и считая от общей вершины). Докажите, что

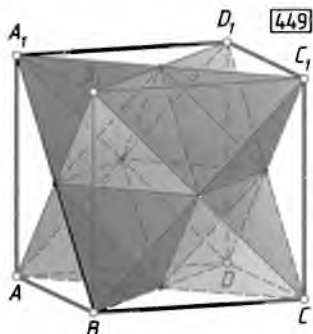
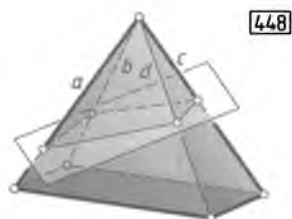
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

449. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите объём общей части треугольных пирамид $ACB_1 D_1$ и $A_1 C_1 B D$.

450. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. В каком отношении плоскость, проходящая через ребро AB и середину M ребра SC , делит объём пирамиды?

451. На ребре DC тетраэдра $ABCD$ взята точка N , причём $CN = 2DN$, а на продолжениях рёбер CA и CB за точки A и B соответственно — точки K и M , причём $AC = 2AK$ и $MB = 2BC$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N и K , делит объём тетраэдра $ABCD$?

452. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка N — середина ребра AP , точка K — середина медианы PL треугольника BPC , точка M лежит на ребре PB , причём $PM = 5MB$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объём пирамиды $PABCD$?



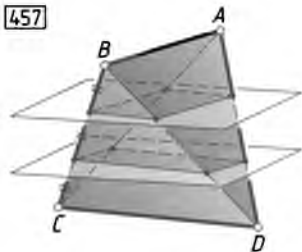
455



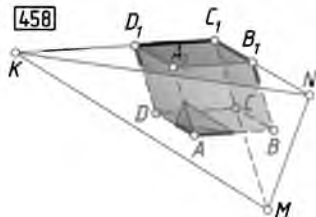
456



457



458



453. На рёбрах BC и DC тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки N и K , причём $CN = 2BN$, $DK : KC = 3 : 2$; M — точка пересечения медиан треугольника ABD . В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объём тетраэдра $ABCD$?

454. Основание пирамиды $PABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На рёбрах AB и PC взяты соответственно точки K и M , причём $AK : KB = CM : MP = 1 : 2$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K и M параллельно прямой BD , делит объём пирамиды $PABCD$?

455. Найдите объём многогранника, полученного в пересечении тетраэдра объёма V со своим образом при симметрии относительно середины высоты.

456. В каком отношении делит объём куба плоскость, перпендикулярная его диагонали и делящая диагональ в отношении: 1) $2 : 1$; 2) $3 : 1$?

457. Две плоскости, параллельные противоположным рёбрам AB и CD тетраэдра $ABCD$, делят ребро BC на три равные части. Какая часть объёма тетраэдра заключена между этими плоскостями?

458. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. На лучах $C_1 C$, $C_1 B_1$ и $C_1 D_1$ отложены отрезки $C_1 M$, $C_1 N$ и $C_1 K$, равные соответственно $\frac{5}{2} C_1 C$, $\frac{5}{2} C_1 B_1$, $\frac{5}{2} C_1 D_1$.

В каком отношении плоскость, проходящая через точки M , N , K , делит объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?

459. Грани ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ образуют двугранный угол α , а их площади равны P и Q . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро AB и центр вписанной в тетраэдр сферы.

460. Известно, что если поверхность некоторого тетраэдра $ABCD$ разрезать вдоль рёбер AD , BD и CD , то его развёрткой на плоскость ABC будет квадрат со стороной a . Найдите объём тетраэдра.



461. M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые A_1C , B_1M и BN попарно перпендикулярны. Найдите объём параллелепипеда, если известно, что $A_1C = a$, $B_1M = b$, $BN = c$.

462. Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а площади боковых граней равны S , P и Q . Найдите радиус вписанного шара. Найдите также радиус шара, касающегося основания и продолжений боковых граней пирамиды.

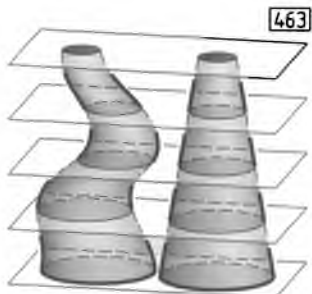


VI. Круглые тела.

Комбинации круглых тел и многогранников.

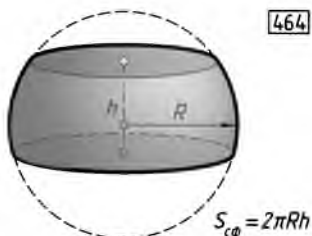
Объём и площадь поверхности

463. *Принцип Кавальери.* Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной, пересекает эти два тела по равновеликим фигурам, то объёмы тел равны.



Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной, пересекает эти два тела по фигурам, отношение площадей которых равно k , то отношение объёмов тел также равно k .

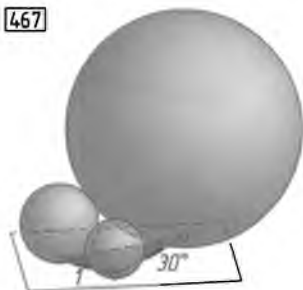
464. Сферическая поверхность шарового слоя (части шара, заключённой между двумя параллельными секущими плоскостями) равна $2\pi R h$, где R — радиус шара, h — высота шарового слоя (расстояние между секущими плоскостями).



466



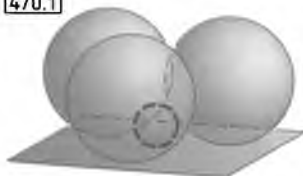
467



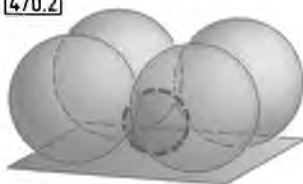
468



470.1



470.2



471.1



* * *

465. Можно ли точку в пространстве заслонить четырьмя шарами?

466. Выведите формулы объёмов шара и шарового сегмента с помощью принципа Кавальери.

* * *

467. Три сферы попарно касаются внешним образом, а также касаются некоторой плоскости в вершинах прямоугольного треугольника с катетом 1 и противолежащим углом 30° . Найдите радиусы сфер.

468. Две противоположные вершины единичного куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные вершины расположены на боковой поверхности цилиндра. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

469. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° . Внутри конуса расположены три сферы радиуса 1. Каждая сфера касается двух других, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите радиус основания конуса.

470. 1) Три сферы радиуса R попарно касаются между собой и некоторой плоскости. Найдите радиус сферы, касающейся внешним образом данных сфер и той же плоскости.

2) Четыре сферы радиуса R расположены по одну сторону от плоскости и касаются её в вершинах квадрата со стороной $2R$. Найдите радиус сферы, касающейся внешним образом данных сфер и той же плоскости.

471. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются. Найдите:

1) радиус сферы, касающейся всех четырёх сфер;

2) высоту цилиндра, содержащего эти сферы так, что три из них касаются

одного основания и боковой поверхности, а четвёртая — другого основания цилиндра;

3) высоту конуса, содержащего эти сферы так, что все они касаются боковой поверхности и три из них — основания конуса.

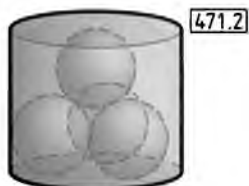
472. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

473. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Вершины A , B и D_1 лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого параллельна прямой DC_1 . Найдите радиус основания цилиндра.

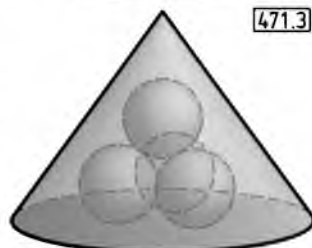
474. Три конуса, радиусы оснований которых равны R и составляют $\frac{3}{4}$ высот, расположены по одну сторону от плоскости α , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого двух из этих конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости α , так и всех трёх конусов.

475. Три равных конуса с углом α ($\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$) при вершине осевого сечения имеют общую вершину и касаются друг друга внешним образом по образующим k , l , m . Найдите угол между образующими l и k .

476. Высота цилиндра равна $3r$. Внутри цилиндра расположены три сферы радиуса r , причём каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера — верхнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.



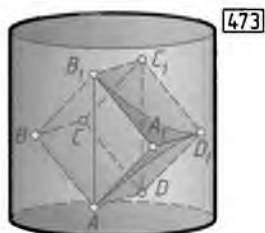
471.2



471.3



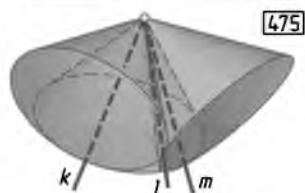
472



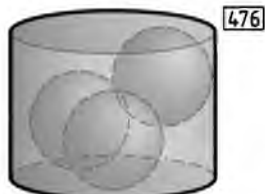
473



474

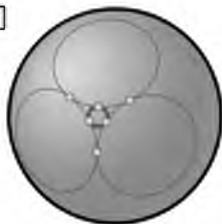


475

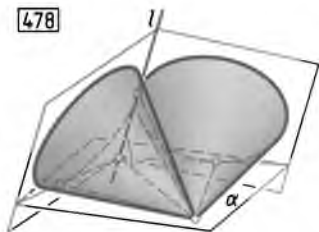


476

477



478



479



482



483



477. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найдите радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

478. Два равных конуса с общей вершиной касаются друг друга и некоторой плоскости α . Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Найдите угол между прямой l и плоскостью α , если высота каждого конуса вдвое больше радиуса основания.

479. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол в осевом сечении каждого из конусов равен 60° . Найдите угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через общую образующую.

480. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине каждого конуса.

481. Одна вершина правильного тетраэдра расположена на оси цилиндра, а другие вершины — на боковой поверхности цилиндра. Найдите ребро тетраэдра, если радиус основания цилиндра равен R .

482. Все вершины правильной пирамиды $PABCD$ с основанием $ABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости PAB . Найдите радиус основания цилиндра, если $AB = a$.

483. Найдите объём общей части двух бесконечных прямых круговых цилиндров радиуса a , оси которых пересекаются под прямым углом.

VII. Геометрические неравенства.

Задачи на максимум и минимум

484. Теорема об угле прямой с плоскостью. Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

485. Площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трёх остальных его граней.

486. Если один выпуклый многогранник расположен внутри другого, то площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

487. Теорема косинусов для трёхгранного угла. Пусть α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла $SABC$ с вершиной S , противолежащие рёбрам SA, SB, SC соответственно; A — двугранный угол при ребре SA . Тогда

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

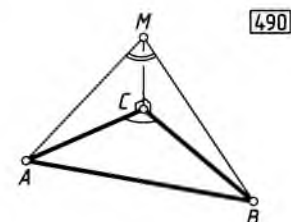
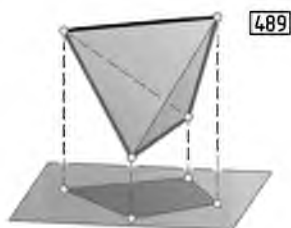
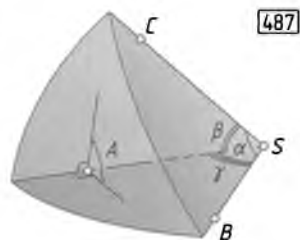
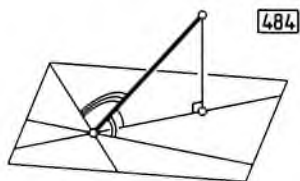
* * *

488. Ребро правильного тетраэдра равно a . Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что периметр P сечения удовлетворяет неравенствам $2a < P \leq 3a$.

489. Докажите, что ортогональная проекция правильного тетраэдра на плоскость имеет наибольшую площадь, если эта плоскость параллельна противоположным рёбрам тетраэдра.

490. Пусть MC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Верно ли, что $\angle AMB < \angle ACB$?

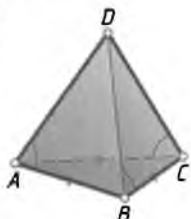
491. Докажите, что сумма внутренних двугранных углов трёхгранного угла больше 180° и меньше 540° .



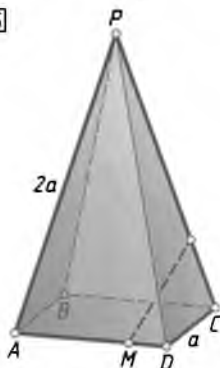
493



494



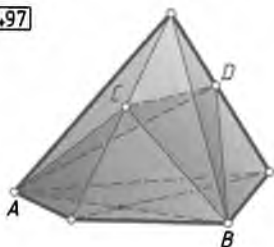
495



496



497



492. Все двугранные углы некоторого трёхгранного угла — острые. Докажите, что все его плоские углы — также острые.

493. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с рёбрами углы α , β , γ . Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

494. Основание пирамиды $ABCD$ — равносторонний треугольник ABC . Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = \angle ACD$. Докажите, что пирамида правильная.

* * *

495. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $ABCDP$ равна a , а боковые рёбра равны $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на рёбрах AD и PC , параллельные плоскости PAB .

1) Один из этих отрезков проведён через точку M ребра AD такую, что $AM : AD = 3 : 4$. Найдите его длину.

2) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

496. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$. Найдите наибольший возможный угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1 .

497. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырёхугольной пирамиды, ребро CD параллельно другой диагонали этого основания, а концы его лежат на боковых рёбрах пирамиды. Найдите наименьший возможный объём пирамиды, если объём тетраэдра равен V .

498. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен V , угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 30° . Рассматриваются правильные треугольные призмы, вписанные в пи-

раמידу так, что одно из боковых рёбер лежит на диагонали основания пирамиды, одна из боковых граней параллельна основанию пирамиды, и вершины этой грани лежат на боковых гранях пирамиды. Найдите:

1) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении 2:3, считая от вершины;

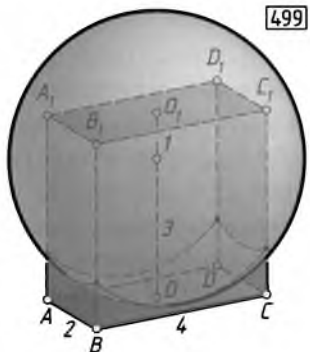
2) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

499. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$ и $BC=4$. Высота OO_1 параллелепипеда равна 4 (O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно). Сфера радиуса 3 с центром на высоте OO_1 касается плоскости основания. Найдите сумму квадратов расстояний от точки, принадлежащей сфере, до всех вершин параллелепипеда при условии, что она максимальна.

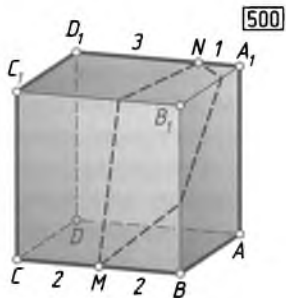
500. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4. На середине ребра BC взята точка M , а на ребре $A_1 D_1$ на расстоянии 1 от вершины A_1 взята точка N . Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.



498



499



500

120. Указание. Совместите берега реки, чтобы точки M и N совпали. **122.** 1) $60^\circ \leq \alpha < 180^\circ$; 2) $0^\circ < \alpha \leq 60^\circ$; 3) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. **128. Указание.** Рассмотрите окружность, диаметр которой — отрезок с концами в вершинах двух других углов. **130.** 4 или 5. **Указание.** Рассмотрите выпуклый четырёхугольник, вершины которого совпадают с вершинами многоугольника. Далее см. задачу 114. **131. Указание.** Рассмотрите симметрию относительно биссектрисы угла C . **132. Указание.** Пусть $ABCD$ — четырёхугольник с данными диагоналями и данным углом между ними. Рассмотрите параллелограммы $ABDM$, $CBDK$ и $ACKM$ и покажите, что периметр $ABCD$ минимален, если вершина D совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ACKM$. **134. Указание.** Если при каком-нибудь разбиении точек на пары разноцветных два отрезка пересекаются, то сумму длин всех отрезков можно уменьшить (см. задачу 114). **135. Указание.** Рассмотрите симметрию относительно прямой MK . Далее постройте вспомогательную окружность. **136.** $75\sqrt{3}$. **138.** 1) **Указание.** Продолжите перпендикуляры до пересечения с прямой BC . **139. Указание.** Докажите, что диагональ одного параллелограмма и диагональ второго делят друг друга пополам. **141. Указание.** Если AE и BD — биссектрисы треугольника ABC с углом 120° при вершине B , то BE — биссектриса угла DBK , смежного с углом ABD . **162. Указание.** Проведите из вершины D медиану треугольника CDE . **164. Указание.** Отметьте середину отрезка AD . **171.** $|a - b| \sin \frac{\alpha}{2}$, $|a - b| \cos \frac{\alpha}{2}$, $|a - b|$. **172.** 30° , 60° , 90° . **173.** $a + b$. **174.** 6. **175.** $\sqrt{4p^2 - q^2}$. **176.** 60° . **180. Указание.** См. задачу 177. **183. Указание.** Точки A , B , C и O лежат на одной окружности. **192. Указание.** Через вершину A проведите касательную к описанной окружности треугольника ABC . **193.** 3) **Указание.** См. задачу 192. **210. Указание.** См. задачу 193.2. **212. Указание.** Точки B , O , D и E лежат на одной

окружности. 214. Указание. Примените теорему об угле между касательной и хордой. 216. Указание. Пусть точка N лежит на стороне AC . Тогда точки P , N , C и центр вписанной окружности треугольника ABC лежат на одной окружности. 217. 36° , 36° , 108° . 218. 30° , 60° , 90° . Указание. Пусть F — проекция точки E на AB . Докажите, что точки K , F , B , C и D лежат на одной окружности. 219. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. 220. 1) 45° или 135° ; 2) 60° или 120° .

221. 90° ; $22,5^\circ$; $67,5^\circ$. Указание. См. задачу 193. 222. 1) 17; 2) 340. 237. Указание. Проекция центра окружности с диаметром AB на хорду MN есть середина проекции диаметра AB на MN . 238. Окружность без точки. 239. 1. Указание. Искомая окружность вписана в треугольник с вершинами в точках касания данных окружностей. 240. 3) $\frac{a}{2}$. Указание. Примените

формулу Герона. 4) Указание. Если R и r — радиусы данных полуокружностей S_1 и S_2 , то радиусы обеих окружностей равны $\frac{Rr}{R+r}$. 241. 6. 242. $\frac{2rR}{R-r}$. 258. Указание. Произведение основания на высоту для данного треугольника постоянно.

259. Указания. 1) $\frac{abc}{de} = \frac{\left(\frac{ab}{d}\right) \cdot c}{e}$; 2) $\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{t \sqrt{\left(\frac{a^2}{t}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{t}\right)^2}}$,

где t — произвольный отрезок. 260. Неверно. 261. Указание. Каждый из указанных отрезков составляет одну и ту же часть от основания трапеции. 263. Указание. Через вершину A проведите прямую, параллельную стороне BC , и продолжите BP и CQ до пересечения с ней в точках G и H . Применив теорему Чевы к треугольнику ABC , докажите, что $AG = AH$. 264. Указание. Точки C , M , H , N лежат на одной окружности. 265. Указание. Из равенства $AO \cdot AM = AK \cdot AL$ следует, что точки K , L , M и O лежат на одной окружности. 266. Указание. Треугольник OKE подобен треугольнику AKO . 267. Указание. Проведите диагональ четырёхугольника. 268. Указание. Сумма периметров отсечённых треугольников равна периметру данного треугольника. 269. Указание. Применив метод вспомогательной окружности, докажите, что MQ и NP — высоты треугольника NOM . 270. Указание. В прямоугольном треугольнике AB_2C отрезок B_2B_1 — высота, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $AB_2^2 = AC \cdot AB_1$. 271. 10. 272. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 273. $\frac{5a}{8}$. 274. $\frac{ac}{b}$.

275. $\sqrt{ab}$. 276. 1) $\sqrt{rR}$; 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$. Указание. Примените теорему

синусов. 277. $\sqrt{ab}$. 278. $\sqrt{ab}$. 279. $\sqrt{3}$. 289. Отрезок, соединяющий середины оснований. 294. 2) *Указание*. См. задачу 267. 295. *Указание*. Через данную точку проведите прямые, параллельные сторонам треугольника. 296. $\frac{d}{3}$. 297. $\frac{1}{7}$. 298. r^2 . 310. 1. 311. $\sqrt{3}$. 312. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 351. *Указание*. Примените теорему Менелая. 354. Не может. 356. *Указание*. Рассмотрите прямые пересечения плоскостей противоположных граней. 359. *Указание*. Через вершину пирамиды проведите касательную плоскость к описанной сфере. 360. 3:1. 361. 2:1; 3:2. 362. 2:3. 363. 1:5; 3:7. 364. 1:2. 365. 2:1. 366. 6:7. 367. 1:3. 368. 5:1. 369. $\frac{2}{3}a$. 370. 1:3. 390. *Указание*. Примените теорему косинусов для тетраэдра, см. задачу 383. 391. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. 392. $2 \arccos\left(\sin \beta \sin \frac{180^\circ}{n}\right)$. 393. $2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \arccos \frac{5}{13}$ и $\arcsin \frac{3\sqrt{3}}{13}$ при $n=3$; $2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$ и $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{7}$ при $n=4$; $2 \operatorname{arctg} 2 = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ и $\arcsin \frac{1}{5}$ при $n=6$. 394. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 395. $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$. 396. $\operatorname{arctg} \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. 397. $48\sqrt{3}$, $192\sqrt{3}$, $128\sqrt{3}$, $128\sqrt{3}$. 398. $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$. 399. $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{CY}{YM}=10:1$ (Y вне отрезка CM). 400. $\arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta)$. 401. $\frac{b}{c}$. 402. 4,8; $72 + 24\sqrt{2}$. 403. 45° ; $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 404. $\arccos \frac{2}{3}$ и $\frac{a}{\sqrt{10}}$; $\arccos \frac{1}{6}$ и $a\sqrt{\frac{2}{35}}$. 405. $\frac{1}{3}$. 406. a . 407. 1) 2:1; 2) $a\sqrt{\frac{2}{15}}$. 408. 12. 409. 60° . 410. $3S\sqrt{2}$. 414. $\frac{b}{2\sqrt{\cos \alpha}}$. 415. $\frac{7a}{12}$ и $\frac{a}{6}$ при $n=3$; $\frac{5a}{4\sqrt{3}}$ и $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ при $n=4$; $\frac{13a}{12}$ и $\frac{a}{2}$ при $n=6$. 416. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$. 417. $\sqrt{3}$. 418. $\frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+2)} = \frac{a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}$. 419. $\frac{24}{6+\sqrt{15}}$. 420. $2b^2$. 421. $\frac{1}{2} - S$. 422. 10) *Указание*. Рассмотрите ортогональную проекцию тетраэдра на плоскость, перпендикулярную его ребру. 428. $\frac{1}{3}ab^2 \operatorname{tg} \alpha$. 434. 400. 435. $\sqrt{3} \operatorname{tg} 50^\circ$. 436. $41 \left(\frac{\sqrt{105}}{55} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{22} \right)$. 437. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. 438. $\frac{4}{3}r\sqrt{3}$. 439. 9. 440. $\frac{2r \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$. 447. *Указа-*

ние. См. задачу 444. 449. $\frac{1}{6}$. 450. 3:5. 451. 3:32. 452. 25:227. 453. 37:68. 454. 11:7. 455. $\frac{2}{9}V$. 456. 1) 5:1; 2) 119:9. 457. $\frac{13}{27}$. 458. 1:47. 459. $\frac{2PQ}{P+Q} \cos \frac{\alpha}{2}$. 460. $\frac{a^3}{24}$. 461. $\frac{1}{2}abc$. 462. $\frac{\sqrt{2SPQ}}{S+P+Q+\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$; $\frac{\sqrt{2SPQ}}{S+P+Q-\sqrt{S^2+P^2+Q^2}}$. 465. Можно. Указание. Поместите данную точку внутрь тетраэдра. 467. $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 468. $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 469. $\frac{5}{\sqrt{3}}$. 470. 1) $\frac{R}{3}$; 2) $\frac{R}{2}$. 471. 1) $\sqrt{\frac{3}{2}} \pm 1$; 2) $2\sqrt{\frac{2}{3}} + 2$; 3) $1 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{3}$. 472. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. 473. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. 474. $\frac{2R(2\sqrt{3}-3)}{3}$. 475. $2 \arcsin\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$. 476. $\frac{r(3\sqrt{2}+4)}{4}$. 477. $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$. 478. 60° . 479. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos \frac{1}{3}$. 480. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{7}} = \arccos \frac{1}{7}$. 481. $R\sqrt{3}$ или $\frac{R\sqrt{11}}{3}$. Указание. Рассмотрите ортогональную проекцию тетраэдра на ось цилиндра. 482. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 483. $\frac{16}{3}a^3$. Указание. Рассмотрите шар радиуса a с центром в точке пересечения осей цилиндров; затем примените принцип Кавальери. 488. Указание. Рассмотрите развёртку тетраэдра. 490. Неверно. 491. Указание. Примените теорему о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла к трёхгранному углу, рёбра которого соответственно перпендикулярны граням данного (к полярному углу трёхгранного угла). 492. Указание. С помощью теоремы косинусов для трёхгранного угла (см. задачу 487) выразите косинусы плоских углов трёхгранного угла через косинусы его двугранных углов. 495. 1) a ; 2) $\frac{a\sqrt{15}}{4}$. 496. $\arcsin \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 497. $4V$. 498. 1) $\frac{9}{125}V$; 2) $\frac{1}{12}V$. 499. 200. Указание. Примените метод координат. 500. $\sqrt{61}$. Указание. Рассмотрите развёртки куба.

ПРИЛОЖЕНИЕ Соответствие номеров задач в книге
и системе «Задачи по геометрии» <http://zadachi.mccme.ru/>

1	1092	452	114	3550	27	4777	3207	359	8440	429	7809	
	1093	4259	115	3266	178	114	115	295	6134	360	8401	
	1094	2730	116	3587	179	1772	234	4708	296	3011	361	7112
2	1016	43	1963	117	3589	180	28	235	708	297	3030	
	1018	44	4255	118	3222	181	25	236	520	298	4368	
3	1002	3018	122	3223	182	33	237	4793	299	364	364	
4	514	45	3000	119	530	34	238	1992	300	1911	365	
	670	3007	120	5504	183	52	239	380	37	366	7121	
5	874	47	2402	121	5004	184	742	240	503	38	367	
	1000	48	2403	5006	5950	450	132	368	7118	437	7097	
	1198	49	2404	122	1197	185	17	4832	131	7131	438	
	1304	50	2405	123	1792	186	6700	241	3375	4129	369	
6	937	51	1131	124	5010	187	6703	242	106	169	370	
	7	1146	53	1148	125	6700	187	788	243	1597	4120	
8	1019	56	2604	126	4160	188	126	244	1513	301	5706	
9	1138	57	2400	127	3575	189	5046	245	19	302	730	
10	1179	58	2608	4779	1257	246	413	303	2859	375	7257	
	1181	61	1966	128	994	1334	247	791	304	4773	376	
11	4268	1986	129	142	4516	248	1622	305	171	377	8178	
	3499	62	1205	130	3549	4785	249	1621	306	130	379	
12	1096	63	2889	131	5142	190	5044	250	6149	307	790	
	1097	64	2406	132	3597	191	20	251	1552	308	839	
13	1098	65	1738	133	3522	192	480	4284	309	162	382	
14	1097	66	8005	134	3582	193	1638	252	444	163	383	
16	1044	8006	135	4330	533	253	2444	310	72	388	8406	
17	1880	67	8002	136	3866	4305	254	2844	311	505	389	
18	1204	8003	137	4770	194	84	255	122	312	116	390	
19	1207	68	8004	1752	195	57	256	1539	313	5705	391	
20	1109	8007	138	1370	196	157	1540	314	1320	392	7657	
21	1928	69	8008	139	1057	197	128	6262	315	5107	393	
22	1912	8009	140	1050	198	174	6265	316	5112	394	7173	
	1913	8012	141	1119	199	83	257	2546	317	6710	7174	
	1914	8011	142	1043	200	995	258	2468	318	6434	7175	
	1915	9105	143	1945	201	2445	259	2609	319	4550	395	
23	1676	70	7138	144	1024	1343	2549	321	5708	396	7176	
	1677	71	8000	3019	1347	260	1042	323	5038	397	7168	
	1678	73	7700	145	2169	203	1707	262	1625	325	5097	
	1679	7702	146	1286	204	13	263	1296	326	5507	400	
	1689	7701	147	1939	205	86	264	997	327	5509	401	
24	1142	7704	148	1226	206	2450	265	4796	5510	402	7171	
25	1130	7709	1512	2451	266	121	328	5511	403	7554	471	
26	8	7703	3342	207	2467	267	1655	329	5518	404	7570	
27	1256	7706	3034	208	183	268	996	330	6712	7569	7525	
28	1735	7707	149	1227	209	2498	269	357	331	6715	405	
	1724	74	7710	150	2462	2499	270	1632	332	2502	406	
	1180	8093	151	1228	210	2466	271	3842	333	6413	407	
	1140	75	7428	1229	211	1706	272	1324	334	2503	408	
29	217	7431	152	1232	212	55	273	78	2509	409	8208	
30	310	84	8383	153	1209	213	532	274	70	335	6410	
31	1758	8358	1210	214	700	275	1338	336	6032	411	7181	
	1760	85	7000	154	1905	215	526	276	138	337	4833	
32	87	86	7040	155	2489	216	58	277	117	338	6005	
	1	88	9107	156	2470	217	1702	278	120	339	168	
	12	7904	157	22	218	167	279	44	340	6007	415	
33	6	89	7185	159	5049	219	1366	280	4020	341	6030	
	49	96	4500	160	1206	220	5047	392	6031	417	7190	
34	313	97	4504	161	2857	5048	281	6144	6033	418	7187	
35	1059	98	4505	162	1280	221	85	282	1877	342	4283	
36	1289	102	7565	163	1274	222	1435	4024	343	6428	420	
	1290	103	7561	164	4517	1434	283	3013	344	802	421	
	1291	104	7565	165	1121	223	362	284	4518	345	6038	
37	1509	105	3499	166	1041	224	6402	3033	347	7108	7268	
38	2627	106	4268	167	1261	225	4805	285	4191	348	7212	
	93	107	3606	168	179	226	385	286	3027	349	8018	
40	2729	108	127	169	1358	227	5365	287	4021	350	7232	
	1972	109	3516	170	1995	228	4776	288	3159	351	9106	
	574	110	3504	171	1418	229	2	3220	352	7106	7273	
	2728	3505	172	1430	230	89	289	3215	353	7225	424	
41	4253	5477	173	1874	231	2457	290	3100	354	7102	425	
	4011	111	3515	174	2039	232	386	291	59	355	7104	
	4014	112	3509	175	145	233	2473	292	3031	356	7107	
	23	113	3510	176	3865	2474	293	3028	357	7111	7337	
42	4254	3503	177	26	112	294	3205	358	7152	428	7279	

ISBN 978-5-4439-2681-0



9 785443 926810 >

